

**T.C**  
**FIRAT ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ASENKRON MOTOR  
ANALİZİNİN MATLAB'DA GERÇEKLEŞTİRİLMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Müh. Çiğdem BEZEK**

**Anabilim Dalı: Elektrik Elektronik Mühendisliği**

**Programı: Elektrik Makinaları**

**ARALIK-2009**

**T.C  
FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ**

**SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ASENKRON MOTOR  
ANALİZİNİN MATLAB'DA GERÇEKLEŞTİRİLMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Müh. Çiğdem BEZEK**

**(06113105)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 14 Aralık 2009**

**Tezin Savunulduğu Tarih : 29 Aralık 2009**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hasan KÜRÜM (F.Ü)**

**Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Hanifi GÜLDEMİR (F.Ü)**

**Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÖZDEMİR (F.Ü)**

**ARALIK-2009**

## ÖNSÖZ

Sonlu elemanlar yöntemiyle çalı abilmek için öncelikle çözüm bölgesinin uygun bir ekilde bölmelenmesi gerekmektedir. Çözüm a ı üretmek konusunda yazılmı binlerce makale, tez vb. yayın mevcuttur ve her geçen gün artmaktadır. Bu konuda amatörce oldu u gibi profesyonelce de ilerleme, daha iyiye ula ma amaçlanmaktadır.

Bu tez çalı ması süresince, sadece de erli fikirleriyle bana yol göstermekle kalmayıp, aynı zamanda beni sürekli yüreklendiren kıymetli danı man hocam, Sayın Prof Dr. Hasan KÜRÜM'e çok te ekkür ederim.

Yine tez çalı ması süresince büyük destek gördü üm ve fikirleriyle çalı malarımın katkıda bulunan Ar . Gör. Mehmet POLAT ve Dr. Eyyüp ÖKSÜZTEPE' ye te ekkürlerimi borç bilirim.

Son olarak tez çalı ması boyunca, gösterdikleri sabır ve desteklerinden dolayı çok sevdi im aileme ve arkadaş larıma te ekkürlerimi bir borç bilir, ükranlarımı sunarım.

**Çi dem BEZEK**  
**ELAZI -2009**

## Ç NDEK LER

### Sayfa No

<b>ÖNSÖZ</b> .....	<b>II</b>
<b>Ç NDEK LER</b> .....	<b>III</b>
<b>ÖZET</b> .....	<b>V</b>
<b>SUMMARY</b> .....	<b>VI</b>
<b>EK LLER L STES</b> .....	<b>VII</b>
<b>TABLolar L STES</b> .....	<b>IX</b>
<b>SEMBOLLER L STES</b> .....	<b>X</b>
<b>1. G R</b> .....	<b>1</b>
1.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi.....	1
1.2. Sonlu Elemanlar Yönteminin Tercih Edilmesinin Nedenleri.....	8
1.3. Tezin Amacı.....	9
1.4. Tezin çeri i.....	10
<b>2. ASENKRON MOTORLAR</b> .....	<b>12</b>
2.1. Stator:.....	13
2.2. Rotor.....	14
2.2.1. Sincap Kafesli Rotor.....	14
2.2.2. Bilezikli (Sargılı) Rotor.....	14
2.3. Üç Fazlı Sargılarda Döner Alanın Olu ması.....	16
2.3.1. Döner Alan çerisindeki Rotorun Dönü ü.....	17
2.4. Asenkron Motorlarda Kayma.....	18
2.5. Asenkron Motorun Rotor Devre Frekansı ve Endüklenen Gerilim.....	18
<b>3. SONLU ELEMANLAR YÖNTEM</b> .....	<b>20</b>
3.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi için Bölmelendirme.....	21
3.1.1. Eleman Çe itleri.....	21
3.1.2. Bölmelendirme Yöntemleri.....	24
3.1.3. Çözüm A ları.....	25
3.2. Sonlu Elemanlar Yöntemi Teorisi.....	26
3.2.1. Varyasyon Hesabı.....	26
3.2.2. Fonksiyonelin Extremum Olma Ko ulu.....	27

3.2.3. Sınır Koşulları.....	29
3.2.4. Rayleigh – Ritz Yöntemi.....	30
3.2.5. Sonlu Elemanlar ve Rayleigh-Ritz Yöntemi.....	33
3.2.6. Galerkin Yöntemi:.....	38
3.2.7. Elemanların Birleştirilmesi.....	42
<b>4. POISSON DENKLEMİ VE MANYETİK DEVRE BÜYÜKLÜKLERİNİN HESAPLANMASI.....</b>	<b>46</b>
4.1. Poisson Denklemlerinin Elde Edilmesi.....	46
4.2. Kaynak Fonksiyonlarının Girilmesi.....	47
4.3. Manyetik İndüksiyonun Hesabı.....	50
4.4. Manyetik Akı Yolu Çizimi.....	51
4.5. Nonlineer Yaklaşım.....	53
4.6. Magnetik Enerji ve İnduktansın Hesabı.....	55
4.7. Moment Hesabı:.....	55
<b>5. ASENKRON MOTORUN MATLAB PROGRAMLAMA DİLİ KULLANILARAK SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ANALİZİ ..</b>	<b>58</b>
5.1. Matlab'a Giriş:.....	58
5.1.1. Matlab Ürün Ailesi.....	58
5.1.2. Matlab Araç Kutuları(Toolboxes):.....	60
5.1.3. Matlab'ın kullanım amacı ve alanı:.....	61
5.1.4. Matlab'ın Kullanım Yerleri:.....	61
5.2. Asenkron Motorun Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Analizi.....	61
5.2.1. Motor Geometrisinin Tanımlanması:.....	62
5.2.1.1. Stator Geometrisi:.....	63
5.2.1.2. Rotor Geometrisi:.....	64
5.2.1.3. Stator Sarım Şeması:.....	65
5.2.2. Motorda Kullanılan Materyallerin Tanımlanması:.....	66
5.2.3. Programımızın Tanıtımı:.....	67
<b>6. SONUÇLAR.....</b>	<b>82</b>
<b>KAYNAKLAR.....</b>	<b>83</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ .....</b>	<b>87</b>

## ÖZET

Asenkron makinelerin işletme kolaylığının ve kontrollerinin basit olmasının yanında, stator ve rotor oluk geometrileri bakımından aslında karmaşık yapıya sahip makinelerdir. Sanayide yaygın kullanılmaları sebebiyle tasarımlarının maksimum verim ve en iyi moment değerlerini verecek şekilde yapılması gerekir.

Asenkron motorların tasarımında günümüze kadar klasik yöntemler kullanılmaktadır. Klasik yöntemle yapılan tasarımlar sonucunda elde edilen asenkron motor, hedeflenen sonucu vermeyebilir. Bu nedenle sonlu elemanlar yöntemiyle asenkron motor tasarımı önemli ilgi görmektedir. Sonlu elemanlar yöntemi ile tasarım yapabilmek için ilk önce aynı yöntemle analiz yapabilmek gereklidir.

Bu çalışmada, sonlu elemanlar yöntemi (SEY) kullanılarak asenkron motorun çözüm bölgesinde magnetik vektör potansiyel ve magnetik akı yoğunluğu değerleri incelenmiştir. Enerji ve moment değerleri hesaplanmıştır. Bunun için Matlab programlama dili kullanılarak bir program geliştirilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Asenkron Motor, Sonlu Elemanlar Yöntemi, Matlab

## SUMMARY

### **Realization of Asenkron Motor Analysis in Matlab by Finite Element Method**

Although induction machines are simple and rugged for operational maintenance purposes, they have indeed somewhat complex stator and rotor slot geometries. Industrial practice demands the maximum efficiency and highest torque values from these machines.

Classical methods are used in the design of inductions motors up to the present. The result may not be targeted classical method obtained as a result of the induction motor designs. Therefore, the finite element method the design of induction motor sees significant interest. Design with FEM requires to be able to do analysis with the same technique.

In this study, the magnetic vector potential and magnetic flux density changes were investigated in the solution of the induction motor using finite element method (FEM). Energy and tork values are calculated. For this, a program developed using Matlab programming language.

**Keywords:** Induction Motor, Finite Element Method, Matlab

## EKLER LİSTESİ

### Sayfa No

ekil 2.1 Asenkron motor .....	13
ekil 2.2 Üç Fazlı Sargıların Oluşturduğu Döner Alan.....	16
ekil 2.3 Döner Alan Çerçevesindeki Rotorun Dönüşü.....	17
ekil 3.1 İki boyutlu SEY’de kullanılan elemanlar.....	22
ekil 3.2 Üç boyutlu SEY’de kullanılan elemanlar.....	22
ekil 3.3 SEY’de kullanılmayan eleman tipleri .....	23
ekil 3.4 Enerji bölgelerinin bölünmesi .....	23
ekil 3.5 Düzenli alanlar .....	25
ekil 3.6 Düzensiz alan .....	25
ekil 3.7 Bir fonksiyonun varyasyonu.....	28
ekil 3.8 Bir üçgen elemanı .....	33
ekil 3.9 Bir üçgen elemanın potansiyeli .....	40
ekil 3.10 Üçgen elemanların birleştirilmesi .....	43
ekil 4.1 Kaynak fonksiyonlarının tanımlanması .....	47
ekil 4.2 $A_v$ noktasının vektör potansiyelinin bulunması .....	52
ekil 4.3 Manyetik Geçirgenlik ile Manyetik İndüksiyonun Değişimi.....	54
ekil 4.4 Magnetik alan diyagramı, yerel stress ve diğer bileşenler.....	56
ekil 5.1 Matlab Ürün Ailesi .....	59
ekil 5.2 Motorun Önden Görünümü .....	62
ekil 5.3 a) Stator Ölçüleri b) Stator Oluk Ölçüleri .....	63
ekil 5.4 a) Rotor Ölçüleri b) Rotor Oluk Ölçüleri .....	64
ekil 5.5 Stator Sarım Şeması.....	65
ekil 5.6 Materyal Türlerine Göre Motor Geometrisi.....	67
ekil 5.7 Motorumuzun Elle Bölümendirilmiş Durumu.....	68
ekil 5.8 Tek Üçgen Eleman .....	70
ekil 5.9 Bir Tek Üçgen Elemandan Elde Edilen Yeni Üçgen Elemanlar.....	70
ekil 5.10 Motorumuzun Otomatik Bölümendirilmiş Durumu.....	73
ekil 5.11 Kayma=0 olduğu durumda eleman potansiyel enerjileri (10e ri).....	76
ekil 5.12 Kayma=0 olduğu durumda eleman potansiyel enerjileri (25e ri).....	77



**Sayfa No**

ekil 5.13 Kayma=0.027 oldu u durumda e potansiyel e rileri (10e ri).....	78
ekil 5.14 Kayma=0.027 oldu u durumda e potansiyel e rileri (25e ri).....	79
ekil 5.15 Kayma=0.05 oldu u durumda e potansiyel e rileri (10e ri).....	80
ekil 5.16 Kayma=0.05 oldu u durumda e potansiyel e rileri (25e ri).....	81
ekil 5.17 Kayma ile Momentin sonuçlarının kar ıla tırılması.....	82

## TABLULAR L STES

### Sayfa No

<b>Tablo 5.1:</b> Motor analizinde kullanılan materyal özellikleri.....	66
---	----

## SEMBOLLER L STES

$A_i, A_{(x,y)}$	: Vektör Potansiyel (wb/m).
$a_1, a_2, a_3$	: Deneme fonksiyonu için sabit katsayılar.
$a_i, a_j, a_m$	: ekil fonksiyonları için kısaltma katsayıları (m).
$B$	: Akı yo unlu u (wb/m <sup>2</sup> ).
$B_x$	: x' yönündeki akı yo unlu u (wb/m <sup>2</sup> ).
$B_y$	: y' yönündeki akı yo unlu u (wb/m <sup>2</sup> ).
$b_i, b_j, b_m$	: ekil fonksiyonları için kısaltma katsayıları (m).
$\nabla$	: Bir üçgen elemanın alanı (m <sup>2</sup> ).
$\varepsilon$	: Gradient operatörü.
$F$	: Fark ifadesi.
$\phi, \phi_i, \phi_j, \phi_m, \phi_s, \phi_{0(s)}$	: Fonksiyonel.
$\xi_i$	: Vektör potansiyel (wb/m).
$H$	: Sınırdaki bilinen de er.
$h(s)$	: Manyetik Alan iddeti.
$J$	: Sınır ko ulu.
$\mu$	: Akım yo unlu u.
$\mu_0$	: Laplacienc operatörü.
$N_i, N_j, N_m, N_1^e, N_2^e, N_3^e$	: Ortamın manyetik permabilitesi (H\m).
$S_{ii}, S_{ij}, S_{im}, S_{ji}, S_{jj}, S_{jm}, S_{mi}, S_{mj}, S_{mm}$	: Havanın manyetik permabilitesi (H\m).
$\sigma$	: ekil fonksiyonları.
$\nu$	: Fonksiyoneli minimum yapan $\phi_i, \phi_j, \phi_m$ de erleri için kısaltma katsayıları.
$x_i, x_j, x_m$	: Elektriksel iletkenlik (1/\Omega m).
$y_i, y_j, y_m$	: Ortamın manyetik geçirgenli i (m/H).
	: Dü ümlerin x koordinatları (m).
	: Dü ümlerin y koordinatları (m).

## 1. G R

Bu bölümde asenkron motorların sonlu elemanlar yöntemiyle analizi ile ilgili yapılan çalışmaları, tezin literatürdeki yeri ve yapılan çalışmanın amacı verilmiştir.

Analitik çözümlerin olmadığı veya çok zor olduğu yerlerde fiziki sistemleri anlamak ve incelemeye tabi tutmak için nümerik yöntemlerden faydalanılır. Bol miktarda hesaplama, yazma çizme gerektiren bu yöntemlerden birisi de Sonlu Elemanlar Yöntemi'dir (SEY). SEY'in kullanım sahası çok geniştir, çünkü fiziki sistemlerin hemen hepsi benzer etkilerde diferansiyel denklemlerle ifade edilirler. Sonlu elemanlar yöntemi de bir çeşit diferansiyel denklem çözen nümerik yöntemdir. Aerodinamik ve akış problemleri, elektrostatik, elektromanyetik, mekanik problemlerine SEY ile yaklaşım yapılmaktadır. SEY'ne dayanarak çözüm yapan geniş kapsamlı paket programlar da mevcuttur (ANSYS, MAXWELL vb.). Bilgisayar alanındaki gelişmeler nümerik yöntemleri, dolayısıyla sanal tasarımları daha tutulur hale getirmiştir.

### 1.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi

Doküman asenkron motorlara ve az sayıda da olsa uç etkilerine yönelik, çeşitli manyetik alan problemlerine zaman içinde birçok yayın yapılmıştır. Bu konuda çalışan araştırmacılar çeşitli yöntemlerle analitik ve nümerik sonuçlar bulmuş, bunları test sonuçları ve ölçümlerle teyit etmeye çalışmışlardır.

Sonlu elemanlar yöntemi ilk olarak yapı analizinde kullanılmaya başlanmıştır. Hrennikoff ve Mc Henry tarafından geliştirilen yarı analitik analiz metodları bu konuda yapılan ilk çalışmalar olmuştur. "Sonlu Elemanlar" terimi ilk defa 1960 yılında Clough tarafından çalışmada telâffuz edilmiştir. Sonlu elemanlar yönteminin iki boyutlu teoriden sonra üç boyutlu problemlere uygulanması da gerçekleşmiştir [1].

1960'lı yıllardan itibaren bu yöntem yapı alanındaki problemlerin çözümünde kullanılmaya başlanmıştır. Örneğin Zienkiewicz ve Cheung 1965 yılında sonlu elemanlar yöntemini kullanarak Poisson denklemini çözmüştür. Sonlu elemanlar metodunun magnetik devrelere uygulanması ise 1970'li yıllara dayanmaktadır. Silvester tarafından yapılan, doyumsuz magnetik alan problemlerinin bu yöntemle analiz edilmesi bu konuda

göze çarpan ilk çalı malar olmu tur. 1971'de Chari ve Silvester tarafından elektrik makinelerinde elektromagnetik alan problemlerinin nonlinear varyasyon formülasyonunun çözümü yapılmı tır. M.V.K.Chari ve P.Silvester do rusal olmayan ortamlarda Poisson denklemini, enerji fonksiyoneli minimum yapacak ekilde çözmü tür. Birinci dereceden elemanlarla, karesel yakınsayan iterasyonlu çözüm kullanmı lardır. SEY kullanılarak yapılan bu hesaplamaların Sonlu Farklar Yönteminden daha ekonomik oldu unu belirtmi lerdir. Bir ba ka çalı mada da 5kW'lık d.a. motoruna bunu uygulamı lar ve probleme periyodiklik eklemi lerdir [2].

1972'de O.W.Andersen tarafından transformatörün sızıntı akısını hesaplayan, sonlu elemanlar yöntemine dayalı bir program anlatıldı. Bu program alan hakkındaki bilgiler, reaktans, kuvvetler ve kayıpları hesaplamakta kullanıldı [3].

P.Silvester elektrik makinalarının sonlu elemanlar yöntemiyle analizinde kullanılabilecek yüksek verimli yöntemler açıklanı tır. Bunların içinde Jakobyan matrisleri olu turma, sınır de erlerinin tam hesaba katılması, relüktivite özelliklerine spline yakla tırımları, yo un matris hafızası ve düzenlemesi ve yarı otomatik dü üm numaralandırma konularındaki geli mi teknikler bulunmaktadır. Bu tekniklerin kullanılmasıyla 1973'lü yıllarda 500-1000 dü üm de i kenli SEY modelleri orta ölçekli bilgisayarlar için kullanılabilir duruma gelmi tir [4].

1973 yılında tek yanlı asenkron motorlarda oldukça belirgin olan normal yöndeki kuvveti inceleyen E. M. Freeman ve ekibi, basit iki teori sunan bir makale yayınlamı lardır. Duran ve hareketli elektrik makinaları için dik yöndeki kuvvetin frekans ve hıza göre, kutup de i imine ve uyarıtıma göre de i imini gösteren denemeler içeren makalede, normal yöndeki kuvvet ve onun muhtemel yön ve büyüklük de i imlerinin önemli tasarım unsurlarından oldu u sonucuna varılmı tır [5].

1973'teki bir çalı masında Chari, manyetik yapılarıdaki girdap akımı problemlerine sonlu elemanlar yöntemi ile çözüm getirmi , uygun enerji fonksiyoneli ifade eden do rusal difüzyon denklemini açıklanı tır. Çözüm bölgesini üçgen elemanlara ayırarak enerji fonksiyoneli her kö edeki vektör potansiyele göre en dü ük olacak ekilde çözümü hesaplamı tır. Bu ekilde manyetik alan ve girdap akımı kayıplarının SEY ile ifadeleri elde edilmi tir. Bir kaç uygulama ile sonuçlar klasik analiz ve test sonuçlarıyla kar ıla tırılmı tır [6].

1976'da K. S. Demirchian ve arkadaş ları tarafından skaler potansiyel ve manyetik yük kavramları, sürekli durum manyetik alanları ve girdap akımlarının hesaplanması ortaya

konulmu , do rusal olan ve olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin matematiksel modelde çözülmesi ile yöntem geli tirilmi tir [7].

1976 yılında A. Y. Hanalla ve D. C. Macdonald, bir senkron motorun iki boyutlu bir bölgesini birinci dereceden üçgen elemanlar kullanarak modellediler. Denklemler Amper Kanunu kullanılarak elde edildi. Kısa devrelerin etkisi, denklemlere iletkenlik matrisi eklenerek hesaba katıldı. Çeli in de i ken manyetik geçirgenli i girdap akımlarının etkisi de göz önüne alındı [8].

1977’de O. C. Zienkiewicz tarafından üç boyutlu heterojen ortamlardaki manyetik alan problemlerini formüllelemek için bir yöntem önerildi. Burada, bir  $\phi$  skaler potansiyelinden ve verilen akım yo unluklarının olu turdu u analitik yöntemden yararlanılmı tır. Yardımcı problemin çözümü kolayca bulunur. Yöntemin üç bile enli vektör potansiyel A ile yapılanlardan daha ekonomik oldu u belirtilmi tir [9].

1978’de D. A. Lowther ve arkadaş ları açık sınır elektrik ve manyetik problemlerinin çözümü için bir sonlu elemanlar yineleme (iterasyon) tekni i tanımlamı lardır. Yöntem, dı bölgenin halka ekinde bir *süper eleman* ile modellenmesi esasına dayanmaktadır. Halkanın iç kenarı dı ındaki dü ümleri atılmı tır. Halkanın olu turulması ve otomatik bölmelenmesi anlatılmı tır. Çözüm için sunulan algoritma, dı kısımdaki Laplace bölgesini ifade eden sınır de er katsayılarını, iç bölgedeki sınır dü ümlerinin de erleri ile hesaplar. Yöntem, analitik ve deney modellerinden elde edilen sonuçların mukayesesi ile denenmi ve iyi uyum gözlenmi tir.

1978’de E. Chiricozzi ve A. Di Napoli tarafından, demir kısımlardaki doyum etkisi ve rotor sarımındaki girdap akımı hesaba katılarak bir generatörün rotor di leri içindeki manyetik alanın incelenmesi yapıldı. Durum de i kenleri yakla ımı ve SEY’nin kullanıldı ı incelemede, manyetik alanın rotorda basamak fonksiyonlu akım ve statorda sinüsoidal üç fazlı do rusal akım yo unlu u ile olu turuldu u kabul edildi .

1980 M. Chiampi imzalı yayında, transformatör demiri içindeki üç boyutlu manyetik alan da ılımının hesaplanması için histeresis ve girdap akımları ihmal edilerek bir nümerik yöntem önerildi. Manyetik alan, eliptik bir denklemi sa layan bir skaler potansiyelden elde edildi. Bu denklem iteratif yöntemlerle çözüldü. Transformatör nüvesinde manyetik alan da ılımının hesabı için bir SEY programı geli tirildi. Bir örnek üzerinde yorumlar yapıldı.

M. V. K.Chari tarafından 1981’de yayınlanan magnetostatik problemler için esas alınabilecek makalede üç boyutlu vektör potansiyel çözümü ortaya konulmu , fonksiyonelin minimum yapılmasının problemin çözümünü verdi i gösterilmi tir.

Geliştirilen analiz yöntemi, iki sarımlı bir transformatör ve bir türbin generatörü parçası üzerinde uygulanmıştır.

K. Pnaisa ve arkadaşlarınınca 1981'de yayınlanan makalede iki boyutlu düzlem ve eksen simetrik elektromanyetik alan hesapları için bir SEY paketi anlatıldı. Yazılımın verimi örnekler çözülerek incelendi. Değişik program sürümleri doğruluk yönünden mukayese edildi. Doğrusal olmayan ortamlar için doğrudan yineleme ve Newton-Raphson yöntemleri uygulandı.

S. Williamson ve ekibi, 1982'de doğrusal olmayan manyetik alan problemlerinin çözümünde Newton-Raphson yöntemini kullanmıştır. Akım kaynakları ve potansiyeller kompleks alınmıştır. Yöntemin kullanıldığı, tek fazlı asenkron motorun sürekli durum çalışması incelenerek gösterilmiştir. Akım doyumu hallerinde dahi yakınsamanın hızlı olduğu görülmüştür [10].

3B girdap akımı problemine T- $\Omega$  yöntemiyle yaklaşım T.W.Preston ve A. B. J. Reece tarafından sunuldu. T elektrik vektör potansiyeli,  $\Omega$  ise manyetik skaler potansiyeli ifade etmektedir. Yöntemin avantajları, sınır artlarının kolayca belirlenmesi ve gereken değişken miktarının ekonomik olmasıdır. Problemde manyetik ve elektrik bölgeler ayrılır. İletken olmayan bölgelerde T sıfır veya sabit bir değerdir [11].

3B girdap akımı problemlerinde vektör potansiyel A ve skaler potansiyel  $\phi$  kullanıldı. Manyetik olmayan bölge için Galerkin yöntemiyle bir SEY denklem sistemi kuruldu. Skaler potansiyel  $\phi$ , düğüm başına bilinmeyen sayısını azaltmak üzere denklem sisteminde yok edildi. Potansiyellerin ve girdap akımlarının zaman bağımlı hesaplanması için adım adım işlem yapılabileceği belirtildi.

1982'de M. Poloujadoff ve H. El Kashab tarafından sonlu farklar yöntemiyle lineer asenkron motorun analizi çalışması yapıldı. Motorun elektromanyetik denklemleri yazılarak sonlu farklar yöntemine uyarlandı. Sekonderin sonsuz, demirin sonlu uzunluktaki yapısı kısımlama (partition) yöntemiyle hesaba dahil edildi. Bir aktarma (transmission) matrisinin kullanılmasıyla birçok bilinmeyen aradan çıkartıldı. Böylece klasik tersini alma yöntemiyle çözülebilecek büyüklükte bir denklem sistemi elde edildi. Aktarma matrisinin öz değerleri ile Fourier dönüşümü tekniğiyle elde edilen bazı ifadelerin kutupları arasında ilginç bir benzerlik tesbit edildi.

M. A. Rodriguez Pezueta ve J. Sanz Feito, lineer asenkron motorun oyuklu modelini ele almış, fazlar arasındaki simetrisizlik, rotorun düzgün olmaması, birinci harmonikteki mmk dağılımı, olukların sebep olduğu hava aralığı değişimleri, akım yerine

stator gerilimlerinin bilinmesi ve uç etkilerinin bir eklede modellenmesi durumlarına yönelik bir hesaplama yöntemi anlatılmaktadır.

D. Rodger ve J. F. Eastham 1982 yılında, lineer asenkron motorların dik yöndeki hızlarına ilişkin performanslarını sonlu elemanlar yöntemi ve Fourier analizi tekniğiyle hesapladılar. Küçük bir lineer makina için iki yöntemden elde edilen sonuçlar karşılaştırıldı. Sabit akım ile beslenen, yüksek hızlı lineer asenkron makinanın tahtının hava aralığındaki basamak artışı tepkisi hesaplandı. Oluşan dikey salınımların periyodu 2.1san. elektromanyetik sönüm etkileri zayıf ve salınım sönümleme zaman sabiti 35san. civarında bulundu.

Sonlu elemanlar yöntemiyle çok fazlı AC cihazların akım dağılımları ve manyetik alanlarının hesaplanması hususunda J. R. Brauer'in 1982'de bir çalışması bulunmaktadır. Sürekli durum girdap akımları ve güç kayıplarının, elektrik ark düzeninin çelik kısımları için belirlendiği çalışma iki farklı üç fazlı bara sistemi için akım dağılımları hesaplandı. Hesaplanan sonuçlar, önceki hesap ve ölçümlerle karşılaştırıldı [12].

J. H. McWhirter'in 1982 tarihli bir makalesinde girdap akımlarının üç boyutlu ekle gösteren levha ekleindeki ince iletkenler içinde nümerik olarak hesaplanması anlatıldı. Uyarıcı elektrik alan, dıştaki bir telden geçen akım tarafından oluşturulmuştur. Bahsedilen nümerik yöntem, Fredholm integral denkleminde dayanmaktadır.

B. Brunelli ve ekibi 1983'teki makalesinde gerilim uyartımlı, 3 fazlı, tek parçalı demir rotorlu asenkron motorun iki boyutlu sonlu elemanlar analizini anlatmaktadır. Doyumu hesaba tam olarak katabilmek için, her bir sürekli durum operasyon noktası, sabit bir hız için, elektromanyetik alan denkleminin asimptotik çözümü eklede hesaplanmıştır, çalışma deney sonuçlarıyla desteklenmiştir.

