

**T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ASENKRON MOTORUN
3 BOYUTLU ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sevcan AYTAÇ KORKMAZ

Anabilim Dalı: Elektrik Elektronik Mühendisliği

Programı: Elektrik Makinaları

HAZİRAN-2010

**T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ASENKRON MOTORUN
3 BOYUTLU ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sevcan AYTAÇ KORKMAZ

(06213104)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 08 Haziran 2010

Tezin Savunulduğu Tarih : 18 Haziran 2010

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Hasan KÜRÜM (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Hüseyin ALTUN(F.Ü)

Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÖZDEMİR(F.Ü)

HAZİRAN-2010

ÖNSÖZ

Sonlu elemanlar yöntemiyle çalışabilmek için öncelikle çözüm bölgesinin uygun bir şekilde bölmelenmesi gerekmektedir. Çözüm ağı üretmek konusunda yazılmış binlerce makale, tez vb. yayın mevcuttur ve her geçen gün artmaktadır. Bu konuda amatörcü olduğu gibi profesyonelce de ilerleme, daha iyiye ulaşma amaçlanmaktadır.

Bu tez çalışması süresince, sadece değerli fikirleriyle bana yol göstermekle kalmayıp, aynı zamanda beni sürekli yüreklendiren kıymetli danışman hocam, Sayın Prof Dr. Hasan KÜRÜM'e çok teşekkür ederim.

Yine tez çalışması süresince büyük destek gördüğüm ve fikirleriyle çalışmalarına katkıda bulunan Yrd. Doç. Dr. Ahmet FENERCİOĞLUNA, Arş. Gör. Mehmet POLAT ve Dr. Eyyüp ÖKSÜZTEPE'ye teşekkürlerimi borç bilirim.

Son olarak tez çalışması boyunca, gösterdikleri sabır ve desteklerinden dolayı çok sevdiğim eşim Dr. M. Fatih KORKMAZ'a, aileme ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi bir borç bilir, şükranlarımı sunarım.

**Sevcan AYTAÇ KORKMAZ
ELAZIĞ-2010**

İÇİNDEKİLER	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	I
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
ŞEKİLLER LİSTESİ	VIII
TABLolar LİSTESİ	X
SEMBOLLER LİSTESİ	XI
1. GİRİŞ	1
1.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi	1
1.2. Sonlu Elemanlar Metodunun Tarihsel Gelişimi	8
1.3. Sonlu Elemanlar Yönteminin Tercih Edilmesinin Nedenleri.....	9
1.4. Sonlu Eleman Program Kullanıcısının Sorumlulukları	10
1.5. Tezin Amacı	11
1.6. Tezin İçeriği.....	12
2. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ	14
2.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi İçin Bölmelendirme:	15
2.1.1. Eleman Çeşitleri:	15
2.1.2. Bölmelendirme Yöntemleri:	18
2.1.3. Çözüm Ağları:	19
2.2. İki Boyutlu Sonlu Elemanlar Yöntemi Teorisi.....	20
2.2.1. Varyasyon Hesabı.....	21
2.2.2. Fonksiyonelin Extremum Olma Koşulu	22
2.2.3. Sınır Koşulları	24

Sayfa No

2.2.4. Rayleigh – Ritz Yöntemi	25
2.2.5. Sonlu Elemanlar ve Rayleigh-Ritz Yöntemi	27
2.2.6. Elemanların Birleştirilmesi.....	33
3.POISSON DENKLEMİ VE MANYETİK DEVRE BÜYÜKLÜKLERİNİN HESAPLANMASI.....	37
3.1. Poisson Denklemlerinin Elde Edilmesi	37
3.2. Kaynak Fonksiyonlarının Girilmesi	38
3.3. Manyetik İndüksiyonun Hesabı.....	41
3.4. Manyetik Akı Yolu Çizimi	42
3.5. Magnetik Enerji ve İndüktansın Hesabı	44
3.6. Moment Hesabı:	45
3.7. Üç Boyutlu Sonlu Elemanlar Yöntemi	47
4. ASENKRON MOTORUN MAXWELL 3D VE MATLAB PROGRAMI KULLANILARAK SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ANALİZİ.....	53
4.1. Maxwell 3D paket Programı	53
4.1.1. Materyal ve Yöntemler.....	54
4.1.2. İletim akımı, akım yoğunluğu çözümleri	56
4.1.3. Manyetik alan enerjisi, manyetik ko-enerji yaklaşımları.....	56
4.2. Matlab Programı	57
4.2.1. Matlab Ürün Ailesi	57
4.2.2. Matlab Araç Kutuları (Toolbox).....	59
4.2.3. Matlab'ın kullanım amacı ve alanı	60
4.2.4. Matlab'ın Kullanım Yerleri	60

	<u>Sayfa No</u>
4.2.5. Asenkron Motorun Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Analizi.....	60
4.3. Motor Geometrisinin Tanımlanması	61
4.3.1. Stator Geometrisi	62
4.3.2. Rotor Geometrisi	63
4.3.3. Stator Sarım Şeması	64
4.3.4. Motorda Kullanılan Materyallerin Tanımlanması.....	65
4.3.5. Programımızın Tanıtımı.....	66
5. SONUÇLAR.....	83
KAYNAKLAR.....	86
ÖZGEÇMİŞ.....	90

ÖZET

Asenkron makinelerin işletme kolaylığının ve kontrollerinin basit olmasının yanında, stator ve rotor oluk geometrileri bakımından aslında karmaşık yapıli makinelerdir. Sanayide yaygın kullanılmaları sebebiyle tasarımlarının maksimum verim ve en iyi moment değerlerini verecek şekilde yapılması gerekir.

Asenkron motorların tasarımında günümüze kadar klasik yöntemler kullanılmaktadır. Klasik yöntemle yapılan tasarımlar sonucunda elde edilen asenkron motor, hedeflenen sonucu vermeyebilir. Bu nedenle sonlu elemanlar yöntemiyle asenkron motor tasarımı önemli ilgi görmektedir. Sonlu elemanlar yöntemi ile tasarım yapabilmek için ilk önce aynı yöntemle analiz yapabilmek gereklidir.

