

**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**SEDİMENT DİFÜZYON REAKSİYON DENKLEMİNİN**  
**FOURIER SERİSİ TABANLI NÜMERİK TERS LAPLACE**  
**YAKLAŞIMI İLE ÇÖZÜMÜ**

**SAVAŞ YÜCE**

**KOCAELİ 2017**

**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**SEDİMENT DİFÜZYON REAKSİYON DENKLEMİNİN**  
**FOURIER SERİSİ TABANLI NÜMERİK TERS LAPLACE**  
**YAKLAŞIMI İLE ÇÖZÜMÜ**

**SAVAŞ YÜCE**

**Prof. Dr. Safa Bozkurt COŞKUN**  
**Danışman, Kocaeli Üniv.**

**Yrd. Doç. Dr. Hakan ERDOĞAN**  
**Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv.**

**Yrd. Doç. Dr. Mehmet Tarık ATAY**  
**Jüri Üyesi, Abdullah Gül Üniv.**



**Tezin Savunulduğu Tarih: 24/07/2017**

## ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında beni teşvik eden, her konuda desteğini esirgemeyen, akademik tecrübesi, bilgi ve birikimiyle yol göstererek, çalışmamın başarıyla sonuçlanmasını sağlayan, tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Safa Bozkurt ÇOŞKUN'a teşekkür ederim.

Tez boyunca beni destekleyen ve maddi manevi hiçbir destekten kaçınmayan aileme sonsuz teşekkürler ederim.

Temmuz – 2017

Savaş YÜCE

## İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR .....	i
İÇİNDEKİLER .....	ii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	iii
TABLolar DİZİNİ .....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....	v
ÖZET.....	vi
ABSTRACT.....	vii
GİRİŞ .....	1
1. BAŞLANGIÇ SINIR KOŞULLU SEDİMENT REAKSİYON VE DİFÜZYON EŞİTLİĞİ .....	4
1.1. Askıda Yük Denklemi Entegre Formülü .....	4
1.2. Yatay Askıda Yükleme Konsantrasyonu Değişimleri .....	5
1.3. Askıda Sediment Yüklenmesinin Yatay Değişimi .....	6
1.4. Yatak Yüzeyinde Yatay Sediment Boyut Dağılımı .....	6
1.5. Taban Sınır Koşullu Kararsız Sediment Taşınımı .....	6
1.6. Genelleştirilmiş Alt-Sınır Koşulu Elde Edilmesi.....	7
1.7. Genelleştirilmiş Başlangıç ve Sınır Koşullu Sediment-Reaksiyon-Difüzyon Denklemine Laplace Dönüşümü ile Analitik Olarak Çözümü .....	8
2. FOURIER SERİLERİ YARDIMIYLA NÜMERİK TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ .....	12
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ BAŞLANGIÇ SINIR KOŞULLU SEDİMENT-REAKSİYON-DİFÜZYON DENKLEMİNİN FOURIER SERİLERİ TABANLI NÜMERİK TERS LAPLACE YAKLAŞIMI İLE ÇÖZÜMÜ .....	14
3.1. Fourier Serileri Yöntemli Sayısal Nümerik Ters Laplace Metoduyla Başlangıç Sınır Koşullu Sediment Reaksiyon ve Difüzyon Eşitliğinin Çözümü .....	15
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER .....	28
KAYNAKLAR .....	29
ÖZGEÇMİŞ .....	30

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1.	B=1,0 için K=0,35 ve C*=2,0 için analitik çözüm .....	18
Şekil 3.2.	B=2,0 için K=0,35 ve C*=2,0 için analitik çözüm .....	18
Şekil 3.3.	B=4,0 için K=0,35 ve C*=2,0 için analitik çözüm .....	19
Şekil 3.4.	B=20,0 için K=0,35 ve C*=2,0 için analitik çözüm .....	19
Şekil 3.5.	B=1,0 ve T= 0,0 zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması .....	22
Şekil 3.6.	B=1,0 ve T= 0,1 zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması .....	22
Şekil 3.7.	B=1,0 ve T= 0,4 zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması .....	22
Şekil 3.8.	B=1,0 ve T= 0,8 zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması .....	23
Şekil 3.9.	B=2,0 ve T= 0,0 zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması .....	23
Şekil 3.10.	B=2,0 ve T= 0,1 zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması .....	23
Şekil 3.11.	B=2,0 ve T= 0,4 zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması .....	24
Şekil 3.12.	B=2,0 ve T= 0,8 zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması .....	24
Şekil 3.13.	B=2,0 ve T=0,8 zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması .....	24
Şekil 3.14.	B=4,0 ve T= 0,1 zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması .....	25
Şekil 3.15.	B=4,0 ve T= 0,4 zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması .....	25
Şekil 3.16.	B=4,0 ve T= 0,8 zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması .....	25
Şekil 3.17.	B=20,0 ve T= 0,0 zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması .....	26
Şekil 3.18.	B=20,0 ve T= 0,1 zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması .....	26
Şekil 3.19.	B=20,0 ve T= 0,4 zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması .....	26
Şekil 3.20.	B=20,0 ve T= 0,8 zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması .....	27

## TABLULAR DİZİNİ

Tablo 1.1. Taban konsantrasyonu $B=2,0$ ve %5 oranına ulaştığındaki değerler.....	10
Tablo 1.2. Taban konsantrasyonu $B=1,0$ ve %5 oranına ulaştığındaki değerler.....	10
Tablo 1.3. Taban konsantrasyonu $B=2,0$ için maksimum değerine ulaştığındaki değerler .....	11
Tablo 1.4. Taban konsantrasyonu $B=1,0$ için maksimum değerine ulaştığındaki değerler .....	11
Tablo 3.1. $B= 1$ için $K=0,35$ ve $C^*=2,0$ hesaplanan değerler.....	21
Tablo 3.2. $B= 2$ için $K=0,35$ ve $C^*=2,0$ hesaplanan değerler.....	21
Tablo 3.3. $B= 4$ için $K=0,35$ ve $C^*=2,0$ hesaplanan değerler.....	21
Tablo 3.4. $B= 20$ için $K=0,35$ ve $C^*=2,0$ hesaplanan değerler.....	21

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\beta$	: Sediment birikme hızı, (m/sn)
$c$	: Sediment konsantrasyonu, (kg/m <sup>3</sup> )
$h$	: Su akış derinliği, (m)
$k$	: Sediment difüzyon katsayısı, (m <sup>2</sup> /sn)
$r$	: Sediment reaksiyon katsayısı, (sn <sup>-1</sup> )
$t$	: Zaman, (sn)
$u$	: Akışkan hızı, (m/sn)
$w$	: Çökelme hızı, (m/sn)

### Kısaltmalar

RMSE	: Root Mean Square Error (Ortalama Hata Kareleri Kökü)
TopSay	: Açılan Terim Sayısı

## SEDİMENT DİFÜZYON REAKSİYON DENKLEMİNİN FOURİER SERİSİ TABANLI NÜMERİK TERS LAPLACE YAKLAŞIMI İLE ÇÖZÜMÜ

### ÖZET

Bu çalışmada genelleştirilmiş sınır ve başlangıç koşulları ile sediment-difüzyon-reaksiyon denklemi ele alınmış denklemin çözümü için Fourier serileri tabanlı bir nümerik Laplace dönüşümü tekniği uygulanmıştır. Elde edilen çözümler bu probleme ait literatürde yer alan analitik çözümlerle kıyaslanmıştır. Hataların değerlendirilmesi için kriter olarak hataların kareleri ortalamasının karekökü kullanılmıştır. Sunulan problemin genelleştirilmiş sınır ve başlangıç koşulları altında analitik çözümlerini elde etmek oldukça zordur. Önerilen yöntem ile elde edilen çözümlerle analitik çözümler arasındaki fark 0,0001 mertebesindedir. Problem için elde edilen çözümlerin literatürde var olan analitik çözümlerle çok iyi bir uyum sağladığı görülmüştür.

**Anahtar Kelimeler:** Fourier Serileri, Sediment Difüzyonu, Sediment-Difüzyon-Reaksiyon Denklemi, Ters Laplace Yöntemi.



## **SOLUTION OF SEDIMENT DIFFUSION REACTION EQUATION WITH FOURIER SERIES BASED NUMERICAL INVERSE LAPLACE APPROACH**

### **ABSTRACT**

In this study sediment-diffusion-reaction equation under generalized initial and boundary conditions is considered and a Fourier series based numerical Laplace transformation technique is applied for the solution. The solutions obtained using proposed technique is compared with the analytical solutions available in the literature. Errors are evaluated using root mean square error. Analytical solutions are very difficult to obtain for the problem under generalized initial and boundary conditions. The difference between the analytical solutions and numerical solutions is about 0,0001. A very good agreement is observed between the solutions obtained and the analytical solutions available in the literature.

**Keywords:** Fourier Series, Sediment Diffusion, Sediment-Diffusion-Reaction Equation, Inverse Laplace Transform.

## GİRİŞ

Dünya nüfusundaki büyüme her geçen gün büyük bir artış göstermektedir, bu artışla birlikte yiyecek ve içecek kaynaklara olan ihtiyaçta buna paralel şekilde artış göstermektedir. Pimentel & Pimentel (2006) göre insanların yemek ihtiyaçlarının %99,9 karalardan, geri kalan kısmı ise denizler ve okyanuslardan karşılanmaktadır. Ayrıca, her insanın günde 1 litreden biraz fazla tatlı suya ihtiyacı bulunduğu rapor edilmiştir (Pimentel ve diğ., 2004). Bununla birlikte, tatlı su kaynaklarının 70%'nin tarım ürünleri için harcandığı UNESCO (2001) tarafından rapor edilmiştir. Bu yüzden en önemli tatlı su kaynaklarına olan ihtiyaç her geçen gün daha da artmaktadır. Örnek vermek gerekirse, günümüz dünyasında yeryüzündeki 1,4 milyar insanın halen temiz ve içilebilir sulardan mahrum olduğu UNESCO (2015) raporunda bildirilmiştir. Bununla beraber, dünya nüfusunun 2050 yılında 9,7 milyar rakamlarına varacağı düşünülürse UNESCO (2015), içilebilir su kaynaklarının ne denli hayati olduğu daha rahat anlaşılabilir. Dünya nüfusundaki bu artışı paralel olarak ülkemizde nüfusu hızlı bir şekilde artmaktadır, örneğin, 1920'lerin başlarında ülkemizin nüfusu yaklaşık olarak 13 milyon iken, günümüzde 80 milyon sınırlarına varmıştır, buna paralel olarak ülkemizdeki endüstriyellemeye aynı oranlarda artmıştır. Bu artışlar tatlı su kaynaklarımıza olan ihtiyacımızı beklenenden daha fazla artırmıştır.

Yeryüzü üzerindeki en önemli tatlı su kaynakları nehirlerdir, nehirlerin kaliteleri ve seviyeleri iklim değişiklikleri, doğal kuvvetler ve insanların suyu kullanım rejimlerine göre değişir, ancak içinde bulunduğumuz yüzyılda, istenmeyen doğal koşullar ve bilinçsiz sorumsuz insan davranışlarının etkisiyle bu tatlı su kaynakları kullanılamaz hale gelmektedir, bununla beraber, bu dış etkenler, nehirlerin debisinde değişikliklerin yaşanmasında sebep olmakta, bu debi değişimleri ise faydalı tarım topraklarının sediment taşınımıyla (erozyonla) kaybına sebep olmaktadır. Bunun kontrol altına alınması için bir çok çalışma yapılmıştır, bunlardan biride sediment parametresinin tahmini ve hesaplanmasıyla yapılan çalışmalardır. Bu parametrenin bilinmesiyle içme suyu temini ve kalitesi, endüstriyel kullanımı, tarım ve ormancılık,

çiftlik hayvanı yetiştiriciliği, su ürünleri yetiştiriciliği, madencilik, ulaşım, baraj kullanım ömürleri ve hidroelektrik üretimi gibi faaliyetlerin planlanması, ekolojik hayatın devamı ve sürdürülebilir bir yaşam için kaynak çalışmaları yapılmasında kullanılması, iyileştirilmesi, kontrol edilmesi ve korunması için gerekli önlemlerin alınması daha da kolaylaşacaktır.

