

**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DOKTORA TEZİ**

**LİNEER OLMAYAN BİHARMONİK DENKLEMİN FARKLI  
SINIR KOŞULLARINDA SAYISAL ÇÖZÜMÜ**

**FEDA İLHAN**

**KOCAELİ 2016**

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

LİNEER OLMAYAN BİHARMONİK DENKLEMİN FARKLI  
SINIR KOŞULLARINDA SAYISAL ÇÖZÜMÜ

FEDA İLHAN

Prof.Dr. Zahir MURADOĞLU  
Danışman, Kocaeli Üniv.

Prof.Dr. Serdal PAMUK  
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv

Prof.Dr. Yasin KİŞİOĞLU  
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv.

Prof.Dr. Halim ÖZDEMİR  
Jüri Üyesi, Sakarya Üniv.

Doç.Dr. Şevket GÜR  
Jüri Üyesi, Sakarya Üniv.



.....



.....



.....



.....



.....

Tezin Savunulduğu Tarih: 23.12.2016

## ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Savunma ve otomotiv sanayisinde, karayolları, köprü ve viyadükler gibi alt yapı inşaatlarının iskeletlerinin temel parçalarında, tıbbi ameliyat malzemeleri ve yapay organların geliştirilmesinde, bina ve gemi inşaatları gibi daha birçok alanda kullanılan yapı malzemelerinin analizi oldukça önemlidir. Bu çalışmada lineer olmayan biharmonik denklem için sınır değer problemi ile ifade edilen elastoplastik levhanın eğilmesi probleminin, sayısal analizi yapılmıştır. Gerçek olaylara karşılık gelen matematiksel modellerin çözümü mühendis ve matematikçilerin ortak çalışmaları sonucu bilim ve teknolojiye önemli bir katkı sunmaktadır.

Beni bu konuda çalışmaya yönlendiren danışman hocam sayın Prof. Dr. Zahir MURADOĞLU'na teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca çalışmama fikirleri ve tavsiyeleri ile katkıda bulunan sayın Prof. Dr. Alemdar HASANOĞLU'na teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışması sırasında fikir ve önerileriyle çalışmama katkıda bulunan Prof. Dr. Serdal PAMUK ve Prof. Dr. Yasin KIŞIOĞLU'na teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca benim için hiçbir fedakarlıktan kaçınmayan her zaman ve her koşulda yanımda olan anneme, babama, kardeşlerime, hayatımı güzelleştiren kızım Zerya'ya ve sevgili eşim Kenan İLHAN'a teşekkürü bir borç bilirim. Tezdeki bazı şekillerin çiziminde katkısı olan Ece ERDOĞAN'a ve son olarak arkadaşlarım İrem ÇAY, Seçil KESKİN ve Sevda CEBECİ'ye teşekkürlerimi sunarım.

Aralık – 2016

Feda İLHAN

## İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR .....	i
İÇİNDEKİLER .....	ii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	iv
TABLOLAR DİZİNİ .....	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	viii
ÖZET.....	ix
ABSTRACT .....	x
GİRİŞ .....	1
1. LEVHANIN EĞİLMESİ PROBLEMİNİN TARİHÇESİ VE LİTERATÜR İNCELENMESİ .....	3
2. GENEL KAVRAMLAR .....	14
2.1. Bir Noktadaki Gerilme .....	16
2.2. Gerilme Tensörü .....	18
2.3. Şekil Değiştirme ve Şekil Değiştirme Bileşenleri .....	22
2.4. Hooke Kanunu .....	25
2.5. Denge Denklemi .....	28
2.6. Düzlem Deformasyon .....	28
3. ELASTOPLASTİK LEVHANIN EĞİLMESİNİN MATEMATİKSEL MODELİ.....	30
3.1. Elastoplastik Levhanın Eğilmesinin Matematiksel Modeli .....	30
3.2. Sınır Koşullarının Elde Edilmesi .....	41
3.3. Sınır Koşullarının Fiziksel Yorumu .....	49
4. PROBLEMİN MONOTON OPERATÖRLER TEORİSİ KAPSAMINDA İNCELENMESİ .....	54
5. PROBLEMİN SONLU FARK DENKLEMİNİN ELDE EDİLMESİ .....	63
5.1. Sonlu Fark Operatörleri .....	63
5.2. Lagrange Enterpolasyon Polinomunun Yardımıyla Türev Formüllerinin Elde Edilmesi .....	65
5.3. Levhanın Denge Denklemine Sonlu Fark Yaklaşımı .....	67
5.4. Sınır Koşullarının Sonlu Fark Yaklaşımı.....	69
6. LİNEER OLMAYAN BİHARMONİK DENKLEMİN SAYISAL ÇÖZÜMÜNÜN TEST FONKSİYONLARI İLE İNCELENMESİ.....	76
6.1. Sıkı Kenetlenme Koşulunu Sağlayan Levha İçin Lineer Olmayan Biharmonik Denklemine Sayısal Çözümünün Test Fonksiyonu İle İncelenmesi .....	76
6.2. Menteşe Koşulunu Sağlayan Levha İçin Lineer Olmayan Biharmonik Denklemine Sayısal Çözümünün Test Fonksiyonu İle İncelenmesi .....	84
7. ELASTOPLASTİK LEVHANIN EĞİLMESİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ.....	90
7.1. Elastoplastik Levhanın Eğilmesinin Sayısal Çözümü .....	90
7.2. Levhanın Yapıldığı Malzemenin E Young Modülünün Bulunması .....	97
7.3. Optimal Kontrol Problemi (F'nin Bulunması).....	102
8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER .....	105

KAYNAKLAR .....	106
KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER .....	110
ÖZGEÇMİŞ .....	111



## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1.	Kuvvet ile yer değiştirme arasındaki ilişki.....	14
Şekil 2.2.	Biçimlendirilebilir metallere için gerilme-şekil değiştirme eğrisi .....	15
Şekil 2.3.	Dengedeki bir cisim .....	16
Şekil 2.4.	tt en kesitli prizmatik çubuk .....	17
Şekil 2.5.	Üç eksenli normal gerilme .....	19
Şekil 2.6.	Kayma gerilmesi .....	21
Şekil 2.7.	Birim elastik cisim .....	23
Şekil 2.8.	OA ve OB elemanları arasındaki açıların sapması.....	23
Şekil 3.1.	Plastiklik fonksiyonu $g(\xi^2)$ 'nin $\kappa$ parametresine bağımlılığı.....	40
Şekil 3.2.	$T=g(\xi^2)\xi$ fonksiyonu .....	41
Şekil 5.1.	$\Gamma_1$ sınırında sert kenetlenme koşulu için 4 noktalı kafes.....	70
Şekil 5.2.	$\Gamma_1$ sınırında menteşe koşulu için 9 noktalı kafes.....	71
Şekil 5.3.	$\Gamma_2$ sınırında sert kenetlenme koşulu için 4 noktalı kafes.....	71
Şekil 5.4.	$\Gamma_2$ sınırında menteşe koşulu için 9 noktalı kafes.....	72
Şekil 5.5.	$\Gamma_3$ sınırında sert kenetlenme koşulu için 4 noktalı kafes.....	73
Şekil 5.6.	$\Gamma_3$ sınırında menteşe koşulu için 9 noktalı kafes.....	73
Şekil 5.7.	$\Gamma_4$ sınırında sert kenetlenme koşulu için 4 noktalı kafes.....	74
Şekil 5.8.	$\Gamma_4$ sınırında menteşe koşulu için 9 noktalı kafes.....	74
Şekil 6.1.	a) $w(x_1, x_2) = (1 - \cos 2\pi x_1)(1 - \cos 2\pi x_2)$ test fonksiyonunun kesin çözümü b) $g(\xi^2(w)) = 1$ durumunda elde edilen yaklaşık çözüm .....	77
Şekil 6.2.	$g(\xi^2(w)) = 1$ durumunda $w(x_1, x_2) = (1 - \cos 2\pi x_1)(1 - \cos 2\pi x_2)$ test fonksiyonu için elde edilen yaklaşık çözümün a) bağıl hatası b) mutlak hatası .....	78
Şekil 6.3.	a) $w(x_1, x_2) = (1 - \cos 2\pi x_1)(1 - \cos 2\pi x_2)$ test fonksiyonunun kesin çözümü b) $g(x_1, x_2) = e^{x_1 + x_2}$ iken yaklaşık çözüm .....	80
Şekil 6.4.	$g(x_1, x_2) = e^{x_1 + x_2}$ durumunda $w(x_1, x_2) = (1 - \cos 2\pi x_1)(1 - \cos 2\pi x_2)$ test fonksiyonu için elde edilen yaklaşık çözümün a)bağıl hatası b)mutlak hatası .....	80
Şekil 6.5.	a) $w(x_1, x_2) = (1 - \cos 2\pi x_1)(1 - \cos 2\pi x_2)$ test fonksiyonu b) $\xi_0 = 0,027$ ve $\kappa = 0,05$ için $g = g(\xi^2(w))$ durumunda elde edilen yaklaşık çözüm .....	82
Şekil 6.6.	a) $g = g(\xi^2(w))$ durumunda $w(x_1, x_2) = (1 - \cos 2\pi x_1)(1 - \cos 2\pi x_2)$ test fonksiyonu için elde edilen yaklaşık çözümün a) bağıl hatası b) mutlak hatası .....	82
Şekil 6.7.	$\xi^2(w)$ 'nin grafiği .....	83
Şekil 6.8.	a) $w(x_1, x_2) = \sin \pi x_1 \sin \pi x_2$ fonksiyonu b) $g(x_1, x_2) = 1$ durumunda yaklaşık çözüm.....	84
Şekil 6.9.	$g(x_1, x_2) = 1$ durumunda a) bağıl hata b) mutlak hata.....	85
Şekil 6.10.	a) $w(x_1, x_2) = \sin \pi x_1 \sin \pi x_2$ fonksiyonunun grafiği	

	b) $g(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2}$ durumunda yaklaşık çözümün grafiği .....	85
Şekil 6.11.	$g(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2}$ durumunda a) bağıl hatası b) mutlak hatası .....	86
Şekil 6.12.	a) $w(x_1, x_2) = \sin \pi x_1 \sin \pi x_2$ fonksiyonunun grafiği	
	b) $g=g(\xi^2(w))$ durumunda yaklaşık çözüm .....	87
Şekil 6.13.	$g=g(\xi^2(w))$ durumunda a) bağıl hata b) mutlak hata .....	88
Şekil 7.1.	Sıkı kenetlenme koşulu için sayısal çözümün grafiği .....	91
Şekil 7.2.	Menteşe koşulu için sayısal çözümün grafiği .....	91
Şekil 7.3.	Menteşe ve sıkı kenetlenme koşullarını sağlayan levhaya uygulanan farklı şiddetteki kuvvetlerin oluşturduğu eğilmeler.....	93
Şekil 7.4.	Kuvvet değiştikçe sıkı kenetlenme koşulunu sağlayan levhanın kalınlığı ile deformasyonu arasındaki ilişki .....	96



## TABLULAR DİZİNİ

Tablo 6.1.	$w(x_1, x_2) = (1 - \cos 2\pi x_1)(1 - \cos 2\pi x_2)$ test fonksiyonu için $g(\xi^2(w)) = 1$ iken değişen kafes boyutlarının mutlak ve bağıl hatalar üzerindeki etkisi .....	79
Tablo 6.2.	$w(x_1, x_2) = (1 - \cos 2\pi x_1)(1 - \cos 2\pi x_2)$ test fonksiyonu için $g(x_1, x_2) = e^{x_1 + x_2}$ iken değişen kafes boyutlarına göre elde edilen mutlak ve bağıl hatalar .....	81
Tablo 6.3.	$w(x_1, x_2) = (1 - \cos 2\pi x_1)(1 - \cos 2\pi x_2)$ test fonksiyonu için $\xi_0 = 0,027$ ve $\kappa = 0,05$ iken $g = g(\xi^2(w))$ durumu .....	83
Tablo 6.4.	$g(\xi^2(w)) = 1$ durumunda $w(x_1, x_2) = \sin \pi x_1 \sin \pi x_2$ test fonksiyonu için elde edilen mutlak ve bağıl hatalar .....	86
Tablo 6.5.	$g(x_1, x_2) = e^{x_1 + x_2}$ durumunda $w(x_1, x_2) = \sin \pi x_1 \sin \pi x_2$ test fonksiyonu için elde edilen mutlak ve bağıl hatalar .....	87
Tablo 7.1.	Sayısal örneklerde kullanılacak veriler .....	90
Tablo 7.2.	Menteşe koşulunu sağlayan elastoplastik levha üzerine uygulanan yükün şiddeti arttıkça maksimal eğilme $w_{\max}$ ve $\xi^2$ değerlerindeki değişim .....	92
Tablo 7.3.	Sıkı kenetlenme koşulunu sağlayan elastoplastik levha üzerine uygulanan yükün şiddeti arttıkça maksimal eğilme $w_{\max}$ ve $\xi^2$ değerlerindeki değişim .....	93
Tablo 7.4.	Sınırdaki menteşe koşulu sağlandığı durumda farklı $w^{(0)}(x_1, x_2)$ başlangıç yaklaşımları verildiği zaman, farklı $\varepsilon$ değerleri için iterasyon sayısı .....	94
Tablo 7.5.	Sınırdaki sıkı kenetlenme koşulu sağlandığı durumda farklı $w^{(0)}(x_1, x_2)$ başlangıç yaklaşımları verildiği zaman, farklı $\varepsilon$ değerleri için iterasyon sayısı .....	95
Tablo 7.6.	Sıkı kenetlenme sınır koşulunu sağlayan levhaya farklı kuvvetler uygulandığında, farklı kalınlıklar için oluşan eğilmeler .....	95
Tablo 7.7.	Sert ve yumuşak malzemeden yapılan, sıkı kenetlenme ve menteşe koşullarını sağlayan elastoplastik levhanın farklı $\kappa$ değerleri için eğilmesi .....	97
Tablo 7.8.	Sınırlarda menteşe koşulunu sağlayan levhanın çözümü kullanılarak E'nin bulunması ( $f=200$ [kN]) .....	100
Tablo 7.9.	Sınırlarda menteşe koşulunu sağlayan levhanın çözümü kullanılarak E'nin bulunması ( $f=250$ [kN]) .....	100
Tablo 7.10.	Sınırlarda sıkı kenetlenme koşulunu sağlayan levhanın çözümü kullanılarak E'nin bulunması ( $f=200$ [kN]) .....	101
Tablo 7.11.	Sınırlarda sıkı kenetlenme koşulunu sağlayan levhanın çözümü kullanılarak E'nin bulunması ( $f=250$ [kN]) .....	101
Tablo 7.12.	Sınırlarda menteşe koşulunu sağlayan, sert malzemeden yapılmış levhanın çözümü kullanılarak F'in bulunması .....	104



Tablo 7.13. Sınırlarda menteşe koşulunu sağlayan, yumuşak malzemedен yapılmış levhanın çözümü kullanılarak F'in bulunması.....	104
--	-----



## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\delta$	: Bağlı hata, (%)
$w^{(0)}$	: Başlangıç fonksiyonu
$M_{12}$	: Burulma momenti, (Nm)
$\epsilon_{ij}$	: Deformasyon tensörünün bileşenleri, (N/cm <sup>2</sup> )
$n$	: Dış normal, (°)
$w$	: Eğilme fonksiyonu
$M_i$	: Eğilme momentleri, (Nm)
$\xi_0$	: Elastisite limiti
$E$	: Elastisite (Young) modülü, (kN/cm <sup>2</sup> )
$\bar{\omega}_h$	: Eşit adımlı veya eşit adımlı olmayan kafes
$\sigma_{ij}$	: Gerilme tensörünün bileşenleri, (kN/cm <sup>2</sup> )
$F_i$	: Hacim kuvvetleri, (kN)
$H$	: Hilbert uzayı
$\tau_{ij}$	: Kayma gerilmesi
$\tilde{T}$	: Kayma gerilmesi yoğunluğu
$Q_i$	: Kayma kuvvetleri
$G$	: Kayma modülü
$\gamma_{ij}$	: Kayma şekil değiştirmesi, (radyan)
$F$	: Kuvvet, (kN)
$\lambda, \mu$	: Lamé sabitleri
$W$	: Levhanın deformasyon enerjisi, (J)
$\bar{\Omega}$	: Levhanın doldurduğu bölge, (cm <sup>2</sup> )
$\xi$	: Levhanın eğrilik derecesi, (radyan)
$l_i$	: Levhanın kenar uzunluğu, (cm)
$I(w)$	: Levhanın potansiyel enerjisi, (J)
$D$	: Levhanın silindirik sertlik katsayısı
$w_{\max}$	: Maksimal eğilme, (cm)
$\alpha$	: Noise
$\partial v / \partial n$	: Normal yönünde türev
$\nu$	: Poisson oranı
$P(w)$	: Problemin potansiyeli
$\Gamma$	: Problemin tanımlandığı bölgenin sınırları
$H_0^2(\bar{\Omega})$	: Sobolev uzayı
$\partial v / \partial s$	: Teğet yönünde türev
$n_{\epsilon_y}$	: Yaklaşım değeri (approximation number)
$q$	: Yükün şiddeti, (kN)
$\kappa$	: Zorlama sertlik parametresi

## LİNEER OLMAYAN BİHARMONİK DENKLEMİN FARKLI SINIR KOŞULLARINDA SAYISAL ÇÖZÜMÜ

### ÖZET

Bu çalışmada, dış kuvvetlerin etkisi ile deforme olan elastoplastik levhanın eğilmesi problemi incelenmektedir. Bu tür problemlerin matematiksel modeli lineer olmayan biharmonik denklemler ile ifade edilir. Levha teorisinde kullanılan biharmonik denklemin çözümü, kaynak yapılarak sabitlenmiş veya basit dayanaklanmış veya serbest kenarlara sahip bir levhaya uygulanan bir yükün, levha yüzeyinde oluşturduğu eğilmeyi ifade etmektedir. Bu çalışmada elastoplastik sıkıştırılmayan bir levhanın eğilmesi problemini temsil eden lineer olmayan biharmonik denklemin, farklı sınır koşullarında sayısal çözümü sonlu farklar yönteminin yardımı ile elde edilmiştir. Gerçek uygulama problemleri ele alınarak çözülmüştür. Hatalı ve hatasız giriş verileri için elde edilen sonuçlar problemin çözümünün doğru bir şekilde elde edildiğini göstermiştir. Daha sonra belli bir yük altında oluşan eğilme miktarı biliniyorken levhanın yapıldığı malzemenin elastisite modülü bulunmuştur ve benzer şekilde elastisite modülü ve eğilme miktarı belli iken uygulanan kuvvetin bulunması yani optimal kontrol problemi çözülmüştür.

**Anahtar kelimeler:** Biharmonik Denklem, Elastoplastik Levha, Plastiklik, Sayısal Çözüm, Sonlu Fark Yöntemi.

## **NUMERICAL SOLUTION OF NONLINEAR BIHARMONIC EQUATION FOR DIFFERENT BOUNDARY CONDITIONS**

### **ABSTRACT**

In this study, the problem of an elastoplastic plate which is bending by the effect of external forces is examined. The mathematical model of this kind of problems is expressed by nonlinear biharmonic equations. The solution of the biharmonic equation which is used in plate theory represents the deflection which is occurred by the load applied to the plate satisfying clamped, simply supported or free boundary conditions. In this study, the numerical solution of the nonlinear biharmonic equation which represents the bending problem of an incompressible plate is obtained by finite difference method for different boundary conditions. Real implementation problems are discussed. The results obtained for exact and inaccurate input data. Then elasticity modulus of the plate is found when the deflection occurred by a definite load is known and similarly when elasticity modulus and deflection is known, applied force is found i.e. optimal control problem is solved.

**Key words:** Biharmonic Equation, Elastoplastic Plate, Plasticity, Numerical Solution, Finite Difference Method.

## GİRİŞ

Bilim ve tekniğin önemli problemlerinin matematiksel modelleri, diferansiyel veya kısmi türevli diferansiyel denklemler için sınır değer problemi ile tanımlanmaktadır. Örneğin biharmonik denklem, yüklenmiş levhaların eğilmesini ifade eder.

Bu çalışmada elastoplastik levhanın eğilmesini temsil eden lineer olmayan biharmonik denklemin farklı sınır koşullarında sayısal çözümü ele alınmıştır.

Bölüm 1'de levhanın eğilmesi probleminin tarihsel gelişimi ve bu konuyla ilgili geçmişte yapılmış olan çalışmalar ele alınmıştır.

Bölüm 2'de elastiklik, plastiklik, gerilme ve şekil değiştirme kavramları tanıtılmıştır. Daha sonra Hooke Kanunu ile şekil değiştirme ve gerilme arasındaki bağlantı ifade edilmiş ve son olarak da düzlem deformasyon durumu verilmiştir.

Bölüm 3'te diferansiyel denge denklemlerinden yola çıkılıp, plastiklik teorisine bağlı olarak gerilme ve şekil değiştirme sapmaları arasındaki ilişkiden faydalanarak elastoplastik levhanın eğilmesinin matematiksel modeli elde edilmiştir. Daha sonra genel durumda biharmonik operatör ele alınarak levha probleminde kullanılacak sınır koşulları çıkarılmıştır. Sınır koşullarının fiziksel yorumu verilmiştir.

Bölüm 4'te ele alınan problem monoton operatörler teorisi kapsamında incelenmiştir. Ele alınan problemin çözümünün varlığı ve tekliği bu bağlamda gösterilmiştir.

Bölüm 5'te ele alınan lineer olmayan biharmonik denklemin, sonlu farklar yönteminden yararlanarak ayrık denkleme elde edilmiştir. Bu bölümde ayrıca, sınır koşullarının sonlu fark yaklaşımı verilmiştir.

Bölüm 6'da lineer olmayan biharmonik denklemin sayısal çözümü için geliştirilmiş olan algoritmadan yararlanarak hazırlanmış olan bilgisayar programı test fonksiyonları ile incelenmiştir. Bölüm 6'da lineer olmayan biharmonik denklemin sayısal çözümü için geliştirilmiş olan algoritmadan yararlanarak hazırlanmış olan bilgisayar programı test fonksiyonları ile incelenmiştir.

Önce sınırlarda sıkı kenetlenme koşulunu sağlayan daha sonra da menteşe koşulunu sağlayan levha için denklemin sayısal çözümü ele alınan test fonksiyonları kullanılarak kontrol edilmiştir. Plastiklik fonksiyonunun farklı durumları için problemin yaklaşık çözümünün bağıl ve mutlak hataları hesaplanmış ve hata analizi yapılmıştır.

Bölüm 7'de farklı kuvvetlerin etkisi ile elastoplastik levhanın eğilmesi problemi incelenmiş ve elde edilen sonuçların analizi yapılmıştır. Daha sonra malzemenin (E) Young's modülünün elde edilmesi için program yazılarak farklı kuvvet ve eğilmelere bağlı olarak elde edilen E' ler için hata analizi yapılmıştır. Buna ek olarak yumuşak ve sert malzemelerden yapılmış levhaların maksimal eğilmesi göz önüne alınarak etkileyebilecek yükün şiddetinin bulunması yani optimal kontrol problemi değerlendirilmiştir.

## 1. LEVHANIN EĞİLMESİ PROBLEMİNİN TARİHÇESİ VE LİTERATÜR İNCELENMESİ

Elastik yüzeylerin eğilmesi problemi üzerine yapılan ilk girişimler Euler'in çalışmalarıdır (Timoshenko, 1953). 1767 yılında tamamen esnek bir filmin titreşimi konusu L. Euler tarafından ele alınmış ve bu esnek filmin birbirine dik iki gergin teller sisteminden oluştuğu varsayılmıştır. Bununla ilgili olarak,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (1.1)$$

diferansiyel denklemi ortaya konulmuştur. Denklemde  $w$ , eğilmeyi temsil etmekte olup,  $A$  ve  $B$  sabittir. Aynı yaklaşım levhaların analizi konusuna 1789 yılında Jacques Bernoulli tarafından uygulanmış ve bu yolla,

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q \quad (1.2)$$

diferansiyel denklemi elde edilmiştir. Burada  $D$  levhanın sertlik (rijitlik) katsayısı ve  $q$  yanal yükün şiddetidir. Bernoulli, kendi denkleminin sadece bir yaklaşım olduğu ve eğer birbirine dik olmayan iki miller sistemi alınırsa farklı bir sonuca varılacağı konusuna açıklık getirmiştir. Çalışmasını levhanın eğilmesi problemini çözmeye sadece bir girişim olarak yayımlamıştır.

Levhanın eğilmesi problemi deneysel olarak ilk kez Chladni tarafından 1802 yılında incelenmiştir ve Die Akustik adlı kitabında yer alan akustikte yaptığı çalışma ve titreşen levhalar ile ilgili deneyleri levhalar teorisinde büyük ilgi uyandırmıştır. Kenarları yaylar ile sabitlenmiş cam bir levhanın üzeri ince kumla kaplanmış ve yayın titreşimi sağlanmıştır. Levhanın hareketinin çeşitli durumları için düğümsel doğruların oluştuğu gösterilmiş ve ilgili frekanslar belirlenmiştir. Kum tanelerinin çizmiş olduğu resimlerin levhanın şekline, yayların yerine ve titreşimin frekansına bağlı olarak değiştiği gözlemlenmiştir.

1811'de Sophie Germain, eğilmenin gerilme enerjisinden yola çıkarak eğilmenin diferansiyel denklemini elde etmek için varyasyonel analiz kullanmıştır. 1813 yılında Germain'in yaptığı çalışmadaki bazı hatalar J. Lagrange tarafından düzeltilmiş ve istenen denklemin kabul edilebilir formu bulunmuştur;

$$k \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.3)$$

Böylece, J. Lagrange tam anlamıyla genel bir levha denklemini ileri süren ilk bilim adamı olmuştur.

Levha teorisini geliştirmek için daha ileri bir girişim 1814 yılında Poisson tarafından yapılmıştır. Denklem (1.3)'ün fiziksel anlamını vermek için Poisson, levhanın aralarında moleküler kuvvetlerin etki ettiği parçacıklardan oluştuğunu varsaymıştır. Poisson, bu parçacıklar sisteminin denge koşullarından Denklem (1.3)'ü elde etmeyi başarmıştır.

Levhanın eğilmesinin ilk tatmin edici teorisini 1823 yılında veren Navier, Poisson'un yaptığı gibi, levhanın moleküllerden oluştuğunu varsaymış, fakat o bu molekülleri kalınlık içerisine dağıtmış ve moleküllerin eğilme esnasındaki hareketlerinin levhanın orta düzlemine paralel olduğunu ve bu düzlemle aralarındaki mesafeyle doğru orantılı olduğunu varsaymıştır. Böylece, herhangi bir yanal yükleme için, doğru diferansiyel denklemi bulmuştur;

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q \quad (1.4)$$

Navier bulduğu Denklem (1.4)'ü menteşe koşulunu (simply supported boundary condition) sağlayan dikdörtgensel levhaya uygulamış ve Fourier serisi formunda doğru sonuca ulaşmıştır. Bu çözümü, yükün düzgün dağıldığını ve levhanın orta yüzeyinde yoğunlaştığını kabul ederek bulmuştur. Bu çözümler, levhanın eğilmesi problemleri için verilen ilk tatmin edici çözümlerdir. Navier, ayrıca sınırlarda düzgün dağılmış T sıkıştırma kuvvetlerinin etkisi altındaki levhaların yanal bükülmesini de düşünmüş ve bükülen yüzey için doğru diferansiyel denklemi elde etmiştir;



$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + T \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (1.5)$$

Denklem (1.5)'i dört köşesinden desteklenen dikdörtgen bir levha ile ilgili karışık bir probleme uygulamış fakat bunun için kabul edilebilir bir sonuca ulaşamamıştır.

1829 yılında Poisson statik yük altındaki bir levhanın eğilme problemi için Germain-Lagrange denklemini başarıyla geliştirmiştir. Bu problem her ne kadar levhanın D silindirik sertlik katsayısı sabit olduğu durum için kurulsa da, Poisson bir sınır üzerindeki herhangi bir nokta için üç sınır koşulu tanımlamayı önermiştir. Poisson tarafından ileri sürülen sınır koşulları ve bu koşulların doğası hakkında birçok soru tartışma ve araştırma konusu olmuştur.

1850 yılında Kirchhoff ince levha teorisi üzerine önemli bir tez yayımlamıştır. Bu tezde Kirchhoff, bugün levhanın eğilme teorisinde yaygın olarak kabul edilen ve Kirchhoff hipotezleri olarak bilinen iki bağımsız temel ilke belirtmiştir. Bunlardan birincisi levhanın kenarlarında yalnız iki sınır koşulunun verilmesi gerektiğini vurgulaması ve fiziksel anlamlarına bağlı olarak farklı sınır koşullarını elde etmesi, ikincisi ise levhanın frekans denklemini keşfetmesi ve levha problemlerinin çözümlerindeki gerçek yer değiştirmeleri tanımlamasıdır. Kirchhoff teorisi, levhanın eğilme teorisinin fiziksel belirginliğine katkıda bulunmuş ve uygulama problemlerinde doğru kullanımının temelini oluşturmuştur. Kirchhoff teorisine Saint-Venant tarafından çok sayıda değerli yorumlar eklenmiştir.

Timoshenko deformasyon teorisine ve levha bükülme analizinin uygulamalarına önemli bir katkıda bulunmuştur. Timoshenko'nun çok önemli katkıları arasında büyük eğilmeleri ve elastik denge problemlerini dikkate alan dairesel levhaların çözümleri yer almaktadır. 1959 yılında Timoshenko ve Woinowsky-Krieger (Timoshenko ve Woinowsky, 1959) çeşitli levha bükülme problemlerinin derin analizleri ile belirtilen elemanter bir monografi yayımlamışlardır.

1877 yılında karşılıklı iki kenarından menteşe koşulunu sağlayan ve diğer kenarlar boyunca herhangi sınır koşullarına sahip olan dikdörtgensel levha M. Levy tarafından incelenmiştir. Pratikte büyük bir öneme sahip olan bu konuda, tabloları maksimum çökmeler ve maksimum eğilme momentleri için sıralayan mühendisler

tarafından çeşitli yükleme durumları çalışılmıştır. Eliptik, üçgensel ve dilim şeklindeki diğer levha biçimleri çalışılmış ve esas olarak levhanın eğilmesini konu alan kitaplar yayımlanmaya başlanmıştır.

Birbirinden eşit uzaklıktaki kolonlar tarafından desteklenmiş bir levhanın analizi büyük bir pratik öneme sahiptir. Bu problem ayrıca Nadai ve Galerkin'in kitaplarında da incelenmiştir.

Lewis (1899) iki paralel kenarında menteşe koşulu, diğer kenarlarında ise, herhangi bir koşul verilen levhalar için seri çözümü elde etmiştir.

Modern yapılarda nispeten ince levhaların, tabakaların ve kabukların yaygın kullanımı, levha ve kabuk teorilerinde gelişimleri beraberinde getirmiştir. İlgili denklemlerin Kirchhoff tarafından çıkarılmasına ve akustikteki bazı uygulamaların gösterilmiş olmasına rağmen, levha teorisinin mühendislikteki geniş kullanımı yirminci yüzyılda başlamıştır.

Dairesel levhalar için bazı elementer kesin çözümler A. Korobov tarafından bulunmuştur ve dairesel levhaların kesin teorisi hakkında genel bir irdeleme J. Michell tarafından verilmiş ve daha ileri düzeyde H. Love tarafından ele alınmıştır.

Çok ince bir levhanın büyük sapmalarını temsil eden genel denklemler, levhanın orta yüzeyine etki eden gerilmeler için elde edilen gerilme fonksiyonu kullanılarak Föppl (1907) tarafından basitleştirilmiştir.

Krylov ve öğrencisi Boobnov bükülgenlik ve genişleme sertliği ile ince levha teorisine katkıda bulunmuştur. Boobnov (1914) levhanın bükülme teorisinin temelini oluşturmuştur ve modern levha sınıflandırmasını tanımlayan ilk kişi olmuştur. Uzun düzgün şekilde yüklenmiş dikdörtgensel levhanın eğilmesi ele alındığında Boobnov problemi bir filmin eğilmesi problemine indirgemiş ve çeşitli sınır koşullarında çözmüştür. Ayrıca, gerilme analizini oldukça basitleştiren ve şimdi gemi inşa endüstrisinde yaygın olarak kullanılan tablolar hazırlamıştır. Boobnov elastikliğin diferansiyel denkleminin entegrasyonunun yeni bir metodunu önermiş ve çeşitli özelliklerdeki levhalar için maksimum eğilme ve maksimum bükülme momentlerinin

tablolarını belirlemiştir. Yazarın çözümüne dayalı daha ayrıntılı tablolar T. Evans tarafından geliştirilmiştir.

Bir problemin kesin bir çözümünü bulmanın mümkün olmadığı durumlarda, ya da serilerle verilen çözümler pratik uygulama için uygun olmadığından mühendisler yaklaşık analize başvurmuşlardır. Ritz'in yöntemi levhalar teorisinde yaygın olarak kullanılmış ve birçok faydalı sonuca yol açmıştır.

Bir levhanın üzerine etki eden çok güçlü bir kuvvetin, uygulandığı noktada lokal gerilmeleri oluşturması problemi Nadai (1925) tarafından ele alınmıştır. Yirminci yüzyılın ortalarında yoğun bir kuvvetin menteşe ve sıkı kenetlenmiş kenarlara sahip dikdörtgensel levhalar üzerine etkisi bazı yazarlar tarafından yayımlanmıştır. Levha teorisi geliştirilirken mühendislerin oldukça ilgisini çekmiştir ve bazı problemler tam olarak çözülmüştür.

Levhaların eğilmesinin lineer olmayan problemlerinin çözümü Panov (1941) ve Volmir (1956) tarafından incelenmiştir.

Levhanın çok ince olması gereksinimi ile kullanılan ve Nadai (1925) tarafından kendi kitabında ve Levy tarafından yapılan dikdörtgensel levhaların büyük sapmalar hakkındaki çalışmasında kullanılan denklemler, Von Karman tarafından geliştirilmiştir.