Bu çalışmada, sonlu elemanlar yöntemi (SEY) kullanılarak asenkron motorun çözüm bölgesinde magnetik indüksiyon ve magnetik akı yoğunluğu değişimleri incelenmiştir. Bunun için Maxwell 3D paket programı kullanılarak analiz yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Asenkron Motor, Sonlu Elemanlar Yöntemi, Maxwell 3D

SUMMARY

The Design Of Induction Motor Using Finite Element Method With The Maxwell 3D pacet Program Although induction machines are simple and rugged for operational maintenance purposes, they have indeed somewhat complex stator and rotor slot geometries. Industrial practice demands the maximum efficiency and highest torque values from these machines.

Classical methods are used in the design of inductions motors up to the present. The result may not be targeted classical method obtained as a result of the induction motor designs. Therefore, the finite element method the design of induction motor sees significant interest. First with the same method should be able to do analysis for finite element method to make the design.

In this study, the magnetic vector potential and magnetic flux density changes were investigated in the solution of the induction motor using finite element method (FEM). Energy and tork values are calculated. For this, a program developed using Maxwell 3D programming.

Keywords: Induction Motor, Finite Element Method, Maxwell 3D

ŞEKİLLER LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 İki boyutlu SEY’de kullanılan elemanlar.....	16
Şekil 2.2 Üç boyutlu SEY’de kullanılan elemanlar.....	17
Şekil 2.3 SEY’de kullanılmayan eleman tipleri	17
Şekil 2.4 Eğri bölgelerin bölmelenmesi	18
Şekil 2.5 Düzenli ağlar	20
Şekil 2.6 Düzensiz ağ	20
Şekil 2.7 Bir fonksiyonun varyasyonu.....	22
Şekil 2.8 Bir üçgen elemanı	28
Şekil 2.9 İki üçgen elemanın birleşimi	34
Şekil 3.1 Kaynak fonksiyonlarının tanımlanması	39
Şekil 3.2 A_v noktasının vektör potansiyelinin bulunması	43
Şekil 3.3 Magnetik alan diyagramı, yerel stress ve diğer bileşenler	45
Şekil 3.4 Dörtüzlü elemanlara bölünmüş 3 boyutlu hacim elemanları.....	47
Şekil 4.1 Dörtüzlü eleman (tetrahedral)	55
Şekil 4.2. Matlab Ürün Ailesi.....	58
Şekil 4.3 Motorun Önden Görünüşü	61
Şekil 4.4 a) Stator Ölçüleri b) Stator Oluk Ölçüleri	62
Şekil 4.5 a) Rotor Ölçüleri b) Rotor Oluk Ölçüleri	63
Şekil 4.6 Stator Sarım Şeması.....	64
Şekil 4.7 Materyal Türlerine Göre Motor Geometrisi.....	65
Şekil 4.8. Motorun Matlab ile Elle Bölmelendirilmiş Durumu.....	67
Şekil 4.9. Motorun Matlab ile 3 Boyutlu Bölmelendirilmiş Durumu.....	68
Şekil 4.10. Motorun Matlab ile 3 Boyutlu Bölmelendirilmiş Durumu.....	68

Sayfa No

Şekil 4.11 Asenkron Motorun 3 Boyutlu Durumu	69
Şekil 4.12 Asenkron Motorun Statorunun 3 Boyutlu Durumu.....	69
Şekil 4.13 Asenkron Motorun 1 Sargılı Halinin 3 Boyutlu Durumu	69
Şekil 4.14 Asenkron Motorun Sınır Koşullarında 3 Boyutlu durumu.....	70
Şekil 4.15 Asenkron Motorun 3 Boyutlu Rotor Kafesi Durumu.....	70
Şekil 4.16 Asenkron Motorun 3Boyutlu Rotor Durumu	72
Şekil 4.17 Motorun Otomatik Bölmelendirilmiş Durumu	73
Şekil 4.18 Motorun Statorunun Otomatik Bölmelendirilmiş Durumu	73
Şekil 4.19 Motorun Sınır Koşulları İçindeki Otomatik Bölmelendirilmiş Durum.....	74
Şekil 4.20 Motorun Rotor Kafesinin Bölmelendirilmiş Durumu	74
Şekil 4.21 Motorun Rotorunun Bölmelendirilmiş Durumu.....	75
Şekil 4.22 Asenkron Motorun Statorunun 1 Sargısında Görülen Akı yoğunluğu(B(T)) ...	77
Şekil 4.23 Asenkron Motorun Statorunun 1 Sargısında Görülen Akı Yoğunluğu(B(T)) ..	78
Şekil 4.24 Asenkron Motorun 1 Bobinindeki Akı Yoğunluğu $J(A/m^2)$	78
Şekil 4.25 Asenkron Motorun Rotorunun 1 sargısındaki Manyetik Akı Yoğunluğu(B(T))79	
Şekil 4.26 6 Bobinli Asenkron Motorun Akı yoğunluğu(B(T))	79
Şekil 4.27 6 Bobinli Asenkron Motorun Akı Yoğunluğu(B(T)).....	80
Şekil 4.28 6 Bobinli Asenkron Motorun Statorundaki Akı Yoğunluğu(B(T)).....	80
Şekil 4.29 6 Bobinli Asenkron Motorun Akı Yoğunluğu(B(T))'nun Yakından Görünüm81	
Şekil 4.30 6 Bobinli Asenkron Motorun Rotorundaki Akı YoğunluğuB(T).....	81
Şekil 4.31 6 Bobinli Asenkron Motorun Rotorundaki Akım Yoğunluğu $J(A/m^2)$	82
Şekil 4.32 6 bobinli Asenkron Motorun Statorundaki Akım Yoğunluğu $J(A/m^2)$	82
Şekil 5.1 18 Bobinli Motor Momentin Kaymaya Göre Değişimi.....	84

TABLÖLAR LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 4.1: Motor analizinde kullanılan materyal özellikleri.....65

