KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BULANIK BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

LEVENT ÖZÇELİKMAN

KOCAELİ 2016

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BULANIK BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLENİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

LEVENT ÖZÇELİKMAN

Yrd.Doç.Dr. M. Aylin BAYRAK
Danışman, Kocaeli Üniv. ....

Prof.Dr. Emine CAN
Jüri Üyesi, İstanbul Medeniyet Üniv. ....

Yrd.Doç.Dr. Hülya KODAL SEVİNDİR
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv. ....

Tezin Savunulduğu Tarih: 19.02.2016

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bulanık başlangıç değer problemlerin sayısal çözümlerini elde etmek için kullanılan Homotopi Analiz Yöntemi, yakınsaklık bölgesini ayarlayıp daha az hesaplama gerektirdiğinden etkili ve kullanışlı bir yöntemdir.

Bu konuda bana çalışma fırsatı veren değerli hocama teşekkür ederim. Ayrıca hayatım boyunca beni destekleyen aileme de sonsuz minnet duygularımı sunarım.

Ocak – 2016 Levent ÖZÇELİKMAN

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR DİZİNİ

BULANIK BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

ÖZET

Bu çalışmada ikinci mertebeden bulanık başlangıç değer problemi kuvvetli genelleştirilmiş türev altında Homotopi Analiz Metodu ile ele alınmıştır. Yaklaşık çözüm hızla yakınsayan seriler şeklinde oluşturulan kolayca hesaplanan parçalar şeklinde elde edilir. Homotopi Analiz Metodu yardımcı parametre içermesine rağmen seri çözümün yakınsaklık bölgesi basit bir şekilde kontrol edilebilir. Önerilen metodun kesinliğini ve uygulanabilirliğini örneklendirmek için numerik örnek sunulmuştur.

Anahtar kelimeler: Bulanık Başlangıç Değer Problemi, Genelleştirilmiş Türev, Homotopi Analiz Metodu.

NUMERICAL SOLUTION OF FUZZY INITIAL VALUE PROBLEM

ABSTRACT

In this study, a second order fuzzy initial value problem under strongly generalized differentiability by means of the Homotopy Analysis method (HAM) is considered. Approximate solution in the form of a rapidly convergent series with easily computable components is provided. Although the homotopy analysis method (HAM) contains the auxiliary parameter, the convergence region of the series solution can be controlled in a simple way. To illustrate the accuracy and applicability of the proposed method numerical example is presented.

Keywords: Fuzzy Initial Value Problem, Generalized Differentiability, Homotopy Analysis Method.

GİRİŞ

Adi diferansiyel denklemler ile modellenmiş bir süreçte bazı veri girişleri varsa o zaman bu süreç doğal olarak bulanık diferansiyel denklemler (BDD) ile modellenir. Son yıllarda birçok araştırmacı tarafından geniş bir alanda örneğin, popülasyon [1], quantum optiği ve yerçekimi [2], tıp [3, 4], senkronize hyperchaotic sistemler [5], parçacık sistemleri [6], karmaşık sistemler [7] ve mühendislik problemlerinde [8] kullanılmakta ve hızlı bir şekilde gelişmektedir.

Bulanık diferansiyel denklemlerin (BDD) esas dayanağı bulanık küme ve bulanık türev kavramlarıdır. Bulanık küme kavramı Zadeh tarafından önerilmiştir [9]. Bulanık türev kavramı ise Zadeh ve Chang [10] tarafından geliştirilmiştir. Daha sonra bulanık-değerli fonksiyonların diferansiyel analizi Dubois ve Prade [11], Puri ve Ralescu [12] tarafından genişletme ilkesi kullanılarak incelenmiştir. 1987'de Kandel ve Byatt [13] ilk olarak bulanık dinamik problemlerin analizine bulanık diferansiyel denklem (BDD) kavramını uygulamıştır.

Pratik problemlerin çoğunluğu, başlangıç veya sınır değer problemini sağlayan bir bulanık diferansiyel denklem (BDD) çözümünü gerektirmektedir. Bulanık diferansiyel denklem (BDD) ve başlangıç değer (Cauchy) problemi, Kavela [14,15], Seikkala [16], He and Yi [17], Kloeden [18] tarafından incelenmiştir. Birçok bulanık başlangıç veya sınır değer problemi tam olarak çözülememektedir. Bazen bunların analitik çözümünü bulmak bile imkansızdır. Bu durumda yaklaşık çözümlere ihtiyaç duyulur. Literatürde bulanık diferansiyel denklemlerin (BDD) yaklaşık çözümü, çeşitli çalışmalar ile ele alınmaktadır [19-26]. Bulanık diferansiyel denklemlerin çalışmalarında birçok yaklaşım vardır [27-31]. İlk yaklaşım, bulanık değerli fonksiyonlar için Hukuhara diferansiyellenebilirliğinin kullanımıdır. Hukuhara diferansiyellenebilirliği altında bulanık diferansiyel denklemin (BDD) çözümünün varlığı ve tekliği [27,31]'de çalışılmıştır. Bu yaklaşımın, bir bulanık diferansiyel denklemin herhangi bir çözümünün artan destek bölgesi genişliğine sahip olması gibi dezavantajı vardır. Bu da, belirsizliği arttırmaktadır [32, 33]. Bu hata, bulanık diferansiyel denklemlerin diferansiyel kapsamalar ailesi olarak değerlendirilmesi ile ortadan kalkmıştır [34].

Diferansiyel kapsamaların kullanılmasında oluşan problem ise, bir bulanık değerli fonksiyonun türevinin tanımlanmamış olmasıdır.

Kuvvetli genelleştirilmiş diferansiyellenebilirlik ise ilk kez [35]'de çalışılmış ve genelleştirilmiştir [32, 36-38]. Böylece sözü edilen hata, ortadan kalkmış olur. Kuvvetli genelleştirilmiş türev, Hukuhara türevine göre bulanık değerli fonksiyonların daha büyük sınıfı için tanımlanmıştır. Bu durum da türev tanımlı olur ve bulanık diferansiyel denklemin çözümü azalan destek bölgesi genişliğine sahip olur. Fakat çözümün tekliği ortadan kalkmıştır. Hukuhara diferansiyellenebilirliği altında teklik kaybolsa bile, benzer klasik denklemin farklı formları bulanıklaştırıldığında birbirine benzemeyen bulanık diferansiyel denklemler elde edilir. Kuvvetli genelleştirilmiş diferansiyellenebilirlik olduğu durumda ise bir dezavantaj bulunmaktadır ki bu da bir bulanık başlangıç değer probleminin çözümünün nümerik olarak hesaplanmasında çeşitli ve birçok bulanık parametrelerin zaman harcatan bir sorun haline gelmesidir [39, 40].

Çözümü zor olan bir problemi, kolay çözülebilir bir probleme dönüştürmeyi sağlayan Homotopi metodu, son yıllarda mühendislik uygulamalarında özellikle lineer ve lineer olmayan problemlerin çözümlerinde kullanılır.

"Homotopi" kavramı ile Taylor serisini birleştiren Homotopi Analiz Metodu (HAM), 1992' de Shijun Liao [41-53] tarafından verilmiştir. HAM, lineer ve lineer olmayan problemlerin bazı sınıflarına lineerleştirme, pertürbasyon ve diskretizasyon olmadan etkili ve kolay bir şekilde uygulanabilmektedir. Son yıllarda birçok araştırmacı HAM'ı bilim ve mühendislikte çeşitli tipten lineer ve lineer olmayan problemleri çözmede kullanmıştır [54-62]. HAM, bir analitik seri çözüm tekniği ile birlikte yakınsaklık kontrolünü sağlamaktadır. Sıfırıncı mertebe deformasyon denklemini oluşturmak için $\hbar$ parametresini ortaya koymakta, yakınsaklık bölgesi ve yakınsaklık oranının ince ayarını $\hbar$ yakınsaklık parametresini değiştirerek yapmaktadır [54,63]. Tezin amacı, genelleştirilmiş Hukuhara diferansiyellenebilirliği altında ikinci mertebeden bulanık başlangıç değer probleminin çözümünü Homotopi Analiz Metodu ile incelemektir.

Tezin yapısı, aşağıdaki şekildedir:

1. Bölüm' de diğer bölümlerde kullanılmak üzere bazı temel tanımlar ve notasyonlar verilmiştir.

2. Bölüm’ de ikinci mertebeden bulanık diferansiyel denklemler ele alınmıştır.
3. Bölüm’ de Homotopi kavramı ve Homotopi Analiz Metodu tanıtılmıştır.
4. Bölüm’ de ikinci mertebeden bulanık diferansiyel denklemlerin HAM ile çözümü incelenmiştir.
5. Bölüm’ de HAM’ ın etkinliğini göstermek için nümerik örnekler verilmiştir.
6. Bölüm’ de sonuçlar sunulmuştur.

1. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım (1.1) : Klasik küme kuramında R kümesinin u alt kümesi u={x:P(x) ile ifade edilir. Burada x, P(x) önermesini sağlayan elemanları göstermektedir. R kümesinin herhangi bir u alt kümesinin gösterge fonksiyonu ya da karakteristik fonksiyonu χ_u ile gösterilir ve,

$$\chi_u = \begin{cases} 1, \text{ eğer } x \in u \\ 0, \text{ eğer } x \notin u \end{cases} \tag{1.1}$$

şeklinde ifade edilir. R kümesinin bir u alt kümesinin gösterge fonksiyonu χ_u bir elemanın u kümesinde olup olmadığını göstermektedir. Gösterge fonksiyonun alabileceği sadece iki değer vardır. Bu değerler 1 ya da 0 değerleridir. Kavram, elemanların aldıkları değerlerin [0,1] kapalı aralığına genişletilmesi ile genelleştirilebilmektedir. Bu fonksiyona ise üyelik fonksiyonu denilmektedir.

Tanım (1.2) : Bulanık küme, üyelik değerleri sürekli olan nesnelerin bir kümesidir ve üyelik fonksiyonu ile karakterize edilmektedir. Üyelik fonksiyonu yardımıyla kümenin her bir elemanına 0 ile 1 arasında değişen üyelik değerleri atanmaktadır.

Tanım (1.3) : R kümesinin u bulanık alt kümesi bir fonksiyondur ve $u:R \rightarrow [0,1]$ ile gösterilmektedir.

Tanım (1.4) : F, R kümesinin bulanık alt kümesi olsun. Bu elemanlara bulanık miktarlar denir. Bulanık miktarların özel bir sınıfı olan bulanık sayılarla ilgili aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım (1.5) : Bulanık sayı, $u:R \rightarrow [0,1]$ için,

i) u normaldir yani $u(x_0) = 1$ olacak şekilde $x_0 \in R$ vardır.

ii) u dışbükeydir yani $x,y \in R$ ve (0,1] için $u(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq \min(u(x),u(y))$ eşitsizliği sağlanmalıdır.

iii) u üstten yarı süreklidir.

iv) $\{x \in R \mid u(x)>0\}$' ın kapanışı kompaktır. Koşullarını sağlayan bulanık miktardır.

Tanım (1.6) : r tane evrensel kümenin kartezyen çarpımı $X=X_1xX_2x\ldots xX_r$ şeklinde olsun ve r tane bulanık u_1, u_2,….. u_r kümeleri sırasıyla evrensel kümelerin elemanları olduğu varsayılsın, r adet bulanık kümenin kartezyen çarpımı,

$$u_1x\ldots xu_r = \int_{X_1xX_2x\ldots xX_r} \min\ (u_1(x_1),\ldots, u_r(x_r))/(x_1,\ldots x_r)$$

şeklinde tanımlanır. $X=X_1xX_2x\ldots xX_r$ kartezyen çarpım kümesinden Y evrensel kümesine f fonksiyonu $y=f(x_1,\ldots x_r)$ olacak şekilde tanımlandığını farzedelim. Genelleştirme prensibi r tane bulanık u_i kümesinden Y üzerindeki B bulanık kümesine f ile ulaşmayı sağlamaktadır. Bulanık B kümesi için üyelik fonksiyonu,

$$v(y)= \sup_{y=f(x_1,\ldots,x_r)} \min(u_1(x_1),\ldots, u_r(x_r))$$

şeklinde verilmektedir. Zadeh [9] yukarıdaki ifadeyi ,

$$v= f(u_1,\ldots, u_r) = \int_{X_1xX_2x\ldots xX_r} \min\ (u_1(x_1),\ldots, u_r(x_r))/f(x_1,\ldots x_r)$$

eşitliği ile ifade etmiştir.

Tanım (1.7) : Her $\alpha\in(0,1]$ için bir u bulanık kümesinin $[u]^\alpha$ $\alpha-$seviye kümesi,

$$[u]^\alpha =\{x\in R: u(x)\geq\alpha\} \tag{1.2}$$

ile $x\in R$ noktalarının bir alt kümesidir. Bir bulanık kümenin $[u]^0$ dayanağı, tüm seviye kümelerinin birleşiminin kapanışı yani $[u]^0=\overline{\bigcup_{\alpha\in[0,1]}[u]^\alpha}$ olarak tanımlanır. u'nun $\alpha-$seviye kümeleri, $\left[\underline{u}^\alpha,\overline{u}^\alpha\right]$ şeklinde gösterilir ki burada $\underline{u}$ ve $\overline{u}$, u' nun alt ve üst kısımlarıdır. u'nun uzunluğu,

$$len(u) = \sup_\alpha (\overline{u}^\alpha - \underline{u}^\alpha) \tag{1.3}$$

olarak tanımlanır.

Tanım (1.8) : Parametrik formdaki bir bulanık sayı, aşağıdaki özellikleri sağlayan $(\underline{u}^\alpha, \overline{u}^\alpha)$ $0\leq\alpha\leq1$ fonksiyonların sıralı bir çifti olarak gösterilir.

i) $\underline{u}^\alpha$, $\alpha=0$ için sağdan sürekli ve $(0,1]$'de α'nın bir sınırlı azalmayan soldan sürekli fonksiyonudur.

ii) $\overline{u}^{\alpha}$, α=0 için sağdan sürekli ve (0,1]'de α'nın bir sınırlı artmayan soldan sürekli fonksiyonudur.

iii) $\underline{u}^{\alpha} \leq \overline{u}^{\alpha}$, $0\leq\alpha\leq1$.

Tanım (1.9) : R' nin tüm bulanık kümeler sınıfı üzerindeki metrik,

$$D(u,v)=\sup_{0\leq\alpha\leq1} \max\{|\underline{u}^{\alpha} - \underline{v}^{\alpha}|, |\overline{u}^{\alpha} - \overline{v}^{\alpha}|\} \tag{1.4}$$

denklemi ile tanımlanır.

Tanım (1.10) Üçgen Bulanık Sayı : Eğer u, $[\underline{u},\overline{u}]$ dayanağı ile simetrik bir sayı ise öyleki $[u]^{\alpha}$' nın α−seviye kümesi $[u]^{\alpha} =[\, \underline{u} + (\frac{\overline{u}-\underline{u}}{2})\alpha, \overline{u} +(\frac{\overline{u}-\underline{u}}{2})\alpha\,]$ olmak üzere u' ya üçgen bulanık sayı denir.

Tanım (1.11) : u ve v, iki bulanık küme olsun. u= v+w eşitliğinde w bulanık kümesine, u ve v' nin H−farkı denir ve uΘw ile gösterilir.