Varyasyonel problemin sonsuz cebirsel denklemler sistemi elde edilerek, yaklaşık çözüm yöntemi Ritz (1904) tarafından verilmiştir, daha sonra ise G. Genki ve I. Boobnov tarafından geliştirilmiştir. Sert kenetlenme durumunda daha genel yaklaşım ile çözüm yöntemleri Timoshenko (1938) tarafından verilmiştir. Çeşitli kuvvetlerin etkisiyle farklı şekillerdeki ince levhalar için lineer ve lineer olmayan burulma problemlerinin kapsamlı analizleri, ek olarak kritik kuvvetler ve burulma hali için mühendislik dizaynında kullanılabilen oldukça kapsamlı mevcut sonuçların sunumu Gerard ve Becker (Gerard ve Becker, 1957), Timoshenko ve Gere (Timoshenko ve Gere, 1961), Cox (1963) tarafından sunulmuştur. İnce levhaların hareketinin diferansiyel denklemi D'Alembert ilkesi uygulanarak ya da enerji korunumuna dayalı formül kullanılarak elde edilebilir.

1970 yılından başlayarak levhanın deformasyon teorisinin problemlerinin bilgisayarların yardımıyla yaklaşık olarak çözülmesi yönünde geniş araştırmalar yapılmıştır. Elastoplastik türdeş ve türdeş olmayan levhaların eğilmesi ile ilgili düz veya ters problemlerin farklı yaklaşımlarla elde edilen sayısal çözümleri bilim adamları tarafından incelenmiş ve literatürde yayımlanmıştır.

Tahta levhaların ve desteklenmiş beton tabakaların birçok uygulaması anizotropik (yöne bağlı) levhaların eğilme teorisinin gelişmesine sebebiyet vermiştir. Bu türün ilk çalışması Gehring tarafından yapılmıştır.

Levhaların eğilmesi ile ilgili problemlerin sayısal çözümünü elde ederken kullanılan yöntemlerden biri Sonlu Elemanlar Yöntemidir. Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanılarak son zamanlarda yapılan çalışmaların bazılarında aşağıda bahsedilmiştir.

Sonlu Elemanlar Yöntemi; yaklaşımların lokal karakteri, karışık geometrik bölgelerle baş etme yeterliliği, birleştirilmiş genel bir formül ile birçok çeşit probleme adapte edilebilen geniş bir yaklaşım şeması kümesinin varlığı gibi avantajlara sahiptir. Nayroles, Villon ve Touzot (Nayroles ve diğ., 1992) Sonlu Elemanlar Yöntemi ile yakın bağlantılı ve yöntemin avantajlı özelliklerini barındıran fakat daha düzgün yaklaşımlar sağlayan ve kesin elemanlara değil de sadece düğüm noktaları kümesine ihtiyacı olan bir yöntem geliştirmişlerdir ve bu yönteme Diffuse Approximation Method adını vermişlerdir. Bu yöntem, Sonlu Elemanlar Yönteminin bazı sınırlı özelliklerini kaldıran ve bilinen noktalar kümesinde tanımlı fonksiyonların düzgün yaklaşımlarını elde etmek ve bu fonksiyonların türevlerini daha yüksek bir kesinlikle tahmin etmek gibi avantajlara sahiptir.

Hasanov ve Mamedov (Hasanov ve Mamedov, 1994) bir levha üzerine uygulanan kuvvet ve levha yüzeyinde meydana gelen eğilme ilişkisinden yola çıkarak levhanın elastoplastik özelliklerini belirlemek amacıyla yaptıkları çalışmada ele aldıkları ters problemi öncelikle bilinen bir fonksiyonel için minimizasyon problemine dönüştürmüş ve daha sonra söz konusu ters ve düz problemlerin sayısal çözümünü elde etmek amacıyla algoritma geliştirerek Sonlu Elemanlar Yönteminden faydalanmışlardır.

Hudramovich, Hart ve Ryabokon (Hudramovich ve diğ., 2010) homojen olmayan levha ve kabuk sistemlerinin lineer olmayan deformasyonlarının sayısal simülasyonlarında Sonlu Elemanlar Yönteminin kullanılması açısından ilgi çekici olan çalışmalarında, düzlem gerilme durumundaki farklı şekillerde delikler içeren dikdörtgen levhaları ele alarak yavaşça artan bir yüke bağlı olarak oluşan elastoplastik deformasyonun malzemenin gerilme-gerinme (stress-strain) alanı üzerindeki etkisini araştırmışlardır. Yaptıkları bu çalışmada, levha ve kabuk sistem elemanlarının gerilme-gerinme alanlarını hesaplamak amacıyla Sonlu Elemanlar Yönteminin sayısal uygulaması için etkili izdüşümsel-tekrarlı (projective-iterative) şemalar geliştirmişlerdir. Plastik deformasyonları hesaplamaya yarayan ardışık yaklaşım şemaları ile Sonlu Elemanlar Yönteminin sayısal uygulamasının izdüşümsel-tekrarlı şemaları kombinasyon halinde kurulmuştur.

Bina ve alt yapı inşaatlarının iskeletlerinin temel parçalarında kullanıldığı varsayılan yapı malzemelerinin analizinde levha eğilme problemlerinin çözümünde daha kesin sonuçlara ulaşmak amacıyla Ladopoulos (2012) Tekil İntegral Operatörler Metodu (Singular Integral Operators Method) ile Sonlu Elemanlar Yöntemi çiftinin bir kombinasyonunu kullanmıştır. Eğilme momentlerinin belirlenmesinin çok önemli olduğu bu tür yapı analizlerinde dikdörtgen bir deliğe sahip dikdörtgen bir levhanın eğilme momentlerinin belirlenmesi ve ilgili levha probleminin uygulaması verilmiştir.

Vavourakis, Loukidis, Charmpis ve Papanastasiou (Vavourakis ve diğ., 2013) ayrıştırılmış Arbitrary Lagrangian-Eulerian yaklaşımını büyük düzlemsel deformasyonların elastoplastik analizleri için sunmuşlardır. Kullanılan bu ayrıştırma yönteminde, Eulerian basamağı deforme olmuş ortamda yeniden bir şebeke oluşturulmasını ve durum değişkenlerinin yeniden eşleştirilmesini içermektedir. Ancak yeni şebeke oluşturulmadan önce analitik bir yaklaşım kullanılarak düğüm noktalarının düzgün dağılımının korunması amacıyla serbest sınırlardaki düğüm noktaları Radial Basis Point Interpolation Functions şeması yardımıyla yeniden yerleştirilmiştir. Arbitrary Lagrangian-Eulerian yaklaşımı kullanılarak yükleme yapılan bölgenin sınırlarında çok büyük yer değiştirmelerin (deformasyonların) olduğu analizlerde bile, yükleme-yer değiştirme tepkisi yeterli kesinlikte öngörülebilmiştir.

Geçen birkaç on yıldır, Displacement-Based Finite Element Method (Yer Değiştirme Temelli Sonlu Elemanlar Yöntemi)'un mühendisliğin birçok alanında çok çeşitli fiziksel problemin analizi için oldukça etkili bir araç olduğu ispatlanmıştır. Bu alanlarda çok karışık lineer olmayan yapı mekaniği ve katı mekanik problemlerinin analizinde Displacement-Based Finite Element Method ve Force-Based Finite Element Method olarak adlandırılan iki ayrı Solu Elemanlar metodu geliştirilmiştir. Yakın zamanda Displacement-Based Finite Element Method yöntemi uygulama kolaylığı ve basit bilgisayar otomasyonu nedeniyle biraz daha baskın hale gelmiştir. Ancak bu yöntemin, basamak basamak çözüm prosedüründen kaynaklanan hata birikimi, devasa hesaplama süresi tüketimi ve yöntem içerisinde gerilmelerin yer değiştirmeler kullanılarak türev yöntemiyle hesaplanmasından kaynaklanan sayısal hataların oluşması gibi dezavantajlarının olması Force-Based Finite Element Method yönteminin tekrar düşünülmesine sebep olmuştur. Fakat bu yöntem de bilgisayar yazılımı uygulaması açısından kullanışlı değildir. Jia ve Liu (Jia ve Liu, 2014) yaptıkları bir çalışmada yeni bir iterativ yer değiştirme temelli Sonlu Elemanlar Yöntemi geliştirmişlerdir. Large Time Increment Method (Büyük Zaman Artışı Metodu) olarak adlandırılan bu yöntemde yol gösteren ana denklemler iki gruba ayrılmaktadır; global denge ve uyumluluk denklemleri ve lokal temel denklemler. Geçtiğimiz yıllarda birçok elastoplastik malzeme için genişletilen bu yöntem hesaplama sonuçlarını elde tutarak basamak basamak çözüme ulaşılmasına dayanır.

Pajand ve Karkon (Pajand ve Karkon, 2014) ince levhaların analizi ile ilgili yaptıkları çalışmada Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanırken biri üçgensel diğeri dörtgensel eleman olmak üzere iki unsur önermişlerdir. Bu elemanların formülasyonları hibrit (karma) gerilme varyasyonel prensip ve ince levha denkleminin homojen çözümüne dayanmaktadır. Hibrit fonksiyoneldeki bağımsız alanlar, iç gerilme ve sınır yer değiştirme alanıdır. İç gerilme alanı analitik homojen çözüm ve sınır alanı kullanılarak hesaplanmıştır. Bu iç gerilme alanı interpolasyon fonksiyonlarının sınırlarındaki serbest düğümsel derecelerle alakalıdır. Bu yaklaşımda, yapının kayma deformasyonu ihmal edilmiştir. Bu fonksiyonları hesaplamak için elemanın kenarlarının Euler-Bernoulli mili gibi davrandığı varsayılacaktır. Çalışmada, önerilen elemanların kesinliği ve etkililiği çeşitli testlerle gösterilmiştir.

Mühendislik yapılarının analizinde yaygın bir şekilde kullanılan ince levha yapılarının analizinde Sonlu Elemanlar Yönteminden sonra sıklıkla kullanılan yöntemlerden biri de Sınır Elemanları Yöntemi'dir. Sınır integral denkleminin levhanın eğilme problemine uygulanması, Kirchhoff levha eğilme problemlerinin sınır integral denkleminin dolaylı çözümü ve doğrudan sınır integral formülleri literatürde çeşitli yazarlar tarafından yapılan çalışmalarda bulunabilir.

Sınır integral denklemlerinin levha eğilme problemlerine uygulanması ile ilgili en eski çalışmalardan biri Jaswon ve diğerlerinin (Jaswon ve diğ., 1967) yaptığı çalışmadır. Bu çalışmada biharmonik sınır değer problemlerinin integral denklemler cinsinden ifade edilebileceği ve bu tür denklemlerin sayısal çözümünün elde edilmesi, sınırların köşelerindeki keskinliği düzgünleştirmek ve sonuçları kontrol etmek için gerekli yöntemler verilmiştir. Daha sonra bu teknikler, çözümü için başka hiçbir uygun teknik bulunamayan bazı iki boyutlu gerilme problemlerine uygulanmıştır.

Kirchhoff levha teorisi için doğrudan sınır elemanları formülasyonunun geliştirilmesi Forbes ve Robinson'a (Forbes ve Robinson, 1969) atfedilmiştir ve bu çalışmayı Stern (1979)'in çalışması takip etmiştir.

Keyfi şekilli ince elastik levha problemlerinin çözümü için bir integral denklem metodu Altiero ve Sikarskie (Altiero ve Sikarskie, 1978) tarafından geliştirilmiştir. Geliştirilen metod, hayali bir levhanın içine gerçek levhanın gömüldüğü varsayımına dayanmaktadır. Gerçek levhanın sınırında bilinmeyen bir yük vektörü tanıtılmıştır. Süperpozisyon prensibi ile bilinen çapraz yükler ve bilinmeyen sınır yüklerine bağlı olarak her yerde yer değiştirme alanının bulunabileceği gösterilmiştir. Önerilen metodun iç eğilme momentleri ve yer değiştirmeler açısından oldukça yüksek kesinlikte ve kullanışlı olduğu ifade edilmiştir.

Reissner levhaları için sınır integral denklemleri Vander Weeën (1982) tarafından ele alınmıştır ve ardından Karam ve Telles (Karam ve Telles, 1988) yaptıkları çalışmada Reissner levha modelinin hem ince hem de kalın levhalar için uygun olduğunu göstermişler ve Vander Weeën'in formülasyonunu sonsuz bölgelerde hesaplama yapmak için genişletmişlerdir.

Wen, Aliabadi ve Young (Wen ve diğ., 2000) yaptıkları çalışmada dinamik yüklemeye maruz kalmış levhaların eğilmesinde çatlaklar problemini ele almışlardır ve problemi Laplace dönüşümü bölgesinde (Laplace Transform Domain) Sınır Elemanları Yöntemi ile çözmüşlerdir. Çalışmada sonsuz bir Kirchhoff levhası ele alınmıştır ve levhanın merkez noktasında güçlü bir yüklemeye maruz kaldığı varsayılmıştır. Polar koordinat sisteminde levhanın eğilmesini temsil eden denklem ele alınarak denklemin Laplace dönüşümü elde edilmiştir. Laplace dönüşümü ve seri açılımı kullanılarak esas çözüm ifade edilmiş ve ters Laplace dönüşümü yardımı ile esas çözüme ulaşılmıştır.

Wen, Aliabadi ve Young (Wen ve diğ., 2005) daha sonra yaptıkları başka bir çalışmada Sınır Elemanları Yöntemini kullanarak geometrik olarak lineer olmayan Reissner levhalarının analizini yapmışlardır. Lineer olmayan şartları cisim kuvveti olarak varsaymışlar ve eğilme için bağlaşıklık (coupled) bir sınır integral formülasyonu ve iki boyutlu düzlem gerilme elastisitesi elde etmişlerdir. Daha sonra dual reciprocity (çifte eşlenik) yöntemi kullanılarak lineer olmayan koşullardan kaynaklı bölge integralleri sınır integrallerine dönüştürülmüştür. Uygulanan yükler için artım tekniği genişletilerek lineer olmayan sınır integral denklemleri çözülmüştür.

Homojen ince levhaların eğilmesinin analizi için problemin tanımlandığı bölgede ve sınırlarda kafes kullanımı kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan geleneksel yaklaşımların temel bir karakteristiğidir. Sonlu Farklar, Sonlu Elemanlar ve Sonlu Hacim gibi bölge (domain) metodları ve Sınır Elemanları Metodu gibi sınır metodları kafes kullanılan metodlardır. Bölge metodlarında varsayımlar lokal yaklaşımlar için yapılıp ve bunları desteklemek için bir kafese ihtiyaç duyulur. Bir integral denklem vasıtasıyla elde edilen sınır metodlarında ise, sınır integrallerinin sayısal yaklaşımını elde etmek için bir sınır kafesine ihtiyaç duyulur. Sonlu Elemanlar Yöntemi gibi baskın yaklaşımlarda, bir kafesin kullanımı, kafesi tanımlamak için özel yöntemlerin planlanmasını gerektirir.

Leitão (2001), radial basis function'ların kullanımına dayanarak Kirchhoff levha eğilme probleminin yaklaşık genel çözümünün elde edilmesi için Meshless Method kullanmıştır. Yapılan bu çalışmada, genel çözümü elde etmek için gerekli olan simetrik ve tekil olmayan bir lineer denklem sistemi elde etmek amacıyla Hermite



Collocation (sıralama) yöntemi kullanılmıştır ve formülasyonu değerlendirmek için farklı sınır koşullarına sahip bir dizi levha analiz edilmiştir. Kafesiz (meshless) karakteri ve kavramsal olarak basitliğiyle kullanılan bu yöntem formülasyonun uygulanmasını kolaylaştırmasının yanı sıra daha hızlı ve etkin bir hesaplama yapılmasını sağlamıştır.

Levha problemleri ile ilgili yapılan çalışmalara bakıldığında daha çok sonlu elemanlar, sınır elemanları, Meshless Method yöntemleri kullanılmıştır. Sonlu farklar yöntemi kullanılarak bu konuda yapılan çalışma yok denecek kadar azdır.

Hasanov (2007) elastik olmayan, homojen sıkıştırılmayan bir levhanın eğilmesini temsil eden lineer olmayan sınır değer problemini  $J_2$ -deformasyon teorisi kapsamında ele almış ve problemin zayıf çözümünün varlığını monoton potansiyel operatör teorisini kullanarak araştırmıştır.

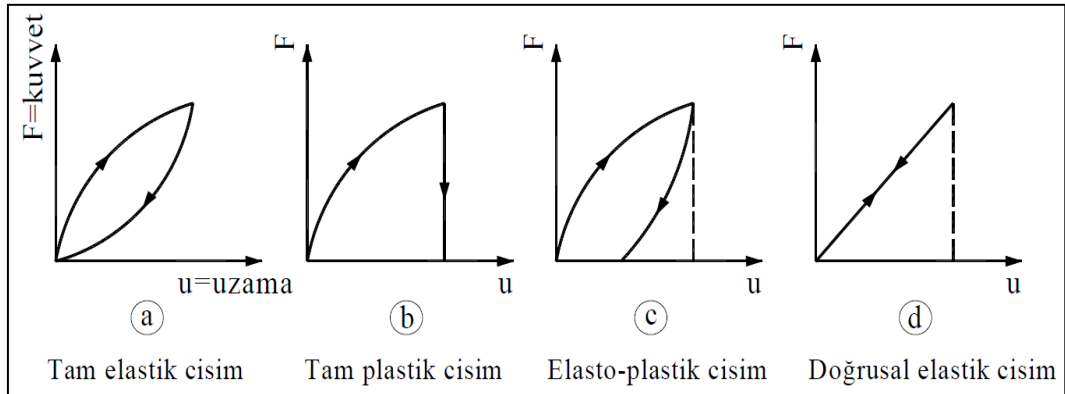
## 2. GENEL KAVRAMLAR

Malzeme davranışını açıklarken iki ideal kavramdan bahsedilir. Bunlar; tam elastik cisim ve tam plastik cisim (Omurtag, 2012).

**Tam Elastik Cisim:** Bir kuvvetin etkisi altında deformasyona uğrayan ve kuvvet kaldırıldıktan sonra eski durumuna dönen cisme tam elastik cisim denir. Tam elastik cisim için uygulanan kuvvet  $F$  ve uzama  $u$  değerleri sürekli ölçülmüş ise, kuvvet ile yer değiştirme arasındaki ilişkiyi gösteren  $(F, u)$  grafiği Şekil 2.1-a'daki gibidir.

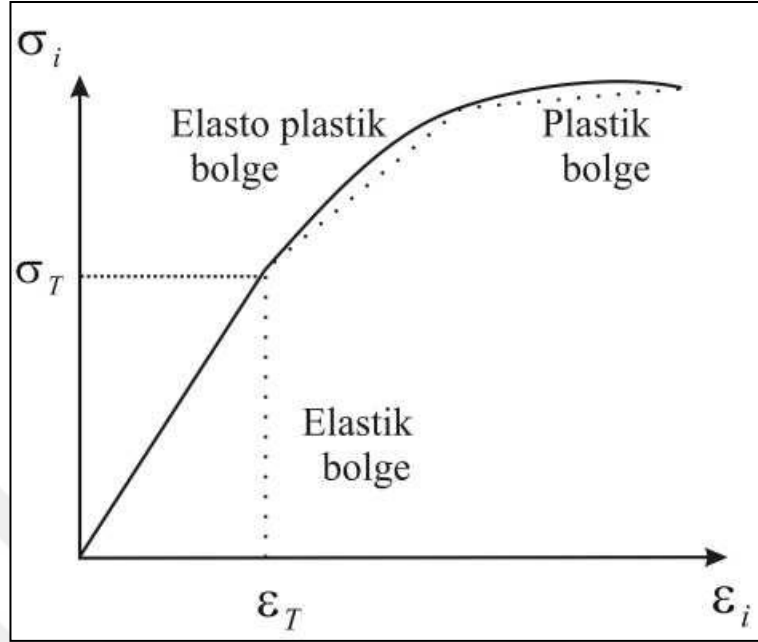
**Tam Plastik Cisim:** Dış kuvvetlerin etkisiyle meydana gelen şekil değişimi kuvvetlerin kaldırılması ile hiç yok olmuyor, aynen kalıyor ise bu cisimlere tam plastik cisim denir. Tam plastik cisim için kuvvet ile yer değiştirme arasındaki ilişki Şekil 2.1-b' deki gibidir. Şekil 2.1-d'de ise elastik davranış gösteren bir cisim için gerilme-şekil değiştirme grafiği verilmiştir.

Gerçekte ise, malzeme davranışı bu iki ideal duruma yakın olabileceği gibi, elastoplastik durum da söz konusu olabilir. Yani yük kaldırılınca, şekil değiştirmelerin bir kısmı geri dönerken, bir kısmı kalıcı olabilir (Şekil 2.1-c) ve buna elastoplastik cisim denir. Bütün yapısal malzemeler belli bir dereceye kadar elastiklik özelliğine sahiptirler. Geri dönmeyen şekil değiştirme davranışı, malzemenin fiziksel özelliklerine, yüklemenin şiddetine, biçimine ve koşullarına bağlı olarak değişir.



Şekil 2.1. Kuvvet ile yer değiştirme arasındaki ilişki (Omurtag, 2012)

Genel olarak katı cisimler için gerilme-şekil değiştirme eğrisi Şekil 2.2'deki gibidir.



Şekil 2.2. Biçimlendirilebilir metaller için gerilme-şekil değiştirme eğrisi (Omurtag, 2012)

Dış kuvvetin etkisiyle malzeme plastik deformasyona geçtikten sonra son olarak plastik deformasyon ile artan kuvvet belli bir noktaya yığılır ve cisimde oluşan çatlaklar sonucunda kırılma gerçekleşir. Eğer yeterli kuvvet uygulanırsa, sonuçta tüm malzemeler kırılır.

Her hangi bir cisim, dış kuvvetin küçük değerleri için elastik, büyük değerleri için plastik davranış gösterebilir. O nedenle, şekil değiştirebilen cisimler mekaniğinde malzeme yasaları önemlidir. Robert Hooke 1660'da kuvvet ile yer değiştirme arasında "kuvvet ne kadarsa uzama da o kadardır" ifadesiyle kendi ismiyle anılan Hooke yasasını önermiştir. Hooke yasasına göre, kuvvetle yer değiştirme arasındaki ilişki doğrusal olup bu tür cisimler Hooke cismi olarak isimlendirilir. Uygulanan dış yükün şiddetine ve cismin yapısına bağlı olarak Şekil 2.1-a'daki davranışın sergilendiği aralığa orantı sınırı içinde denir.

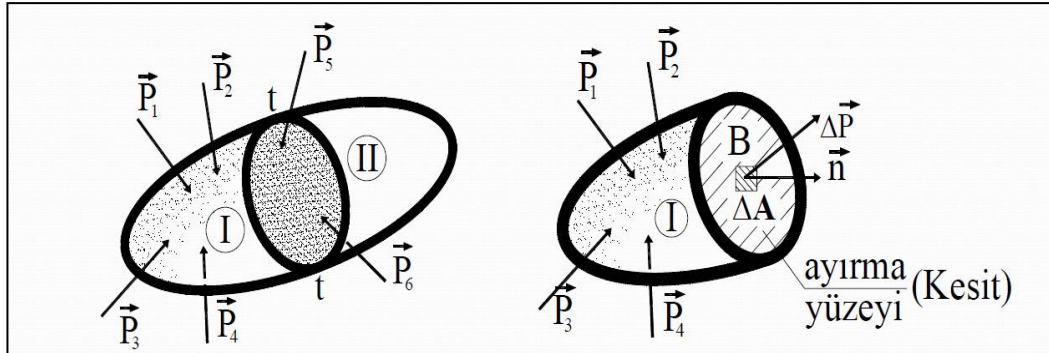
Elastik malzemelerde deformasyon, kuvvetlerin kaldırılmasıyla yok olur (Timoshenko ve Goodier, 1951). Burada, elastik cismin yapıldığı malzemenin homojen olduğu yani cismin tüm noktalarında malzemenin özelliğinin değişmediği ve bu maddenin, cisimden kesilen en küçük parçanın cisimle aynı belirli fiziksel

özelliklere sahip olacak şekilde, tüm hacme dağılmış olduğu varsayılır. Ayrıca, durumu basitleştirmek için cismin izotropik olduğu yani elastik özelliklerin her doğrultuda aynı olduğu varsayılır.

Yapısal malzemeler genellikle bu özellikleri sağlamazlar. Örneğin, çelik gibi önemli bir malzemenin, bir mikroskopla çalışıldığı zaman, değişik çeşitlerde ve değişik yönlerde kristallerden oluştuğu görülür. Bu malzeme homojen olmaktan çok uzaktır fakat deneyler gösterir ki, homojenlik ve izotropluk varsayımı üzerine kurulu elastiklik teorisi, çelik yapısına çok büyük bir kesinlikle uygulanabilir. Bunun izahı, kristallerin çok küçük olmasıdır; genellikle bir inç küp çeliğin içinde milyonlarca kristal vardır. Tek bir kristalin elastiklik özellikleri farklı yönlerde çok farklı olabilirken, kristaller normal olarak rastgele dağılmıştır ve daha büyük metal parçalarının elastik özellikleri kristallerin ortalama özelliklerini temsil etmektedir.

## 2.1. Bir Noktadaki Gerilme

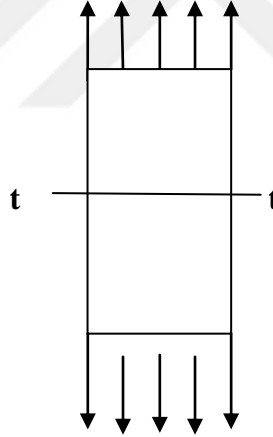
İç kuvvetleri ölçmek için gerilme kavramı geliştirilmiştir. Bunların belirlenmesi özellikle katı cisimler mekaniğinde büyük bir öneme sahiptir. Yapının gerilme ve şekil değiştirmelere karşı direnci uygulanan dış kuvvetlerin şiddetine bağlıdır. Dış kuvvetler altında dengede olan bir cisim ele alındığında (Şekil 2.3) cisimi oluşturan parçaların birbirleri ile olan bağlantılarından dolayı cismin kısımları arasında iç kuvvetler adı verilen zorlamalar oluşur. Cismin herhangi bir noktasına etki eden kuvvetlerin büyüklüğünü gözlemlemek amacıyla cismin bu noktadan geçen bir  $tt$  en kesitiyle iki parçaya bölündüğü varsayılır.



Şekil 2.3. Dengedeki bir cisim (Timoshenko, 1951)

Bu parçalardan I parçası (Şekil 2.3) ele alınır, bu parça  $P_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) dış kuvvetlerinin ve  $t$  en kesiti üzerine dağılmış ve II parçasının I parçası üzerindeki etkisinden oluşan iç kuvvetlerin etkisi altında dengededir. Bu kuvvetlerin, tıpkı hidrostatik basınç ve rüzgar basıncının etki ettiği yüzeye aralıksız dağılması gibi  $t$  en kesitinin alanına aralıksız dağıldığı varsayılır. Bu tür kuvvetlerin büyüklükleri genellikle onların şiddetleriyle, başka bir deyişle, etki ettikleri yüzeyin birim alanına etki eden kuvvet miktarı ile tanımlanır (Ekmekyapar ve Özakça, 2014). İç kuvvetler ele alındığında bu şiddet gerilme olarak adlandırılır.

En basit durumda uç taraflarına düzgün şekilde dağılmış kuvvetler tarafından oluşturulan gerilmeye maruz kalan prizmatik çubukta (Şekil 2.4) iç kuvvetler ayrıca  $t$  en kesiti üzerine düzgün şekilde dağılır. İç kuvvetlerin belirlenmesi özellikle katı cisimler mekaniğinde büyük bir öneme sahiptir şöyle ki, yapıda veya cisimde oluşan gerilme ve şekil değişimleri dış kuvvetlerin ürünüdür. bu yüzden cisimlerin gerilme ve şekil değiştirmelere karşı direnci dış kuvvetlerin şiddetine bağlıdır.



Şekil 2.4.  $t$  en kesitli prizmatik çubuk  
(Timoshenko, 1951)

Şekil 2.3'ün genel durumunda gerilme  $t$  en kesiti üzerine düzgün şekilde dağılmamıştır.  $\Delta A$  gibi küçük bir alan üzerine etki eden gerilmenin büyüklüğünü elde etmek için, bu ögesel alan üzerine etki eden kuvvetlerin, II parçasının I parçası üzerindeki etkiye bağlı olarak  $\Delta P$  gibi bir bileşke kuvvete indirildiği varsayılır. Eğer  $\Delta A$  ögesel alanı sürekli olarak küçültülürse  $\Delta P/\Delta A$  oranının limit değeri,  $t$

en kesiti üzerine etki eden gerilmenin büyüklüğünü verir.  $\Delta P$  bileşke kuvvetinin limit yönü gerilme yönünü verir. Matematiksel olarak,

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilen limit değerine gerilme adı verilir (Timoshenko ve Goodier, 1951). Cismi farklı bir kesitten kesip aynı işlemler tekrarlanırsa, daha önce gerilmenin hesaplandığı noktada yine aynı gerilme değeri elde edilir. Bu yaklaşım kesit alanından bağımsızdır. Buradaki gerilme artık bir vektör olarak gösterilebilir. Bu vektörün hem bir yönü, hem de büyüklüğü vardır. Gerilme vektörü, buradaki kuvvetleri dengelemek için bu kuvvetlerin yönüne bağlı olarak bir yön kazanır. Gerilme sadece bir nokta üzerinde tanımlandığı zaman bir vektör olarak değerlendirilebilir.

Bir noktadaki gerilme, çekme, basma ya da kayma etkilerine sahip olabilir. Genel durumda, gerilmenin yönü, etki ettiği  $\Delta A$  alanına eğimlidir ve genellikle iki bileşene ayrılır. Çekmeye ve basmaya çalışan birincisi, alana dik olan normal gerilme, kesmeye çalışan iç kuvvetler ise kayma gerilmesi oluştururlar. Bu iki gerilme durumu genellikle birlikte ortaya çıkarlar.

## 2.2. Gerilme Tensörü

Birim alana etki eden yüzey kuvveti genellikle koordinat eksenlerine paralel üç bileşene ayrılır. Ayrıca, birim hacme etki eden cisim kuvvetleri de üç bileşene ayrılır ve bu bileşenler için x, y, z notasyonları kullanılacaktır.

Gerilme bileşenlerini ifade ederken yaygın olarak üç farklı indis gösterimi kullanılır. Bunlardan birincisi; normal ve kayma gerilmeleri için aynı harf kullanılır ve ikisini birbirinden ayırmak için seçilen indis gösterimi,

normal gerilme :  $\sigma_{ii}$  , (i = x,y,z)

kayma gerilmesi :  $\sigma_{ij}$  , (i ≠ j = x,y,z) (2.2)

şeklindedir.

İkincisi normal ve kayma gerilmelerini farklı harflerle ifade etmek ve normal gerilmeleri tek alt indisle, kayma gerilmelerini iki alt indisle yazmaktır. Bu durumda,

normal gerilme :  $\sigma_i$  , (i = x,y,z)

kayma gerilmesi :  $\tau_{ij}$  , (i ≠ j = x,y,z) (2.3)

Üçüncüsü ise, normal ve kayma gerilmelerinin aynı harf ile ifade edilmesi ve alt indis olarak 1, 2, 3 rakamlarının kullanılmasıdır. Bu durumda,

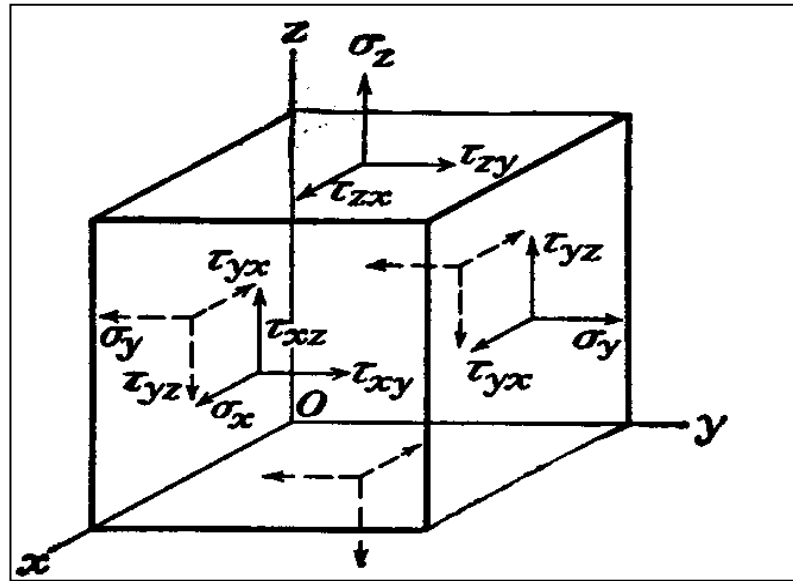
normal gerilme :  $\sigma_{ii}$  , (i=1,2,3)

kayma gerilmesi :  $\sigma_{ij}$  , (i ≠ j = 1,2,3) (2.4)

olur.

İfade (2.2)-(2.4)'deki indis gösteriminde iki temel özellik vardır. Birinci alt indis yüzeyin normalinin doğrultusunu, ikinci alt indis ise gerilme bileşenine paralel eksen doğrultusunu temsil etmektedir. Bu çalışmada çoğunlukla İfade (2.3) kullanılacaktır.

Şekil 2.5'te dış kuvvetler altında dengede duran katı bir cismin tt en kesit düzlemi içerisinde bir O noktasında oluşan üç boyutlu gerilme durumu gösterilmiştir.