SEMBOLLER LİSTESİ

$A_i, A_{(x,y,z)}$: Vektör Potansiyel (wb/m).
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$: Deneme fonksiyonu için sabit katsayılar.
a_i, a_j, a^n	: Şekil fonksiyonları için kısaltma katsayıları (m).
B	: Akı yoğunluğu (wb/m ²).
B_x	: x yönündeki akı yoğunluğu (wb/m ²).
B_y	: y yönündeki akı yoğunluğu (wb/m ²).
B_z	: z yönündeki akı yoğunluğu (wb/m ²).
b_i, b_j, b^n	: Şekil fonksiyonları için kısaltma katsayıları (m).
Δ	: Bir üçgen elemanın alanı (m ²).
∇	: Gradient operatörü.
ε	: Fark ifadesi.
F	: Fonksiyonel.
$\phi, \phi_i, \phi_j, \phi_m, \phi_s, \phi_{0(s)}$: Vektör potansiyel (wb/m).
ξ_i	: Sınırdaki bilinen değer.
H	: Manyetik Alan Şiddeti.
h(s)	: Sınır koşulu.
J	: Akım yoğunluğu.
Δ	: Laplacienc operatörü.
μ	: Ortamın manyetik permabilitesi (H\m).
μ_0	: Havanın manyetik permabilitesi (H\m).
$N_i, N_j, N_m, N_1^e, N_2^e, N_3^e$: Şekil fonksiyonları.
$S_{ii}, S_{ij}, S_{im}, S_{ji}, S_{jj}, S_{jm}, S_{mi}, S_{mj}, S_{mm}$: Fonksiyoneli minimum yapan ϕ_i, ϕ_j, ϕ_m değerleri
σ	: Elektriksel iletkenlik (1/ Ωm).
ν	: Ortamın manyetik geçirgenliği (m/H).
x_i, x_j, x_m	: Dügümlerin x koordinatları (m).
y_i, y_j, y_m	: Dügümlerin y koordinatları (m).

1.GİRİŞ

Bu bölümde asenkron motorların sonlu elemanlar yöntemiyle analizi ile ilgili yapılan çalışmalar, tezin literatürdeki yeri ve yapılan çalışmanın amacı verilmiştir.

Analitik çözümlerin olmadığı veya çok zor olduğu yerlerde fiziki sistemleri anlamak ve incelemeye tabi tutmak için nümerik yöntemlerden faydalanılır. Bol miktarda hesaplama, yazma çizme gerektiren bu yöntemlerden birisi de Sonlu Elemanlar Yöntemi'dir (SEY). SEY'in kullanım sahası çok geniştir, çünkü fiziki sistemlerin hemen hepsi benzer şekillerde diferansiyel denklemlerle ifade edilirler. Sonlu elemanlar yöntemi de bir çeşit diferansiyel denklem çözen nümerik yöntemdir. Aerodinamik ve akış problemleri, elektrostatik, elektromanyetik, mekanik problemlerine SEY ile yaklaşım yapılmaktadır. SEY'ne dayanarak çözüm yapan geniş kapsamlı paket programlar da mevcuttur (ANSYS, MAXWELL vb.). Bilgisayar alanındaki gelişmeler nümerik yöntemleri, dolayısıyla sanal tasarımları daha tutulur hale getirmiştir.

1.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi

1960'lı yıllardan itibaren bu yöntem yapı alanı dışındaki problemlerin çözümünde kullanılmaya başlanmıştır. Örneğin Zienkiewicz ve Cheung 1965 yılında sonlu elemanlar yöntemini kullanarak Poisson denklemini çözmüştür. Sonlu elemanlar metodunun magnetik devrelere uygulanışı ise 1970'li yıllara dayanmaktadır. Silvester tarafından yapılan, doyumlu magnetik alan problemlerinin bu yöntemle analiz edilmesi bu konuda göze çarpan ilk çalışmalar olmuştur. 1971'de Chari ve Silvester tarafından elektrik makinelerinde elektromagnetik alan problemlerinin nonlinear varyasyon formülasyonunun çözümü yapılmıştır [1]. M.V.K.Chari ve P.Silvester doğrusal olmayan ortamlarda Poisson denklemini, enerji fonksiyoneli minimum yapacak şekilde çözmüştür. Birinci dereceden elemanlarla, karesel yakınsayan iterasyonlu çözüm kullanmışlardır. SEY kullanılarak yapılan bu hesaplamaların Sonlu Farklar Yönteminden daha ekonomik olduğunu belirtmişlerdir. Bir başka çalışmada da 5kW'lık dc motora bunu uygulamışlar ve probleme süreklilik eklemişlerdir [2].

1960'lı yıllardan itibaren bu yöntem yapı alanı dışındaki problemlerin çözümünde kullanılmaya başlanmıştır. Örneğin Zienkiewicz ve Cheung 1965 yılında sonlu elemanlar yöntemini kullanarak Poisson denklemini çözmüştür. Sonlu elemanlar metodunun magnetik devrelere uygulanışı ise 1970'li yıllara dayanmaktadır. Silvester tarafından yapılan, doyumlu magnetik alan problemlerinin bu yöntemle analiz edilmesi bu konuda göze çarpan ilk çalışmalar olmuştur. 1971'de Chari ve Silvester tarafından elektrik makinelerinde elektromagnetik alan problemlerinin nonlinear varyasyon formülasyonunun çözümü yapılmıştır. M.V.K.Chari ve P.Silvester doğrusal olmayan ortamlarda Poisson denklemini, enerji fonksiyoneli minimize yapacak şekilde çözmüştür. Birinci dereceden elemanlarla, karesel yakınsayan iterasyonlu çözüm kullanmışlardır. SEY kullanılarak yapılan bu hesaplamaların Sonlu Farklar Yönteminden daha ekonomik olduğunu belirtmişlerdir. Bir başka çalışmada da 5kW'lık dc motora bunu uygulamışlar ve probleme süreklilik eklemişlerdir [2].

1972'de O.W.Andersen tarafından transformatörün sızıntı akısını hesaplayan, sonlu elemanlar yöntemine dayalı bir program geliştirildi. Bu program alan hakkındaki bilgiler, reaktans, kuvvetler ve kayıpları hesaplamakta kullanıldı [3].