Tanım (1.12) : $I=(0,\ell)$ ve f:I→F bir bulanık fonksiyon olsun. Eğer,

$$\lim_{h\to0^+}\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}, \lim_{h\to0^+}\frac{f(t_0)-f(t_0-h)}{h} \tag{1.5}$$

limitleri var ve $f'(t_0)$ 'a eşit ise $f'(t_0)\in F$ elemanı varsa o zaman f' nin $t_0\in I$ 'da diferansiyellenebilir olduğunu söyleyebiliriz. Burada limitler,(F, D) metrik uzayında alınmıştır. Hukuhara diferansiyellenebilir fonksiyon, dayanağın artan uzunluğuna sahiptir. Eğer fonksiyon, bu özelliklere sahip değilse o zaman bu fonksiyon H−diferansiyellenebilir değildir. Bu zorluktan kaçınmak için [35]'deki yazarlar bulanık sayı değerli fonksiyonlar için aşağıdaki formda türevin daha genel tanımını vermişlerdir.

Tanım (1.13) : f: I→F ve $t_0\in F$ olsun.

1) 0' a yeterince yakın tüm h>0 için ve $f(t_0+h)\Theta f(t_0)$, $f(t_0)\Theta f(t_0-h)$,

$$\lim_{h\to0^+}\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} = \lim_{h\to0^+}\frac{f(t_0)-f(t_0-h)}{h} \tag{1.6}$$

limitleri var ve t_0 ‘da $f'(t_0)$ ‘a eşit $f'(t_0)$ЄF elemanı varsa o zaman f, t_0’ da (1)-diferansiyellenebilirdir.

2) 0’ a yeterince yakın tüm h<0 için $f(t_0+h)\Theta f(t_0)$, $f(t_0)\Theta\, f(t_0-h)$ ve,

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(t_0)-f(t_0-h)}{h} \tag{1.7}$$

limitleri var ve t_0 ‘da $f'(t_0)$ ‘a eşit $f'(t_0)$ ‘a eşit $f'(t_0)$ЄF elemanı varsa o zaman f, t_0’ da (2) diferansiyellenebilirdir. Eğer f, t_0’da (n)-diferansiyellenebilir ise f’ in ilk türevlerini $D_n^1 f(t_0)$ ile gösteriyoruz.

Tanım (1.14) : f:I → F olsun. Herbir α∈[0,1] için $[f(t)]^\alpha=\left[\underline{f}^\alpha,\overline{f}^\alpha\right]$ olmak üzere,

1) Eğer f, ilk formda (1)-diferansiyellenebilir ise o zaman $\underline{f}_\alpha$ ve $\overline{f}^\alpha$ diferansiyellenebilir fonksiyonlardır ve $[D_1^1\, f(t)]^\alpha=[\, \underline{f}'_\alpha\, ,\, \overline{f}'_\alpha\,]$.

2) Eğer f, (2)-diferansiyellenebilir ise o zaman $\underline{f}_\alpha$ ve $\overline{f}^\alpha$ diferansiyellenebilir fonksiyonlardır ve $[D_2^1\, f(t)]^\alpha=[\, \overline{f}'_\alpha\, ,\, \underline{f}'_\alpha]$, f bulanık fonksiyonu , (1) veya (2) diferansiyellenebilir olsun. $D_2^1 f$ için D_1^1 ilk türevi (n) diferansiyellenebilir olabilir (n=1,2). Bu durumda dört olasılık vardır. $D_1^1\,(D_1^1\, f(t))$, $D_2^1\,(D_1^1\, f(t))$, $D_1^1\,(D_2^1\, f(t))$ ve $D_2^1\,(D_2^1\, f(t))$. $D_n^1(D_m^1\, f(t))$ ikinci türevi, $D_{n,m}^2 f(t)$, (n, m=1,2) ile gösterilir. Teorem 2.13’e benzer olarak [64]’ de yazarlar, ikinci türev için aşağıdaki sonuçları elde ettiler.

Tanım (1.15) : $D_1^1\, f$:I→F veya $D_2^1\, f$:I→F bulanık fonksiyonlar olsun. Her bir α∈[0,1] için, $[f(t)]^\alpha$ =[$\underline{f}^\alpha(t)$, $\overline{f}^\alpha(t)$] olmak üzere: Eğer $D_1^1\, f$, (1)- diferansiyellenebilir ise o zaman $\underline{f}'_\alpha$ ve $\overline{f}'_\alpha$ diferansiyellenebilir fonksiyonlardır ve $[D_{1,1}^2\, f(t)]^\alpha=[\, \underline{f}''_\alpha\, ,\, \overline{f}''_\alpha\,]$. Eğer $D_1^1\, f$, (2)-diferansiyellenebilir ise o zaman $\underline{f}'_\alpha$ ve $\overline{f}'_\alpha$ diferansiyellenebilir fonksiyonlardır ve $[D_{1,2}^2\, f(t)]^\alpha=[\, \overline{f}''_\alpha\, ,\, \underline{f}''_\alpha]$. Eğer $D_2^1\, f$, (1)-diferansiyellenebilir ise o zaman $\underline{f}'_\alpha$ ve $\overline{f}'_\alpha$ diferansiyellenebilir fonksiyonlardır ve $[D_{2,2}^2\, f(t)]^\alpha=[\, \overline{f}''_\alpha\, ,\, \underline{f}''_\alpha]$. Eğer $D_2^1\, f$, (2)- diferansiyellenebilir ise o zaman $\underline{f}'_\alpha$ ve $\overline{f}'_\alpha$ diferansiyellenebilir fonksiyonlardır ve $[D_{2,2}^2\, f(t)]^\alpha=[\, \underline{f}''_\alpha\, ,\, \overline{f}''_\alpha\,]$. İspat: Bakınız [64].

2. İKİNCİ MERTEBEDEN BULANIK DİFERANSİYEL DENKLEMLER

2.1. Bulanık Başlangıç Değer Problemi

Burada $f:[a,b]\times F \to F$ bulanık sürekli fonksiyonlar ve $A, B \in F$ ve a, b sabitler olmak üzere,

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)),\ a \le t \le b \tag{2.1}$$

$$x(a) = A \tag{2.2}$$

$$x'(a) = B \tag{2.3}$$

ikinci dereceden bulanık başlangıç değer problemini ele alalım. Denklem (2.2) ve (2.3) koşulları ile Denklem (2.1)'nin çözümü için (n, m=1,2) aşağıda gösterilen 4 ayrı sistem vardır.

Sistem (1,1),

$$\underline{x}''(t,\alpha) = F\left(t, \overline{x}(t,\alpha), \overline{x}'(t,\alpha)\right)$$
$$\overline{x}''(t,\alpha) = F\left(t, \underline{x}(t,\alpha), \underline{x}'(t,\alpha)\right)$$
$$\underline{x}(0,\alpha) = \underline{A}(\alpha), \overline{x}(0,\alpha) = \overline{A}(\alpha)$$
$$\underline{x}'(0,\alpha) = \underline{B}(\alpha), \overline{x}'(0,\alpha) = \overline{B}(\alpha)$$

Sistem (2,2),

$$\underline{x}''(t,\alpha) = F\left(t, \overline{x}(t,\alpha), \underline{x}'(t,\alpha)\right)$$
$$\overline{x}''(t,\alpha) = F\left(t, \underline{x}(t,\alpha), \overline{x}'(t,\alpha)\right)$$
$$\underline{x}(0,\alpha) = \underline{A}(\alpha), \overline{x}(0,\alpha) = \overline{A}(\alpha)$$
$$\underline{x}'(0,\alpha) = \overline{B}(\alpha), \overline{x}'(0,\alpha) = \underline{B}(\alpha)$$

Sistem (1,2),

$$\underline{x}''(t,\alpha) = F\left(t, \underline{x}(t,\alpha), \underline{x}'(t,\alpha)\right)$$

$$\overline{x}''(t,\alpha) = F\left(t, \overline{x}(t,\alpha), \overline{x}'(t,\alpha)\right)$$

$$\underline{x}(0,\alpha) = \underline{A}(\alpha), \overline{x}(0,\alpha) = \overline{A}(\alpha)$$

$$\underline{x}'(0,\alpha) = \underline{B}(\alpha), \overline{x}'(0,\alpha) = \overline{B}(\alpha)$$

Sistem (2,1),

$$\underline{x}''(t,\alpha) = F\left(t, \underline{x}(t,\alpha), \overline{x}'(t,\alpha)\right)$$

$$\overline{x}''(t,\alpha) = F\left(t, \overline{x}(t,\alpha), \underline{x}'(t,\alpha)\right)$$

$$\underline{x}(0,\alpha) = \underline{A}(\alpha), \overline{x}(0,\alpha) = \overline{A}(\alpha)$$

$$\underline{x}'(0,\alpha) = \overline{B}(\alpha), \overline{x}'(0,\alpha) = \underline{B}(\alpha).$$

3. HOMOTOPİ ANALİZ METODU

3.1. Homotopi Kavramı

Homotopi kavramı 1895 yılında Henri Poincaré tarafından "Analysis Situs, Journal de I'École Polyrechnique ser 2, 1, pages 1-123." adlı makalede tanıtılmıştır. Homotopi, diferansiyel topolojinin önemli konularından biridir. Bu kavram daha sonra homolojinin temellerini oluşturmuştur. İki dönüşüm arasındaki homotopinin genel tanımı ise ilk olarak 1911 yılında L.E.J.Brouwer tarafından verilmiştir. İki matematiksel obje, bir diğerine sürekli olarak deforme oluyorsa homotopiktirler denir.

Tanım (3.1.1) : $f:X \rightarrow Y$, $g:X \rightarrow Y$ sürekli dönüşümler $I=[0,1]$ olsun. Her $x \in X$ için $H(x,0)=f(x)$ ve $H(x,1)=g(x)$ eşitliklerini sağlayan bir $H:XxY \rightarrow Y$ sürekli dönüşümü varsa f ve g homotopiktir denir. Bu durumda H dönüşümüne f ve g arasında bir homotopidir denir.

Tanım (3.1.2) : $f:X \rightarrow Y$ sürekli dönüşümü sabit bir dönüşüme homotopik ise f'ye null homotopiktir denir.

Tanım (3.1.3) :.$f:X \rightarrow Y$, $g:X \rightarrow Y$ sürekli dönüşümler, $A \subseteq X$ olsun. Eğer her $t \in I$ ve her $x \in A$ için $H(a,t)=f(a)=g(a)$ olacak şekilde bir $H:XxI \rightarrow Y$ homotopisi varsa f ve g dönüşümleri A alt kümesine göre homotopiktir denir.

Tanım (3.1.4) : f ve g, $I=[0,1]$ aralığından X'e tanımlanan sürekli dönüşümler olmak üzere; f ve g aynı x_0 başlangıç , x_1 bitiş noktalarına sahipseler ve her s, $t \in I$ için $H(s,0)=f(s)$ ve $H(s,1)=g(s)$, $H(0,t)= x_0$, $H(1,t)= x_1$ olacak şekilde sürekli bir $H:IxI \rightarrow X$ dönüşümü varsa H'ye f ve g arasında yol homotopisi denir. f, g, topolojide yol olarak adlandırıldıklarından oluşturulan homotopiye yol homotopisi denir.

3.2. Homotopi Analiz Metodu'na Giriş

Kuvvetli nonlineerliğe sahip nonlineer problemlerin analitik çözümlerini elde etmek genelde zordur. Yarı analitik yöntemlerde, çözüm serilerinin yakınsaklık bölgesi çoğu zaman fiziksel parametrelere bağlıdır. Bu yarı analitik yaklaşımlar, nonlineerlik kuvvetli olduğunda, çoğu zaman başarısız sonuçlar verir. Bu tip problemlerin çözümleri için daha önceki tekniklerden farklı olarak, çözüm serilerinin yakınsaklık bölgesini ve hızını kontrol etme imkanı sağlayan " Homotopi Analiz Metodu (HAM)" Liao tarafından verilmiştir. Bu metot aynı zamanda, Adomian ayrışım metodu, Lyapunov küçük yapay parametre metodu, δ- açılım metodu gibi önceden verilmiş nonpertürbatif metotların genel halidir [65]. Bu metot cebirsel denklemlerin, adi diferansiyel denklemlerin, integro-diferansiyel denklemlerin vb. çözümlerini bulmak için kullanılır. Homotopi analiz metodu, homotopi pertürbasyon metoduna benzer biçimde, topolojinin temel kavramlarından biri olan homotopiyi kullanır. Bu metotta da ele alınan denklemin başlangıç yaklaşımından tam çözüme götüren sürekli bir dönüşüm oluşturulur. Bu tip bir sürekli dönüşümü oluşturmak için bir yardımcı lineer operatör seçilir. Bulunan çözüm serisinin yakınsaklığını garantilemek için bir yardımcı parametre kullanılır. Bu metot, başlangıç yaklaşımı ve yardımcı lineer operatörlerin seçiminde serbestlik sağlar. Homotopi analiz metodu yardımıyla zor bir lineer olmayan problem, daha basit sonsuz sayıda lineer alt probleme dönüştürülür.

Örneğin lineer olmayan cebirsel denklem göz önüne alınsın: $f(x) = 0$, x_0 , x' in bir başlangıç yaklaşımı ve $q = [0,1]$ homotopi parametresi (topolojide gömme parametresi olarak adlandırılır) olmak üzere $H[x;q] = (1-q)[f(x)-f(x_0)]+qf(x)$, homotopisi kurulsun. $q = 0$ ve $q = 1$ iken $H[x;0] = f(x)-f(x_0)$ ve $H[x;1] = f(x)$, elde edilir. q parametresi 0' dan 1 ' e değiştikçe, $H[x;q]$ homotopisi sürekli olarak $f(x)-f(x_0)$ 'dan $f(x)$ ' e değişir. Böylece bir sürekli değişim, topolojide deformasyon olarak adlandırılır. $H[x;q] = 0$ alınarak $(1-q)[f(x)-f(x_0)]+qf(x) = 0$, cebirsel denklemin bir ailesi bulunur. Bu cebirsel denklemler ailesinin bir çözümü, homotopi parametresi q ' ya bağlıdır. Bu yüzden denklemler ailesi,

$$(1-q)[f[\phi(q)-f(x_0)]+q[f[\phi(q)]=0 \tag{3.2a}$$

tekrar yazılabilir. q=0 iken $f[\phi\,(q)]-f(x_0)]=0$; q=0, bulunur. Bu denklemin çözümü $\phi|_{q=0}=\phi(0)= x_0$ ' dır. q=1 iken, $f\,[\phi(q)]=0$; q=1, denklemi başlangıçta alınan cebirsel denklem $f(x) = 0$ ile tam olarak aynıdır. Buradan $\phi|_{q=1}= \phi(1)= x$ elde edilir. Yani homotopi parametresi q, 0' dan 1'e değiştikçe, $\phi(q)$ ' nin değeri, başlangıç yaklaşımı

x_0' dan f(x) = 0 denklemin çözümü olan x' e değişir (veya deforme olur). Denklem (3.2a) tipindeki denklemlerin ailesine sıfırıncı-derece deformasyon denklemi denir. Burada $\phi(q)$, homotopi parametresi q ' nun bir fonksiyonu olduğundan Taylor serisi açılarak ifade edilir. Böylece $\phi(0)= x_0$ olmak üzere,

$$\phi(q) = x_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} x_k q^k \qquad (3.2b)$$

bulunur. Denklem (3.2b) serisinde x_k ,

$$x_k = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k \phi(q)}{\partial q^k}\bigg|_{q=0} = D_k(\phi) \qquad (3.2c)$$

biçimindedir. Denklem (3.2b) serisine homotopi serisi, $D_k(\phi)$ ' ye ise k. Mertebeden homotopi türevi denir. Homotopi serisi Denklem (3.2b), q=1 ' de yakınsak ise $\phi(1) = x$ kullanılarak homotopi serisi çözümü,