Şekil 2.5. Üç eksenli normal ve kayma gerilmeleri (Timoshenko, 1951)

Ele alınan O noktası, üç boyutlu diferansiyel kübik bir eleman olarak düşünülürse, kübik elemanın yanal yüzeylerinde oluşan normal ve kayma gerilmeleri gösterilmiştir. Kübik diferansiyel elemanın yanal yüzeyine etki eden gerilme bileşenleri için notasyonlar ve pozitif yön olarak alınan yönler gösterilmiştir. Örneğin; y eksenine dik olan kenarlar için, bu kenarlara etki eden gerilmenin normal bileşenleri  $\sigma_y$  ile gösterilir. y alt indisi, y eksenine dik olan düzlem üzerine etki eden normal gerilmeyi gösterir. Dış kuvvetler yapıya etkidiğinde eğer çekme etkisi yaparsa normal gerilme pozitif yani  $\sigma = \Delta P / \Delta A$ , eğer basma etkisi yaparsa normal gerilme negatif yani  $\sigma = - \Delta P / \Delta A$  değer alır.

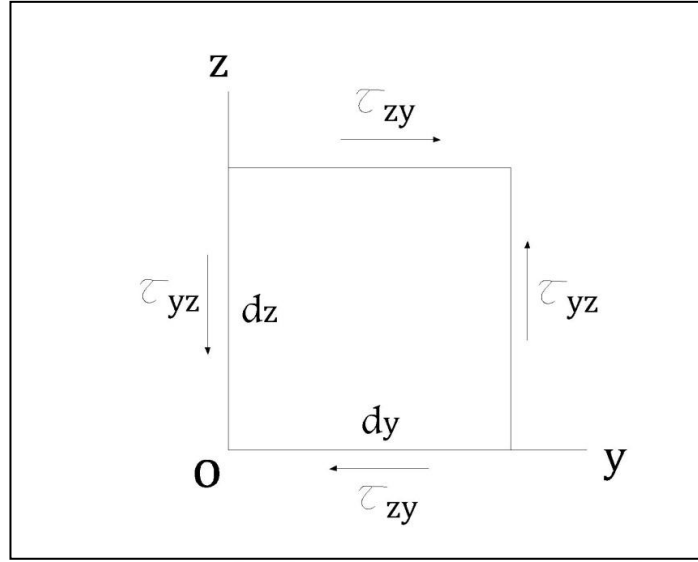
Kayma gerilmesi, koordinat eksenlerine paralel iki bileşene ayrılır. Bu durumda, alt indis olarak iki harf kullanılır, birinci harf söz konusu düzlemin normalinin yönünü, ikinci harf ise gerilme bileşeninin yönünü belirtir. Örneğin, eğer y eksenine dik olan kenarlar düşünülürse, x yönündeki bileşen  $\tau_{yx}$  ve z yönündeki bileşen  $\tau_{yz}$  ile ifade edilir.

Bir kübik elemanın altı kenarı üzerine etki eden gerilmeyi ifade ederken, normal gerilmeyi göstermek için  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  sembolleri ve kayma gerilmesini göstermek için  $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$  olmak üzere 6 sembol kullanılır. Elemanın denge durumuna karşılık kayma gerilmesi için kullanılan sembollerin sayısı 3'e düşürülebilir;

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} , \tau_{zx} = \tau_{xz} , \tau_{zy} = \tau_{yz} \quad (2.5)$$

Kübik bir elemanın iki dik kenarı için kayma gerilmesinin bu kenarların kesişimindeki doğruya dik olan bileşenleri birbirine eşittir (Şekil 2.6). Bir noktadaki koordinat düzlemleri üzerine etki eden gerilmeleri göstermek için  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  bileşenleri yeterlidir. Bu nicelikler o noktadaki gerilme bileşenleri olarak adlandırılır.





Şekil 2.6. Kayma gerilmesi (Timoshenko, 1951)

Malzeme biliminde tensörler, genellikle fiziksel sistemlerin özelliklerini temsil eden sayıları gruplamak için kullanılırlar. Bir fiziksel sistemi tarif edebilmek için kaç sayıya ihtiyaç duyulduğu, sistemden sisteme değişiklik gösterir. Tek bir sayı kullanarak tarif edilebilen fiziksel sistemler ele alınırsa (örneğin bir cismin kütlesi veya sıcaklığı gibi), tek bir sayıdan oluşan bu tensörlere skalar adı verilir. Bir sayı dizisi ile ifade edilen fiziksel sistemleri tarif etmek için ise vektör adı verilen tensörler kullanılır. Skalar adı verilen boyutsuz tensörler sadece büyüklükleri; vektör adı verilen tek boyutlu tensörler ise büyüklükleri ve yönleri üzerinden tanımlanır.

Bazı fiziksel sistemleri tarif edebilmek için ise, bir vektör dizisinden oluşan tensörlere ihtiyaç duyulur. Matris görünümüne sahip olan bu tensör, skalar ya da vektör gibi ayrı bir isim kullanmadan sadece tensör olarak adlandırılır. Bir cisim üzerine etki eden bütün gerilme değerlerini tek bir tensör içinde toplayıp, bu değerlerin eksen dönüşümünden nasıl etkilendiğini bulmak için tek tek işlem yapmak yerine, tensör işlemleriyle istenilen sonuca rahat bir şekilde ulaşılabilir. Gerilme tensörü İfade (2.2)-(2.4)'e bağlı olarak 3 farklı şekilde ifade edilebilir;

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \cong \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \cong \sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \quad (2.6)$$

Gerilme tensörünün bileşenleri cismin farklı noktalarında keyfi olarak verilemez. Gerilme hesabında asıl amaç, bir noktada belli bir kesitteki gerilmeleri kullanarak

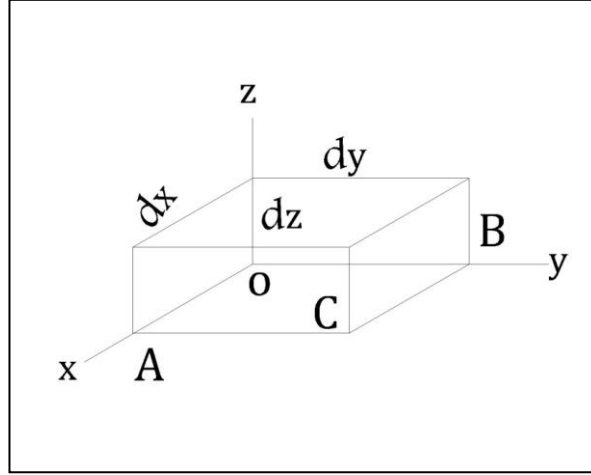
aynı noktada başka bir kesitteki gerilmeleri belirlemektir. Bunun için, o noktadaki sonsuz küçük bir cisim parçasının dengesini araştırmak yeterlidir. Bu cisim; bir ve iki boyutlu gerilme hesabında bir dörtyüzlü olup üç boyutlu gerilme hesabında bir dörtgenler prizmasıdır. Eğer gerilme durumu bir noktadan diğerine değişmiyorsa bu durum bir homojen gerilme durumudur.

### 2.3. Şekil Değişirme ve Şekil Değişirme Bileşenleri

Cisim kuvvete maruz kaldığında ve cisimde deformasyon oluştuğunda cisimi oluşturan parçacıkların her birinin konumlarında bir miktar değişim olur. Noktaların her birinin konumlarındaki değişimin önceki konumlarına göre oranı şekil değişirme olarak adlandırılır. Bir malzeme gerilmeye maruz kaldıktan sonra malzemede bir miktar şekil değişirme oluşması beklenir (Timoshenko ve Goodier, 1951).

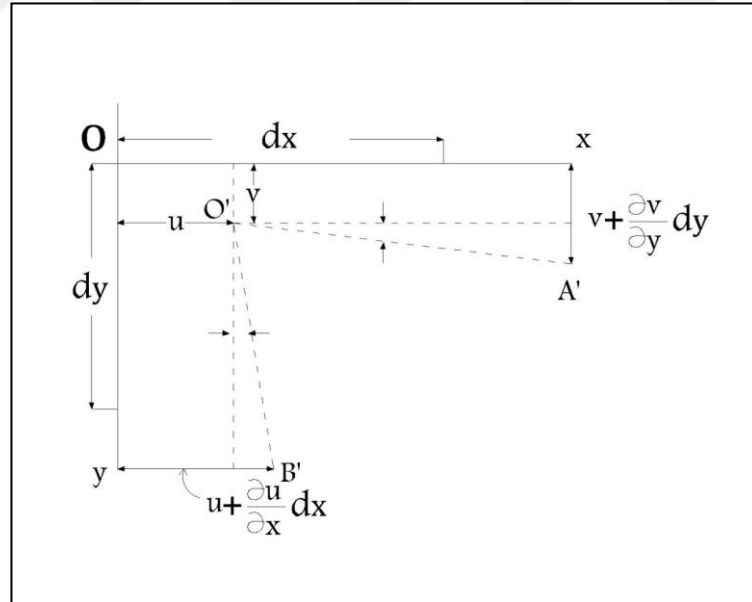
Elastik bir cismin deformasyonunu tartışırken, cismin hareketini engellemek için yeterince kısıtlama olduğu varsayılacaktır, böylece cisimde deformasyon olmadan cismin parçacıklarının herhangi bir şekilde hareket etmesi mümkün olmayacaktır. Deforme olmuş bir cismin parçacıklarının küçük hareketleri tanımlanabilir. Deforme olan bir cismin bir noktasının  $x, y, z$  eksenleri doğrultusundaki yer değiştirmelerine  $u, v, w$  isimleri verilerek tanımlanabilir. Bu  $u, v, w$  değerlerinin cismin hacmi üzerinde sürekli olarak değişen çok küçük nicelikler olduğu varsayılacaktır.

Boyutları  $dx, dy, dz$  olan elastik bir cismin küçük bir parçası ele alınsın (Şekil 2.7). Cismin bir deformasyona uğradığı varsayılırsa  $u, v, w$   $O$  noktasının yer değiştirme bileşenleri olmak üzere,  $x$  yönünde  $O$  noktasına çok yakın bir  $A$  noktasının  $x$  eksenindeki yer değiştirmesi  $u + (\partial u / \partial x) dx$  şeklindedir. Bu,  $u$  fonksiyonunun  $x$  koordinatındaki  $(\partial u / \partial x) dx$  artışına bağlı olarak oluşur.



Şekil 2.7. Birim elastik cisim (Timoshenko, 1951)

Deformasyona bağlı olarak OA elemanın uzunluğunda meydana gelen artış  $(\partial u/\partial x)dx$  olur. Bu nedenle O noktasında, x yönündeki birim uzama  $\partial u/\partial x$ 'tir. Aynı şekilde, y ve z yönlerindeki birim uzamalar  $\partial v/\partial y$  ve  $\partial w/\partial z$  türevleriyle gösterilebilir.



Şekil 2.8. OA ve OB elemanları arasındaki açılarda sapması

$u$  ve  $v$ , O noktasının x ve y yönlerindeki yer değiştirmeleri olmak üzere A noktasının y yönündeki yer değiştirmesi  $v + (\partial v/\partial x)dx$  ve B noktasının x yönündeki yer değiştirmesi  $u + (\partial u/\partial y)dy$  dir. Bu yer değiştirmelere bağlı olarak OA elemanının yeni yönü  $O'A'$   $\partial v/\partial x$  kadar bir miktar eğilmiştir. Aynı şekilde OB elemanı  $\partial u/\partial y$

kadar küçük bir açıyla eğilerek O'B' ye kadar eğilmiştir. Buradan görülebilir ki, OA ve OB elemanları arasında kalan, başlangıçta bir dik açı olan AOB  $\partial v/\partial x + \partial u/\partial y$  kadar küçülmüştür.

Bu, xz ve yz düzlemleri arasındaki kayma gerilmesidir. xy ve xz, ve yx ve yz düzlemleri arasındaki kayma gerilmeleri aynı şekilde elde edilebilir.  $\epsilon$  notasyonu birim uzama ve  $\gamma$  notasyonu birim kayma şekil değiştirmesini ifade etmek için kullanılır. Şekil değiştirme yönlerini belirtmek için, tıpkı gerilme bileşenlerinde olduğu gibi alt indisler kullanılır. O halde,

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\quad (2.7)$$

Cismin her hangi bir noktasında deformasyon durumu deformasyon tensörü ile verilmektedir. Deformasyon tensörü (matrisi) farklı indis gösterimlerine bağlı olarak

$$\epsilon = \begin{vmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{vmatrix} \cong \epsilon = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix} \cong \epsilon = \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{vmatrix}\quad (2.8)$$

ifadelerinden biriyle gösterilir.

Burada  $\epsilon_{ij}(x)$  fonksiyonları deformasyon tensörü bileşenleridir ve bu bileşenler başlangıçta x,y,z koordinat eksenlerine paralel sonsuz küçük lineer elemanlar için deformasyonları göstermektedir. Bunlar, ele alınan noktaya göre yer değiştirme vektörünün bileşenleri ile,

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i,j=1,2,3 \quad (2.9)$$

ifadeleri ile tanımlanır. Burada  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  normal deformasyon bileşenleridir ve sonsuz küçük lineer elemanların boyutlarının x,y,z koordinatlarına göre değişimini karakterize etmektedir. Normal deformasyonun işareti çekme ve sıkıştırma durumuna

bağlı olarak belirlenmektedir. Genel olarak, çekme durumunda deformasyonun pozitif olduğu varsayılmaktadır;

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} \quad (2.10)$$

bileşenleri yer değiştirme deformasyonudur.

#### 2.4. Hooke Kanunu

Gerilme-şekil değiştirme bileşenleri arasındaki ilişki deneysel olarak belirlenerek Hooke Kanunu ile ifade edilmektedir. Tek eksenli gerilme durumu için, kenarları koordinat eksenlerine paralel olan bir ögesel dikdörtgen paralel yüzlünün iki zıt kenarı üzerine düzgün şekilde yayılmış olan  $\sigma_x$  normal gerilmesine maruz kaldığı varsayalım. Elemanın gerilmeye paralel kenarının birim uzamasının büyüklüğü,

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (2.11)$$

denklemlerle verilir burada sabit bir değer olan  $E$ , elastisite modülü veya Young modülü olarak adlandırılır ve deneysel yöntemle belirlenir. Elastisite modülü, gerilme esnekliği veya bir eksen boyunca zıt kuvvetlerin uygulanması sonucu o eksen boyunca deforme olmuş nesnenin gerilmesi olarak tanımlanır. Yani, bir nesnenin elastisite modülü, elastik deformasyon bölgesindeki gerilme-şekil değiştirme eğrisinin eğimidir ve elastisite modülü arttıkça, cismin uzamaya karşı direnci de artar.

Kuvvetin etkisi altında kalan parça  $x$  yönünde uzarken, kuvvete dik doğrultudaki kısalma ile kuvvet yönündeki uzama arasında kurulan ilişki;

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu\epsilon_x \quad (2.12)$$

şeklindedir. Boyutsuz bir sabit olan  $\nu$ , Poisson oranıdır ve malzemedeki enine şekil değiştirmenin boyuna şekil değiştirmeye oranını temsil etmektedir. Poisson oranı gerilme ile ilişkilendirilirse Denklem (2.11) ve (2.12)'den,

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (2.13)$$

elde edilir. Burada eğer gerilme tensörünün her bir bileşeni şekil değiştirme tensörünün bileşenlerinin lineer bileşimi olarak tanımlanabilir ise, bu durumda cisim lineer esnek cisim denir. Klasik esneklik teorisi genelleşmiş Hooke yasasına dayanmaktadır.

Hooke Yasaları: Tek eksenli gerilmeler (asal gerilmeler)  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  in  $x$  eksenini doğrultusunda sebep olacağı uzama oranları sırasıyla;

$$(\epsilon_x)_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad (\epsilon_x)_y = -\frac{\nu\sigma_y}{E}, \quad (\epsilon_x)_z = -\frac{\nu\sigma_z}{E} \quad (2.14)$$

olup, toplam uzama oranı, üst üste bindirme ilkesi gereği,

$$\epsilon_x = (\epsilon_x)_x + (\epsilon_x)_y + (\epsilon_x)_z \quad (2.15)$$

biçiminde hesaplanır. Bu düşünce,  $y$  ile  $z$  eksenleri doğrultusunda da genişletilirse Genel Hooke Yasası ile gerilme ve şekil değiştirme arasındaki dönüşüm aşağıdaki denklemler ile tanımlanır.

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_z = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_x + \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_z = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (2.16)$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y + \frac{1}{E}\sigma_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

Üç boyutlu lineer esnek cismin her bir noktasında gerilme tensörünün  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$  altı bileşeni ile şekil değiştirme tensörünün  $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$  altı bileşeni arasında lineer bir bağıntı vardır. Kayma gerilmesi  $\tau$  ile kayma açısı  $\gamma$  arasındaki ilişki, deneyler sonucu,

$$\gamma = \frac{1}{G}\tau \quad (2.17)$$

biçiminde doğrusal bir bağıntı ile ifade edilmiştir. Denklem (2.17)'deki  $G$  sabitine kayma modülü denir. Homojen ve izotrop malzemelerin sabitleri arasındaki bağıntı aşağıdaki denklem ile tanımlanır;

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.18)$$

Kayma gerilmelerinin sebep olduğu kayma açıları (kayma şekil değiştirmesi bileşenleri),

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (2.19)$$

biçimindedir.

Denklem (2.16) ve (2.19)'daki bağıntılar matris gösterimiyle  $\{\epsilon\}=[C] \{\sigma\}$  biçiminde yazılırsa;

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

olur.

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = G \quad (2.21)$$

Lamé sabitleri olmak üzere

Eşitlik (2.20)'den  $\{\sigma\}=[E] \{\epsilon\}$  yapısına geçilirse;

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda+2\mu) & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & (\lambda+2\mu) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & (\lambda+2\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

şeklini alır.

## 2.5. Denge Denklemi

Katı cismin denge durumunda olması için gerilme tensörünün bileşenlerinin belli koşulları sağlaması gerekmektedir. Gerilme tensörünün bileşenleri momentlerin denge koşulundan  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$  ( $i \neq j = x, y, z$ ) eşitliğini, kuvvetlerin denge koşulundan ise aşağıdaki eşitlikleri sağlamalıdır;

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_1 &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_2 &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_3 &= 0\end{aligned}\tag{2.23}$$

Burada  $F_i$  ( $i=1,2,3$ ) dış kuvvetlerdir ve ifade (2.23)'e denge denklemi denir.

## 2.6. Düzlem Deformasyon

Eğer yer değiştirme vektörü  $u = u(u_1, u_2, u_3)$ ' nun  $u_3$  bileşeni sıfıra eşitse, yani  $u_1$  ve  $u_2$  bileşenleri  $x_3$  koordinatına bağlı değil ise, o halde cisim düzlem deformasyon durumundadır denir (Sokolnikoff, 1956). Bu durumda şekil değiştirme tensörünün  $\epsilon_z, \gamma_{xz} = \gamma_{zx}$  ve  $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$  bileşenleri sıfıra eşit olur ve diğer bileşenler  $x_3$  koordinatına bağlı olmaz. Bu durumda sıfırdan farklı bileşenler;

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)\tag{2.24}$$

ifadeleri ile belirlenir. (2.24) ifadelerinde şekil değiştirme tensörünün 3. bileşeni  $u_1$  ve  $u_2$  bileşenleri ile tanımlanır. (2.24)'ün yardımı ile kolaylıkla,

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} = \frac{2\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}\tag{2.25}$$

uyum koşulu elde edilebilir. Koşul (2.25)  $x$  ve  $y$  değişkenlerine bağlı olan  $u = u(u_1, u_2)$  yer değiştirme vektörünün tek değerli olarak belirlenebilmesi için gerek ve yeter koşuldur. Bu koşul cismin iç kısmında boşlukların ortaya çıkması olasılığını



ortadan kaldırır. Bellidir ki, eğer  $u_1$  ve  $u_2$ ,  $x$  ve  $y$  değişkenlerine göre diferansiyeli alınabilir fonksiyon ise, Koşul (2.25) kendiliğinden sağlanır.

Düzlem deformasyon durumunda gerilme bileşenleri şekil değiştirme bileşenleri cinsinden şöyle ifade edilir;

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2\mu \left[ \epsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y) \right], \\ \sigma_y &= 2\mu \left[ \epsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y) \right], \\ \sigma_z &= 2\mu \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y), \\ \tau_{xy} &= 2\mu \gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0\end{aligned}\tag{2.26}$$

Ayrıca,

$$\sum_{j=1}^3 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial u_j}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) \right) \right] + F_i = 0, \quad i = 1, 2, 3\tag{2.27}$$

denklemler sisteminde  $F_3=0$ ,  $u_3=0$  ve  $F_1, F_2, u_1, u_2$ ,  $z$  değişkenine bağlı olmadığından düzlem problemi için Lamé denklemler sistemi (Timoshenko, Goodier, 1951);

$$\begin{aligned}(2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + F_1 &= 0, \\ (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + F_2 &= 0\end{aligned}\tag{2.28}$$

şeklinde tanımlanır.

### 3. ELASTOPLASTİK LEVHANIN EĞİLMESİNİN MATEMATİKSEL MODELİ

#### 3.1. Elastoplastik Levhanın Eğilmesinin Matematiksel Modeli

Kalınlığı  $h$  olan elastoplastik bir levhanın orta düzleminin  $Ox_1x_2$  düzleminde  $\bar{\Omega} = \{(x_1, x_2): 0 \leq x_i \leq l_i, i = 1, 2\}$  dikdörtgensel bölgesini doldurduğu ve bu levhanın dikey yönde ( $x_3$  eksenini boyunca) yönelmiş  $q = q(x_1, x_2)$  şiddetindeki bir yükün etkisi altında olduğu ve levhanın sınırlarını hiçbir kuvvetin etkilemediği düşünölsün. Hacim kuvvetlerinin olmadığı, yani  $F_1=F_2=F_3=0$  durumunda, levhanın alt yüzeyi serbest kaldığı ve yüzeysel kuvvet levhanın üst kısmına dikey yönde uygulandığı için;

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}(x_1, x_2, h/2) &= \sigma_{xz}(x_1, x_2, -h/2) = \sigma_{yz}(x_1, x_2, h/2) = \sigma_{yz}(x_1, x_2, -h/2) \\ &= \sigma_{zz}(x_1, x_2, -h/2) = 0, \quad \sigma_{zz}(x_1, x_2, h/2) = q \end{aligned} \quad (3.1)$$

olduğu tespit edilir.

Denge denklemler sistemi Denklem (2.23)'ün ilk iki ifadesi  $x_3$  ile çarpılıp  $[-h/2, h/2]$  aralığında  $x_3$  'e göre integrali alındığında, gerilme tensörünün simetrikliği ve kuvvet fonksiyonunun levhanın düzlemine ortogonalite koşulu da göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x_1} x_3 dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x_2} x_3 dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x_3} x_3 dx_3 &= 0 \\ \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x_1} x_3 dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x_2} x_3 dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x_3} x_3 dx_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

elde edilir. Denklem (3.2)'deki son integrallerde, Eşitlik (3.1) göz önüne alınarak, kısmi integralleme formülü uygulanırsa (Samarskii, Andreev, 1976),

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x_3} x_3 dx_3 &= - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dx_3 + \sigma_{xz}(x_1, x_2, \xi) \xi \Big|_{-h/2}^{h/2} = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dx_3 \\ \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x_3} x_3 dx_3 &= - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dx_3 + \sigma_{yz}(x_1, x_2, \xi) \xi \Big|_{-h/2}^{h/2} = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dx_3 \end{aligned} \quad (3.3)$$

şeklinde olur. Denklem (3.2)'deki diğer integraller ise, aşağıdaki şekilde yazılabilir;

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x_1} x_3 dx_3 &= \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} x_3 dx_3, \\ \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x_2} x_3 dx_3 &= \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} x_3 dx_3, \\ \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x_1} x_3 dx_3 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x_1} x_3 dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} x_3 dx_3, \\ \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x_2} x_3 dx_3 &= \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} x_3 dx_3 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Eşitlik (3.3) ve (3.4) (3.2) sisteminde göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} x_3 dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} x_3 dx_3 - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} x_3 dx_3 &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} x_3 dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} x_3 dx_3 - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} x_3 dx_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

elde edilir.

Denge denklemler sisteminin üçüncü denklemini  $[-h/2, h/2]$  aralığında  $x_3$  değişkenine göre integrali alındığında, gerilme tensörünün simetrikliği ve kuvvetin levhanın üst düzlemine etkisi de göz önüne alınarak,

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x_1} dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial x_2} dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial x_3} dx_3 = 0 \quad (3.6)$$

olur. Buradan,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{zx} dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{zy} dx_3 + \sigma_{zz} \left( x_1, x_2, \frac{h}{2} \right) - \sigma_{zz} \left( x_1, x_2, -\frac{h}{2} \right) = 0 \quad (3.7)$$

ve son olarak,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dx_3 + q(x) = 0 \quad (3.8)$$

elde edilir.

Denklem (3.5) ve (3.8)'de kullanılan integraller fiziksel anlamına göre momentleri göstermektedir;

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} x_3 dx_3, & M_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} x_3 dx_3, \\ M_{12} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} x_3 dx_3, & q &= \sigma_{zz}(x_1, x_2, h/2), \\ Q_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dx_3, & Q_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dx_3 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Mekanikte  $M_1(x_1, x_2)$  ve  $M_2(x_1, x_2)$  eğilme momentleri,  $M_{12}(x_1, x_2)$  burulma momenti,  $Q_1(x_1, x_2)$  ve  $Q_2(x_1, x_2)$  ise kesme kuvvetleri olarak tanımlanır. Son

tanımlamalarla birlikte Denklem (3.5) ve (3.8) de kullanılarak denge denklemleri aşağıdaki şekilde yazılabilir;

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_1}{\partial x_1} - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - Q_1 &= 0 \\ -\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - Q_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + q(x) = 0$$

Buradan  $Q_1$  ve  $Q_2$  yok edilirse,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial M_1}{\partial x_1} - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} \right) + q(x) = 0 \quad (3.11)$$

olur. Son olarak Denklem (3.11)'deki türevler hesaplandığında üç bilinmeyenli,

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2} + q(x) = 0 \quad (3.12)$$

kısmi türevli diferansiyel denklemi elde edilir. Fakat  $M_1$ ,  $M_2$ , ve  $M_{12}$  momentleri gerçekte bilinmeyen değildir. Momentlerin  $w(x_1, x_2) = u_3(x_1, x_2, 0)$  eğilme fonksiyonu ile ifadeleri göz önüne alınırsa, levhanın  $w(x_1, x_2)$  eğilme fonksiyonu ile ifade edilmiş denge denklemi elde edilir.

Bu çalışmada, levhanın orta düzlemine normal yönünde çizilmiş doğrunun deformasyondan sonra da bu düzleme dik yönde kaldığının varsayıldığı Klasik Levha Teorisi kullanılacaktır. Bu teoride, levha noktalarının yer değiştirme vektörünün bileşenleri aşağıdaki formüllerle tanımlanır;

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= -x_3 Q_1(x_1, x_2) = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1}, \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= -x_3 Q_2(x_1, x_2) = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Burada  $w(x_1, x_2) = u_3(x_1, x_2, 0)$  levhanın orta yüzeyinin eğilmesidir.

Levhanın eğilme probleminde deformasyon tensörünün bileşenleri  $x_3$  ile orantılıdır ve Denklem (3.13)'ten faydalanarak bu bileşenler,

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, & \epsilon_{yy} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, & \epsilon_{zz} &= -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \left( -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial x_1} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) = 0, \\ \epsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) = 0\end{aligned}\tag{3.14}$$

ifadeleri ile belirlenir. Bu durumda Klasik Levha Teorisinde levhanın orta düzleminde gerilmenin  $\sigma_{zz}$  bileşenlerinin  $\sigma_{xx}$  ve  $\sigma_{yy}$  bileşenlerinden çok küçük olduğu ve göz ardı edilebileceği kabul edilir. Böylece eğilme problemine düzlem deformasyon problemi gibi yaklaşılabilir. Elde edilen eşitlikler genelleşmiş Hooke yasası ve  $\lambda, \mu$  Lamé sabitleri yardımıyla (Samarskii, Andreev, 1976) ,

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{4\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda} \epsilon_{xx} + \frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda} \epsilon_{yy} \\ \sigma_{yy} &= \frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda} \epsilon_{xx} + \frac{4\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda} \epsilon_{yy}\end{aligned}\tag{3.15}$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu\epsilon_{xy}$$

olur. Denklem 3.15'te,

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}\tag{3.16}$$

şeklindedir.

Plastiklik teorisinden biliniyor ki (Kachanov, 1974), (Washizu, 1981) izotropik ve homojen deforme edilebilir malzemeler için elastoplastik deformasyon teorisine

bağlı olarak şekil değiştirme sapması  $\epsilon = \{\epsilon_{ij}\}$  ve gerilme sapması  $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$ ,  $i,j=1,2,3$  arasındaki ilişki Hencky bağıntısı ile tanımlanır;

$$\sigma_{ij}(w) = \tilde{g}(\Gamma^2) \epsilon_{ij}(w) \quad (3.17)$$

Sonuç olarak, kayma şekil değiştirmesi yoğunluğu  $\Gamma = (2\epsilon_{ij}\epsilon_{ij})^{1/2}$  ve kayma gerilmesi yoğunluğu  $\tilde{T} = (0.5\sigma_{ij}\sigma_{ij})^{1/2}$  arasındaki ilişki,

$$\Gamma^2 = \frac{2}{3} \left[ (\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy})^2 + (\epsilon_{xx} - \epsilon_{zz})^2 + (\epsilon_{zz} - \epsilon_{yy})^2 + 6\epsilon_{xy}^2 \right] \quad (3.18)$$

olmak üzere aşağıdaki şekildedir;

$$\tilde{T} = \tilde{g}(\Gamma^2)\Gamma \quad (3.19)$$

Ayrıca Hencky bağıntısı,  $\sigma_{ij}$  gerilme tensörünün bileşenleri ve (3.14) şekil değiştirme tensörü bileşenleri olmak üzere,

$$\sigma_{xx} = \frac{2}{1-\nu} \tilde{g}(\Gamma^2) (\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy})$$

$$\sigma_{yy} = \frac{2}{1-\nu} \tilde{g}(\Gamma^2) (\epsilon_{yy} + \nu\epsilon_{xx}) \quad (3.20)$$

$$\sigma_{xy} = 2\tilde{g}(\Gamma^2)\epsilon_{xy}$$

eşitliklerini gerektirmektedir.  $\epsilon_{ij}$  bileşenlerinin ifadeleri (3.18) ve (3.20) de yerlerine yazıldığında,

$$\Gamma^2 = 4x_3^2 \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right] \quad (3.21)$$

ve

$$\sigma_{xx} = \frac{2}{1-\nu} \tilde{g}(\Gamma^2) \left( -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \nu x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) = -\frac{2}{1-\nu} \tilde{g}(\Gamma^2) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) x_3,$$

$$\sigma_{yy} = \frac{2}{1-\nu} \tilde{g}(\Gamma^2) \left( -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \nu x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) = -\frac{2}{1-\nu} \tilde{g}(\Gamma^2) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) x_3 \quad (3.22)$$

$$\sigma_{xy} = -2\tilde{g}(\Gamma^2) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} x_3 \right)$$

elde edilir.

Formül (3.22) Denklem (3.9)'daki moment ifadelerinde göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} x_3 dx_3 = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{2}{1-\nu} \tilde{g}(\Gamma^2) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) x_3^2 dx_3 \\ &= -\frac{2}{1-\nu} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} \tilde{g}(\Gamma^2) x_3^2 dx_3 \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} M_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} x_3 dx_3 = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{2}{1-\nu} \tilde{g}(\Gamma^2) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) x_3^2 dx_3 \\ &= -\frac{2}{1-\nu} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} \tilde{g}(\Gamma^2) x_3^2 dx_3 \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} M_{12} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} x_3 dx_3 = - \int_{-h/2}^{h/2} 2\tilde{g}(\Gamma^2) \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} x_3 \right) x_3 dx_3 \\ &= 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \int_{-h/2}^{h/2} \tilde{g}(\Gamma^2) x_3^2 dx_3 \end{aligned} \quad (3.25)$$

elde edilir.

$\xi = \xi(w)$  levhanın eğrilik derecesini ifade eder ve

$$\xi^2(w) = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \quad (3.26)$$



şeklinde tanımlanır.

$\tilde{g} = \tilde{g}(\Gamma^2)$  ve  $\Gamma^2 = 4x_3^2\xi^2$  olduğu hesaba katılırsa sadece  $\xi^2$  değişkenine bağımlı yeni bir,

$$g(\xi^2(w)) = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \tilde{g}(4x_3^2)x_3^2 dx_3 \quad (3.27)$$

fonksiyonu tanımlanabilir (Langenbach, 1961).

Eşitlik (3.27)'nin sağ tarafına ortalama değer teoremi uygulanırsa;

$$\frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \tilde{g}(4x_3^2\xi^2)x_3^2 dx_3 = \frac{12}{h^3} \tilde{g}(4\bar{x}_3^2\xi^2) \int_{-h/2}^{h/2} x_3^2 dx_3 = \tilde{g}(4\bar{x}_3^2\xi^2) \quad (3.28)$$

elde edilir. Böylece,  $\bar{x}_3 \in (-h/2, h/2)$  olmak üzere  $g(\xi^2(w)) = \tilde{g}(4\bar{x}_3^2\xi^2)$  eşitliği sağlanmış olur.

Eşitlik (3.27) göz önünde bulundurulursa, Denklem(3.23)-(3.25)'deki moment ifadeleri aşağıdaki şekle dönüşür;

$$M_1 = -\frac{h^3}{6(1-\nu)} g(\xi^2(w)) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \quad (3.29)$$

$$M_2 = -\frac{h^3}{6(1-\nu)} g(\xi^2(w)) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \quad (3.30)$$

$$M_{12} = \frac{h^3}{6} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (3.31)$$

Momentler için elde edilen son formüller Denklem (3.12)'de yerine yazıldığında,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( -\frac{h^3}{6(1-\nu)} g(\xi^2(w)) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \right) - 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left( \frac{h^3}{6} g(\xi^2(w)) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left( -\frac{h^3}{6(1-\nu)} g(\xi^2(w)) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \right) + q(x) = 0 \quad (3.32)$$

elde edilir.