P.Silvester elektrik makinalarının sonlu elemanlar yöntemiyle analizinde kullanılabilecek yüksek verimli yöntemler açıklamıştır. Bunların içinde Jakobyan matrisleri oluşturma, sınır değerlerinin tam hesaba katılması, relüktivite özelliklerine yaklaşımları, yoğun matris hafızası ve düzenlemesi ve yarı otomatik düğüm numaralandırma konularındaki gelişmiş teknikler bulunmaktadır. Bu tekniklerin kullanılmasıyla 1973'lü yıllarda 500-1000 düğüm değişkenli SEY modelleri orta ölçekli bilgisayarlar için kullanılabilir duruma gelmiştir [4].

1973 yılında tek yanlı asenkron motorlarda oldukça belirgin olan normal yöndeki kuvveti inceleyen E. M. Freeman ve ekibi, basit iki teori sunan bir makale yayınlamışlardır. Duran ve hareketli makinalar için dik yöndeki kuvvetin frekans ve hıza göre, kutup değişimine ve uyartıma göre değişimini gösteren denemeler içeren makalede, normal yöndeki kuvvet ve onun muhtemel yön ve büyüklük değişimlerinin önemli tasarım unsurlarından olduğu sonucuna varılmıştır [5].

1973'teki bir çalışmasında Chari, manyetik yapılardaki girdap akımı problemlerine sonlu elemanlar yöntemi ile çözüm getirmiş, uygun enerji fonksiyoneli ifade eden doğrusal difüzyon denklemini açıklamıştır. Çözüm bölgesini üçgen elemanlara ayırarak

enerji fonksiyoneli her köşedeki vektör potansiyele göre en düşük olacak şekilde çözümü hesaplamıştır. Bu şekilde manyetik alan ve girdap akımı kayıplarının SEY ile ifadeleri elde edilmiştir. Bir kaç uygulama ile sonuçlar klasik analiz ve test sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır [6].

1976'da K. S. Demirchian ve arkadaşları tarafından skaler potansiyel ve manyetik yük kavramları, sürekli durum manyetik alanları ve girdap akımlarının hesaplanması ortaya konulmuş, doğrusal olan ve olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin matematik modelde çözülmesi ile yöntem geliştirilmiştir [7].

1976 yılında A. Y. Hanalla ve D. C. Macdonald, bir senkron motorun iki boyutlu bir bölgesini birinci dereceden üçgen elemanlar kullanarak modellediler. Denklemler Amper Kanunu kullanılarak elde edildi. Kısa devrelerin etkisi, denklemlere iletkenlik matrisi eklenerek hesaba katıldı. Çeliğin değişken manyetik geçirgenliği girdap akımlarının etkisi de göz önüne alındı [8].

1977'de O. C. Zienkiewicz tarafından üç boyutlu heterojen ortamlardaki manyetik alan problemlerini formüllemek için bir yöntem önerildi. Burada, bir ϕ skaler potansiyelinden ve verilen akım yoğunluklarının oluşturduğu analitik yöntemden yararlanılmıştır. Yardımcı problemin çözümü kolayca bulunur. Yöntemin üç bileşenli vektör potansiyel A ile yapılanlardan daha ekonomik olduğu belirtilmiştir [9].

1978'de D. A. Lowther ve arkadaşları açık sınır elektrik ve manyetik problemlerinin çözümü için bir sonlu elemanlar yineleme (iterasyon) tekniği tanımlamışlardır. Yöntem, dış bölgenin halka şeklinde bir süper eleman ile modellenmesi esasına dayanmaktadır. Halkanın iç kenarı dışındaki düğümleri atılmıştır. Halkanın oluşturulması ve otomatik bölmelenmesi anlatılmıştır. Çözüm için sunulan algoritma, dış kısımdaki Laplace bölgesini ifade eden sınır değer katsayılarını, iç bölgedeki sınır düğümlerinin değerleri ile hesaplar. Yöntem, analitik ve deney modellerinden elde edilen sonuçların mukayesesi ile denenmiş ve iyi uyum gözlenmiştir [10].

1978'de E. Chiricozzi ve A. Di Napoli tarafından, demir kısımlardaki doyum etkisi ve rotor sarımındaki girdap akımı hesaba katılarak bir alternatörün rotor dişleri içindeki manyetik alanın incelenmesi yapıldı. Durum değişkenleri yaklaşımı ve SEY'nin kullanıldığı incelemede, manyetik alanın rotorda basamak fonksiyonlu akım ve statorda sinüsoidal üç fazlı doğrusal akım yoğunluğu ile oluşturulduğu kabul edildi [11].

1980 M. Chiampi yayınında, transformatör demiri içindeki üç boyutlu manyetik alan dağılımının hesaplanması için histeresis ve girdap akımları ihmal edilerek bir nümerik yöntem önerildi. Manyetik alan, eliptik bir denklemi sağlayan bir skaler potansiyelden elde edildi. Bu denklem iteratif yöntemlerle çözüldü. Transformatör nüvesinde manyetik alan dağılımının hesabı için bir SEY programı geliştirildi. Bir örnek üzerinde yorumlar yapıldı.

M. V. K.Chari tarafından 1981'de yayınlanan magnetostatik problemler için esas alınabilecek makalede üç boyutlu vektör potansiyel çözümü ortaya konulmuş, fonksiyonelin minimum yapılmasının problemin çözümünü verdiği gösterilmiştir. Geliştirilen analiz yöntemi, iki sarımlı bir transformatör ve bir türbin jeneratörü parçası üzerinde uygulanmıştır.

K. Pneisa ve arkadaşlarıncı 1981'de yayınlanan makalede iki boyutlu düzlem ve eksen simetrikli elektromanyetik alan hesapları için bir SEY paketi anlatıldı. Yazılımın verimi örnekler çözülerek incelendi. Değişik program sürümleri doğruluk yönünden mukayese edildi. Doğrusal olmayan ortamlar için doğrudan yineleme ve Newton-Raphson yöntemleri uygulandı.

S. Williamson ve ekibi, 1982'de doğrusal olmayan manyetik alan problemlerinin çözümünde Newton-Raphson yöntemini kullanmıştır. Akım kaynakları ve potansiyeller kompleks alınmıştır. Yöntemin kullanılışı, tek fazlı asenkron motorun sürekli durum çalışması incelenerek gösterilmiştir. Aşırı doyum hallerinde dahi yakınsamanın hızlı olduğu görülmüştür.