M. Okabe ve arkadaşları 1983 yılında sonlu elemanlar yöntemini güç transformatöründeki demir kayıplarına çeliğin manyetik özelliklerinin etkisini incelemek ve anlaşılmasına yardımcı olmak için kullandılar. Manyetik özelliklerin ifadesinde maddeye has üç sabitten faydalandılar.

Doyumdaki elektrik makinalarının girdap akımı hesabı için bir model F. Bcuillaut ve A. Razeq tarafından 1983'de yapılan bir çalışmayla verilmiştir, difüzyon denklemi, dönen bir model için SEY ile çözülmüştür. Bir *hava aralığı makro elemanı* yöntemi dahil edilmiştir.

Sürekli durum SEY çözümlerinin kararlılığı konusunda 1983 yılında yayınlanan makale M. Ikeuchi tarafından kaleme alınmıştır. n'inci dereceden sonlu elemanlar



yönteminde, n tek oldu unda çözümlerin belli artlar altında kararlı oldu u, n çift oldu unda ise arta ba lı olmaksızın kararlılık sa landı ı rapor edilmi tir.

Sonlu elemanlar yönteminin endüstride tasarım a masında kullanılmasıyla alakalı bir uygulamanın ve de erlendirmelerin yer aldı ı bir makale T. W. Preston ve A. B. J. Reece tarafından 1983'te yayınlanmı tır. Makalede, bir sanayi kurulu unun önceliklerinin akademik kurulu lara nispetle farklılıklar gösterdi inden bahsedilmi , bir endüstriyel ara tırma laboratuvarında geli tirilen, elektromanyetik ve elektrik alanlar için yazılan sonlu elemanlar programları anlatılmakta ve edinilen tecrübeler özetlenmektedir. 2B, yarı 3B ve 3B, belli oranda demir nonlineerli ini ve girdap akımlarını içeren programların tipik uygulamalarına yer verilerek, veri üretimi son i leme (post processing) ve hesaplamanın ekonomikli i tartışılmı tır.

1984 tarihli makalesinde B. Luetke-Daldrup, iki boyutlu girdap akımı problemlerinin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözümünün iki yönteminin mukayesesi yapılmı tır. Zaman-adım yöntemiyle, histerezis hariç tüm etkilerin göz önüne alındı ı hesaplamaya tam çözüm, tüm alan büyüklüklerinin sinüsoidal oldu unu kabul ederek yaptı ı quasi-stationary (dura anımsı) problem çözümüne ise yakla ık çözüm adını vermi tir. Manyetik geçirgenli in alan ba ımlılı ı, sadece manyetik akı yo unlu unun genli ine ba lı bir etkin geçirgenlik katılarak yakla ık olarak dü ünülmü tür.

Girdap akımının SEY ile çözümünde deri etkisinin hesaplamadaki payını azaltmak için S. Keran ve J. D. Lavers tek boyutlu problemlerde üstel ekil fonksiyonu kullanmı lar, deri derinli inden ba ımsız sonuçlar elde etmi lerdir.

Üç boyutlu girdap akımı çözümleri için üç bile enli manyetik vektör potansiyeli A ve bir skaler elektrik potansiyel ile bir formülleme S. J. Salon ve J. P. Peng tarafından 1984'te sunuldu. Çözümde küp elemanlar kullanıldı.

R. M. Pai, S. A. Nasar ve Ion Boldea 1987'de yayınlanan bir makalede akım uyarımlı, dü ük hızlı, yekpare demir sekonderli, alüminyum tepki raylı, tek yanlı lineer asenkron motoru (SLIM) incelediler. Te et yöndeki manyetik alanı düzenlemekte, sekonder demirinin manyetik geçirgenli inin ayarlanmasına dayanan çok tabakalı transfer matrisi kavramı ile irtibatlı alan analizinden olu an bir karma yöntem geli tirildi. Bu yöntemin sekonder demirindeki akı da ılımı ve manyetik geçirgenlik hususunda de erli bilgiler verdi i gösterildi.

J. F. Eastham ve ekibi 1987 yılında "Kısa Primerli Lineer Makinaların Yüksek Hızlı Maglev Ta ıtı Olarak Mukayesesi" isimli yayında do rusal asenkron makinalarda Fourier

tabanlı teknikler ve üç boyutlu sonlu elemanlar yöntemini açıklamı , kısa statorlu do rusal senkron makinaları ortaya koyarak yüksek hızlı tiplerini test amacıyla dönen bir düzenekten bahsetmişlerdir. Bazı ön test sonuçlarını bir analitik yöntemin sonuçlarıyla beraber vermişler ve yüksek hızlı homopolar senkron makina ve eksen akıllı asenkron motorun mukayeselerini yapmışlardır.

Boyuna uç etkisini modellemek üzere basit bir e de er devre J. F. Gieras ve arkadaşları tarafından 1987'deki bir makalede anlatıldı. Uç etkisi faktörü için hava aralığı mmk'sını düzenleyen basit bir denklem elde edildi. Hava aralığı manyetik alanı, senkron hızdaki manyetik alan dalgası ile uç etkisini ifade eden dalga olarak dü ünüldü. ki büyük SLIM ile ölçüm ve karşılaştırmalar yapıldı. Makalede, bulunan denklemin LIM tasarımı için gereken do rulu u s a l a d ı ı belirtilmiştir [13].

N. K. Deshmukh çekici elektromanyetik ta ıma sistemlerinin tasarımında sistem üzerindeki kuvvetin önceden bilinmesi gerektiğini vurgulayarak girdap akımlarını da kapsayan elektromanyetik alan problemlerini çözmekte SEY'ni kullanmıştır. ki formülleme ekli karşılaştırmaları ve 3B girdap akımı ve ilgili manyetik alanların özellikleri belirlenmiştir [14].

1988'lerde hala hareketli manyetik alan altındaki iletkenlerde oluşan girdap akımlarının hesabıyla uğraşıyordu. T. Takahashi ve K. Kurita, mıknatıs hareketi altındaki demir olmayan (örneğin süper iletken) maddelerdeki geçici rejim girdap akımlarının hesabı için bir yöntem önerdiler. Burada formülleme, T- $\Omega$  yönteminin elektriksel vektör potansiyelinden faydalanan bir sonlu farklar yöntemine dayanır. Bölmeleme, iki boyutlu ince iletken levha üzerinde yapıldı, demir içermeyen uzay bölgesinde yapılmadı. Ancak girdap akımlarının oluşturduğu tepki alanları ve mıknatısların oluşturduğu alanlar Biot-Savart kuralının integral denklemiyle dü ünüldü. Yöntem, bir maglev ta ıtının girdap akımı ve kuvvet analizine başlı olarak gösterildi.

Frekans tabanlı bir çözüm yöntemi, S. J. Salon tarafından 1993'teki bir makalede sunuldu. Geçici durum çözüm yöntemiyle hesaplanan sürekli durum çözümlerinden daha iyi hesaplama zamanı elde edildi. Makale, sanal bir blok rotor testi üzerine bina edilmiş e de er devre parametrelerinin hesabı için de bir yöntem önermektedir.

AC beslemeli bir bobinin etkisi altında bulunan, aralarında ince bir aralık olan bir çift iletkenin içinde endüklenen girdap akımlarının akı yoğunluğu ve akı yansıması problemi 1996'da T. Yoshimoto ve ekibinin bir makalesinde ele alınmıştır. Dört bileşenli, tekrarlı

(iteratif) bir SEY, üç boyutlu modele uygulanmıştır. Kullanılan hafıza miktarının ana sistem matrisi için genelde kullanılanların on altıda biri kadar olduğu belirtilmiştir.

Bütün bu gelişmelere paralel olarak sonlu elemanlar yönteminin hem uygulama alanında hem de kullanım oranında büyük artış meydana gelmiştir. Bu yöntem elektrik mühendisliğinde; magnetik alanların analizinde, elektrik makinelerinin performans hesaplarında kullanıldığı gibi makine mühendisliğinde; termik ve hidrolik problemlerin çözümünde, eğilme, burulma ve kırılma analizlerinde, inşaat mühendisliğinde; mekanik dayanım için kuvvet hesaplamalarında oldukça kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntemin gelişmesiyle birlikte seri imalat öncesi prototip yapmak için yapılan harcamalar azalmıştır.

## **1.2.Sonlu Elemanlar Yönteminin Tercih Edilmesinin Nedenleri**

Sonlu elemanlar yöntemi; bilgisayarlarla makine ya da yapı elemanlarının tasarım ve optimizasyonu ile birlikte çeşitli fiziksel olayların modellenmesi ve teknolojik olarak yararlı hale getirilmesinde kullanılır. En etkin hesaplama yöntemlerinden biri olan bu yöntem tüm dünyada mühendislerin kullandığı bir sayısal çözümleme tekniğidir. Ayrıca bu yöntem karmaşık problemlerin daha basit alt problemlere ayrılarak her birinin kendi içerisinde çözülmesiyle tam çözümün bulunduğu bir çözüm yöntemidir.

Sonlu elemanlar yöntemini diğer sayısal metotlardan farklı kılan temel unsurları sıralayacak olursak;

- Kullanılan sonlu elemanların boyutlarının ve şekillerinin deyişkenli olması nedeniyle alınan bir cismin geometrisi tam olarak temsil edilebilir.

- Bir veya birden çok delik (yani çok bağlantılı bölgeler) veya köşeleri olan bölgeler kolaylıkla incelenebilir.

- Değişik malzeme ve geometrik özellikleri bulunan bölgelerin incelenmesinde ek bir zorluk meydana gelmez.

- Sebep-sonuç ilişkisine ait problemler, genel direngenlik matrisi ile birbirine bağımlı olan genelleştirilmiş kuvvetler ve yer değiştirmeler cinsinden formüle edilebilir. Sonlu elemanlar metodunun bu özelliği problemin anlaşılmasını ve çözülmesini hem mümkün kılar hem de basitleştirir.

- Sınır şartları kolayca uygulanır.

Elektrik makinelerinin imalat öncesi tasarımlarında da bu yöntemden yararlanılmaktadır. Aynı şekilde bir motorun boşta veya yükte üretebileceği moment ve akı

da ılımları, motorun fiziksel boyutları ve kullanılacak malzemenin özellikleri de i tirilerek, yapılan analizin sonuçlarına göre en ekonomik ve en iyi performansı sa layan motor belirlenebilir. Böylece hem zamandan hem de imalat öncesi model üretme harcamalarından tasarruf sa lanmaktadır. [15]

### 1.3.Tezin Amacı

Asenkron motorların tasarımında günümüze kadar klasik yöntemler kullanılmaktadır. Klasik yöntemde, yaklaşık deneye dayalı ifadeler kullanılarak tasarım yapılmaktadır. Bu yöntemle; tasarımların sonucunda elde edilen asenkron motor, hedeflenen sonucu vermeyebilmektedir. Bu nedenle sonlu elemanlar yöntemiyle asenkron motor tasarımı önemli ilgi görmektedir. Sonlu elemanlar yöntemi ile tasarım yapabilmek için ilk önce aynı yöntemle analiz yapabilmek gereklidir.

Sonlu Elemanlar yönteminde ilk a ma, çözüm bölgesinin küçük elemanlara bölünmesi i lemdir. Bu elemanların iki boyutlu analizinin yapılması esnasında alanlarının, üç boyutlu analizinin yapılması esnasında hacimlerinin hesaplamalara katılmasından dolayı, alan ve hacim hesaplamalarının kolay yapılabilmesi ve çözüm bölgesinin sınırlarını bozmayacak elemanlara bölünmesi esas alınır. E risel sınırları sa layabilmesi nedeniyle en çok üçgen ve dörtyüzlü(tetrahedron) elemanlar tercih edilir. Çözüm bölgesinin mümkün oldu u kadar küçük elemanlara bölünmesi ve vektör potansiyel de i imlerinin fazla oldu u kısımların daha küçük elemanlara bölünmesi çözümün do rulu unu artırmaktadır. Ancak çok fazla eleman kullanmak çözümün yapılması için gerekli sürenin uzamasına neden olmaktadır. Sonlu elemanlar yöntemi basit bir problem için a a ıdaki adımları kullanır:

1. Verilen bölgenin sonlu eleman çözüm a ının olu turulması.

Alt i lemleri a a ıdaki gibi verilebilir.

- Çözüm a ının olu turulması.
- Dü üm numaraları ve eleman numaralarının verilmesi.
- Problem için gerekli geometrik özelliklerin üretilmesi.

2.Çözüm a ı üzerindeki bütün eleman tipleri için eleman denklemlerinin türetilmesi

- Bir eleman üzerinde varyasyonel formülasyonun olu turulması.
- Esas matrisinin elde edilmesi.

- 3.Komple eleman denklemlerini elde etmek için her bir elemana ait eleman denklemlerinin birleştirilmesi.
- 4.Problem çözümünün sınır artlarına zorlanması.
- 5.Birleştirilmiş denklemin çözümü.
- 6.Sonuçların elde edilip irdelenmesi.

#### **1.4.Tezin içeriği**

Bu tezde, bir asenkron motorun sonlu elemanlar yöntemi ile analizi üzerinde durulmuştur. Asenkron motorun sonlu elemanlar yöntemi (SEY) kullanılarak enerji ve moment hesabı anlatılmıştır. Bu konuda Matlab programlama dilinde bir bilgisayar programı geliştirilmiş ve bu program ile motorun enerji ve moment değerleri hesaplanarak bir asenkron motorun performans analizi yapılmıştır.

Tasarım esnasında amaç optimum boyut ve en yüksek performansı almak olacaktır için öncelikle klasik tasarım yöntemleri ile birlikte modern tasarım yöntemleri hakkındaki literatür taraması yapılmıştır. Daha önce yapılmış olan çalışmalar sonucunda ortaya konmuş kriterlere bağlı olarak bir model oluşturulmuş ve bu modelin hesaplanan sonlu elemanlar sonucuna göre motorun performansı belirlenmiştir. Bu analiz sonuçlarını gerçekleştirmek için aşağıdaki çalışmaları incelenmiştir.

- 1.Çözüm alanı üretimi için MATLAB programlama dili tabanlı bir yazılımın gerçekleştirilmesi.
- 2.Sonlu elemanlar yöntemini kullanarak asenkron motorun analizinin iki boyutlu olarak MATLAB 'da yapılması.
- 3.Analiz sonuçlarının karşılaştırılarak incelenmesi.

Analiz sonuçlarını iyileştirmek için gerekli yapısal değişiklikler yapılarak defalarca hesaplar tekrar edilip sonuçların nasıl değiştiği gözlemlenmiştir. Sonuç olarak bu çalışmada, yukarıda belirtilen amaca göre yapılan düzenleme aşağıdaki gibidir.

#### **2. Bölüm: Asenkron Motorlar**

Bu bölümde asenkron motorların yapısı ve çalışma prensibinden bahsedilmiştir.

#### **3. Bölüm: Sonlu Elemanlar Yöntemi**

Bu bölümde yaygın olarak kullanılan sonlu elemanlar yönteminin belli bir diferansiyel denklemin çözümünde ortam şartları göz önüne alınarak nasıl çözüleceği anlatılmıştır.

Sonlu eleman analizi için kullanılan fonksiyonların seçimi ve uygulama adımları ayrıntılı bir şekilde açıklanarak sonlu elemanlar yönteminin teorisinden bahsedilmiştir.

#### 4. Bölüm: Poisson Denklemi ve Manyetik Devre Büyüklüklerinin Hesaplamaları

Poisson denklemlerinin elde edilmesi, her bölgenin manyetik özelliğine bağılı olarak kaynak fonksiyonlarının girilmesi ile denklemlerin çözülmesi ve manyetik devre büyüklüklerinin hesaplanması, manyetik akı yolunun çizilmesi hakkında bilgi verilmiştir.

#### 5. Bölüm: Asenkron Motorun Matlab Programlama Dili Kullanılarak Sonlu Elemanlar Yöntemi ile analizi

Matlab programlama dili kullanılarak geliştirilen program yardımıyla asenkron motorun bilinen sonlu elemanlar analizi yapılarak A vektör potansiyel, B magnetik akı yoğunlukları bunlara bağılı olarak da enerji ve moment değerleri hesaplanmıştır. E potansiyel eğrileri çizdirilmiştir.

#### 6. Bölüm: Sonuç

Elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

## 2. ASENKRON MOTORLAR

1824 yılında Aragon'un alternatif akım motorlarının çalışması prensibini bulması ile asenkron motorların çalışma teorisi ve yapımı ilkeleri ortaya çıkmıştır. Ancak endüstri tipi ilk asenkron motor 1890'lardan sonra yapılmıştır. Asenkron motorun temel ilkelerini kapsayan ilk patent 1 Mayıs 1888'de Avusturya-Macaristan vatandaşı olan Nikola Tesla tarafından alınmıştır. 7 Temmuz 1888'de, ABD'de George Westinghouse firması bu patenti satın almıştır. Bir yıl sonra Nikola Tesla ABD'nin Pittsburg şehrindeki Westinghouse firmasında, endüstri tipi asenkron motorların yapımını kendi yönetiminde başarmıştır. Bu tarihten sonra asenkron motorların imalat tekniklerinde önemli gelişmeler kaydedilmiştir. 1888'de 5 HP'lik ilk imal edilen motorun yaklaşık ağırlığı 456 kg iken, bugün aynı güçteki motorun yaklaşık ağırlığı (40-45) kg kadardır. 1990'larda imal olunan ve 1800 devir/dak dönmeye hızı olan 5 BG'lik bir motorun mil yüksekliği  $H=20$  cm iken, bugün  $H=10$  cm'dir [26]. Bilim adamlarınca yapı ve çeşit olarak daha sonralarında da muhtelif değişiklikler yapılmıştır. Halen de bu gelişmeler devam etmektedir.

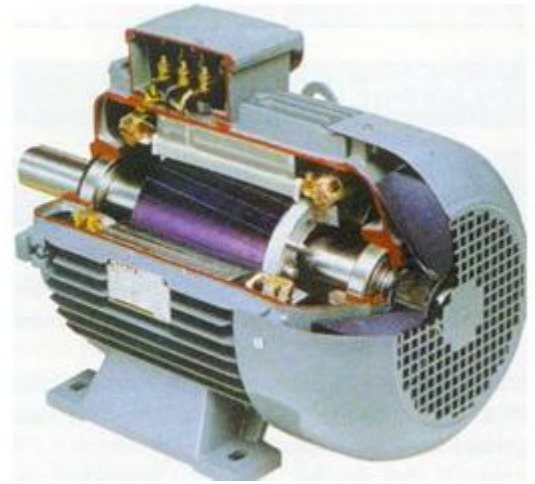
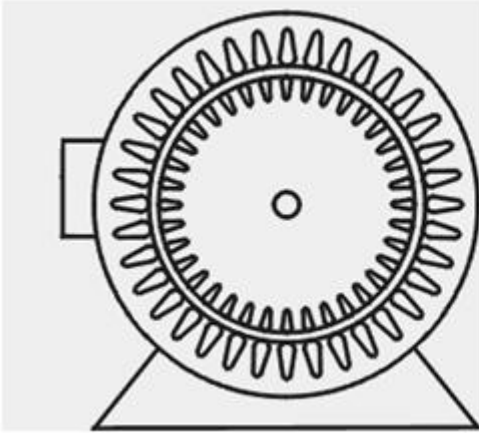
Asenkron motorlar sağlam olması, az bakım gerektirmesi, maliyetinin düşük olması, çevresel koşullardan etkilenmemeleri ve birim hacim başına verdikleri güç bakımından diğer motorlara üstünlük sağlamaktadırlar ve hemen hemen her alanda kullanılabilirler. Özellikle su motorları, sanayi bantları, kağıt fabrikaları vb. gibi devir ayarı gerektirmeyen sabit devirli makinelerinde, sanayi tesislerinde, üç fazlı olarak torna, freze, vargel, matkap, planya gibi takım tezgahlarında, evlerimizde bir fazlı olarak buzdolabı, çamaşır makinesi motoru vb. gibi bir çok alanda sıkça kullanılmaktadır.

Rotor hızının stator manyetik alan hızından daima daha az olmasından dolayı bu motorlara uyumlu olmayan anlamına gelen asenkron motor denilmiştir. Diğer bir yandan indükleme prensibine göre çalışmaları sebebiyle bu motorlara indüksiyon motor da denilmektedir.

Do ru akım motorlarında, bir kollektörü akımla besleyebilmek için fırçaların kullanılması gerekir; fırçalar bu kolektöre sürtünerek gerçekleştirebilir, dolayısıyla da bu kolektörü hem indirir, hem de kıvılcım üretilmesine neden olur. Asenkron motorlar ise çalışma sırasında kıvılcım oluşturmadıklarından dolayı do ru akım motorlarına göre daha çok tercih edilmektedir. Asenkron motorların do ru akım motorlarına göre dezavantajı ise hız ve moment kontrolünün do rusal olmayan ve

karma ık yapılar içermesidir. Do ru akım motorlarında hız ve moment kontrolü daha kolay gerçekte tirilmektedir. Do ru akım motorlarında  $T=k \cdot \omega$  a denkleminden görüldü ü gibi moment endüvi akımı ( a) ve uyarma akısı ( ) 'den olu ur ve bu iki de er birbirinden ba ımsız olarak kontrol edilebilir. Asenkron motorda ise böyle bir yapı elde edilememektedir.

Asenkron motorların devir sayıları yükte çok az de i ir, bu motorlar sabit devirli motorlar sınıfına girer. Asenkron motorların bo ta çalı ma hızları ile yükte çalı ma hızları arasında küçük bir fark vardır ve bu fark genel olarak ihmal edilmektedir. Asenkron motorlarda hız ayar ve kontrolleri, do ru akım motorlarınınki kadar kolay ve ucuz bir düzenle yapılamaz. Birkaç Watt gücünden 15000 MW güce kadar imal edilebilen asenkron motorların çalı ma gerilimleri 110,220,380 Volt'tan 15000 Volt'a kadar olabilmektedir.



**ekil 2.1.** Asenkron motor

Asenkron motorlar elektriksel olarak iki ana parçadan meydana gelmektedir.

### **2.1. Stator:**

Stator, döner manyetik alanın meydana geldi i motorun duran kısmıdır. Ayrıca sargıları ta ıyan ve manyetik akıyı ileten kısımdır. 0,4–0,8mm kalınlı ında bir tarafı silisyum ile yalıtılmı sacların, özel kalıplarda paketlenmesiyle imal edilir. Bu kısma stator



sac paketi denir. Stator sac paketinin iç kısmına belirli sayıda oyuklar açılır ve bu oyuklara bir veya üç fazlı sargılar yerleştirilir.

Stator ile rotor arasındaki hava aralığı 0.25 mm ile 4.25 mm arasında yapılır. Asenkron motorların hava aralığı büyüdükçe motorun boş çalması akımları da büyür. Bu nedenle boş çalması akımının küçük tutulması için hava aralığının da küçük tutulması gerekir.

## **2.2.Rotor:**

Rotor ise asenkron motorda dönen ve mekanik enerjinin elde edildiği kısımdır. Rotor da stator gibi, üzerine oyuklar açılıp paketlenmiş silisli sacların bir mil üzerine sıkıca yerleştirilmesinden meydana gelir.

Asenkron motor, rotorunun kısa devreli (sincap kafesli) ya da sargılı (bilezikli) olmasına göre 2 şekilde tanımlanmaktadır.

### **2.2.1.Sincap Kafesli Rotor:**

Rotor sac paketinin dış yüzüne yakın açılan oyuklar içine pres dökümlü eritilmiş alüminyum konur. Rotor çubukları da denilen bu çubukların iki tarafı alüminyum halkalarla kısadevre edilir. Bu halkaların üzerinde bulunan kanatçıklar soğumayı kolaylaştırır. Rotor çubukların kısadevre edilmesi nedeniyle bu tip rotolara kısadevre çubuklu rotor da denir. Üç fazlı asenkron motorların çalışması sırasında stator oyuklarına nazaran rotor oyukları hareket etmektedir. Bu nedenle rotorda distürsiyon oluşabilir.

### **2.2.2.Bilezikli (Sargılı) Rotor:**

Stator sargılarında olduğu gibi birbirine 120° faz farklı olarak rotor oyuklarına üç fazlı alternatif akım sargısı yerleştirilir; uçları, rotor miliyle yalıtılan üç bakır bilezikle bağlanmıştır. Akım, bileziklere basan fırçalar aracılığıyla sargılara uygulanır. Bilezikli Rotorlu da denilen bu tip motorlarda devir sayısı ile hareket momenti, fırçalar ve rotor devresine sokulan dirençlerle kolayca ayarlanabilmektedir.

Sincap kafesli ve bilezikli asenkron motorun statorları aynı yapıdadır. Asenkron motorun statoru; gövde, stator-sac paketleri ve stator sargılarından oluşur. Bilezikli

asen kron motorda rotor stator içinde yataklanmı tır. Rotor mili üzerinde rotor sac paketi ve döner bilezikler bulunur. Rotor sac paketi üzerine açılmı oluklara rotor sargıları dö enmi tir. Hemen hemen bütün rotorlarda uç sargı (üç faz sargısı) bulunmaktadır. Bu sargılar genellikle yıldız; nadiren de üçgen olarak ba lanırlar. Bazı durumlarda rotorlarda, çift sargıya da (çift faz sargısı) rastlanmaktadır. Bu tür sargılar motor içinde V-devresi şeklinde ba lanırlar. ster çift, ister uç sargılı olsun, sargı uçları rotor üzerinde bulunan döner bileziklere ba lanır. Döner bileziklerle, akım devresi arasındaki ba lantı kömür fırçalar yardımıyla sa lanır. Sincap kafesli asenkron motorun rotorunda ise sac paketi oluklarında sargılar yerine alüminyum ya da bakırdan yuvarlak ve kanatçık şeklinde çubuklar bulunur. Bu çubuklar her iki ucundan kısa devre bilezikleriyle elektriksel olarak kısa devre edilmi tir.

Asenkron motorun;

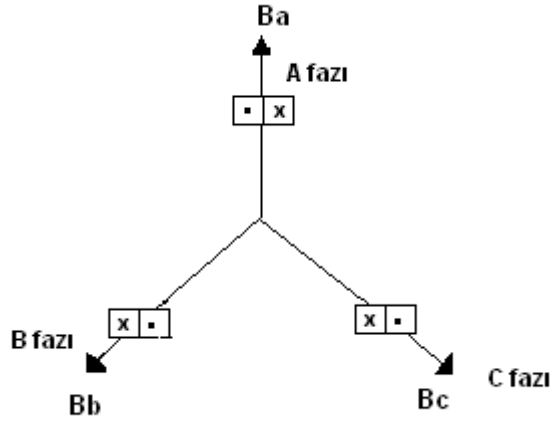
- Rotoru dı arıda statoru içerde bulunan dı rotorlu asenkron motor,
- Ayrıca rotor sargısı bulunmayan kütleli rotorlu asenkron motor,
- ki fazlı asenkron motor,
- ki fazlı servo motor,
- Eylemsizlik momentinin çok küçük olması istenen hallerde kullanılan rotoru alüminyum veya bakırdan bos bir silindir olan ferraris motoru,

vb. gibi birçok özel yapım türü vardır. Kafesli ve bilezikli asenkron motor dahil, bütün yapım türleri çalı ma ilkesi bakımından aynı yapıdadır.