Denklem (3.32) -  $h^3/6(1-\nu)$  ortak parantezine alınırsa,

$$\begin{aligned} & -\frac{h^3}{6(1-\nu)} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( g(\xi^2(w)) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \right) \right. \\ & + 2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left( g(\xi^2(w)) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left( g(\xi^2(w)) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \right) \right] = -q(x) \end{aligned} \quad (3.33)$$

olur. Daha sonra düzenlenerek,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( g(\xi^2(w)) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \right) + 2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left( g(\xi^2(w)) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left( g(\xi^2(w)) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \right) = \frac{6(1-\nu)q(x)}{h^3} \end{aligned} \quad (3.34)$$

şekline dönüşür.

$F(x_1, x_2) = 6(1-\nu)q(x_1, x_2)/h^3$  olmak üzere ve sıkıştırılmayan malzemeler için Denklem (3.34)'te  $\nu = 1/2$  alınırsa, literatürde özel durumda ele alınan,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left[ g(\xi^2(w)) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[ g(\xi^2(w)) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[ g(\xi^2(w)) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \right] = F(x) , \end{aligned}$$

$$x = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2, F(x) = 3q(x)/h^3 \quad (3.35)$$

denklemini elde edilir. Denklem (3.34)'ün özel bir durumu olan;

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \right) - 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left( D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left( -bD \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \right) + q = 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

denklemini  $D = Eh^3 / (12(1-\nu^2))$  elastik levhanın silindirik sertlik katsayısı olmak üzere, homojen elastik levhanın denge denklemdir. Denklem (3.36)'da parantezdeki ifadelerin türevleri alınır,

$$-D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right) = -q \quad (3.37)$$

olur. Buradan da,

$$\Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \frac{q}{D} \quad (3.38)$$

denklemini elde edilir. Denklem (3.38)

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \quad (3.39)$$

biharmonik operatörünün yardımıyla,

$$\Delta^2 w = \frac{q}{D} \quad (3.40)$$

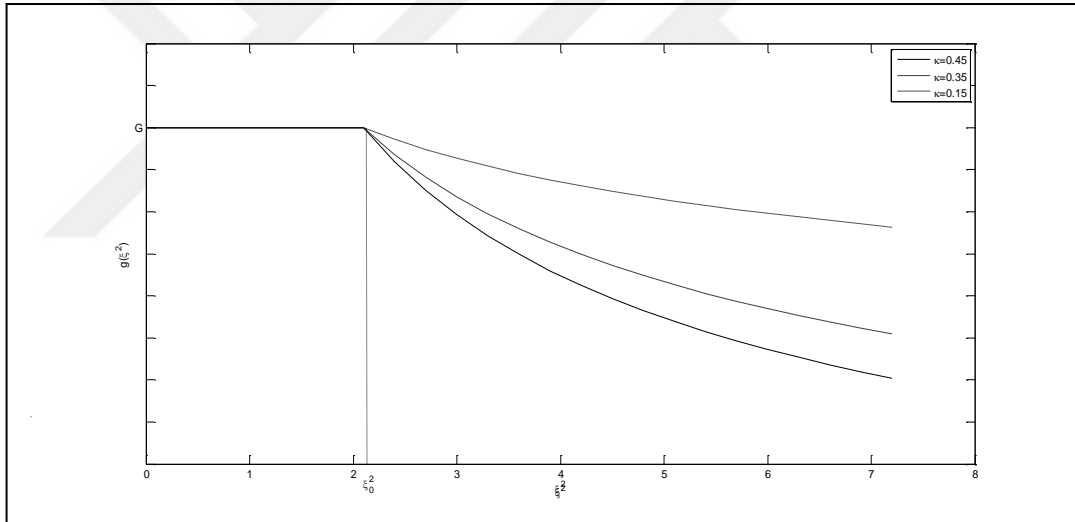
şeklinde de yazılabilir. Sıkıştırılmayan homojen ve izotropik elastoplastik levhanın eğilmesi ile ilgili problemin matematiksel modeli lineer olmayan biharmonik Denklem (3.34) için sınır değer problemleri ile ifade edilmektedir. Problemin çözümü olan  $w = w(x_1, x_2)$  fonksiyonu, levhanın  $x = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega}$  noktasında oluşan eğilmesini temsil etmektedir. Kısmi türevli diferansiyel Denklem (3.34)'ün temel

özelliği lineer olmamasıdır, çünkü  $g(\xi^2)$  fonksiyonu  $w$  fonksiyonunun türevlerine bağlıdır.  $g = g(\xi^2(w))$  katsayı fonksiyonu deforme edilebilir bir levhanın elastoplastik davranışını temsil eder ve plastiklik fonksiyonu olarak adlandırılır.

Bu fonksiyon,  $\xi_0$  elastiklik limiti ve  $\kappa \in (0,1)$  olmak üzere,

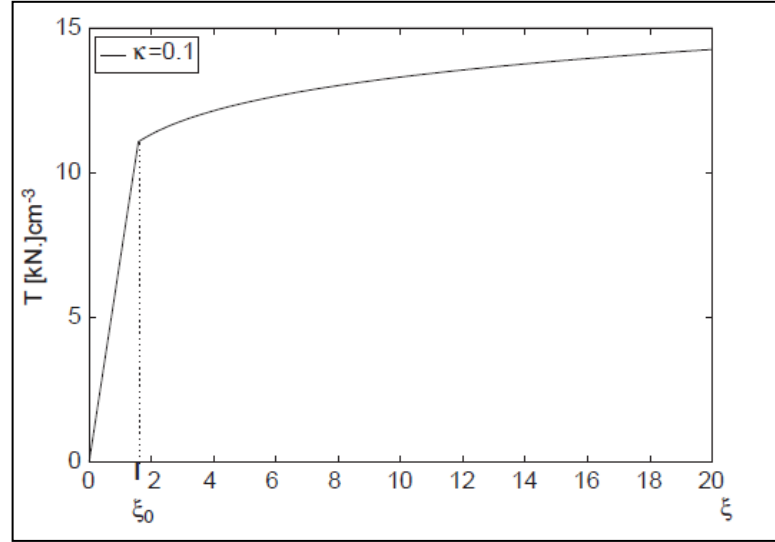
$$g(\xi^2) = \begin{cases} G & , \quad 0 \leq \xi^2 \leq \xi_0^2 \\ G \left( \frac{\xi_0^2}{\xi^2} \right)^\kappa & , \quad \xi_0^2 < \xi^2 \end{cases} \quad (3.41)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. İfade (3.41)'deki  $\kappa \in (0, 1)$  zorlama sertlik parametresidir. Sertlik parametresinin  $\kappa = 0.45$  ,  $\kappa = 0.35$  ,  $\kappa = 0.15$  değerleri için  $g(\xi^2)$  plastiklik fonksiyonu Şekil 3.1'deki gibidir:



Şekil 3.1. Plastiklik fonksiyonu  $g(\xi^2)$  'nin  $\kappa$  parametresine bağlılığı

Gerçek malzemeler için  $dT/d\xi \geq \text{sabit} > 0$  ve  $T = g(\xi^2)\xi$  fonksiyonu dışbükeydir (Hasanov,1995). Esnek deformasyonlar durumunda  $T = G\xi$  ,  $G = \text{sabit} > 0$  dır ve plastiklik fonksiyonu  $g(\xi^2) = G > 0$  sabitine eşittir:  $g(\xi^2) = G$ . Elastik deformasyonlarda yani ( $\xi < \xi_0$ ) iken  $g(\xi^2)$  fonksiyonu sabit bir fonksiyondur. Esnek olmayan deformasyonlar durumunda ise (3.41) fonksiyonu doğrusallığını kaybeder (Şekil 3.2).



Şekil 3.2.  $T = g(\xi^2)\xi$  fonksiyonu

$T = T(\xi)$  fonksiyonunun yukarıda sıralanan özellikleri sonucu,  $g(\xi^2)$  fonksiyonu da aşağıdaki özellikleri sağlar (Kachanov,1974);

- (i)  $c_0 \leq g(\xi^2) \leq c_1$  ;
  - (ii)  $g(\xi^2) + 2 g'(\xi^2) \xi^2 \geq c_2$  ;
  - (iii)  $g'(\xi^2) \leq 0, \forall \xi \in [0, \xi_M]$ ;
  - (iv)  $\exists \xi_0 \in (0, \xi_M), g(\xi^2) = G, \forall \xi \in [0, \xi_0]$
- (3.42)

burada  $c_i, i = 0,1,2$  sayıları birer pozitif sabittirler.

### 3.2. Sınır Koşullarının Elde Edilmesi

Genel durumda,

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \quad (3.43)$$

biharmonik operatörü alınsın. Kendileri ve dördüncü mertebeye kadar olan türevleri bir  $\bar{\Omega}$  bölgesinde sürekli olan  $w(x_1, x_2)$  fonksiyonlarından oluşan lineer bir  $M$  kümesi ele alınsın. Herhangi  $u(x) \in M$  ve  $v(x) \in M$  fonksiyonları ele alınsın.  $M$  kümesi üzerinde iç çarpım;

$$(u, v) = \int_{\bar{\Omega}} u(x)v(x)dx \quad (3.44)$$

şeklinde tanımlansın. O halde herhangi bir  $v(x) \in M$  fonksiyonu için,

$$\Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} \quad (3.45)$$

olduğundan,

$$(\Delta^2 w, v) \quad (3.46)$$

iç çarpımı aşağıdaki şekildedir;

$$\begin{aligned} (\Delta^2 w, v) &= \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4}, v \right) + \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1 \partial x_2}, v \right) + \\ &+ \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_2 \partial x_1}, v \right) + \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4}, v \right) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Denklem (3.47)'deki iç çarpımlardan birinci toplanan ele alınıp,

$$\left( \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4}, v \right) = \int_{\Omega} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} v dx \quad (3.48)$$

ifadesindeki integrali hesaplamak için Green teorem kullanılırsa,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} v dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} v n_1 ds - \int_{\Omega} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} \frac{\partial v}{\partial x_1} dx \quad (3.49)$$

elde edilir. Burada  $\Gamma, \bar{\Omega}$  bölgesinin sınırıdır. Denklem (3.49)'un sağ tarafındaki ikinci integral ele alınıp Green teoremi tekrar uygulanırsa,

$$- \int_{\Omega} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} \frac{\partial v}{\partial x_1} dx = - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial v}{\partial x_1} n_1 ds + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} dx \quad (3.50)$$

bulunur.

Denklem (3.49) ve (3.50)'den,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} v dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} v n_1 ds - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial v}{\partial x_1} n_1 ds + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} dx \quad (3.51)$$

elde edilir.

Benzer şekilde Denklem (3.47)'deki ikinci ve üçüncü toplananlara ardışık olarak iki defa Green teoremi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1 \partial x_2}, v \right) &= \int_{\Omega} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1 \partial x_2} v dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_2} v n_1 ds - \\ &- \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_1} n_2 ds + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} dx \end{aligned} \quad (3.52)$$

ve

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_2 \partial x_1}, v \right) &= \int_{\Omega} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_2 \partial x_1} v dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1} v n_2 ds - \\ &- \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} n_1 ds + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} dx \end{aligned} \quad (3.53)$$

eşitlikleri elde edilir.

Burada  $w \in M$  fonksiyonu, kendisi ve dördüncü mertebeye kadar olan türevleri sürekli olan bir fonksiyon olduğu için Euler'in karışık türevlerin eşitliği teoremi hatırlanarak,  $\partial^2 w / \partial x_1 \partial x_2 = \partial^2 w / \partial x_2 \partial x_1$  olduğu varsayılmıştır.

Daha sonra (3.47)'deki dördüncü toplanan ise Denklem (3.51)'e benzer şekilde,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} v dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} v n_2 ds - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial v}{\partial x_2} n_2 ds + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} dx \quad (3.54)$$

olacaktır.

Denklem (3.51), (3.52), (3.53) ve (3.54)'ün sağ tarafları toplanırsa,

$$\begin{aligned}
(\Delta^2 w, v) = & \left( \int_{\Gamma} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} v n_1 ds - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial v}{\partial x_1} n_1 ds + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} dx \right) + \\
& + \left( \int_{\Gamma} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_2} v n_1 ds - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_1} n_2 ds + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} dx \right) \\
& + \left( \int_{\Gamma} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1} v n_2 ds - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} n_1 ds + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} dx \right) + \\
& + \left( \int_{\Gamma} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} v n_2 ds - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial v}{\partial x_2} n_2 ds + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} dx \right) \quad (3.55)
\end{aligned}$$

olur. Denklem (3.55)'te, her toplanan için  $\Gamma$  üzerinde alınan birinci integraller düzenlenip dönüştürülürse;

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} n_1 + \frac{\partial^3 w}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_2} n_1 + \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1} n_2 + \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} n_2 \right) v ds = \\
& = \int_{\Gamma} v \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (\Delta w) n_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} (\Delta w) n_2 \right] ds = \int_{\Gamma} n \frac{\partial}{\partial w} \Delta w ds \quad (3.56)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu şekilde, Eşitlik (3.51)'den (3.54)'e kadar sağ taraflarındaki ilk integrallerin toplamı biraz daha sade bir halde yazılmış olur. Şimdi de eşitliklerin sağ taraflarındaki ikinci integraller benzer şekilde yazılacaktır. Öncelikle aşağıda, integralleri düzenleyip daha sade bir hale getirmek için kullanılacak olan, bilinen bazı eşitlikler hatırlatılacaktır;  $(\partial v / \partial n)$  normal yönünde,  $(\partial v / \partial s)$  teğet yönünde türev olmak üzere ,

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2} n_2 \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} = - \frac{\partial v}{\partial x_1} n_2 + \frac{\partial v}{\partial x_2} n_1 \quad (3.58)$$



Eşitlik (3.57)'nin her iki tarafı  $n_2$  ile, Eşitlik (3.58)'in her iki tarafı  $n_1$  ile çarpılarak taraf tarafa toplanırsa;

$$n_1 \frac{\partial v}{\partial s} + n_2 \frac{\partial v}{\partial n} = (n_1^2 + n_2^2) \frac{\partial v}{\partial x_2} \quad (3.59)$$

olur. Burada  $n_1^2 + n_2^2 = 1$  olduğu göz önünde bulundurulursa,

$$\frac{\partial v}{\partial x_2} = \frac{\partial v}{\partial n} n_2 + \frac{\partial v}{\partial s} n_1 \quad (3.60)$$

olur ve daha sonra Eşitlik (3.57)'nin her iki tarafı  $n_1$  ile, Eşitlik (3.58)'in her iki tarafı  $-n_2$  ile çarpılarak taraf tarafa toplanırsa;

$$n_1 \frac{\partial v}{\partial n} - n_2 \frac{\partial v}{\partial s} = (n_1^2 + n_2^2) \frac{\partial v}{\partial x_1} \quad (3.61)$$

ve  $n_1^2 + n_2^2 = 1$  yazılarak,

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial n} n_1 - \frac{\partial v}{\partial s} n_2 \quad (3.62)$$

elde edilir.

Eşitlik (3.60) ve (3.62) uygulanarak (3.55)'den  $\Gamma$  sınırı üzerindeki ikinci integraller aşağıdaki şekilde ifade edilir;

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial v}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_1} n_2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} n_1 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial v}{\partial x_2} n_2 \right) ds = \\ & = - \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial v}{\partial n} n_1 - \frac{\partial v}{\partial s} n_2 \right) n_1 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \left( \frac{\partial v}{\partial n} n_1 - \frac{\partial v}{\partial s} n_2 \right) n_2 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \left( \frac{\partial v}{\partial n} n_2 + \frac{\partial v}{\partial s} n_1 \right) n_1 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \left( \frac{\partial v}{\partial n} n_2 + \frac{\partial v}{\partial s} n_1 \right) n_2 \right] ds \\ & = - \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} n_1^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} n_1 n_2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} n_2^2 \right) ds \end{aligned}$$

$$-\int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial s} \left[ -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} n_1 n_2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} (n_1^2 - n_2^2) + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} n_1 n_2 \right] ds \quad (3.63)$$

ve ayrıca  $\Gamma$  nın belirli düzgünlükte olduğu varsayılırsa, Denklem (3.63)'deki son integral,

$$R(s) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} n_1 n_2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} (n_1^2 - n_2^2) + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} n_1 n_2 \quad (3.64)$$

olmak üzere,

$$-\int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial s} R ds, \quad (3.65)$$

şeklinde yazıldıktan sonra  $\Gamma$  üzerinde kısmi integrasyon uygulanarak,

$$-\int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial s} R ds = -[vR] + \int_{\Gamma} v \frac{\partial R}{\partial s} ds \quad (3.66)$$

şeklinde elde edilir.

Eğer  $\bar{\Omega}$  bölgesi basit bağlantılı bir bölge ise,

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial s} R ds$$

integrali,

$$\int_0^1 \frac{\partial v}{\partial s} R ds$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da,

$$-\int_0^1 \frac{\partial v}{\partial s} R ds = -[vR]_0^1 + \int_0^1 v \frac{\partial R}{\partial s} ds = \int_0^1 v \frac{\partial R}{\partial s} ds \quad (3.67)$$

Çünkü  $v$  ve  $R$  fonksiyonlarının her ikisi de  $s=0$  ve  $s=1$  de aynı değeri alırlar. Bu nedenle parantez içerisindeki terim 0 a eşittir. Burada  $\Gamma$  sınırının düzgünlüğü kullanılmıştır.  $\Gamma$  sınırı boyunca alınan integral, ister tek başına kapalı bir eğri ister sonlu sayıda eğrilerin birleşmesinden oluşan kapalı bir eğri üzerinde alınsın,  $vR$  fonksiyonu süreklidir.

Sonuç olarak,

$$-\int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial s} R \, ds = \int_{\Gamma} v \frac{\partial R}{\partial s} \, ds \quad (3.68)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} n_1^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} n_1 n_2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} n_2^2 = \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \quad (3.69)$$

eşitliğinden ve

Denklem (3.55), (3.56), (3.63) ve (3.68)'den faydalanarak her  $w \in M$  ve  $v \in M$  çifti için,

$$\begin{aligned} (\Delta^2 w, v) &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) dx + \\ &\int_{\Gamma} v \left\{ \frac{\partial}{\partial n} (\Delta w) + \frac{\partial}{\partial s} \left[ - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} n_1 n_2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} (n_1^2 - n_2^2) + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} n_1 n_2 \right] \right\} ds - \\ &-\int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n} \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} ds. \end{aligned} \quad (3.70)$$

elde edilir. Özdeşlik (3.70)'in belirli bir genellemesi elastisite teorisinde kullanılmaktadır (Samarskii, Andreev, 1976). Bu genellemede Poisson sabiti  $\nu$  bulunmaktadır. Biharmonik operatör aşağıdaki şekilde yazılırsa,

$$\Delta^2 w = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[ (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right]$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \quad (3.71)$$

burada Poisson sabiti  $\nu$  bir reel sayıdır. Yukarıdaki hesaplamalara bütünüyle benzer hesaplamalar yapılarak,

$$(\Delta^2 w, \nu) =$$

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) \right] dx +$$

$$\int_{\Gamma} \nu \left[ \frac{\partial}{\partial n} (\Delta w) + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} n_1 n_2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} (n_1^2 - n_2^2) - \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} n_1 n_2 \right] \right] ds$$

$$- \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n} \left[ \nu \Delta w + (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \right] ds \quad (3.72)$$

ifadesine ulaşılır.

Burada,

$$- \frac{\partial}{\partial n} (\Delta w) + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} n_1 n_2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} (n_1^2 - n_2^2) - \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} n_1 n_2 \right]$$

$$= Nw \quad (3.73)$$

$$\nu \Delta w + (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = Mw \quad (3.74)$$

olarak alınırsa,

$$\int_{\Gamma} Mw \frac{\partial v}{\partial n} ds + \int_{\Gamma} Nw v ds = 0 \quad (3.75)$$

elde edilir. Eşitlik (3.75)  $Mw$  sınırdaki uygulanmış momenti,  $Nw$  ise kayma kuvvetini göstermektedir. Böylece, levhanın serbest sınırı için Eşitlik (3.75)'den  $\nu$  fonksiyonunun  $M$  kümesinde keyfi fonksiyon olduğu göz önüne alınırsa,

$$M_w = 0, \quad N_w = 0 \quad (3.76)$$

elde edilir. Biharmonik denklem için sınır değer probleminin sınır koşulları genel durumda Eşitlik (3.76) şeklinde verilir. Fiziksel duruma göre uygulama açısından daha önemli olan özel koşullar bir sonraki bölümde tanımlanacaktır.

### 3.3. Sınır Koşullarının Fiziksel Yorumu

$Ox_1x_2$  düzleminde  $\bar{\Omega} = \{(x_1, x_2): 0 \leq x_i \leq l_i, i = 1, 2\}$  dikdörtgenel bölgesini dolduran bir levha ele alınsın ve bu levhanın  $x_1=0$  da sert bağlandığı varsayılınsın. Milin sınırdaki bağlanma yöntemi ve sertliği göz önüne alınmadan levhanın enerjisi,

$$W = \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}} \left( \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + 2\sigma_{xy}\varepsilon_{xy}) dx_3 \right) dx_1 dx_2 \quad (3.77)$$

formülü ile tanımlanır. Eşitlik (3.14) ve (3.22) gerilme tensörü ifadeleri Denklem (3.77)'de yazıldığında;

$$D = Eh^3 / (12(1 - \nu^2)) \quad (3.78)$$

sabiti elastik levhanın silindirik sertlik katsayısı olmak üzere,

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} D \left\{ (\Delta w)^2 - 2(1 - \nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] \right\} dx_1 dx_2 \quad (3.79)$$

şeklinde yazılır.

Levhanın  $x_1=0$  kenarı herhangi bir yöntem ile sert bağlanırsa enerjisi,

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} \left\{ D(\Delta w)^2 - 2(1 - \nu) D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] \right\} dx_1 dx_2 \\ + \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \left\{ \alpha \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + \beta w^2 \right\}_{x_1=0} dx_2 \quad (3.80)$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $\alpha$ ,  $x_1=0$  sınırındaki menteşenin,  $\beta$  ise bu sınırdaki dayanağın sertlik katsayısıdır.

Levhanın potansiyel enerjisini tanımlayan,

$$I(w) = W - \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} q(x)w(x)dx_1dx_2 \quad (3.81)$$

fonksiyonelinin birinci Gateaux türevi hesaplanıp sifıra eşitlenirse,

$$\begin{aligned} \delta I(w) &= \frac{d}{dt} [I(w + tv)]_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} D \left[ (\Delta(w + tv))^2 - 2(1 - \nu) \left( \frac{\partial^2(w + tv)}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2(w + tv)}{\partial x_2^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left( \frac{\partial^2(w + tv)}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \left[ \alpha \left( \frac{\partial(w + tv)}{\partial x_1} \right)^2 + \beta(w + tv)^2 \right]_{x_1=0} dx_2 \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} q(x)(w + tv) dx_1 dx_2 \right\}_{t=0} \quad (3.82) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} D \left[ \left( \frac{\partial^2(w + tv)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(w + tv)}{\partial x_2^2} \right) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2(w + tv)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2(w + tv)}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \frac{\partial^2(w + tv)}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right] dx_1 dx_2 + \int_0^{l_2} \left[ \alpha \frac{\partial(w + tv)}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \beta(w + tv)v \right]_{x_1=0} dx_2 \\ &\quad \left. - \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} q(x)v dx_1 dx_2 \right\}_{t=0} \quad (3.83) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} D \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) - (1-v) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right] \\
&dx_1 dx_2 + \int_0^{l_2} \left[ \alpha \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \beta wv \right]_{x_1=0} dx_2 - \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} q(x)v dx_1 dx_2 = 0 \quad (3.84)
\end{aligned}$$

Buradan ise, Fonksiyonel (3.81)'in Gateaux türevi için,

$\delta I(w) =$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{l_2} \int_0^{l_1} D \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) + 2(1-v) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right] dx_1 dx_2 \\
&+ \int_0^{l_2} \left[ \alpha \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \beta wv \right]_{x_1=0} dx_2 - \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} q(x)v dx_1 dx_2 = 0 \quad (3.85)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Denklem (3.85)'e kısmi integralleme formülü uygulandığında,

$$\begin{aligned}
\delta I = \int_0^{l_2} \left\{ - \left[ D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial v}{\partial x_1} \right. \right. \\
+ \left( \frac{\partial}{\partial x_1} D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x_2} D(1-v) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) v \left. \right] + \alpha \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} \\
+ \beta wv \left. \right\}_{x_1=0} dx_2 \\
+ \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \right) v \right. \\
+ \left. \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial x_1} D(1-v) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \frac{\partial v}{\partial x_2} \right] dx_1 dx_2 \\
- \int_0^{l_2} \int_0^{l_1} q(x)v dx_1 dx_2 = 0 \quad (3.86)
\end{aligned}$$

olur. Buradan da yalnız  $x_1=0$  kenarına karşılık gelen,

$$\int_0^{l_2} \left\{ - \left[ D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial v}{\partial x_1} + \left( \frac{\partial}{\partial x_1} D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x_2} (1 - \nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) v \right] + \alpha \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \beta w v \right\}_{x_1=0} dx_2 \quad (3.87)$$

integralinde, ardışık olarak  $\partial v / \partial x_1$  ve  $v$  için katsayılar sıfıra eşitlenerek, aranan sınır koşulları genel durumda aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\alpha \frac{\partial w}{\partial x_1} = D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \quad (3.88)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x_2} (1 - \nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = - \beta w \quad (3.89)$$

Eşitlik (3.88) ve (3.89)'daki  $\alpha$  ve  $\beta$  sabitlerinin farklı değerleri, farklı fiziksel durumlara karşılık gelir.  $x_1=0$  noktasında tanımlanan bazı sınır koşulları aşağıdaki şekilde özetlenebilir;

1.  $\alpha = \beta = \infty$ . Sert Kenetlenme Sınır Koşulu (Clamped Boundary Condition),

$$w(x) = \frac{\partial w}{\partial n}(x) = 0 \quad , \quad x = (x_1, x_2) \in \Gamma \quad (3.90)$$

2.  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \infty$ . Menteşe Sınır Koşulu (Simply Supported Boundary Condition),

$$w(x) = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) = 0 \quad , \quad x = (x_1, x_2) \in \Gamma \quad (3.91)$$

$$w(x) = \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0 \quad x = (x_1, x_2) \in \Gamma \quad (3.92)$$

3.  $\alpha = \beta = 0$  Serbest Uçlar Sınır Koşulu (Free Boundary Condition),



$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) = 0 \quad (3.93)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) + 2 \frac{\partial}{\partial x_2} (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \Gamma \quad (3.94)$$

burada  $n$ ,  $\partial\bar{\Omega} = \Gamma$  sınırında birim dış normali temsil etmektedir.



#### 4. PROBLEMİN MONOTON OPERATÖRLER TEORİSİ KAPSAMINDA İNCELENMESİ

Lineer olmayan,

$$Aw \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left[ g(\xi^2(w)) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \right] + 2(1-v) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[ g(\xi^2(w)) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[ g(\xi^2(w)) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \right] = F(x), \quad x \in \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \quad (4.1)$$

denklemi (3.90) sıkı kenetlenme, (3.91) ya da (3.92) menteşe ve (3.93)-(3.94) serbest uçlar sınır koşullarından biriyle birlikte ele alındığında elastoplastik levhanın eğilmesini temsil eden bir sınır değer problemini oluşturur. Bu kısımda (4.1), (3.90) sınır değer problemi ele alınacaktır. Burada  $g(\xi^2(w))$  katsayısı  $w$  fonksiyonunun türevlerine bağlı olduğu için (4.1) operatörü lineer olmayan bir operatördür.

Pratik problemlerin çözümünde klasik çözüm kavramı yetersiz kaldığından, problemin verildiği  $\bar{\Omega}$  bölgesinde Denklem (4.1)'i sağlayan, aynı zamanda da  $\Gamma$  sınırında (3.90) koşulunu sağlayan zayıf (genelleşmiş) çözümü monoton potansiyel operatörler yardımı ile incelenmiştir (Hasanov, 2010).

$J_2$ -deformasyon teorisinden bilinen,  $g(\xi^2(w))$  fonksiyonunun sağladığı (3.42) koşulları lineer olmayan Denklem (4.1)'in zayıf çözümü olan  $w \in H^2_0(\bar{\Omega})$ 'nın varlığını ve tekliğini göstermenin yanında  $H^2_0(\bar{\Omega})$  uzayında lineerleştirilmiş problemin çözümünün yakınsaklığını göstermek için de yeterlidir.

$H^2_0(\bar{\Omega})$ , parçalı düzgün  $\Gamma$  sınırına sahip  $\bar{\Omega}$  üzerinde tanımlı fonksiyonların (Adams,1975) Sobolev uzayı olsun

$$H^0(\bar{\Omega}) = \left\{ w \in H^2(\Omega) : w(x) = \frac{\partial w(x)}{\partial n} = 0, x \in \Gamma \right\} \quad (4.2)$$

Denklem (4.1)'in her iki tarafı  $v \in H_0^2(\Omega)$  ile çarpılıp, Denklem (3.47)-(3.70)'deki benzer işlemler yapılarak  $\bar{\Omega}$  üzerinde integrallenirse ve sınırlarda Koşul (3.90) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \int_{\bar{\Omega}} g(\xi^2(w)) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) \right] dx \\ &= \int_{\bar{\Omega}} F(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H^0(\bar{\Omega}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

özdeşliği elde edilir.

Burada,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) = H(w,v) \quad (4.4)$$

bilineer formu tanımlanırsa Özdeşlik (4.3),

$$\int_{\bar{\Omega}} g(\xi^2(w)) H(w,v) dx = \int_{\bar{\Omega}} F(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H^0(\bar{\Omega}) \quad (4.5)$$

şeklinde yazılabilir.

Her  $v \in H^0(\bar{\Omega})$  için Özdeşlik (4.3)'ü sağlayan  $w \in H^0(\bar{\Omega})$  fonksiyonu, Problem (4.1)'in bir zayıf çözümdür. Yani zayıf çözüm aşağıdaki şekilde tanımlanabilir,

$$\langle Aw, v \rangle = \int_{\bar{\Omega}} g(\xi^2(w)) H(w,v) dx, \quad \forall v \in H^0(\bar{\Omega}) \quad (4.6)$$

Yukarıdaki şekilde tanımlanan lineer olmayan A operatörünün potansiyeli,

$$J(w) = \frac{1}{2} \int_{\bar{\Omega}} \left\{ \int_0^{\xi^2(w)} g(\tau) d\tau \right\} dx \quad (4.7)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer,

$$I(w) = \int_{\bar{\Omega}} F(x)w(x)dx, \quad w \in H^0_2(\bar{\Omega}) \quad (4.8)$$

integrali de ele alınırsa Problem (4.1), (3.90)'nın potansiyeli,

$$P(w) = J(w) - I(w) \quad (4.9)$$

fonksiyoneli ile tanımlanmış olacaktır.

Yukarıda tanımlanan  $J(w)$  ve  $P(w)$  fonksiyonellerinin sırasıyla lineer olmayan  $A$  operatörünün ve lineer olmayan Problem (4.1)-(3.90)'ın potansiyelleridir.

Tanım 4.1.  $J(u)$  fonksiyoneli  $H$  Hilbert uzayı üzerinden tanımlanmış bir fonksiyonel olsun:  $J:H \rightarrow \mathbb{R}$ .  $u, v \in H, t \in \mathbb{R}$  olsun.

$$\frac{d}{dt} J(u + tv) \Big|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [J(u+tv) - J(u)] \quad (4.10)$$

limiti varsa, bu limite  $J(u)$  fonksiyonelinin  $u$  da  $v$  doğrultusunda Gateaux türevi (veya zayıf türevi) denir.

Lemma 4.1. (4.7) ile tanımlanan  $J(w)$  fonksiyoneli, (4.1) ile tanımlanan  $A$  operatörünün potansiyelidir.

İspat:  $J(w)$  fonksiyonelinin  $w \in H^0_2(\bar{\Omega})$  da ve  $v \in H^0_2(\bar{\Omega})$  üzerinde birinci Gateaux türevi,

$$\langle J'(w), v \rangle = \frac{d}{dt} J(w+tv) \Big|_{t=0}, \quad w, v \in H^0_2(\bar{\Omega})$$

hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
\langle J'(w), v \rangle &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{\xi^2(w+tv)} g(\tau) d\tau \right] \Big|_{t=0} \right\} dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ g(\xi^2(w+tv)) \frac{d}{dt} \xi^2(w+tv) \right\} \Big|_{t=0} dx
\end{aligned} \tag{4.11}$$

elde edilir. Öte yandan,

$$\xi^2(w) = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \tag{4.12}$$

eşitliğine dayanarak,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} [\xi^2(w+tv)] \Big|_{t=0} = \\
&= 2 \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) \right]
\end{aligned}$$

yazılır. Buradan, Eşitlik (4.4) hesaba katılırsa,

$$\frac{d}{dt} [\xi^2(w + tv)] \Big|_{t=0} = 2H(w, v) \tag{4.13}$$

olur. Böylece,

$$\langle J'(w), v \rangle = \int_{\Omega} g(\xi^2(w)) H(w, v) dx \tag{4.14}$$

bulunur. Tanım (4.6) göz önünde bulundurulursa ispat tamamlanmış olur.

Dolayısıyla A operatörü, (4.7) ile tanımlanan J(w) potansiyeli ile bir potansiyel operatördür. Bundan sonraki kısımda lineer olmayan A operatörünün monotonluğu analiz edilecektir (Hasanov, 2007). Bu amaçla  $H^2(\bar{\Omega})$  uzayında enerji normu olarak adlandırılan,

$$\|v\|_E = \left\{ \int_{\Omega} H(v, v) dx \right\}^{1/2} \tag{4.15}$$

normu ve

$$\|v\|_2 = \left\{ \int_{\bar{\Omega}} \left[ \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] dx \right\}^{1/2} \quad (4.16)$$

seminormu karşılaştırılacaktır.

Lemma 4.2. Eğer  $v \in H^0_2(\bar{\Omega})$  ise,

$$\|v\|_2^2 \leq \|v\|_E^2 \leq 2\|v\|_2^2, \quad (4.17)$$

yani, enerji normu  $\|\cdot\|_E$  ve  $\|\cdot\|_2$  seminormu denktir.