3B girdap akımı problemine T- Ω yöntemiyle yaklaşım T.W.Preston ve A. B. J. Reece tarafından sunuldu. T elektrik vektör potansiyeli, Ω ise manyetik skaler potansiyeli ifade etmektedir. Yöntemin avantajları, sınır şartlarının kolayca belirlenmesi ve gereken değişken miktarının ekonomik olmasıdır. Problemden manyetik ve elektrik bölgeler ayrılır. İletken olmayan bölgelerde T sıfır veya sabit bir değerdir.

3B girdap akımı problemlerinde vektör potansiyel A ve skaler potansiyel ϕ kullanıldı. Manyetik olmayan bölge için Galerkin yöntemiyle bir SEY denklem sistemi kuruldu. Skaler potansiyel ϕ , düğüm başına bilinmeyen sayısını azaltmak üzere denklem sisteminde yok edildi. Potansiyellerin ve girdap akımlarının zaman bağımlı hesaplanması için adım adım işlem yapılabileceği belirtildi.

1982’de M. Poloujadoff ve H. El Kashab tarafından sonlu farklar yöntemiyle lineer asenkron motorun analizi çalışması yapıldı. Motorun elektromanyetik denklemleri yazılarak sonlu farklar yöntemine uyarlandı. Sekonderin sonsuz, demirin sonlu uzunluktaki yapısı kısımlama (partition) yöntemiyle hesaba dahil edildi. Bir aktarma (transmission) matrisinin kullanılmasıyla birçok bilinmeyen aradan çıkartıldı. Böylece klasik tersini alma yöntemiyle çözülebilecek büyüklükte bir denklem sistemi elde edildi. Aktarma matrisinin öz değerleri ile Fourier dönüşümü tekniğiyle elde edilen bazı ifadelerin kutupları arasında ilginç bir benzerlik tesbit edildi.

M. A. Rodriguez Pezueta ve J. Sanz Feito, lineer asenkron motorun oyuklu modelini ele almış, fazlar arasındaki simetrisizlik, rotorun düzgün olmaması, birinci harmonik dışındaki mmk dağılımı, olukların sebep olduğu hava aralığı değişimleri, akım yerine stator gerilimlerinin bilinmesi ve uç etkilerinin bir şekilde modellenmesi durumlarına yönelik bir hesaplama yöntemi anlatmışlardır.

D. Rodger ve J. F. Eastham 1982 yılında, lineer asenkron motorların dik yöndeki hızlarına ilişkin performanslarını sonlu elemanlar yöntemi ve Fourier analizi tekniğiyle hesapladılar. Küçük bir lineer makina için iki yöntemden elde edilen sonuçlar karşılaştırıldı. Sabit akım ile beslenen, yüksek hızlı lineer asenkron makinanın taşıtının hava aralığındaki basamak artış tepkisi hesaplandı. Oluşan dikey salınımların periyodu 2.1s, elektromanyetik sönüm etkileri zayıf ve salınım sönümlenme zaman sabiti 35s civarında bulundu.

Sonlu elemanlar yöntemiyle çok fazlı AC cihazların akım dağılımları ve manyetik alanlarının hesaplanması hususunda J. R. Brauer’in 1982’de bir çalışması bulunmaktadır. Sürekli durum girdap akımları ve güç kayıplarının, elektrik ark düzeneğinin çelik kısımları için belirlendiği çalışmada iki farklı üç fazlı bara sistemi için akım dağılımları hesaplandı. Hesaplanan sonuçlar, önceki hesap ve ölçümlerle karşılaştırıldı [12].

J. H. McWhirter’in 1982 tarihli bir makalesinde girdap akımlarının üç boyutlu şekil gösteren levha şeklindeki ince iletkenler içinde nümerik olarak hesaplanması anlatıldı. Uyarıcı elektrik alan, dıştaki bir telden geçen akımla oluşturulur. Bahsedilen nümerik yöntem, Fredholm integral denkleminde dayanmaktadır.

B. Brunelli ve ekibi 1983’teki makalesinde gerilim uyarımlı, 3 fazlı, tek parçalı demir rotorlu asenkron motorun iki boyutlu sonlu elemanlar analizini anlatmaktadır. Doyumu hesaba tam olarak katabilmek için, her bir sürekli durum operasyon noktası, sabit bir hız

için, elektromanyetik alan denkleminin asimptotik çözümü şeklinde hesaplanmış, çalışma deney sonuçlarıyla desteklenmiştir.

M. Okabe ve arkadaşları 1983 yılında sonlu elemanlar yöntemini güç transformatöründeki demir kayıplarına çeliğin manyetik özelliklerinin etkisini incelemek ve anlaşılmasına yardımcı olmak için kullandılar. Manyetik özelliklerin ifadesinde maddeye has üç sabitten faydalandılar.

Doyumdaki elektrik makinalarının girdap akımı hesabı için bir model F. Bcuillaut ve A. Razek tarafından 1983’de yapılan bir çalışmayla verilmiş, difüzyon denklemi, dönen bir model için SEY ile çözülmüştür. Bir *hava aralığı makro elemanı* yönteme dahil edilmiştir.

Sürekli durum SEY çözümlerinin kararlılığı konusunda 1983 yılında yayınlanan makale M. Ikeuchi tarafından kaleme alınmıştır. n’inci dereceden sonlu elemanlar yönteminde, n tek olduğunda çözümlerin belli şartlar altında kararlı olduğu, n çift olduğunda ise şarta bağlı olmaksızın kararlılık sağlandığı rapor edilmiştir.

Sonlu elemanlar yönteminin endüstride tasarım aşamasında kullanılmasıyla alakalı bir uygulamanın ve değerlendirmelerin yer aldığı bir makale T. W. Preston ve A. B. J. Reece tarafından 1983’te yayınlanmıştır. Makalede, bir sanayi kuruluşunun önceliklerinin akademik kuruluşlara nispetle farklılıklar gösterdiğinden bahsedilmiş, bir endüstriyel araştırma laboratuvarında geliştirilen, elektromanyetik ve elektrik alanlar için yazılan sonlu elemanlar programları anlatılmakta ve edinilen tecrübeler özetlenmektedir. 2B, yarı 3B ve 3B, belli oranda demir nonlineerliğini ve girdap akımlarını içeren programların tipik uygulamalarına yer verilerek, veri üretimi son işleme (post processing) ve hesaplamının ekonomikliğı tartışılmıştır.