Tarihi kaynaklara göre akarsuların daha verimli ve güvenli kullanılması için köprüler, su kanalları, sel bentleri gibi birçok mühendislik eserlerinin 4000 yıl önce Çin, Mısır ve Anadolu'da kullanıldığına dair bilgiler rapor edilmiştir (Simon ve Şentürk, 1992).

Günümüzde ise akarsu veya nehir kaynaklarının korunması için sediment kontrolü yapılmaktadır. Bu parametre ile hem akarsuların debi ve kalitesindeki değişiklikler gözlenebilmekte, hem de akarsu akımında bulunan sedimentlerin kaynağı olan mevcut verimli toprakların kaynağında korunması sağlanmış olur. Son yıllarda sedimentin, nehirlerin vasıtasıyla taşınmasıyla ilgili birçok çalışma yapılmış ve yapılan çalışmaların birçoğu matematiksel modelleme tabanlı olarak ve deneysel tabanlı olarak literatüre sunulmuştur.

Akarsularda su akarken beraberinde katı maddelerinde suyun kuvvetiyle hareket etmeye zorlar veya sürüklenmesinde sebep olur. Bu maddeler suyun yatağından veya bulunduğu havzadan kaynaklanır. Akımın kuvvetinin giderek azalmasıyla bu materyallerin bir kısmı çökmeye ve birikim yapmaya başlar. Akarsulardaki sediment taşınması, parçacıkların hareket şekline göre iki sınıfa ayrılır:

a) Sürüntü Hareketi: Akarsu akımının yatağındaki değişkenlik, akarsuyun hidrolik sınırları içinde bulunan parçacıklarından önce titreşmeye başlaması daha sonrada akımın şiddetinin artmasıyla yatak üzerinde kayma, yuvarlanma veya sıçrama hareketleriyle oluşur. Genellikle nehir akımlarında taşınan yatak yükü miktarı, askıdaki yükün %5 – 25`ni oluşturur.

b) Askı Hareketi: Akarsu yatağındaki akımın hızının artmasıyla, akarsu yatağında bulunan sedimentin çökmesi, hızları küçük olan ince parçacıkların yataktan ayrılmasına sebep olur, Bu parçacıklardan bazıları akımla birlikte süspansiyon ya da askıda olarak hareket eder.

Sedimentlerin askı hareketlerinin açıklanması için Difüzyon ve Enerji Modelleri geliştirilmiştir. Geliştirilen modeller ile askı hareketinin karakteristiği ve davranış yapısı analiz edilmeye çalışılmaktadır. Bu çalışmada, reaksiyon ve difüzyon şartlarında dengede olmayan sediment taşınımı için genelleştirilmiş başlangıç ve sınır koşulları altında çözümler elde edilmiştir. Tezin başlangıç bölümünde sediment-reaksiyon-difüzyon denkleminin genelleştirilmiş başlangıç ve sınır koşulları altında analitik çözümü ele alınmıştır. Tezin 3. Bölümünde, Fourier serileri yöntemi ile ters Laplace işleminin uygulanması detaylı olarak açıklanmıştır. Tezin 4. bölümünde ise sediment-reaksiyon-difüzyon denkleminin ters Laplace yönteminin Fourier serileri ile birlikte kullanımı ile nümerik olarak çözülmüş ve elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

## 1. BAŞLANGIÇ SINIR KOŞULLU SEDİMENT REAKSİYON VE DİFÜZYON EŞİTLİĞİ

Sediment taşınımı teorisinde difüzyon etkisi dikkate alındığında, askıda yükleme konsantrasyonunun açıklanması, advektif-difüzyon denkleminin bilinmesiyle çözümü ile sağlanır. Denklem (1.1)'deki gibi Mei (1969) tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır;

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} - w \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial c}{\partial x} \quad (1.1)$$

$u$ =akışkan hızı uzunlamasına yönde (m/sn),  $w$ =çökme hızı (aşağı yön, pozitif m/sn),  $x$ =yatay koordinat (m),  $z$ =dikey koordinat (yukarı yön pozitif, m),  $t$ =zaman (sn),  $c$ =sediment konsantrasyonu ( $\text{kg/m}^3$ ),  $k$ =sediment difüzyon katsayısı ( $\text{m}^2/\text{sn}$ ),  $r$ =sediment reaksiyon katsayısı ( $\text{sn}^{-1}$ ).

Bu yöntem sediment boyut dağılımındaki değişimleri önemsememektedir. Bu yöntemin amacı taşıma işlemi sırasında düzensiz sediment için boyut dağılımının yanı sıra konsantrasyon varyasyonlarını analiz etmek için kolayca kullanılabilen derinlik ortalaması alınmış askıda yük denklemi türetmektir (Cheng, 1984).

### 1.1. Askıda Yük Denklemi Entegre Formülü

Askıda yük denklemi, advektif-difüzyon denklemi ve sınır koşullarına temel alınarak oluşturulmuştur Cheng (1985). Advektif- difüzyon Denklem (1.1) sıfır kütle transferi kesin referans derinliği  $h$  olarak belirtilmiştir;

$$k \frac{\partial c}{\partial z} + wc \Big|_{z=h} = 0 \quad (1.2)$$

İkinci sınır koşulu net kütle transferi yatak yüzeyindeki birikme ve akışkan içerisinde sürüklenme olarak açıklanmıştır;

$$\left( k \frac{\partial c}{\partial z} + wc \right)_{z=0} = -\alpha w (c - c_0)_{z=0} \quad (1.3)$$

$C_*$ =yatak yüzeyindeki partiküllerin konsantrasyonu,  $\alpha$ =boyutsuz yatak ve sedimentin yansıtma katsayısı,  $\alpha w$ =birikme hızı,  $\alpha w C_*$ =sınır akışı.

Advektif sediment difüzyon denkleminde  $u(\partial c/\partial x)$  taşınım terimini elimine etmek için  $\xi=x-u$  ve  $\tau=t$  transformasyonu yapılmaktadır. Böylece advektif-sediment difüzyon denklemi aşağıdaki formu alır;

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial c}{\partial z} + w c \right) \quad (1.4)$$

Yatak derinliği ortalama derinlik ile entegre edilirse Denklem (1.2) ve (1.3) sınır koşulları altında difüzyon denklemi aşağıdaki şekle dönüşür;

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial \tau} = - \frac{\alpha w}{h} (c - \bar{c}) \quad (1.5)$$

Yukarıdaki denklemde partiküller üniform boyutlu olarak kabul edilmiştir. Üniform olmayan partiküller için  $R_i$  ağırlık fraksiyon  $i$ .ci boyut aralığındaki grup için ifade edilerek Denklem (1.5) genelleştirilirse, aşağıdaki Denklem elde edilir;

$$\frac{\partial R_i \bar{c}}{\partial \tau} = - \frac{\alpha w_i}{h} R_i (\bar{c} - \bar{c}) \quad (1.6)$$

## 1.2. Yatay Askıda Yükleme Konsantrasyonu Değişimleri

Yatay doğrultuda üniform olmayan sedimentlerin ortalama derinlik konsantrasyonunu Denklem (1.6) yardımıyla aşağıdaki gibi elde ederiz;

$$R_i \bar{c} = R_{i,0} \bar{c}_0 \exp \left( - \frac{\alpha w_i \tau}{h} \right) + \frac{\alpha w_i}{h} \exp \left( - \frac{\alpha w_i \tau}{h} \right) \int R_i \bar{c} \exp \left( \frac{\alpha w_i \tau}{h} \right) d\tau \quad (1.7)$$

$R_i \bar{c}$   $i$  numaralı boyut grubundaki sedimentlerin ortalama derinlik konsantrasyonu,  $\tau$ ,  $i$  numaralı boyut grubundaki sediment konsantrasyonu zamanı. Bütün sediment grubundaki ortalama derinlik konsantrasyonu aşağıdaki formülde belirtilmiştir;

$$\bar{c} = \sum \left\{ R_{i,0} \bar{c}_0 \exp \left( - \frac{\alpha w_i \tau}{h} \right) + \frac{\alpha w_i}{h} \exp \left( - \frac{\alpha w_i \tau}{h} \right) \int R_i \bar{c} \exp \left( \frac{\alpha w_i \tau}{h} \right) d\tau \right\} \quad (1.8)$$

Sadece bir boyut aralığındaki üniform sedimentler içinse konsantrasyon aşağıdaki şekilde gösterilir;

$$\bar{c} = \bar{c}_0 \exp\left(-\frac{\alpha w_i}{h} \tau\right) + \frac{\alpha w_i}{h} \exp\left(-\frac{\alpha w_i}{h} \tau\right) \int \bar{c} \exp\left(\frac{\alpha w_i}{h} \tau\right) d\tau \quad (1.9)$$

### 1.3. Askıda Sediment Yüklenmesinin Yatay Değişimi

Ağırlık fraksiyonu denklemini kullanarak üniform olmayan sedimentlerin askı halinde taşınım prosesini açıklayacağız;

$$\frac{d\bar{c}}{d\tau} = -\frac{\alpha}{h} \sum w_i R_i (\bar{c} - \bar{c}_0) \quad (1.10)$$

Denklemleri parçalarına ayırdığımızda ise çözüm aşağıdaki ifade ile sağlanır;

$$R_i = R_{i0} \left(\frac{\bar{c}}{\bar{c}_0}\right)^{w_i/\bar{w}_i - 1} \quad (1.11)$$

### 1.4. Yatak Yüzeyinde Yatay Sediment Boyut Dağılımı

Yatak yüzeyinden koparılmış ve taşınım sırasındaki sedimentlerin boyut dağılımı denklemleri, ilk kısmı boyut dağılımındaki grupta bulunan sediment askıda kalma süresi, ikinci kısım ise kütle korunum denklemleri olmak üzere aşağıdaki gibidir;

$$\bar{c}_0 R_{i,0} = \bar{c} R_i + (\bar{c}_0 - \bar{c}) Q_i \quad (1.12)$$

Yukarıdaki denklem erozyon veya taşınım ile birikimde olan sedimentlerin konsantrasyon dağılımını gösterir ve denklemleri aşağıdaki gibi yeniden yazarsak verilen formülü genellemiş oluruz;

$$-\frac{Q_i}{R_{i,0}} = (\bar{c}_0 - \bar{c}) \frac{R_i}{R_{i,0}} / (\bar{c}_0 - \bar{c}) \quad (1.13)$$

### 1.5. Taban Sınır Koşullu Kararsız Sediment Taşınımı

Kararsız sediment taşınımı için advectif-difüzyon Denklem (1.2)'yi derinlik üzerinde entegre ederek kullanırız.

## 1.6. Genelleştirilmiş Alt-Sınır Koşulu Elde Edilmesi

Genelleştirilmiş sınır koşulunu taban yüzeyindeki net sediment akışı olarak göstererek aşağıdaki şekilde ifade ederiz;

$$Q_0 = - \left[ k \frac{c}{z} + wc \right]_{(z=0)} = -\beta(c-c_0)_{(z=0)} \quad (1.14)$$

$\beta$  ve  $c^*$  taban yüzeyinin hidrolik şartlarına bağlı parametreleridir. Geçici proste sediment askıda bulunma haline geçişinden çökelme sürecinde kararlı hale gelene kadar  $Q_0$  sifıra yakın olmalıdır. Bu Denklem aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$\log_{t \rightarrow \infty} Q_0 = 0 \quad \text{ve} \quad c_0 = \log_{t \rightarrow \infty} c_0 \quad (1.15)$$

$$Q_0 = \beta c^* - \beta c_0 \quad (1.16)$$

Yukarıdaki ifadede  $c^*$  taban yüzeyindeki sediment konsantrasyonunu ifade eder.  $c_0$  ise yüzeyin başlangıç anındaki sediment konsantrasyonudur.