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \qquad (3.2ç)$$

elde edilir. Taylor serisinde katsayılar tek biçimde verildiğinden, Denklem (3.2b) homotopi serisininin x_k katsayıları da tektir. Bu yüzden x_k ' lardan oluşan denklem de tektir ve sıfırıncı derece deformasyon denklemi, Denklem (3.2a)' den doğrudan elde edilebilir. Homotopi analiz metodunda bu kısıtlamayı ortadan kaldırmak için Liao [65], sıfırıncı derece deformasyon denklemi oluştururken bir yardımcı $\hbar \neq 0$ parametresi vermiştir,

$$(1-q)[f[\phi(q) - f(x_0)] = q\hbar f[\phi(q)] \qquad (3.2d)$$

$\hbar \neq 0$ olduğundan Denklem (3.2d), q=1' de $x = \phi(1)$' i sağlayan f(x)=0 denklemine karşı gelir. Buradan, $\hbar f[\phi(q)]=0$; q=1 olur. $\frac{d\phi(q)}{dq} f'[\phi(q)] - \hbar f(x_0) = 0$ 1.derece deformasyon denklemi $x_1 f'(x_0) - \hbar f(x_0) = 0$ olur. Bu denklemin çözümü $x_1 = \hbar \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ ' dır. Denklem (3.2d)'de her iki tarafının 2.mertebeden homotopi türevi alınarak 2. derece deformasyon denklemi ,

$$x_2 f'(x_0) - (1+\hbar) x_1 f'(x_0) + \frac{1}{2} x_1^2 f''(x_0) = 0$$

bulunur. Bu denklemin çözümü $x_2 = (1+h) x_1 f'(x_0) - \frac{1}{2} x_1^2 \frac{f''(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{\hbar(1+\hbar) f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{\hbar^2 f^2 f''(x_0)}{2[f'(x_0)]^3}$ elde edilir. Buradan birinci derece homotopi serisi yaklaşımı,

$$x \approx x_0 + x_1 = x_0 + \hbar \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{3.2e}$$

ve 2.derece yaklaşımı,

$$x \approx x_0 + x_1 + x_2 = x_0 + \hbar(\hbar+2) \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \hbar^2 \frac{f^2(x_0) f''(x_0)}{2[f'(x_0)]^3} \tag{3.2f}$$

elde edilir. Denklemlerde, ħ yardımcı parametresinin, nümerik hesaplamalarda sıkça kullanılan bir iterasyon çarpanı olduğu düşünülenebilir. Uygun seçilen bir iterasyon çarpanı, iterasyonun yakınsak olmasını sağlar. Bunun gibi Denklem (3.2b) homotopi serisinin yakınsaklığı da ħ yardımcı parametresinin değerine bağlıdır. ħ yardımcı parametresinin uygun bir değeri seçilerek homotopi seri çözümünün yakınsaklığı garanti edilebilir. Bu yüzden, ħ yakınsaklık kontrol parametresi olarak adlandırılır.

ħ yakınsak parametresi kullanılmadığında Denklem (3.2b) homotopi serisinin yakınsak olduğu varsayılmak zorundadır. ħ yakınsaklık parametresinin kullanımıyla böyle bir varsayıma gerek yoktur. Yakınsak homotopi seri çözümü elde etmek için her zaman uygun bir ħ değeri seçilebilir. Homotopi türevi ve deformasyon denklemi ile ilgili bazı teorem ve yardımcı teoremler verilmiştir [66].

Tanım (3.2.1) : ϕ, q homotopi parametresinin bir fonksiyonu olsun. $m \geq 0$ bir tam sayı olmak üzere,

$$D_m(\phi) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \phi(q)}{\partial q^m}\bigg|_{q=0} \tag{3.2g}$$

$D_m(\phi)$ ‘ ye ϕ ‘ nin m.mertebeden homotopi türevi denir.

Tanım (3.2.2) : $N[u]=0$ lineer olmayan denklem olsun,

$$\phi = x_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} u_k q^k \tag{3.2ğ}$$

burada $q \in [0,1]$ homotopi parametresinin bir fonksiyonu olmak üzere ϕ , Maclaurin serisini göstersin. $\Pi[\phi,q]=0$, $q \in [0,1]$ denklemler ailesine $N[u]=0$' ın sıfırıncı derece deformasyon denklemi denir. Eğer q=1 ise bu denklem,

$$u = \phi|_{q=1} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \tag{3.2h}$$

olmak üzere başlangıçta alınan $N[u]=0$ denklemine denktir. q=0 ‘ da ise denklemin çözümü açıktır. Denklem (3.2i) serisine homotopi serisi Denklem (3.2j) serisine $N[u]=0$' ın homotopi seri çözümü denir. u_k' ların oluşturduğu denklemlere k.derece deformasyon denklemleri denir.

Teorem (3.2.1) : f ve g homotopi parametresi q' dan bağımsız fonksiyonlar olsun,

$$\phi = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i\, q^i, \qquad \psi = \sum_{j=0}^{+\infty} v_j\, q^j$$

homotopi serileri için, $D_m(f\phi+g\psi)=fD_m(\phi)+gD_m(\psi)$ 'dir.

Kanıt: f ve g fonksiyonları q' dan bağımsız ve Denklem (3.2g) ile tanımlanan D_m lineer operatör olduğundan ,

$D_m(f\phi+g\psi)=fD_m(\phi)+D_m(g\psi)=fD_m(\phi)+gD_m(\psi)$ sağlanır

Teorem (3.2.2),

$$\phi = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i\, q^i, \quad \psi = \sum_{j=0}^{+\infty} v_j\, q^j$$

homotopi serileri için $m \geq 0$, $n \geq 0$, $\ell \geq 0$ ve $0 \leq k \leq m$ tam sayılar olmak üzere,

(a) $D_m(\phi)=u_m$

(b) $D_m\left(q^k\phi\right)=D_{m-k}(\phi)$

(c) $D_m(\phi\psi)= \sum_{i=0}^{m} D_i(\phi)D_{m-i}(\psi)= \sum_{i=0}^{m} D_i(\psi)D_{m-i}(\phi)$

$$\text{(d) } D_m(\phi^n\psi^\iota)=\sum_{i=0}^{m} D_i(\phi^n)D_{m-i}(\psi^\iota)=\sum_{i=0}^{m} D_i(\psi^\iota)D_{m-i}(\phi^n)$$

sağlanır.

Kanıt:

(a) Taylor teoremine göre ϕ' nin Maclaurin serisinin tek biçiminde tanımlanan u_m katsayıları,

$u_m=\frac{1}{m!}\frac{\partial^m\phi(q)}{\partial q^m}\Big|_{q=0}$ ile verilir. Denklem (3.2g) ile verilen

$D_m(\phi)=\frac{1}{m!}\frac{\partial^m\phi(q)}{\partial q^m}\Big|_{q=0}$ tanımından $D_m(\phi)=u_m$ bulunur.

(b) $q^k\phi=q^k\sum_{i=0}^{+\infty}u_i\,q^i=\sum_{i=0}^{+\infty}u_i\,q^{i+k}=\sum_{m=k}^{+\infty}u_{m-k}\,q^m$ sağlanır. (a) yardımıyla

$D_m\left(q^k\phi\right)=u_{m-k}=D_{m-k}(\phi)$ bulunur.

(c) Çarpımın türevleri için Leibnitz kuralına göre,

$$\frac{\partial^m\phi(q)}{\partial q^m}=\sum_{i}^{m}\frac{m!}{i!(m-i)!}\frac{\partial^i}{\partial q^i}\frac{\partial^{m-i}\psi}{\partial q^{m-i}}=\sum_{i}^{m}\frac{m!}{i!(m-i)!}\frac{\partial^i\psi}{\partial q^i}\frac{\partial^{m-i}\phi}{\partial q^{m-i}}$$

Denklem (3.2g) tanımı ile,

$$D_m(\phi\psi)=\frac{1}{m!}\frac{\partial^m(\phi\emptyset\psi}{\partial q^m}\Big|_{q=0}=\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{i!}\;\frac{\partial^i\phi}{\partial q^i}\Big|_{q=0}\right)\left(\frac{1}{(m-i)!}\;\frac{\partial^{m-i}\psi}{\partial q^i}\Big|_{q=0}\right)=\sum_{i=0}^{+\infty}D_i(\phi)D_{m-i}(\psi)$$

sağlanır. Benzer biçimde,

$D_m(\phi\psi)=\sum_{i=0}^{+\infty}D_i(\psi)D_{m-i}(\phi)$ sağlanır.

(d) $\Phi=\phi^n$ ve $\psi=\psi^\iota$ yazılsın (c) 'ye göre,

$$D_m(\phi^n\psi^\iota)=D_m(\Phi\psi)=\sum_{i=0}^{+\infty}D_i(\Phi)D_{m-i}(\psi)=\sum_{i=0}^{+\infty}D_i(\phi^n)D_{m-i}(\psi^\iota)$$

sağlanır. Benzer biçimde,

$$D_m(\phi^n\psi^\iota)=\sum_{i=0}^{+\infty} D_i(\psi^\iota)D_{m-i}(\phi^n) \text{ sağlanır.}$$

Teorem (3.2.3) L, q homotopi parametresinden bağımsız lineer bir operatör olsun: $\phi=\sum_{k=0}^{+\infty} u_k q^k$ homotopi serisi için $D_m(L\phi) = L[D_m(\phi)]$ sağlanır.

Kanıt: L, q ‘ dan bağımsız olduğundan,

$$\phi=\sum_{k=0}^{+\infty} [L(u_k)]q^k$$

sağlanır. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının m. Mertebeden homotopi türevi alınıp Teorem (3.2.2)’nin (a) şıkkı kullanılarak $D_m(L\phi)=L(u_m)$ elde edilir. Ayrıca yine Teorem (3.2.2)’in (a) şıkkına göre $L[D_m(\phi)]=L(u_m)$ olup $D_m(L\phi)=L(D_m(\phi))$ denklemi elde edilir.

Teorem (3.2.4) : Aşağıdaki homotopi serisi için m≥1 tam sayı olmak üzere,

$\phi=\sum_{k=0}^{+\infty} u_k q^k$ aşağıdaki formüller sağlanır,

$$D_0\left(e^\phi\right)=e^{u_0}, \qquad D_m\left(e^\phi\right)=\sum_{k=0}^{m-1}\left(1-\frac{k}{m}\right)D_k\left(e^\phi\right)D_{m-k}(\phi) \; .$$

Kanıt: Denklem (3.2g) tanımına göre aşağıdaki formül sağlanır,

$$D_0\left(e^\phi\right)=e^{u_0}\;, \qquad \frac{\partial e^\phi}{\partial q}=e^\phi\frac{\partial \phi}{\partial q} \; .$$

Çarpımın türevi için Leibnitz kuralına göre,

$$\frac{1}{m!}\frac{\partial^m e^\phi}{\partial q^m}=\frac{1}{m!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial q^{m-1}}\left(e^\phi\frac{\partial\phi}{\partial q}\right)=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k!(m-1-k)!}\;\frac{\partial^k e^\phi}{\partial q^k}\frac{\partial^{m-k}\phi}{\partial q^{m-k}}$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m-k)}{m}\;\left[\frac{1}{k!}\frac{\partial^k e^\phi}{\partial q^k}\right]\left[\frac{1}{(m-k)!}\frac{\partial^{m-k}\phi}{\partial q^{m-k}}\right]$$

Yukarıdaki eşitlikte Denklem (3.2g) tanımı kullanılarak ,

$$D_m\left(e^{\phi}\right)=\sum_{k=0}^{m-1}\left(1-\frac{k}{m}\right)D_k\left(e^{\phi}\right)D_{m-k}(\phi) \text{ elde edilir.}$$

Teorem (3.2.5) $\phi=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k q^k$ homotopi serisi için m≥1 tam sayı olmak üzere

$$D_0(\sin\phi)=\sin(u_0), \qquad D_0(\cos\phi)=\cos(u_0)$$

$$D_m(\sin\phi)=\sum_{k=0}^{m-1}\left(1-\frac{k}{m}\right)D_k(\cos\phi)D_{m-k}(\phi)$$

$$D_m(\cos\phi)=-\sum_{k=0}^{m-1}\left(1-\frac{k}{m}\right)D_k(\sin\phi)D_{m-k}(\phi)$$

bağıntıları sağlanır.

Kanıt: Denklem (3.2g) tanımına göre ,

$D_0(\sin\phi)=\sin(u_0)$, $D_0(\cos\phi)=\cos(u_0)$ sağlanır. $i=\sqrt{-1}$ yazılırsa Euler formülü ve Teorem (3.2.1) kullanılarak m≥1 tam sayısı için,

$$D_m(\sin\phi)=D_m\left(\frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2i}\right)=\frac{1}{2i}\left[D_m\left(e^{i\phi}\right)-D_m\left(e^{-i\phi}\right)\right] \tag{3.2ı}$$

$$D_m(\sin\phi)=D_m\left(\frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[D_m\left(e^{i\phi}\right)+D_m\left(e^{-i\phi}\right)\right] \tag{3.2i}$$

sağlanır. Teorem (3.2.1) ve (3.2.5) kullanılarak,

$$D_m\left(e^{i\phi}\right)=\sum_{k=0}^{m-1}\left(1-\frac{k}{m}\right)D_k\left(e^{i\phi}\right)D_{m-k}(i\phi) \quad =i\sum_{k=0}^{m-1}\left(1-\frac{k}{m}\right)D_k\left(e^{i\phi}\right)D_{m-k}(\phi)$$

bulunur. Benzer biçimde,

$$D_m\left(e^{-i\phi}\right)=-i\sum_{k=0}^{m-1}\left(1-\frac{k}{m}\right)D_k\left(e^{-i\phi}\right)D_{m-k}(\phi)$$

elde edilir. Yukarıdaki iki eşitlik Denklem (3.2ı) ve (3.2i)'lerinde denklemlerinde yerine konarak Teorem (3.2.1) ve Euler formülü kullanılarak,

$$D_m(\sin\phi)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1}\left(1-\frac{k}{m}\right)D_{m-k}(\phi)\left[D_k\left(e^{i\phi}\right)+D_k\left(e^{-i\phi}\right)\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}\left(1-\frac{k}{m}\right)D_{m-k}(\phi)D_k\left(\frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}\left(1-\frac{k}{m}\right)D_{m-k}(\phi)D_k(\cos\phi)$$

bulunur. Benzer biçimde,

$$D_m(\cos\phi)=\frac{i}{2}\sum_{k=0}^{m-1}\left(1-\frac{k}{m}\right)D_{m-k}(\phi)\left[D_k\left(e^{i\phi}\right)-D_k\left(e^{-i\phi}\right)\right]$$

$$=-\sum_{k=0}^{m-1}\left(1-\frac{k}{m}\right)D_{m-k}(\phi)D_k\left(\frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2i}\right)$$

$$=-\sum_{k=0}^{m-1}\left(1-\frac{k}{m}\right)D_{m-k}(\phi)D_k(\sin\phi)$$

bulunur.