Yapımı en kolay, en dayanıklı, işletme güvenli i en yüksek, bakım gereksinimi en az ve en yaygın, sanayide ve di er birçok alanda büyük ço unlukla kullanılan elektrik motoru sincap kafesli tip asenkron motordur. Normal kafesli asenkron motorun sakıncası kalkı momentinin nispeten küçük, kalkı akımının büyük olmasıdır. Bu sakıncayı gidermek için kafesi yüksek çubuklu, çift çubuklu gibi özel biçimlerde yapılan akım y ılımalı asenkron motorlar kullanılmaktadır. Çok küçük güçlerde yapılan tek fazlı asenkron motorlar da genellikle kafes rotorludur.

Bilezikli asenkron motorun avantajı, ek dirençler yardımı ile kalkı akımının istendi i kadar azaltılabilmesi, kalkı ve frenleme momentinin arttırabilmesidir. Bu durum yüksek kalkı momenti ve uzun kalkı süresinin gerekti i bazı tahriklerde, ebekelerin çok güçlenmesi ile kalkı akımını sınırlamanın önemi azalmı olmasına ra men bilezikli asenkron motor uygulamasını gerektirmektedir.

### 2.3.Üç Fazlı Sargılarda Döner Alanın Oluşması



ekil 2.2. Üç fazlı sargıların oluşturdugu döner alan

ekil 2.2.'de görülen A, B, C faz sargılarına aralarında  $120^\circ$  faz farkı olan üç fazlı alternatif gerilim uygulandığında, her bir faz sargısında o faza ait akım, alternatif bir alan meydana getirecektir. Bu alternatif alanın her iki yönde dönen dairesel döner alan bileşenleri olacaktır. Aynı şekilde bütün diğer fazlarda da her iki yönde dönen dairesel döner alan bileşenleri meydana geleceğinden, bunların bu yöndeki toplamı sıfıra eşit olacaktır ve diğer yöndeki bileşenleri toplamı sıfırdan farklı ve bileşenlerin cebirsel toplamı eşit olacaktır [16].

Asenkron motorda stator sargılardan geçen akım, manyetik döner alan oluşturur. Bu döner manyetik alan içerisinde bulunan iletkenlerde ya da rotor sargıları üzerinde alternatif gerilimler endüklenir. Rotor sargıları ya da iletkenin iki ucu kısa devre edilirse, bu sargılar üzerinden kısa devre akımı geçer ve geçen bu akımdan dolayı rotor döner alanı oluşturur. Rotor döner alanı ile stator döner alanının karşılıklı etkileşimi sonucunda da iletken manyetik alanın dönüşüne doğru itilir ve rotor dönmeye başlar.

Bazı motorlarda stator içte, rotor dışta bulunur. Ancak dönen parça yine rotordur. Oto frenlerinin kontrol edildiği sistemlerde, bazı yürüyen merdivenlerde ve özel aspiratörlerde kullanılan bu tür motorlar yukarıda anlatılan asenkron motor prensibine göre çalışır. Rotordan beslemeli motorlarda, içte bulunan rotor döner bilezikler üzerinden akım emebesine bağlanır. Buna karşın stator sargıları kısa devre edilmiştir. Dolayısıyla stator akım emebesinden beslenen rotor üzerinde bir döner alan oluşturur. Bu döner alan stator

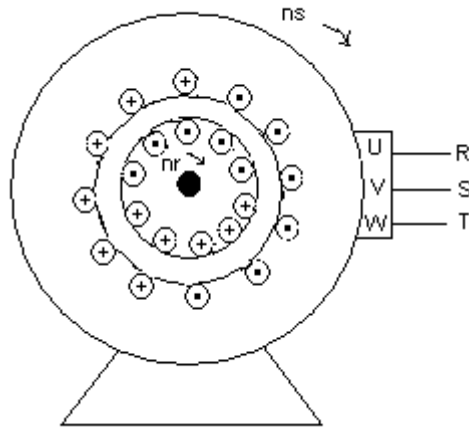
sargıları üzerinde endüksiyon nedeni ile bir akım geçer ve bunun sonucu olarak da stator döner alanı ortaya çıkar. Ancak bu kez rotor kendi döner alanının ters yönünde (lenz kuralı) döner.

Rotor döner alanı, daima stator döner alanının gerisinde hareket eder. Rotorun devir sayısı döner alanın devir sayısından daha azdır. Stator döner alan devir sayısına senkron devir sayısı, rotor döner alan devir sayısına asenkron devir, aralarındaki devir farkına ise kayma(s) denir.

Asenkron motorlarda stator ile rotor arasında herhangi bir elektriksel bağlantı yoktur. Rotor dışarıdan bir kaynak tarafından beslenmez. Stator da dışarıdan döndürülmez. Statorlar daimi mıknatıslı yapılmaz. Asenkron motorlarda dönen daimi mıknatısın görevini stator sargılarına uygulanan üç fazlı akımın meydana getirdiği "döner alan" yapar.

### 2.3.1. Döner alan içerisindeki rotorun dönme hızı:

Stator sargılarından geçen üç fazlı alternatif akımın, sargılarında döner bir manyetik alan oluşturduğunu ve dönen manyetik alan içerisinde bulunan iletkenlerde bir gerilim indüklendiğini böylece kısa devre edilmiş rotordan bir akım geçeceğinden yukarıda bahsettiğimiz. Rotordan geçen bu akımlar rotor üzerinde ekil 2.3'de görüldüğü gibi N ve S kutuplarını meydana getirirler. Dönen stator kutupları rotor kutuplarını etkiler. "Aynı kutuplar birbirini iter, zıt kutuplar birbirini çeker." prensibiyle rotoru saat ibresi yönünde döndürecektir.



ekil 2.3. Döner alan içerisindeki rotorun dönme hızı

## 2.4. Asenkron Motorlarda Kayma

Alternatif akım motorlarında biri stator di eri de rotor üzerinde olu an iki elektrik alanının etkile imi sonucu moment ortaya çıkar. Bu iki alanın, motorun hava aralı nda e zamanlı (senkronize) bir durumda olması ile sabit bir moment üretilebilmektedir. Üretilen momentin büyüklü ü aralarındaki faz farkı ile belirlenir. Dengeli üç fazlı bir sistemle beslenen üç fazlı bir sargı düzgün bir ekilde dönen bir alan meydana getirebilir. Bu nedenle endüstriyel uygulamalarda ço unlukla 3 fazlı asenkron makineler kullanılır.

Asenkron motorlarda dönen stator alanı kısa devre edilmi rotor sargılarında, ikisi arasındaki ba ıl hıza orantılı bir frekansta akımların endüklenmesine neden olur. Motor bilezikli türden ise rotor üzerindeki sargı, sincap kafesli ise kafes, üç fazlı bir sargıdan beklenen bir ekilde, rotor alanı olarak adlandırılan bir ikinci alan olu turur. Rotor alanıyla stator alanının hızlarının toplamının senkron hızı e it olması gerekir. Senkron hız ile rotor hızı arasındaki fark kayma olarak bilinir. Yani rotor hızının senkron hızına göre ba ıl hızı bize kaymayı verir. Kayma s sembolü ile gösterilir.

$$s = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} \quad (2.1)$$

## 2.5. Asenkron Motorun Rotor Devre Frekansı ve Endüklenen Gerilim:

Asenkron motor dururken, stator sargılarına gerilim uygulandı ı anda rotor dönmeye ba lamadan, stator frekansı  $f_s$  ve rotor frekansı  $f_r$  birbirlerine e ittirler. Benzer olarak stator sargılarında endüklenen  $E_s$  gerilimi ile rotor sargılarında endüklenen  $E_r$  gerilimi de, dönü türme oranı  $a=1$  ise, birbirlerine e ittir. Ayrıca  $n_r = 0$  oldu undan, kayma  $s = 1$  olur. Rotor senkron hızda dönerse,  $n_r = n_s$  olaca ından, kayma  $s = 0$ ,  $f_r = 0$  Hz ve  $E_r = 0$  volt olur. Çünkü rotor çubukları stator döner alan hızında döndü ünden, stator manyetik akısı tarafından kesilmemektedir. Kaymanın  $1 > s > 0$  arasındaki de erlerde ise, statora uygulanan gerilimin frekansı  $f_s$  iken rotorda endüklenen gerilimin frekansı da kaymaya ba ılı olarak denklem (2.2)'deki gibi ifade edilir:

$$f_r = s(f) = \frac{n_s - n_r}{n_s} f_s \quad (2.2)$$

Stator döner alan hızı  $n_s = \frac{120f_s}{P}$  olarak ifade edildiğine göre,  $f_s = \frac{Pn_s}{120}$  olur. Buradan;

P= çift kutup sayısı

$$f_r = s.f_s \quad (2.3)$$

$$f_r = \frac{(n_s - n_r)}{n_s} (Pn_s / 120) = \frac{P}{120} (n_s - n_r)$$

Stator ve rotor sargılarında endüklenen gerilimler arasındaki bağıntı da frekans bağıntısı ile aynı olup aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$E_r = s(E_s) \quad (2.4)$$

Denklem (2.4)'de görüldüğü gibi, rotor dönerken stator ve rotor frekansları ile endüklenen gerilimler arasındaki bağıntı kayma ile orantılıdır. Rotor hızı normal çalışmada senkron hıza çok yakın olduğundan kayma küçük olacaktır. Kaymaya bağlı olarak rotor frekansı ve gerilimi de azalacaktır.

### 3. SONLU ELEMANLAR YÖNTEM

Bu bölümde sonlu elemanlar yönteminin genel teorisinden bahsedilmi ve bilgisayarda programının gerçekte tirilmesi için gerekli olan denklemler elde edilmi tir.

Sonlu elemanlar yöntemi, fiziksel matemati in sınır de er problemlerine yakla ık çözümler elde etmek için kullanılan sayısal bir yöntemdir. SEY' in hem karma ık fiziksel ekilleri kolay modellemesi hem de lineer olmayan malzemelerin tanımlanmasına izin vermesinden dolayı elektrik motorlarının analizinde en çok tercih edilen sayısal yöntemdir[17].

Elektromanyetik problemlerde amaç, alan da ılımlarını belirleyerek buna ba lı olan di er fiziki büyüklüklere ula maktır. Bu tasarım a masında önemli bir noktadır. Elektrik motorlarının tasarımında ve iyile tirilmesinde de alan da ılımlarını hesaplamak ya da bir ekillerde ula ılmak istenen büyüklükleri ölçmek gerekir. Ancak, sonuçların modelin imalat safhasından sonra elde edilmesi, zaman ve maliyet kaybına yol açacaktır. Bu durumda da esnek ve do ru bir tasarım yöntemi olmayacaktır. Bunun için motorun modeli ka ıt üzerinde tasarlandı ı anda gerekli hesapların ve ölçmelerin yapılabilmesi lazımdır. Bunun için analitik yöntemler kullanılabilir. Ancak, geometri analitik çözümü bilinen tarzlara uymuyorsa veya karma ıksa sayısal hesaplama yöntemlerinden yararlanır. Bu yöntemler, yakla ık sonuç veren yöntemler olup sonlu elemanlar yöntemi de bunlardan bir tanesidir[18].

Sonlu elemanlar yönteminde ilk a ama olarak çözüm bölgesi küçük üçgen elemanlara bölünür. Nümerik hesaplamalarda bu art olup, yakla ık çözümü ifade eder. Üçgenlere bölünen bu elemanların iki boyutlu analizinin yapılması esnasında alanlarının, üç boyutlu analizinin yapılması esnasında ise hacimlerinin hesaplamalara katılmasından dolayı, alan ve hacim hesaplamalarının kolay yapılabilece i ve çözüm bölgesinin sınırlarını bozmayacak elemanlara bölünmesi esas alınır. E risel sınırları sa layabilmesi nedeniyle en çok üçgen ve dörtyüzlü(tetrahedron) elemanlar tercih edilir. Çözüm bölgesinin mümkün oldu u kadar küçük elemanlara bölünmesi ve vektör potansiyel de i imlerinin fazla oldu u kısımların daha küçük elemanlara bölünmesi çözümün do rulu unu artırmaktadır. Ancak buna dayanarak çok fazla eleman kullanmak çözümün yapılması için gerekli sürenin uzamasına neden olmaktadır [19].

Elektromanyetik problemlerde Laplace veya Poisson denklemleri geçerlidir. Aranacak alanlar, bu denklemleri sağlayan ve enerji fonksiyonlarını minimum yapan alanlardır. Bu noktada, gerçek alan fonksiyonuna bir yaklaşım olarak deneme fonksiyonu devreye girer. Bunlar birinci, ikinci veya daha yüksek dereceden polinomlardır. Alan fonksiyonunun (skalär veya vektörel potansiyel) bu noktalardaki alanları temsil edilerek deneme fonksiyonuna oturtulur. Bu sayede bilinen vektör potansiyel alanları ve uyarımlar cinsinden bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde alan (potansiyel) alanları ortaya çıkar. Bölge sınırlı sayıda elemanlara bölüdüğünden ve deneme fonksiyonu yaklaşım olduğundan, elde edilen sonuçlar yakın olacaktır.

Sonlu elemanlar yöntemini genel olarak, aşağıdaki adımlarla anlatabiliriz:

- 1- Alan numaraları ve eleman numaralarının verilmesi.
- 2- Çözüm bölgesinin bölmelendirilmesi: Çözüm bölgesi elemanlara ayrılır ve alan noktaları belirlenir.
- 3- Katsayılar matrisinin oluşturulması.
- 4- Bilinen vektör potansiyel alanları ve uyarımların (akım vb.) probleme dahil edilmesi.
- 5- Denklem sisteminin çözülmesi ve alan noktalarındaki potansiyellerin bulunması.
- 6- Hesaplanması gereken alan büyüklüklerinin bu potansiyel alanlarından faydalanılarak hesaplanması.

### **3.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi için Bölmelendirme:**

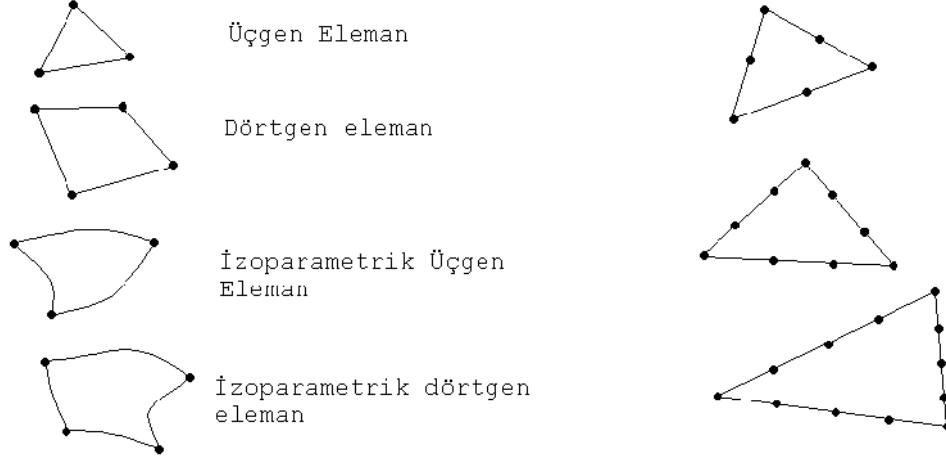
#### **3.1.1. Eleman Çeşitlikleri:**

Sonlu elemanlar yöntemini kullanabilmek için, bölgenin yüzey veya hacim olması gerektiğine göre hesaplama yapılacak olan çözüm bölgesini parçalara bölmek, uygun elemanlara ayırmak gerektirir. Düzlemsel bölgeler için kullanılacak en basit eleman üçgendir. Çözüm bölgesi üçgen parçalara bölünür. Uygun matematik kullanılmakla birlikte, istenirse bölge dörtgen elemanlara da bölünebilir. İki boyutlu bölmelerde kullanılacak eleman çeşitlikleri Şekil 3.1'de belirtilmiştir.

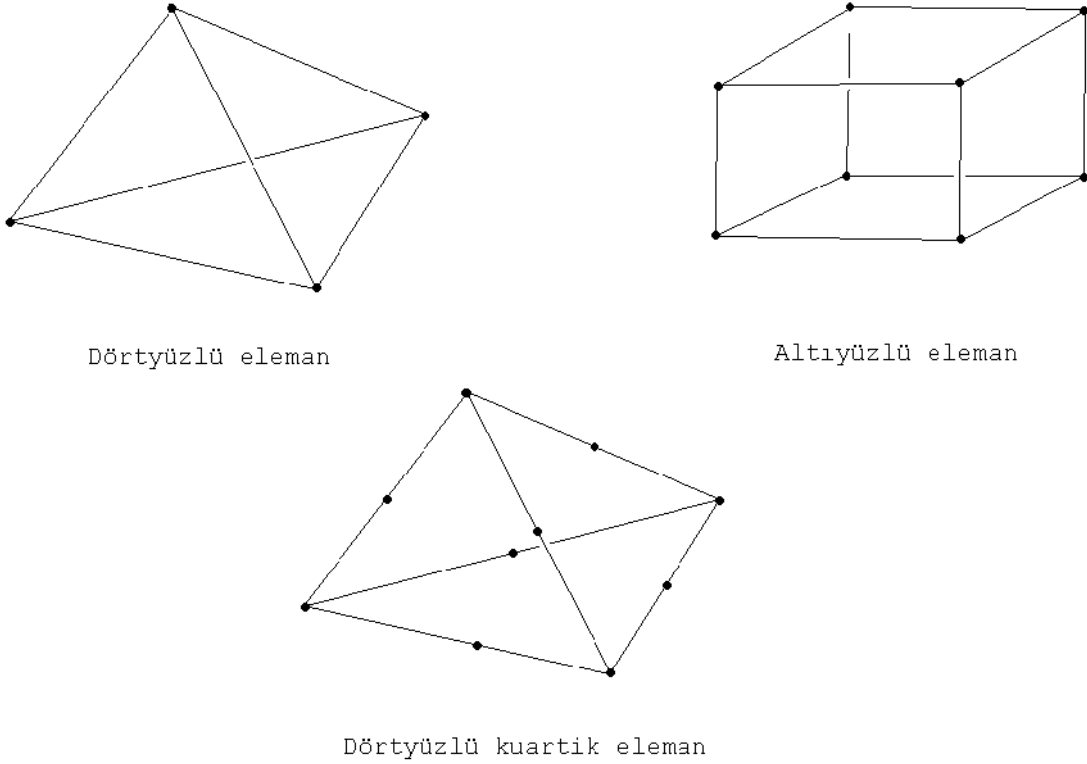
Çözüm bölgesi bir hacmi ifade ediyorsa, küçük parçalar da hacimsel (üç boyutlu) olmalıdır. Üç boyutlu en basit şekil, dört noktanın sınırlarını oluşturduğunu dört yüzlüdür. Çözüm bölgesi dört yüzlü küçük elemanlara bölünerek hesaplama yapılır. Bölgeyi beş yüzü



(piramit, üçgen prizma vb.), altıyüzlü (küp veya dikdörtgen prizma) elemanlara bölmek de mümkündür. Üç boyutlu eleman çe itleri ekil 3.2’de verilmi tir.

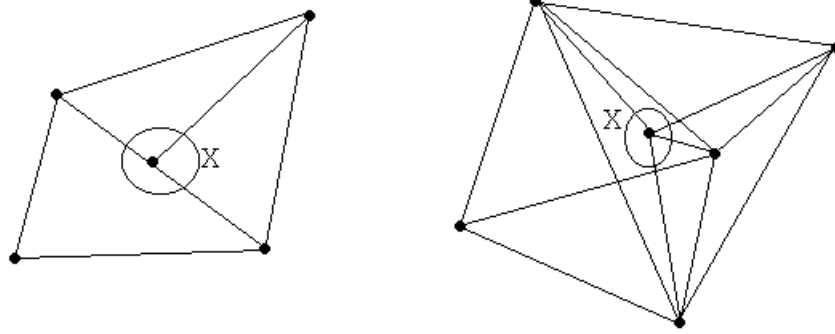


**ekil 3.1.** ki boyutlu SEY’de kullanılan elemanlar.



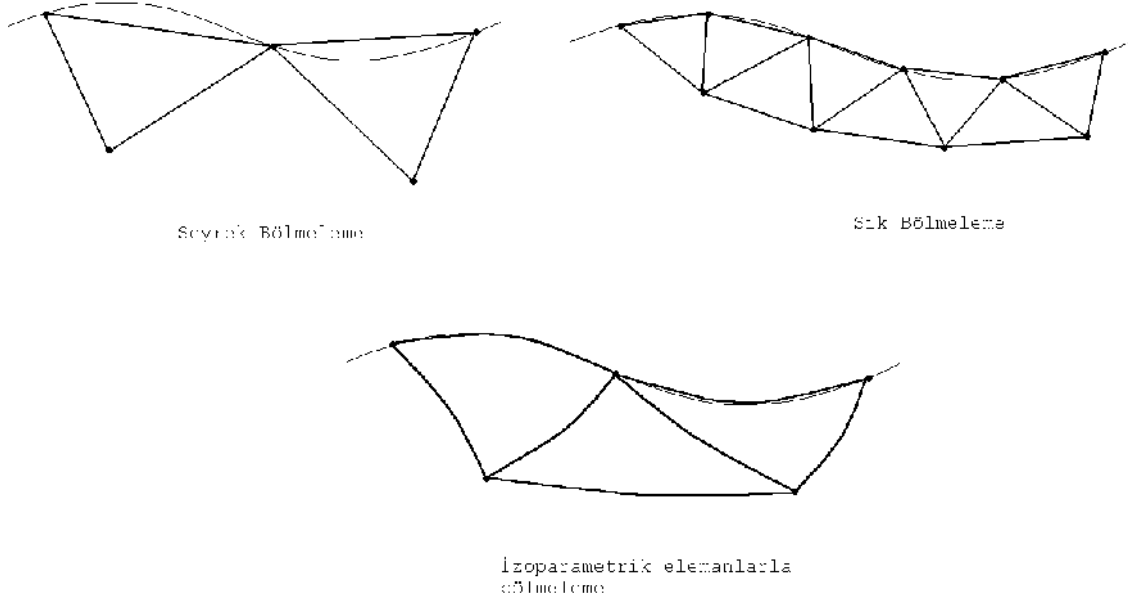
**ekil 3.2.** Üç boyutlu SEY’de kullanılan elemanlar.

Bir üçgen elemanın sadece kö e noktalarında dü üm noktası olu turulabilir. Kenar veya yüzey ortalarında dü üm noktası olu turulması sonlu elemanlar yöntemine aykırı olup buna izin verilmez.



**ekil 3.3.** SEY’de kullanılmayan eleman tipleri.

Bölmeleme esnasında yuvarlak kenarlar, e ri yüzeyler olması durumunda bu bölgeler uygun sayıda eleman yardımıyla yakla ık olarak ifade edilirler. Burada e ri bölgeyi çok daha iyi ifade edebilmek için izoparametrik elemanlar da kullanılabilir. ( ekil 3.4).



**ekil 3.4.** E ri bölgelerin bölmelenmesi.

### 3.1.2. Bölmelendirme Yöntemleri:

Bölmelendirme yöntemlerini genel olarak üç şekilde sınıflandırabiliriz:

- 1- Elle bölmelendirme
- 2- Yarı otomatik bölmelendirme
- 3- Otomatik bölmelendirme

Elle bölmelendirmede, çözüm bölgesi çözümü yapan kişi tarafından elemanlara ayrılır. Kişi, kalemle, bilgisayarla veya diğer bir takım teçhizat yardımıyla elemanların yerlerini, şekillerini, özelliklerini belirler ve bir liste haline getirir.

Yarı otomatik bölmelendirmede ise, önce elle kabaca bir bölmeleme yapılır. Daha sonra programlar yardımıyla daha sık bir bölmeleme ya da koordinat belirleme gibi işlemler yapılır. Bölmelendirme esnasında kişi müdahalesi esastır.

Otomatik bölmelendirmede çözüm bölgesi ve fiziki model bir bilgisayara verilerek bölmelendirme özellikleri belirtilir. Bilgisayar programı, bölmelendirme işlemini gerçekleştirerek gerekli verileri uygun bir şekilde hazırlar. İşlemi tekrarlamak ve bazı parametreleri de değiştirerek sonucu daha iyi hale getirmek de mümkündür.

Bir uzay bölgesini elemanlara bölmek, zihnin olarak basit gözükse de, bilgisayarla hesaplanarak yapıldığında zannedilenden daha karmaşık olduğu görülecektir. Elle bölmelendirme yöntemleri prensipte basit olsalar da, elemanlara ayırma ve koordinat belirleme gibi işlemlerin karmaşık ve zor olmasının yanında çok zaman almaktadır. Ayrıca elle bölmelendirme sırasında hata yapma olasılığı da yüksektir. Bundan dolayı otomatik bölmelendirme tercih edilmektedir. İyi bir program, bir kontrol programı ve grafiklerle kontrol yardımıyla, otomatik bölmelendirme sayesinde çok daha hatasız bir bölmelendirme işlemi gerçekleştirilebilir [3].

Kullanıcı çözülecek olan probleme ve eldeki imkânlarla göre bu üç bölmelendirme yönteminden herhangi birini tercih edebilir. Genel geçer kaide olarak bir yöntem diğerinden daha üstündür gibi bir şey söylenemez.

Yöntem olarak otomatik bölmelendirmeyi ele alıp incelemek, diğer bölmelendirme yöntemlerini de büyük ölçüde anlamayı sağlayacaktır. Bu yüzden bazı otomatik bölmelendirme algoritmaları üzerinde durarak bölmelendirme yöntemlerini açıklamaya çalışacağız.

### 3.1.3. Çözüm A ları:

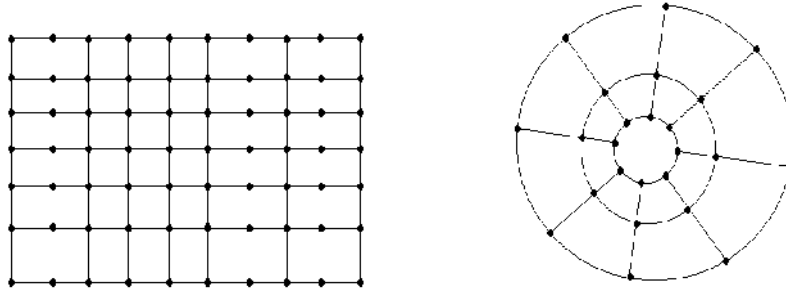
Çözüm bölgesinin elemanlara ayrılması , dü ümleri belirlenmesi ekline çözüm a 1 adı verilir. Dü üm noktalarının koordinatları, elemanlarla olan bağlantıları ve elemanlar belirlenmiştir. Çözüm a 1 oluşturmada kullanılan programlara çözüm a 1 üretici denir.

Çözüm a ları bağlantı tarzına göre bağlantıya iki grupta toplanabilir:

1-Düzenli a lar

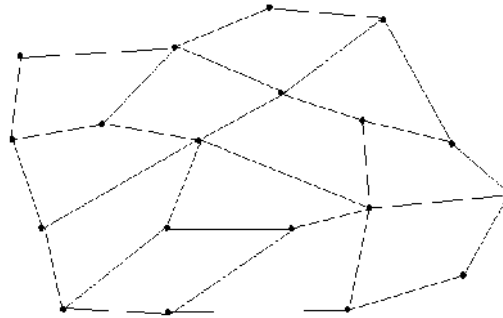
2-Düzensiz a lar

ekil 3.5’de görüldü ü gibi dü ümler arası mesafeler ve bağlantılar sonlu farklar şeklinde ifade edilebiliyorsa, buna düzenli a denir.