$\beta$  değerini difüzyon denkleminde yerine koyabilmek için  $d/dx = 1/\partial u / \partial t + \partial x$  operatörünü kullanarak aşağıdaki denklemi elde ederiz;

$$\frac{dc}{dx} = \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial}{\partial z} + wc \right) \quad (1.17)$$

Denklem (1.14) yardımıyla;

$$\frac{dc}{dx} = - \frac{\beta}{hu} (c-c_0)_{z=0} \quad (1.18)$$

U değerinin akım boyunca sabit olduğunu varsaydığımızda, derinlik ortalama konsantrasyonu, denge durumundaki konsantrasyon olarak kabul ettiğimizde;

$$\frac{dc}{dx} \gg - \frac{\beta}{hu} (c-c_0)_{(\bar{c}-\bar{c}_0)} \quad (1.19)$$

$$C^* = \frac{c^*}{c_0}, \quad K = \frac{k}{wh}, \quad B = \frac{\beta}{w} \quad (1.20)$$



Denge durumundaki konsantrasyon için Han (1979) yarı ampirik formülü önermiştir;

$$\bar{c}^* = k_0 \gamma_s \left[ \frac{\gamma}{\gamma_s - \gamma} \right]^n \left[ \frac{u^3}{L_{ghw}} \right]^n \quad (1.21)$$

$\gamma_s$  ve  $\gamma$  sediment ve suyun özgül ağırlığı,  $K_0 = 0,147 \times 10^{-3}$ ,  $n \cong 0,92$ .

Denklem (1.3)'teki sınır koşullarını ısı transferi analizinde bulunan konvektif ısı transferi sınır koşullarına benzetirsek ifadelerin tekrar düzenlenmesiyle sınır koşulları aşağıdaki gibi yazılır;

$$Q_0 = - \left[ k \frac{\partial c}{\partial z} + wc \right]_{z=0} = -\beta c_0 \quad (1.22)$$

Monin (1959) difüze olan parçacıkların ve yüzeyin etkileşiminde  $\beta$ 'nin sabit kaldığını belirlemiştir.

Dobbins (1944) alt-sınır koşullu formülünde sınırlama ve birikme oranı ile çökeltme akışı ilişkisini aşağıdaki ifadeler ile belirtmiştir;

$$- \left[ k \frac{\partial c}{\partial z} + wc \right]_{(z=0)} = wc^* - wc_0 \quad \text{veya} \quad \left[ k \frac{\partial c}{\partial z} \right]_{(z=0)} = -wc^* \quad (1.23)$$

### 1.7. Genelleştirilmiş Başlangıç ve Sınır Koşullu Sediment-Reaksiyon- Difüzyon Denkleminin Laplace Dönüşümü ile Analitik Olarak Çözümü

Sediment-reaksiyon-difüzyon denklemi aşağıdaki boyutsuzlaştırılmış parametreler yardımıyla boyutsuz formda elde edilebilir;

$$C = \frac{c}{c_0}, \quad C^* = \frac{c^*}{c_0}, \quad Z = \frac{z}{h}, \quad K = \frac{k}{wh}, \quad T = \frac{tw}{h}, \quad B = \frac{\beta}{w} \quad (1.24)$$

Bir boyutlu difüzyon denkleminde  $R=0$  alınırsa boyutsuz denklem aşağıdaki formu alır;

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{\partial C}{\partial Z} + K \frac{\partial^2 C}{\partial Z^2} \quad (1.25)$$

Sınır ve başlangıç koşulları;

$$\left[ K \frac{\partial C}{\partial Z} + C \right]_{z=1} = 0 \quad (1.26)$$

$$\left[ K \frac{\partial C}{\partial Z} + C \right]_{z=0} = B(C - C^*) \quad (1.27)$$

$$C(Z, 0) = 1 \quad (1.28)$$

Denklem (1.23)'ün, Laplace dönüşümü ile çözülmesi ile boyutsuz konsantrasyon aşağıdaki gibi elde edilir (Xiong ve Onyx, 2001);

$$C(Z, T) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} dq e^{(q - \frac{1}{4K})T} \frac{[(-LMf + Nf)e^{\Theta z} + (LM\Theta - N\Theta)e^{-\Theta z}]}{e^{-1/2K(q - \frac{1}{4K})} [-(Kq - \frac{1}{4}) \sinh \sqrt{\frac{q}{K}} - B \sinh \sqrt{\frac{q}{K}} - 2BK \sqrt{\frac{q}{K}} \cosh \sqrt{\frac{q}{K}}]} \quad (1.29)$$

Yukarıdaki denklemde tanımlı yeni değişkenler aşağıdaki gibidir;

$$\Theta = -1/2K - \sqrt{q/K} \quad \text{ve} \quad \Phi = 1/2K - \sqrt{q/K} \quad (1.30)$$

$$L = (1 - B + BC^*) \quad (1.31)$$

$$M\Phi = (K\Phi e^{\Phi} + e^{\Phi}) \quad \text{ve} \quad M\Theta = (K\Theta e^{\Theta} + e^{\Theta}) \quad (1.32)$$

$$N\Phi = (K\Phi + 1 - B) \quad \text{ve} \quad N\Theta = (K\Theta + 1 - B) \quad (1.33)$$

Integrand  $q$  cinsinden tekil değere sahip bir fonksiyon olup  $q = 1/4K$  değeri için basit kutuptur. Aşağıdaki denklemlerin köklerini ele alırsak,  $Q$  sayısı reel ve pozitif ise aşağıdaki kökü kullanılır Denklem (1.31)'deki sunulan haliyle;

$$\tan h \sqrt{\frac{q}{K} = \frac{2BK \sqrt{q/K}}{0,5 - 2Kq - B}} \quad q^3 < 0 \quad (1.34)$$

$$\tan h \sqrt{\frac{-q}{K} = \frac{2BK \sqrt{-q/K}}{0,5 - 2Kq - B}} \quad q < 0 \quad (1.35)$$

Jordan Lemması ve rezidü teoremini kullanarak denklemde  $q = 1/4k$  çözümüne katkısı  $-1 + c^* e^{-z/k}$  olarak elde edilir ve  $C(Z, T)$  için elde edilen çözüm aşağıdaki gibi olur;

$$C(Z,T)=C^*e^{-Z/K} + \sum \frac{e^{(q^{-1}/2K)[(-LMF+NF)e^{Qz}+(LMQ-NQ)e^{Fz}]}{\frac{\partial}{\partial q} \left[ e^{-1/2K(q-\frac{1}{4K})} \left[ -2(Kq-\frac{1}{4}) \sinh \sqrt{\frac{q}{K}} - B \sinh \sqrt{\frac{q}{K}} - 2BK \sqrt{\frac{q}{K}} \cosh \sqrt{\frac{q}{K}} \right] \right]} \quad (1.36)$$

Aynı difüzyon denklemini başlangıç koşulu sabit konsantrasyonlu olacak şekilde çözdüğümüzde aşağıdaki denklemi elde ederiz;

$$C(Z,T)=C^*e^{-Z/K} + \sum \frac{e^{(q^{-1}/2K)[[-1-(c^*-1)(K\Phi+1)e^\Phi]e^{\Phi z} + [(K\Theta+1)e^\Theta(c^*-1)+1]e^{\Theta z}]}{\frac{\partial}{\partial q} \left[ e^{-1/2K(q-\frac{1}{4K})} \left[ -\sinh \sqrt{\frac{q}{K}} - 2K \sqrt{\frac{q}{K}} \cosh \sqrt{\frac{q}{K}} \right] \right]} \quad (1.37)$$

Denklem (1.34)'e göre c\*'in farklı parametreler için bazı çözümleri Tablo 1.1 ve Tablo 1.4 arasında sunulmuştur;

Tablo 1.1. Taban konsantrasyonu B=2,0 ve %5 oranına ulaştığındaki değerler

C*	K =0,17	K =0,35
0,5	1,85	1,9
0,75	1,7	1,7
1	1,5	1,5
1,5	1,35	1,2
2	1,2	0,95
3	1	0,2
4	0,8	0,25
5	0,5	0,3

Tablo 1.2. Taban konsantrasyonu B=1,0 ve %5 oranına ulaştığındaki değerler

C*	K =0,35
0,5	2,7
0,75	2,4
1	2,2
1,5	1,8
2	1,5
3	6
4	0,4
5	0,55

Tablo 1.3. Taban konsantrasyonu B=2,0 için maksimum değerine ulaştığındaki değerler

C*	K =0,17	K =0,35
1	45	38
1,5	28	20
2	20	11
3	11	4
4	75	0,2
5	5	0

Tablo 1.4. Taban konsantrasyonu B=1,0 için maksimum değerine ulaştığındaki değerler

C*	K =0,35
1	45
1,5	33
2	12
3	5
4	1
5	0,6

## 2. FOURİER SERİLERİ YARDIMIYLA NÜMERİK TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Fourier serileri çeşitli mühendislik problemlerinin çözümünde yaygın olarak kullanılmaktadır. Fourier serileri, kompleks matematiksel fonksiyonları, sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının lineer kombinasyonu şeklinde ifade etmeye yarar ve bazı durumlarda denklemlerin çözümünü basitleştirmek için başvurulan kullanışlı bir yöntemdir. Bu özelliklerinden dolayı Fourier serileri, kompleks ters Laplace dönüşümünü için de kullanılan bir araçtır. Laplace dönüşümü ve tersinin genel formu aşağıda verilmektedir (Rice ve Do, 1995);

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2.1)$$

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - t_w}^{\sigma_0 + t_w} e^{st} F(s) ds \quad (2.2)$$

Bu Denklemlerde  $s$  Laplace uzayına ait parametredir. Laplace transformu tersi ise Fourier-Mellin kompleks integrali şeklinde Denklem (2.2)'de tanımlanmıştır. Bu tür integraller kontur integralleri şeklinde ele alınırlar.

Denklem (2.2)'de verilen integralin analitik çözümü, birçok fonksiyon için mümkün olsa da bazı kompleks problemlerde bu integralin çözümü mümkün olmayabilir. Bundan dolayı Denklem (2.2)'in çözümü için Fourier serileri yöntemi kullanılarak sayısal bir çözüm yöntemi tanımlanmıştır (Durbin, 1974). Bu denklemin matematiksel hesabı Denklem (2.3)'de tanımlanmıştır;

$$F(t) = \frac{e^{\sigma t}}{\pi} \int_0^{\infty} \{ \text{Re}[F(s)] \cos(wt) - \text{Im}[F(s)] \sin(wt) \} dw \quad (2.3)$$

Crump (1976)'a göre, Denklem (2.3)'ü sayısal olarak çözümleyerek, bu eşitliğin değerini yaklaşık olarak Denklem (2.4)'te elde edildiği gibi önermiştir;

$$F(t) \approx \frac{e^{\sigma t}}{T} \left\{ -\frac{1}{2} F(\sigma) + \sum_{k=1}^{\infty} \text{Re} \left[ F\left(\sigma + \frac{k\pi i}{\tau}\right) \right] \cos\left(\frac{k\pi t}{\tau}\right) - \text{Im} \left[ F\left(\sigma + \frac{k\pi i}{\tau}\right) \right] \sin\left(\frac{k\pi t}{\tau}\right) \right\} \quad (2.4)$$

Yukarıdaki Denklemden  $T > t$  zaman değişkeni,  $\sigma$  ise  $f(t)$  fonksiyonun üstel mertebesinde büyük herhangi bir reel sayıdır. Bu Denklem sayısal integrasyon metotlarından biri olan trapez kuralının ters eşitliğidir. Eğer istenen göreceli hata değerine  $E$  denirse;  $\sigma$  değeri şöyle seçilir,

$$\sigma = \sigma_0 - \left( \frac{\ln(E)}{2T} \right) \quad (2.5)$$

Burada,  $\sigma_0$ ,  $F(s)$  fonksiyonun tekil köklerinin maksimumundan biraz büyük veya eşittir ve şöyle tanımlanmıştır;

$$\sigma_0 \geq \max\{\text{Re}(P)\} \quad (2.6)$$

Burada  $P$ ,  $F(s)$  fonksiyonun tekil köklerinden biridir.