İspat. Öncelikle belirtmelidir ki, her  $v \in H^0_2(\bar{\Omega})$  için,

$$\int_{\bar{\Omega}} \left[ \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right] dx = 0 \quad (4.18)$$

eşitliği geçerlidir (Mikhlin, 1964). Daha sonra, Eşitlik (4.4) hesaba katılırsa,

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\Omega}} H(v,v) dx &= \int_{\bar{\Omega}} \left[ \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right] dx = \\ &= \int_{\bar{\Omega}} \left[ \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] dx \\ &\geq \int_{\bar{\Omega}} \left[ \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] dx = \|v\|_2^2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

elde edilir. Öte yandan,

$$\int_{\bar{\Omega}} H(v,v) dx \leq 2 \int_{\bar{\Omega}} \left[ \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] dx = 2\|v\|_2^2 \quad (4.20)$$

Bu iki değerlendirme ispatı tamamlar.

$H^0(\bar{\Omega})$  uzayında  $\|\cdot\|_E$  ve  $\|\cdot\|_2$  normlarının denkleği kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir (Ciarlet, 1978).

Sonuç 4.1. Eğer  $v \in H^0(\bar{\Omega})$  ise, o halde  $\exists \alpha_1, \alpha_2 > 0$ ,

$$\alpha_1 \|v\|_2 \leq \|v\|_E \leq \alpha_2 \|v\|_2 \quad (4.21)$$

yani  $H^2$ -normu ve enerji normu denk normlardır. Bu sonuç ayrıca enerji normu için aşağıdaki üst değerlendirmenin yapılmasına izin verir.

Sonuç 4.2. Eğer  $u, v \in H^0(\bar{\Omega})$  ise o halde,

$$\int_{\bar{\Omega}} |H(w, v)| dx \leq \alpha_2^2 \|w\|_2 \cdot \|v\|_2 \quad (4.22)$$

İspat. Schwartz eşitsizliği aşağıdaki formda kullanılırsa;

$$(H(w, v))^2 \leq H(w, w) \cdot H(v, v) \quad (4.23)$$

Eşitsizlik (4.21) ve (4.23)'ü anımsayarak,

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\Omega}} |H(w, v)| dx &\leq \int_{\bar{\Omega}} (H(w, w))^{1/2} (H(v, v))^{1/2} \leq \left( \int_{\bar{\Omega}} |H(w, w)| \right)^{1/2} \left( \int_{\bar{\Omega}} |H(v, v)| \right)^{1/2} \\ &\leq \alpha_2^2 \|w\|_2 \cdot \|v\|_2 \end{aligned} \quad (4.24)$$

olarak değerlendirilebilir.

Yukarıdaki yardımcı sonuçlar kullanılarak lineer olmayan eğme operatörü  $A$ 'nın güçlü monoton olduğu ispatlanabilir.

Lemma 4.3. Eğer  $g = g(\xi^2)$  plastiklik fonksiyonu İfade (3.42)'deki (i)-(iv) koşullarını sağlarsa, o halde İfade (4.1) ile tanımlanan lineer olmayan  $A$  operatörü  $H^0(\bar{\Omega})$ , 'da güçlü monotondur, yani,

$$\forall w, v \in H^0(\bar{\Omega}), \langle Aw - Av, w - v \rangle \geq \gamma_1 \|w - v\|_2^2, \quad \gamma_1 > 0 \quad (4.25)$$

İspat. Eşitlik (4.7) ile tanımlanan  $J(w)$  fonksiyonelinin ikinci Gateaux türevinin hesaplanması gerekmektedir;

$$\langle J''(w), v, u \rangle = \frac{d}{dt} \langle J'(w+tu), v \rangle|_{t=0}$$

Eşitlik (4.14) göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle J'(w+tu), v \rangle|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\bar{\Omega}} g(\xi^2(w+tu)) H(w+tu, v) dx \right\}_{t=0} \\ &= \left\{ \int_{\bar{\Omega}} \left[ 2g'(\xi^2(w+tu)) \frac{d}{dt} [\xi^2(w+tu)] H(w+tu, v) + g(\xi^2(w+tu)) H(u, v) \right] dx \right\}_{t=0} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Denklem (4.26)'da İfade(4.13) göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle J'(w+tu), v \rangle|_{t=0} &= \\ &= \left\{ \int_{\bar{\Omega}} \left[ 2g'(\xi^2(w)) H(w, u) H(w, v) + g(\xi^2(w)) H(u, v) \right] dx \right\}_{t=0} \end{aligned} \quad (4.27)$$

olur. Eşitlik (4.27)'de  $t=0$  yazılırsa sonuç olarak,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle J'(w+tu), v \rangle|_{t=0} &= \\ &= \int_{\bar{\Omega}} \left[ 2g'(\xi^2(w)) H(w, u) H(w, v) + g(\xi^2(w)) H(u, v) \right] dx \end{aligned} \quad (4.28)$$

elde edilir.

$u=v$  için ( $H(v, v) = \xi^2(v)$ ),

$$\langle J''(w), v, v \rangle = \int_{\bar{\Omega}} \left[ g(\xi^2(w)) \xi^2(v) + 2g'(\xi^2(w)) H^2(w, v) \right] dx \quad (4.29)$$

olur.



Eşitsizlik (4.23) ve İfade (3.42) deki üçüncü koşul kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \langle J''(w), v, v \rangle &\geq \int_{\Omega} \left[ g(\xi^2(w)) \xi^2(v) + 2g'(\xi^2(w)) \xi^2(w) \xi^2(v) \right] dx \\ &= \int_{\Omega} \left[ g(\xi^2(w)) + 2g'(\xi^2(w)) \xi^2(w) \right] \xi^2(v) dx \end{aligned} \quad (4.30)$$

elde edilir. Sağ tarafta İfade (3.42)'deki ikinci koşul ve normların denkliği kullanılarak,

$$\langle J''(w), v, v \rangle \geq c_2 \int_{\Omega} \xi^2(v) dx = c_2 \int_{\Omega} H(v, v) dx \geq \alpha_1 c_2 \|v\|_2^2 \quad (4.31)$$

eşitsizliği gösterilebilir.  $J(w)$  fonksiyonelinin ikinci Gateaux türevinin pozitifliği  $A$  potansiyel operatörünün güçlü monoton olduğu anlamına gelir.

Sonuç 4.3.  $\Theta \in H^0_2(\bar{\Omega})$  yutan eleman olmak üzere,  $A\Theta = \Theta$  olduğundan, lineer olmayan  $A$  operatörü için (4.25) güçlü monotonluk koşulu aynı zamanda operatörün koersivitesi anlamına da gelir, yani,  $\langle Av, v \rangle \geq \gamma_1 \|v\|_2^2$ ,  $\gamma_1 > 0$ .

Teorem 4.1. (Browder-Minty)  $X$  reel, ayrılabilir ve refleksiv Banach uzayı,  $X^*$  uzayı da  $X$  uzayının dual uzayı olmak üzere,  $Au=b$ ,  $u \in X$  operatör denklemi verilsin. Eğer  $A: X \rightarrow X$  operatörü monoton, koersiv ve h-sürekli ise bu takdirde aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i)  $\forall b \in X^*$  için  $Au=b$ ,  $u \in X$  operatör denkleminin çözümü vardır. Ayrıca, bu operatör denkleminin çözüm kümesi sınırlı, konveks ve kapalı bir kümedir.

(ii)  $A: X \rightarrow X^*$  operatörü kesin monoton ise,  $Au=b$ ,  $u \in X$  operatör denkleminin  $X$  de tek bir çözümü vardır.

(iii)  $A: X \rightarrow X^*$  operatörü kesin monoton ise bu takdirde  $A^{-1}: X^* \rightarrow X$  ters operatörü mevcuttur. Ayrıca bu ters operatör kesin monoton, d-sürekli ve sınırlıdır.

(iv)  $A: X \rightarrow X^*$  operatörü düzgün monoton ise  $A^{-1}$  ters operatörü süreklidir; eğer güçlü monoton ise  $A^{-1}$  operatörü Lipschitz süreklidir.

Böylelikle,  $A$  potansiyel operatörü, radially continuous, güçlü monoton ve koersivdir. O halde, Browder-Minty teorem yardımıyla aşağıdaki teoreme ulaşılır:

Teorem 4.2. (3.42) koşulları sağlanırsa, lineer olmayan Problem (4.1),  $H^0_2(\bar{\Omega})$  uzayında Özdeşlik (4.3) ile tanımlanan tek bir çözüme sahiptir.

Varyasyonel problem (4.3)'ü lineerleştirmek amacıyla,

$$A(w^{(n-1)}, v) = I(v), \quad \forall v \in H, \quad n=1,2,3,\dots \quad (4.32)$$

soyut iterasyon şeması uygulanır ve

$$\int_{\bar{\Omega}} g\left(\xi^2(w^{(n-1)})\right) H(w^{(n)}, v) dx = \int_{\bar{\Omega}} F(x)v(x) dx, \quad \forall v \in H^0_2(\bar{\Omega}), \quad n=1,2,3,\dots \quad (4.33)$$

elde edilir (Hasanov, 2007).

Burada,  $w^{(0)} \in H^0_2(\bar{\Omega})$  başlangıç yaklaşımıdır. Lineerleştirilmiş probleminin (4.33)'ün çözümü  $w^{(n)} \in H^0_2(\bar{\Omega})$ , (4.3) varyasyonel probleminin yaklaşık bir çözümü olarak tanımlanır.

## 5. PROBLEMİN SONLU FARK DENKLEMİNİN ELDE EDİLMESİ

### 5.1. Sonlu Fark Operatörleri

Diferansiyel veya kısmi türevli diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerinin yaklaşık yöntemlerle çözümü, verilen probleme karşılık gelen lineer cebirsel denklem sisteminin çözümü problemine dönüşür. Bu lineer cebirsel denklem sistemi genel olarak diferansiyel denklemdeki türevlerin yaklaşık ifadelerinin yerlerine yazılması sonucunda elde edilir. Diferansiyel operatörlerin yerine sonlu fark ifadeleri yazılarak elde edilen sisteme sonlu fark ifadesi denir (Samarskii and Andreev, 1976).

Tanım 5.1.  $\overline{\omega}_h = \{x_i \mid x_{i+1} = x_i + h_i, x_1 = a, x_n = b, i = \overline{1, n-1}\}$ ,

$$\sum_{i=1}^{n-1} h_i = b - a \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlanan  $\overline{\omega}_h$  kafesine eşit adımlı olmayan kafes denir.

Tanım 5.2. Eğer  $h_i = h = \text{sabit}$  ise, o halde

$$\overline{\omega}_h = \left\{ x_i \mid x_{i+1} = x_i + h, x_1 = a, x_n = b, i = \overline{1, n-1}, h = \frac{b-a}{n-1} \right\} \quad (5.2)$$

şeklinde tanımlanan kafeslere eşit adımlı kafes denir.

$[a, b]$  aralığında tanımlı  $y(x)$  fonksiyonunun  $x_i \in \overline{\omega}_h$ ,  $i = \overline{1, n}$  noktalarında  $y_i = y(x_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$  değerlerinden yararlanarak,  $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$  ileri sonlu farklar ve  $\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$  geri sonlu farkları tanımlanabilir.

Tanım 5.3. İleri ve geri sonlu farkların aritmetik ortalaması olan,

$$\delta y_i = \frac{1}{2} (\Delta y_i + \nabla y_i) = \frac{1}{2} (y_{i+1} - y_{i-1}) \quad (5.3)$$

ifadesine merkezi sonlu fark denir. Bellidir ki  $x_0$  noktası civarında  $(n+1)$ . mertebeye dek sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonların bu nokta civarındaki istenilen noktada Taylor serisi yazılabilir;

$$u(x)=u(x_0)+\frac{u'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{u''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{u'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{u^{iv}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4+\dots+\frac{u^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{u^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (5.4)$$

Eşitlik (5.4)'te  $x_0=x_i$  yazılırsa  $u(x)$  fonksiyonunun  $x_i$  noktasında Taylor serisinin açılımı elde edilir. Elde edilen ifadeye  $x=x_{i-1}$  ve  $x=x_{i+1}$  yazılırsa fonksiyonun  $u_{i-1}=u(x_{i-1})$  ve  $u_{i+1}=u(x_{i+1})$  değerleri elde edilir. Tanımlanan kafesin eşit adımlı olduğu varsayılırsa yani  $|x_{i+1}-x_i|=|x_i-x_{i-1}|=h$  yazılırsa Eşitlik (5.4)'ten aşağıdakiler elde edilir.  $x=x_{i+1}$  yazılırsa,

$$u(x_{i+1})=u(x_i)+\frac{u'(x_i)}{1!}h+\frac{u''(x_i)}{2!}h^2+\frac{u'''(x_i)}{3!}h^3+\frac{u^{iv}(x_i)}{4!}h^4+\frac{u^v(\xi)}{5!}h^5 \quad (5.5)$$

(Bu ifadedeki son terim  $(u^v(\xi)/5!)h^5=O(h^5)$  sonsuz küçülen fonksiyondur ve  $h$ 'nin 5. derecesi hızında 0'a giden fonksiyondur ve

$$u(x_{i-1})=u(x_i)-\frac{u'(x_i)}{1!}h+\frac{u''(x_i)}{2!}h^2-\frac{u'''(x_i)}{3!}h^3+\frac{u^{iv}(x_i)}{4!}h^4-O(h^5) \quad (5.6)$$

Eşitlik (5.5) ve (5.6)'nın her ikisinde  $u(x_i)$  değeri sol tarafa geçirilip eşitliğin her iki tarafı  $h$  ile bölünürse sonuçta  $u_{i+1}=u(x_{i+1})$  ve  $u_{i-1}=u(x_{i-1})$  olduğundan , her hangi sürekli diferansiyellenebilir  $u(x)$  fonksiyonunun  $x_i$  noktası civarında Taylor serisine açılımından yararlanılarak birinci mertebeden yaklaşık türevler için sonlu fark ifadeleri,

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x_i} \sim u_{x,i}=\frac{u_{i+1}-u_i}{h}+O(h)=\frac{\Delta u_i}{h}+O(h) \quad (5.7)$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x_i} \sim u_{\bar{x},i}=\frac{u_i-u_{i-1}}{h}+O(h)=\frac{\nabla u_i}{h}+O(h) \quad (5.8)$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x_i} \sim u_{\dot{x},i} = \frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h} + O(h^2) = \frac{\delta u_i}{h} + O(h^2) \quad (5.9)$$

şeklinde yazılabilir. Elde edilen İfade (5.7) ileri türevin, İfade (5.8) geri türevin, İfade (5.9) ise merkezi türevin ifadesidir. Benzer şekilde 2. mertebeden türev için sonlu fark ifadesi,

$$\frac{d^2u}{dx^2}_{x_i} \sim u_{\ddot{x},i} = \frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2} + O(h^2) = \frac{\Delta(\nabla u_i)}{h^2} + O(h^2) = \frac{\nabla(\Delta u_i)}{h^2} + O(h^2) \quad (5.10)$$

şeklinde elde edilir. Fakat yüksek mertebeden türev ifadelerinin Taylor serisinin yardımı ile elde edilmesinin belli zorlukları vardır. Aynı zamanda sonlu fark operatörlerinin yardımı ile bu ifadeler elde edilebilse bile, bu formüllerin hatasının belirlenmesi zor olur. Bu nedenle istenilen mertebeden türevin, istenilen hata ile yaklaşık ifadeleri Lagrange enterpolasyon polinomunun yardımı ile elde edilebilir.

Biharmonik denklemin sonlu fark yaklaşımı yazıldığı zaman bölgenin iç noktalarında hatanın  $O(h_1^2+h_2^2)$  olduğu bellidir. Sınır koşullarının da hatasının aynı mertebeden olmasını sağlamak amacı ile aralığın uç noktalarında (sınırlarda) gereken sayısal ifadelerin elde edilmesi gerekmektedir.

## 5.2. Lagrange Enterpolasyon Polinomunun Yardımıyla Türev Formüllerinin Elde Edilmesi

$[a,b]$  aralığında tanımlı  $f(x)$  fonksiyonunun  $a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  şeklinde belirlenen  $x_i$  noktalarında  $f_i = f(x_i)$ ,  $i = \overline{0,n}$  değerleri verildiğinde bu fonksiyona karşılık gelen ve  $f(x_i) = L_n(x_i)$  koşullarını sağlayan  $n$ . dereceden  $L_n(x)$  polinomu yazılabilir;

$$f(x) = L_n(x) + R_n(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x-x_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i-x_j)} f(x_i) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x-x_k) \quad (5.11)$$

Burada  $\xi \in [x_0, x_n]$ . O halde  $f(x)$  fonksiyonunun  $m$ . mertebeden türevi için,

$$f^{(m)}(x) = L_n^{(m)}(x) + R_n^{(m)}(x) \quad (5.12)$$

eşitliği sağlanır. Örneğin, 4 nokta için 3. dereceden Lagrange polinomu (5.11) ( $n=3$ ),

$$\begin{aligned} f(x) = L_3(x) + R_3(x) = & \frac{(-1)^3}{3!h^3} (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)f_0 + \frac{(-1)^2}{2h^3} (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)f_1 \\ & + \frac{(-1)}{4h^3} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)f_2 + \frac{1}{3!h^4} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f_3 + R_3(x) \end{aligned} \quad (5.13)$$

şekline dönüşür. Buradaki,

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \quad (5.14)$$

3. dereceden (5.13) Lagrange polinomunun hatasıdır. Elde edilen fonksiyon (5.13)'ün birinci mertebeden türevi,

$$\begin{aligned} f'(x) = & -\frac{f_0}{6h^3} [(x-x_2)(x-x_3) + (x-x_1)(x-x_3) + (x-x_1)(x-x_2)] \\ & + \frac{f_1}{2h^3} [(x-x_2)(x-x_3) + (x-x_0)(x-x_3) + (x-x_0)(x-x_2)] - \\ & \frac{f_2}{4h^3} [(x-x_1)(x-x_3) + (x-x_0)(x-x_3) + (x-x_0)(x-x_1)] \\ & + \frac{f_3}{6h^3} [(x-x_1)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_1)] + R_3'(x) \end{aligned} \quad (5.15)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $\theta \in [0,1]$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} R_3'(x) = & \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} [(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) + (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3) \\ & + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)] \\ & + \theta \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \end{aligned} \quad (5.16)$$

şeklindedir. Yukarıda elde edilen Eşitlik (5.15), (5.16)'da  $x$  yerine sırasıyla  $x_0, x_1, x_2, x_3$  yazarak  $f(x)$  fonksiyonunun bu noktalardaki birinci mertebeden türevlerinin hesaplanması için aşağıdaki formüller elde edilir;

$$\begin{aligned} f'_0 &= \frac{1}{6h} [-11f_0 + 18f_1 - 9f_2 + 2f_3] - \frac{h^3}{4} f^{(4)}(\xi) \\ f'_3 &= \frac{1}{6h} [-2f_0 + 9f_1 - 18f_2 + 11f_3] + \frac{h^3}{4} f^{(4)}(\xi) \end{aligned} \quad (5.17)$$

ifadelerinden görüldüğü gibi 3. dereceden polinomlardan yararlanarak elde edilen birinci mertebeden türev formüllerinin hatası  $O(h^3)$ 'tür. Eğer polinomun 2. mertebeden türevleri de hesaplanarak elde edilen ifadelerinde  $x$  yerine sırasıyla  $x_i, i=0,3$  yazıldığında  $f(x)$  fonksiyonunun bu noktalardaki ikinci mertebeden türevlerinin hesaplanması için  $O(h^2)$  hatası ile sayısal türev formülleri elde edilir;

$$\begin{aligned} f''_0 &= \frac{1}{h^2} [2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3] + \frac{11}{12} h^2 f^{(4)}(\xi) \\ f''_3 &= \frac{1}{h^2} [-f_0 + 4f_1 - 5f_2 + 2f_3] + \frac{11}{12} h^2 f^{(4)}(\xi) \end{aligned} \quad (5.18)$$

### 5.3. Levhanın Denge Denkleminin Sonlu Fark Yaklaşımı

Bir kısmi türevli diferansiyel denklemin sayısal çözümü bulunurken , sürekli denklemin ayrık, cebirsel bir denklemle yer değiştirdiği bir ayrıklaştırma yöntemi uygulanır. Ayrıklaştırma yöntemi; modeli ifade eden kısmi türevli diferansiyel denklemdaki türevlerin yaklaşık ifadelerini içerir. Bu yaklaşık türev ifadeleri, fonksiyonun, kafesin ayrık noktalarındaki değerlerinin farkları şeklinde hesaplanır. Verilen sürekli problemin ayrıklaştırılması, kaçınılmaz surette türevlerin hesaplanmasında ve bunun sonucu olarak da yaklaşık çözümde bir hata oluşmasına neden olur.

Genel olarak, verilen kısmi türevli diferansiyel denklemle başlanır ve bir sonlu fark denklemini elde etmek için bir ayrıklaştırma yöntemi kullanılır. Elde edilen sonlu fark denklemini, bilinmeyen fonksiyonun kafesin noktalarında aldığı değerler arasındaki

lineer bağıntıdır. Daha sonra, türevin hesaplandığı düğüm noktası civarındaki Taylor seri açılımının yardımıyla, söz konusu kısmi türevli denklem

KTDD = Sonlu Fark Denklemi + Kalan Terim

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada kalan terim, kesme hatasını ifade etmektedir. Kesme hatası, orijinal kısmi türevli diferansiyel denklem ve onun sonlu fark yaklaşımı arasındaki farktır. Kesme hatası, Taylor seri açılımı cinsinden ifade edilir ve onun en küçük dereceli terimi orijinal kısmi türevli diferansiyel denkleme uygulanan ayrıklaştırma yönteminin doğruluk derecesini verir (Arad ve diğ., 1997). Uygulanan metodun doğruluğunu göstermek için, sayısal sonuçlar kesin çözümlerle karşılaştırılır.

Elastoplastik levhanın tanımlandığı  $\bar{\Omega}$  bölgesinde ,

$\bar{\omega}_\alpha = \{x_\alpha = x_\alpha^{(i_\alpha)} \mid x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}\}, \alpha=1,2$  olmak üzere  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$  kafesi tanımlansın.

Elastoplastik levhanın eğilmesini temsil eden lineer olmayan biharmonik Denklem (4.1)'in farklı sınır koşullarında sayısal çözümünü bulmak için, Denklem (4.1) lineerleştirilerek aşağıdaki şekle dönüştürülür (Hasanoğlu, 2007);

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left[ g^{(n-1)}(x) \left( \frac{\partial^2 w^{(n)}}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w^{(n)}}{\partial x_2^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[ g^{(n-1)}(x) \frac{\partial^2 w^{(n)}}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[ g^{(n-1)}(x) \left( \frac{\partial^2 w^{(n)}}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w^{(n)}}{\partial x_1^2} \right) \right] = F(x), x \in \Omega \end{aligned} \quad (5.19)$$

Burada  $g^{(n-1)}(x) = g \left( \xi^2 \left( w^{(n-1)}(x) \right) \right)$  ve kısmi türevlerin,

$$y_{\bar{x}_1 x_1} = \frac{y(x_1^{i+1}, x_2^j) - 2y(x_1^i, x_2^j) + y(x_1^{i-1}, x_2^j)}{h_1^2} \quad (5.20)$$

$$y_{\bar{x}_2 x_2} = \frac{y(x_1^i, x_2^{j+1}) - 2y(x_1^i, x_2^j) + y(x_1^i, x_2^{j-1})}{h_2^2} \quad (5.21)$$



$$y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} = \frac{y(x_1^i, x_2^j) - y(x_1^{i-1}, x_2^j) + y(x_1^i, x_2^{j-1}) + y(x_1^{i-1}, x_2^{j-1})}{h_1 h_2} \quad (5.22)$$

$$y_{\bar{x}_1 x_2} = \frac{y(x_1^i, x_2^{j+1}) - y(x_1^{i-1}, x_2^{j+1}) + y(x_1^i, x_2^j) + y(x_1^{i-1}, x_2^j)}{h_1 h_2} \quad (5.23)$$

$$y_{x_1 \bar{x}_2} = \frac{y(x_1^{i+1}, x_2^j) - y(x_1^i, x_2^j) + y(x_1^{i+1}, x_2^{j-1}) + y(x_1^i, x_2^{j-1})}{h_1 h_2} \quad (5.24)$$

$$y_{x_1 x_2} = \frac{y(x_1^{i+1}, x_2^{j+1}) - y(x_1^i, x_2^{j+1}) + y(x_1^{i+1}, x_2^j) + y(x_1^i, x_2^j)}{h_1 h_2} \quad (5.25)$$

ifadelerinden yararlanarak (Samarskii and Andreev, 1976), Lineerleştirilmiş Denklem (5.19)'un sonlu fark yaklaşımı;

$$\begin{aligned} & \left( g_h^{(n-1)}(\xi_h^2) \left( y_{\bar{x}_1 x_1}^{(n)} + v y_{\bar{x}_2 x_2}^{(n)} \right) \right)_{\bar{x}_1 x_1} + \left( g_h^{(n-1)}(\xi_h^2) \left( y_{\bar{x}_2 x_2}^{(n)} + v y_{\bar{x}_1 x_1}^{(n)} \right) \right)_{\bar{x}_2 x_2} \\ & + \frac{1}{4} \left\{ \left( g_h^{(n-1)}(\xi_h^2) y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}^{(n)} \right)_{x_1 x_2} + \left( g_h^{(n-1)}(\xi_h^2) y_{\bar{x}_1 x_2}^{(n)} \right)_{x_1 \bar{x}_2} \right\} \\ & + \frac{1}{4} \left\{ \left( g_h^{(n-1)}(\xi_h^2) y_{x_1 \bar{x}_2}^{(n)} \right)_{\bar{x}_1 x_2} + \left( g_h^{(n-1)}(\xi_h^2) y_{x_1 x_2}^{(n)} \right)_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \right\} = F(x_{ij}) \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$i = \overline{3, N_1 - 2}, \quad j = \overline{3, N_2 - 2}$$

şeklinde elde edilir.  $g_h^{(n-1)}(\xi_h^2)$  ve  $\xi_h(y)$  sırasıyla  $g(\xi^2(w(x)))$  ve  $\xi(w)$  'nın sonlu fark yaklaşımlarıdır.  $F(x_{ij}) = 3q(x_{ij})/h^3$ ,  $g_h^{(n-1)}(\xi_h^2) = g(\xi_h^2(y^{(n-1)}(x)))$  ve  $\xi_h^2(y) = y_{\bar{x}_1 x_1}^2 + y_{\bar{x}_2 x_2}^2 + 0.5(y_{\bar{x}_1 x_2}^2 + y_{x_1 \bar{x}_2}^2) + y_{\bar{x}_1 x_1} y_{\bar{x}_2 x_2}$  şeklindedir.

#### 5.4. Sınır Koşullarının Sonlu Fark Yaklaşımı

Problemin tanımlandığı  $\bar{\Omega} = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_i \leq l_i, i = 1, 2\}$  dikdörtgen bölgesi,

$$\Gamma_1 = \{(0, x_2) | 0 \leq x_2 \leq l_2\} \quad (5.27)$$

$$\Gamma_2 = \{(l_1, x_2) | 0 \leq x_2 \leq l_2\} \quad (5.28)$$

$$\Gamma_3 = \{(x_1, 0) | 0 \leq x_1 \leq l_1\} \quad (5.29)$$

$$\Gamma_4 = \{(x_1, l_2) | 0 \leq x_1 \leq l_1\} \quad (5.30)$$

sınırlarına sahiptir.  $\bar{\Omega}$  da tanımlı kafesin sınır noktalarında yukarıda elde edilen sınır koşullarının sonlu fark yaklaşımları aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

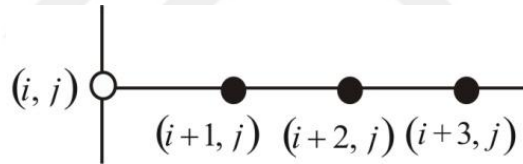
1)  $\Gamma_1$  sınırında sınır koşullarının sonlu fark yaklaşımları;

a) Sıkı kenetlenme koşulu,

$$w(x) = \frac{\partial w}{\partial x_1}(x) = 0$$

birinci mertebeden türev içerdiği için  $(i, j)$  noktasında türevin  $O(h_1^3)$  hatalı ifadelerden yararlanılabilir;

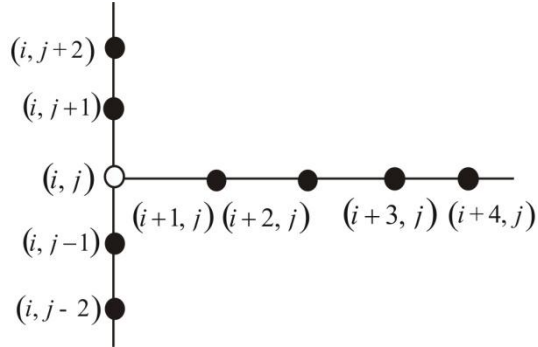
$$y_{1,j} = 0, \quad j = \overline{1, N_2} \quad (5.31)$$



Şekil 5.1.  $\Gamma_1$  sınırında sert kenetlenme koşulu için 4 noktalı kafes

$$-\frac{11}{6h_1} y_{i,j} + \frac{3}{h_1} y_{i+1,j} - \frac{3}{2h_1} y_{i+2,j} + \frac{1}{3h_1} y_{i+3,j} = 0, \quad i = 1, j = \overline{2, N_2 - 1}. \quad (5.32)$$

b) (3.91) menteşe koşulunun  $\Gamma_1$  sınırının  $(1, j)$  noktasındaki türevin sayısal ifadesi  $O(h_1^3 + h_2^3)$  hatası ile aşağıdaki şekilde yazılabilir:

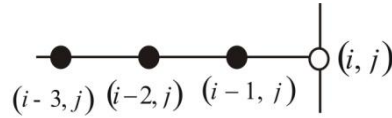


Şekil 5.2.  $\Gamma_1$  sınırında menteşe koşulu için 9 noktali kafes

$$y_{1,j} = 0, \quad j = \overline{1, N_2} \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{v}{12h_2^2}y_{i,j-2} + \frac{4v}{3h_2^2}y_{i,j-1} + \frac{5}{12}\left(\frac{7}{h_1^2} - \frac{6v}{h_2^2}\right)y_{i,j} + \frac{4v}{3h_2^2}y_{i,j+1} - \frac{v}{12h_2^2}y_{i,j+2} - \frac{26}{3h_1^2}y_{i+1,j} \\ & + \frac{57}{6h_1^2}y_{i+2,j} - \frac{14}{3h_1^2}y_{i+3,j} + \frac{11}{12h_1^2}y_{i+4,j} = 0, \quad i=1, j=\overline{2, N_2-1} \end{aligned} \quad (5.34)$$

2)  $\Gamma_2$  sınırında sınır koşullarının sonlu fark yaklaşımları)  $\Gamma_2$  sınırında ise, sıkı kenetlenme koşulundaki türevlerin  $(N_1, j)$  noktalarında yaklaşık ifadeleri  $O(h_1^3)$  hatası ile yazılabilir;



Şekil 5.3.  $\Gamma_2$  sınırında sert kenetlenme koşulu için 4 noktali kafes

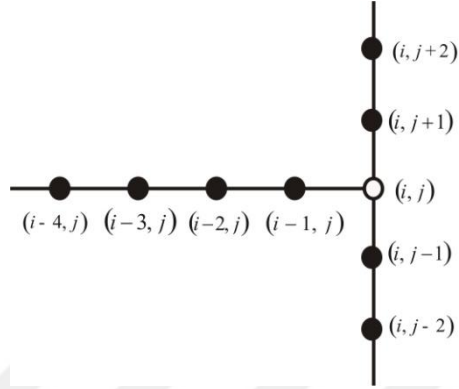
$$y_{N_1,j} = 0, \quad j = \overline{1, N_2} \quad (5.35)$$

$$-\frac{1}{3h_1}y_{i-3,j} + \frac{3}{2h_1}y_{i-2,j} - \frac{3}{h_1}y_{i-1,j} + \frac{11}{6h_1}y_{i,j} = 0, \quad i = N_1, j = \overline{2, N_2-1}. \quad (5.36)$$

b) Menteşe koşulunun  $\Gamma_2$  sınırının  $(N_1, j)$  noktasındaki sayısal ifadesi ise, (5.18) formüllerinin yararlanılarak yazılabilir:

$$y_{N_1,j} = 0, \quad j = \overline{1, N_2} \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} & \frac{11}{12h_1^2}y_{i-4,j} - \frac{14}{3h_1^2}y_{i-3,j} + \frac{57}{6h_1^2}y_{i-2,j} - \frac{26}{3h_1^2}y_{i-1,j} + \frac{5}{12}\left(\frac{7}{h_1^2} - \frac{6v}{h_2^2}\right)y_{i,j} - \frac{v}{12h_2^2}y_{i,j-2} \\ & + \frac{4v}{3h_2^2}y_{i,j-1} + \frac{4v}{3h_2^2}y_{i,j+1} - \frac{v}{12h_2^2}y_{i,j+2} = 0, \quad i=\overline{N_1}, j=\overline{2, N_2-1} \end{aligned} \quad (5.38)$$



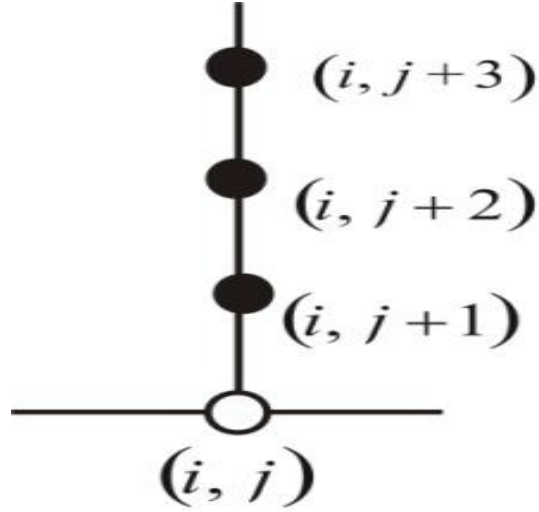
Şekil 5.4.  $\Gamma_2$  sınırında menteşe koşulu için 9 noktalı kafes

3)  $\Gamma_3$  sınırında sınır koşullarının sonlu fark yaklaşımları

a) Sıkı kenetlenme koşulunun  $(i,1)$  noktasında ifadeleri 4 noktalı kafeste

$$y_{i,1} = 0, \quad i = \overline{1, N_1} \quad (5.39)$$

$$-\frac{11}{6h_2}y_{i,j} + \frac{3}{h_2}y_{i,j+1} - \frac{3}{3h_2}y_{i,j+2} + \frac{1}{3h_2}y_{i,j+3} = 0, \quad j = 1, i = \overline{2, N_1 - 1}. \quad (5.40)$$



Şekil 5.5.  $\Gamma_3$  sınırında sert kenetlenme koşulu için 4 noktalı kafes

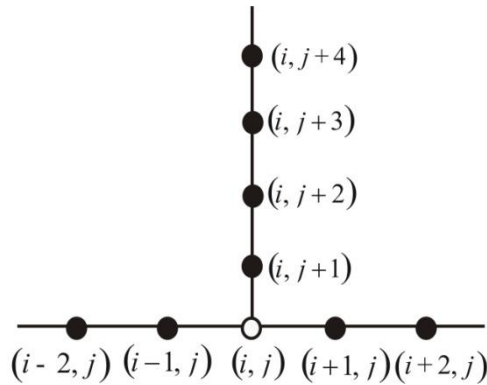
şeklinde olur.

b) Menteşe koşulunun  $\Gamma_3$  sınırının  $(1,i)$  noktasındaki yaklaşık ifadeleri aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$y_{i,1} = 0, \quad i = \overline{1, N_1} \quad (5.41)$$

$$-\frac{v}{12h_1^2}y_{i-2,j} + \frac{4v}{3h_1^2}y_{i-1,j} + \frac{5}{12}\left(\frac{7}{h_2^2} - \frac{6v}{h_1^2}\right)y_{i,j} + \frac{4v}{3h_1^2}y_{i+1,j} - \frac{v}{12h_1^2}y_{i+2,j}$$

$$-\frac{26}{3h_2^2}y_{i,j+2} - \frac{14}{3h_2^2}y_{i,j+3} + \frac{11}{12h_2^2}y_{i,j+4} = 0, \quad j = \overline{N_2}, \quad i = \overline{2, N_1 - 1} \quad (5.42)$$



Şekil 5.6.  $\Gamma_3$  sınırında menteşe koşulu için 9 noktalı kafes

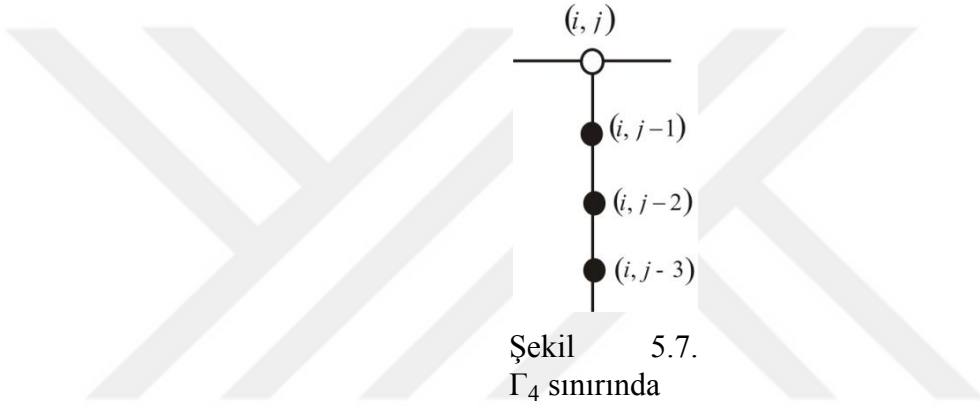
4)  $\Gamma_4$  sınırında sınır koşullarının sonlu fark yaklaşımları

a) Sıkı kenetlenme koşulu

$$y_{i,N_2} = 0, \quad i = \overline{1, N_1} \quad (5.43)$$

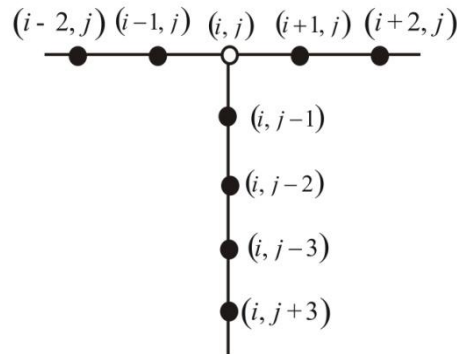
$$-\frac{1}{3h_2} y_{i,j-3} + \frac{3}{2h_2} y_{i,j-2} - \frac{3}{h_2} y_{i,j-1} + \frac{11}{6h_2} y_{i,j} = 0, \quad j = N_2, i = \overline{2, N_1 - 1}. \quad (5.44)$$

şeklindedir.