**ekil 3.5.** Düzenli a lar.

Sonlu farklar veya benzeri bir kurala uyulmaksızın ekil 3.6’daki gibi dü ümler arası mesafeleri ve bağlantıları düzensiz olan bir topoloji belirlenmesi buna da düzensiz a denir.



**ekil 3.6.** Düzensiz a lar.

### 3.2. Sonlu Elemanlar Yöntemi Teorisi

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (3.2)$$

Sonlu elemanlar yöntemi Laplace (denklem (3.1)) ve Poisson (denklem (3.2)) tipi kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılan bir yöntemdir. Bölge içerisinde enerjiyi minimum yapan potansiyel çözüm aynı zamanda Laplace denklemini sağlayan potansiyel çözümdür. Bu yüzden sonlu elemanlar yönteminde Laplace denklemini doğrudan çözmek yerine, enerji fonksiyoneli minimum yapan potansiyel çözümü bulmak yoluna gidilir. Sonlu elemanlar yöntemini eleştirel sınırlara uydurmak kolaydır. Çözüm bölgesinde istediğimiz kısımda, eleman sayısını bazı gelişmiş algoritmalar kullanarak istediğimiz kadar arttırabiliriz.

Bu yöntemde, deneme fonksiyonu aramada temel olarak dört yöntem kullanılmaktadır. Bunlar;

1. Rayleigh – Ritz yöntemi
2. Galerkin yöntemi
3. En Küçük Kareler yöntemi
4. Ağırlık artıkları yöntemi

Laplace ve Poisson denklemlerinin çözümü için deneme fonksiyonunun oluşturulmasında kullanılan bu yöntemlerden en yaygın olarak kullanılanı, Rayleigh – Ritz ve Galerkin yöntemidir.

Bu yöntemlerin anlatımına geçmeden önce, Varyasyon hesabından ve enerji fonksiyonelinin minimum olma koşullarından bahsedelim.

#### 3.2.1. Varyasyon Hesabı

Varyasyonel yöntem, Laplace ve Poisson tipi kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü yerine, bu çözümü sağlayan potansiyel fonksiyonunun ele alınan sisteme ilişkin enerji fonksiyoneli minimize edilmediği ile ilgilidir. Laplace ve Poisson diferansiyel

denkleminin çözümü aynı zamanda enerji fonksiyoneliini minimize eden potansiyel fonksiyonudur.

Di er bir deyi le, verilen sınır ko ulları altında diferansiyel denklemin varyasyonel ilkesine göre çözümü, varyasyonel bir ba ıntının de i kenlere göre en küçük de ere indirgenmesi ile elde edilir.

$$f(x, y(x), y'(x), \dots) \quad (3.3)$$

Denklem (3.3)'deki fonksiyonlar kümesindeki her bir fonksiyona kar ılık gelerek belli bir sayısal de er alan fonksiyona, bu kümenin fonksiyoneli denir. Fonksiyonun  $x$  de erinde  $x$  kadar bir de i iklik olması durumunda,  $y$  deki de i iklik durumu

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) \quad (3.4)$$

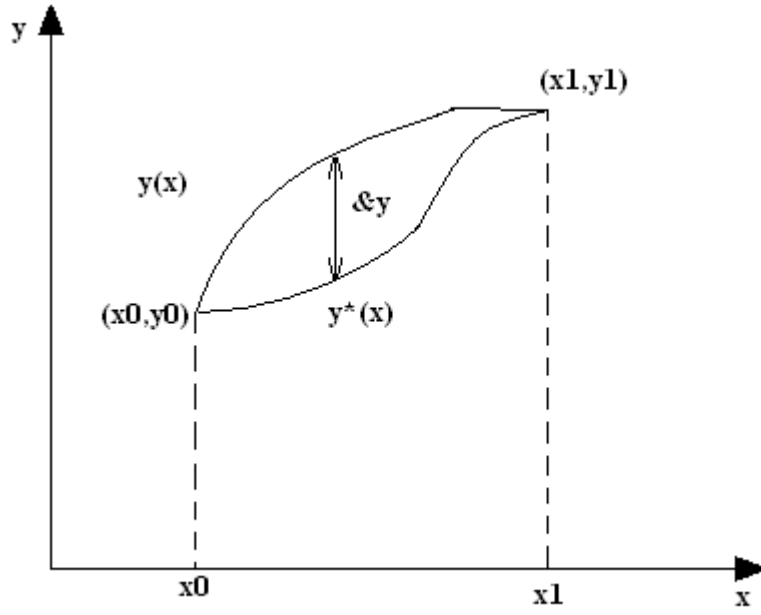
olur. Aynı ekilde  $F(y(x))$  fonksiyonelinin

$$\delta y = y(x) - y_1(x) \quad (3.5)$$

farkına  $y_1(x)$ 'in varyasyonu denir.

### 3.2.2. Fonksiyonelin Extremum Olma Ko ulu

$y(x_0) = y_0$  ve  $y(x_1) = y_1$  artlarını sa layan birinci ve ikinci dereceden türevlere sahip bir  $y = y(x)$  fonksiyonu arayalım. Bu ko ulları sa layan  $y(x)$  e risine kom u bir e ri  $y^*(x)$  e risi olsun. Bu durumda  $y(x)$ 'e ili kin varyasyon,



**ekil 3.7.** Bir fonksiyonun varyasyonu.

$$\delta y = y(x) - y^*(x) \quad (3.6)$$

olacaktır. Bu varyasyon ekil 3.7’de gösterilen uç noktalarında sıfır da erindedir.  $\alpha$  herhangi bir sabiti göstermek üzere

$$y(x, \alpha) = y(x) - \alpha \Delta y \quad (3.7)$$

olsun. Bu ifade de  $\alpha = 0$  alındı nda fonksiyoneli, extremum yapan e ri

$$y(x) = y(x, \alpha = 0) \quad (3.8)$$

olarak elde edilir.  $\alpha = 1$  alındı nda kom u e ri

$$y^*(x) = y(x, \alpha = 1) = y(x) + \alpha y \quad (3.9)$$

olarak elde edilir. Yani  $y(x, \alpha)$  fonksiyonu  $y(x)$  ve buna kom u e ri ailesini vermektedir. Fonksiyonel ifadesinde  $y(x)$  yerine  $y(x, \alpha)$  ifadesi yazıldı nda

$$f[y(x, \alpha)] = \varphi(\alpha) \quad (3.10)$$

olur.  $A(\alpha)$ ,  $\alpha = 0$  de eri için bir extremuma sahiptir. Yani

$$\varphi'(\alpha = 0) = 0 \quad (3.11)$$

dır. Gerekli matematiksel i lemden sonra

$$\frac{\delta f}{\delta y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\delta f}{\delta y'} \right) = 0 \quad (3.12)$$

denklemini elde edilir. Elde edilen bu diferansiyel denkleme verilen fonksiyonelin Euler Diferansiyel Denklemi denir. Bir fonksiyonelin extremum ko ulu Euler Diferansiyel Denklemi sa lamasıdır.

Varyasyonel yöntemlerle herhangi bir problemi çözmek ve ek fonksiyonlar kullanmak için gerekli ko ul, o diferansiyel denkleme özde Euler e itli i veren bir fonksiyonel elde etmektir.

### 3.2.3. Sınır Ko ulları

Sınır ko ulları üç grupta toplanır:

#### a) Dirichlet Sınır Ko ulu

Bu ko ulda potansiyel fonksiyonu  $\phi_s$  sınırın belirli bir kısmında veya bütün sınır boyunca belirli bir de erdedir. E er sınır ko ulu sıfır ise homojen Dirichlet sınır ko ulu olarak adlandırılır.

#### b) Neumann sınır ko ulu

Bu ko ul sınıra dik do rultuda gelen akı yo unlu u ile ilgilidir. E er ortam izotropik ise sınıra dik do rultuda gelen akı genel olarak,



$$K(s) \frac{\partial \phi}{\partial n} = h(s) \quad (3.13)$$

ba ıntısı ile ifade edilir. Burada  $n$ , sınırın dışına doğru birim vektörü göstermektedir. Bu ifade çözüm bölgesindeki alandan ba ımsızdır.  $h(s)=0$  olması durumunda, homojen Neumann sınır ko ulu adı verilir.

### c ) Karı ık Sınır Ko ulu

Sınırdaki bulunan iletken bir malzeme sınıra normal do rultuda gelen akıyı etkiler. Sınırdaki bu de i imler, lineer de i imler ise bu sınır ko ulu genel olarak u ekilde ifade edilir.

$$K(s) * \frac{\partial \phi}{\partial n} = \sigma(s) (\phi_{0(s)} - \phi_{(s)}) \quad (3.14)$$

Burada  $\sigma(s)$  sınırdaki elektriksel iletkenlik fonksiyonunu göstermektedir. Bu sınır ko ulu yeniden düzenlenerek

$$\begin{aligned} K(s) * \frac{\partial \phi}{\partial n} + \sigma(s) \phi_{(s)} &= \sigma(s) \phi_{0(s)} \\ K(s) * \frac{\partial \phi}{\partial n} + \sigma(s) \phi_{(s)} &= h(s) \end{aligned} \quad (3.15)$$

yazıldı ında daha önceki sınır ko ullarını da içeren yeni bir ba ıntı elde edilir.

### 3.2.4. Rayleigh – Ritz Yöntemi

Verilen sınır ko ulları altında temel diferansiyel denklemi minimum yapan, sınır de er problemlerinin i levsel olarak adlandırılan varyasyonel bir yöntemdir.

$$-\nabla^2 \phi = f \quad (3.16)$$

$$L = -\nabla^2 \quad (3.17)$$

$$F = \langle L\phi, \phi \rangle - 2\langle \phi, f \rangle \quad (3.18)$$

$$F = \iint \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - 2\phi f \right] dx dy \quad (3.19)$$

Bu fonksiyonel  $\phi(x, y)$  deneme fonksiyonu ile yaklaşık olarak ifade edilir.

$$\phi = \sum_{j=1}^n a_j \psi_j \quad (3.20)$$

Bu ifadelerde  $a_j$  bilinmeyen katsayıları öyle belirlenmeli ki fonksiyonel minimum olsun. Sonlu Elemanlar Yöntemine göre deneme fonksiyonu, koordinat fonksiyonları denilen fonksiyonların toplamı şeklinde ifade edilecek olursa  $\phi$ ,  $F$  de yerine konularak, fonksiyonel  $\psi_j$  ve  $a_j$  ler cinsinde yazılmı olur. Burada kullanılan  $a_j$  bilinmeyen katsayılardır. Bu katsayılar,  $F$  minimum olacak şekilde

$$\frac{\partial F}{\partial a_j} = 0 \quad (3.21)$$

ifadesinden belirlenir. Bu şekilde bir lineer cebirsel denklem takımı elde edilir. Bu denklemlerin çözümü ile  $a_j$  ler belirlenerek,  $\phi$  deneme fonksiyonu bulunur. Böylece elde edilen  $\phi$ , fonksiyoneli minimum yaparken ilgili poisson denklemini de gerçeklemi olur.

$$F = \iint \left[ \left( \sum a_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right)^2 + \left( \sum a_j \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right)^2 - 2 \sum a_j \psi_j f \right] dx dy \quad (3.22)$$

Bu ifade  $a_i$  inci katsayıya göre yeniden düzenlenecek olursa

$$F = a_i^2 \iint \left[ \left( \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - 2 \sum_{j=1}^n a_i a_j \iint \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) dx dy - 2 \quad (3.23)$$

$a_i \iint \psi_i f dx dy + a_i$  'yi içermeyen terimler bu ifadede kısaltılarak yazılırsa

$F = K_{ii} a_i^2 + 2K_{ij} a_i - 2a_i b_i + a_i$  'yi içermeyen terimler  $F$  nin minimum olması için

$$\frac{\partial F}{\partial a_j} = 0 \quad (3.24)$$

olmalıdır. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a_j} &= 2A_{ii} \cdot a_i + 2A_{ij} - 2b_i = 0 \\ A_{ii} \cdot a_i + A_{ij} &= b_i \end{aligned} \quad (3.25)$$

ve genel olarak ifade edilecek olursa

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} a_j = b_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.26)$$

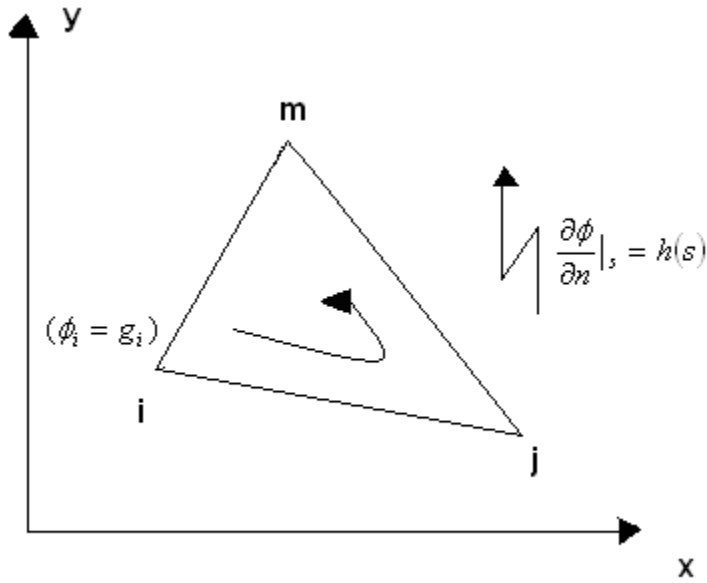
elde edilir. Buradaki katsayılar açık olarak ifade edilirse

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \iint \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) dx dy \\ b_{ij} &= \iint \psi_i f dx dy \end{aligned} \quad (3.27)$$

eklindedir.

### 3.2.5. Sonlu Elemanlar ve Rayleigh-Ritz Yöntemi

Sonlu elemanlar yönteminin esası, karmaşık sınır koşulları nedeniyle tüm çözüm bölgesi için bir potansiyel fonksiyonu bulmanın mümkün olmadığı durumlarda, çözümün sonlu küçük elemanlar içinde aranmasına dayanır. Çözüm için elemanların geometrik yapısı aynı kalmak koşulu ile tüm çözüm bölgesi aynı geometrik elemanlara bölünür. Bu geometrik elemanlar üçgen, dörtgen ve benzeri şekiller olabilir. Düzensiz şekillerle ve gelişmiş bölmelemede üçgen elemanlar kolaylık sağlar. Böyle elemanlar sınır yüzeylere kolayca uyum sağlar. Bu sebeplerden dolayı bu çalışmamızda üçgen elemanlar kullanıldı.



ekil 3.8 Bir üçgen elemanı

Bu yöntemle çözüm yaparken ilk olarak bir deneme fonksiyonu seçilir. Bu fonksiyon alan de i imini ifade eder.

$$\phi(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 x^3 + \alpha_7 x^2 y + \dots \quad (3.28)$$

Bu deneme fonksiyonunun birinci dereceden polinom kısmı (denklem(3.29)) ço u problemde yeterli hassasiyeti sa lar:

$$\phi(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y \quad (3.29)$$

Bu deneme fonksiyonunda  $\phi$ , x ve y ye göre dorusal bir ektilde de imektedir. E er üçgenin kö elerindeki potansiyeller  $\phi_i, \phi_j, \phi_m$  ise, deneme fonksiyonu bu kö e noktalarında bu de erleri sa lamak zorundadır. Bu nedenle a a ıdaki ifadeler yazılabilir:

$$\begin{aligned} \phi_i &= \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 y_i \\ \phi_j &= \alpha_0 + \alpha_1 x_j + \alpha_2 y_j \\ \phi_m &= \alpha_0 + \alpha_1 x_m + \alpha_2 y_m \end{aligned} \quad (3.30)$$

Ele alınan deneme fonksiyonunu üçgenlerin kö e ( $\phi_i, \phi_j, \phi_m$ ) de erleri ile denklem (3.31)'da verildi i ektilde ifade etmek için  $N_i, N_j, N_m$  ekil veya enterpolasyon fonksiyonları kullanılır.

$$\phi(x, y) = N_i(x, y) \cdot \phi_i + N_j(x, y) \cdot \phi_j + N_m(x, y) \cdot \phi_m \quad (3.31)$$

Denklem (3.31)'daki deneme fonksiyonunda  $N_i, N_j, N_m$  ekil fonksiyonları, i,j,m kö e koordinatlarının deneme fonksiyonunda yerine yazılması durumunda,  $\phi_i, \phi_j, \phi_m$  de erlerini verecek ektilde fonksiyonlar olmalıdır. Yani üçgenin kö elerinde ekil fonksiyonlarının de erleri

$$i.kö ede: N_i = 1, N_j = 0, N_m = 0,$$

$$j.kö ede: N_i = 0, N_j = 1, N_m = 0,$$

$$m.kö ede: N_i = 0, N_j = 0, N_m = 1$$

olmalıdır. Bu arta göre üçgenin alan matrisinden enterpolasyon fonksiyonları bulunur. ekil 3.2'deki üçgenin alanı, kö e koordinatları cinsinden

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} \quad (3.32)$$

dir. Denklem (3.30)'daki ifadelerinden  $\alpha_0, \alpha_1$  ve  $\alpha_2$  de erleri,

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= (a_i\phi_i + a_j\phi_j + a_m\phi_m)/2\Delta \\ \alpha_1 &= (b_i\phi_i + b_j\phi_j + b_m\phi_m)/2\Delta \\ \alpha_2 &= (c_i\phi_i + c_j\phi_j + c_m\phi_m)/2\Delta\end{aligned}\tag{3.33}$$

bulunarak deneme fonksiyonunda yerine yazmak üzere a a ıdaki kısaltmalar yapılırsa

$$\begin{aligned}a_i &= x_j y_m - x_m y_j & b_i &= y_j - y_m & c_i &= x_m - x_j \\ a_j &= x_m y_i - x_i y_m & b_j &= y_m - y_i & c_j &= x_i - x_m \\ a_m &= x_i y_j - x_j y_i & b_m &= y_i - y_j & c_m &= x_j - x_i\end{aligned}\tag{3.34}$$

Bu noktada, ekil fonksiyonları tanımlanır.

$$\begin{aligned}N_i &= (a_i + b_i x + c_i y)/2\Delta \\ N_j &= (a_j + b_j x + c_j y)/2\Delta \\ N_m &= (a_m + b_m x + c_m y)/2\Delta\end{aligned}\tag{3.35}$$

Potansiyel fonksiyonunu ekil fonksiyonları cinsinden yazarsak,

denklemini elde edilir. Elde edilen potansiyel fonksiyonu ifadesi, üçgenin kenar ve kö eleri dahil her yerinde geçerlidir.

Her bir üçgen eleman içinde, potansiyel fonksiyonunun Laplace diferansiyel denklemini sa ladı ı varsayıldı ından, homojen sınır ko ullarında Laplace denklemine kar ılık gelen fonksiyonel

$$F = \iint \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

dir. Potansiyel fonksiyonları yerine denklem (3.30)'da elde edilen deneme fonksiyonu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial x} + \phi_j \frac{\partial N_j}{\partial x} + \phi_m \frac{\partial N_m}{\partial x} = (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_m \phi_m) / 2\Delta \\
\frac{\partial \phi}{\partial y} &= \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial y} + \phi_j \frac{\partial N_j}{\partial y} + \phi_m \frac{\partial N_m}{\partial y} = (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_m \phi_m) / 2\Delta \\
F &= \left[ \frac{(b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_m \phi_m)}{2\Delta} \right]^2 \iint dx dy + \left[ \frac{(c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_m \phi_m)}{2\Delta} \right]^2 \iint dx dy
\end{aligned} \tag{3.37}$$

bulunur. Buradan

$$\Delta = \iint dx dy \text{ olmak üzere}$$

$$F = \frac{1}{4\Delta} [(b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_m \phi_m)^2 + (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_m \phi_m)^2] \tag{3.38}$$

elde edilir.

$F = f(\phi_i, \phi_j, \phi_m)$  de F yi minimum yapan  $\phi_i, \phi_j, \phi_m$  de erlerini bulmak için, de i kenlere göre kısmi türevler alınır,

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_i} = 2 \left[ \frac{(b_i^2 + c_i^2)}{4\Delta} \phi_i + \frac{(b_i b_j + c_i c_j)}{4\Delta} \phi_j + \frac{(b_i b_m + c_i c_m)}{4\Delta} \phi_m \right] \tag{3.39}$$

olup, burada

$$\begin{aligned}
S_{ii} &= \frac{(b_i^2 + c_i^2)}{4\Delta} \\
S_{ij} &= \frac{(b_i b_j + c_i c_j)}{4\Delta} \\
S_{im} &= \frac{(b_i b_m + c_i c_m)}{4\Delta}
\end{aligned}$$

ve benzer ekilde

$$\begin{aligned}
S_{jm} &= \frac{(b_j b_m + c_j c_m)}{4\Delta} \\
S_{jj} &= \frac{(b_m^2 + c_m^2)}{4\Delta} \\
S_{ji} &= S_{ij} \\
S_{mi} &= S_{im} \\
S_{jm} &= S_{mj}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Kısaltmalarıyla

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \phi_i} &= 2(S_{ii}\phi_i + S_{ij}\phi_j + S_{im}\phi_m) \\
\frac{\partial F}{\partial \phi_j} &= 2(S_{ji}\phi_i + S_{jj}\phi_j + S_{jm}\phi_m) \\
\frac{\partial F}{\partial \phi_m} &= 2(S_{mi}\phi_i + S_{mj}\phi_j + S_{mm}\phi_m) \\
\frac{\partial F}{\partial \phi} &= \frac{\partial F}{\partial \phi_i} + \frac{\partial F}{\partial \phi_j} + \frac{\partial F}{\partial \phi_m} = 0 \\
2 \begin{bmatrix} S_{ii} & S_{ij} & S_{im} \\ S_{ji} & S_{jj} & S_{jm} \\ S_{mi} & S_{mj} & S_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_m \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

elde edilir. ekinde verildi i haliyle  $\phi_i = g_i$  sınır ko ulu matrisin ilk satırına yerle tirilirse

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ S_{ji} & S_{jj} & S_{jm} \\ S_{mi} & S_{mj} & S_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ve bu matrisi düzenlersek

$$\begin{bmatrix} S_{jj} & S_{jm} \\ S_{mj} & S_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_j \\ \phi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_i S_{ji} \\ -g_i S_{mi} \end{bmatrix} \tag{3.42}$$



elde edilir.

### 3.2.6. Galerkin Yöntemi:

Fonksiyonelin bilinmedi i durumlarda Varyasyonel hesap yönteminden faydalanamayız. Galerkin yönteminde fonksiyonele ihtiyaç yoktur; bu yöntemde do rudan diferansiyel denklemden çözüme gidilir.

$$\Delta\phi = -g$$

ifadesinin tam çözümü  $\phi_0$  olsun. Asıl diferansiyel denklem, denklem (3.43)'de görüldü ü gibi tam çözüm için sifira e ittir.

$$\varepsilon = \Delta\phi_0 + g = 0 \quad (3.43)$$

Sonuç olmayan bir deneme fonksiyonu  $\phi_d$  için diferansiyel denklem mutlaka sıfırdan farklıdır.

$$\varepsilon = \Delta\phi_d + g \neq 0 \quad (3.44)$$

$\varepsilon$  ile gösterilen fark ifadesinde dik öyle bir W a ırlık fonksiyonu vardır ki,  $\varepsilon$  ile çarpımının entegrali sıfırdır.

$$\int \varepsilon W \, dx \, dy = 0 \quad (3.45)$$

W a ırlık fonksiyonlarına N ekil fonksiyonları da denebilir.

$\varepsilon$  fark fonksiyonu,

$$\varepsilon = \Delta\phi^e + g \quad (3.46)$$

dır. W a ırlık fonksiyonu ise

$$W = \begin{bmatrix} N_1^e \\ N_2^e \\ N_3^e \end{bmatrix} \text{ dir.} \quad (3.47)$$

$$\int_{R^e} (\Delta \phi^e + g) \begin{bmatrix} N_1^e \\ N_2^e \\ N_3^e \end{bmatrix} dx dy = 0 \quad (3.48)$$

Denklem (3.48)'deki üç denklemden birincisi ele alındı ında,

$$\int_{R^e} (\Delta \phi^e + g) N_1^e dx dy = 0 \quad (3.49)$$

ifadesi a a ıdaki gibi yazılabilir;

$$\int_{R^e} \Delta \phi^e N_1^e dx dy = - \int_{R^e} g N_1^e dx dy \quad (3.50)$$

bu ifade Gren teoreminden faydalanılarak,

$$\int_{R^e} \Delta \phi^e N_1^e dx dy = - \int_{R^e} \nabla \phi^e \nabla N_1^e dx dy + \oint_c N_1^e \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \quad (3.51)$$

eklinde ifade edilir.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + \sigma \phi = h \quad (3.52)$$

karı ık sınır artımı kullanarak

$$\oint_c N_1^e \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = \int_c (h - \sigma \phi) N_1^e ds \quad (3.53)$$

yazılabilir.

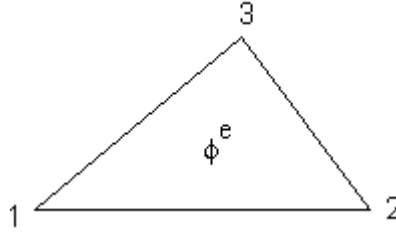
$$\int_{R^e} \Delta \phi^e N_1^e dx dy = - \int_{R^e} \nabla \phi^e \nabla N_1^e dx dy + \int_c (h - \sigma \phi) N_1^e ds$$

$$\begin{aligned}
\int_{R^e} \Delta \phi^e N_1^e dx dy &= - \int_{R^e} \nabla \phi^e \nabla N_1^e dx dy + \int_c (h - \sigma \phi) N_1^e ds \\
- \int_{R^e} \nabla \phi^e \nabla N_1^e dx dy + \int_c (h - \sigma \phi) N_1^e ds &= - \int g N_1^e dx dy \\
- \int_{R^e} \nabla \phi^e \nabla N_1^e dx dy + \int_c \sigma \phi^e N_1^e ds &= \int g N_1^e dx dy + \int h N_1^e ds
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Bu ifadede

$$r = \int g N_1^e dx dy + \int h N_1^e ds \tag{3.55}$$

olsun. ekil 3.3'deki gibi bir üçgen elemanların kö e potansiyelleri bilindi inde, üçgen elamanın içinde her noktadaki potansiyel denklem (3.56)'dan hesaplanabilir.



ekil 3.9. Bir üçgen elemanın potansiyeli

$$\phi^e = N_1^e \phi_1 + N_2^e \phi_2 + N_3^e \phi_3 \tag{3.56}$$

Denklem (3.54)'deki ikinci terimde potansiyel fonksiyonu yerine bunun e itli i olan denklem (3.56)'daki ifadesi yazıldı ında,

$$\int_c \sigma \phi^e N_1^e ds = \int_c \sigma (N_1^e \phi_1 + N_2^e \phi_2 + N_3^e \phi_3) N_1^e ds \tag{3.57}$$

elde edilir. Kö e potansiyellerinin de eri sabit oldu undan entegral dı ına alınabilir;

$$\int_c \sigma \phi^e N_1^e ds = \phi_1 \left( \int_c \sigma N_1^e N_1^e ds \right) + \phi_2 \left( \int_c \sigma N_1^e N_2^e ds \right) + \phi_3 \left( \int_c \sigma N_1^e N_3^e ds \right) \tag{3.58}$$

Denklem (4.5) ifadesindeki ilk terim yerine, bu ifadelerin çarpımını yazabilmek için;

$$\begin{aligned}\nabla \phi^e &= \vec{i} \frac{\partial \phi^e}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \phi^e}{\partial y} \\ \nabla N_1^e &= \vec{i} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial N_1^e}{\partial y}\end{aligned}\quad (3.59)$$

ifadelerinin çarpımından; sadece  $i \cdot i = 1$ 'li terimlerle  $j \cdot j = 1$ 'li terimlerin katsayıları gelip, diğer katsayılar dik iki vektörün skaler çarpımının sıfır olması nedeni ile sıfır gelecektir.