Yukarıda verilen Denklem (2.4) ve Denklem (2.6) kullanılarak kompleks ters Laplace dönüşüm problemleri Fourier serilerinin de yardımı ile sayısal yöntemlerle yaklaşık olarak çözülebilir.

### 3. GENELLEŞTİRİLMİŞ BAŞLANGIÇ SINIR KOŞULLU SEDİMENT-REAKSİYON-DİFÜZYON DENKLEMİNİN FOURIER SERİLERİ TABANLI NÜMERİK TERS LAPLACE YAKLAŞIMI İLE ÇÖZÜMÜ

Tezin bu kısmında genelleştirilmiş başlangıç ve sınır koşullu sediment-reaksiyon-difüzyon denkleminin nümerik bir yöntem olan Fourier serileri tabanlı ters Laplace yaklaşımı ile çözümü sunulmuştur. Önceki bölümlerde sediment taşınımının birçok kombinasyonu tartışılmıştı. Bu bölümde sediment taşınımını probleminin reaksiyon ve difüzyon koşulları altındaki davranışı incelenmiştir. Sediment taşınımının bu koşullardaki matematiksel modeli Shan ve Hong, (2001)'a göre aşağıda görülen denklemde verilmiştir;

$$\frac{\partial c}{\partial t} = w \frac{\partial c}{\partial z} + k \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + rc \quad (3.1)$$

Denklem (3.1), Denklem (3.2) ila (3.5) arasında verilen başlangıç ve sınır koşullarına göre tanımlanmıştır;

$$c(z,t)|_{z=0} = c_0 \quad (3.2)$$

$$k \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + wc = 0 \quad (3.3)$$

$$z = h \quad (3.4)$$

$$\left( k \frac{\partial c}{\partial z^2} + wc \right) \Big|_{z=0} = \beta(c - c^*) \quad (3.5)$$

Yukarıdaki denklemlerde  $w$  akış hızı (yukarı yön pozitif yön) [m/s];  $[m]$ ;  $t$  zaman [sn];  $h$  akış derinliği [m];  $c$  sediment konsantrasyonu [ $kg/m^3$ ];  $k$  sediment difüzyon katsayısı [ $m^2/sn$ ];  $r$  sediment reaksiyon katsayısı [ $1/sn$ ];  $\beta$  alt yüzeyde sediment birikim hızı [ $m/sn$ ];  $c^*$  alt yüzeydeki konsantrasyon denge değeri [ $kg/m^3$ ]'dir.

Denklem (3.1)'i basitleştirmek için aşağıda verilen boyutsuz dönüşümler uygulanırsa, Denklem (3.1)'de verilen sediment-reaksiyon-difüzyon eşitliği Denklem (3.13)'teki formunu alır (Shan ve Hong, 2001);

$$C=c/c_0 \quad (3.6)$$

$$C^*=c^*/c_0 \quad (3.7)$$

$$Z=z/h \quad (3.8)$$

$$K=k/wh \quad (3.9)$$

$$T=tw/h \quad (3.10)$$

$$B=\beta/w \quad (3.11)$$

$$R=hr/w \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial c}{\partial T} = \frac{\partial c}{\partial z} + K \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + RC \quad (3.13)$$

Ayrıca, bu diferansiyel denklemin çözümü için Denklem (3.2) ile (3.5) arasında verilen başlangıç ve sınır koşulları da Denklem (3.14) ile (3.16) arasındaki gibi yeniden yazılabilir (Shan ve Hong, 2001);

$$\left( k \frac{\partial c}{\partial z} + c \right) \Big|_{z=1} = 0 \quad (3.14)$$

$$\left( k \frac{\partial c}{\partial z} + c \right) \Big|_{z=0} = B(c-c^*) \quad (3.15)$$

$$C(Z,0)=1 \quad (3.16)$$

### 3.1. Fourier Serileri Yöntemli Sayısal Nümerik Ters Laplace Metoduyla Başlangıç Sınır Koşullu Sediment Reaksiyon ve Difüzyon Eşitliğinin Çözümü

Shan ve Hong, (2001) başlangıç-sınır koşullu sediment reaksiyon ve difüzyon eşitliğini Laplace yöntemiyle analitik olarak çözümlenmiştir. Buna göre Denklem (3.13) ile (3.16) arası denklemlerin Laplace dönüşümüyle s uzayına dönüştürülmesi gerekir. Diyelim ki  $L \{C(Z, T)\}$ ,  $C(Z, T)$  fonksiyonun Laplace dönüşümü olsun ve şöyle tanımlansın:  $L \{C(Z, T)\} = \check{C}(Z, s)$ . Buna göre Denklem (3.13) şöyle yazılır;

$$K\check{C}_{zz}(Z,s) + \check{C}_z(Z,s) - K\check{C}_{zz} - R\check{C}(Z,s) = 0 \quad (3.17)$$



Yukarıdaki denklem Z değişkinin ikinci mertebeden diferansiyel denklemi olarak şöyle yazılır;

$$K\check{C}_{zz}(Z,s)+\check{C}_z(Z,s)-(s-R)\check{C}(Z,s)=1 \quad (3.18)$$

Denklem (3.18)'de verilen diferansiyel denklemin genel çözümü Denklem (3.19)'daki gibi bulunur;

$$\check{C}_{genel}(Z,s)=c_1e^{\theta Z}+c_2e^{fZ}+1/s-R \quad (3.19)$$

Burada  $\Phi$  ve  $\theta$  diferansiyel denkleme ait karakteristik denklemin kökleridir ve (3.20) ila (3.21) arasında verilmektedir;

$$\theta=\frac{-1+\sqrt{1+4K(s-R)}}{2K} \quad (3.20)$$

$$f=\frac{-1-\sqrt{1+4K(s-R)}}{2K} \quad (3.21)$$

Probleme ait sınır koşulları kullanılarak da  $c_1$  ve  $c_2$  bulunur. Bu değerleri bulmak için sınır koşulları Denklem (3.14) ve (3.16)'nın Laplace dönüşümü şöyle yazılır;

$$\left(K\frac{\partial c}{\partial z}+\check{C}\right)\Big|_{z=1}=0 \quad (3.22)$$

$$\left(K\frac{\partial c}{\partial z}+\check{C}\right)\Big|_{z=0}=B(\check{C})\Big|_{z=0}-\frac{c^*}{s} \quad (3.23)$$

Denklem (3.22) ve (3.23), Denklem (3.19)'daki genel çözümde yerlerine yazılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir;

$$K(c_1\theta e^{\theta}+c_2fe^f)+c_1e^{\theta}+c_2e^f=1/(s-R) \quad (3.24)$$

$$K(c_1e^{\theta}+c_2e^f)+c_1+c_2+(1/(s-R))=B(c_1+c_2+(1/(s-R)))-(BC^*/s)) \quad (3.25)$$

Buradan  $c_1$  ve  $c_2$  aşağıdaki gibi bulunur;

$$c_1=\frac{Bs-(1+Kf)(s+e^f(Bs(1-C^*)-s+BC^*R))}{s(s-R)[(1+K\theta)(1+Kf-B)e^{\theta}-(1+Kf)(1+K\theta-B)e^f]} \quad (3.26)$$

$$c_2 = \frac{(1+K\theta)(s+e^\theta(Bs(1-C^*)-s+BC^*R))-Bs}{s(s-R)[(1+K\theta)(1+Kf-B)e^\theta-(1+Kf)(1+K\theta-B)e^f]} \quad (3.27)$$

Elde edilen sabit katsayılar genel çözümde yerine yazılırsa Denklem (3.28)'da verilen çözüm elde edilir;

$$\check{C}_{\text{özel}}(Z,s) = c_1 e^\theta + c_2 e^f \quad (3.28)$$

Laplace “s” uzayındaki bu denklemin, zaman (t) uzayındaki karşılığını analitik olarak bulabilmek için ters Laplace dönüşümünü uygulamak gerekir. Bu çözümü elde etmek için ise Denklem (3.29)'da integralin çözümü gerekir (Shan ve Hong, 2001);

$$C(Z,T) = e^{RT} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sT} \frac{Lfe^{\theta Z} + M\theta e^{fZ}}{N(s)} \quad (3.29)$$

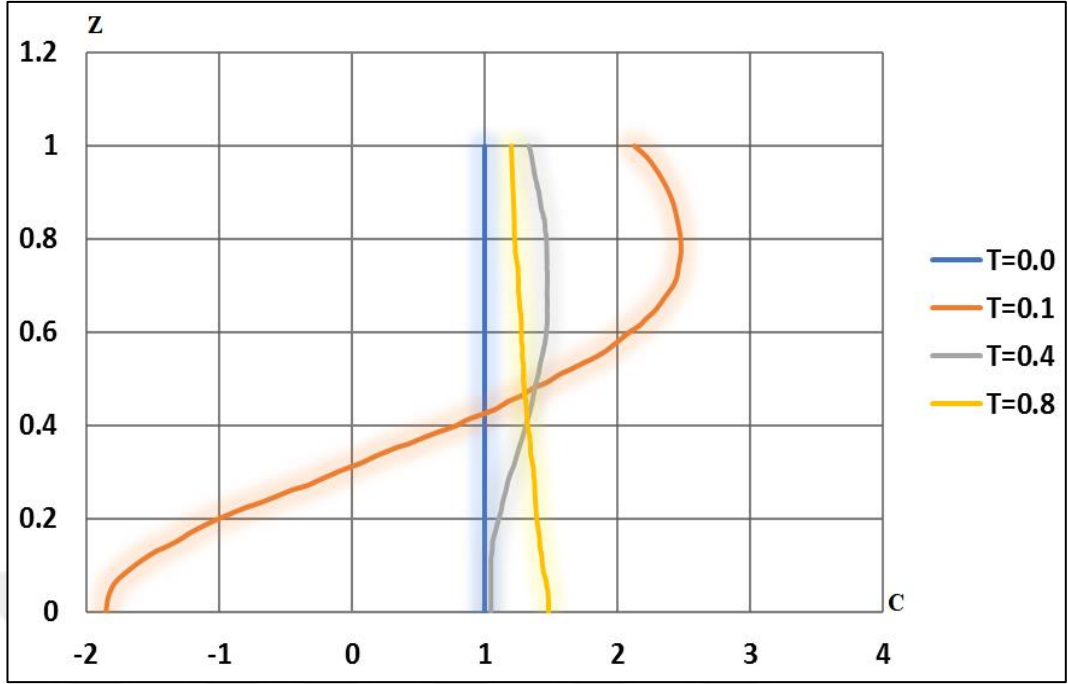
$$Lf = Bs - (1+Kf)(s+e^f(Bs(1-C^*)-s+BC^*R)) \quad (3.30)$$

$$M\theta = (1+K\theta)(s+e^\theta(Bs(1-C^*)-s+BC^*R))-Bs \quad (3.31)$$

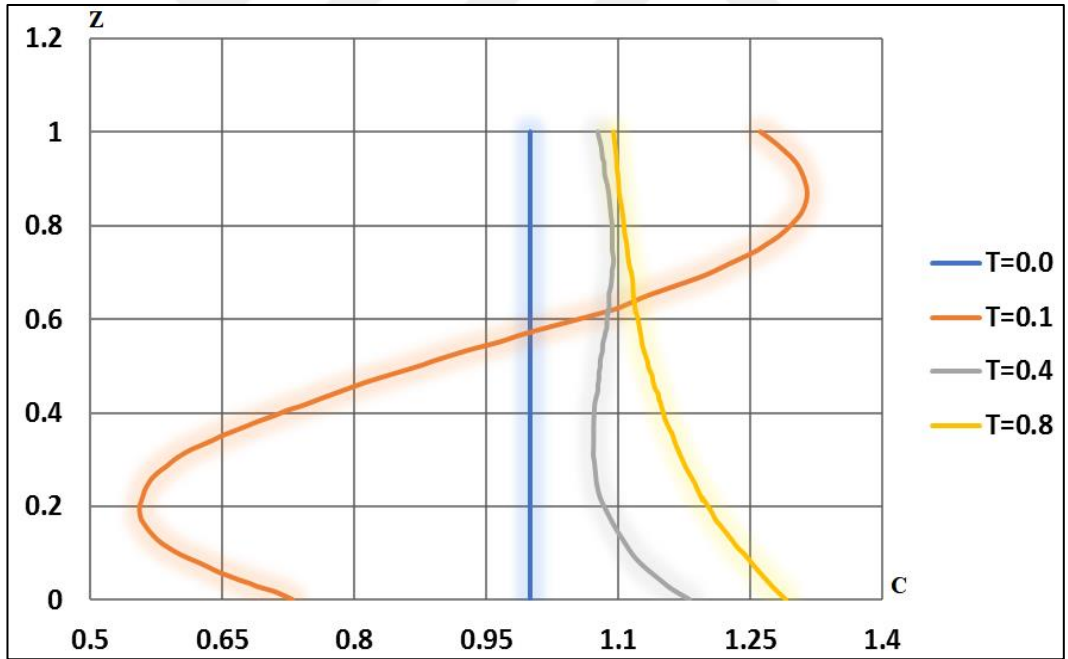
$$N(s) = s(s-R)[(1+K\theta)(1+Kf-B)e^\theta - (1+Kf)(1+K\theta-B)e^f] \quad (3.32)$$