1984 tarihli makalesinde B. Luetke-Daldrup, iki boyutlu girdap akımı problemlerinin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözümünün iki yönteminin mukayesesini yapmıştır. Zaman-adım yöntemiyle, histerezis hariç tüm etkilerin göz önüne alındığı hesaplamaya tam çözüm, tüm alan büyüklüklerinin sinüsoidal olduğunu kabul ederek yaptığı quasi-stationary (durağanımsı) problem çözümüne ise yaklaşık çözüm adını vermiştir. Manyetik geçirgenliğin alan bağımlılığı, sadece manyetik akı yoğunluğunun genliğine bağlı bir etkin geçirgenlik katılarak yaklaşık olarak düşünülmüştür.

Girdap akımının SEY ile çözümünde deri etkisinin hesaplamadaki payını azaltmak için S. Keran ve J. D. Lavers tek boyutlu problemlerde üstel şekil fonksiyonu kullanmışlar, deri derinliğinden bağımsız sonuçlar elde etmişlerdir.

Üç boyutlu girdap akımı çözümleri için üç bileşenli manyetik vektör potansiyeli A ve bir skaler elektrik potansiyel ile bir formülleme S. J. Salon ve J. P. Peng tarafından 1984'te sunuldu. Çözümde küp elemanlar kullanıldı.

R. M. Pai, S. A. Nasar ve Ion Boldea 1987'de yayınlanan bir makalede akım uyarımlı, düşük hızlı, yekpare demir sekonderli, alüminyum tepki raylı, tek yanlı lineer asenkron motoru (SLIM) incelediler. Teğet yöndeki manyetik alanı düzenlemekte, stator demirinin manyetik geçirgenliğinin ayarlanmasına dayanan çok tabakalı transfer matrisi kavramı ile irtibatlı alan analizinden oluşan bir karma yöntem geliştirildi. Bu yöntemin sekonder demirindeki akı dağılımı ve manyetik geçirgenlik hususunda değerli bilgiler verdiği gösterildi.

J. F. Eastham ve ekibi 1987 yılında "Kısa Primerli Lineer Makinaların Yüksek Hızlı Maglev Taşıtı Olarak Mukayesesi" isimli yayında doğrusal asenkron motorlarda Fourier tabanlı teknikler ve üç boyutlu sonlu elemanlar yöntemini açıklamış, kısa statorlu doğrusal senkron makinaları ortaya koyarak yüksek hızlı tiplerini test amacıyla dönen bir düzeneden bahsetmişlerdir. Bazı ön test sonuçlarını bir analitik yöntemin sonuçlarıyla beraber vermişler ve yüksek hızlı homopolar senkron motor ve eksen akılı asenkron motorun mukayeselerini yapmışlardır.

Boyuna uç etkisini modellemek üzere basit bir eşdeğer devre J. F. Gieras ve arkadaşları tarafından 1987'deki bir makalede anlatıldı. Uç etkisi faktörü için hava aralığı mmk 'sını düzenleyen basit bir denklem elde edildi. Hava aralığı manyetik alanı, senkron hızdaki manyetik alan dalgası ile uç etkisini ifade eden dalga olarak düşünüldü. İki büyük SLIM ile ölçüm ve karşılaştırmalar yapıldı. Makalede, bulunan denklemin LIM tasarımı için gereken doğruluğu sağladığı belirtilmiştir [13].

N. K. Deshmukh çekici elektromanyetik taşıma sistemlerinin tasarımında sistem üzerindeki kuvvetin önceden bilinmesi gerektiğini vurgulayarak girdap akımlarını da kapsayan elektromanyetik alan problemlerini çözmekte SEY'ni kullanmıştır. İki formülleme şekli karşılaştırılmış ve 3B girdap akımı ve ilgili manyetik alanların özellikleri belirlenmiştir [14].

1988'lerde hala hareketli manyetik alan altındaki iletkenlerde oluşan girdap akımlarının hesabıyla uğraşılıyordu. T. Takahashi ve K. Kurita, mıknatıs hareketi altındaki demir olmayan (örneğin süper iletken) maddelerdeki geçici rejim girdap akımlarının hesabı için bir yöntem önerdiler. Burada formülleme, T- Ω yönteminin elektrik vektör potansiyelinden

faydalanan bir sonlu farklar yöntemine dayanır. Bölmeleme, iki boyutlu ince iletken levha üzerinde yapıldı, demir içermeyen uzay bölgesinde yapılmadı. Ancak girdap akımlarının oluşturduğu tepki alanları ve mıknatısların oluşturduğu alanlar Biot-Savart kuralının integral denklemiyle düşünüldü. Yöntem, bir maglev taşıtının girdap akımı ve kuvvet analizine bağlı olarak gösterildi.

Frekans tabanlı bir çözüm yöntemi, S. J. Salon tarafından 1993'teki bir makalede sunuldu. Geçici durum çözüm yöntemiyle hesaplanan sürekli durum çözümlerinden daha iyi hesaplama zamanı elde edildi. Makale, sanal bir blok rotor testi üzerine bina edilmiş eşdeğer devre parametrelerinin hesabı için de bir yöntem önermektedir.

AC beslemeli bir bobinin etkisi altında bulunan, aralarında ince bir aralık olan bir çift iletkenin içinde endüklenen girdap akımlarının akı yoğunluğu ve akı yansıması problemi 1996'da T. Yoshimoto ve ekibinin bir makalesinde ele alınmıştır. Dört bileşenli, tekrarlı (iteratif) bir SEY, üç boyutlu modele uygulanmıştır. Kullanılan hafıza miktarının ana sistem matrisi için genelde kullanılanların on altıda biri kadar olduğu belirtilmiştir.