Bu çarpım

$$\begin{aligned}\nabla \phi^e \nabla N_1^e &= \frac{\partial \phi^e}{\partial x} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} + \frac{\partial \phi^e}{\partial y} \frac{\partial N_1^e}{\partial y} \\ \nabla \phi^e \nabla N_1^e &= \left( \phi_1 \frac{\partial N_1}{\partial x} + \phi_2 \frac{\partial N_2}{\partial x} + \phi_3 \frac{\partial N_3}{\partial x} \right) \frac{\partial N_1}{\partial x} + \left( \phi_1 \frac{\partial N_1}{\partial x} + \phi_2 \frac{\partial N_2}{\partial x} + \phi_3 \frac{\partial N_3}{\partial x} \right) \frac{\partial N_1}{\partial y}\end{aligned}\quad (3.60)$$

olarak bulunur. A a ıdaki kısaltmalar yapılarak,

$$\begin{aligned}k_1 &= \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ k_2 &= \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ k_3 &= \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y}\end{aligned}\quad (3.61)$$

bu ifadeler Denklem (3.54)'de yerine konur  $\phi$  parantezine alınırsa

$$\phi_1 \left( \iint k_1 dx dy + \int \sigma N_1 N_1 ds \right) + \phi_2 \left( \iint k_2 dx dy + \int \sigma N_1 N_2 ds \right) + \phi_3 \left( \iint k_3 dx dy + \int \sigma N_1 N_3 ds \right) = r \quad (3.62)$$

elde edilir. Bu ifade de a a ıdaki kısaltmalar yapılrırsa,

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \iint_R \left( \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} \right) dx dy + \int_c N_1 N_1 ds \\
S_{12} &= \iint_R \left( \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} \right) dx dy + \int_c N_1 N_2 ds \\
S_{13} &= \iint_R \left( \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial y} \right) dx dy + \int_c N_1 N_3 ds
\end{aligned} \tag{3.63}$$

bu ifadeler bir önceki kısımdaki Rayleigh – Ritz yönteminden faydalanılarak bir üçgen elemanı için bulunan matris katsayı ifadeleri ile aynıdır. Galerkin yönteminin tercih edilmesinin sebebi, çözüme fonksiyonel yerine asıl diferansiyel denklemin kullanılmasıdır.

### 3.2.7. Elemanların Birle tirilmesi

Çözümü aranan potansiyel  $i$  levinin tüm bölge içinde, elemanlar arasındaki sınırlarda sürekli olması gerekir. Bir üçgen elemanın içinde ve kenarlarında potansiyel do rusal olarak de  $i$  ir.

Elemanların birbirinden ayrı dü ünülmesi durumunda potansiyel, üçgenler arasındaki sınırlarda süreksizlik gösterir. Elemanlar arasındaki süreksizlik kom u dü ümlerin e de er dü ünülmesiyle giderilir.

Çözüm bölgesinin tamamı için enerji fonksiyoneli her bir üçgen eleman için elde edilen fonksiyonellerin toplamıdır.

$$F = \sum_{n=1}^{\ddot{u}s} F^{(n)}$$

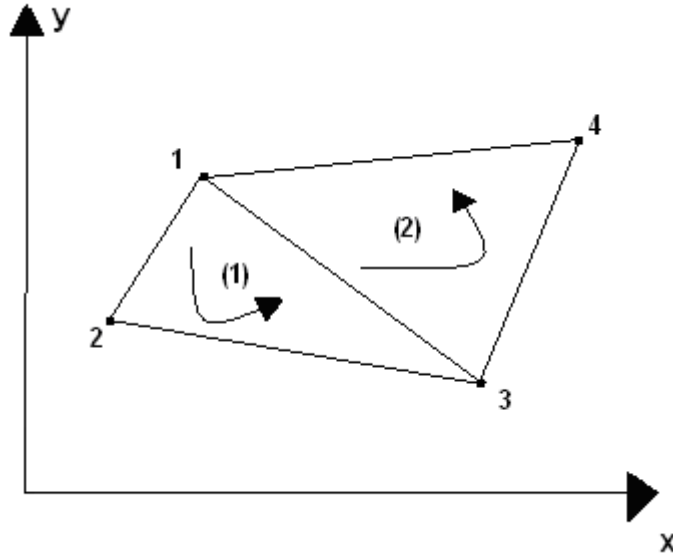
$F$ 'yi minimum yapan  $\phi_i, \phi_j, \phi_m$  de erlerini bulmak için bu de  $i$  kenlere göre kısmi türevler alınıp sifıra e itlenir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F^{(n)}}{\partial \phi_i} &= 2 \left( S_{ii}^{(n)} \cdot \phi_i + S_{ij}^{(n)} \cdot \phi_j + S_{im}^{(n)} \cdot \phi_m \right) \\
\frac{\partial F^{(n)}}{\partial \phi_j} &= 2 \left( S_{jj}^{(n)} \cdot \phi_j + S_{ji}^{(n)} \cdot \phi_i + S_{jm}^{(n)} \cdot \phi_m \right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial F^{(n)}}{\partial \phi_m} = 2 \left( S_{mm}^{(n)} \cdot \phi_m + S_{im}^{(n)} \cdot \phi_i + S_{jm}^{(n)} \cdot \phi_j \right)$$

$$\begin{bmatrix} S_{ii}^{(n)} & S_{ij}^{(n)} & S_{im}^{(n)} \\ S_{ji}^{(n)} & S_{jj}^{(n)} & S_{jm}^{(n)} \\ S_{mi}^{(n)} & S_{mj}^{(n)} & S_{mm}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(3.64)



ekil 3.10. ki üçgen elemanın birle imi

ekil 3.10'da iki üçgenden olu an bir çözüm bölgesinde 4 dü üm mevcut olup enerji fonksiyoneline her bir dü üm için kısmi türev alındı ında denklem (3.65)'deki denklemler olu ur. Bu denklemlerde S'nin üzerindeki indis hangi üçgene ait oldu unu gösterir.

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_1} = \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \phi_1} + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial \phi_1} = S_{11}^{(1)} \cdot \phi_1 + S_{12}^{(1)} \cdot \phi_2 + 0 \cdot \phi_3 + S_{41}^{(1)} \cdot \phi_4$$

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_2} = \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \phi_2} + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial \phi_2} = S_{12}^{(1)} \cdot \phi_1 + (S_{22}^{(1)} \cdot S_{22}^{(2)}) \phi_2 + S_{23}^{(2)} \cdot \phi_3 + (S_{24}^{(1)} \cdot S_{42}^{(2)}) \phi_4$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \phi_3} &= \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \phi_3} + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial \phi_3} = 0 \cdot \phi_1 + S_{23}^{(2)} \cdot \phi_2 + S_{33}^{(2)} \cdot \phi_3 + S_{34}^{(2)} \cdot \phi_4 \\ \frac{\partial F}{\partial \phi_4} &= \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \phi_4} + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial \phi_4} = S_{41}^{(1)} \cdot \phi_1 + (S_{24}^{(1)} \cdot S_{42}^{(2)}) \phi_2 + S_{34}^{(2)} \cdot \phi_3 + (S_{44}^{(1)} \cdot S_{44}^{(2)}) \phi_4\end{aligned}\quad (3.65)$$

1. eleman için:

$$\begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} & S_{12}^{(1)} & S_{13}^{(1)} \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} & S_{23}^{(1)} \\ S_{31}^{(1)} & S_{32}^{(1)} & S_{33}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. eleman için:

$$\begin{bmatrix} S_{11}^{(2)} & S_{13}^{(2)} & S_{14}^{(2)} \\ S_{31}^{(2)} & S_{33}^{(2)} & S_{34}^{(2)} \\ S_{41}^{(2)} & S_{43}^{(2)} & S_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ekil 3.10'da 2 ve 4 nolu dü ümler hem 1, hemde 2 numaralı üçgenin dü ümleri oldu undan dolayı her iki üçgenin fonksiyoneline de yer alırlar. Bundan dolayı ikinci ve dördüncü denklemlerde hem bir hem de iki numaralı üçgenlerden gelen S'ler mevcuttur. Bunun dı nda 1 ve 3 nolu dü ümler sadece tek bir üçgenin kö e dü ümleri olduklarından dolayı hangi üçgenin kö e dü ümleri ise sadece o üçgenlerden gelen S'ler mevcuttur. Denklem (3.65)'deki denklemler sıfıra e itlenir. Bu denklemlerimiz matrisel formda a a idaki ekilde yazılır.

$$\begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} + S_{11}^{(2)} & S_{12}^{(2)} & S_{13}^{(1)} + S_{13}^{(2)} & S_{14}^{(2)} \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} & S_{23}^{(1)} & 0 \\ S_{31}^{(1)} + S_{31}^{(2)} & S_{32}^{(1)} & S_{33}^{(1)} + S_{33}^{(2)} & S_{34}^{(2)} \\ S_{41}^{(2)} & 0 & S_{43}^{(2)} & S_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\quad (3.66)$$

Uygulamada çözüm bölgesinin fonksiyonelinin bir dü üme göre kısmi türevi alınırken, o dü ümü çevreleyen üçgen elemanlar tespit edilip o dü ümün üçgeninin i, j, m isimli dü üm olmasına göre S matrisi olu turulur.

Bu i lem sonunda çözüm bölgesinde yer alan dü üm sayısı kadar denklem elde edilip, sınır dü ümlerinin de erleri verilmek suretiyle çözüm yapılır. Örnek olarak üçüncü dü ümün de eri g olarak verirsek, S matrisi denklem (3.67) 'deki gibi de i tirilerek çözüm yapılır.

$$\begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} + S_{11}^{(2)} & S_{12}^{(2)} & S_{13}^{(1)} + S_{13}^{(2)} & S_{14}^{(2)} \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} & S_{23}^{(1)} & 0 \\ S_{31}^{(1)} + S_{31}^{(2)} & S_{32}^{(1)} & S_{33}^{(1)} + S_{33}^{(2)} & S_{34}^{(2)} \\ S_{41}^{(2)} & 0 & S_{43}^{(2)} & S_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Elde edilen  $[S]$  matrisine, *katsayılar matrisi* adı verilir. Bu matris, bant yapıda ve simetriktr. De eri belli olan dü ümler yerlerine konulduktan sonra denklem sistemi çözüür.

Problemin tabiatı gere i, bazı dü ümlerde akım olabilir. Bu durumda denklem sistemi u eilde düzenlenir [20].

$$\begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} + S_{11}^{(2)} & S_{12}^{(2)} & S_{13}^{(1)} + S_{13}^{(2)} & S_{14}^{(2)} \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} & S_{23}^{(1)} & 0 \\ S_{31}^{(1)} + S_{31}^{(2)} & S_{32}^{(1)} & S_{33}^{(1)} + S_{33}^{(2)} & S_{34}^{(2)} \\ S_{41}^{(2)} & 0 & S_{43}^{(2)} & S_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ J_2 / 3 \\ 0 \\ J_4 / 3 \end{bmatrix} \Delta \quad (3.68)$$

Dü ümlerdeki akım yo unlukları denklemin direk olarak sa tarafına yazılır. Denklem sistemi çözüldü ünde, her dü üm için potansiyel de erleri belli olur.



## 4. POISSON DENKLEM VE MANYETİK DEVRE BÜYÜKLÜKLERİNİN HESAPLAMALARI

### 4.1. Poisson Denklemlerinin Elde Edilmesi

Manyetik alan problemlerinde Maxwell denklemleri kullanılır.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (4.1)$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad (4.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.3)$$

$$\nu = \frac{1}{\mu} \quad (4.4)$$

H:Manyetik alan şiddeti (As/m),

B:Manyetik indüksiyon (T),

$\mu$ =Manyetik geçirgenlik,

$\nu$ = Manyetik rezistivitedir.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (4.5)$$

Burada A Vektör potansiyel olup, birimi Wb/m'dir. Denklem (4.1)'de  $\vec{H}$  yerine denklem (4.2)'deki e itlik konuldu unda denklem (4.3) elde edilir. Bu denklemde B yerine denklem (4.5)'deki e itlik konuldu unda denk (4.7) elde edilir. Bu denklem, denklem (4.8)'de düzenlendi inde denklem (4.2) Poisson denklemi elde edilir.

$$\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{J} \quad (4.6)$$

$$\nabla \times \frac{\nabla \times \vec{A}}{\mu} = \vec{J} \quad (4.7)$$

$$\nu \cdot \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) = \vec{J} \quad (4.8)$$

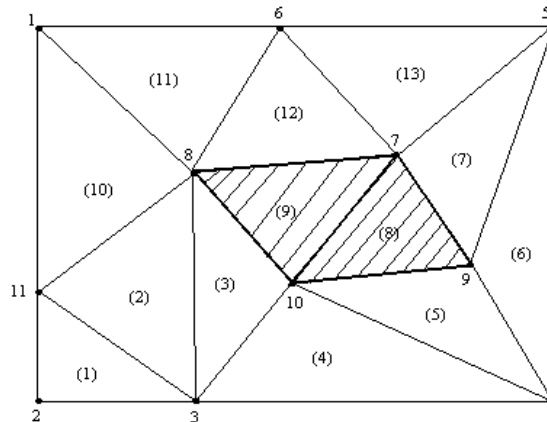
ki boyutlu sonlu elemanlar yöntemi analizi yapılırken denklem (4.8)'deki J akım yoğunluğu u z ekseninde oldu u için, manyetik vektör potansiyel  $A(x,y)=A_z(x,y)$  olur.

#### 4.2. Kaynak Fonksiyonlarının Girilmesi

Manyetik alan problemlerinde sonlu elemanlar yöntemi ile analiz yapılırken dı etki olarak akım yoğunluğu u alınır. Akım yoğunluğu u bakır bölgede var oldu undan bölmelendirme sırasında bakır bölgede bulunan elemanlar belirlenir. Bakır bölgede bulunan üçgenlerin her biri için denklem (4.9) yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} S_{ii}^{(n)} & S_{ij}^{(n)} & S_{im}^{(n)} \\ S_{ji}^{(n)} & S_{jj}^{(n)} & S_{jm}^{(n)} \\ S_{mi}^{(n)} & S_{mj}^{(n)} & S_{mm}^{(n)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_i \\ A_j \\ A_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \Delta \cdot J \quad (4.9)$$

Demir bölgede de fuko kayıpları aynı ekilde ifade edilir. Bakır bölgeden geçen akım kompleks oldu unda çözüm karma ık sayılı bir denklemin çözümü olacaktır. Hava bölgesinde, bakır bölgesinde bulunan üçgenler hariç di er üçgenler için denklem (4.9)'un sa tarafı sıfır alınır. Bu durumda Poisson denklemini denklem (3.1) Laplace denklemini haline gelecektir.



**ekil 4.1.** Kaynak fonksiyonlarının tanımlanması

$$[STE][A] = [RHS] \quad (4.10)$$

ekil 4.1’de taralı kısımda J akım yoğunluğuna sahip bir akım geçiyorsa, denklem (4.9)’daki denklem sisteminin sağ tarafı akım yoğunluğunun ve bakır bölgesinde bulunan 8 ve 9 üçgenlerinin alanlarına bağlı olarak değişecektir. Denklem (4.9)’da bir çözüm bölgesinde akım yoğunluğuna sahip bir üçgen için yazılan ifade S matrisinin oluşturulduğu şekilde ele alınır. Bu elemanlar denklem takımının sağ tarafında aynı şekilde akupledilebilir. Bu işlem için bir başka yöntem ise düğümlere direkt akımın üçte birinin ilavesidir. Denklem (4.11)’de ekil 4.1’in denklem takımı oluşturulmuştur.

$$\begin{bmatrix}
\binom{10+11}{S_{1-1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{1-6}^{11} & 0 & \binom{10+11}{S_{1-8}} & 0 & 0 & S_{1-11}^{10} \\
0 & S_{2-2}^1 & S_{2-3}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{2-11}^1 \\
0 & S_{3-2}^1 & \binom{1+2+3+4}{S_{3-3}} & S_{3-4}^4 & 0 & 0 & 0 & \binom{2+3}{S_{3-8}} & 0 & \binom{3+4}{S_{3-10}} & \binom{1+2}{S_{3-11}} \\
0 & 0 & S_{4-3}^4 & \binom{4+5+6}{S_{4-4}} & S_{4-5}^6 & 0 & 0 & 0 & \binom{5+6}{S_{4-9}} & \binom{4+5}{S_{4-10}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & S_{5-4}^6 & \binom{6+7+13}{S_{5-5}} & S_{5-6}^{13} & \binom{7+13}{S_{5-7}} & 0 & \binom{6+7}{S_{5-9}} & 0 & 0 \\
S_{6-1}^{11} & 0 & 0 & 0 & S_{6-5}^{13} & \binom{11+12+13}{S_{6-6}} & \binom{12+13}{S_{6-7}} & \binom{11+12}{S_{6-8}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \binom{7+13}{S_{7-5}} & \binom{12+13}{S_{7-6}} & \binom{7+8+9+12+13}{S_{7-7}} & \binom{9+12}{S_{7-8}} & \binom{7+8}{S_{7-9}} & \binom{8+9}{S_{7-10}} & 0 \\
\binom{10+11}{S_{8-1}} & 0 & \binom{2+3}{S_{8-3}} & 0 & 0 & \binom{11-12}{S_{8-6}} & \binom{9-12}{S_{8-7}} & \binom{2+3+9+10+11+12}{S_{8-8}} & 0 & \binom{3+9}{S_{8-10}} & \binom{2+10}{S_{8-11}} \\
0 & 0 & 0 & \binom{5+6}{S_{9-4}} & \binom{6+7}{S_{9-5}} & 0 & \binom{7+8}{S_{9-7}} & 0 & \binom{5+6+7+8}{S_{9-9}} & \binom{5+8}{S_{9-10}} & 0 \\
0 & 0 & \binom{3+4}{S_{10-3}} & \binom{4+5}{S_{10-4}} & 0 & 0 & \binom{8+9}{S_{10-7}} & \binom{3+9}{S_{10-8}} & \binom{5+8}{S_{10-9}} & \binom{3+4+5+8+9}{S_{10-10}} & 0 \\
S_{11-1}^{10} & S_{11-2}^1 & \binom{1+2}{S_{11-3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \binom{2+10}{S_{11-8}} & 0 & 0 & \binom{1+2+10}{S_{11-11}} 0
\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \\ A_8 \\ A_9 \\ A_{10} \\ A_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3}(\Delta_8 + \Delta_9)J \\ \frac{1}{3}\Delta_9J \\ \frac{1}{3}\Delta_8J \\ \frac{1}{3}(\Delta_8 + \Delta_9)J \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

### 4.3. Manyetik İndüksiyonun Hesabı

Doymadan dolayı elde edilen Poisson denklemindeki manyetik geçirgenlik, A vektör potansiyelin bir fonksiyonudur. Bu durum Poisson denkleminin nonlineer olmasına yol açar. Çözüm yapılırken A vektör potansiyel değerleri bulunduğundan sonra  $B_x$  ve  $B_y$  değerleri denklemler (4.12)'de verilen denklemlerle hesaplanır.

$$B(x, y) = \text{rot } A(x, y)$$

ve itli ini açtığımız zaman,

$$B(x, y) = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A(x, y) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z(x, y)}{\partial y} & B_x &= \frac{1}{2\Delta} \cdot (c_i \cdot A_i + c_j \cdot A_j + c_m \cdot A_m) \\ B_y &= \frac{\partial A_z(x, y)}{\partial x} & B_y &= \frac{1}{2\Delta} \cdot (b_i \cdot A_i + b_j \cdot A_j + b_m \cdot A_m) \end{aligned} \quad (4.12)$$

olur. Toplam akı yoğunluğu ise denklemler (4.13)'deki gibi bulunur [17].

$$B(x, y) = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \quad (4.13)$$

Tasarımda kullanılan ferromanyetik malzemenin B-H eğrisinin matematiksel modelinden, denklemler (4.13)'de bulunan B manyetik akı değerlerine göre manyetik permabilite değeri bulunur. Daha sonra hesaplamamız oldu umuz manyetik permabiliteye göre yeniden çözüm yapılır. Çözüm sonucunda elde edilen B değerleri veya A değerleri bir önceki hesaplanan değerlerle karşılaştırılır. Aralarında kabul edilebilir bir fark oluncaya kadar bu işlem devam edilir.

#### 4.4. Manyetik Akı Yolu Çizimi

Manyetik yapının akı yolu eması, manyetik bölgenin sonlu elemanlar yöntemiyle yapılan çözümlerin sonucunda elde edilen dü ümlerin vektör potansiyel de erlerine göre çizilebilmektedir. Çizilen akı yolu, manyetik yapımız hakkında birçok önemli bilgiler içermektedir. Ayrıca vektör potansiyel de erlerin bölgelere göre de i imini bu ema üzerinde daha kolay gözlemleyebiliriz. Bu de i im miktarı, çözüm bölgesini üçgen elemanlara bölerken hangi bölgenin daha çok üçgen elemanlara bölünmesi gerekti i bilgisini verir. Daha do ru sonuçlara ula mak için vektör potansiyel de i iminin fazla oldu u bölgeler daha küçük üçgen elemanlara bölünür. Çözüm bölgesindeki e vektör potansiyel noktaları elde edilip bunlar birbirine çizgilere ba lanması durumunda olu an ekil akı yolunun eklidir [18].

Bir üçgenin kö e dü ümlerinin vektör potansiyel de erleri bulundu unda, istenilen koordinattaki vektör potansiyel de erini üçgen içindeki veya üçgen kenarlarındaki tüm noktalarda geçerli olan deneme fonksiyonunu kullanarak denklem (4.14)'den hesaplanabilir.

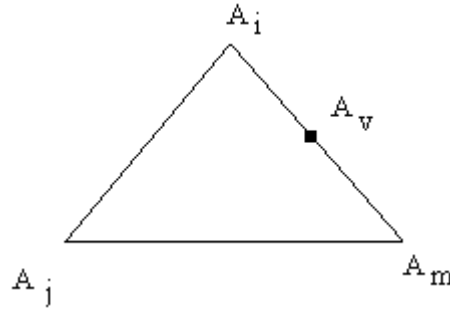
$$A(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot y \quad (4.14)$$

E vektör potansiyel e rileri çizilirken, üçgen üzerindeki bir noktanın vektör potansiyel de erini hesaplamak yerine, üçgen eleman üzerinde, haritası çizilecek olan ve önceden belirlenen bir vektör potansiyel de erine e it noktalar aranır. Bunun için e risi çizilecek vektör potansiyel de eri önceden belirlenir. E risi çizilecek vektör potansiyel de erler iki ekilde belirlenir:

1. En küçük vektör potansiyel de erinden ba layıp, belirli bir artı miktarı kadar sonraki e vektör potansiyel de erli e rileri çizmek. Bu durumda toplam harita çizgi sayısı, en büyük vektör potansiyel de eri ile en küçük vektör potansiyel de eri arasındaki farkın, artım miktarına oranı kadar olur.

2. Toplam harita çizgi sayısını belirledikten sonra, en büyük vektör potansiyel de eri ile en küçük vektör potansiyel de eri arasındaki farkın çizilmesi istenen çizgi sayısına bölerek artım miktarı belirlenir. En küçük vektör potansiyel de erinden ba lanarak, her seferinde artım miktarı kadar artırılarak e vektör potansiyel e rileri çizilir.

Bu çalı mada ikinci yöntem kullanıldı. Programda çizime en küçük vektör potansiyel de erinden ba landı. Her bir üçgen elemanı olu turan üç kenar dü ümlerinin vektör potansiyel de eri çizimi yapılmak istenen vektör potansiyel de erle kar ıla tırıldı. Bu de erin, bir kenarı olu turan iki dü ümden birisinin de erine e it veya bu iki dü ümün vektör potansiyelleri arasında bir de er olup olmadı ına bakıldı. E er çizimi yapılan vektör potansiyel de eri bir üçgen kenarının iki dü ümü arasında bir de er ise, bu kenar üzerinde haritası çizilen vektör potansiyel de erine e it bir de er mutlaka vardır. Kenar dü ümlerin koordinatları ve vektör potansiyel de erlerinden bulunan noktanın koordinatları hesaplanır. Vektör potansiyel de i iminin Lineer oldu u hesaba katılır. E er bir üçgeni olu turan kenarlardan birinde aranan vektör potansiyel de eri bulunmu ise, o zaman mutlaka di er iki kenarından birinde de bu de er mevcuttur.



**ekil 4.2.**  $A_v$  noktasının vektör potansiyelinin bulunması

ekil 4.2.'de çizilecek vektör potansiyel de erinin  $A_i$  ve  $A_m$  de erleri arasında oldu unu kabul edersek  $A_v$  vektör potansiyel de erinin yerini Denklem (4.15)'den bulabiliriz.

$$\frac{x_i - x_v}{x_i - x_m} = \frac{A_i - A_v}{A_i - A_m} \quad (4.15)$$

Bu e itlikte,  $x_v$  dı nda bütün de erler bilindi ine göre,  $x_v$ 'yi çekersek denklem (4.16)'yı elde etmi oluruz.

$$x_v = x_i - \frac{(x_i - x_m)(A_i - A_v)}{A_i - A_m} \quad (4.16)$$

Denklem (4.16)'daki bu e itlik aynı zamanda  $y_v$  içinde geçerlidir.

$$y_v = y_i - \frac{(y_i - y_m)(A_i - A_v)}{A_i - A_m} \quad (4.17)$$

$(x_v, y_v)$  koordinatının vektör potansiyel de eri, çizimi yapılan vektör potansiyel de erine e ittir. E er bir üçgenin bir kenarında haritası çizilen vektör potansiyel de erine e it bir nokta var ise, mutlaka bu üçgenin di er iki kenarından birinde de haritası çizilen vektör potansiyeline e it bir nokta bulunmaktadır. Bulunan ikinci nokta ile birinci noktayı birle tirdi imiz zaman ortaya çıkan do ru, e vektör potansiyel do rusudur.

Her bir artım de eri için, her seferinde bütün üçgenlerin vektör potansiyel de erleri kontrol edilir ve çizilen e potansiyel do rularıyla tüm çözüm bölgesinin e vektör potansiyel e rileri elde edilir.