Teorem (3.2.6) : Eğer homotopi serileri ,

$$\phi=\sum_{i=0}^{+\infty}u_i\,q^i,\quad \psi=\sum_{j=0}^{+\infty}v_j\,q^j$$

$q\in[0,a)$ bölgesinde $\phi=\psi$ eşitliğini sağlarsa her $m\geq0$ tamsayısı ve bir $a>0$ reel sayısı için $u_m=v_m$ ve $D_m(\phi)=D_m(\psi)$ dir.

Kanıt: $\phi=\psi$ olduğundan,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(u_k-v_k)q^k=0$$

sağlanır. Yukarıdaki eşitlik her $q\in[0,a)$ noktası için sağlanır $\Leftrightarrow u_m=v_m$, $m\geq0$ olmak üzere Teorem (3.1.2)'nin (a) şıkkına göre $D_m(\phi)=D_m(\psi)$ ' dir.

3.3. Deformasyon Denklemleri

Yardımcı teorem (3.3.1) : $q\in[0,1]$ bir homotopi parametresi, u_m, $\vec{x}$ uzay, t zaman değişkenin bir fonksiyonu olmak üzere,

$$\phi=\sum_{i=0}^{+\infty} u_m(\vec{x},t)q^m$$

bir homotopi serisini, L, $\vec{x}$ ve t' ye göre bir yardımcı lineer operatörünü, u_0 , bir başlangıç çözümünü göstersin,

$$\chi_m=\begin{cases}0 & , m\leq1\\ 1 & , m>1\end{cases} \tag{3.3a}$$

olmak üzere Denklem (3.2g) ile tanımlanan D_m operatörü için, aşağıdaki ifade sağlanır,

$$D_m\{(1-q)L[\phi-u_0]\}=L[u_m(\vec{x},t)-\chi_m u_{m-1}(\vec{x},t)]$$

Kanıt : L, q' dan bağımsız bir lineer operatörü olduğundan,
$(1-q)L[\phi-u_0]=L[\phi-q\phi+u_0q-u_0]$ sağlanır. Teorem (3.2.1), (3.2.2) ve (3.2.3)'leri kullanılarak,

$$\begin{aligned}D_m\{(1-q)L[\phi-u_0]\}&=D_m\{L[\phi-q\phi+u_0q-u_0]\}\\ &=L\{D_m[\phi-q\phi+u_0q-u_0]\}\\ &=L[D_m(\phi)-D_m(q\phi)+u_0D_m(q)]\\ &=L[u_m-u_{m-1}+u_0D_m(q)]\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade m=1 iken $L[u_m]$' ye , m>1 iken $L[u_m-u_{m-1}]$'e eşittir. χ_m ' in Denklem (3.3.a)'i kullanarak $D_m\{(1-q)L[\phi-u_0]\}=L[u_m-\chi_m u_{m-1}]$ bulunur.

Teorem (3.3.2) : $q\in[0,1]$ bir homotopi parametresi olmak üzere,

$$\phi=\sum_{i=0}^{+\infty} u_m(\vec{x},t)q^m$$

homotopi serisi için L bir yardımcı lineer operatörü, N bir lineer olmayan operatörü, $u_0(\vec{x},t)$ bir başlangıç çözümünü, ħ, q' dan bağımsız yakınsaklık kontrol parametresini ve $H(\vec{x},t)$, q' dan bağımsız bir yardımcı fonksiyonu göstersin,

$$(1-q)L[\phi-u_0]= \hbar\, H(\vec{x},t)qN[\phi] \tag{3.3b}$$

ile tanımlanan sıfırıncı derece deformasyon denklemine karşı gelen m.derece deformasyon denklemi (m≥1), D_{m-1} operatörü, Denklem (3.2g), χ_m fonksiyonu Denklem (3.1j) ile tanımlanmak üzere,

$$L\left[u_m(\vec{x},t)-\chi_m u_{m-1}(\vec{x},t)\right]=\hbar\, H(\vec{x},t)D_{m-1}(N[\phi]) \tag{3.3c}$$

ile verilir.
Kanıt: Teorem (3.2.6)'i kullanılarak,

$$D_m\{(1-q)L[\phi-u_0]\}=D_m(q\hbar H(\vec{x},t)N[\phi]) \tag{3.3ç}$$

elde edilir. Denklem (3.2g) ' ye göre,

$$D_m\{(1-q)L[\phi-u_0]\}=L[u_m-\chi_m u_{m-1}] \tag{3.3d}$$

bulunur. Teorem (3.2.1) ve (3.2.2)'e göre,

$$D_m(q\hbar H(\vec{x},t)N[\phi])= \hbar H(\vec{x},t)D_m(N[\phi]) \tag{3.3e}$$

bulunur. Denklem (3.3d) ve (3.3e)' yi Denklem (3.3ç)' de yerine koyarak m.derece deformasyon denklemine ulaşılır,

$$L\left[u_m(\vec{x},t)-\chi_m u_{m-1}(\vec{x},t)\right]=\hbar H(\vec{x},t)D_{m-1}(N[\phi]) .$$

Teorem (3.3.3) : $q\in[0,1]$ bir homotopi parametresi, α_k bir sabit olmak üzere,

$$\phi=\sum_{i=0}^{+\infty} u_m(\vec{x},t)q^m \;,\; \psi=\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k\, q^k$$

homotopi serilerini, L bir yardımcı lineer operatörü, N bir lineer olmayan operatörü, $u_0\,(\vec{x},t)$ bir başlangıç çözümünü, $H(\vec{x},t)$, q' dan bağımsız bir yardımcı fonksiyonu göstersin,

$$(1\text{-}q)L[\phi\text{-}u_0]= H(\vec{x},t)\Big(\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k\, q^k\Big)\, N[\phi] \tag{3.3f}$$

ile tanımlanan sıfırıncı derece deformasyon denklemine karşı gelen m.derece deformasyon denklemi ($m\geq1$), D_k operatörü Denklem (3.2g), χ_m fonksiyonu Denklem (3.3a) ile tanımlanmak üzere,

$$L\big[u_m(\vec{x},t)\chi_m u_{m-1}(\vec{x},t)\big]=H(\vec{x},t)\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k D_{m-k}(N[\phi]) \tag{3.3g}$$

olur.

Kanıt: Teorem (3.2.6) kullanılarak,

$$D_m\{(1\text{-}q)L[\phi\text{-}u_0]\}=D_m(H(\vec{x},t)\psi N[\phi]) \tag{3.3ğ}$$

bulunur. Denklem (3.2a)'e göre,

$$D_m\{(1\text{-}q)L[\phi\text{-}u_0]\}= L\big[u_m\text{-}\chi_m u_{m-1}\big] \tag{3.3h}$$

sağlanır. Teorem (3.2.1) ve (3.2.2)'leri kullanılarak,

$$D_m(H(\vec{x},t)\psi N[\phi])= H(\vec{x},t)\sum_{k=0}^{m} D_k\,(\psi)D_{m-k} =H(\vec{x},t)\sum_{k=0}^{m} \alpha_k\, D_{m-k}\,(N[\phi])$$

α_0 =0 olduğundan,

$$D_m(H(\vec{x},t)\psi N[\phi])= H(\vec{x},t)\sum_{k=0}^{m} \alpha_k\, D_{m-k}(N[\phi]) \tag{3.3ı}$$

bulunur. Denklem (3.3h) ve (3.3ı), Denklem (3.3ğ) ' de yerine konulur. Sıfırıncı derece deformasyon denklemi olan Denklem (3.3b), $\alpha_1=\hbar$ ve $k>1$ için $\alpha_k=0$ olduğu durumda Denklem (3.3f) sıfırıncı derece deformasyon denkleminin bir özel halidir.

Teorem (3.3.4) **:.** $q\in[0,1]$ bir homotopi parametresi, $\beta_k(\vec{x},t)$, sıfıra eşit veya en az bir k için $\beta_k(\vec{x},t)=0$ olan sıfırdan farklı bir fonksiyon olmak üzere,

$$\phi=\sum_{m=0}^{+\infty} u_m(\vec{x},t)q^m \;,\; \psi=\sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k(\vec{x},t)q^k$$

homotopi serileri, L bir yardımcı lineer operatör, N lineer olmayan operatör, $u_0=(\vec{x},t)$ bir başlangıç çözümü olsunlar,

$$(1-q)L[\phi-u_0]=\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\right)\beta_k(\vec{x},t)q^k N[\phi] \tag{3.3i}$$

ile tanımlanan sıfırıncı derece deformasyon denklemine karşı gelen m.derece deformasyon denklemi ($m\geq1$), D_k operatörü Denklem (3.2g), χ_m fonksiyonu Denklem (3.2j) ile tanımlanmak üzere,

$$L\left[u_m(\vec{x},t)-\chi_m u_{m-1}(\vec{x},t)\right]=\sum_{k=1}^{m} \beta_k(\vec{x},t)D_{m-1}(N[\phi]) \tag{3.3j}$$

ile verilir. Kanıt: Teorem 3.2.6 kullanılarak,

$$D_m\{(1-q)L[\phi-u_0]\}=D_m(\psi N[\phi]) \tag{3.3k}$$

bulunur. Denklem (3.2a)'e göre,

$$D_m\{(1-q)L[\phi-u_0]\}= L\left[u_m-\chi_m u_{m-1}\right] \tag{3.3l}$$

sağlanır. Teorem 3.2.1 ve 3.2.2 kullanılarak,

$$D_m(\psi N[\phi])= \sum_{k=0}^{m} D_k(\psi)D_{m-k}(N[\phi])=\sum_{k=0}^{m} \beta_k(\vec{x},t)\, D_{m-k}(N[\phi])$$

bulunur. $\beta_k(\vec{x},t)=0$ olduğundan,

$$D_m(\psi N[\phi])=\sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k(\vec{x},t)D_{m-k}(N[\phi]) \tag{3.3m}$$

elde edilir. Denklem (3.3l) ve (3.3m)’leri, Denklem (3.3k)’inde yerine konularak istenen elde edilir. Sıfırıncı derece deformasyon denklemi olan Denklem (3.3f), $k\geq 1$ için $\beta_k(\vec{x},t)=\alpha_k(\vec{x},t)$ olduğu durumda Denklem (3.3i) sıfırıncı derece deformasyon denkleminin bir özel halidir.

Teorem (3.3.5) : $q\in[0,1]$ bir homotopi parametresi, $\beta_k(\vec{x},t)$ sıfıra eşit veya en az bir k için $\beta_k(\vec{x},t)=0$ olan sıfırdan farklı bir fonksiyon olmak üzere,

$$\phi=\sum_{m=0}^{+\infty} u_m(\vec{x},t)q^m \ , \ \psi=\sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k(\vec{x},t)q^k$$

homotopi serileri, L bir yardımcı lineer operatör, N bir lineer olmayan operatör, $u_0=(\vec{x},t)$ bir başlangıç çözümü olsunlar. $A[\phi,\vec{x},t]$ ve q nun, q=0 ve q=1 iken $A[\phi,\vec{x},t,q]=0$ ‘ sağlayan bir fonksiyonu olsun. Sıfırıncı derece deformasyon denklemi,

$$(1-q)L[\phi-u_0]=\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k(\vec{x},t)q^k\right) N[\phi]+A[\phi,\vec{x},t,q] \tag{3.3n}$$

ile tanımlanır. Buna karşı gelen m.derece deformasyon denklemi ($m\geq 1$), D_k operatörü Denklem (3.2g), χ_m fonksiyonu Denklem (3.2j) ile tanımlanmak üzere,

$$L=\sum_{k=1}^{m} \beta_k(\vec{x},t)\, D_{m-k}(N[\phi])+D_m(A[\phi,\vec{x},t,q]) \tag{3.3o}$$

ile verilir.

Kanıt: Teorem 3.2.6 ve 3.2.1’leri kullanılarak,

$$D_m\{(1-q)L[\phi-u_0]\}=D_m(\psi N[\phi]) +D_m(A[\phi,\vec{x},t,q]) \tag{3.3ö}$$

Denklem (3.2a)’ne göre,

$$D_m\{(1-q)L[\phi-u_0]\}=L\left[u_m-\chi_m u_{m-1}\right] \tag{3.3p}$$

Teorem 3.2.1 ve 3.2.2'leri kullanılarak,

$$D_m(\psi N[\phi])=\sum_{k=0}^{m} D_k(\psi)D_{m-k}(N[\phi])=\sum_{k=0}^{m}\beta_k(\vec{x},t)\,D_{m-k}(N[\phi])$$

bulunur. $\beta_0(\vec{x},t)=0$ olduğundan,

$$D_m(\psi N[\phi])=\sum_{k=1}^{+\infty}\beta_k(\vec{x},t)D_{m-k}(N[\phi]) \tag{3.3r}$$

olur. Denklem (3.3p) ve (3.3r)'leri, Denklem (3.3ö)' de yerine konularak kanıt biter. Δ sıfırıncı derece deformasyon denklemi olan Denklem (3.3i), $A[\phi,\vec{x},t,q]=0$ olduğu durumda Denklem (3.3n) sıfırıncı derece deformasyon denkleminin bir özel halidir.

Teorem (3.3.6) : $q\in[0,1]$ bir homotopi parametresi olmak üzere,

$$\phi=\sum_{m=0}^{+\infty}u_m(\vec{x},t)q^m$$

L bir yardımcı lineer operatör, bir lineer olmayan operatör, $u_0=(\vec{x},t)$ bir başlangıç çözümü olsunlar. $\gamma(\vec{x},t)\neq 0$ bir fonksiyon olmak üzere; $B[\phi,\vec{x},t,q]$, ϕ, $\vec{x}$, t ve q 'nun q=0 iken $B[\phi,\vec{x},t,q]=0$, q=1 iken $B[\phi,\vec{x},t,q]=\gamma(\vec{x},t)N[\phi]$ denklemini sağlayan bir fonksiyonu olsun,

$$(1-q)L[\phi-u_0]=B[\phi,\vec{x},t,q] \tag{3.3s}$$

ile tanımlanan sıfırıncı deformasyon denklemine karşı gelen m.derece deformasyon denklemi ($m\geq 1$), D_k operatörü Denklem (3.2g), χ_m fonksiyonu Denklem (3.2.13) ile tanımlanmak üzere,

$$L\left[u_m(\vec{x},t)-\chi_m u_{m-1}(\vec{x},t)\right]=D_m(B[\phi,\vec{x},t,q]) \tag{3.3ş}$$

ile verilir.

Kanıt: Teorm (3.2.6) kullanılarak,

$$D_m\{(1-q)L[\phi-u_0]\}=D_m(B[\phi,\vec{x},t,q]) \tag{3.3t}$$

elde edilir. Denklem (3.2a)'e göre,

$$D_m\{(1-q)L[\phi-u_0]\}=L\left[u_m-\chi_m u_{m-1}\right] \tag{3.3u}$$

sağlanır. Denklem (3.3t) ve (3.3u) ' dan kanıt biter.