Bütün bu gelişmelere paralel olarak sonlu elemanlar yönteminin hem uygulama alanında hem de kullanım oranında büyük artış meydana gelmiştir. Bu yöntem elektrik mühendisliğinde; magnetik alanların analizinde, elektrik makinelerinin performans hesaplarında kullanıldığı gibi makine mühendisliğinde; termik ve hidrolik problemlerin çözümünde, eğilme, burulma ve kırılma analizlerinde, inşaat mühendisliğinde; mekanik dayanım için kuvvet hesaplamalarında oldukça kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntemin gelişmesiyle birlikte seri imalat öncesi prototip yapmak için yapılan harcamalar azalmıştır.

1.2 Sonlu Elemanlar Metodunun Tarihsel Gelişimi

Sonlu elemanlar metodu ilk olarak yapı analizinde kullanılmaya başlandı. İlk çalışmalar Hrennikoff (1941) ve Mc Henry (1943) tarafından geliştirilen yarı analitik analiz metotlarıdır. Argyis ve Kelsey (1960) virtuel iş prensibini kullanarak bir direkt yaklaşım metodu geliştirmiştir. Turner ve diğerleri (1956) bir üçgen eleman için rijitlik matrisini oluşturmuştur. "Sonlu Elemanlar" terimi ilk defa Clough (1960) tarafından çalışmasında telâffuz edilmiştir. Metodun üç- boyutlu problemlere uygulanması iki-boyutlu teoriden sonra kolayca gerçekleşmiştir (örneğin, Argyis (1964)).

Araştırmacılar 1960'lı yılların başlarında non-lineer problemlerle ilgilenmeye başladılar. Turner ve diğerleri (1960) geometrik olarak non-lineer problemler için bir çözüm tekniği geliştirdi. Sonlu elemanlar metoduyla stabilite analizi ise ilk Martin (1965) tarafından tartışılmıştır. Statik problemlerin yanısıra dinamik problemlerde sonlu elemanlar metoduyla incelenmeye başlandı (Zienkiewicz ve diğerleri (1966) ve Koenig ve Davids (1969)). 1943 yılında Courant bölgesel sürekli lineer yaklaşım kullanarak bir burulma problemi için çözüm üretmiştir.

Yapı alanı dışındaki problemlerin sonlu elemanlar metoduyla çözümü 1960 'lı yıllarda başlamıştır. Örneğin Zienkiewicz ve Cheung (1965) sonlu elemanlar metodu ile Poisson denklemini çözmüştür. Doctors (1970) ise metodu potansiyel akışa uygulamıştır. Sonlu elemanlar metodu geliştirilerek ısı transferi, yeraltı sularının akışı, manyetik alan ve diğer bir çok alana uygulanmaktadır.

Genel amaçlı sonlu elemanlar paket programları 1970'li yıllardan itibaren ortaya çıkmaya başlamıştır. 1980'li yılların sonlarına doğru ise artık paket programlar mikro bilgisayarlarda kullanılmaya başlandı. 1990 yıllarının ortaları itibarıyla sonlu elemanlar metodu ve uygulamalarıyla ilgili yaklaşık olarak 40.000 makale ve kitap yayınlanmıştır

1.3. Sonlu Elemanlar Yönteminin Tercih Edilmesinin Nedenleri

Sonlu elemanlar yöntemi; bilgisayarlarla makine ya da yapı elemanlarının dizayn ve optimizasyonu ile birlikte çeşitli fiziksel olayların modellenmesi ve teknolojik olarak yararlı hale getirilmesinde kullanılır. En etkin hesaplama yöntemlerinden biri olan bu yöntem tüm dünyada mühendislerin kullandığı bir sayısal çözümleme tekniğidir. Ayrıca bu metot karmaşık problemlerin daha basit alt problemlere ayrılarak her birinin kendi içerisinde çözülmesiyle tam çözümün bulunduğu bir çözüm yöntemidir.

Sonlu elemanlar yöntemini diğer sayısal metotlardan farklı kılan temel unsurları sıralayacak olursak;

- Kullanılan sonlu elemanların boyutlarının ve şekillerinin değişkenliği nedeni ile ele alınan bir cismin geometrisi tam olarak temsil edilebilir.
- Bir veya birden çok delik (yani çok bağlantılı bölgeler) veya köşeleri olan bölgeler kolaylıkla incelenebilir.

- Değişik malzeme ve geometrik özellikleri bulunan bölgelerin incelenmesinde ek bir zorluk meydana gelmez.

- Sebep-sonuç ilişkisine ait problemler, genel direngenlik matrisi ile birbirine bağlanan genelleştirilmiş kuvvetler ve yer değiştirmeler cinsinden formüle edilebilir. Sonlu elemanlar metodunun bu özelliği problemin anlaşılmasını ve çözülmesini hem mümkün kılar hem de basitleştirir.

- Sınır şartları kolayca uygulanır.

Elektrik makinelerinin imalat öncesi tasarımlarında da bu yöntemden yararlanılmaktadır. Aynı şekilde bir motorun boşta veya yükte üretebileceği moment ve akı dağılımları, motorun fiziksel boyutları ve kullanılacak malzemenin özellikleri değiştirilerek, yapılan analizin sonuçlarına göre en ekonomik ve en iyi performansı sağlayan motor belirlenebilir. Böylece hem zamandan hem de imalat öncesi model üretme harcamalarından tasarruf sağlanmaktadır. [16]

1.4. Sonlu Eleman Program Kullanıcısının Sorumlulukları

Günümüzde ticari sonlu eleman paket programları son derece yaygınlaşmıştır. Tecrübesiz bir kullanıcı bile bir takım sonuçlar üretip, son derece cazip grafikler hazırlayabilir. Örneğin bir gerilme analizi için sonlu eleman modeli iyide olsa, kötüde olsa ehliyetsiz bir kullanıcı bile kolaylıkla gerilme konturları üretebilir. Kötü bir ağ yapısı, kötü seçilmiş eleman tipleri, doğru olmayan yükleme şekliyle yaratılan modeller bile dikkatsizce yapılan bir kontrolde gözden kaçabilecek uygunlukta sonuçlar verebilir.

Ehliyetli bir kullanıcı ancak mevcut problemin fiziğini anladıktan sonra uygun bir modellemeye gidebilir ve sonuçları yorumlayabilir. Kullanıcı aynı zamanda yarattığı modelin yükleme altında nasıl davranacağını öngörebilmelidir. Gerilme analizinde uzmanlaşmış olmak, örneğin manyetik alan problemlerinin çözümünde yeterli olmak anlamına gelmemektedir. Elde edilen çözümlerdeki yanlışlıklar yazılımdaki hatadan kaynaklansa bile sonuçların sorumluluğu programcıya değil, kullanıcıya aittir.