Şekil 5.7.  
 $\Gamma_4$  sınırında  
sert  
kenetlenme  
koşulu için 4  
noktalı kafes

b) Mentеше koşulu



Şekil 5.8.  $\Gamma_4$  sınırında menteşe  
koşulu için 9 noktalı kafes

$$y_{i,N_2} = 0, \quad i = \overline{1, N_1} \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{v}{12h_1^2}y_{i-2,j} + \frac{4v}{3h_1^2}y_{i-1,j} + \frac{5}{12}\left(\frac{7}{h_2^2} - \frac{6v}{h_1^2}\right)y_{i,j} + \frac{4v}{3h_1^2}y_{i+1,j} - \frac{v}{12h_1^2}y_{i+2,j} \\
& -\frac{26}{3h_2^2}y_{i,j-1} + \frac{57}{6h_2^2}y_{i,j-3} + \frac{11}{12h_2^2}y_{i,j-4} = 0, \quad j=N_2, \quad i=\overline{2, N_1-1}
\end{aligned} \tag{5.46}$$



## 6. LINEER OLMAYAN BİHARMONİK DENKLEMİN SAYISAL ÇÖZÜMÜNÜN TEST FONKSİYONLARI İLE İNCELENMESİ

Bu bölümde, elastoplastik levhanın eğilmesini modelleyen lineer olmayan,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left[ g(\xi^2(w)) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \right] + 2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[ g(\xi^2(w)) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[ g(\xi^2(w)) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \right] = F(x), \quad x \in \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \end{aligned} \quad (6.1)$$

biharmonik denklemi için sınır değer probleminin farklı sınır koşulları kullanılarak sayısal çözümünün bulunması için hazırlanmış olan bilgisayar programının hatasını incelemek amacı ile özel test fonksiyonları ele alınarak sayısal çözümün hata analizi yapılmıştır. Yapılan işlemler ve hesaplamalar sıkıştırılamayan levha için yapıldığından (6.1) denkleminde  $\nu = 1/2$  olarak alınmıştır.

### 6.1. Sıkı Kenetlenme Koşulunu Sağlayan Levha İçin Lineer Olmayan Biharmonik Denklem Sayısal Çözümünün Test Fonksiyonu İle İncelenmesi

Problemin çözümünün arandığı  $\bar{\Omega} = \{(x_1, x_2) | 0 \leq x_i \leq l_i, i=1, 2\}$  bölgesi, sınırı  $\partial\bar{\Omega} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$  olan  $(\Gamma_1 = \{(0, x_2) | 0 \leq x_2 \leq l_2\}, \Gamma_2 = \{(l_1, x_2) | 0 \leq x_2 \leq l_2\}, \Gamma_3 = \{(x_1, 0) | 0 \leq x_1 \leq l_1\}, \Gamma_4 = \{(x_1, l_2) | 0 \leq x_1 \leq l_1\})$  dikdörtgen bölge olsun.

$$w(x_1, x_2) = (1 - \cos 2\pi x_1)(1 - \cos 2\pi x_2) \quad (6.2)$$

fonksiyonunun  $\bar{\Omega}$  bölgesinin sınırlarında (3.90) sıkı kenetlenme koşulunu sağladığı kolaylıkla gösterilebilir. Basitlik için önce  $g(\xi^2(w)) = 1$  ele alınmıştır. Bu durumda Denklem (6.1),

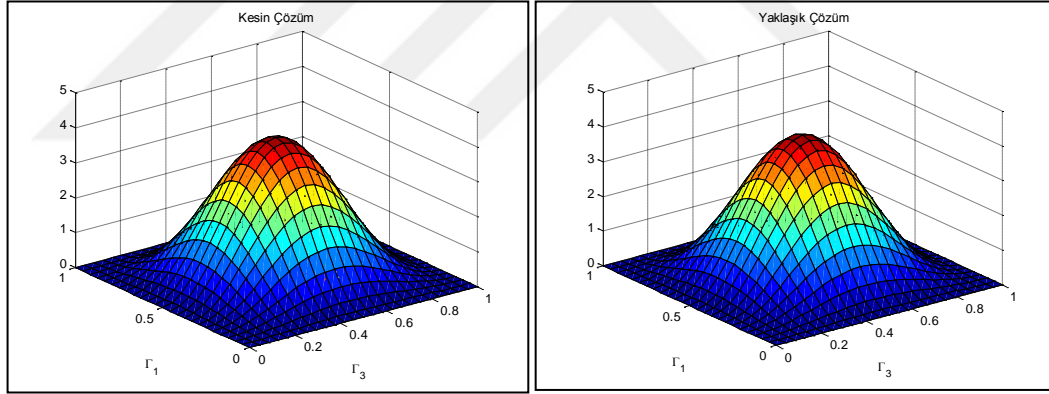
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = F(x_1, x_2) \quad (6.3)$$



şekline dönüşür. (6.2) fonksiyonu (6.3) denkleminde yerine yazıldığında sağ taraffonksiyonu;

$$F(x_1, x_2) = -16\pi^4 \cos(2\pi x_1) (1 - \cos(2\pi x_2)) + 32\pi^4 \cos(2\pi x_1) \cos(2\pi x_2) - 16\pi^4 \cos(2\pi x_2) (1 - \cos(2\pi x_1)) \quad (6.4)$$

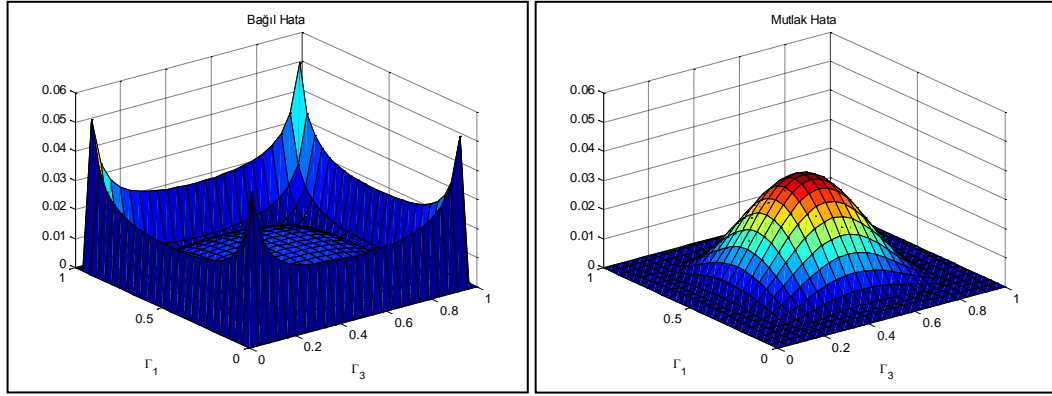
olur. (6.4) fonksiyonu bilgisayar programında yerine yazılarak  $w_h(x_1, x_2)$  yaklaşık çözümü elde edilir. Kenarları  $l_1=l_2=1$  birim olan kare bölgede tanımlanan  $x_1$  eksenindeki nokta sayısı  $N_1$ ,  $x_2$  eksenindeki nokta sayısı  $N_2$  olmak üzere  $N_1 \times N_2 = 25 \times 25$  boyutlu kafes alınarak çözülen örnekte, bulunan  $w_h(x_1, x_2)$  yaklaşık çözümünün mutlak ve bağıl hataları maksimum değerleri sırasıyla 0,0355 ve %0,89 olarak hesaplanmıştır.  $w_h(x_1, x_2)$  yaklaşık çözümünün ve gerçek çözüm  $w(x_1, x_2)$  yani test fonksiyonunun grafikleri Şekil 6.1'de verilmiştir. Şekil 6.2'de ise yaklaşık çözüm ve kesin çözüm arasındaki mutlak hata ve bağıl hata grafikleri gösterilmiştir.



(a)

(b)

Şekil 6.1. a) Test fonksiyonu (6.2) b)  $g(\xi^2(w))=1$  durumunda elde edilen yaklaşık çözüm



(a)

(b)

Şekil 6.2.  $g(\xi^2(w))=1$  durumunda test fonksiyonu (6.2) için elde edilen yaklaşık çözümün a) bağıl hatası b) mutlak hatası

Bilgisayar programının hatasını incelemek amacı ile kafes boyutunun sonucu nasıl etkilediğini görmek için problem yedi farklı eşit aralıklı şebekede çözülmüş;

$N_1=N_2=21, 31, 41, 51, 61, 71, 81$  ve  $w(x_{ij})$  test fonksiyonunun düğüm noktalarındaki değeri ve  $y_{ij}^{(n)}$  problemin yaklaşık çözümü olmak üzere

$\epsilon_y = \left\| w(x_{ij}) - y_{ij}^{(n)} \right\|_{\infty}$  olarak tanımlanan mutlak hatalar ve  $\delta = \left\| (w(x_{ij}) - y_{ij}^{(n)}) / w(x_{ij}) \right\|_{\infty}$  olarak tanımlanan bağıl hatalar her bir durum için Tablo 6.1'de verilmiştir. Sonlu fark şemasının yaklaşım hatası,  $N^{(1)}$  ve  $N^{(2)}$  ardışık kafes boyutlarını,  $\epsilon_y(N^{(1)})$  ve  $\epsilon_y(N^{(2)})$  değerleri de ilgili kafesler için elde edilen mutlak hataları temsil etmek üzere,

$$n_{\epsilon_y} = \frac{\ln(\epsilon_y(N^{(1)})/\epsilon_y(N^{(2)}))}{\ln(N^{(2)}/N^{(1)})} \quad (6.5)$$

formülü ile ifade edilmektedir. Sonlu fark şemasının yaklaşım hatası,

$\left\| w(x_{ij}) - y_{ij}^{(n)} \right\|_{\infty} = \sup |w(x_{ij}) - y_{ij}^{(n)}| = O(h^2)$  olduğu için  $n_{\epsilon_y}$  sayısının da 2 sayısı civarında olması beklenmektedir.

Tablo 6.1'de  $g(\xi^2(w))=1$  için farklı boyutlardaki şebekeler için, (6.2) test fonksiyonu kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümün mutlak hata ve bağıl hata değerlerinin yanı sıra sonlu fark şemasının yaklaşım değeri (approximation number) ifade edilmiştir.

Tablo 6.1. Test fonksiyonu (6.2) için  $g(\xi^2(w))=1$  iken değişen kafes boyutlarının mutlak ve bağıl hatalar üzerindeki etkisi

Kafes Boyutu	Mutlak Hata	Bağıl Hata	$n_{\varepsilon_y}$
21 x 21	0,0481	0,0120	
31 x 31	0,0240	0,0060	1,7851
41 x 41	0,0142	0,0036	1,8771
51 x 51	0,0094	0,0023	1,8902
61 x 61	0,0067	0,0017	1,8911
71 x 71	0,0050	0,0012	1,9279
81 x 81	0,0038	$9,5884 \times 10^{-4}$	2,0827

Tablo 6.1 incelendiğinde, maksimum bağıl hata % 1,20 olup 21 x 21 boyutlu bir kafes kullanıldığında elde edilmiştir. Şebekedeki nokta sayısı arttıkça bağıl hata değerlerinin giderek azaldığı ve sonlu fark şemasının yaklaşım değeri de beklenen 2 sayısına yaklaştığı gözlemlenmiştir.

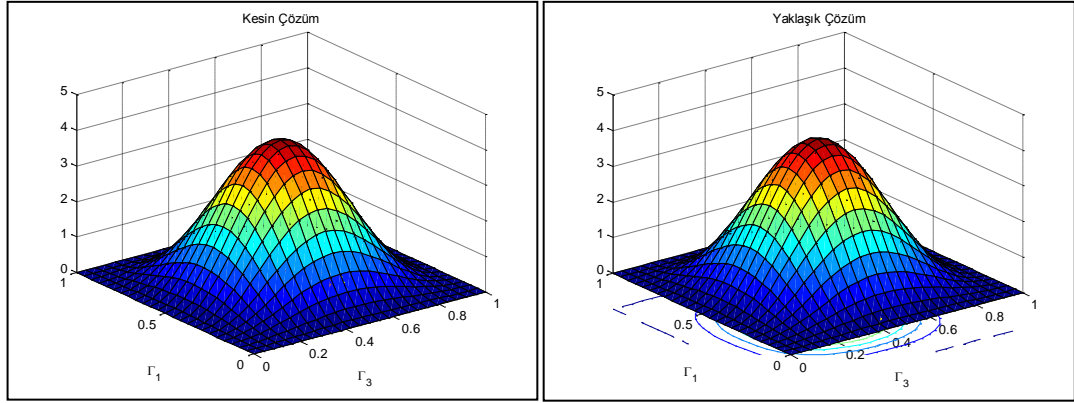
Daha sonra Denklem (6.1)'deki  $g$  katsayısı  $x_1$  ve  $x_2$ 'ye bağılı olarak  $g(x_1, x_2)=e^{x_1+x_2}$  şeklinde ele alınıp aynı işlemler tekrarlanmıştır.  $w(x_1, x_2)=(1-\cos 2\pi x_1)(1-\cos 2\pi x_2)$  test fonksiyonu Denklem (6.1)'de yerine yazıldığında sağ taraf fonksiyonu,

$$F(x_1, x_2)=[(-2\pi^3-2\pi^2)(1+v)(1-v)] e^{x_1+x_2} \sin(\pi x_1+\pi x_2)$$

$$+ [(-2\pi^2+2\pi^4)(1+v)+2\pi^4(1-v)] e^{x_1+x_2} \sin \pi x_1$$

$$\sin \pi x_2+2\pi^2(1-v) e^{x_1+x_2} \cos \pi x_1 \cos \pi x_2 \quad (6.6)$$

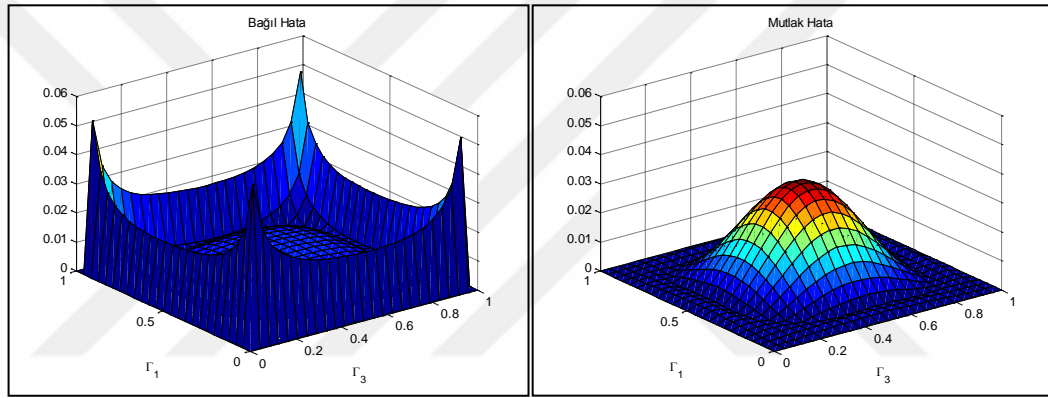
şeklinde elde edilmiştir. Kenarları  $l_1=l_2=1$  birim olan bölgede tanımlanan kafesin boyutu  $N_1 \times N_2=25 \times 25$  alınarak çözülen örnek için maksimum mutlak hata ve maksimum bağıl hata sırasıyla 0,0332 ve %0,83 olarak hesaplanmıştır. Test fonksiyonu, yaklaşık çözüm, bağıl ve mutlak hata grafikleri aşağıda verilmiştir (Şekil 6.3 ve Şekil 6.4).



(a)

(b)

Şekil 6.3. a)  $w(x_1, x_2) = (1 - \cos 2\pi x_1)(1 - \cos 2\pi x_2)$  test fonksiyonu  
 b)  $g(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2}$  iken yaklaşık çözümü



(a)

(b)

Şekil 6.4.  $g(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2}$  durumunda  $w(x_1, x_2) = (1 - \cos 2\pi x_1)(1 - \cos 2\pi x_2)$  test fonksiyonu için elde edilen yaklaşık çözümün a) bağıl hatası b) mutlak hatası

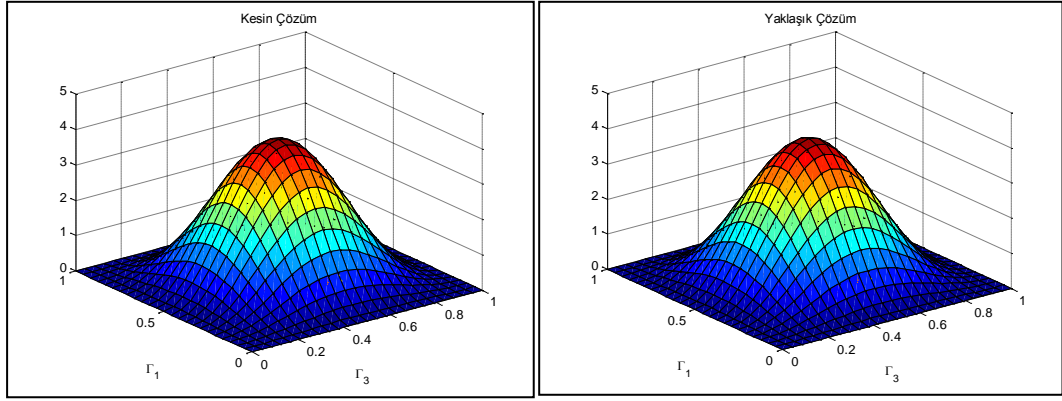
Aşağıda Tablo 6.2'de farklı boyutlarda kafesler alınarak  $g(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2}$  için bağıl ve mutlak hatalar ve sonlu fark şemasının yaklaşım değeri (approximation number) elde edilmiş ve karşılaştırılmıştır.

Tablo 6. 2.  $w(x_1, x_2) = (1 - \cos 2\pi x_1)(1 - \cos 2\pi x_2)$  test fonksiyonu için  $g(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2}$  iken değişen kafes boyutlarına göre elde edilen mutlak ve bağıl hatalar

Kafes Boyutu	Mutlak Hata	Bağıl Hata	$n_{\varepsilon_y}$
21 x 21	0,0447	0,0112	
31 x 31	0,0226	0,0056	1,7512
41 x 41	0,0135	0,0034	1,8429
51 x 51	0,0089	0,0022	1,9090
61 x 61	0,0063	0,0016	1,9297
71 x 71	0,0047	0,0012	1,9300
81 x 81	0,0036	$9,1235 \times 10^{-4}$	2,0235

Tablo 6.2 incelendiğinde sınırdaki sıkı kenetlenme koşulunu sağlayan (6.2) test fonksiyonu kullanılarak ve  $g(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2}$  olduğu durumda elde edilen sayısal çözümün bağıl hatası 21 x 21 boyutlu kafeste % 1,12 bulunmuştur. Kafes boyutu arttıkça bağıl hata azalmış ve sonlu fark şemasının yaklaşım hatası  $n_{\varepsilon_y}$  2'ye yaklaşmıştır.

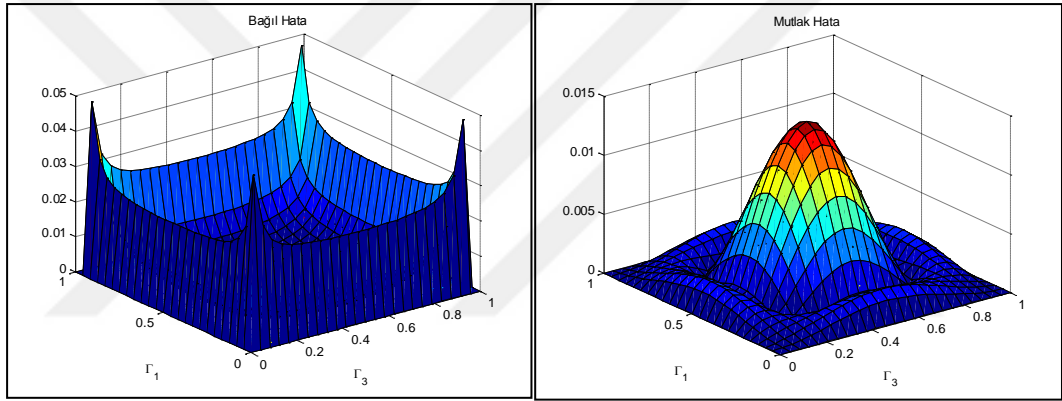
Son olarak da  $g = g(\xi^2(w))$  (lineer olmayan denklem) için başlangıç fonksiyonu  $w^{(0)}(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2}$  olmak üzere  $\xi_0 = 0,027$  ve  $\kappa = 0,05$  alınarak ve  $w(x_1, x_2) = (1 - \cos 2\pi x_1)(1 - \cos 2\pi x_2)$  test fonksiyonu kullanılarak  $\varepsilon = \max |w_{ij}^{(k)} - w_{ij}^{(k-1)}|$  olmak üzere  $\varepsilon = 0,001$  kesinliği ile 5 iterasyonda  $N_1 \times N_2 = 25 \times 25$  boyutlu kafes kullanılarak yaklaşık çözüm, mutlak ve bağıl hata elde edilmiştir. Yaklaşık çözümün maksimum mutlak ve maksimum bağıl hata değerlerisıraıyla 0,0137 ve %0,34 olarak hesaplanmıştır. Yaklaşık çözüm, test fonksiyonu, bağıl hata ve mutlak hata grafikleri Şekil 6.5 ve Şekil 6.6'da ve mutlak ve bağıl hatalar ise değişen kafes boyutları için Tablo 6.3'te verilmiştir.



(a)

(b)

Şekil 6.5. a)  $w(x_1, x_2) = (1 - \cos 2\pi x_1)(1 - \cos 2\pi x_2)$  test fonksiyonu b)  $\xi_0 = 0,027$  ve  $\kappa = 0,05$  için  $g = g(\xi^2(w))$  durumunda elde edilen yaklaşık çözüm



(a)

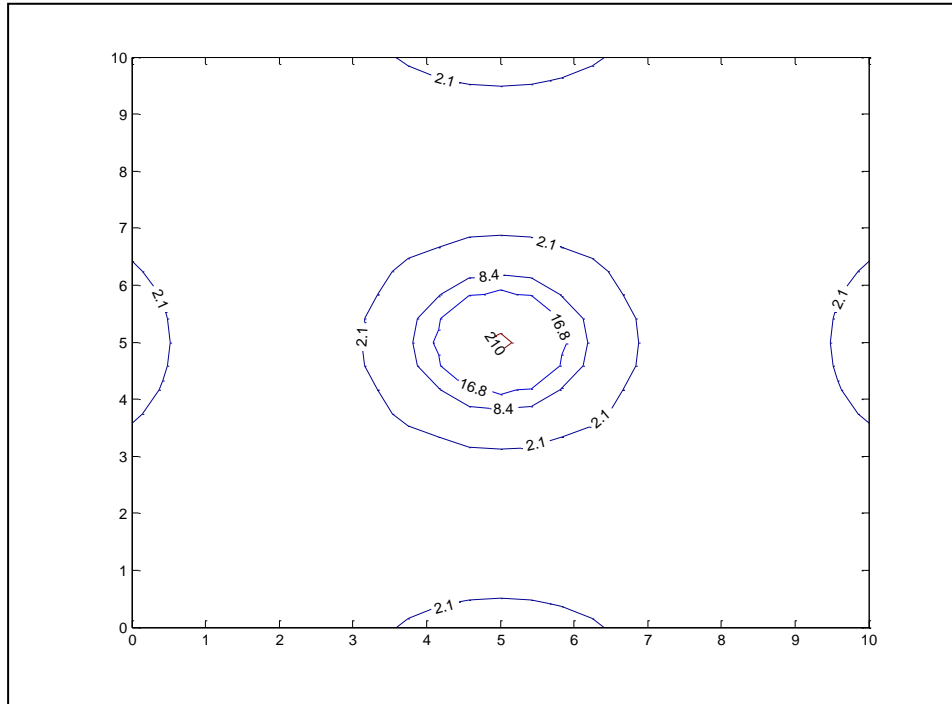
(b)

Şekil 6.6.  $g = g(\xi^2(w))$  durumunda  $w(x_1, x_2) = (1 - \cos 2\pi x_1)(1 - \cos 2\pi x_2)$  test fonksiyonu için elde edilen yaklaşık çözümün a) bağıl hatası b) mutlak hatası

Tablo 6.3.  $w(x_1, x_2) = (1 - \cos 2\pi x_1)(1 - \cos 2\pi x_2)$  test fonksiyonu için  $\xi_0 = 0,027$  ve  $\kappa = 0,05$  iken  $g = g(\xi^2(w))$  durumu

Kafes Boyutu	Mutlak Hata	Bağıl Hata	$n_\varepsilon$
21 x 21	0,0172	0,0043	
31 x 31	0,0100	0,0025	1,3925
41 x 41	0,0064	0,0016	1,5962
51 x 51	0,0044	$9,0780 \times 10^{-4}$	1,7168
61 x 61	0,0032	$8,0122 \times 10^{-4}$	1,7786
71 x 71	0,0025	$6,1517 \times 10^{-4}$	1,6262
81 x 81	0,0019	$4,8121 \times 10^{-4}$	2,0827

Tablo 6.3'e bakıldığında, farklı boyuttaki kafesler için test fonksiyonu (6.2) kullanılarak elde edilen mutlak ve bağıl hatalar incelendiği zaman, maksimum bağıl hatanın 21 x 21 boyutlu kafes için ve %0,43 olarak elde edildiği gözlemlenmiş ve lineer olmayan (6.1) denkleminin yaklaşık çözümünün bulunması için hazırlanan bilgisayar programının uygulanabilirliği kanaatine varılmıştır. Sınırlarda sıkı kenetlenme koşulunu sağlayan levha için  $g = g(\xi^2(w))$  iken  $\xi^2(w)$ 'nin grafiği ise Şekil 6.7'de gösterilmiştir.



Şekil 6.7.  $\xi^2(w)$ 'nin kesiti (plastikliğin ortaya çıkması ve yayılması)

## 6.2. Menteşe Koşulunu Sağlayan Levha İçin Lineer Olmayan Biharmonik Denklemin Sayısal Çözümünün Test Fonksiyonu İle İncelenmesi

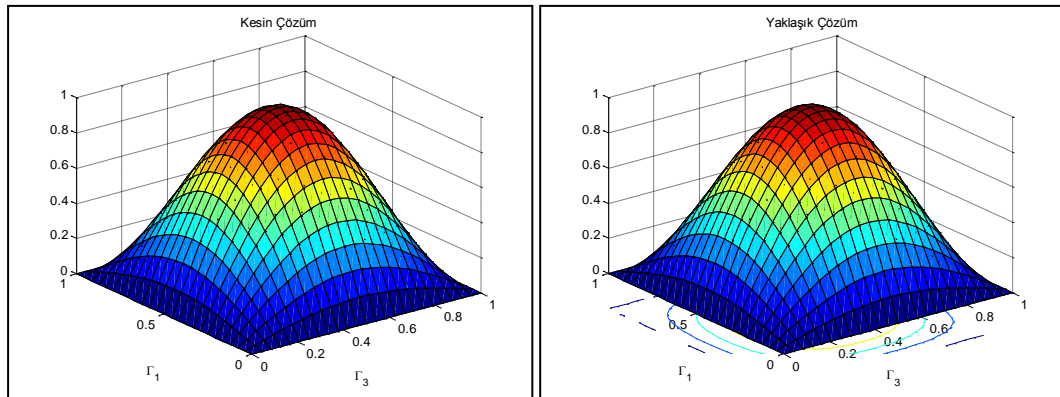
Bu bölümde elastoplastik levhanın doldurduğu  $\bar{\Omega} = \{(x_1, x_2) | 0 \leq x_i \leq l_i, i=1, 2\}$  bölgesinin sınırlarında (3.91) menteşe koşulunu sağlayan test fonksiyonu,

$$w(x_1, x_2) = \sin \pi x_1 \sin \pi x_2 \quad (6.7)$$

ele alınmıştır. Bölüm 6.1'de yapılan hesaplamalara benzer şekilde (6.7) fonksiyonu (6.1) denkleminde yazıldığında, denklemin sağ tarafındaki  $F(x_1, x_2)$  fonksiyonu,  $g(x_1, x_2) = 1$  iken ele alındığında,

$$F(x_1, x_2) = 4\pi^4 \sin \pi x_1 \sin \pi x_2 \quad (6.8)$$

olarak hesaplanmıştır. Elde edilen bu  $F(x_1, x_2)$  fonksiyonu bilgisayar programında yerine yazılarak yaklaşık çözüm,  $y_{ij}^{(n)}$  elde edilmiştir. Kenarları  $l_1 = l_2 = 1$  birim olan bölgede tanımlanan  $N_1 \times N_2 = 25 \times 25$  boyutlu kafes alınarak çözülen örnekte, bulunan  $y_{ij}^{(n)}$  yaklaşık çözümü ile gerçek çözüm  $w(x_{ij})$  yani test fonksiyonu karşılaştırılmış ve aralarındaki bağıl hatanın maksimum değeri %0,15 olarak hesaplanmıştır. Elde edilen kesin çözüm (test fonksiyonu), yaklaşık çözüm, bağıl hata ve mutlak hata grafikleri Şekil 6.8 ve Şekil 6.9'da verilmiştir.