Δ Sıfırıncı derece deformasyon denklemi olan Denklem (3.3b), (3.3f), (3.3i) ve (3.3n)'leri, sıfırıncı derece deformasyon denklemi olan Denklem (3.3s) 'nın özel halidir. Çoğu zaman homotopi seri çözümünü elde etmek için Denklem (3.3s) sıfırıncı derece deformasyon denklemi kullanılır. Eğer yardımcı lineer operatörü L, yardımcı fonksiyon $H=(\vec{x},t)$ ve yakınsak parametresi ħ uygun olarak seçilirse istenen çözüme ulaşılır. Bir lineer olmayan $N[u]=0$ denkleminin yüksek derece deformasyon denklemlerlini elde etmek için $D_k(N[\phi])$ terimleri hesaplanmalıdır. Sıfırıncı deformasyon denklemi olan Denklem (3.3b) ,

$$\dot{L}=\frac{L}{\hbar H=(\vec{x},t)}$$

olmak üzere,

$$(1-q)\dot{L}[\phi-u_0]= qN[\phi] \tag{3.3ü}$$

denklemiyle tekrar yazılırsa $\dot{L}$ bir yardımcı lineer operatörü gibi düşünülebilir.

Bu durumda yardımcı lineer operatörün seçimi için ilk önce bir temel lineer operatör seçilir, sonra yardımcı fonksiyon belirlenir ve son olarak yakınsaklık kontrol parametresi ħ homotopi seri çözümü yakınsak olacak biçimde belirlenir. Sıfırıncı derece deformasyon denklemleri Denklem (3.3f), (3.3i), (3.3n) ve (3.3s)'leri, ħ yakınsaklık kontrol parametresi kavramını genelleştirerek elde edilir. $\vec{\alpha}=\{\alpha_1 ,\alpha_2, \alpha_3 \ldots\}$ vektörü tanımlansın. Denklem (3.3f) denklemindeki $\vec{\alpha}$ vektörü, Denklem (3.3.2) denklemindeki $\hbar$ ħyakınsaklık kontrol parametresinin bir genelleştirilmesidir. Benzer şekilde Denklem (3.3i) ve (3.3n)'lerindeki $\vec{\beta}=\{\vec{\beta}_1(\vec{x},t),\vec{\beta}_2(\vec{x},t),\vec{\beta}_3(\vec{x},t),\ldots\}$ vektörü Denklem (3.3f) denklemindeki yakınsaklık kontrol vektörü $\vec{\alpha}$ nın bir genelleştirilmesidir. $\vec{\alpha}$ ve $\vec{\beta}$ vektörlerinin uygun seçimiyle homotopi seri çözümünün yakınsaklığı garanti edilebilir. Liao, sıfırıncı derece deformasyon denklemi olan

Denklem (3.3b) için ħ eğrilerini çizerek homotopi serisinin yakınsaklık bölgesine uygun bir ħ değeri ile belirlemeyi önermiştir. Denklem (3.3b), (3.3f), (3.3i), (3.3n) ve (3.3s)'leri gibi farklı tipte sıfırıncı derece deformasyon denklemleri, homotopi analiz metodunun uygulanmasında esneklik sağlarlar. Bunun yanında her tipte sıfırıncı derece deformasyon denklemi için yardımcı lineer operatör L ' yi seçme serbestliği vardır. Hatta L ' nin mertebesi, orijinal lineer denkleminkinden farklı olabilir [58]. İkinci mertebeden sonsuz sayıda lineer kısmi diferansiyel denklem, sonsuz sayıda lineer adi diferansiyel denkleme dönüştürülebilir. Değişken katsayılı bir lineer olmayan diferansiyel denklem, sabit sayılı sonsuz sayıda lineer diferansiyel denkleme dönüştürülebilir. Bu tip serbestlik ve esneklik, verilen bir lineer olmayan problemin, istenen çözümünü daha kolay yoldan bulma imkanını sağlar.

Eğer bir lineer olmayan denklemin en az bir çözümü varsa yakınsak homotopi seri çözümü elde etmek için sıfırıncı derece deformasyon denklemi her zaman oluşturulabilir. Bu çalışmada homotopi pertürbasyon metodu ile karşılaştırmayı yapabilmek için homotopi analiz metodu ile çözüm bulurken oluşturulan Denklem (3.3b) tipindeki sıfırıncı derece deformasyon denklemine göre homotopi analiz metodunun genel lineer olmayan problemler için bir sistematik tanımı verilmiştir.

3.4. Sıfırıncı Derece Deformasyon Denklemi

Genel biçimde N bir lineer olmayan operatör, $\vec{x}$ uzay t zaman değişkenleri, $u(\vec{x},t)$ bu değişkenlere bağlı bir fonksiyon olmak üzere,

$$N[u(\vec{x},t)]=0 \tag{3.4a}$$

lineer olmayan (lineer) bir denklem göz önüne alınsın. , $u_0=(\vec{x},t)$, $u=(\vec{x},t)$ tam çözümün bir başlangıç yaklaşımı, $\hbar \neq 0$ bir yakınsaklık kontrol parametresi, $H(\vec{x},t)\neq 0$ bir yardımcı fonksiyon ve L aşağıdaki özelliği sağlayan bir yardımcı lineer operatör,

$$f(\vec{x},t)=0 \text{ iken } L[f(\vec{x},t)]=0 \tag{3.4b}$$

olsunlar. $q\in[0,1]$ homotopi (gömme) parametresi kullanılarak,

$H[\phi(\vec{x},t;q);u_0(\vec{x},t),H(\vec{x},t),\hbar,q] =$

$$=(1-q)\{L[\phi(\vec{x},t;q)-u_0(\vec{x},t)]\}-q\hbar H(\vec{x},t)N[\phi(\vec{x},t;q)] \qquad (3.4c)$$

homotopisi kurulabilir. Yakınsaklık kontrol parametresi $\hbar$ ve yardımcı fonksiyon $H(\vec{x},t)$, homotopi analiz metodunda önemli rol oynarlar. Metot $u_0(\vec{x},t)$ başlangıç yaklaşımını, L yardımcı lineer operatörünü, yakınsaklık kontrol parametresi $\hbar$' yi ve $H(\vec{x},t)$ yardımcı fonksiyonunu seçme serbestliği tanır. Denklem (3.4c) homotopisi 0'a eşitlenerek, $H[\phi(\vec{x},t;q);u_0(\vec{x},t),H(\vec{x},t),\hbar,q]=0$, sıfırıncı derece deformasyon denklemi,

$$(1-q)\{L[\phi(\vec{x},t;q)-u_0(\vec{x},t)]\}=q\hbar H(\vec{x},t)N[\phi(\vec{x},t;q)] \qquad (3.4ç)$$

elde edilir. Denklemin çözümü $\phi(\vec{x},t;q)$, sadece $u_0(\vec{x},t)$, L, $H(\vec{x},t)$ ve $\hbar$'ya bağlı değil aynı zamanda $q\in[0,1]$ ' ya da bağlıdır. q=0 iken Denklem (3.4ç) sıfırıncı derece deformasyon denklemi,

$$L[\phi(\vec{x},t;0)-u_0(\vec{x},t)]=0 \qquad (3.4d)$$

denklemine dönüşür. Denklem (3.4b) özelliği kullanılarak,

$$\phi(\vec{x},t;0)= u_0(\vec{x},t) \qquad (3.4e)$$

bulunur. q=1 iken $\hbar\neq0$ ve $H(\vec{x},t)\neq0$ olduğundan sıfırıncı derece deformasyon denklemi olan Denklem (3.4e),

$$N[\phi(\vec{x},t;1)]=0 \qquad (3.4f)$$

denklemine karşı gelir. Bu denklemin ilk başta alınan Denklem (3.4a)'in aynısıdır. Buradan,

$$\phi(\vec{x},t;1)= u(\vec{x},t) \qquad (3.4g)$$

denklemi sağlanır. Denklem (3.4e) ve (3.4g)'lerine göre, homotopi parametresi q, 0'dan 1' e artarken $\phi(\vec{x},t;q)$, $u_0(\vec{x},t)$ başlangıç yaklaşımından Denklem (3.4a)'nin tam çözümü olan $u(\vec{x},t)$' ye sürekli olarak değişir. (veya deforme olur). Bu tip sürekli değişime homotopide deformasyon denir. Denklem (3.4ç) denklemine sıfırıncı derece deformasyon denklemi denmesinin nedeni budur. m. derece deformasyon denkleminin türevleri,

$$\frac{1}{m!}\frac{\partial^m \underline{\varphi}(x,t;q)}{\partial q^m}\bigg|_{q=0}$$

$$u_0^{[m]}(\vec{x},t)=(\vec{x},t)=\frac{\partial^m \phi(\vec{x},t;q)}{\partial q^m}\bigg|_{q=0} \tag{3.4ğ}$$

ile tanımlanır. Taylor teoremi ile $\phi(\vec{x},t;q)$, q'nun kuvvet serisine açılabilir,

$$\phi(\vec{x},t;q)= \phi(\vec{x},t;0)+\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{u_0^{[m]}(\vec{x},t)}{m!}\ q^m \tag{3.4h}$$

Buradan,

$$u_m(\vec{x},t)=\frac{u_0^{[m]}(\vec{x},t)}{m!}=\frac{1}{m!}\frac{\partial^m \phi(\vec{x},t;q)}{\partial q^m}\bigg|_{q=0}=D_m(\phi) \tag{3.4ı}$$

bulunur. Denklem (3.4e)'i kullanılarak Denklem (3.4h) $\phi(\vec{x},t;q)$' nin kuvvet serisi,

$$\phi(\vec{x},t;q)=u_0\ (\vec{x},t)+\sum_{m=1}^{+\infty}u_m(\vec{x},t)q^m \tag{3.4i}$$

elde edilir. L lineer yardımcı operatörü $u_0\ (\vec{x},t)$ başlangıç çözümü, $\hbar \neq 0$ yakınsaklık kontrol parametresi ve $H(\vec{x},t)$, yardımcı fonksiyonu, aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde seçilir:

1. Her $q \in [0,1]$ için $\phi(\vec{x},t;q)$, Denklem (3.4e)'i sıfırıncı derece deformasyon denkleminin çözümüdür.
2. m=1.2.3,….için deformasyon türevi $u_0^{[m]}(\vec{x},t)$ mevcuttur.
3. $\phi(\vec{x},t;q)$ ' nun kuvvet serisi Denklem (3.4i) $q = 1$ ' de yakınsaktır.

Denklem (3.4g) ve (3.4i)'lerinden çözüm serisi,

$$u(\vec{x},t)=u_0\ (\vec{x},t)+\sum_{m=1}^{+\infty}u_m\ (\vec{x},t) \tag{3.4j}$$

bulunur. Bu ifade tam çözüm $u(\vec{x},t)$ ve $u_0(\vec{x},t)$ arasında yüksek derece deformasyon denklemleri ile belirlenen $u_m(\vec{x},t)$ terimleri yardımıyla bir ilişki kurar.

3.5. Yüksek Derece Deformasyon Denklemi

$\vec{u}_n=\{ u_0(\vec{x},t), u_1(\vec{x},t), u_2(\vec{x},t),\ldots u_n(\vec{x},t)\}$ vektörü tanımlansın. Denklem (3.4ı) tanımına göre $u_m(\vec{x},t)$ ‘ nin denklemi, sıfırıncı derece deformasyon denklemi olan Denklem (3.4ç)’ den türetilebilir. χ_m fonksiyonu Denklem (3.3a) ile tanımlanmak üzere,

$$L\left[u_m(\vec{x},t)-\chi_m u_{m-1}(\vec{x},t)\right]=\hbar H(\vec{x},t)R_m(\vec{u}_{m-1},\vec{x};t) \tag{3.5a}$$

$$R_m(\vec{u}_{m-1},\vec{x};t)=\frac{1}{m!}\frac{\partial^{m-1}N[(\vec{x},t;q)]}{\partial q^{m-1}}\bigg|_{q=0} \tag{3.5b}$$

m. derece deformasyon denklemi elde edilir.Denklem (3.2b) tanımından,

$$R_m(\vec{u}_{m-1},\vec{x};t)=D_{m-1}(N[\phi]) \tag{3.5c}$$

denklemi bulunur. Denklem (3.5c)’i, Denklem (3.5b)’inde yerine konularak,

$$L\left[u_m(\vec{x},t)-\chi_m u_{m-1}(\vec{x},t)\right]=\hbar H(\vec{x},t)D_{m-1}(N[\phi] \tag{3.5ç}$$

denklemi bulunur. Denklem (3.4i)’i, Denklem (3.4l)’inde yerine konularak,

$$R_m(\vec{u}_{m-1},\vec{x};t)=\frac{1}{(m-1)!}\left\{\frac{\partial^{m-1}}{\partial q^{m-1}}N\left[\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(\vec{x},t)q^n\right]\right\} \tag{3.5d}$$

bulunur. Bu da Denklem (3.2g) tanımına göre,

$$R_m(\vec{u}_{m-1},\vec{x};t)=D_{m-1}\left(N\left[\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(\vec{x},t)\right]\right)= D_{m-1}(N[u]) \tag{3.5e}$$

denklemini verir. Denklem (3.5ç) lineer deformasyon denklemi birbiri ardınca çözülerek $u_1(\vec{x},t)$, $u_2(\vec{x},t)$, elde edilir. $u(\vec{x},t)$ ‘ nin m.yaklaşımı,

$$u(\vec{x},t) \approx \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(\vec{x},t) \tag{3.5f}$$

ile verilir. Bir serinin yakınsaklığı önemlidir. Homotopi analiz metodu ile verilen Denklem (3.2j) çözüm serisinin, yakınsaklık olduğu sürece ele alınan lineer olmayan çözümü olduğu kanıtlanabilir.

Teorem (3.5.1) :

$$u(\vec{x},t)=u_0(\vec{x},t)+\sum_{m=1}^{+\infty} u_m(\vec{x},t)$$

serisi yakınsak ise Denklem (3.2j) denkleminin bir çözümüdür [66].