Denklem (3.29)'da verilen dönüşüm integrali bir kontur integraldir. Kontur integralleri, karmaşık düzlemdeki integrasyon alma işlemleri için kullanılır (Duffy, 2001). Denklem (3.29)'da verilen dönüşüm integrali alınması zor olan bir integraldir. Bu tarz zor integrallerin alınabilmesini sağlamak için sayısal teknikler kullanılmaktadır. Bu çalışmada sayısal olarak çözüm elde etmek için Fourier serilerinden de yararlanılarak bir çözüm tekniği uygulanmıştır.

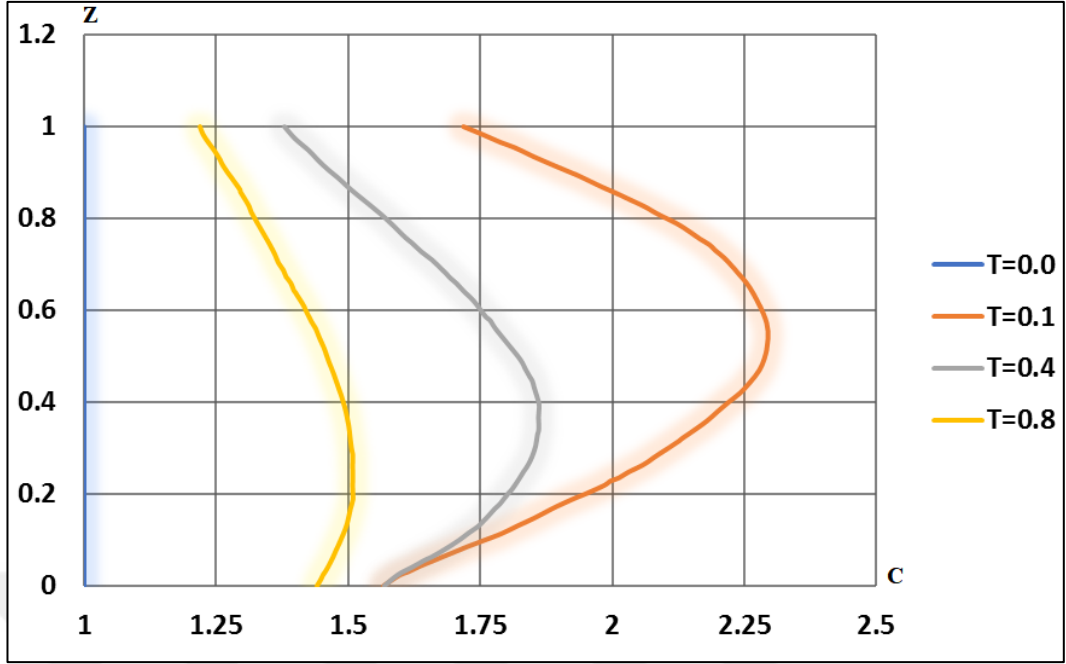
Shan ve Hong, (2001) Jordan-Lemması ve rezidü teoremini kullanarak Denklem (3.28) yardımıyla  $\{T=0, T=1, T=4 \text{ ve } T=8\}$  boyutsuz zaman değerleri ve  $\{B=1, B=2, B=4 \text{ ve } B=20\}$  başlangıç alt yüzeyde boyutsuz birikim hız değerleri için,  $K=0,35$  ve  $C^*=2,0$  değerleriyle sediment-reaksiyon-difüzyon eşitliğinin çözümünü yapmıştır bu çözümlerin sonuçları aşağıda Şekil 3.1 ve Şekil 3.4 arasında gösterilmiştir.



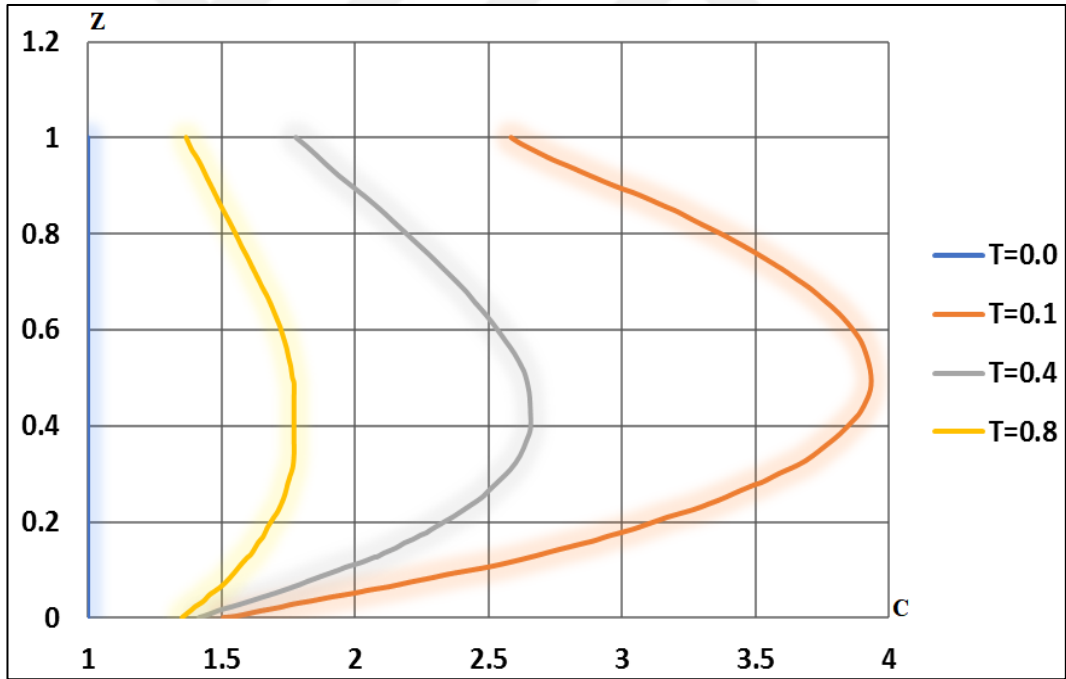
Şekil 3.1.  $B=1,0$  için  $K=0,35$  ve  $C^*=2,0$  için analitik çözüm



Şekil 3.2.  $B=2,0$  için  $K=0,35$  ve  $C^*=2,0$  için analitik çözüm



Şekil 3.3.  $B=4,0$  için  $K=0,35$  ve  $C^*=2,0$  için analitik çözüm



Şekil 3.4.  $B=20,0$  için  $K=0,35$  ve  $C^*=2,0$  için analitik çözüm

Jordan-Lemması ve rezidü teoremi analitik bir çözüm elde etmeye olanak sağlasa da Denklem 3.28'deki şekilde verilen integraller hem kompleks hem de alınması zor ve zahmetli integrallerdir. Bu yüzden çözümü basitleştirmek için yukarıdaki eşitliği çözmek için Fourier serilerinden yararlanılmıştır. Çözüm için MATLAB platformu kullanılmıştır.

Bu kompleks integrali alarak "C (Z, T)" çözümünü elde etmek için Denklem (3.33)'de verilen Fourier serisi açılımı kullanılmıştır. Bu denklemde verilen sonsuz seri yeterli sonlu sayıda terimin alınmasıyla sayısal olarak çözülecektir. Elde edilen Denklem (3.33) ve (3.34)'de gösterilmiştir;

$$C(Z,T)=\frac{e^{\sigma t}}{t}\left\{-\frac{1}{2}\check{C}_{\text{özel}}(Z,\sigma)+\sum_{k=1}^{\infty}\text{Re}[\check{C}_{\text{özel}}(Z,\sigma+\frac{k\pi i}{t})]\cos(\frac{k\pi}{t})-\text{Im}[\check{C}_{\text{özel}}(Z,\sigma+\frac{k\pi i}{t})]\sin(\frac{k\pi}{t})\right\} \quad (3.33)$$

$$C(Z,T)=\frac{e^{\sigma t}}{t}\left\{-\frac{1}{2}\check{C}_{\text{özel}}(Z,\sigma)+\sum_{k=1}^{\text{topsay}}\text{Re}[\check{C}_{\text{özel}}(Z,\sigma+\frac{k\pi i}{t})]\cos(\frac{k\pi}{t})-\text{Im}[\check{C}_{\text{özel}}(Z,\sigma+\frac{k\pi i}{t})]\sin(\frac{k\pi}{t})\right\} \quad (3.34)$$

Burada;

$$\check{C}_{\text{özel}}(Z,s)=\text{Re}(\check{C}_{\text{özel}}(Z,\sigma+k\pi i/t))+i\text{Im}(\check{C}_{\text{özel}}(Z,\sigma+k\pi i/t)) \quad (3.35)$$

olup ayrıca TopSay sonlu terim sayısını ifade etmektedir.

Denklem (3.33), TopSay = {10, 25, 50} değerleri için çözümlenmiş ve sonuçlar analitik çözüm değerleriyle kıyaslanmıştır. Ve her bir çözümün hata miktarları, Denklem (3.35)'de verilen hataların kareleri ortalamasının karekökü yöntemiyle (Root Mean Square Error -RMSE) elde edilmiştir. Uygulanan yöntemin ürettiği sonuçlar Tablo 3.1-3.10 arasında verilmiştir;

$$\text{RMSE}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\text{topsay}}(F_{\text{analitik}}-F_{\text{Fourier}})^2}{\text{Topsay}}} \quad (3.36)$$

Yukarıdaki Denklemde, TopSay= sonlu terim sayısı,  $F_{\text{Analitik}}$ , analitik çözümde elde edilen değer ve  $F_{\text{Fourier}}$ , Fourier serileri tabanlı ters Laplace yaklaşımıyla elde edilen değeri temsil etmektedir.

Farklı terim sayısına göre Fourier serileri tabanlı ters Laplace dönüşümü ile elde edilen sonuçların analitik çözümle farklarının kareleri ortalamasının karekökü ile hesaplanması Tablo 3.1 ve Tablo 3.4'te hesaplanıp aşağıda gösterilmiştir.