#### 4.5. Nonlineer Yakla ım

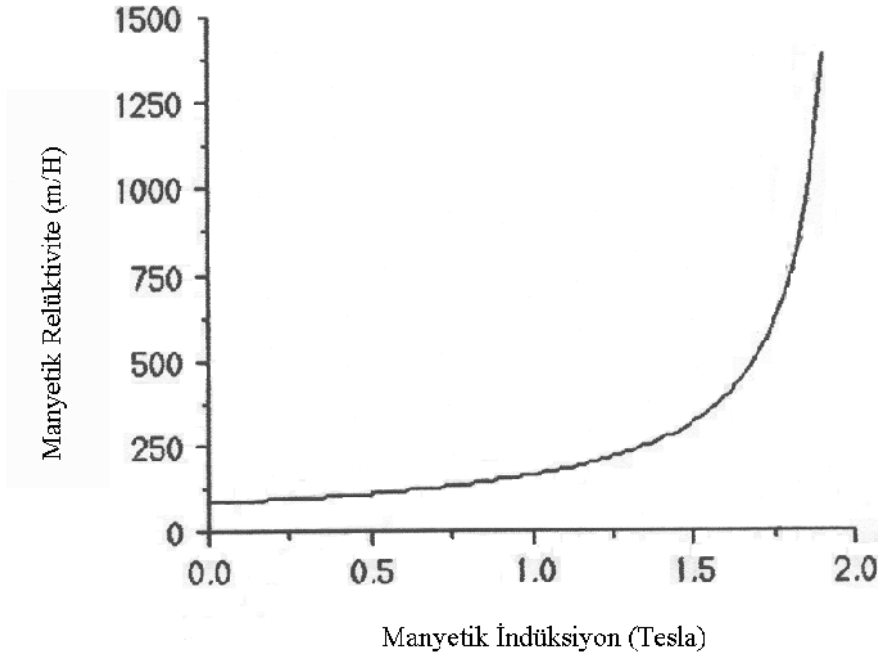
Yaptı ımız çalı mada silisyumlu saçlardan yapılan motorumuzun, manyetik alan iddeti ile manyetik indüksiyonu arasındaki de i imin nonlineerlili ini de programımıza dahil ettik.

ekil 4.3'de manyetik geçirgenlik ile manyetik indüksiyon arasındaki de i imin lineer olmadı ı görülmektedir. Bundan dolayı Poisson denklemi de nonlineer halde olacaktır.

ekil 4.3'deki e ri kullanılarak her bir üçgen elemandaki manyetik relüktivite, o üçgen elemandaki manyetik indüksiyondan da faydalanılarak bulunur. Bir üçgen elemanın her noktasındaki manyetik geçirgenlik aynı de erdedir fakat bu de er her bir üçgende farklıdır. Bir üçgen elemanın manyetik geçirgenli ini bulmak için; öncelikle o üçgen elemanın kö elerindeki vektör potansiyel de erleri kullanılarak o üçgen elemanın içindeki manyetik indüksiyon de eri bulunur. Daha sonra bu manyetik indüksiyon de erine göre (Manyetik malzememizin  $B_s$ 'i 1.89 olarak alındı, bulmu oldu umuz B de erinin bu  $B_s$  de erinden küçük veya büyük olma durumuna göre) denklem (4.18) veya denklem (4.19) ifadeleri



kullanılarak bulunur. Bu işlem her bir üçgen elemana teker teker uygulanır. Bulunan yeni manyetik geçirgenliklerden faydalanarak düğümlerdeki yeni vektör potansiyel değerlerini hesaplanır. Bu işlemi yeni ve bir önceki vektör potansiyeller arasındaki farkın kabul edilebilir bir hata oranına erişit veya küçük oluncaya kadar devam ettirilir [21].



**ekil 4.3.** Manyetik relüktivite ile manyetik indüksiyonun değişimi

Manyetik relüktivite; manyetik indüksiyonun 1.89 Tesla değerine kadar

$$\nu = \frac{82.83}{1 - 0.493 * B} \quad (4.18)$$

ifadesi ile, 1.89 Tesla'dan büyük indüksiyonlar için ise,

$$\nu = \frac{17093.3 * (B - 1.89) + 2300}{B * (1 - 0.339 * (B - 1.89))} \quad (4.19)$$

değerleri üzerinden hesaplanır [22].

#### 4.6. Magnetik Enerji ve İndüktansın Hesabı

Magnetik enerjinin hesaplanabilmesi için önce her bir üçgen elemanın, manyetik indüksiyon değeri, alanı ve manyetik geçirgenlik hesaplanmalıdır. İlaveten motorumuzun yüksekliği de gerektirir. Programımızda enerjinin başlangıç değeri sıfır alınmıştır. Her bir üçgen elemanın enerjisi denklem (4.20)'den teker teker hesaplanarak birbirleri ile toplanarak toplam enerji bulunmuştur.

$$\omega_m = B.H.V \quad H = \frac{B}{\mu}$$
$$\omega_m = \frac{B^2 Ah}{2\mu} \quad (4.20)$$

Denklem (4.20)'deki enerji miktarından faydalanarak yapılan hesaplamalara göre toplam magnetik enerji belli olduktan sonra motordan geçen akım değerine göre indüktans değeri Denklem (4.21)'den kolayca hesaplanabilir.

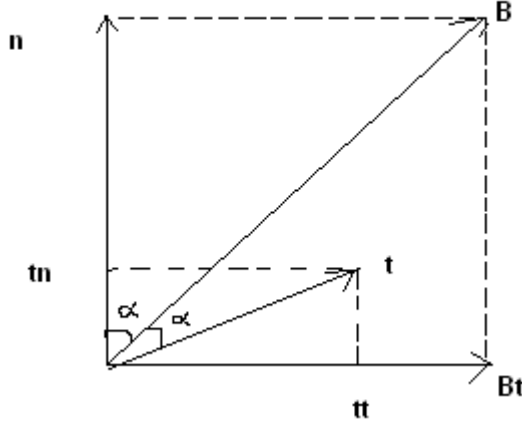
$$L = \frac{2 * \omega_m}{I^2} \quad (4.21)$$

#### 4.7. Moment Hesabı:

Asenkron motorlarda moment birisi stator üzerinde, diğeri de rotor üzerinde oluşan iki elektrik alanının etkileşimi sonucu ortaya çıkar. Sabit bir momentin üretilebilmesi için, bu iki alanın, motorun hava aralığında eş zamanlı bir durumda olması gerekir. Bu çalışmada Maxwell stress metodu kullanılarak moment hesaplandı.

Maxwell stress metodunda; yerel stress (iddet), yüzeyde tüm sınır noktalarında hesaplanır, toplam normal ve teget kuvvet bileşenlerini bulmak için yüzey integrali (veya iki boyutlu çizgisel integral) alınır. İki boyutlu problemlerde Maxwell stress metodu, çevre çizgisi boyunca tüm noktalarda akı yoğunluğunun değerlerinin normal ve teget değerlerinin bilinmesine ihtiyaç duyar [23]. magnetik alan B, yerel stress (iddet) t ve diğer bileşenler

ekil 4.4' de görülmektedir. Stress bile enleri alan bile enlerine ba lıdır.



**ekil 4.4.** Magnetik alan diyagramı, yerel stress ve di er bile enler

Te et kuvvet de eri, tanımlanan çevre çizgisi boyunca te et kuvvet de eri denklem (4.22) elde edildi.

$$F_t = \frac{1}{\mu_0} \int B_n B_t ds \quad (4.22)$$

Asenkron motorun olu turdu u moment kuvvet ile kuvvet kolunun çarpımına e it olacaktır. Momenti üreten kuvvet, te et kuvvet oldu u için moment  $T = rF_t$  ekinde hesaplanır.

Asenkron motorun üretti i momentı hesaplayan bazı çalı malar;

$$T = \frac{1}{\mu_0 (rs - rr)} \int_{S_{ag}} r B_r B_\varphi ds \quad (4.23)$$

l makinenin uzunlu u,  $\mu_0$  bo lu un geçirgenli i, rs ve rr hava aralı ının dı ve iç yarıçapı, r yarıçap,  $B_r$  ve  $B_\varphi$  r ve  $\varphi$  bile enlerin akı yo unlu u,  $S_{ag}$  hava aralı ının kesit alanıdır. [24]

$$T = rdl \left( \sum \frac{B_n B_t}{\mu_0} \right) \quad (4.24)$$

r dairesel yolun yarıçapı, d yolun uzunluğu, l makinenin uzunluğu,  $B_n$  akıyo unlu unun normal bile eni,  $B_t$  akıyo unlu unun te et bile enidir. [25]

Bu çalı mada moment hesaplanırken Maxwell stress metodu kullanıldı. Denklem (4.24) formülü kullanılarak moment hesaplandı.

## **5. ASENKRON MOTORUN MATLAB PROGRAMLAMA DİLİ KULLANILARAK SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ANALİZ**

### **5.1. Matlab'a Giriş :**

MATLAB; (MATrix LABoratory); ilk defa 1985'de C.B Moler tarafından matematik ve özellikle de matris esaslı matematik ortamında kullanılmak üzere geliştirilmiş etkileşimli bir paket programlama dilidir. İlk sürümleri FORTRAN diliyle yazılmış olmakla beraber son sürümleri (2009 yılı itibariyle 7.8 dir) C dilinde hazırlanmıştır. MATLAB mühendislik alanında; sayısal hesaplama, veri çözümleri ve grafik işlemlerinde kullanılabilecek genel amaçlı bir program olmakla beraber özel amaçlı modüller paketlere de sahiptir. Control Toolbox, Signal Toolbox gibi paket programlar (bilgisayar destekli denetim sistemi tasarımı) olup bunlar denetim sistemlerinin tasarımında çok etkili araçlardır. Ayrıca WINDOWS ortamında çalışan SIMULINK, etkileşimli benzetim programlarının hazırlanması ve çalıştırılmasında büyük kolaylıklar sağlamaktadır.

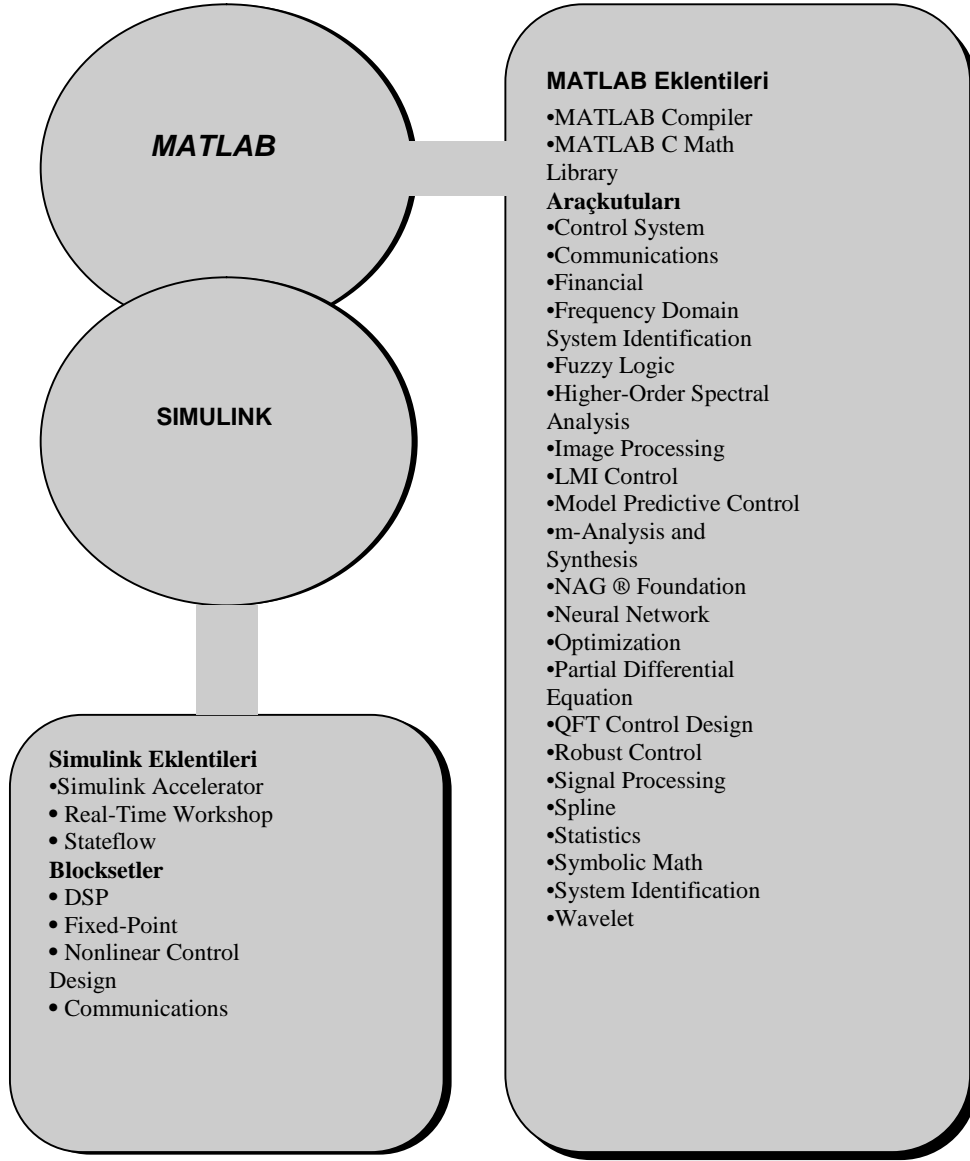
Bugün (2009 yılı itibariyle) 7.8 sürümüne ulaşan MATLAB'ın değişik bilgisayar sistemlerinde çalışan çok çeşitli sürümleri vardır. En basiti Özgür sürümü olup bu sürüm Profesyonel MATLAB benzeri özelliklere sahiptir. Yalnız bazı sınırlamalar vardır.

#### **5.1.1. Matlab Ürün Ailesi**

Matlab, bütün mathworks ürünleri için bir altyapıdır. Matlab'ta, kullanımı kolay olan tek bir ortamda sayısal hesaplama, 2-d ve 3-d grafikleri ve dil yetenekleri birleştirilmiştir. Matlab eklentileri, Matlab'ta geliştirilen sistemlerin gerçekleştirmesini destekleyen seçimli araçlardır.

Araç kutuları, özel sorunların çözümü için Matlab'a uyarlanan Matlab seviyelerinin bir tür kitaplıklarıdır. Araç kutuları, açık ve eklenebilir olup; kendi algoritmalarını ve ekini görebilirsiniz.

Simulink, blok diyagram arayüzü ile doğrusal olmayan simülasyon ve "canlı" simülasyon yetenekleriyle öz sayıları, Matlab'ın grafiklerini ve dil fonksiyonlarını birleştiren bir sistemdir [26].



**ekil 5.1.** Matlab Ürün Ailesi

Simulink eklentileri, simulinkte geli tirilen sistemlerin gerçekte tirmesini destekleyen seçime dayalı araçlardır.

Bloksetler, özgül uygulama alanlarında kullanım için tasarlanmı simulink blo unun toplamlarıdır.

### 5.1.2. Matlab Araç Kutuları (Toolboxes):

MATLAB'ın kullanılabilirliği ve çok yönlülüğü, uygulamalara özgü çeşitli araç kutuları eklemekle geliştirilebilir. Araç kutuları, çeşitli bilimsel alan ve konularda yazılan Matlab fonksiyon dosyalarından oluşurlar. Aşağıda kısaca açıklanan, değişik bilim dalları ile ilgili olarak yazılmış hazır araç kutuları yer almaktadır.

- Signal Processing Toolbox (Sinyal İşleme Araç kutusu): 1 boyutlu ve 2 boyutlu sayısal sinyal işleme (zaman serilerinin analizi) ile ilgili fonksiyonlardan oluşmaktadır. Ayrıca, sayısal filtreler için geliştirilen analiz ve tasarım fonksiyonları ile güç spektrumu analizine ilişkin fonksiyonları da içermektedir.

- Control Systems Toolbox (Kontrol Sistemleri Araç kutusu): Durum uzayı tekniklerini kullanarak kontrol mühendisliği ve sistemler teorisi ile ilgili fonksiyonlardan oluşmaktadır.

- System Identification Toolbox (Sistem Tanımlama Araç kutusu): Parametrik modelleme ve sistem tanımlama ile ilgili fonksiyonlardan oluşmaktadır.

- Neural Network Toolbox (Yapay Sinir Ağları Araç kutusu): Yapay sinir ağları için tasarım ve benzetim (simülasyon) fonksiyonlarından oluşmaktadır. Bu fonksiyonlar birkaç kategoriye ayrılırlar. Bunlar;

- 1) Ağ benzetimi için transfer fonksiyonlarının belirtilmesi,
- 2) Ağ parametrelerini güncelleştirmek için kuralların belirtilmesi,
- 3) Veriler üzerinde ağın öğrenmesi için fonksiyonların belirtilmesi.

Bazı fonksiyonlar, lineer ve Hapfield ağlarının doğrudan tasarımı için kullanılabilirler.

- Spline Toolbox (Oluşturma Araç kutusu): Oluşturma ile ilgili M-dosyalarından oluşmaktadır. Oluşturma araç kutusu fonksiyonel modellemede kullanılmaktadır. Eğrilerin modellenmesi, verilere göre eğri uydurulması, fonksiyonel denklemlerin çözülmesi vb. için oldukça kullanışlıdır.

- Robust-Control Toolbox (Robot Kontrol Araç kutusu): Robot kontrol sistemleri tasarımı ile ilgili fonksiyonlardan oluşmaktadır.

- $\mu$ -Analysis and Synthesis Toolbox ( $\mu$ -Analiz ve Sentez Araç kutusu):  $\mu$ -Analiz ve sentez tekniklerinin kullanılarak robot ve lineer kontrol sistemlerinin incelenmesi ve tasarlanması için yazılmış fonksiyonlardan oluşmaktadır.

### **5.1.3. Matlab'ın kullanım amacı ve alanı:**

MATLAB tüm mühendislik alanında, sayısal hesaplamalar, veri çözümlenmesi ve grafik i lemlerinde kolaylıkla kullanılabilen bir program dilidir. FORTRAN ve C dili gibi yüksek seviyeli programa dili ile yapılabilen hesaplamaların pek ço unu Matlab ile yapmak mümkündür. Ayrıca bunu yanında di er programlama dillerine göre Matlab'ta daha az sayıda komutla çözüm üretmek mümkündür. Gerçekte Matlab, M-dosyaları (M-Files) olarak bilinen pek çok sayıda fonksiyon dosyalarından, alt programlardan ibarettir. Hazırlanması dü ünülen bir program içinde M-dosyalarını kullanmak suretiyle komut sayısını çok kısa tutmak mümkündür.

### **5.1.4. Matlab'ın Kullanım Yerleri:**

Denklem takımlarının çözümü, do rusal ve do rusal olmayan diferansiyel denklemlerin çözümü, integral hesabı gibi sayısal hesaplamalar.

- Veri çözümlenmesi i lemleri
- statiksel hesaplamalar ve çözümlenmeler
- Grafik çizimi ve çözümlenmeler
- Bilgisayar destekli denetim sistemi tasarımı
- Devre analizinde dü üm kol denklemlerinin çözümü

### **5.2. Asenkron Motorun Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Analizi**

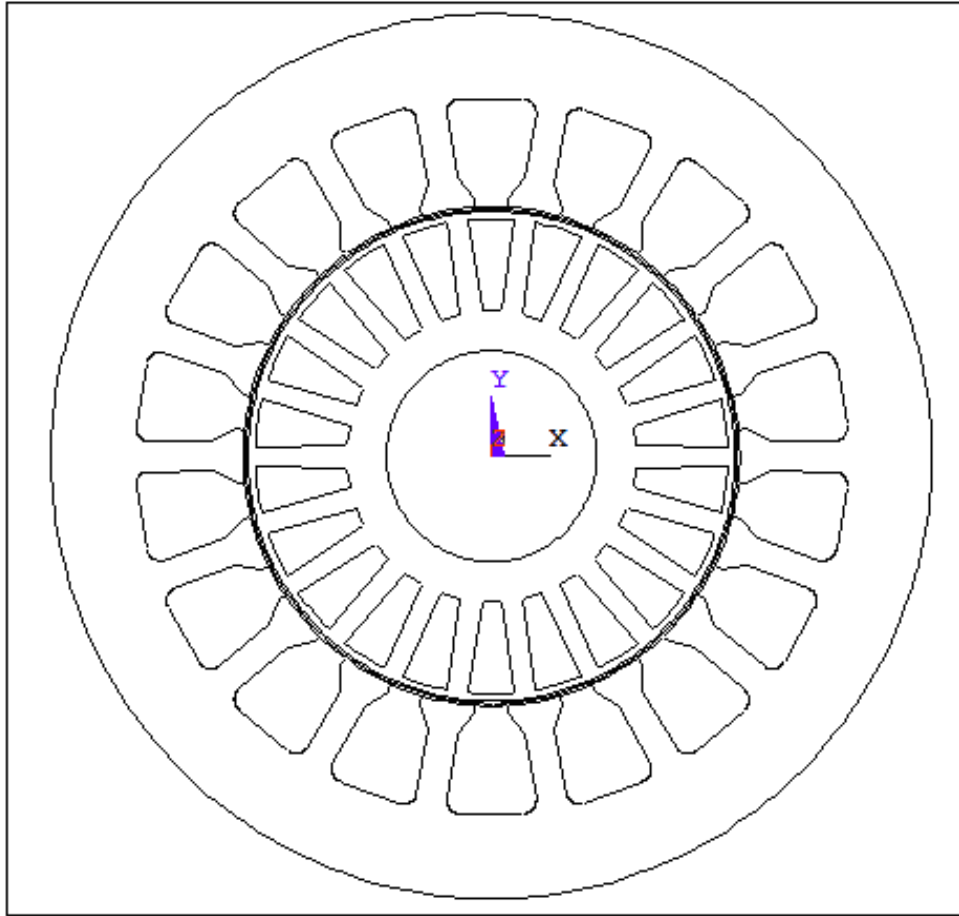
Bu tezde asenkron motorun iki boyutlu sonlu elemanlar yöntemiyle analizi yapılmı tır. Dalgıç pompa motoru olarak kullanılan motorumuz üç fazlı asenkron motor olup, 380V ebeke geriliminde çalı tırılmaktadır. AA gerilimi ile uyarılan stator sargılarına sahip motorun davranı nın incelenmesi için öncelikle sonlu elemanlar yöntemi ile harmonik analizi yapılmı tır. Yapılan bu analizde manyetik saçların lineer geçirgenli e sahip oldu u kabul edilmi tir. Ayrıca rotor çubuklarının haricinde manyetik saç ve mil üzerinde olu acak girdap akımları ihmal edilmi tir.



Bu analiz sonucunda motorun indüktans ve enerji değerleri hesaplanmış ve stator sargılarında meydana gelen toplam akıların denklemi elde edilmiştir. Böylece motorun modellenmesi sağlanmıştır.

### 5.2.1. Motor Geometrisinin Tanımlanması:

Analizi yaptığımız motor şekil 5.2'de görüldüğü gibi 18 stator, 22 rotor olukuna sahiptir. Stator ile rotor arasındaki hava aralığı 0.5mm'dir.

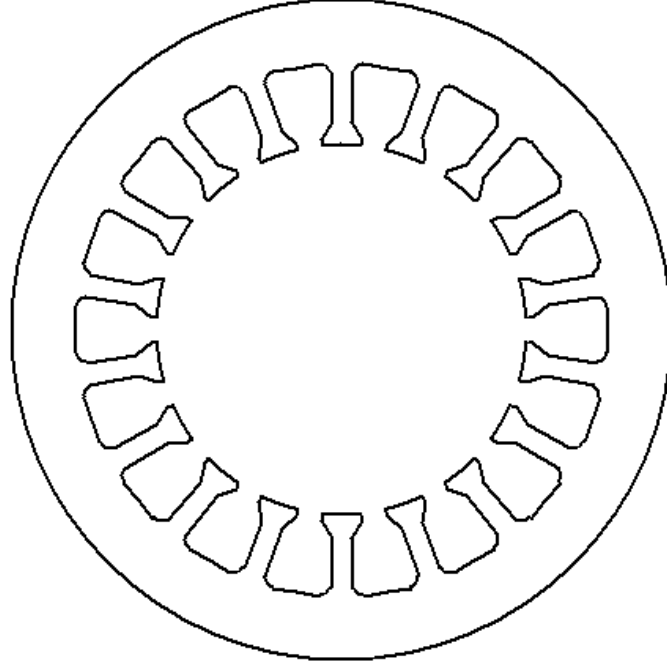


Şekil 5.2 Motorumuzun önden görünümü

Hava Aralığı  $\delta=0.5$  mm

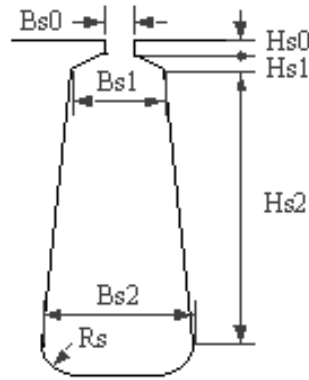
### 5.2.1.1. Stator Geometrisi:

Dış çap : 92.2 mm  
iç çap: 52 mm  
Stator boyu: 229 mm



(a)

Hs0 : 0.75 mm  
Hs1 : 2.21 mm  
Hs2 : 6.84 mm  
Bs0 : 3.61 mm  
Bs1 : 7.14 mm  
Bs2 : 9.39 mm



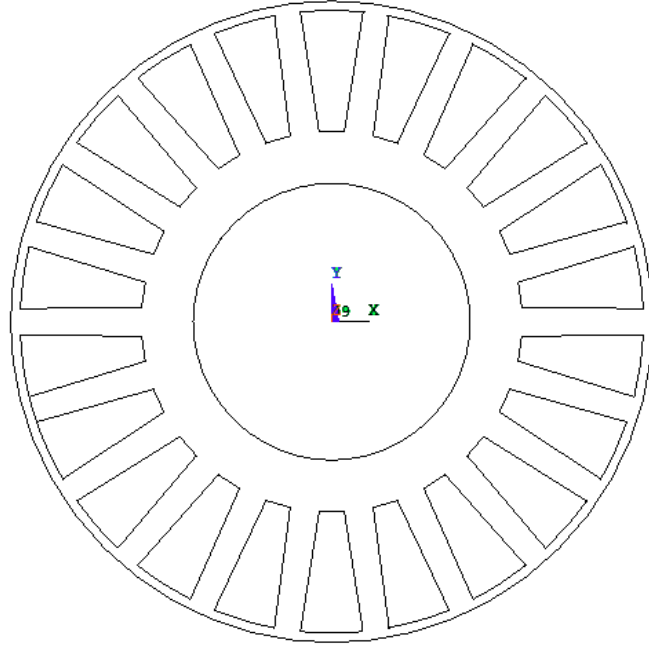
(b)

ekil 5.3. a) Stator ölçüleri b) Stator oluk ölçüleri

### 5.2.1.2. Rotor Geometrisi:

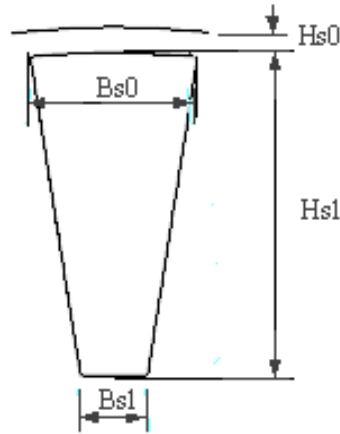
Rotor çubukları alüminyum eritilerek rotor oluklarına dökülmesi sonucu oluştuğu tur.