Kanıt: Eğer seri yakınsak ise,

$$s=\sum_{m=0}^{+\infty} u_m$$

Yazılabilir. Ayrıca seri yakınsak olduğundan $\lim_{n\to\infty} u_n=0$ sağlanır. Denklem (3.5a)'i kullanılarak,

$$\hbar H(\vec{x},t)\sum_{m=1}^{+\infty} R_m[\vec{u}_{m-1}(\vec{x};t)] = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} L\left[u_m(\vec{x},t)-\chi_m u_{m-1}(\vec{x},t)\right]$$

$$=L\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} L\left[u_m(\vec{x},t)-\chi_m u_{m-1}(\vec{x},t)\right]\right\}$$

$$=L\left|\lim_{n\to\infty} u_n(\vec{x},t)\right|$$

$$=0$$

$\hbar\neq0$, $H(\vec{x},t)\neq0$ olduğundan,

$$\sum_{m=1}^{+\infty} R_m[\vec{u}_{m-1}(\vec{x};t)]=0$$

bulunur. $u(\vec{x},t)$, Denklem (3.4a) denkleminin çözümüdür. [75]

4. İKİNCİ MERTEBEDEN BULANIK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN HAM ile ÇÖZÜMÜ

HAM'ın çeşitli diferansiyel denklemlere uygulanması [67-72] ' de verilmektedir. q∈[0,1] gömme parametresi olsun. Homotopi Analiz Metodu $\underline{x}(t,\alpha) \to \underline{\varphi}(t,\alpha;q)$ ve $\overline{x}(t,\alpha) \to \overline{\varphi}(t,\alpha;q)$ sürekli dönüşümü ile öyle ki q , 0 ' dan 1 ' e ve $\underline{\varphi}(t,\alpha;q)$, $\overline{\varphi}(t,\alpha;q)$ başlangıç yaklaşımından gerçek çözüme değişir. Buna göre lineer olmayan operatörler aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$N_1\left[\underline{\varphi}(t,\alpha;q)\right] = \frac{d^2}{dt^2}\left[\underline{\varphi}(t,\alpha;q)\right] - F\left(t, \overline{\varphi}(t,\alpha;q), \underline{\varphi}'(t,\alpha;q)\right)$$

$$N_2\left[\overline{\varphi}(t,\alpha;q)\right] = \frac{d^2}{dt^2}\left[\overline{\varphi}(t,\alpha;q)\right] - F\left(t, \underline{\varphi}(t,\alpha;q), \overline{\varphi}'(t,\alpha;q)\right)$$

$\hbar_i \neq 0$ ve $H_i(t) \neq 0, i = 1,2,$ sırasıyla yardımcı parametre ve yardımcı fonksiyonları göstersinler. q gömme parametresini kullanarak aşağıdaki sıfırıncı mertebe deformasyon denklemlerinin bir sınıfını oluşturabiliriz.

$$(1-q)L_1\left[\underline{\varphi}(t,\alpha;q) - \underline{x_0}(t,\alpha;q)\right] = q\hbar_1 H_1(t) N_1\left[\underline{\varphi}(t,\alpha;q)\right] \tag{4.1}$$

$$(1-q)L_2\left[\overline{\varphi}(t,\alpha;q) - \overline{x_0}(t,\alpha;q)\right] = q\hbar_2 H_2(t) N_2\left[\varphi(t,\alpha;q)\right] \tag{4.2}$$

burada başlangıç şartları şöyledir: $\underline{\varphi}(t,\alpha;q) = \underline{x_0}(t,\alpha)$ ve $\overline{\varphi}(t,\alpha;q) = \overline{x_0}(t,\alpha)$, öyle ki; $\underline{x_0}(t,\alpha)$ ve $\overline{x_0}(t,\alpha)$ sırasıyla $\underline{x}(t,\alpha)$ ve $\overline{x}(t,\alpha)$' nın başlangıç yaklaşımlarıdır. $q = 0$ olduğu zaman, çünkü $\underline{x_0}(t,\alpha)$ ve $\overline{x_0}(t,\alpha)$, Bölüm 2'deki Sistem (1,1)'deki başlangıç şartlarını sağladığından dolayı $\underline{\varphi}(t,\alpha;0) = \underline{x_0}(t,\alpha)$ ve $\overline{\varphi}(t,\alpha;0) = \overline{x_0}(t,\alpha)$ olur. Aynı zamanda $q = 1$ iken $\hbar_i \neq 0$ ve $H_i(t) \neq 0, i = 1,2,$ olduğu için sıfırıncı mertebe deformasyon denklemleri olan Denklem (4.1) ve (4.2)'leri, $\underline{\varphi}(t,\alpha;1) = \underline{x}(t,\alpha)$ ve

$\bar{\varphi}(t,\alpha;1)=\bar{x}(t,\alpha)$ ifadelerini verir. Taylor teoreminden $\underline{\varphi}(t,\alpha;q)$ ve $\bar{\varphi}(t,\alpha;q)$ aşağıdaki şekilde q gömme parametresinin kuvvet serisine açılırsa

$$\underline{\varphi}(t,\alpha;q)=\underline{x_0}(t,\alpha)+\sum_{m=1}^{\infty}\underline{x_m}(t,\alpha)q^m \tag{4.3}$$

$$\bar{\varphi}(t,\alpha;q)=\overline{x_0}(t,\alpha)+\sum_{m=1}^{\infty}\overline{x_m}(t,\alpha)q^m \tag{4.4}$$

elde edilir. Burada $\underline{x_m}(t,\alpha)=\dfrac{1}{m!}\dfrac{\partial^m\underline{\varphi}(t,\alpha;q)}{\partial q^m}\bigg|_{q=0}$ ve $\underline{x_m}(t,\alpha)=\dfrac{1}{m!}\dfrac{\partial^m\bar{\varphi}(t,\alpha;q)}{\partial q^m}\bigg|_{q=0}$

Buna göre $q=1$ iken seriler,

$$\underline{x}(t,\alpha)=\underline{x_0}(t,\alpha)+\sum_{m=1}^{\infty}\underline{x_m}(t,\alpha) \tag{4.5}$$

$$\bar{x}(t,\alpha)=\overline{x_0}(t,\alpha)+\sum_{m=1}^{\infty}\overline{x_m}(t,\alpha) \tag{4.6}$$

şeklinde olur. HAM' ın m.mertebe deformasyon denklemleri,

$$L_1\left[\underline{x}_m(t,\alpha)-\chi_m\underline{x}_{m-1}(t,\alpha)\right]=\hbar H_1(t)R\underline{x}_m\left(\vec{\underline{x}}_{m-1}(t,\alpha),\vec{\bar{x}}_{m-1}(t,\alpha)\right) \tag{4.7}$$

$$L_2\left[\bar{x}_m(t,\alpha)-\chi_m\bar{x}_{m-1}(t,\alpha)\right]=\hbar H_1(t)R\bar{x}_m\left(\vec{\underline{x}}_{m-1}(t,\alpha),\vec{\bar{x}}_{m-1}(t,\alpha)\right) \tag{4.8}$$

ve buradan

$$R\underline{x}_m\left(\vec{\underline{x}}_{m-1}(t,\alpha),\vec{\bar{x}}_{m-1}(t,\alpha)\right)=\frac{d^2}{dt^2}\underline{x}_m(t,\alpha)-\frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}F\left(t,\bar{\varphi}(t,\alpha;q),\underline{\varphi}'(t,\alpha;q)\right)}{\partial q^{m-1}}\Bigg|_{q\to 0}$$

$$R\bar{x}_m\left(\vec{\underline{x}}_{m-1}(t,\alpha),\vec{\bar{x}}_{m-1}(t,\alpha)\right)=\frac{d^2}{dt^2}\bar{x}_m(t,\alpha)-\frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}F\left(t,\underline{\varphi}(t,\alpha;q),\bar{\varphi}(t,\alpha;q)\right)}{\partial q^{m-1}}\Bigg|_{q\to 0}$$

Basitlik için $H_i(t)$, $\hbar_i$=h ve $L=\dfrac{d^2}{dt^2}, i=1,2.$ seçilir. O zaman $\dfrac{d^2}{dt^2}$ ' nin sağ tersi

$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}(.)d\tau\tau dt$ olur. Böylece $m \geq 1$ için Denklem (4.7) ve (4.8)'leri ,

$$\underline{x}_m(t,\alpha)=\chi_m \underline{x}_{m-1}(t,\alpha)+\hbar\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} R\underline{x}_m\left(\vec{\underline{x}}_{m-1}(\tau,\alpha),\vec{\overline{x}}_{m-1}(t,\alpha)\right)d\tau\, dt \tag{4.9}$$

$$\overline{x}_m(t,\alpha)=\chi_m \overline{x}_{m-1}(t,\alpha)+\hbar\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} R\overline{x}_m\left(\vec{\underline{x}}_{m-1}(\tau,\alpha),\vec{\overline{x}}_{m-1}(t,\alpha)\right)d\tau\, dt \tag{4.10}$$

şeklinde olur. $\underline{x}_0(t,\alpha)=\underline{x}(t_0,\alpha)=\underline{x}^{(0)}(\alpha)$ ve $\overline{x}_0(t,\alpha)=\overline{x}(t_0,\alpha)=\overline{x}^{(0)}(\alpha)$ ifadelerini $\underline{x}(t,\alpha)$ ve $\overline{x}(t,\alpha)$ başlangıç yaklaşımları olarak seçersek o zaman iterasyon formülleri olan Denklem (4.9) ve (4.10)'leri kullanarak $\underline{x}_i(t,\alpha)$ ve $\overline{x}_i(t,\alpha), i=1,2,...,n$ ifadeleri hesaplanabilir. Sonuç olarak, k. terim serileri, $\psi_{\underline{x}_k}=\sum_{m=0}^{k-1}\underline{x}_m(t,\alpha)$ve $\psi_{\overline{x}_k}=\sum_{m=0}^{k-1}\overline{x}_m(t,\alpha)$ ile Bölüm 2'deki Sistem (1,1)'nin $\underline{x}(t,\alpha)$ ve $\overline{x}(t,\alpha)$ çözümlerine yaklaşılabilir.

4.1. Teorem

$A \subset R$, $\|\cdot\|_\infty$ normu ile donatılmış bir Banach uzayı ve Denklem (4.5) ve (4.6) ' nın $x_k(r,\alpha)$ dizisinin ħ'ın önceden belirli bir değeri için tanımlı olduğunu farz edelim. Ayrıca $x_0(r,\alpha)$başlangıç yaklaşımının $x(r,\alpha)$çözüm küresi içinde kaldığını farz edelim. $\gamma \in R$ sabit alındığında,

(i) Tüm k' lar için $\|x_{k+1}(r,\alpha)\| \leq \gamma\|x_k(r,\alpha)\|$, olacak şekilde bazı $\gamma \in [0,1]$varsa o zaman seri çözümü, r tanım kümesi üzerinde $p=1$iken $x(r,p,\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty}x_k(r,\alpha)p^k$ mutlak olarak $x(r,p,\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty}x_k(r,\alpha)$' ya yakınsar.

(ii) Tüm k'lar için $\|x_{k+1}(r,\alpha)\| \leq \gamma\|x_k(r,\alpha)\|$, olacak şekilde bazı $\gamma > 1$varsa o zaman seri çözümü, r tanım kümesi üzerinde $p=1$iken $x(r,p,\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty}x_k(r,\alpha)p^k$ mutlak olarak $x(r,p,\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty}x_k(r)$' a ıraksar [74].

5. NÜMERİK ÖRNEKLER

Bu bölüm de önerilen metodun etkinliğini göstermek için,

$$x''(t,\alpha) = -4x(t,\alpha)$$
$$x(0,\alpha) = (\alpha - 1, 1 - \alpha)$$
$$x'(0,\alpha) = \left(\frac{1}{2}(\alpha - 1), \frac{1}{2}(1 - \alpha)\right)$$

bulanık başlangıç değer problemi genelleştirilmiş Hukuhara türevi kullanılarak [67-72] hesaplanmaktadır.

Sistem (1,1),

$$\underline{x}''(t,\alpha) = -4\overline{x}(t,\alpha)$$
$$\overline{x}''(t,\alpha) = -4\underline{x}(t,\alpha)$$
$$\underline{x}(0,\alpha) = \alpha - 1, \overline{x}(0,\alpha) = 1 - \alpha$$
$$\underline{x}'(0,\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha - 1), \overline{x}'(0,\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \alpha)$$

Bu sistemin gerçek çözümü [68],

$$\underline{x}(t,\alpha) = \frac{1}{8}(\alpha - 1)\left(3e^{-2t} + 5e^{2t}\right)$$
$$\overline{x}(t,\alpha) = \frac{1}{8}(1 - \alpha)\left(3e^{-2t} + 5e^{2t}\right)$$

şeklindedir. Homotopi Analiz Metodu ile Sistem (1,1)'i çözmek için öncelikle aşağıdaki gibi başlangıç yaklaşımı seçilir [76],

$$\underline{x}_0(t,\alpha) = (\alpha - 1)\left(1 + \frac{t}{2} + 2t^2 + \frac{t^3}{3}\right)$$
$$\overline{x_0}(t,\alpha) = (1 - \alpha)\left(1 + \frac{t}{2} + 2t^2 + \frac{t^3}{3}\right)$$

O zaman iterasyon formülleri olan Denklem (4.9) ve (4.10)'lere göre bulanık başlangıç değer probleminin Homotopi Analiz Metodu ile seri çözümü,

$$\psi_{\underline{x}_1}(t,\alpha)=\underline{x}_0(t,\alpha)+\underline{x}_1(t,\alpha)\ \psi_{\underline{x}_2}(t,\alpha)=\underline{x}_0(t,\alpha)+\underline{x}_1(t,\alpha)+\underline{x}_2(t,\alpha)$$

şeklindedir.

$$\psi_{\underline{x}_0}(t,\alpha)=\underline{x}_0(t,\alpha)=\underline{x}(t_0,\alpha),$$
$$\psi_{\overline{x}_0}(t,\alpha)=\overline{x}_0(t,\alpha)=\overline{x}(t_0,\alpha)$$

olsun. Denklem (4.9) ve (4.10)'leri kullanılarak ,

$$\left\|\psi_{x_0}(t,\alpha)-x(t,\alpha)\right\|=\left\|(\alpha-1,1-\alpha)\left(1+\frac{t}{2}+2t^2+\frac{t^3}{3}-\frac{3}{8}e^{-2t}-\frac{5}{8}e^{2t}\right)\right\|$$

$$\left\|\psi_{x_1}(t,\alpha)-x(t,\alpha)\right\|\leq\gamma_1\left\|\psi_{x_0}(t,\alpha)-x(t,\alpha)\right\|$$

elde edilir. $t\in[0,1]$ ve $\alpha=0$ için ,

$$\left\|1+\frac{\hbar\left(\frac{2}{3}t^4+\frac{1}{15}t^5+\frac{4}{45}t^6+\frac{2}{315}t^7\right)}{\left(-1-\frac{t}{2}-2t^2-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{8}\left(3e^{-2t}+5e^{2t}\right)\right)}\right\|\leq\gamma_1<1$$

$\left\|\psi_{x_2}(t,\alpha)-x(t,\alpha)\right\|\leq\gamma_2\left\|\psi_{x_0}(t,\alpha)-x(t,\alpha)\right\|$ ve yine $t\in[0,1]$ ve $\alpha=0$ için

$$\left\|1+\frac{\left(\begin{array}{l}2\hbar\left(\frac{2}{315}t^7+\frac{4}{45}t^6+\frac{1}{15}t^5+\frac{2}{3}t^4\right)\\-\frac{1}{155925}\hbar^2t^4\left(2t^7+44t^6+55t^5+990t^4-990t^3-13860t^2-10395t-103950\right)\end{array}\right)}{-1-\frac{t}{2}-2t^2-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{8}\left(3e^{-2t}+5e^{2t}\right)}\right\|\leq\gamma_2<1$$

olur.

Tablo 5.1. $\hbar = -1$ iken 2-terimli HAM yaklaşık çözümü ve t=1 iken gerçek çözüm

α	$\left(\underline{x}_{exact}, \overline{x}_{exact}\right)$	$\left(\underline{x}_{HAM}, \overline{x}_{HAM}\right)$(ħ=-1)
0	(-4,6689 4,6689)	(-4,6689 4,6689)
0,2	(-3,7351 3,7351)	(-3,7351 3,7351)
0,4	(-2,8013 2,8013)	(-2,8013 2,8013)
0,6	(-1,8676 1,8676)	(-1,8676 1,8676)
0,8	(-0,9338 0,9338)	(-0,9338 0,9338)
1	(0,0000 0,0000)	(0,0000 0,0000)

Tablo 5.2. γ_1 ve γ_2 değerleri

	ħ=-1,02	ħ=-1	ħ=-0,99	ħ=-0,91
γ_1	0,0569	0,0110	0,0394	0,2910
γ_2	0,0010	0,000012	0,000492	0,026784

Tablo 5.1' de gerçek değerler ile α 'nın farklı değerleri için $\hbar = -1$ iken 2-terimli HAM yaklaşık çözümü gösterilmektedir. Tablo 5.2.'de $\alpha = 0$ ve ħ'ın farklı değerleri için γ_1 ve γ_2 farklı değerleri hesaplanmaktadır. HAM ' ın Sistem (1,1)'i için kesin çözüme yakın çözüm verdiği görülmektedir. Aynı zamanda ħ' nın optimal değeri için kesin çözüme çok yakın değerlerin elde edileceği görülebilir.