Tablo 3.1. B= 1 için K=0,35 ve C\*=2,0 hesaplanan değerler

Zaman	Seçilen Zamana Göre Hataların Kareleri Ortalamasının Karekökü			
Topsay	T=0,0	T=0,1	T=0,4	T=0,8
10	0,00014	0,00028	4,60651	53,72371
25	0,00001	0,00004	0,06084	0,04434
50	0,00001	0,00001	0,00769	0,00071

Tablo 3.2. B= 2 için K=0,35 ve C\*=2,0 hesaplanan değerler

Zaman	Seçilen Zamana Göre Hataların Kareleri Ortalamasının Karekökü			
Topsay	T=0,0	T=0,1	T=0,4	T=0,8
10	0,00047	0,00059	1,76714	18,94221
25	0,00004	0,00007	0,01707	0,00772
50	0,00001	0,00003	0,00628	0,00034

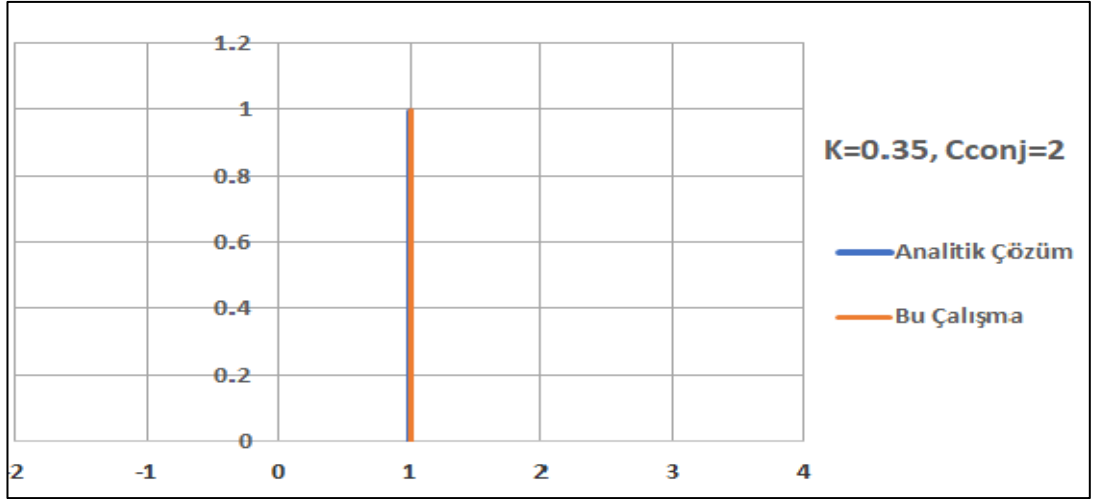
Tablo 3.3. B= 4 için K=0,35 ve C\*=2,0 hesaplanan değerler

Zaman	Seçilen Zamana Göre Hataların Kareleri Ortalamasının Karekökü			
Topsay	T=0,0	T=0,1	T=0,4	T=0,8
10	0,00931	0,02417	0,14782	0,34892
25	0,00074	0,00013	0,00359	0,00011
50	0,00016	0,00008	0,00061	0,00001

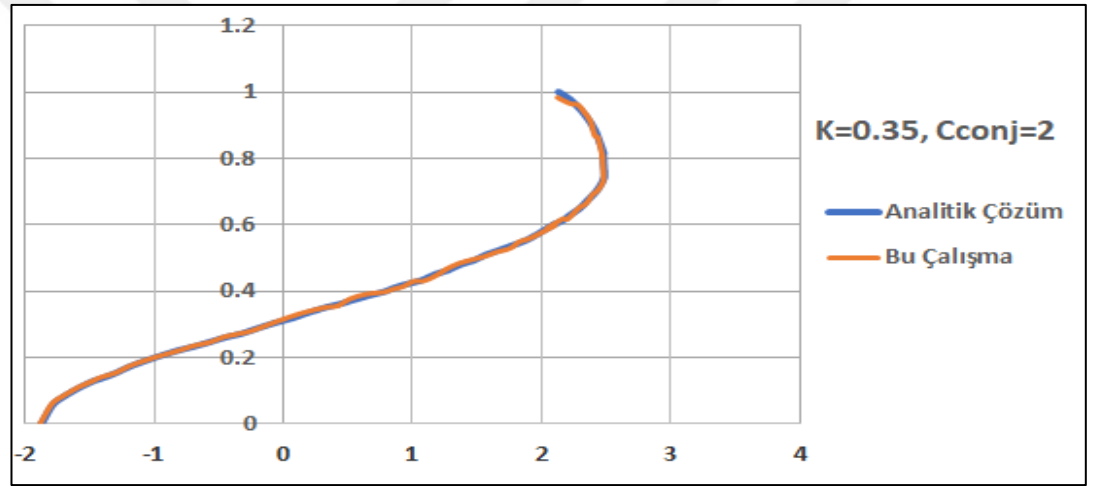
Tablo 3.4. B= 20 için K=0,35 ve C\*=2,0 hesaplanan değerler

Zaman	Seçilen Zamana Göre Hataların Kareleri Ortalamasının Karekökü			
Topsay	T=0,0	T=0,1	T=0,4	T=0,8
10	0,00014	0,00601	0,04761	0,02299
25	0,00001	0,00033	0,03320	0,00001
50	0,00001	0,00007	0,00062	0,00001

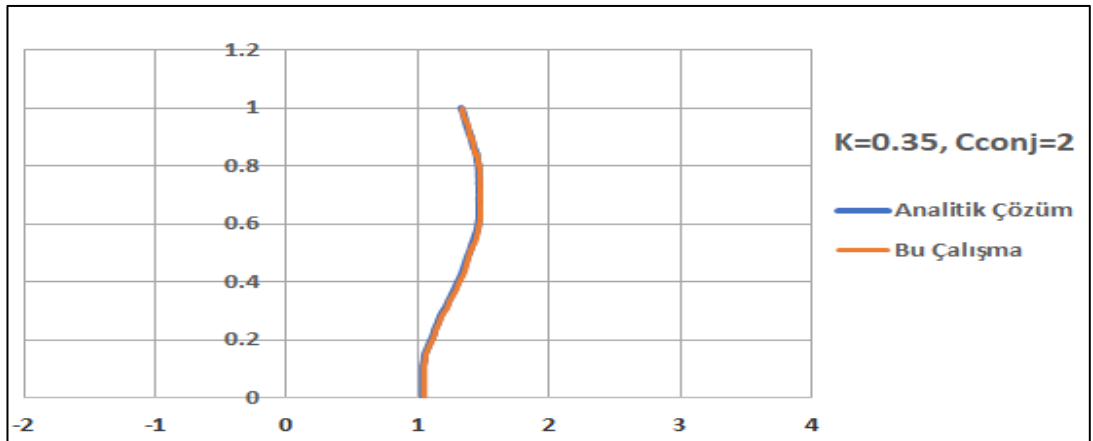
Tablo 3.1 ve Tablo 3.4 arasında verilen sonuçlara göre en iyi çözüm “Sonlu Terim Sayısı = 50” değeri ile elde edilmektedir. Ayrıca hatası en yüksek çözümlerde kalın yazı karakteri kullanılmıştır. “Sonlu Terim Sayısı = 50” değerine göre yapılan çözümler analitik ve nümerik çözümlerin sonuçları aşağıdaki grafikler ile kıyaslanmaktadır.



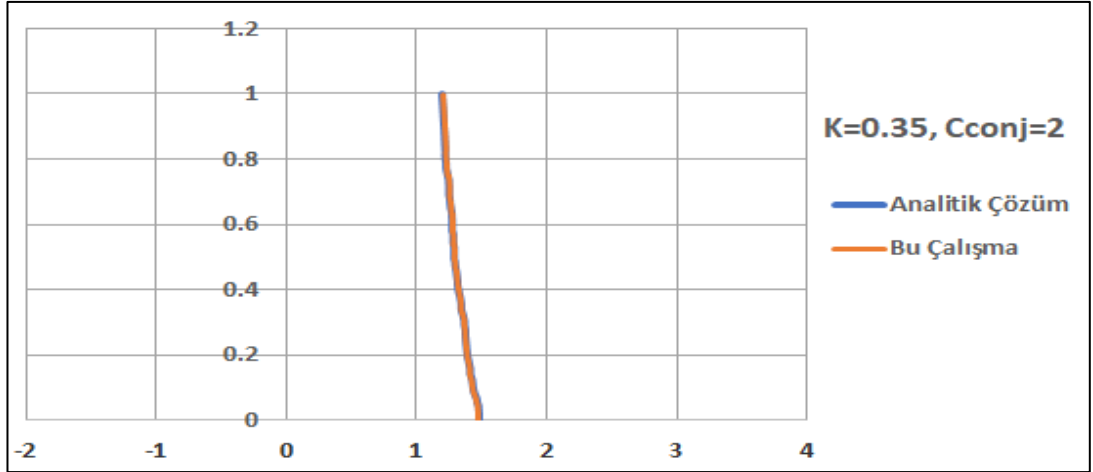
Şekil 3.5.  $B=1,0$  ve  $T= 0,0$  zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması



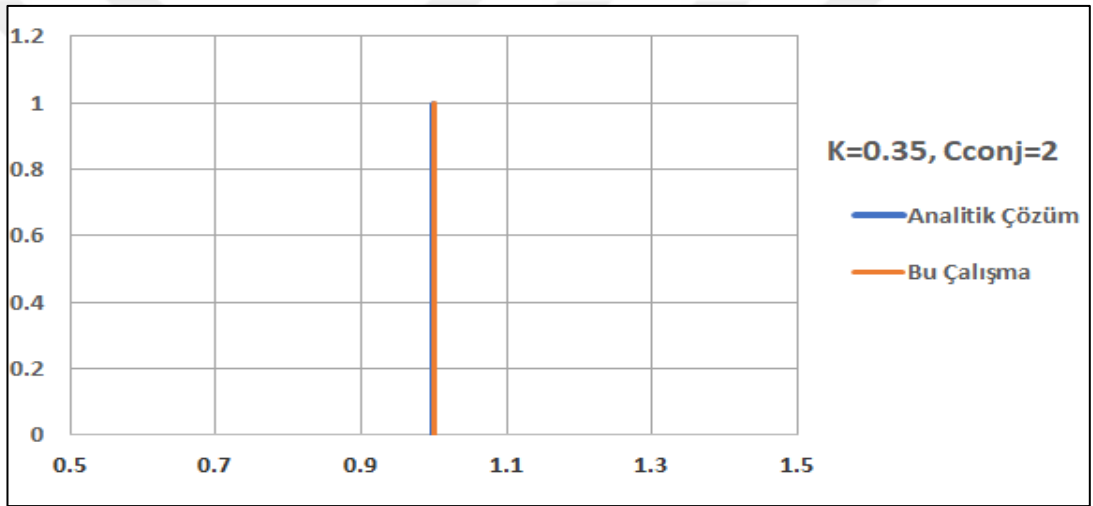
Şekil 3.6.  $B=1,0$  ve  $T= 0,1$  zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması



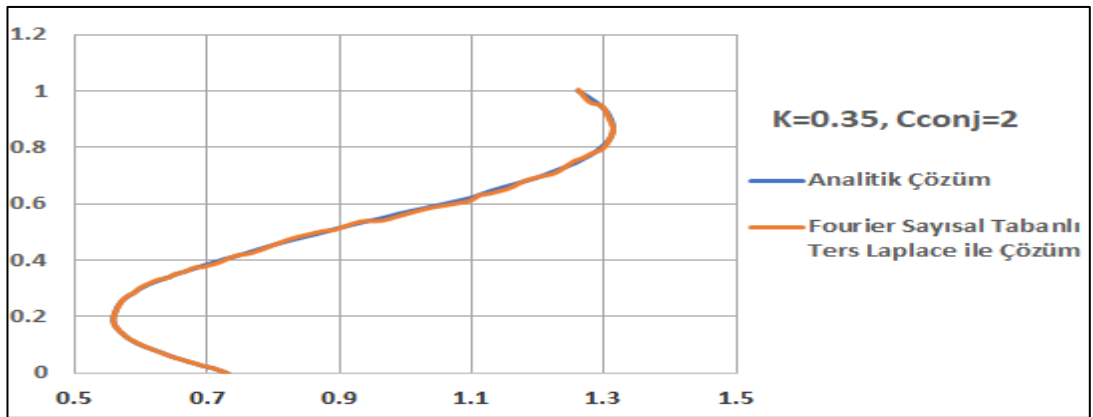
Şekil 3.7.  $B=1,0$  ve  $T= 0,4$  zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması



Şekil 3.8.  $B=1,0$  ve  $T=0,8$  zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması

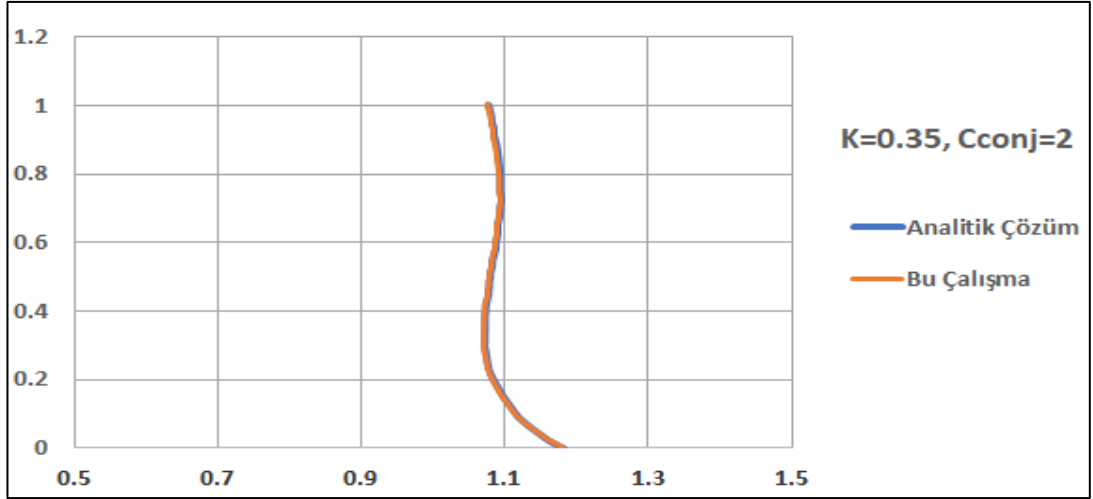


Şekil 3.9.  $B=2,0$  ve  $T=0,0$  zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması

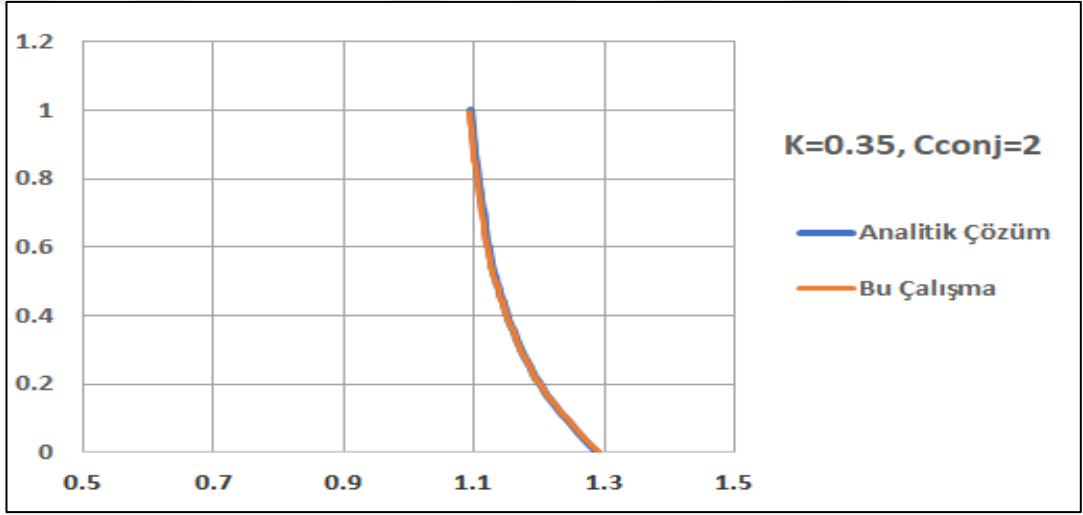


Şekil 3.10.  $B=2,0$  ve  $T=0,1$  zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması

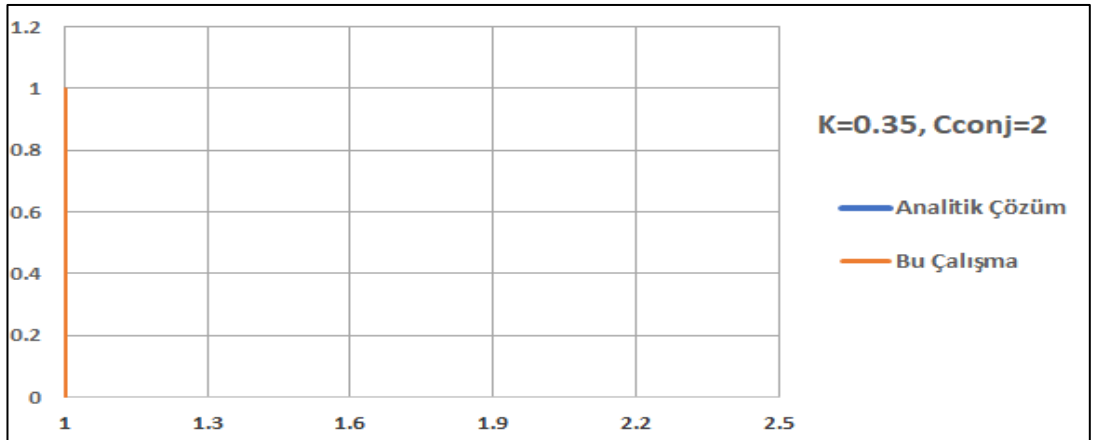




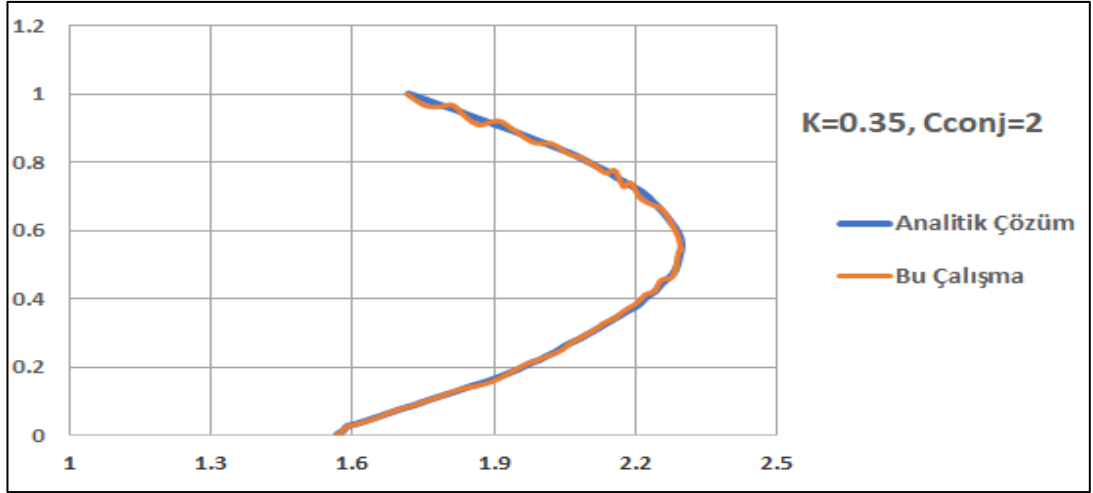
Şekil 3.11.  $B=2,0$  ve  $T= 0,4$  zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması



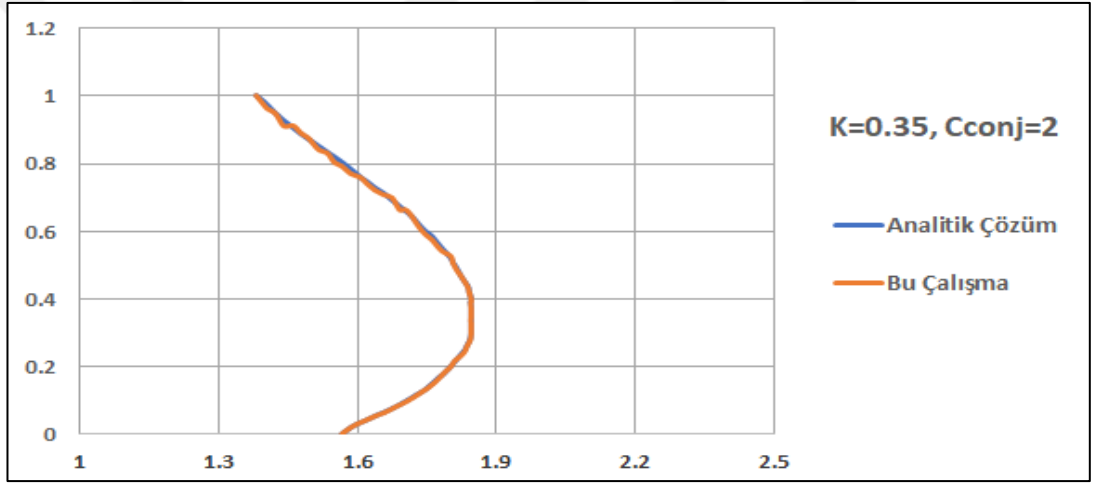
Şekil 3.12.  $B=2,0$  ve  $T= 0,8$  zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması



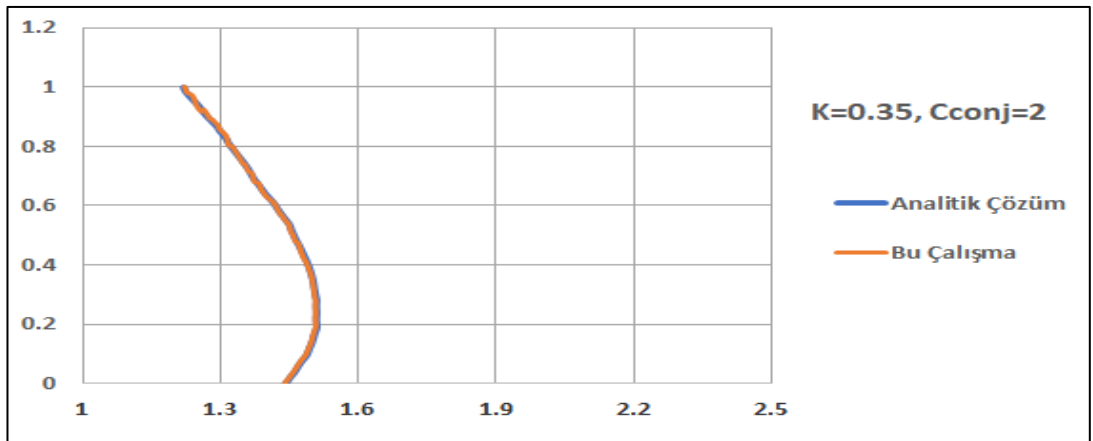
Şekil 3.13.  $B=2,0$  ve  $T=0,8$  zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması



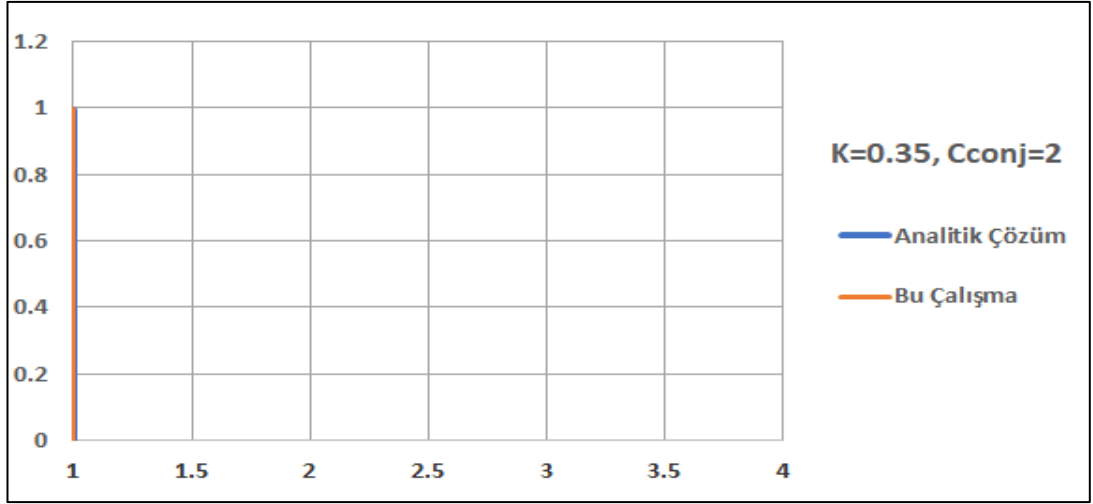
Şekil 3.14.  $B=4,0$  ve  $T= 0,1$  zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması