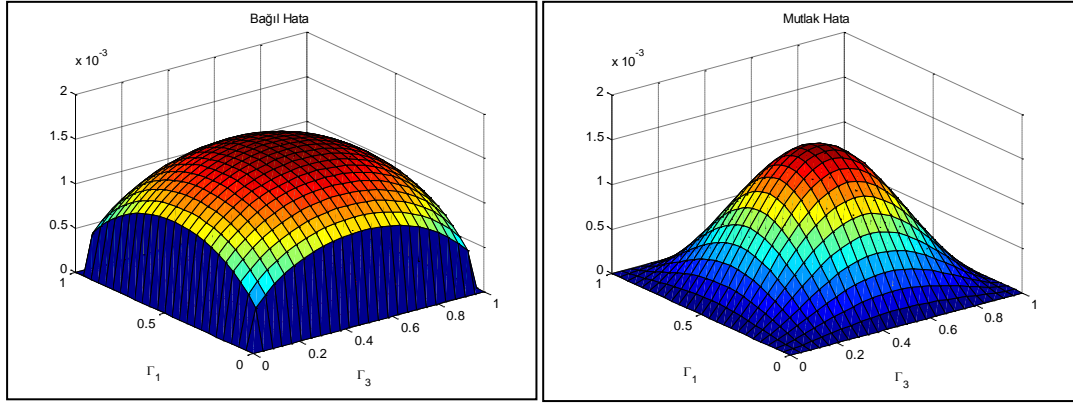


(a)

(b)

Şekil 6.8. a)  $w(x_1, x_2) = \sin \pi x_1 \sin \pi x_2$  fonksiyonu b)  $g(x_1, x_2) = 1$  durumunda yaklaşık çözüm





(a)

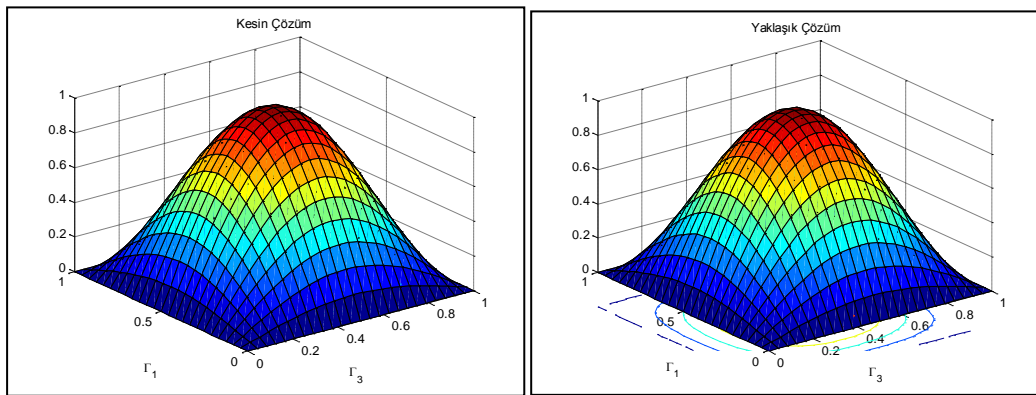
(b)

Şekil 6.9.  $g(x_1, x_2)=1$  durumunda a) bağıl hata b) mutlak hata

$g(x_1, x_2)=e^{x_1+x_2}$  iken ise ,

$$F(x_1, x_2) = 4\pi^3 e^{x_1+x_2} \sin(\pi x_1 + \pi x_2) + (-3\pi^2 + 4\pi^4) e^{x_1+x_2} \sin \pi x_1 \sin \pi x_2 + \pi^2 e^{x_1+x_2} \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2) \quad (6.9)$$

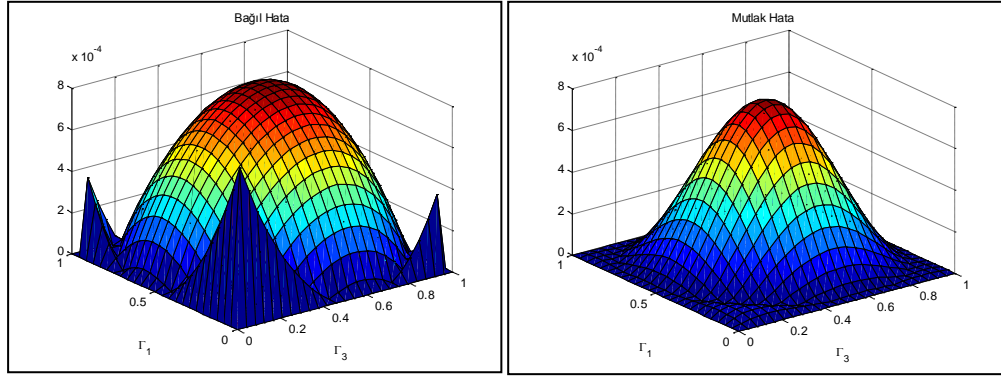
olarak hesaplanmıştır. Kenarları  $l_1=l_2=1$  birim olan bölgede tanımlanan kafesin boyutu  $N_1 \times N_2=25 \times 25$  alınarak çözülen örnekte, bulunan  $y_{ij}^{(n)}$  yaklaşık çözümünün maksimum mutlak hata ve maksimum bağıl hata değerleri kafesin orta noktasında elde edilmiş olup  $7,44 \times 10^{-4}$  olarak hesaplanmıştır. Test fonksiyonu, yaklaşık çözüm, bağıl hata ve mutlak hata grafikleri Şekil 6.10 ve Şekil 6.11'da verilmiştir.



(a)

(b)

Şekil 6.10. a)  $w(x_1, x_2)=\sin \pi x_1 \sin \pi x_2$  fonksiyonunun grafiği b)  $g(x_1, x_2)=e^{x_1+x_2}$  durumunda yaklaşık çözümün grafiği



(a)

(b)

Şekil 6.11.  $g(x_1, x_2)=e^{x_1+x_2}$  durumunda a) bağıl hata b) mutlak hata

Denklem (6.1)'de  $g(x_1, x_2)=1$  ve  $g(x_1, x_2)=e^{x_1+x_2}$  alınarak ve sınırlarda menteşe koşulunu sağlayan (6.7) test fonksiyonu kullanılarak farklı boyutlardaki kafesler için yaklaşık çözümler elde edilmiş, elde edilen yaklaşık çözümlerin bağıl ve mutlak hataları ile sonlu fark şemasının yaklaşım değeri (approximation number) Tablo 6.4 ve Tablo 6.5'te verilmiştir.

Tablo 6.4.  $g(x_1, x_2)=1$  durumunda  $w(x_1, x_2)=\sin \pi x_1$  test fonksiyonu için elde edilen mutlak ve bağıl hatalar

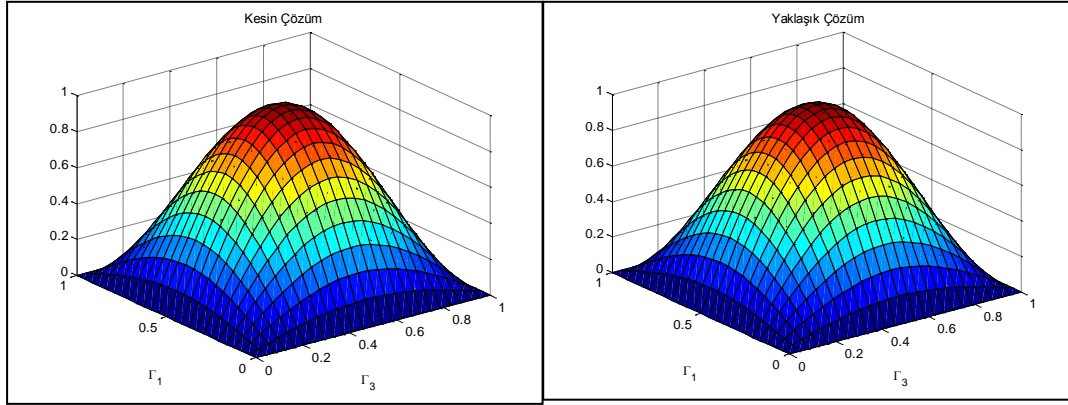
Kafes Boyutu	Mutlak Hata	Bağıl Hata	$n_e$
21 x 21	0,0018	0,0018	
31 x 31	0,0012	0,0012	1.0411
41 x 41	$7,47 \times 10^{-4}$	$7,47 \times 10^{-4}$	1.6925
51 x 51	$5,14 \times 10^{-4}$	$5,14 \times 10^{-4}$	1.7094
61 x 61	$3,74 \times 10^{-4}$	$3,74 \times 10^{-4}$	1.7816
71 x 71	$2,84 \times 10^{-4}$	$2,84 \times 10^{-4}$	1.8169
81 x 81	$2,22 \times 10^{-4}$	$2,22 \times 10^{-4}$	1.8589

Tablo 6.5.  $g(x_1, x_2)=e^{x_1+x_2}$  durumunda  $w(x_1, x_2)=\sin \pi x_1 \sin \pi x_2$  test fonksiyonu için elde edilen mutlak ve bağıl hatalar

Kafes Boyutu	Mutlak Hata	Bağıl Hata	$n_\epsilon$
21 x 21	$6,39 \times 10^{-4}$	$6,39 \times 10^{-4}$	
31 x 31	$5,64 \times 10^{-4}$	$5,64 \times 10^{-4}$	0,3202
41 x 41	$4,77 \times 10^{-4}$	$4,77 \times 10^{-4}$	0,5999
51 x 51	$3,44 \times 10^{-4}$	$3,44 \times 10^{-4}$	1,4918
61 x 61	$2,57 \times 10^{-4}$	$2,57 \times 10^{-4}$	1,6305
71 x 71	$1,98 \times 10^{-4}$	$1,98 \times 10^{-4}$	1,7109
81 x 81	$1,57 \times 10^{-4}$	$1,57 \times 10^{-4}$	1,7645

Tablo 6.4 ve Tablo 6.5 incelendiğinde 21 x 21 boyutlu kafes ele alındığında bağıl hata değerleri  $g(x_1, x_2)=1$  iken %0,18 ,  $g(x_1, x_2)=e^{x_1+x_2}$  iken ise  $6,39 \times 10^{-4}$  olarak elde edilmiştir ve kafes boyutu arttıkça hata değerleri azalmıştır.

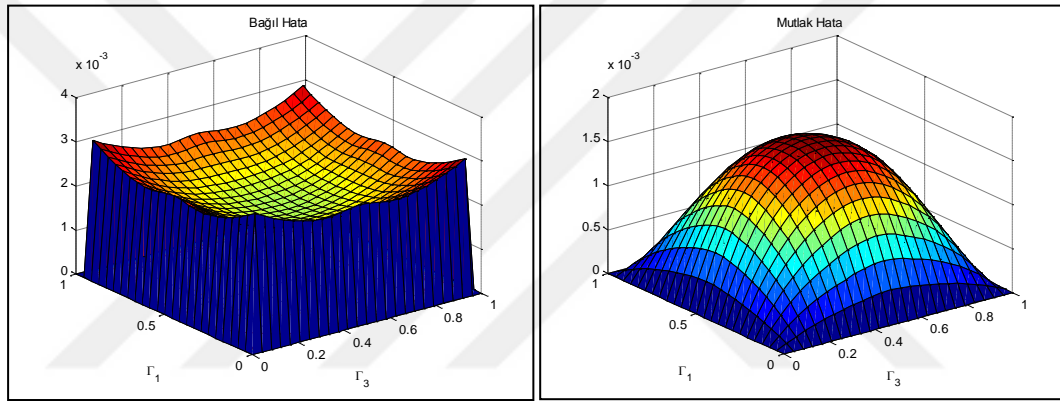
Son olarak da  $g=g(\xi^2(w))$  durumunda  $\xi_0=0,027$  and  $\kappa=0,05$  iken  $w(x_1, x_2)=\sin \pi x_1 \sin \pi x_2$  test fonksiyonu kullanılarak  $\epsilon=\max |w_{ij}^{(k)}-w_{ij}^{(k-1)}|$  olmak üzere  $\epsilon = 0,001$  kesinliği ile 5 iterasyonda elde edilen yaklaşık çözüm, kesin çözüm (test fonksiyonu), mutlak ve bağıl hata grafikleri Şekil 6.12 ve Şekil 6.13'te verilmiştir.



(a)

(b)

Şekil 6.12. a)  $w(x_1, x_2) = \sin \pi x_1 \sin \pi x_2$  fonksiyonu b)  $g = g(\xi^2(w))$  durumunda yaklaşık çözüm



(a)

(b)

Şekil 6.13.  $g = g(\xi^2(w))$  durumunda a) bağıl Hata b) mutlak Hata

$g = g(\xi^2(w))$  durumunda, başlangıç fonksiyonu olarak  $w^{(0)}(x_1, x_2) = e^{x_1^2 + x_2}$  alınıp,  $\xi_0 = 0,027$  ve  $\kappa = 0,05$  iken  $w(x_1, x_2) = \sin \pi x_1 \sin \pi x_2$  test fonksiyonu için 5 iterasyonda elde edilen yaklaşık çözüm için mutlak ve bağıl hatalar  $25 \times 25$  boyutlu kafes için %0,16 elde edilmiştir ve kafes boyutu arttıkça hata değerinin azaldığı gözlemlenmiştir.

Bölüm 6.1 ve 6.2'de test fonksiyonları kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümün mutlak ve bağıl hataları incelendiği zaman, lineer olmayan Denklem (6.1)'in yaklaşık çözümünün bulunması için hazırlanan bilgisayar programının uygulanabilirliği kontrol edilmiştir.

Hazırlanmış bilgisayar programının doğru çalıştığı kanaatine vardıldıktan sonra elastoplastik levhanın eğilmesi ile ilgili lineer olmayan biharmonik denklemin farklı

sınır koşullarında sayısal çözümünün analizi için çeşitli bilgisayar deneyleri yapılmış ve incelenmiştir.



## 7. ELASTOPLASTİK LEVHANIN EĞİLMESİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

### 7.1. Elastoplastik Levhanın Eğilmesi Probleminin Sayısal Çözümü

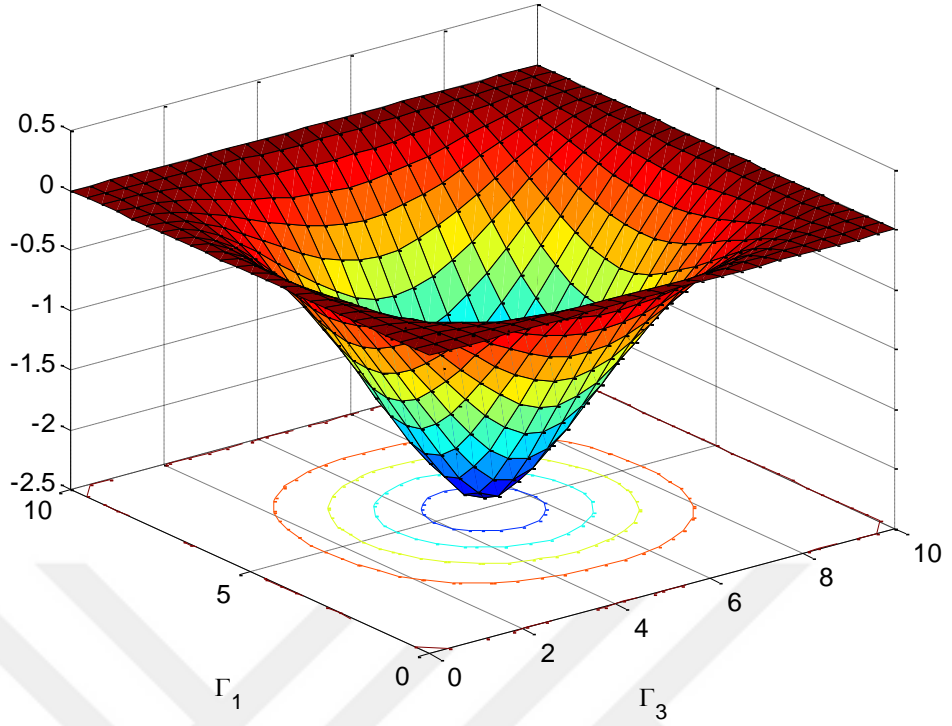
Çalışmanın bu bölümünde, yapılan çalışmalar kapsamında bölgenin sınırlarında çeşitli sınır koşullarını sağlayan gerçek uygulama problemleri ele alınmış ve incelenmiştir. Aşağıdaki tabloda, verilen örneklerde kullanılacak olan veriler yer almaktadır.

Tablo 7.1. Sayısal örneklerde kullanılacak veriler

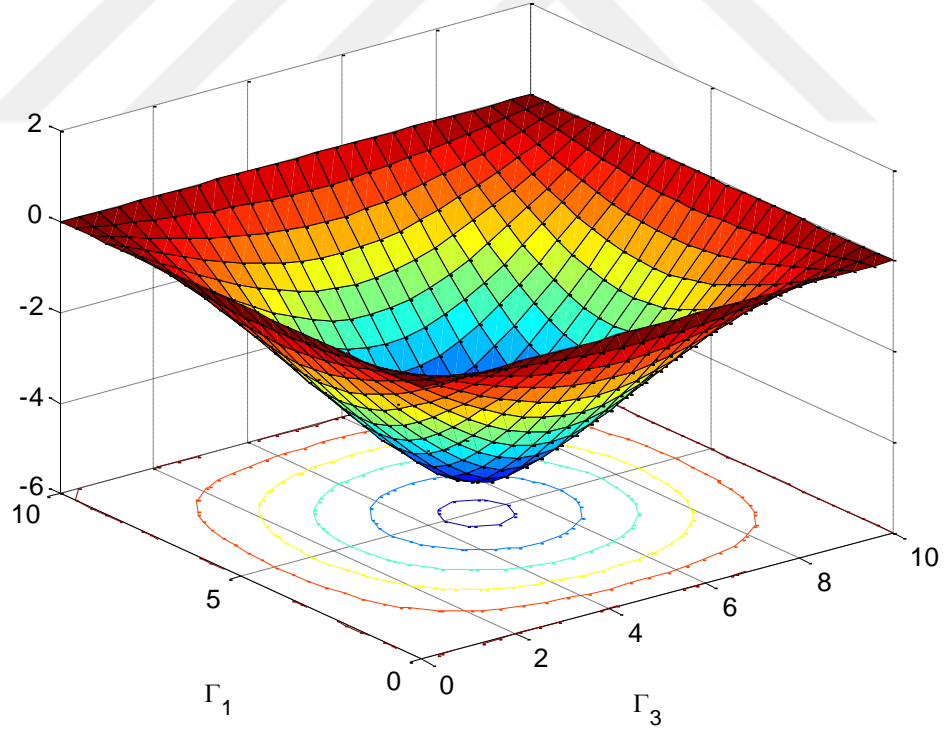
Levhanın kenar uzunlukları	$l_1=l_2=10$ [cm]
Levhanın kalınlığı	$h=0,3$ [cm]
Kafes boyutu	$N_1 \times N_2=25 \times 25$
Elastik parametreler	$E=21000$ [kN cm <sup>-2</sup> ], $\nu=0,5$ $\kappa=0,45$ , $\xi_0^2=2,1$

Sayısal örneklerde başlangıç yaklaşımı olarak  $w^{(0)}(x_1, x_2) = e^{x_1^2 + x_2^2}$  fonksiyonu kullanılmış ve yaklaşımlar  $\max |w_{ij}^{(k)} - w_{ij}^{(k-1)}| < \varepsilon$  koşulu sağlandığında durdurulmuştur.

Örnek 1. Geometrik ve fiziksel özellikleri Tablo 7.1'de verilen elastoplastik levhanın merkez noktasına ve bu nokta komşuluğundaki dört simetrik noktaya  $F(x)$  yükünün uygulandığı varsayılmıştır. Uygulanan yükün şiddetinin  $q = 320$  [kN] olduğu kabul edilmiştir.  $w^{(0)}(x_1, x_2) = e^{x_1^2 + x_2^2}$  başlangıç yaklaşımı için ve  $\varepsilon = 0,001$  kesinliği ile lineer olmayan problemin sayısal çözümü elde edilmiştir. Bölgenin tüm sınırlarında sıkı kenetlenme koşulunun verildiği durumda levhanın eğilen yüzey grafiği Şekil 7.1'de, bölgenin tüm sınırlarında menteşe sınır koşulunu sağlayan eğilme problemi için eğilen yüzeyin grafiği ise Şekil 7.2'de verilmiştir.



Şekil 7.1. Sıkı kenetlenme koşulu için sayısal çözümün grafiği



Şekil 7.2. Mentеше koşulu için sayısal çözümün grafiği

Sıkı kenetlenme koşulu verildiği zaman çözüm  $n = 25$  yaklaşımda, menteşe koşulu verildiğinde ise  $n = 28$  yaklaşımda bulunmuştur. Levhanın tam orta noktasında meydana gelen maksimal eğilmeler sıkı kenetlenme ve menteşe koşulları için sırasıyla;  $w_{\max} = 2,4059$  [cm] ve  $w_{\max} = 5,2986$  [cm]'dir. Menteşe koşulunu sağlayan levhanın eğilmesinin sıkı kenetlenme koşulunu sağlayan levhanın eğilmesinden daha fazla olması beklenen bir sonuçtur.

Örnek 2. Farklı sınır koşullarında değişik kuvvet değerlerinin eğilmeye etkisini araştırmak amacıyla Tablo 7.1'deki geometrik ve fiziksel özellikleri taşıyan elastoplastik levhanın merkez noktasına farklı şiddetlerde yüklemeler yapılmıştır ve sırasıyla menteşe ve sıkı kenetlenme koşulları için levha üzerine uygulanan yükün  $q_k$  şiddetinin artan değerleri için meydana gelen maksimal eğilmeler ve bu eğilmelere karşılık gelen  $\xi^2(w_{\max})$  değerleri gözlemlenmiştir (Tablo 7.2, Tablo 7.3).

Tablo 7.2. Menteşe koşulunu sağlayan elastoplastik levha üzerine uygulana yükün şiddeti arttıkça maksimal eğilme  $w_{\max}$  ve  $\xi^2$  değerlerindeki değişim

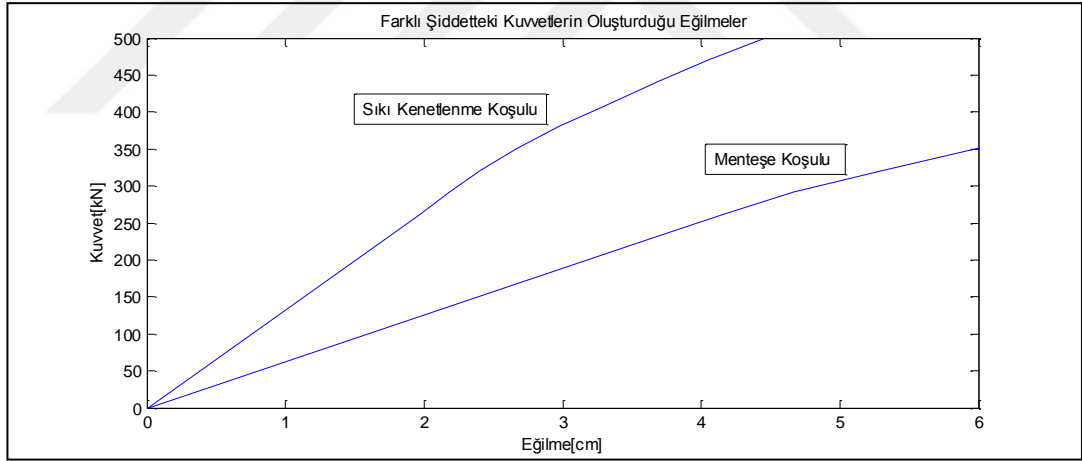
k	$q_k$ [kN]	$w_{\max}$ [cm]	$\max \xi^2(w_{\max})$
1	200	3,1729	1,2319
2	230	3,6488	1,6292
3	260	4,1247	2,0952
4	290	4,6495	3,9374
5	320	5,2986	7,0831



Tablo 7.3. Sıkı kenetlenme koşulunu sağlayan elastoplastik levha üzerine uygulanan yükün şiddeti arttıkça maksimal eğilme  $w_{max}$  ve  $\xi^2$  değerlerindeki değişim

k	$q_k$ [kN]	$w_{max}$ [cm]	$\max \xi^2(w_{max})$
1	200	1,5019	0,8274
2	230	1,7271	1,0942
3	260	1,9524	1,4183
4	290	2,1777	1,7396
5	318	2,3887	2,1262
6	320	2,4059	2,2085
7	350	2,6663	3,7081

Tablo 7.2 ve Tablo 7.3'deki verilere karşılık gelen grafik Şekil 7.3'te gösterilmiştir.



Şekil 7.3. Mentеше ve sıkı kenetlenme sınır koşullarını sağlayan levhaya uygulanan farklı şiddetlerdeki kuvvetlerin oluşturduğu eğilmeler

Tablo 7.2 incelendiğinde menteşe koşulu sağlandığı zaman,  $q_3 = 260$  [kN] luk yük için  $\xi^2(w_{max}) \approx \xi_0^2 = 2,1$  olduğundan bu yük son esnek duruma denk gelmektedir.  $q(x) > q_3$  şiddetindeki yüklere karşılık gelen deformasyonlar plastik deformasyonlardır, yani 260 [kN] 'dan fazla yük etkilediği zaman levhada kalıcı deformasyon ortaya çıkmaktadır. Ancak, 260 [kN] 'dan az bir yük etkilediği zaman, örneğin  $q_2 = 230$  [kN] şiddetinde bir yük uygulandığında levhanın eğrilik derecesi olan  $\xi^2(w_{max}) = 1,6292 < \xi_0^2 = 2,1$  olduğundan oluşan deformasyon elastik

deformasyondur. Tablo 7.3'ten görüldüğü gibi sınırlarda sıkı kenetlenme koşulu verildiği durumda, son esnek duruma karşılık gelen yük  $q_5=318$  [kN] olur ve  $\xi^2(w_{\max})=2,1262$  ( $\approx \xi_0^2=2,1$ ) dir. Eğer uygulanan yük 318 [kN] 'dan az ise, yükün etkisi ortadan kaldırıldığı zaman levha başlangıç durumuna geri döner. Eğer  $q(x)>318$  [kN] ise, o halde yük kaldırıldığında levhada deformasyonun izi kalır.

Örnek 3. Tablo 7.1'deki özelliklere sahip elastoplastik bir levhanın bölgenin sınırlarında menteşe ve sıkı kenetlenme sınır koşullarını sağladığı durumda, levha için tanımlanan kafesin merkez noktasına ve bu nokta komşuluğundaki dört simetrik noktaya bir yük uygulandığı zaman farklı başlangıç yaklaşımları ve farklı  $\varepsilon$  kesinliği için iterasyon sayısı incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar Tablo 7.4 ve Tablo 7.5'te verilmiştir.

Tablo 7.4 . Sınırdaki menteşe koşulu sağlandığı durumda farklı  $w^{(0)}(x_1, x_2)$  başlangıç yaklaşımları verildiği zaman , farklı  $\varepsilon$  değerleri için iterasyon (yaklaşım) sayısı ( $q=290$ [kN])

$w^{(0)}(x_1, x_2)$ Başlangıç Yaklaşımı	$\varepsilon = 0,01$			$\varepsilon = 0,001$			$\varepsilon = 0,0001$		
	n	max w	$\xi^2$	n	max w	$\xi^2$	n	max w	$\xi^2$
$e^{x_1+x_2}$	17	4,6610	4,1813	20	4,6499	3,9564	26	4,6483	3,8804
$e^{x_1^2+x_2}$	23	4,6571	4,1132	26	4,6495	3,9374	31	4,6483	3,8815
$\sin\pi x_1 \sin\pi x_2$	9	4,6614	4,3317	13	4,6497	3,9476	18	4,6484	3,8826

Tablo 7.5. Sınırdaki sıkı kenetlenme koşulu sağlandığı durumda farklı  $w^{(0)}(x_1, x_2)$  başlangıç yaklaşımları verildiği zaman, farklı  $\varepsilon$  değerleri için iterasyon (yaklaşım) sayısı ( $q=350$ [kN])

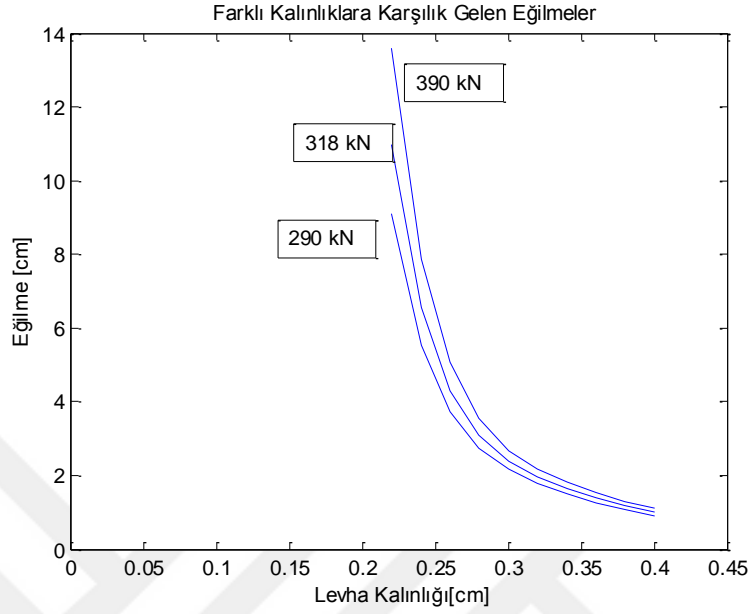
$w^{(0)}(x_1, x_2)$	$\varepsilon = 0,01$			$\varepsilon = 0,001$			$\varepsilon = 0,0001$		
	n	max w	$\xi^2$	n	max w	$\xi^2$	n	max w	$\xi^2$
$e^{x_1+x_2}$	15	2,6741	4,1325	19	2,6664	3,7169	26	2,6651	3,6477
$e^{x_1^2+x_2}$	20	2,6777	4,3454	25	2,6663	3,7081	31	2,6651	3,6468
$\sin\pi x_1 \sin\pi x_2$	7	2,6804	4,5085	12	2,6665	3,7221	18	2,6651	3,6482

Örnek 4. Levha kalınlığı ile eğilme arasındaki ilişkiyi araştırmak için Tablo 7.1'deki özelliklere sahip ve sınırlarda sıkı kenetlenme koşulunu sağlayan, elastoplastik levha için tanımlanan kafesin merkez noktasına ve bu nokta komşuluğundaki dört simetrik noktaya farklı şiddetteki kuvvetlerin uygulanması durumunda, levhanın kalınlığı değiştirildiğinde deformasyonda oluşan değişim gözlemlenmiştir.

Tablo 7.6. Sıkı kenetlenme sınır koşulunu sağlayan levhaya farklı kuvvetler uygulandığında farklı kalınlıklar için oluşan eğilmeler

k	h [cm]	q=290[kN]	q=318[kN]	q=350[kN]
		$w_{max}$ [cm]	$w_{max}$ [cm]	$w_{max}$ [cm]
1	0,22	7,3186	10,9784	13,5811
2	0,24	4,5776	6,5409	7,8542
3	0,26	3,1939	4,2971	5,0568
4	0,28	2,4046	3,0972	3,5630
5	0,30	1,9524	2,3890	2,6666
6	0,32	1,6087	1,9676	2,1656
7	0,34	1,3412	1,6404	1,8055
8	0,36	1,1299	1,3819	1,5210
9	0,38	0,9607	1,1750	1,2932
10	0,40	0,8237	1,0074	1,1088

Levhanın kalınlığı değiştikçe eğilme miktarındaki değişimin grafiği Şekil 7.4'te verilmiştir.



Şekil 7.4. Kuvvet değiştikçe sıkı kenetlenme koşulunu sağlayan levhanın kalınlığı ile deformatyonu arasındaki ilişki

Örnek 5. Bir cismin E elastisite modülü (Young Modülü) o malzemenin sertliğini karakterize eden bir sayıdır. Bu örnekteki bilgisayar deneyi  $E_1=21000[\text{kN}/\text{cm}^2]$  (sert) ve  $E_2=11000[\text{kN}/\text{cm}^2]$  (yumuşak) olmak üzere iki farklı malzemenin yapılmış Tablo 7.1'deki özellikleri taşıyan elastoplastik levhanın ele alındığı varsayılmıştır. Sertlik parametresi  $\kappa$  'nın değişen değerleri için levha yüzeyinde oluşan eğilme incelenmiştir.

Tablo 7.7. Sert ve yumuşak malzemeden yapılan, sıkı kenetlenme ve menteşe koşullarını sağlayan elastoplastik levhanın farklı  $\kappa$  değerleri için eğilmesi

$\kappa$	E=21000[kNcm <sup>-2</sup> ] $\xi_0^2=2,1$ q=[320 kN]		E=11000[kNcm <sup>-2</sup> ] $\xi_0^2=1,1$ q=[130 kN]	
	Sıkı Kenetlenme	Menteşe	Sıkı Kenetlenme	Menteşe
0,45	2,4059	5,2986	1,8855	4,2069
0,35	2,4046	5,1913	1,8752	4,0777
0,15	2,4035	5,1053	1,8667	3,9721

Zorlama sertlik parametresi  $\kappa$  küçüldükçe malzemenin sertliği artar ve daha az eğilme meydana gelir.

## 7.2. Levhanın Yapıldığı Malzemenin E Elastisite Modülünün Bulunması

Bu bölümde deney sonucunda verilen kuvvet-eğilme bağıntısından yararlanarak levhayı oluşturan malzemenin E elastisite modülünün bulunması amaçlanmaktadır ( $w_i$ 'ler  $F_i$  kuvvetlerine karşılık gelen maksimal eğilmelerdir). Teoriden bellidir ki (Kachanov, 1974), aynı kuvvet etkisi altında olan farklı iki malzemeden elastisite modülü büyük olanın eğilmesi daha küçüktür ( $E_1 > E_2$  ise  $w(E_1, F) < w(E_2, F)$ ).