Sistem (2,2),

$$\underline{x}''(t,\alpha) = -4\overline{x}(t,\alpha)$$
$$\overline{x}''(t,\alpha) = -4\underline{x}(t,\alpha)$$
$$\underline{x}(0,\alpha) = \alpha - 1, \overline{x}(0,\alpha) = 1 - \alpha$$
$$\underline{x}'(0,\alpha) = \frac{1}{2}(1-\alpha), \overline{x}'(0,\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha - 1)$$

Bu sistemin gerçek çözümü [68],

$$\underline{x}(t,\alpha) = \frac{1}{8}(\alpha - 1)\left(5e^{-2t} + 3e^{2t}\right)$$
$$\overline{x}(t,\alpha) = \frac{1}{8}(1-\alpha)\left(5e^{-2t} + 3e^{2t}\right)$$

şeklindedir. Homotopi Analiz Metodu ile Sistem (2,2)’yi çözmek için öncelikle aşağıdaki gibi başlangıç yaklaşımı seçilir [76],

$$\underline{x}_0(t,\alpha)=(\alpha-1)\left(1-\frac{t}{2}+2t^2-\frac{t^3}{3}\right)$$
$$\overline{x_0}(t,\alpha)=(1-\alpha)\left(1-\frac{t}{2}+2t^2-\frac{t^3}{3}\right)$$

O zaman iterasyon formülleri olan Denklem (4.9) ve (4.10)’lere göre bulanık başlangıç değer probleminin Homotopi Analiz Metodu ile seri çözümü ,

$$\psi_{\underline{x}_1}(t,\alpha)=\underline{x}_0(t,\alpha)+\underline{x_1}(t,\alpha)$$
$$\psi_{\underline{x}_2}(t,\alpha)=\underline{x}_0(t,\alpha)+\underline{x_1}(t,\alpha)+\underline{x}_2(t,\alpha)$$

elde edilir.

$$\psi_{\underline{x}_0}(t,\alpha)=\underline{x}_0(t,\alpha)=\underline{x}(t_0,\alpha)$$
$$\psi_{\overline{x}_0}(t,\alpha)=\overline{x}_0(t,\alpha)=\overline{x}(t_0,\alpha)$$

olsun. Denklem (4.9) ve (4.10)’leri kullanılarak ,

$$\left\|\psi_{x_0}(t,\alpha)-x(t,\alpha)\right\|=\left\|(\alpha-1,1-\alpha)\left(1-\frac{t}{2}+2t^2-\frac{t^3}{3}-\frac{5}{8}e^{-2t}-\frac{3}{8}e^{2t}\right)\right\|$$

$$\left\|\psi_{x_1}(t,\alpha)-x(t,\alpha)\right\|\le\gamma_1\left\|\psi_{x_0}(t,\alpha)-x(t,\alpha)\right\|$$

elde edilir. $t\in[0,1]$ ve $\alpha=0$ için ,

$$\left\|1+\frac{\hbar\left(\frac{2}{3}t^4-\frac{1}{15}t^5+\frac{4}{45}t^6-\frac{2}{315}t^7\right)}{-1+\frac{t}{2}-2t^2+\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{8}\left(5e^{-2t}+3e^{2t}\right)}\right\|\le\gamma_1<1$$

$\left\|\psi_{x_2}(t,\alpha)-x(t,\alpha)\right\|\le\gamma_2\left\|\psi_{x_0}(t,\alpha)-x(t,\alpha)\right\|$ ve yine $t\in[0,1]$ ve $\alpha=0$ için ,

$$
\left\| 1+\frac{\begin{pmatrix} -2\hbar\left(\frac{2}{315}t^7-\frac{4}{45}t^6+\frac{1}{15}t^5-\frac{2}{3}t^4\right) \\ +\frac{\hbar^2 t^4}{155925}\left(2t^7-44t^6+55t^5-990t^4-990t^3+13860t^2-10395t+103950\right) \end{pmatrix}}{-1+\frac{t}{2}-2t^2+\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{8}\left(5e^{-2t}+3e^{2t}\right)} \right\| \le \gamma_2
$$

olur.

Tablo 5.3. ħ=-1 iken 2-terimli HAM yaklaşık çözümü ve t=1iken gerçek çözüm

α	$\left(\underline{x}_{exact}, \overline{x}_{exact}\right)$	$\left(\underline{x}_{HAM}, \overline{x}_{HAM}\right)$(ħ=-1)
0	(-2,8555 2,8555)	(-2,8555 2,8555)
0,2	(-2,2844 2,2844)	(-2,2844 2,2844)
0,4	(-1,7133 1,7133)	(-1,7133 1,7133)
0,6	(-1,1422 1,1422)	(-1,1422 1,1422)
0,8	(-0,5711 0,5711)	(-0,5711 0,5711)
1	(0,0000 0,0000)	(0,0000 0,0000)

Tablo 5.4. γ_1 ve γ_2 değerleri

	ħ=-1,02	ħ=-1	ħ=-0,99	$\hbar=-0{,}91$
γ_1	0,0565	0,0119	0,0400	0,2915
γ_2	0,001037	0,000014	0,000508	0,026876

Tablo 5.3' de gerçek değerler ile α'nın farklı değerleri için ħ=-1 iken 2-terimli HAM yaklaşık çözümü gösterilmektedir. Tablo 5.4.'de $\alpha=0$ ve ħ'ın farklı değerleri için γ_1 ve γ_2 farklı değerleri hesaplanmaktadır. HAM ' ın Sistem (2,2)'i için kesin çözüme yakın çözüm verdiği görülmektedir. Aynı zamanda ħ' nın optimal değeri için kesin çözüme çok yakın değerlerin elde edileceği görülebilir.

Sistem (1,2),

$$
\begin{aligned}
&\underline{x}''(t,\alpha) = -4\underline{x}(t,\alpha)\\
&\overline{x}''(t,\alpha) = -4\overline{x}(t,\alpha)\\
&\underline{x}(0,\alpha) = \alpha - 1,\ \overline{x}(0,\alpha) = 1-\alpha\\
&\underline{x}'(0,\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha-1), \overline{x}'(0,\alpha) = \frac{1}{2}(1-\alpha)
\end{aligned}
$$

Bu sistemin gerçek çözümü [68],

$$
\begin{aligned}
&\underline{x}(t,\alpha) = (\alpha-1)\left(\cos(2t) + \frac{1}{4}\sin(2t)\right)\\
&\overline{x}(t,\alpha) = (1-\alpha)\left(\cos(2t) + \frac{1}{4}\sin(2t)\right)
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Homotopi Analiz Metodu ile Sistem (1,2)'i çözmek için öncelikle aşağıdaki gibi başlangıç yaklaşımı seçilir [76],

$$
\begin{aligned}
&\underline{x}_0(t,\alpha) = (\alpha-1)\left(1+\frac{t}{2}\right)\\
&\overline{x_0}(t,\alpha) = (1-\alpha)\left(1+\frac{t}{2}\right)
\end{aligned}
$$

O zaman iterasyon formülleri olan Denklem (4.9) ve (4.10)'lerine göre bulanık başlangıç değer probleminin Homotopi Analiz Metodu ile seri çözümü ,

$$\psi_{\underline{x}_1}(t,\alpha) = \underline{x}_0(t,\alpha) + \underline{x_1}(t,\alpha)$$

$$\psi_{\underline{x}_2}(t,\alpha) = \underline{x}_0(t,\alpha) + \underline{x_1}(t,\alpha) + \underline{x}_2(t,\alpha)$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
&\psi_{\underline{x}_0}(t,\alpha) = \underline{x}_0(t,\alpha) = \underline{x}(t_0,\alpha),\\
&\psi_{\overline{x}_0}(t,\alpha) = \overline{x}_0(t,\alpha) = \overline{x}(t_0,\alpha)
\end{aligned}
$$

olsun. Denklem (4.9) ve (4.10)'leri kullanılarak

$$\left\|\psi_{x_0}(t,\alpha)-x(t,\alpha)\right\| = \left\|(\alpha-1,1-\alpha)\left(1+\frac{t}{2}-\cos(2t)-\frac{1}{4}\sin(2t)\right)\right\|$$

$\left\|\psi_{x_1}(t,\alpha)-x(t,\alpha)\right\| \leq \gamma_1\left\|\psi_{x_0}(t,\alpha)-x(t,\alpha)\right\|$ elde edilir. $t\in[0,1]$ ve $\alpha=0$ için

$$\left\|1+\frac{-2\hbar t^2-\frac{\hbar}{3}t^3}{-1-\frac{t}{2}+\cos(2t)+\frac{1}{4}\sin(2t)}\right\| \leq \gamma_1 < 1$$

ve yine $t\in[0,1]$ ve $\alpha=0$ için

$$\left\|1+\frac{-2\hbar t^2-\frac{\hbar}{3}t^3-2\hbar t^2-\frac{\hbar}{3}t^3-2\hbar^2t^2-\frac{\hbar^2}{3}t^3-\frac{8}{12}\hbar^2t^4-\frac{\hbar^2t^5}{15}}{-1-\frac{t}{2}+\cos(2t)+\frac{1}{4}\sin(2t)}\right\| \leq \gamma_2$$

olur.

Tablo 5.5. ħ=-0,91 iken 2-terimli HAM yaklaşık çözümü ve t=1iken gerçek çözüm

α	$(\underline{x}_{exact}, \overline{x}_{exact})$	$(\underline{x}_{HAM}, \overline{x}_{HAM})$ (ħ=-0,91)
0	(-0,1888 0,1888)	(-0,2072 0,2072)
0,2	(-0,1511 0,1511)	(-0,1657 0,1657)
0,4	(-0,1133 0,1133)	(-0,1243 0,1243)
0,6	(-0,0756 0,0756)	(-0,0829 0,0829)
0,8	(-0,0378 0,0378)	(-0,0414 0,0414)
1	(0,0000 0,0000)	(0,0000 0,0000)

Tablo 5.6. γ_1 ve γ_2 değerleri

	ħ=-1,02	ħ=-1	ħ=-0,99	ħ=-0,91
γ_1	0,6474	0,5868	0,5576	0,3717
γ_2	0,0934	0,0666	0,0544	0,0275

Tablo 5.5’ de gerçek değerler ile α’nın farklı değerleri için ħ=-0,91iken 2-terimli HAM yaklaşık çözümü gösterilmektedir. Tablo 5.6’de $\alpha=0$ ve ħ’ın farklı değerleri

için γ_1 ve γ_2 farklı değerleri hesaplanmaktadır. HAM ‘ ın Sistem (1,2)’i için kesin çözüme yakın çözüm verdiği görülmektedir. Aynı zamanda ħ’ nın optimal değeri için kesin çözüme çok yakın değerlerin elde edileceği görülebilir.

Sistem (2,1),

$$\underline{x}''(t,\alpha) = -4\underline{x}(t,\alpha)$$
$$\overline{x}''(t,\alpha) = -4\overline{x}(t,\alpha)$$
$$\underline{x}(0,\alpha) = \alpha - 1, \overline{x}(0,\alpha) = 1 - \alpha$$
$$\underline{x}'(0,\alpha) = \frac{1}{2}(1-\alpha), \overline{x}'(0,\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha - 1)$$

Bu sistemin gerçek çözümü [68],

$$\underline{x}(t,\alpha) = (\alpha - 1)\left(\cos(2t) - \frac{1}{4}\sin(2t)\right)$$
$$\overline{x}(t,\alpha) = (1-\alpha)\left(\cos(2t) - \frac{1}{4}\sin(2t)\right)$$

şeklindedir. Homotopi Analiz Metodu ile Sistem (2,1)’i çözmek için öncelikle aşağıdaki gibi başlangıç yaklaşımı seçilir [76],

$$\underline{x}_0(t,\alpha) = (\alpha - 1)\left(1 + \frac{t}{2}\right)$$
$$\overline{x_0}(t,\alpha) = (1-\alpha)\left(1 + \frac{t}{2}\right)$$

O zaman iterasyon formülleri olan Denklem (4.9) ve (4.10)’lerine göre bulanık başlangıç değer probleminin Homotopi Analiz Metodu ile seri çözümü ,

$$\psi_{\underline{x}_1}(t,\alpha) = \underline{x}_0(t,\alpha) + \underline{x}_1(t,\alpha)$$

$$\psi_{\underline{x}_2}(t,\alpha) = \underline{x}_0(t,\alpha) + \underline{x}_1(t,\alpha) + \underline{x}_2(t,\alpha)$$

elde edilir.

$$\psi_{\underline{x}_0}(t,\alpha) = \underline{x}_0(t,\alpha) = \underline{x}(t_0,\alpha),$$
$$\psi_{\overline{x}_0}(t,\alpha) = \overline{x}_0(t,\alpha) = \overline{x}(t_0,\alpha)$$

olsun. Denklem (4.9) ve (4.10)’leri kullanılarak

$$\left\|\psi_{x_0}(t,\alpha)-x(t,\alpha)\right\|=\left\|(\alpha-1,1-\alpha)\left(1+\frac{t}{2}-\cos(2t)-\frac{1}{4}\sin(2t)\right)\right\|$$

$$\left\|\psi_{x_1}(t,\alpha)-x(t,\alpha)\right\|\leq\gamma_1\left\|\psi_{x_0}(t,\alpha)-x(t,\alpha)\right\|$$

elde edilir. $t\in[0,1]$ ve $\alpha=0$ için,

$$\left\|1+\frac{-2\hbar t^2-\dfrac{\hbar t^3}{3}}{-1-\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{4}\sin(2t)+\cos(2t)}\right\|\leq\gamma_1<1$$

$$\left\|\psi_{x_2}(t,\alpha)-x(t,\alpha)\right\|\leq\gamma_2\left\|\psi_{x_0}(t,\alpha)-x(t,\alpha)\right\|$$

ve yine $t\in[0,1]$ ve $\alpha=0$ için ,

$$\left\|1+\frac{-2\hbar t^2+\dfrac{\hbar}{3}t^3-2\hbar t^2+\dfrac{\hbar}{3}t^3-2\hbar^2t^2+\dfrac{\hbar^2}{3}t^3-\dfrac{8}{12}\hbar^2t^4+\dfrac{\hbar^2t^5}{15}}{-1+\dfrac{t}{2}+\cos(2t)-\dfrac{1}{4}\sin(2t)}\right\|\leq\gamma_2$$

olur.

Tablo 5.7. ħ=-0,91 iken 2-terimli HAM yaklaşık çözümü ve t=1iken gerçek çözüm

α	$(\underline{x}_{exact},\overline{x}_{exact})$	$(\underline{x}_{HAM},\overline{x}_{HAM})$ (ħ=-0,91)
0	(-0,6435 0,6435)	(-0,6563 0,6563)
0,2	(-0,5148 0,5148)	(-0,5250 0,5250)
0,4	(-0,3861 0,3861)	(-0,3938 0,3938)
0,6	(-0,2574 0,2574)	(-0,2625 0,2625)
0,8	(-0,1287 0,1287)	(-0,1313 0,1313)
1	(0,00000 0,0000)	(0,00000 0,0000)

Tablo 5.8. γ_1 ve γ_2 değerleri

	ħ=-1,02	ħ=-1	ħ=-0,99	ħ=-0,91
γ_1	0,7453	0,6839	0,6541	0,4555
γ_2	0,1149	0,0836	0,0691	0,0305

Tablo 5.7' de gerçek değerler ile α 'nın farklı değerleri için ħ=-0,91iken 2-terimli HAM yaklaşık çözümü gösterilmektedir. Tablo 5.8'de $\alpha=0$ ve ħ'ın farklı değerleri için

γ_1 ve γ_2 farklı değerleri hesaplanmaktadır. HAM ‘ ın Sistem (2,1)’i için kesin çözüme yakın çözüm verdiği görülmektedir. Aynı zamanda ħ’ nın optimal değeri için kesin çözüme çok yakın değerlerin elde edileceği görülebilir.