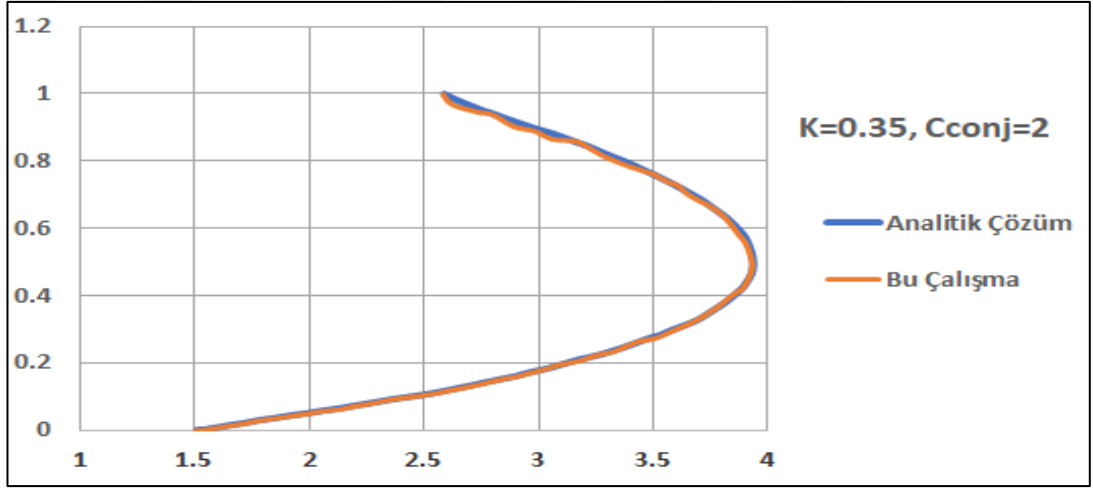
Şekil 3.15.  $B=4,0$  ve  $T= 0,4$  zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması



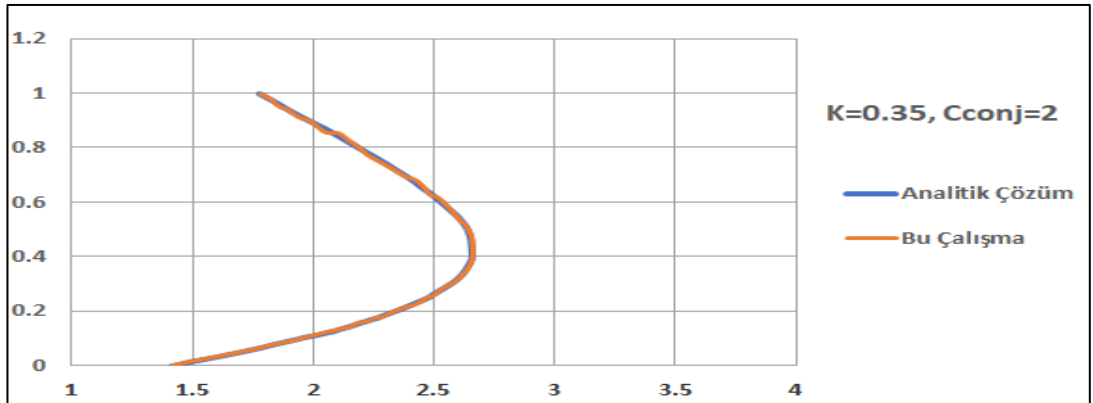
Şekil 3.16.  $B=4,0$  ve  $T= 0,8$  zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması



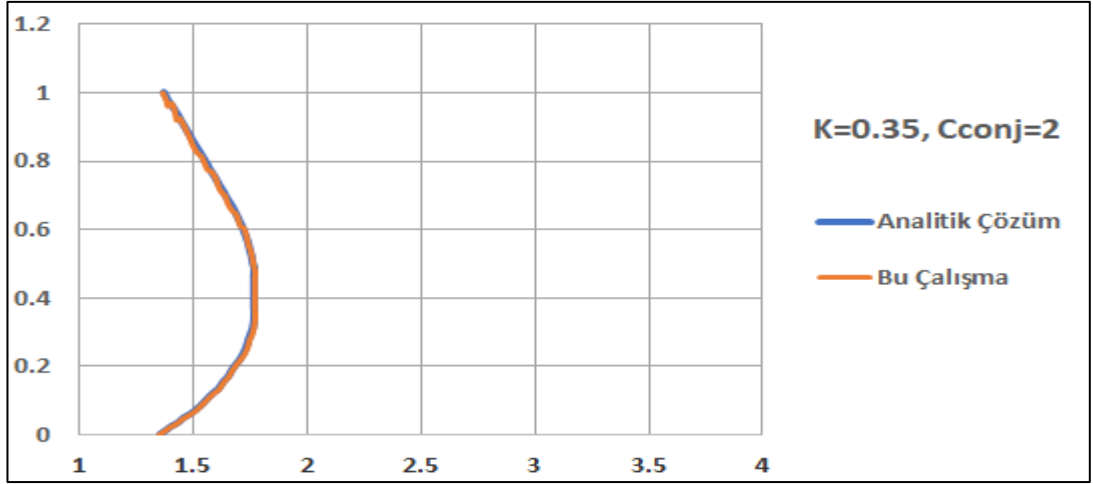
Şekil 3.17. B=20,0 ve T= 0,0 zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması



Şekil 3.18. B=20,0 ve T= 0,1 zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması



Şekil 3.19. B=20,0 ve T= 0,4 zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması



Şekil 3.20.  $B=20,0$  ve  $T= 0,8$  zaman aralığındaki çözümlerin kıyaslanması

Yukarıda grafikler ile verilen çözümlerde, sayısal Fourier serileri tabanlı ters Laplace dönüşümü ile yapılan çözümler ile analitik çözümler arasındaki fark çok azdır. Mühendislik problemlerinin çözümlerinde bu hata miktarıyla yapılan çözümler kabul edilebilir sınırlardadır. Elde edilen çözümlerde en yüksek hata miktarı “TopSay =50” için “ $B=1$ ” ve “ $T=0,4$ ” değerleriyle 0,00769 olarak ortaya çıkmıştır. Ek olarak, çözümün hızlı bir şekilde elde edilebiliyor olması ve çözüm algoritması bir kez oluşturulduktan sonra defalarca replike edilebiliyor olmasıdır. En iyi çözüm sağlanana kadar replike olması yöntemin getirdiği önemli avantajlar olarak değerlendirilebilir.

#### 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada dengede olmayan sediment taşınımının matematiksel modeli olan sediment-difüzyon-reaksiyon denklemi Laplace uzayında çözüldükten sonra zaman uzayına Fourier serilerini kullanan nümerik ters Laplace dönüşümü ile geçilerek genelleştirilmiş başlangıç ve sınır şartları altında çözümler elde edilmiştir. Ele alınan denklemin analitik çözümünü elde etmek çözüm kompleks integrallerin analitik olarak alınmasını gerektirdiğinden oldukça zor ve zahmetli bir süreçtir. Önerilen yöntemle kompleks integraller nümerik olarak hesaplandığından çözüm elde etmek analitik çözümle kıyaslandığında çok daha kolay bir süreçtir.

Literatürde, kompleks integrallerin çözümü için tercih edilen sayısal yöntemlerden biri de Fourier serilerinin ters Laplace dönüşümünde kullanılmasıdır. Bu yaklaşımla hem ters Laplace dönüşümüyle elde edilen kompleks integral kompleks uzayda basite indirgenmiş olur hem de sayısal sonuç kısa sürede sayısal hesaplama yöntemleriyle elde edilmiş olur.

Bu çalışmada önerilen yöntemle farklı birikim koşulları (B), farklı zaman adımları (T) ve Fourier serilerinden alınan farklı terim sayıları (TopSay) için sayısal çözümler yapılmış ve sonuçlar analitik çözümlerle kıyaslanmıştır. Elde edilen sonuçların hata değerlendirmesi ise hataların kareleri ortalamasının karekökü (RMSE-root mean square error) baz alınarak yapılmıştır. Elde edilen sonuçlara göre, yüksek hatalar genellikle yüksek zaman değerleri ve en düşük terim sayıları söz konusu olduğunda elde edilmiştir. En düşük hatalar serilerden alınan terim sayısının en yüksek değeri olan 50 iken elde edilmiştir.

Sonuçlar önerilen yöntemin dengede olmayan sediment taşınımı ve modelleme problemlerinde çözümünde de başarıyla uygulanabileceğini gösterilmiştir.

## KAYNAKLAR

Cheng K., An Integrated Suspended Load Equation for Nonequilibrium Transport of Non-Uniform Sediment, *Journal of Hydrology*, 1984, **79**(1), 359-364.

Cheng K., Bottom-Boundary Condition for Nonequilibrium Transport of Sediment, *Journal of Geophysical Research*, 1985, **89**(4), 8209-8214.

Crump K. S., Numerical Inversion of Laplace Transforms Using a Fourier Series Approximation, *Journal of Association Computing Machinery*, 1976, **23**, 89-96.

Dobbins W. E., Effect of Turbulence on Sedimentation, *Transaction of the American Society of Civil Engineering*, 1944, **109**(1), 629-656.

Duffy D. G., *Green's Function with Applications*, 2nd ed., CRC Press, Florida, 2001.

Durbin, F., Numerical Inversion of Laplace Transforms: An Efficient Improvement to Dubner and Abate's Method, *Computer Journal*, 1974, **17**(4), 371-376.

Han Q. W., A Study of Nonequilibrium Transportation of Nonuniform Suspended Load, *Kexue Tongbao*, 1979, **24**(7), 804-808.

Mei C. C., Nonuniform Diffusion of Suspended Sediment, *Journal of the Hydraulic Division*, 1969, **95**(1), 581-584.

Monin A. S., On the Boundary Condition on the Earth Surface for Diffusing Pollutants, *Advances in Geophysics*, 1959, **6**, 435-436.

Pimentel D., Pimentel M., Global Environmental Resources Versus World Population Growth, *Ecological Economics*, 2006, **59**(2), 195-198.

Rice R. G., Do D. D., *Applied Mathematics and Modeling for Chemical Engineers*, 2nd ed., Wiley, New York, 1995.

Shan Y. X., Hong W. O. W., The Analytical Solution for Sediment Reaction and Diffusion Equation with Generalized Initial-Boundary Conditions, *Applied Mathematics and Mechanics*, 2001, **22**(4), 404-408.

Simon D. B., Şentürk F., *Sediment Transport Technology Water and Sediment Dynamics*, 1st ed., Water Resources Publications, Colorado, 1992.

URL-1: <http://unesdoc.unesco.org/images/0023/002318/231823E.pdf> (Ziyaret Tarihi: 01 Temmuz 2017).

URL-2: <http://unesdoc.unesco.org/images/0012/001295/129556e.pdf> (Ziyaret Tarihi: 01 Temmuz 2017).

## ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Kars'ta doğdu. İlk ve orta öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 2004 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Çevre Mühendisliği Bölümü'nden 2009 yılında Çevre Mühendisi olarak mezun oldu. 2011 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı.