Dış Çap : 51 mm  
İç Çap : 22 mm  
Rotor Uzunluğu : 229 mm



(a)

Hs0 : 0.75 mm  
Hs1 : 9.62 mm  
Bs0 : 5 mm  
Bs1 : 2 mm

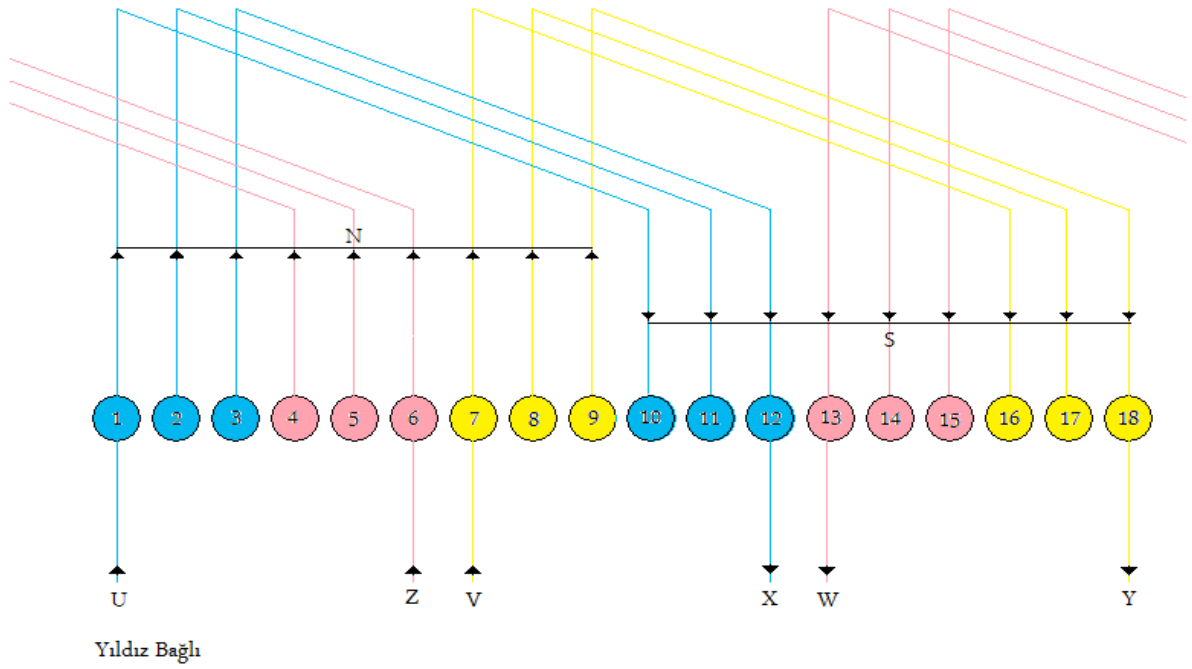


(b)

ekil 5.4 a) Rotor Ölçüleri b) Rotor Oluk Ölçüleri

### 5.2.1.3. Stator Sarım eması:

ncelemesi yapılan üç fazlı asenkron motor yarım kalıp olarak sarımlı ve sarım eması ekil 5.5'de verilmiştir. Motor Yıldız bağlantılıdır. Kullanılan emaye kaplı bakır iletkenlerin çapı 2\*0.55 mm olup 47 sarım olarak sarımlıdır.



ekil 5.5 Stator sarım eması

Tel Çapı : 2\*0.55mm

Sarım Sayısı : 47 Sarım

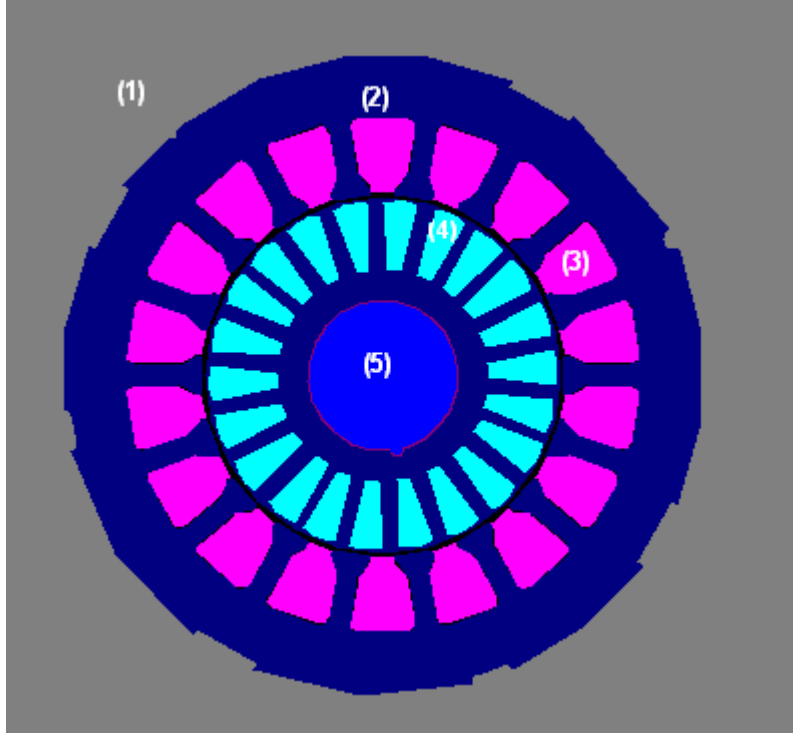
### 5.2.2. Motorda Kullanılan Materyallerin Tanımlanması:

Motorumuzun analizinde 5 materyal modeli kullanılmıştır. Bu modellerin özellikleri Tablo 5.1’de verilmiştir.

**Tablo 5.1.** Motor analizinde kullanılan materyal özellikleri

Materyal Numarası	Bağıl Manyetik geçirgenlik ( $\mu_r$ )	Direnç (Ohm m)	Hız (Hz)	Malzeme Türü
1	1	0	0	Hava
2	3500	0	0	Silisyumlu sac (stator ve rotor)
3	1	1.588e-8	0	Stator bakır sargı
4	1	2.7778e-8	47	Rotor Alüminyum sargı
5	100	0	0	Rotor mili

Motor analizinde kullanılan materyal türlerine göre motorumuzun geometrisi Eki 5.6’da verilmiştir.



ekil 5.6 Materyal türlerine göre motor geometrisi

### 5.2.3. Programımızın Tanıtımı:

Hafıza probleminin önüne geçilmesi, işlem kolaylığı ve daha hızlı sonuç alabilmek amacıyla yapılan çalışmada motorun yarısı ele alınmıştır. Buna göre gerekli analizler ve hesaplamalar yapılmış, moment değerleri hesaplanmıştır. Sonuç olarak elde edilen veriler simetri durumundan dolayı iki ile çarpılmış ve tam sonuçlara ulaşılmıştır.

Bu problemin çözülebilmesi için ilk önce asenkron motorumuzun dışındaki vektör potansiyel değerlerinin sıfır olduğu bir bölge belirlendi. Bu sınır ekil 5.7’de üçgenlere bölmeleştirilmiş şekilde görülmektedir. Ancak buradaki potansiyel değerlerin teoride sıfır olmadığı da bilinmektedir. Bunun için bu sınırı motordan ne kadar uzakta alırsak sıfır potansiyel değerlerine de o kadar yaklaşıyoruz. Bu durumda çözüm sonuçlarımız daha doğru olacaktır.

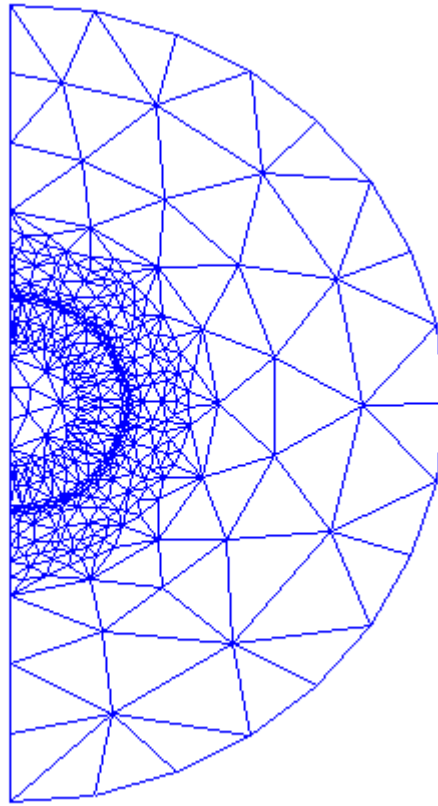
Yapmış olduğumuz programı adım adım anlatacak olursak;

**1.adım:** Programımızda ilk adım olarak üçgen elemanların koordinatlarının ve her bir üçgen elemanın oluşturduğu düğüm numaralarının girilmesi gerekmektedir. Bu verilerin girişini teker teker yapılabileceği gibi dosyalardan da okutulabilir.

Dosyadan okutmak için bilgisayarımızın C:\MATLAB6p5\work dizininde geneldugumler.dat, potansiyelmateryalliDnoktalari.dat ve sinirdugumler.dat isimli text dosyaları olu turmamız gerekir.

**2.adım:** Gerekli olan verilerin belirtilen dosyalardan okutulması i leminden sonra 2. adım olarak motorumuzu çizdirme adımına geçilmi tir.

Programımızda sonlu elemanlar yöntemine göre, ekil 5.7’de görülen asenkron motorumuza elle yapımı oldu umuz bölmelendirme i leminden sonra, her dü ümün x ve y koordinatlarından ve üçgenleri olu turan dü üm numaralarından yararlanılarak yapılan elle bölmelendirme i leminin çizdirilmesi ile ayrıca bir tür hata kontrolü yapımı olunmaktadır. E er bir üçgeni olu turan dü üm numaraları, x ve y koordinatlarından biri veya hepsi yanlış girilmi ise bunu bu kısımda çok rahat bir ekilde görebilirsiniz ve bu hatayı düzeltebilirsiniz.



**ekil 5.7.** Motorumuzun elle bölmelendirilmi durumu

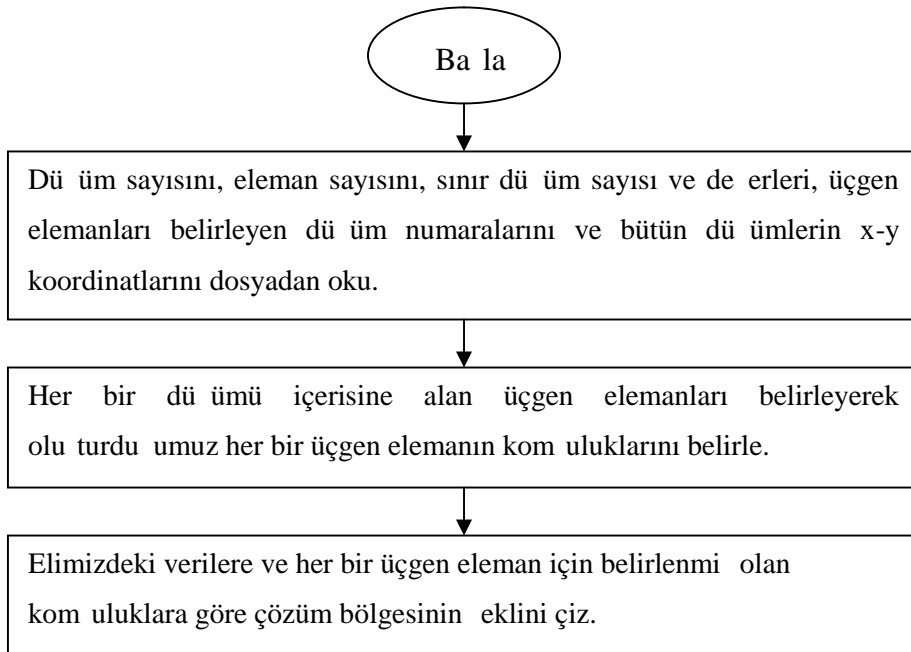
Motorumuzun elle bölmelendirilmi de erleri;

Dü üm Sayısı = 494,

Üçgen Eleman Sayısı = 946,  
Sınır Düüm Sayısı = 28'dir.

Çözüm bölgesinin görünümünün çizdirilmesi sırasında ( ekil.5.7) , bu çözüm bölgesinin datalarının (her düümün x ve y koordinatları ve üçgenleri oluşturan düüm numaraları) dosyadan okunabilmesi için bir dosya halinde C:\MATLAB6p5\work'un içine kaydetmeniz gerekmektedir.

Bölmelendirmeden Önceki Çizimin Akıması:



**3.adım:** Asenkron motorumuzun elle yapmış olduğumuz bölmelendirme işlemi'nin çizdirilmesinden sonra bu adımda çözüm bölgemizin Sonlu Elemanlar Yöntemine göre otomatik bölmelendirme işlemi yaptırılmaktadır.

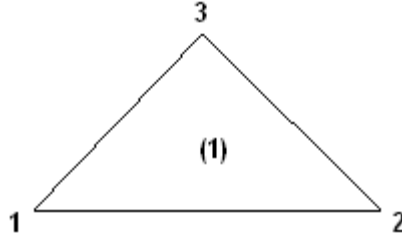
Sonlu elemanlar yönteminde çözümün doğruluğunu arttırmak için, vektör potansiyel değerine ait değerimin fazla olduğu bölgelerde (bakır, demir..vb.) üçgen elemanlarının sayısı çoğaltılır. Belirlenen çözüm bölgesini çok sayıda üçgen elemanlara bölme işlemi elle, direkt bilgisayar programı ve her ikisi ile de yapılabilir. Ancak elle yapılan bölmelendirme işlemine çok dikkat edilmelidir; bu işlem hem uzun zaman alır hem de dosyaya veya bilgisayara yazılımı sırasında birçok yanlışlıklar yapılabilir. Günümüzde bu



bölmelendirme i lemleri direk bölmelendirme paket programları ile yapılıyor. Çözüm bölgesi kapalı bölgelere ayrılarak istenildi i ekilde bölmelendiriliyor.

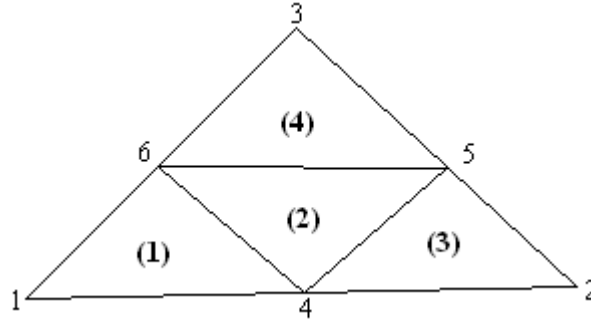
Bu çalı mada ise ilk a ama olarak çözüm bölgesi elle belirli bir sayıda üçgenlere bölmelendirildikten sonra, yapımı oldu umuz otomatik üçgenlere bölme programı ile istedi imiz sayıda üçgenlere bölmelendirildi.

Otomatik üçgenlere bölme i leminin nasıl yapıldı ma göz atacak olursak;



ekil 5.8. Tek üçgen eleman

ekil 5.8'deki bir tek üçgen elemanın üç kenarının orta noktaları birle tirilerek, bir tek üçgen elemandan dört tane yeni üçgen eleman elde edilir. ekil 5.9'da görüldü ü gibi dü üm sayımız üçten altıya çıkmı tır.



ekil 5.9. Bir tek üçgen elemandan elde edilen yeni üçgen elemanlar

Aynı i lemler tekrarlanarak yeni olu an her bir üçgenin tekrar orta noktaları birle tirilerek üçgen eleman sayımızı arttırabiliriz. kinci bölmelendirme sonunda bir tek üçgen elemanla ba ladı ımız bölmelendirme i lemi sonunda üçgen sayımızı 16'ya

çıkarmı oluruz. Bu işlemi istediğimiz kadar tekrarlayıp çözüm bölgemizi daha küçük üçgen elemanlara bölebiliriz.

Bir üçgenin bir kenarının orta noktasını bulmak için, bu kenarın iki düümünün koordinatlarından yararlanılır. Ekil 5.9'daki üçgenin kenarlarının orta noktalarının koordinatları denklem (5.1)'deki gibidir.

$$x_4 = x_1 + (x_2 - x_1)/2$$

$$y_4 = y_1 + (y_2 - y_1)/2$$

$$x_5 = x_2 + (x_3 - x_2)/2$$

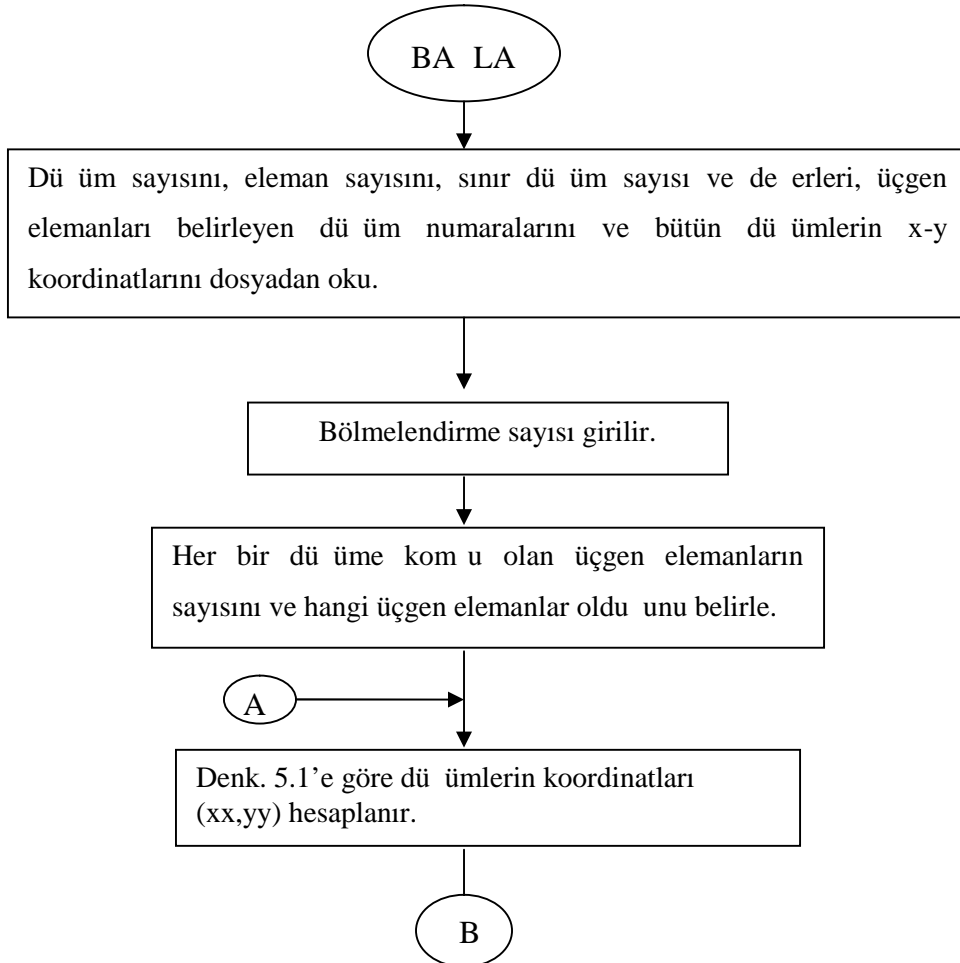
$$y_5 = y_2 + (y_3 - y_2)/2$$

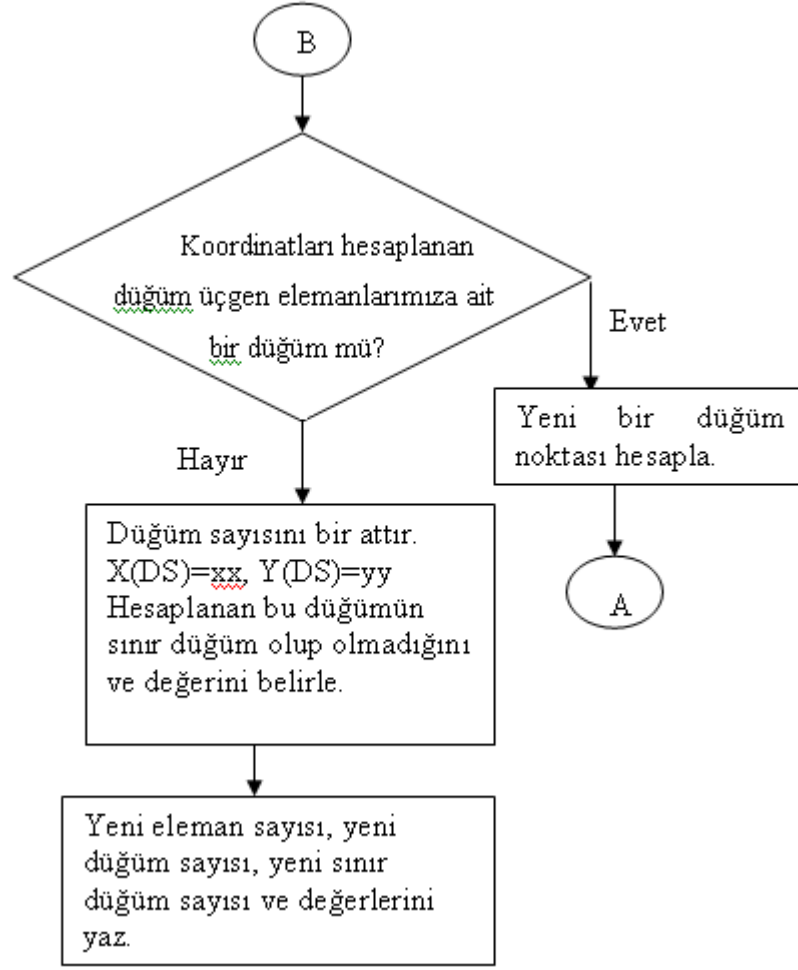
$$x_6 = x_1 + (x_3 - x_1)/2$$

$$y_6 = y_1 + (y_3 - y_1)/2$$

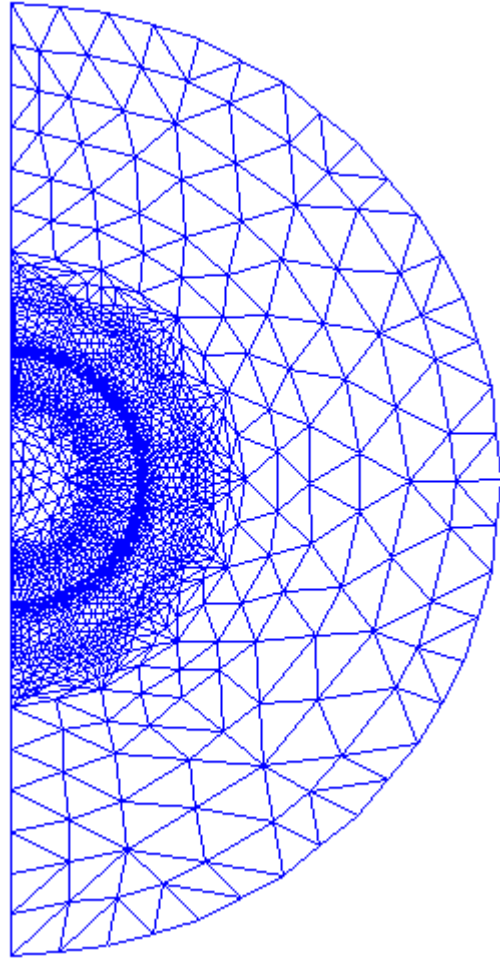
(5.1)

Otomatik Bölmelendirme Akı Diyagramı:





**4.adım:** Bir sonraki adımda Sonlu elemanlar yöntemine göre yapımı oldu umuz 1 defa bölmelendirme işlemi sonucunda elde edilen her düğümün x ve y koordinatlarından ve üçgenleri oluşturan düğüm numaralarından (EK 1-2) yararlanarak asenkron motor yeniden çizdirildi. ( ekil 5.10)



**ekil 5.10** Motorumuzun otomatik bölmelendirilmi durumu

Otomatik bölmelendirme programı ile bir defa bölmelendirme işlemi sonucunda aşağıdaki sonuçlar elde edildi.

Düğümlük Sayısı = 1921,

Üçgen Eleman Sayısı = 3784,

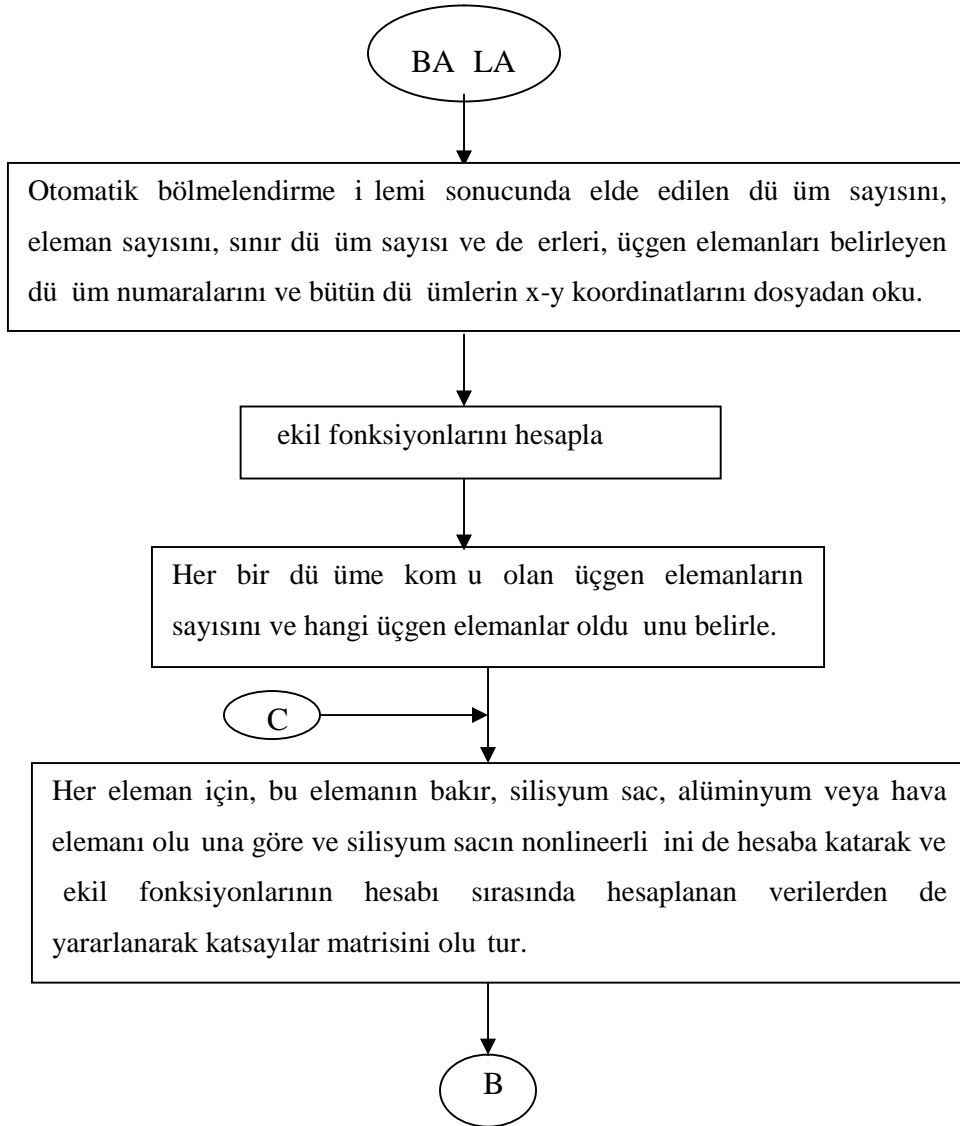
Sınır Düğümlük Sayısı = 56'dir.