Algoritma:

Belli bir F kuvveti uygulanması sonucunda eğilmekte olan elastoplastik levhanın maksimal eğilmesinin  $w_0$  olduğu varsayalım. F ve  $w_0$  verilerinden yararlanarak E 'nin bulunması için aşağıdaki algoritma geliştirilmiştir:

Önsel  $E = E_0$  verilir. Bu  $E_0$  ve F kuvvetinin etkisiyle levhanın yüzeyinde meydana gelen maksimal eğilme  $w_h(E_0; F)$  elde edilir. Düz problemin çözümü olan  $w_0$  ile  $w_h(E_0; F)$  karşılaştırılır.

(i1) a) Eğer,  $w_h(E_0; F) > w_0$  ise  $E_1 = E_0 + \delta E_0$

b) Eğer,  $w_h(E_0; F) < w_0$  ise  $E_1 = E_0 - \delta E_0$  ele alınarak düz problem çözülür ve  $w_h(E_1; F)$  ile  $w_0$  değerleri karşılaştırılır.

(i2) Birinci adımdaki işlemler  $w_0$  değeri iki ardışık  $E_k$  ve  $E_{k+1}$ ' e karşılık gelen maksimal eğilmeler yani  $w_h(E_k, F)$  ve  $w_h(E_{k+1}, F)$  arasında kalıncaya kadar devam ettirilir. Sonuçta  $w_h(E_k, F) < w_0 < w_h(E_{k+1}, F)$  veya  $w_h(E_k, F) > w_0 > w_h(E_{k+1}, F)$  olacaktır.

(i3) İkinci adımdaki koşulu sağlayan uygun  $E_k$  ve  $E_{k+1}$  elde edildikten sonra ikiye bölme yöntemiyle  $\tilde{E} = (E_k + E_{k+1})/2$  bulunur.  $\tilde{E}$  alınarak düz problem çözülür ve  $w_h(\tilde{E}, F)$  maksimal eğilmesi bulunur.  $\max |w_h(\tilde{E}, F) - w_0| \leq \varepsilon_E$  koşulunun sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilir. Bu koşul sağlanıyorsa  $E = \tilde{E}$  olarak ele alınır. Buradaki  $\varepsilon_E > 0$  değeri elastisite modülünün bulunması için istenilen kesinlik değerini temsil eder.

(i4) Eğer  $\max |w_h(\tilde{E}, F) - w_0| \leq \varepsilon_E$  koşulu sağlanmıyor ise o halde  $w_h(\tilde{E}, F) > w_0$  olduğunda  $E_k = E_k$ ,  $E_{k+1} = \tilde{E}$ ;  $w_h(\tilde{E}, F) < w_0$  olduğunda ise  $E_k = \tilde{E}$ ,  $E_{k+1} = E_{k+1}$  ele alınır ve (i3), (i4) adımları  $\max |w_h(\tilde{E}, F) - w_0| \leq \varepsilon_E$  koşulu sağlanıncaya kadar tekrarlanır.

Bu algoritma ile, farklı şiddetteki iki kuvvet ( $F=200$  [kN] ve  $F = 250$  [kN]) altında, sınırlarda sırasıyla menteşe ve sıkı kenetlenme koşullarını sağlayan levhanın eğilmesi probleminin çözümü kullanılarak elde edilen  $E$  değerleri Tablo 7.8-7.11'de verilmiştir.

Pratikte, levha yüzeyinde meydana gelen eğilmenin ( $w$ ) ölçülmüş değerlerinin sadece bir ölçüm hatasıyla verilebileceği göz önünde bulundurularak yaptığımız hesaplamalı deneyde "girdi verisi" olarak kullanılan  $w$  önce hatasız (noise free data) daha sonra da  $w_\alpha = w + \alpha w$  olacak şekilde farklı  $\alpha \in \mathbb{R}$  noise seviyeleriyle ele alınmıştır. Burada  $\alpha = \pm 0,03$ ,  $\alpha = \pm 0,05$ ,  $\alpha = \pm 0,10$  noise seviyeleri kullanılmıştır. Bütün durumlar için bağıl hata  $\delta E_h = \left\| \frac{E - E_h}{E} \right\|_{\infty, h}$  şeklinde tanımlanmıştır. Burada  $E_h$  yaklaşık olarak bulunan elastisite modülünün değeridir. Farklı  $\varepsilon_E > 0$  değerlerinde problem çözülmüş  $E$ 'nin hatası incelenmiştir. Tüm hesaplamalarda  $\nu = 0,5$  olarak alınmıştır.

Tablo 7.8'deki çıktı verilerini incelediğimizde, 200 [kN] şiddetindeki bir kuvvet altında sınırlarda menteşe koşulunu sağlayan elastoplastik levhada meydana gelen maksimal eğilme  $w = 3,1729$  [cm] olup, bu değer noise verilmeden kullanıldığında,  $E$  sabiti  $\varepsilon_E = 0,1$ ,  $\varepsilon_E = 0,01$ ,  $\varepsilon_E = 0,001$  kesinlikleriyle sırasıyla

$E=21100[\text{kNcm}^{-2}]$ ,  $E=20975[\text{kNcm}^{-2}]$  ve  $E=21006[\text{kNcm}^{-2}]$  olarak elde edilmiştir. Bu değer gerçek Young modülü değeri olan  $E=21000[\text{kNcm}^{-2}]$  'e oldukça yakın bir değer olup bağıl hata  $\varepsilon_E=0,1$  alındığında  $\delta E_h=0,0048$ ,  $\varepsilon_E=0,01$  durumu için  $\delta E_h=0,0012$  ve  $\varepsilon_E=0,001$  durumu için de  $\delta E_h=2,9762 \times 10^{-4}$  olarak hesaplanmıştır. Yani,  $\varepsilon_E$  küçüldükçe bağıl hata da küçülmüştür.

Aynı kuvvet altında elde edilen  $w$ ,  $\alpha=-0,03$  noise ile verildiğinde,  $E$  sabiti  $\varepsilon_E=0,01$  kesinliği ile  $E=21663[\text{kNcm}^{-2}]$ ;  $w$ ,  $\alpha=-0,05$  noise ile verildiğinde,  $E=22100[\text{kNcm}^{-2}]$ ;  $w$ ,  $\alpha=-0,10$  noise ile verildiğinde ise  $E=23350[\text{kNcm}^{-2}]$  olarak elde edilmiştir.  $w$  'nın hata seviyesi arttıkça  $E$ 'nin de gerçek değerinden uzaklaştığı yani bağıl hatasının arttığı gözlemlenmiştir. Fakat, tablodan görüldüğü gibi giriş verisi hatalı verildiği zaman elde edilen sonucun hatası verilen hata değerini aşmıyor. Aynı sınır koşullarına sahip levhaya farklı şiddette bir kuvvet uygulandığında hemen hemen aynı sonuçların elde edildiği görülmektedir.

Başlangıç verisi olarak alınan  $E_0$  değeri değiştirildiğinde, bağıl hatalarda zaman zaman çok küçük farklılıklar olsa da yaklaşık olarak aynı sonuçlara ulaşılmıştır. Bu verilerden yola çıkarak, uygulanan kuvvetin şiddeti ve  $E_0$  değeri ne olursa olsun oluşturulan algoritmanın yeterince yüksek bir kesinlikle  $E$  'nin belirlenmesine imkan verdiğini söylemek mümkündür. Bunun yanında, aynı koşullar altında, yani uygulanan yükün şiddeti ve maksimal eğilme aynı iken, sınır koşulu sıkı kenetlenme olarak değiştirildiğinde menteşe sınır koşulu için elde edilen değerlere benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Tablo 7.8. Sınırlarda menteşe koşulunun sağlandığı durumda levhanın çözümü kullanılarak E'nin bulunması (F=200 [kN])

E <sub>0</sub>	Noise	F=200 [kN] w=3,1729 [cm]					
		ε <sub>E</sub> =0,1	δE <sub>h</sub>	ε <sub>E</sub> =0,01	δE <sub>h</sub>	ε <sub>E</sub> =0,001	δE <sub>h</sub>
17600	%0	21100	0,0048	20975	0,0012	21006	2,9762×10 <sup>-4</sup>
	- % 3	22100	0,0524	21663	0,0315	21647	0,0308
	-% 5	22100	0,0524	22100	0,0524	22100	0,0524
	-% 10	23100	0,1000	23350	0,1119	23334	0,1112
	% 3	20100	0,0429	20350	0,0310	20389	0,0291
	% 5	20100	0,0429	19975	0,0488	19998	0,0477
	% 10	19100	0,0905	19100	0,0905	19092	0,0908
25350	%0	20850	0,0071	20975	0,0012	21006	2,9762×10 <sup>-4</sup>
	- % 3	21850	0,0405	21600	0,0286	21647	0,0308
	-% 5	21850	0,0405	22100	0,0524	22100	0,0524
	-% 10	22850	0,0881	23288	0,1089	23334	0,1112
	% 3	20850	0,0071	20850	0,0071	20389	0,0291
	% 5	19850	0,0548	19975	0,0488	19998	0,0477
	% 10	18850	0,1024	19100	0,0905	19092	0,0908

Tablo 7.9. Sınırlarda menteşe koşulunun sağlandığı durumda levhanın çözümü kullanılarak E'nin bulunması (F=250 [kN])

E <sub>0</sub>	Noise	F=250[kN] w=3,9661 [cm]					
		ε <sub>E</sub> =0,1	δE <sub>h</sub>	ε <sub>E</sub> =0,01	δE <sub>h</sub>	ε <sub>E</sub> =0,001	δE <sub>h</sub>
17600	%0	21100	0,0048	20975	0,0012	20998	7,4405×10 <sup>-4</sup>
	- % 3	22100	0,0524	21663	0,0315	21647	0,0308
	-% 5	22100	0,0524	22100	0,0524	22100	0,0524
	-% 10	23100	0,1000	23350	0,1119	23334	0,1112
	% 3	20100	0,0429	20350	0,0310	20389	0,0291
	% 5	20100	0,0429	19975	0,0488	20014	0,0469
	% 10	19100	0,0905	19225	0,0845	19186	0,0864
25350	%0	20850	0,0071	20975	0,0012	20998	7,4405×10 <sup>-4</sup>
	- % 3	21850	0,0405	21600	0,0286	21647	0,0308
	-% 5	21850	0,0405	22100	0,0524	22100	0,0524
	-% 10	22850	0,0881	23288	0,1089	23334	0,1112
	% 3	20850	0,0071	20850	0,0071	20389	0,0291
	% 5	19850	0,0548	19975	0,0488	20014	0,0469
	% 10	18850	0,1024	19225	0,0845	19186	0,0864



Tablo 7.10. Sınırlarda sıkı kenetlenme koşulunun sağlandığı durumda levhanın çözümü kullanılarak E'nin bulunması (F=200 [kN])

		F=200 [kN] w=1,5019 [cm]					
E <sub>0</sub>	Noise	ε <sub>E</sub> =0,1	δE <sub>h</sub>	ε <sub>E</sub> =0,01	δE <sub>h</sub>	ε <sub>E</sub> =0,001	δE <sub>h</sub>
17600	%0	21100	0,0048	21100	0,0048	21006	2,9762×10 <sup>-4</sup>
	- % 3	22100	0,0524	21725	0,0345	21663	0,0315
	-% 5	22100	0,0524	22100	0,0524	22100	00524
	-% 10	23100	0,1000	23350	0,1119	23319	0,1104
	% 3	20100	0,0429	20350	0,0310	20381	0,0295
	% 5	20100	0,0429	20100	0,0429	20006	0,0473
	% 10	19100	0,0905	19100	0,0905	19100	0,0905
25350	%0	20850	0,0071	21100	0,0048	21006	2,9762×10 <sup>-4</sup>
	- % 3	21850	0,0405	21600	0,0286	21663	0,0315
	-% 5	21850	0,0405	22100	0,0524	22100	0,0524
	-% 10	22850	0,0881	23225	0,1060	23319	0,1104
	% 3	20850	0,0071	20850	0,0071	20381	0,0295
	% 5	19850	0,0548	20100	0,0429	20006	0,0473
	% 10	18850	0,1024	19100	0,0905	19100	0,0905

Tablo 7.11. Sınırlarda sıkı kenetlenme koşulunun sağlandığı durumda levhanın çözümü kullanılarak E'nin bulunması (F=250 [kN])

		F=250 [kN] w=1,8773 [cm]					
E <sub>0</sub>	Noise	ε <sub>E</sub> =0,1	δE <sub>h</sub>	ε <sub>E</sub> =0,01	δE <sub>h</sub>	ε <sub>E</sub> =0,001	δE <sub>h</sub>
17600	%0	21100	0,0048	21100	0,0048	21006	2,9762×10 <sup>-4</sup>
	- % 3	22100	0,0524	21725	0,0345	21647	0,0308
	-% 5	22100	0,0524	22100	0,0524	22100	0,0524
	-% 10	23100	0,1000	23350	0,1119	23334	0,1112
	% 3	20100	0,0429	20350	0,0310	20381	0,0295
	% 5	20100	0,0429	20100	0,0429	20006	0,0473
	% 10	19100	0,0905	19100	0,0905	19100	0,0905
25350	%0	20850	0,0071	21100	0,0048	21006	2,9762×10 <sup>-4</sup>
	- % 3	21850	0,0405	21600	0,0286	21647	0,0308
	-% 5	21850	0,0405	22100	0,0524	22100	0,0524
	-% 10	22850	0,0881	23225	0,1060	23334	0,1112
	% 3	20850	0,0071	20850	0,0071	20381	0,0295
	% 5	19850	0,0548	20100	0,0429	20006	0,0473
	% 10	18850	0,1024	19100	0,0905	19100	0,0905

### 7.3. Optimal Kontrol Problemi ( F'nin Bulunması)

Bu bölümde yumuşak ( $E=11000$  [kNcm<sup>-2</sup>]) ve sert malzemelerden ( $E=21000$  [kNcm<sup>-2</sup>]) yapılmış levhaların maksimal eğilmesi göz önüne alınarak , levhaya etkileyebilecek yükün şiddetinin bulunması yani optimal kontrol problemi çalışılmıştır. Uygulanan kuvvet bulunurken, E Young modülü bulunması için yazılan algoritmaya benzer bir algoritma kullanılmıştır. Bu algoritma hazırlandığı zaman elastisite modülünden farklı olarak  $F_1 > F_2$  için  $w(E, F_1) > w(E, F_2)$  eşitsizliğinin sağlanması koşulu göz önüne alınmıştır.

Sınırlarda menteşe koşulunu sağlayan, sert malzemedan yapılmış ( $E=21000$  [kNcm<sup>-2</sup>]) levhanın ele alındığı varsayalım. Belli bir kuvvet uygulanması sonucu levha yüzeyinde meydana gelen eğilme, düz problemin çözümüdür. Amaç, eğilme miktarı biliniyor iken bu eğilmenin oluşabilmesi için levha yüzeyine uygulanan yükün şiddetini bulmaktır. Bu problemin çözümünü elde etmek amacıyla "girdi verisi" olarak kullanılan  $w$  önce hatasız (noise free data) daha sonra da  $w_\alpha = w + \alpha w$  olacak şekilde farklı  $\alpha \in \mathbb{R}$  noise seviyeleriyle ele alınmıştır. Burada  $\alpha = \pm 0,03$ ,  $\alpha = \pm 0,05$ ,  $\alpha = \pm 0,10$  noise seviyeleri kullanılmıştır. Bütün durumlar için bağıl hata  $\delta F_h = \left\| \frac{F - F_h}{F} \right\|_{\infty, h}$  şeklinde tanımlanmıştır.  $\varepsilon_F > 0$  parametresi, elde edilen E' nin kesinliğini belirlemek amacıyla tanımlanmıştır (Tablo 7.12).

Tablo 7.12'deki çıktı verilerini incelediğimizde, 200 [kN] şiddetindeki bir kuvvet altında sınırlarda menteşe koşulunu sağlayan elastoplastik levhanın yüzeyinde meydana gelen maksimal eğilme  $w = 3,1729$  [cm] olup, bu değer noise verilmeden kullanıldığında, F kuvveti  $\varepsilon_F = 0,1$  kesinliğiyle  $F = 203,75$  [kN],  $\varepsilon_F = 0,01$  kesinliğiyle  $F = 200,4688$  [kN],  $\varepsilon_F = 0,001$  kesinliği ile  $F = 200,0586$  [kN] olarak elde edilmiştir. Bu değer gerçek yükün şiddeti olan  $F = 200$ 'e oldukça yakın bir değer olup bağıl hata  $\varepsilon_F = 0,1$  alındığında  $\delta F_h = 0,0187$ ,  $\varepsilon_F = 0,01$  durumu için  $\delta F_h = 0,0023$  ve  $\varepsilon_F = 0,001$  durumu için de  $\delta F_h = 2,9297 \times 10^{-4}$  olarak hesaplanmıştır. Yani,  $\varepsilon_F$  küçüldükçe bağıl hata da küçülmüştür.

Aynı kuvvet altında elde edilen  $w$  ,  $\alpha = 0,03$  noise ile verildiğinde, F kuvveti  $\varepsilon_F = 0,01$  kesinliği ile  $F = 205,6250$  [kN] ;  $w$  ,  $\alpha = 0,05$  noise ile verildiğinde,  $F = 209,3750$  [kN];  $w$

,  $\alpha=0,10$  noise ile verildiğinde ise  $F=220,6250$ [kN] olarak elde edilmiştir.  $w$ 'nın hata seviyesi arttıkça  $F$ 'nin de gerçek değerinden uzaklaştığı yani bağıl hatasının arttığı gözlemlenmiştir.

Aynı sınır koşullarına sahip ancak maksimal eğilme miktarı farklı olan bir levhaya (yani uygulanan yükün şiddeti farklı iken), aynı işlemler uygulandığında elde edilen hata miktarının neredeyse aynı olduğu gözlemlenmiştir.

Başlangıç verisi olarak alınan  $F_0$  değeri değiştirildiğinde, bağıl hatalarda küçük farklılıklar olsa da birbirine çok yakın sonuçlara ulaşılmıştır.

Hesaplamalar aynı sınır koşuluna sahip ancak yumuşak malzemeden yapılmış bir levha için yapıldığında noise seviyeleri ve  $F$  'in hesaplanma kesinliği açısından benzer sonuçlar elde edilmiştir. Bu verilerden yola çıkarak, levhanın yapıldığı malzeme ne olursa olsun, oluşturulan algoritmanın yeterince yüksek bir kesinlikle  $F$ 'nin belirlenmesine imkan verdiği söylenebilir.

Bunun yanında, aynı koşullar altında, yani uygulanan Young modülü ve maksimal eğilme aynı iken, sınır koşulu sıkı kenetlenme olarak değiştirildiğinde menteşe sınır koşulu için elde edilen değerlere benzer sonuçlara ulaşılmıştır.

Tablo 7.12. Sınırlarda menteşe koşulunun sağlandığı durumda, sert malzemeden yapılmış levhanın çözümü kullanılarak F'nin bulunması

		E=21000[kN cm <sup>-2</sup> ] , w=3,1729 [cm] (F=200[kN])					
F <sub>0</sub>	Noise	ε <sub>F</sub> =0,1	δF <sub>h</sub>	ε <sub>F</sub> =0,01	δF <sub>h</sub>	ε <sub>F</sub> = 0,001	δF <sub>h</sub>
170 [kN]	%0	203,75	0,0187	200,46	0,0023	200,0586	2,9297×10
	- % 3	192,50	0,0375	194,37	0,0281	194,02	0,0299
	-% 5	192,50	0,0375	190,62	0,0469	190,03	0,0498
	-% 10	177,50	0,1125	179,37	0,1031	179,96	0,1002
	% 3	207,50	0,0375	205,62	0,0281	205,97	0,0299
	% 5	207,50	0,0375	209,37	0,0469	209,96	0,0498
	% 10	222,50	0,1125	220,62	0,1031	220,03	0,1002
300 [kN]	%0	202,50	0,0125	200,62	0,0031	200,03	1,9531×10
	- % 3	191,25	0,0437	194,06	0,0297	194,06	0,0297
	-% 5	187,50	0,0625	189,37	0,0531	189,96	0,0502
	-% 10	187,50	0,0625	187,50	0,0625	187,50	0,0625
	% 3	202,50	0,0125	206,25	0,0313	206,01	0,0301
	% 5	217,50	0,0875	217,50	0,0875	217,50	0,0875
	% 10	217,50	0,0875	219,37	0,0969	219,96	0,0998

Tablo 7.13. Sınırlarda menteşe koşulunun sağlandığı durumda, yumuşak malzemeden yapılmış levhanın çözümü kullanılarak F'nin bulunması

		E=11000[kN cm <sup>-2</sup> ] , w=6,7861 [cm] (F=200[kN])					
F <sub>0</sub>	Noise	ε <sub>F</sub> =0,1	δF <sub>h</sub>	ε <sub>F</sub> =0,01	δF <sub>h</sub>	ε <sub>F</sub> =0,001	δF <sub>h</sub>
170 [kN]	%0	200,9375	0,0047	200,1172	5,8594×10 <sup>-4</sup>	200,0146	7,3242×10 <sup>-5</sup>
	- % 3	196,25	0,0187	196,25	0,0187	196,1621	0,0192
	-% 5	192,50	0,0375	193,43	0,0328	193,3496	0,0333
	-% 10	186,87	0,0656	186,40	0,0680	186,2598	0,0687
	% 3	203,75	0,0187	203,75	0,0187	203,6914	0,0185
	% 5	207,50	0,0375	206,09	0,0305	206,0938	0,0305
	% 10	211,25	0,0563	212,18	0,0609	212,1289	0,0606
300 [kN]	%0	198,75	0,0063	200,15	7,8125×10 <sup>-4</sup>	200,0098	4,8828×10 <sup>-5</sup>
	- % 3	202,50	0,0125	196,17	0,0191	196,1719	0,0191
	-% 5	193,12	0,0344	193,35	0,0332	193,3594	0,0332
	-% 10	187,50	0,0625	186,09	0,0695	186,2695	0,0687
	% 3	202,50	0,0125	203,67	0,0184	203,6719	0,0184
	% 5	206,25	0,0313	206,25	0,0313	206,1035	0,0305
	% 10	213,75	0,0688	212,10	0,0605	212,1387	0,0607

## 8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, deformasyon teorisinin önemli problemlerinden biri olan elastoplastik levhanın eğilmesi probleminin matematiksel modeli incelenmiştir. Bu tür problemlerin matematiksel modeli literatürde Von-Karman denklemi olarak adlandırılan dördüncü mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklem için sınır değer problemi ile ifade edilmektedir. Bu tez çalışmasında, Klasik Levha Teorisi - Kirchhoff Teorisinden yararlanarak probleme karşılık gelen diferansiyel denklem ve sınır koşulları elde edilmiştir. Az miktardaki eğilmeler esneklik durumuna karşılık gelir ve bu nedenle model lineer bir diferansiyel denklem ile ifade edilir. Fakat eğilmelerin miktarı arttığı durumda kalıcı deformasyonun ortaya çıkması ile elde edilen biharmonik denklem lineer olmayan diferansiyel denkleme dönüşür. Tezde, elastoplastik levhanın eğilmesine karşılık gelen lineer olmayan denklemin zayıf çözümü monoton potansiyel operatörler yardımı ile incelenmiştir. Ele alınan sınır değer probleminin sayısal çözümünü bulmak için ayrık problem Sonlu Fark Yönteminden yararlanılarak elde edilmiş, hatayı azaltmak amacı ile sınır koşullarının daha az hatalı yaklaşımları verilmiştir. Oluşturulan algoritmanın yardımı ile bilgisayar programı yazılmış, problemin çözümüne benzer olan fonksiyonlar yardımı ile hazırlanmış program test edilmiş ve elde edilen sayısal çözümün geniş hata analizi yapılmıştır. Programın doğruluğu kanaatine varıldıktan sonra uygulama problemleri çözülmüş ve sonuçların sayısal analizi yapılmıştır. Levhaları oluşturan malzemenin özelliklerinin ve kalınlığın eğilmelere etkisi incelenmiştir. Bilgisayar deneylerinden elde edilen sonuçlar hem matematik, hem de mühendislik açısından ilgi çekici ve faydalı bakış açısı oluşturmaktadır. Farklı kuvvet ve eğilmelere bağlı olarak levhanın yapıldığı malzemenin E-Young modülünün ve levhanın mümkün olabilir eğilme sınırı belli olduğu durumda yüklenecek maksimal yük miktarının bulunması (optimal kontrol) problemi çözülmüş, başlangıç verilerinin içermiş olduğu hataların elde edilen sonuca etkisi incelenmiştir. Tezde elde edilen sonuçlar matematik, fizik ve sayısal mekanik alanlarındaki çeşitli problemlere uygulanabilir. Oluşturulmuş olan algoritma ters katsayı problemlerinin sayısal çözümünün bulunması için önemli katkı sağlamaktadır.

## KAYNAKLAR

Adams R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1974.

Altiero N. J., Sikarskie D. L., A Boundary Integral Method Applied to Plates of Arbitrary Plan Form, *Computers and Structures*, 1978, **9**, 163-168.

Arad M., Yakhot A., Ben-Dor G., A Highly Accurate Numerical Solution of a Biharmonic Equation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 1997, **13**, 375-391.

Bernoulli J., *Essai Théorétique Sur Les Vibrations Des Plaques Elastiques Rectangulaires et Libres*, 5th ed., Nova Acta, Peter Lang, 1789.

Boobnov I. G., *Theory of Structures of Ships*, 2nd ed., Bull Ridge Corporation, St. Petersburg, 1914.

Ciarlet P., *Finite-Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, Amsterdam, 1978.

Cox H. L., *The Buckling of Plates and Shells*, Macmillan, New York, 1963.

Ekmekyapar T., Özakça M., *Mukavemet*, Nobel, Ankara, 2014.

Forbes D. J., Robinson A. R., Numerical Analysis of Elastic Plates and Shallow Shells by an Integral Equation Method, *University of Illinois*, 1969, **345**, 55-95.

Föppl A., *Technische Mechanik*, 5th ed., B. G. Teubner, Leipzig, 1907.

Gerard G., Becker H., *Handbook of Structural Stability, Part I-Buckling of Flat Plates*, NACA TN, New York University, 1957.

Hasanov A., Mamedov A., An Inverse Problem Related to the Determination of Elastoplastic Properties of a Plate, *Inverse Problems*, 1994, **10**, 601-615.

Hasanov A., Nonlinear Monotone Potential Operators: From Nonlinear ODE and PDE to Computational Material Science, *Advances in Dynamical Systems and Applications*, 2010, **5(2)**, 173-190.

Hasanov A., Variational Approach to Non-linear Boundary Value Problems for Elastoplastic Incompressible Bending Plate, *Int. J. Nonl. Mech.*, 2007, **42**, 711-721.

Hasanov A., *Varyasyonel Problemler ve Sonlu Elemanlar Yöntemi*, Literatür Yayıncılık, İstanbul, 2001.

Hasanov A., An Inverse Problem for an Elastoplastic Medium, *SIAM J. Appl. Math.*, 1995, **55**, 1736-1752.

Hasanov A., Inverse Coefficient Problems for Elliptic Variational Inequalities with a Nonlinear Monotone Operator, *Inverse Problems*, 1998, **14**, 1151-1169.

Hudramovich V., Hart E., Ryabokon S., Elastoplastic Deformation of Nonhomogeneous Plates, *J. Eng. Math.*, DOI:10.1007/S10665-010-9409-5.

Jaswon M. A., Maiti M., Symm G. T., Numerical Biharmonic Analysis and Some Applications, *Int. J. Solids Struct.*, 1967, **3**, 309-332.

Jia H., Liu X., Large Increment Method for Elastic and Elastoplastic Analysis of Plates, *Finite Elements in Analysis and Design*, 2014, **88**, 16-24.

Jones R. M., *Mechanics of Composite Materials*, Scripta Book Company, Texas, 1975.

Kachanov L. M., *Fundamentals of the Theory of Plasticity*, Mir, Moscow, 1974.

Karam V. J., Telles J. C., On Boundary Elements for Reissner's Plate Theory, *Eng. Anal.*, 1988, **5**, 21-27.

Kreyszig E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons, New York, 1978.

Krylov A. K., On Stresses Experienced by a Ship in a Sea Way, *Trans. Inst. Naval Architects*, 1898, **40**, 197-209.

Ladopoulos E. G., Plate Bending for Frame Analysis by Coupling Method of Singular Integral Operators Method with Finite Elements, *Forsch Ingenieurwes*, DOI: 10.1007/s10010-012-0154-y.

Langenbach A., Elastisch-plastische Deformationen Von Platten, *Z. Angew. Math. Mech.*, 1961, **41**, 126-134.

Leitão M. A., A Meshless Method for Kirchhoff Plate Bending Problems, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 2001, **52**, 1107-1130.

Levy M., Memoire Sur La Theorie des Plaques Elastiques Planes, *J. Math. Pure Appl.*, 1899, **3**, 219.

Lewe V., *Pilzdecken*, 2nd ed., W. Ernst und Sohn, Berlin, 1926.

Mikhlin S. G., *Variational Methods in Mathematical Physics*, Pergamon, New York, 1964.

Nadai A., *Die Elastischen Platten*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1925.

- Navier C. H., Mémoire Sur Les Loix de l'équilibre et du Movement des corps Solides Elastiques, *Bull. Soc. Philomath.*, 1823, **22**, 83-92.
- Nayroles B., Touzot G., Villon P., Generalizing the Finite element Method: Diffuse Approximation and Diffuse Elements, *Computational Mechanics*, 1992, **10**, 307-318.
- Omurtag M. H., *Mukavemet*, 4. Baskı, Birsen Yayinevi, İstanbul, 2012.
- Pajand M. R., Karkon M., Hybrid Stress and Analytical Functions for Analysis of Thin Plates Bending, *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2014, **11**, 556-579.
- Panov D., On Large Deflections of Circular Plates, *Prikl Matem Mech.*, 1941, **5(2)**, 45-56.
- Rektorys K., *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering*, D. Reidel Publishing Company, Boston, 1977.
- Samarskii A. A., Andreev V. B., *Difference Methods for Elliptic Equations*, Nauka, Moscow, 1976.
- Sokolnikoff I. S., *Mathematical Theory of Elasticity*, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1956.
- Stern M., A General Boundary Integral Formulation for Plate Bending Problems, *Int. J. Solids struct.*, 1979, **15**, 769-782.
- Teschl G., *Nonlinear Functional Analysis*, Vienna University, Vienna, 2001.
- Timoshenko S. P., Gere J. M., *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1961.
- Timoshenko S. P., Goodier J. N., *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York, 1951.
- Timoshenko S. P., *History of Strength of Materials*, McGraw-Hill Book Company, United States of America, 1953.
- Timoshenko S. P., *On Large Deflections of Circular Plates*, Mem. Inst. Ways Commun, New York, 1915.
- Timoshenko S. P., Sur la Stabilité des Systemes Elastiques, *Ann des Points et Chaussees*, 1913, **13**, 496-566.
- Timoshenko S. P., Woinowsky-Krieger S., *Theory of Plates and Shells*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1959.
- Vainberg M. M., *Variational Method and Method of Monotone Operators in Theory of Nonlinear Equations*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1972.



Vander F., Application of the Boundary Integral Equation Method to Reissner's Plate Model, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 1982, **18**, 1-10.

Vavourakis V., Loukidis D., Charnpis D. C., Papanastasiou P., A Robust Finite Element Approach for Large Deformation Elastoplastic Plane-Strain Problems, *Finite Elements in Analysis and Design*, 2013, **77**, 1-15.

Volmir A. S., *Flexible Plates and Shells*, State Technics, Moscow, 1956.

Washizu K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, 2nd ed., Pergamon, New York, 1981.

Wen P. H., Aliabadi M. H., Young A., A Boundary element Method for Dynamic Plate Bending Problems, *Int. Journal of Solids and Structures*, 2000, **37**, 5177-5188.

Wen P.H., Aliabadi M.H., Young A., Large Deflection Analysis of Reissner Plate by Boundary Element Method, *Computers and Structures*, 2005, **83**, 870-879.

Zeidler, E., *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, II: Nonlinear Monotone Operators*, Springer Verlag, New York, 1990.

## KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

**Ilhan F.**, Muradoğlu Z., Numerical Solution of Non-linear Biharmonic Equation for Elasto-plastic Bending Plate, *Applied Mathematical Sciences*, 2015, **9**(146), 7269-7280.

Muradoğlu Z., **Ilhan F.**, Numerical Solution To The Bending Problem For Nonhomogeneous Plate With Different Boundary Conditions, *Sixth International Conference on Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications*, Mersin, Türkiye, 4-9 Eylül 2012.

Muradoğlu Z., **Ilhan F.**, Numerical Solution of Inverse Coefficient Problem for Nonlinear Biharmonic Equation, *The Seventh International Conference, "Inverse Problems: Modeling & Simulation"*, Fethiye, Türkiye, 26-31 Mayıs 2014.

**Ilhan F.**, Muradoğlu Z., On Elasto-plastic Deformation of a Bending Plate with Simply Supported Boundary, *International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling*, İstanbul, Türkiye, 8-12 Haziran 2015.

**Ilhan F.**, Muradoğlu Z., Determination of an unknown elastic modulus in an elastoplastic bending plate based on maximal deflection, *The Eight International Conference, "Inverse Problems: Modeling & Simulation"*, Fethiye, Türkiye, 23-28 Mayıs 2016.

**Ilhan F.**, Muradoğlu Z., Elastoplastic Deformation of an Incompressible Bending Plate with Clamped Boundary, *International Congress on Fundamental and Applied Sciences*, İstanbul, Türkiye, 22-26 Ağustos 2016.

## ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Elazığ'da doğdu. İlkokul ve ortaokul eğitimini Elazığ'da, lise eğitimini İstanbul'da tamamladı. 2000 yılında girdiği Abant İzzet Baysal Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2005 yılında mezun oldu. Aynı yıl Abant İzzet Baysal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimine ve araştırma görevlisi olarak görev yapmaya başladı. 2008 yılında yüksek lisans eğitimini tamamladı. 2010 yılında ise Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde doktora öğrenimine başladı.