6. SONUÇ

Homotopi Analiz Metodu (HAM), lineer ve lineer olmayan bulanık başlangıç değer problemlerin yaklaşık çözümlerini bulmada kullanılan güçlü ve etkili bir tekniktir. Önerilen algoritma, yardımcı parametre ħ ‘nin ‘ın uygun değerlerini seçerek hızla yakınsayan bir seri üretmektedir. Burada ifade edilmesi gereken iki nokta vardır. Birincisi HAM, yardımcı parametre ħ ‘ni tanıtarak seri çözümünün yakınsaklık bölgesini ayarlayıp kontrol etmekte bize yol göstermektedir. İkincisi HAM’ la bulunan sonuçlar lineer ve lineer olmayan durumlarda daha az hesaplama gerektirerek çok etkili ve kullanışlıdır. Bu durumda lineer ve lineer olmayan bulanık problemlerin genel sınıflarına genişletilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Ahmad M. Z., Boets B. De., A Predator-Prey Model with Fuzzy Initial Population, *IFSA-EUSFLAT*, 2009, **12**, 1311-1314.

[2] El Naschie M. S., From Experimental Quantum Optics to Quantum Gravity via a Fuzzy Köhler Manilfold, *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, **25**, 969-977.

[3] Abbod M. F., Von Keyserlingk D. G. , Linkens D. A., Mahfouf M., Survey of Utilization of Fuzzy Technology in Medicine and Health Care, *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, **120**, 331-349.

[4] Barro S., Marin R., *Fuzzy Logic in Medicine*, Physica –Verlag, Heidelberg, 2002.

[5] Zhang H., Liao X., Yu J., Fuzzy Modelling and synchronization of Hyperchaotic Systems, *Chaos, Solitons and Fractals,* 2005, **26**, 835-843.

[6] El Naschie M. S., On a Fuzzy Köhler-Like Manifold which is consistent with the two Slit Experiment, *International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation,* 2005, **6**, 95-98.

[7] Feng G. and Chen G., Adaptative Control of Discrete –Time Chaotic Systems: A Fuzzy Control Approach, *Chaos, Solitons and Fractals,* 2005, **23**, 459-467.

[8] Hanss M., *Applied Fuzzy Arithmetic: An Introduction with Engineering Applications,* Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[9] Zadeh L. A., Fuzzy Sets, Information and Control,1965, **8**, 338-353.

[10] Chang S. S. L, Zadeh L. A., On Fuzzy Mapping and Control, *IEEE Transaction Systems, Man and Cybernetics*,1972, **2**, 30-34.

[11] Dubois D., Prade H., Towards Fuzzy Differential Calculus, *Fuzzy Sets and Systems*, 1982, **8**, 225-233.

[12] Puri M. L., Ralescu D. A., Differential of Fuzzy Functions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*,1983, **91**, 552-558.

[13] Kandel A., Byatt W. J., Fuzzy Differential Equations in: *Proceedings of the International Conference on Cybernetics and Soceity* , Tokyo, 12 November 1978.

[14] Kaleva O., Fuzzy Differential Equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 1987, **24**, 301-317.

[15] Kaleva O., The Cauchy Problem for Fuzzy Differential Equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 1990, **135**, 389-396.

[16] Seikkala S., On the Fuzzy Initial Value Problem, *Fuzzy Sets and Systems*, 1987, **24**, 319-330.

[17] He O., Yi W., On Fuzzy Differential Equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 1989, **24**, 321-325.

[18] Kloeden P., Remarks on Peano- like Theorems for Fuzzy Differential Equations, *Fuzzy Sets and Systems,* 1991, **44**, 161-164.

[19] Shakri J., Numerical Solutions of Fuzzy Differential Equations, *Applied Mathematical Sciences*, 2007, **45**, 2231-2246.

[20] Dahaghin M. S., Moghodom M. M., Analysis of Two-Step Methods for Numerical solution of Fuzzy Ordinary Differential Equations, *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2010, **27**,333-340.

[21] Allahviranloo T., Ahmady N., Ahmady E., Two-Step Methods for Fuzzy Differential Equations, *International Mathematical Forum,* 2006, **17**(1), 823-832.

[22] Allahviranloo T., Ahmady N., Ahmady E., Numerical Solutions of Fuzzy Differential Equations by predictor-corrector method, *Information Sciences,* 2007, **177**,1633-1647.

[23] Bede B., Note on Numerical Solution of Fuzzy Differential Equations by Predector-Corrector Method , *Information Sciences,* 2008, **178**,1917-1922.

[24] Abbasbandy S., Allahviranloo T., Numerical Solutions of Fuzzy Differential Equations by Runge-Kutta Method, *Nonlinear Studies*, 2004, **11**(1),117-129.

[25] Pallignis S. C., Papageorigiou G., Famelis I. T, Runge-Methods for Fuzzy Differential Equations, *Applied Mathematics and Computation*, 2009, **209** ,97-105.

[26] Effati S., Pakdaman M., Artificial Neural Network Approach for Solving Differential Equations, *Information Sciences*, 2010, **180**,1453-1457.

[27] Buckley J. J, Feuring T., Fuzzy Differential Equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, **110**, 43-54.

[28] Chalco-Cano Y., Roman-Flores H., Comparison Between Some Approaches to Solve Fuzzy Differential Equations, *Fuzzy Sets and Systems,* 2009, **160**, 1517-1527.

[29] Nieto J. J., Rodriguez-Lopez R., Euler Polygonal Method for Metric Dynamical Systems, *Information Sciences*, 2007, **177**, 587-600.

[30] Prakash P., Sudha Priya G., Kim J. H., Third-Order Three-Point Fuzzy Boundary Value Problems, *Nonlineer Analysis: Hybrid Systems*, 2009, **3**, 323-333.

[31] Song S., Wu C., Existence and Uniqueness of Solutions to the Cauchy Problem of Fuzzy Differential Equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, **110**, 55-67.

[32] Bede B., Gal S. G., Generalization of the Differentiability of Fuzzy Number Value Functions with Applications to Fuzzy Differential Equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 2005, **151**, 581-599.

[33] Diamond P., Kloeden P., *Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications*, World Scientific, Singapore, 1994.

[34] Hüllermeier E., An Approach to Modelling and Simulation of Uncertain Systems, *Internal Journal of Uncertainty Fuzziness Knowledge-Based System*, 1997, **5**, 117-137.

[35] Bede B., Gal S. G., Almost Periodic Fuzzy-Number-Valued Functions, *Fuzzy Sets and Systems*, 2004, **147**, 385-403.

[36] Bede B., Rudos I. J., Bencsik A. L., First Order Linear Fuzzy Differential Equations Under Generalized Differentiability, *Information Sciences*, 2007, **177**, 1648-1662.

[37] Chalco-Cano Y., Roman-Flores., On New Solutions of Fuzzy Differential Equations, *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008, **38**, 112-119.

[38] Nieto J. J., Khastan A., Ivaz K., Numerical Solution of Fuzzy Differential Equations Under Generalized Differentiability, , *Nonlineer Analysis: Hybrid Systems*, 2009, **3**, 700-707.

[39] Bede B., *Department of Mathematical Sciences Lecture Series: Mathematical of Epistemic Uncertainty*, The University of Texas At El Paso, USA, 1995.

[40] Sevim F., Bulanık Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, Niğde Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Niğde, 2012, 329311.

[41] Liao S. J., *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analjysis Method*, Boca Raton: Chapman & Hall / CRC Press, New York, 2003.

[42] Liao S. J., A Second- Order Approximate Analytical Solution of A Simple Pendulum by th Process Analysis Method, *ASME J. Appl. Mech.*, 1992, **59**, 970-975.

[43] Liao S. J., An Approximate Solution Technique Not Depending On Small Parameters: A Special Example, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1995, **30**(3), 371-380.

[44] Liao S. J., A Kind of Approximate Solution Technique Which Does Not Depend Upon Small Parameters-II :An Application In Fluid Mechanic, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1997, **32**(5), 825-822.

[45] Liao S. J., Homotopy Analysis Method: A New Analytic Method For Nolinear Problems, *Appl. Math. Mech.(English-Ed.)*, 1998, **19**(10), 957-962.

[46] Liao S. J., Homotopy Analysis Method: A New Analytical Method For Nonlinear Problems Without Small Parameters, in: *The 3rd International Conference On Nonlinear Mechanics,* Shanghai, 17 August 1998.

[47] Liao S. J., An Explicit Totaly Analytic Approximate Solution For Blasius Viscous Flow Problem, *Int J. Non-Linear Mech.,*1999, **34,** 759-778.

[48] Liao S. J., Chang A. T., General Boundary Element Method For Nonlinear Problems, *Int. J. Numer. Meth. Fluids,* 1996, **23**, 467-483.

[49] Liao S. J., General Boundary Element Method For Nonlinear Heat Transfer Problems Governed by Hyberbolic Heat Conduction Equation, *Comput. Mech.*, 1997, **20**(5), 397-406.

[50] Liao S. J., On the General Boundary Element Method and its Further Generalization, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 1999, **31**, 627-655.

[51] Liao S. J., A Uniformly Valid Analytic Solution of Two Dimensional Viscous Flow Over A Semiinfinite Flat Plate, *J. Fluid Mech.,* 1999, **385**, 101-128.

[52] Liao S. J., A Non-Iterative Numerical Approach For 2-D Viscous Flow Problems Governed by the Folkner-Skan Equation, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 2001, **35**(5), 495-518.

[53] Liao S. J., Notes On the Homotopy Analysis Method: Some Definitions And Theorems, *Common. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2009, **14**, 983-997.

[54] Bataineh A. S., Noorani M. S. M., Hashim I., Modified Homotopy Analysis Method For Solving Systems of Second-Order BVPs, *Common. Nonlinear Sci. Numer. Simul.,* 2009, **14**, 430-442.

[55] Bataineh A. S., Noorani M. S. M., Hashim I., Solutions Of Time-Dependent Emden-Fowler Type Equations by Homotopy Analysis Method, *Physics Letters A.,* 2007, **371**(1-2), 72-82.

[56] Bataineh A. S., Noorani M. S. M., Hashim I., Solving Systems of ODEs by Homotopy Analysis Method, *Common. Nonlinear Sci. Numer. Simul.,* 2008, **13**(10), 2060-2070.

[57] Bataineh A. S., Noorani M. S. M., Hashim I., The Homotopy Analysis Method For Cauch Reaction- Diffusion Problems, *Physics Letters A.,* 2008, **372**(5), 613-618.

[58] Bataineh A. S., Noorani M. S. M., Hashim I., Series Solution Of The Multispecies Lotka-Volterna Equations By Means Of The Analysis Method, *Differential Equations & Nonlinear Mechanics,* DOI :10.1155/2008/816787.

[59] Jameel A. F., Ghoreishi M., Md.Ismail A. I. Approximate Solution Of High Order Fuzzy Initial Value Problems, *Journal Of Uncertain Systems*, 2014, **8**(3), 149-160.

[60] Abu-Arqub O., El-Ajou A., Momani S., Shawogfeh N., Analytical Solutions of Fuzzy Initial Value Problems by HAM, *Appl. Math. Inf. Sci.,* 2013, **7**(5), 1903-1919.

[61] Ulvi I., Bayrak M. A., Identifying On Unknown Function In A Parabolic Equation by Homotopy Analysis Method And Comparison With the Adomian Decomposition Method, *AIP Conference Proceedings,* First International *Conference On Analysis and Applied Mathematics (ICAAM),* Gümüşhane, Turkey, 18 Ekim 2012.

[62] Bayrak M. A., Can E., Approximate Solution of An Unknown Coefficients In Parabolic Equation, *Applied Math. Inform. Sci.,* 2014, **8**(4), 1605-1609.

[63] Alamari A. K., Noorani M. S. M., Nazar R., Li C. P., Homotopy Analysis Method For Solving Fractional Lorenz System, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.,* 2010, **15,** 1864-1872.

[64] Khastan A., Bahrami F., Ivaz K., New Results On Multiple Solution For Nth Order Fuzzy Differential Equations Under Generalized Differentiability, *Boundary Value Problems,* DOI: IO. 1155/2009/395714

[65] Liao S. J., *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method*, Boca Raton: Chapman &Hall/CRC Press, New York, 2003.

[66] Molabahrami A., Khani F., The Homotopi Analysis Method to Solve the Burgers-Huxley Equations. *Nonlinear Anal B:Real World Appl,* 2009, **10**(2)**,** 589-600.

[67] Khastan A., Nieto J. J., A Boundary Value Problem For Second Order Fuzzy Differential equations, *Nonlinear Analysis*, 2010, **72**, 3583-3593.

[68] Gasilov N. A., Fatullayev A. G., Amrahov E. , Khastan A., A New Approach to Fuzzy Initial Value Problem, *Soft Computing*, DOI:10.1007/s00500-013-1081z.

[69] Liao S. J., The Proposed Homotopy Analysis Technique for the Solution of Nonlinear Problems, Ph. D. Thesis, Shanghai Jiao Tong University, 1992.

[70] Liao S. J., An Optimal Homotopy Analysis Approach for Strongly Nonlinear Differential Equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical simulation*, 2011, **16**,1874-1889.

[71] Abu-Argub O., El-Jou A., Momani S. and Shawagfeh N., Analytical Solutions of Fuzzy Initial Value Problems by HAM , *Applied Mathematics and Information Sciences*, 2013, **75**,1903-1919.

[72] Liao S. J., On the Homotopy Analysis Method for Nonlinear Problems, *Applied Mathematics and Computat*ion, 2004, **147**, 499-513.

[73] Liao S. J., Homotopy analysis method: A New Analytic Method for Nonlinear Problems, *Applied Mathematics and Mechanics*,1998, **19**, 957-962.

[74] Liao S. J., Cheung K. F., Homotopy Analysis of Nonlinear Progressive Waves in Deep Water, *Journal of Engineering Mathematics*, 2003,**45**,105-116.

[75] Agırseven D. Bazı lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin homotopi pertürbasyon ve homotopi analiz metotları ile çözümlerinin analizi üzerine Trakya Üniv, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 2009, 0075317.

[76] Can E., Bayrak M. A., A new method for fuzzy reaction equation ,*MATCH Communications in Mathematical and Computer Chemistry*, 2015, **73**, 649-661.

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

[1] **Özçelikman L.**, Bayrak M. A., Approximate Solution of Fuzzy Second Order Differential Equations, *The 4th International Fuzzy Systems Symposiom*, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul, Türkiye, 5-6 Kasım 2015.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında İstanbul'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İstanbul' da tamamladı. 2000 yılında girdiği Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2009 yılında mezun oldu. 2013 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başlamıştır.