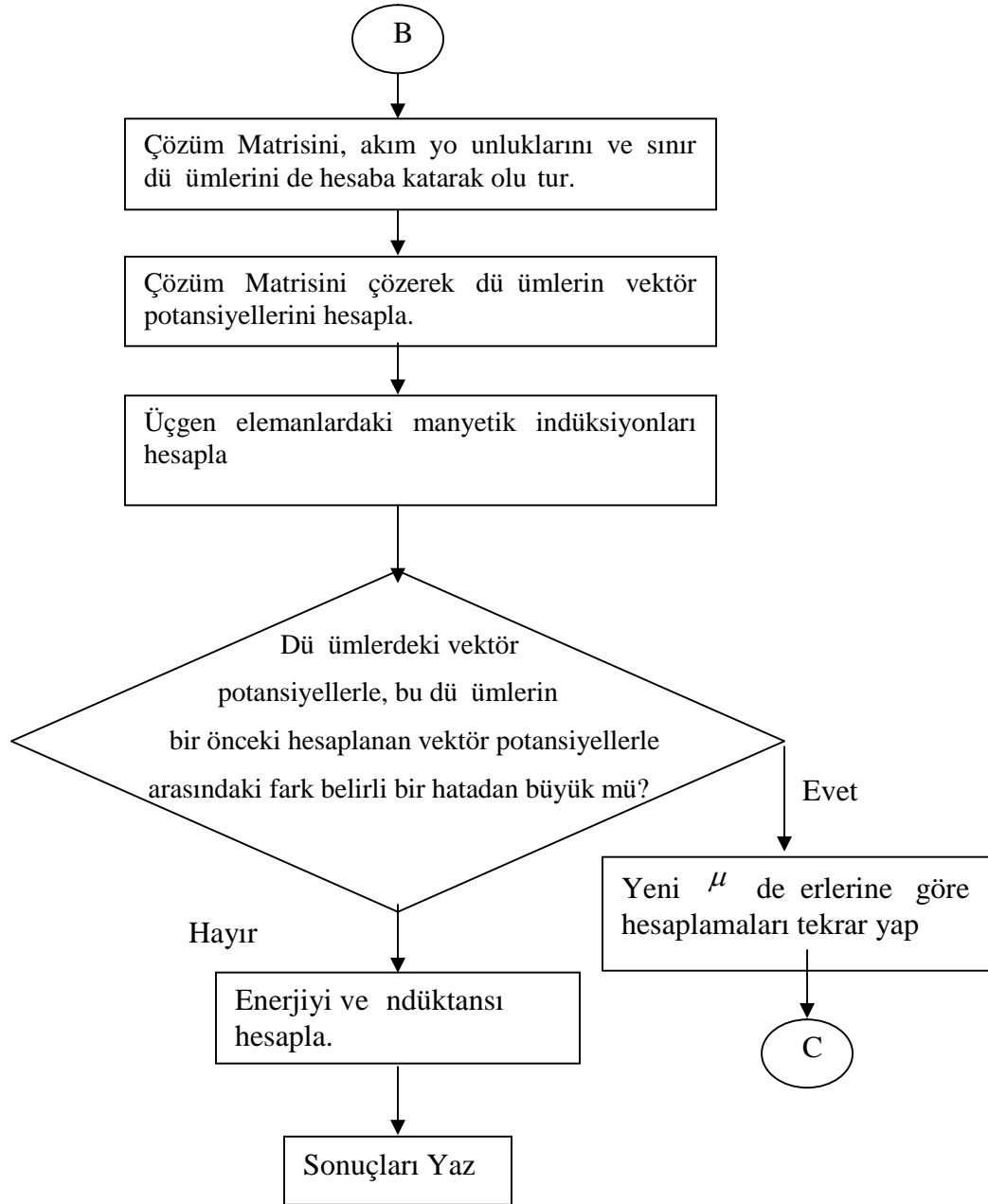
**5.adım:** Bu adımda otomatik bölmelendirme işleminden sonra elde edilen yeni üçgen elemanlar ve düğümlere göre motorun çözümüne geçildi.

Çözüm için öncelikle Denk. 3.34 ve Denk. 3.35 kullanılarak A, B, C ve N ekil fonksiyonları hesaplandı. Aynı zamanda Denk. 3.31 kullanılarak her bir üçgen elemanın alanı hesaplandı.

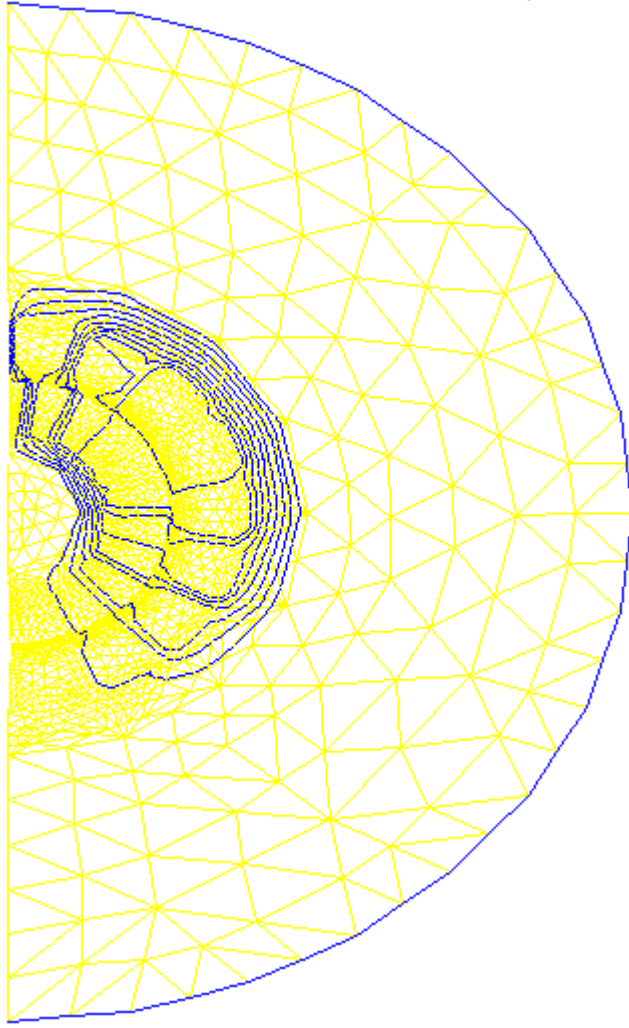
Daha sonra her bir üçgen eleman için bu elemanlarda kullanılan materyalin özelliğine göre ve ekil fonksiyonları da hesaba katılarak katsayılar matrisi oluşturuldu. Akım yoğunlukları ve sınır düğümler de çözüme eklenerek vektör potansiyel değerleri hesaplandı. Her bir üçgen elemanın üç köşesindeki potansiyel değerlerinden faydalanılarak, o elemanın magnetik indüksiyon değerleri hesaplandı. Son olarak da her elemanın magnetik indüksiyon değerleri ve üçgenlerin alanları kullanılarak moment hesaplandı.

ekil Fonksiyonları ve S Matrisi Hesabının Akış Diyagramı:

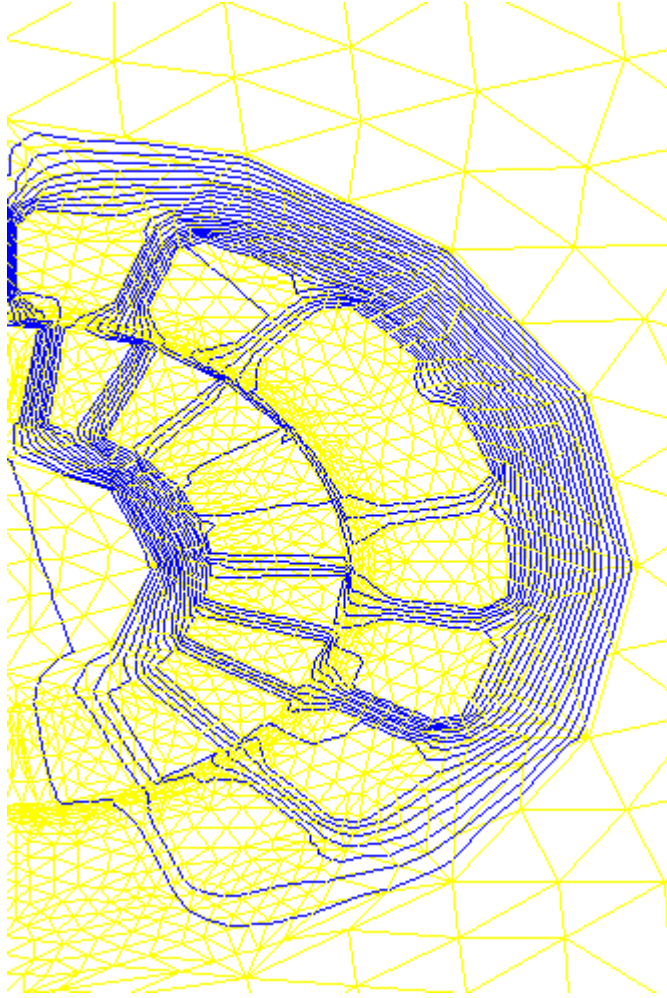




**6.adım:** Bu ana kadar sonlu elemanlar analizi yapmak için gerekli olan bütün veriler oluşturuldu. Son adımda ise oluşturulan bu veriler bölüm 3 ve 4 deki denklemler kullanılarak çözdürülüp, gerekli olan büyüklükler (manyetik indüksiyon, vektör potansiyel, moment gibi) bulunduktan sonra istenilen sayıda eleman potansiyelleri çizdiriliyor.

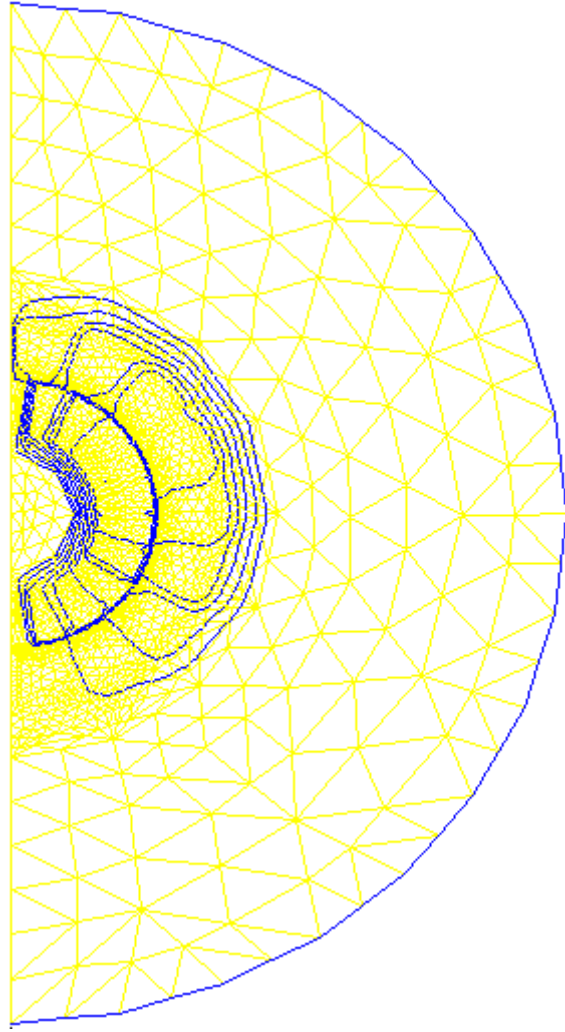


ekil 5.11 Kayma=0 oldu u durumda e potansiyel e rileri (10 e ri)

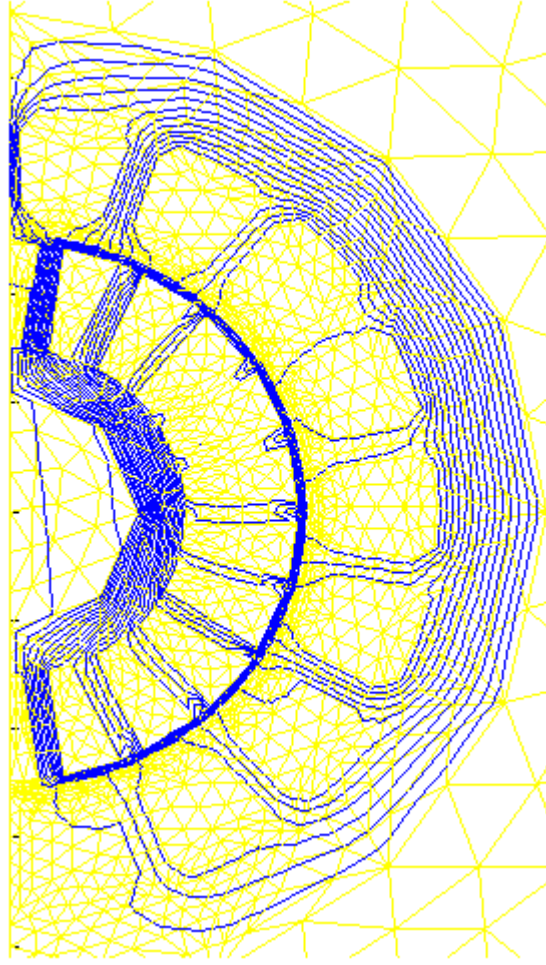


ekil 5.12 Kayma=0 oldu u durumda e potansiyel e rileri (25 e ri)

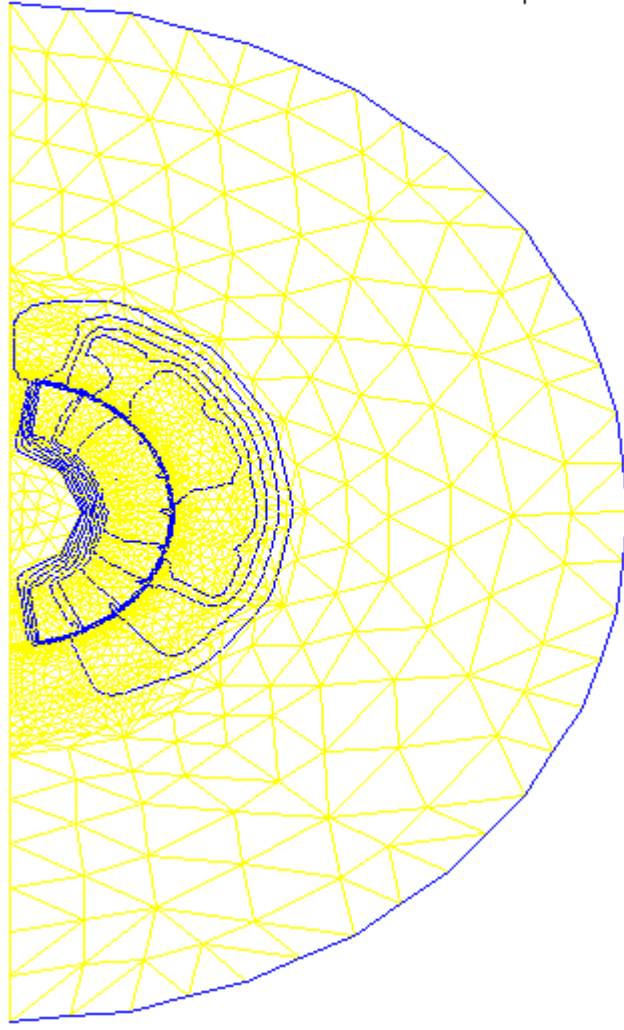




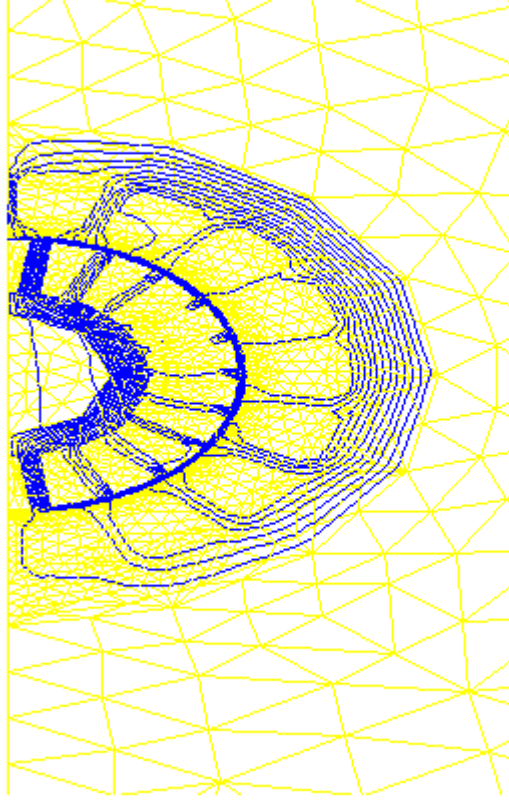
ekil 5.13 Kayma=0.03 oldu u durumda e potansiyel e rileri (10 e ri)



ekil 5.14 Kayma=0.03 oldu u durumda e potansiyel e rileri (25 e ri)



ekil 5.15 Kayma=0.05 oldu u durumda e potansiyel e rileri (10 e ri)



ekil 5.16 Kayma=0.05 oldu u durumda e potansiyel e rileri (25 e ri)

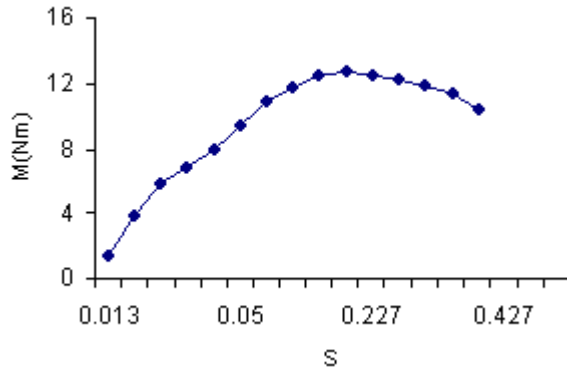
## 6. SONUÇLAR

Sonlu elemanlar yöntemiyle çalı abilmek için öncelikle çözüm bölgesinin uygun bir ekilde bölmelenmesi gerekir. Çözüm a ı üretmek konusunda yazılımlı yüzlerce makale, tez vb. yayın mevcuttur ve her geçen gün artmaktadır. Bu konuda amatörce oldu u gibi profesyonelce de ilerleme, daha iyiye ula ma amaçlanmaktadır. Bu nedenle paket program üreticileri de bu konuya özel bir alaka göstermektedirler. En kısa sürede en uygun çözüm a mını üretme konusunda çalı malar yapılmakta, yeni yöntemler ke fedilmeye çalı ılmaktadır.

Bu çalı mada yapılan analizler sonucunda motorun 2820 d/dk hızla çalı tı ı ı durumda farklı kayma de erlerinde hesaplanan moment de erleri a a ıda verilmi tir.

S=0.027 iken; Moment=3.8930 Nm

S=0.05 iken; Moment=4.7076 Nm



ekil 5.17 Kayma ile Momentin sonuçlarının kar ıla tırılması

Bu çalı ma için tasarlanmı ve imal edilmi asenkron motorun (6A,380V) deneysel çalı maları sonucu elde edilen moment de eri 7.45 Nm dir. Yaptı ımız çalı mada simetri durumuna göre motorun yarısı ele alınmı oldu undan hesaplanan moment de eri 2 ile çarpılmı tir. Bu durumda momentin 7.8 Nm oldu u görülmü tür. Aradaki yakla ık %5'lik hata miktarı da sonlu elemanlar yönteminde kullanılan modellerde yapılan ihmaller, deneysel çalı mada kullanılan ölçme cihazı hatalarından vb. kaynaklanmaktadır.

Sonuç olarak sonlu elemanlar yöntemini kullanarak asenkron motor tasarlanmanın iyi neticeler verece i elde edilen sonuçlardan anla ılmaktadır.

## KAYNAKLAR

- [1] **Öksüztepe, E.**, 2008. Sinüzoidal Akı Da ılımı Olmayan Sabit Mıknatıslı Senkron Motorun Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Analizi Ve Sensörsüz Kontrolü, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi, Elazı .
- [2] **Chari, M.V.K., Silvester, P.**, 1970. Finite Element Solution of Saturable Magnetic Field Problems, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol pas-89, No:7 (1642-1650)
- [3] **Selçuk, A. H.**, 2003., Lineer Asenkron Motorlarda Uç Etkilerinin Sonlu Elemanlar Yöntemiyle ncelenmesi, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi, Elazı
- [4] **Silvester, P., Cabayan, H.S., Browne, B.T.**, 1973. Efficient Techniques For Finite Element Analysis Of Electric Machines, IEEE PES Winter Meeting, New York.
- [5] **Freeman, E. M., Lawther, D. A.**, 1973. Normal Force In Single Sided Linear Induction Motors, Proc. Iee, Vol.120, No.12, Dec
- [6] **Chari, M.V.K.**, 1973. Finite Element Solution Of The Eddy Current Problem In Magnetic Structures IEEE PES Summer Meeting And EHV/UHV Conference, Vancouver, B.C. Canada.
- [7] **Demirchian, K. S., Chechurin, V., Sarma, M. S.**, 1976. Scalar Potential Concept For Calculating The Steady Magnetic Fields And Eddy Currents, IEEE Trans. On Mag., Vol. MAG-12, No.6 Nov.
- [8] **Hanalla, A. Y., Macdonald, D. C.**, 1976. Numerical Analysis Of Transient Field Problems In Electrical Machines, Proc. IEE, Vol.123, No.9, Sept.
- [9] **Zienkiewicz, O. C., Lyness, J., Owen, D. R. J.**, 1977. Three Dimensional Magnetic Field Determination Using A Scalar Potential –A Finite Element Solution, IEEE Trans. On Mag., Vol. MAG-13, No.5, Sept.

- [10] **Williamson, S., Ralph, J. W.**, 1982. Finite Element Analysis For Nonlinear Magnetic Field Problems With Complex Current Sources, IEE Proc.Vol.129 Pt.A.No. 6 August.
- [11] **Preston, T. W., Reece, A. B. J.**, 1982. Solution Of 3 Dimensional Eddy Current Problems: T-Omega Method, IEEE Trans. On Mag., Vol. MAG-18, No.2, March.
- [12] **Brauer, J. R.**, 1982. Finite Element Calculation Of Eddy Currents And Skin Effects, IEEE Trans. On Mag., Vol. MAG-18, No.2, March.
- [13] **Gieras, J.F., Dawson, G.E., Eastham, A.R.**, 1987. A New Longitudinal End Effect Factor For Linear Induction Motors, IEEE Transactions On Energy Conversion, Vol.Ec-2, No.1, March.
- [14] **Deshmukh, N. K., Mukherji, C.**, 1987. Finite Element Analysis Of Three Dimensional Eddy Currents in Attractive Electromagnetic Levitation”, IEE Proc., Vol. 134, Pt. A., No.8, Sept.
- [15] **Öksüztepe, E.**, 2003. Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Bir Lineer Motorun Manyetik Alan Dağılımı, Doktora Semineri, Fırat Üniversitesi, Elazığ .
- [16] **Türkbay, H.**, 1997. Asenkron Motorların Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Analizi Ve Tasarımı, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi, Elazığ .
- [17] **Yetgin, A. G., Çanakolu, A.** ., 2005. Sonlu Elemanlar Yöntemini Kullanarak Asenkron Motorun Hız-Moment Karakteristiğinin Elde Edilmesi, Fırat Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, 17, 4 , 699-707.
- [18] **Kürüm, H.**, 1990. Çift Yanlı Lineer Asenkron Motorların Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Analizi, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi, Elazığ .
- [19] **Polat, M.**, 2005. Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Analizin Nesnel Tabanlı Bir Programlama Dili ile Gerçekleştirilmesi ve Bir Transformatörün Manyetik Büyüklüklerinin Hesabı, Doktora Semineri, Fırat Üniversitesi, Elazığ .

- [20] **Demerdash, N.A.**, 1982. Solution of eddy current problems using three dimensional finite element complex magnetic vector potential. IEEE Transactions On Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-101, No.11 November 1982.
- [21] **Güldemir, H., Kürüm, H., Akpınar, S.**, Üç Boyutlu Sonlu Elemanlar Yöntemi Kullanarak Bir Transformatörün Manyetik Alan Da ılımının ncelenmesi, Elektrik Müh. 5. Ulusal Kongresi.
- [22] **Omaç, Z.**, 1994. Relüktans Motorlarda Manyetik Alan Da ılımının ncelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi, Elazı .
- [23] **Imal E.**,1993. Suspension and Propulsion Forces On ThinPlate Secondaries of Linear Reluctance Motors, D. Phil. Thesis, University of Sussex, U.K.
- [24] **Arkkio A.**, Finite Element Analysis of Cage Induction Motors Fed by Static Frequency Converters, IEEE Transactions on Magnetics, Vol.26, No.2, March,pp.551-553
- [25] **Salon S.J., Bhatia S., Burow D.W.**, The Convergence of Flux in the Air Gap of Induction Motors, IEEE Transactions on Magnetics, Vol.32, No.5, September, pp.4284-4286.
- [26] **Uzunlu M., Kızıl A., Onar Ö.**, 2003., Her Yönü ile MATLAB, Türkmen Kitapevi, stanbul.
- [27] **Kürüm, H.**, 2002. Bir Lineer Asenkron Motorun Çelik Sekonderinin Manyetik Özelliklerinin Matematiksel Olarak Modellenmesi, F.Ü. Fen ve Müh. Bilimleri Dergisi, Elazı .
- [28] **M. Chiampi, A. L. Negro** , 1981. Finite Elements Computation of Magnetic Fields in Multiply Connected Domains, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. mag-17, No.4.
- [29] **Alwash, H., Al-Rikabi, J.A.H.**, 1979. Finite element analysis of linear induction machines, IEE Rproc., Vol 1126, No.7 July, Pp 677-682.



- [30] **Golias, N.A., Tsiboukis, T.D.**, 1992. Three dimensional automatic adaptive mesh generation. IEEE Transactions On Magnetics, Vol 28, No.2, March 1992.
- [31] **Pozueta, M.A.R., Feito, J. S.**, Finite Element Analysis Of Linear Induction Motors With Slotted Stator.
- [32] **Rafinejad, P., Sabonnadiere, J. C.**, 1976. Finite Element Computer Programs In Design Of Electromagnetic Devices, IEEE Trans. On Mag., Vol. MAG-12, No.5, Sept.
- [33] **Salon, S. J., Burow, D.W., R.E.Ashley., L.Ovacık**, 1993. Finite Element Analysis Of Induction Machines In The Frequency Domain, IEEE Trans.On Mag., Vol.29, No.2, March.
- [34] **Nasar, S.A., Boldea, I.**, 1976. Linear motion electric machines, New York, Wiley.
- [35] **Sario lu M.K.**,1983. Elektrik Makinelerinin Temelleri: Asenkron Makineler, stanbul.

## ÖZGEÇM

**Çi dem BEZEK**

e-posta: [cbezek83@hotmail.com](mailto:cbezek83@hotmail.com)

- 1983** :Ankara'da do du
- 1997–2000** :Ankara Ayrancı Lisesini Bitirdi
- 2001–2005** :Fırat Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektrik-Elektronik Mühendisli i Bölümü'nden mezun oldu.
- 2006** :Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisansına ba ladı
- 2007** :Emniyet Genel Müdürlü ü Bilgi lem Daire Ba kanlı ı Sistem ve Güvenlik übesi kapsamında Elektrik-Elektronik Mühendisi olarak görev yapmaktadır.