1.5. Tezin Amacı

Asenkron motorların tasarımında günümüze kadar klasik yöntemler kullanılmaktadır. Klasik yöntemde, yaklaşık amprifik ifadeler kullanılarak tasarım yapılmaktadır. Bu yöntemle; tasarımların sonucunda elde edilen asenkron motor, hedeflenen sonucu vermeyebilmektedir. Bu nedenle sonlu elemanlar yöntemiyle asenkron motor tasarımı önemli ilgi görmektedir. Sonlu elemanlar yöntemi ile tasarım yapabilmek için ilk önce aynı yöntemle analiz yapabilmek gereklidir.

Sonlu Elemanlar yönteminde ilk aşama, çözüm bölgesinin küçük elemanlara bölünmesi işlemidir. Bu elemanların iki boyutlu analizinin yapılması esnasında alanlarının, üç boyutlu analizinin yapılması esnasında hacimlerinin hesaplamalara katılmasından dolayı, alan ve hacim hesaplamalarının kolay yapılabileceği ve çözüm bölgesinin sınırlarını bozmayacak elemanlara bölünmesi esas alınır. Eğrisel sınırları sağlayabilmesi nedeniyle en çok üçgen ve tetrahedron elemanlar tercih edilir. Çözüm bölgesinin mümkün olduğu kadar küçük elemanlara bölünmesi ve vektör potansiyel değişimlerinin fazla olduğu kısımların daha küçük elemanlara bölünmesi çözümün doğruluğunu artırmaktadır. Ancak çok fazla eleman kullanmak çözümün yapılması için gerekli sürenin uzamasına neden olmaktadır. Sonlu elemanlar yöntemi basit bir problem için aşağıdaki adımları kullanır:

1. Verilen bölgenin sonlu eleman çözüm ağının oluşturulması.

Alt işlemleri aşağıdaki gibi verilebilir.

- Çözüm ağının oluşturulması.
- Düğüm numaraları ve eleman numaralarının verilmesi.
- Problem için gerekli geometrik özelliklerin üretilmesi.

2. Çözüm ağı üzerindeki bütün eleman tipleri için eleman denklemlerinin türetilmesi

- Bir eleman üzerinde varyasyonel formülasyonun oluşturulması.
- Esas matrisinin elde edilmesi.

3. Komple eleman denklemlerini elde etmek için her bir elemana ait eleman denklemlerinin birleştirilmesi.

4. Problem çözümünün sınır şartlarına zorlanması.

5. Birleştirilmiş denklemin çözümü.

6. Sonuçların elde edilip irdelenmesi.

1.6. Tezin İçeriği

Bu tezde, bir asenkron motorun sonlu elemanlar yöntemi ile analizi üzerinde durulacaktır. Asenkron motorun sonlu elemanlar yöntemi (SEY) kullanılarak enerji ve moment hesabı anlatılmıştır. Bu konuda Maxwell 3d programı ile motorun manyetik akı yoğunluğu ve B(T) değerleri hesaplanarak bir asenkron motorun performans analizi yapılmıştır.

Tasarım esnasında amaç optimum boyut ve en yüksek performansı almak olacağı için öncelikle klasik tasarım yöntemleri ile birlikte modern tasarım yöntemleri hakkındaki literatür taraması yapılmıştır. Daha önce yapılmış olan çalışmalar sonucunda ortaya konmuş kriterlere bağlı kalarak bir model oluşturulmuş ve bu modelin hesaplanan sonlu elemanlar sonucuna göre motorun performansı belirlenmiştir. Bu analiz işlemlerini gerçekleştirmek için aşağıdaki çalışma adımları incelenecektir:

1. Sonlu elemanlar yöntemini kullanarak asenkron motorun analizinin üç boyutlu olarak bir paket programında yapılması.

2. Analiz sonuçlarının karşılaştırmalı olarak incelenmesi.

Analiz sonuçlarının iyileştirmek için gerekli yapısal değişiklikler yapılarak defalarca hesaplar tekrar edilip sonuçlarının nasıl değiştiği gözlenmiştir. Sonuç olarak bu çalışmada, yukarıda belirtilen amaca göre yapılan düzenleme aşağıdaki gibidir.

2. Bölüm: Asenkron Motorlar

Bu bölümde asenkron motorların yapısı ve çalışma prensibinden bahsedilmiştir.

3. Bölüm: Sonlu Elemanlar Yöntemi

Bu bölümde yaygın olarak kullanılan sonlu elemanlar yönteminin belli bir diferansiyel denklemin üzümünde ortam şartları göz önüne alınarak nasıl zleceği anlatılmıştır. Sonlu eleman analizi için kullanılan fonksiyonellerin seçimi ve uygulama adımları ayrıntılı bir Şekilde açıklanarak sonlu elemanlar yönteminin teorisinden bahsedilmiştir.

4. Bölüm: Poisson Denklemi ve Manyetik Devre Büyüklüklerinin Hesaplamaları

Poisson denklemlerinin elde edilmesi, her bölgenin manyetik özelliğine bağlı olarak kaynak fonksiyonlarının girilmesi ile denklemlerin üzülmesi ve manyetik devre büyüklüklerinin hesaplanması, manyetik akı yolunun çizilmesi hakkında bilgi verilmiştir.

5. Bölüm: Asenkron Motorun 3D Paket Programı Kullanılarak Sonlu Elemanlar Yöntemi ile analizi

Maxwell 3d programı kullanılarak geliştirilen program yardımıyla asenkron motorun bilinen sonlu elemanlar analizi yapılarak A vektör potansiyel, B magnetik akı yoğunlukları bunlara bağı olarak da moment değeri hesaplanmıştır.

6. Bölüm: Sonuç

Elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

2. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

Bu bölümde sonlu elemanlar yönteminin genel teorisinden bahsedilmiş ve bilgisayarda programının gerçekleştirilmesi için gerekli olan denklemler elde edilmiştir.

Sonlu elemanlar yöntemi, fiziksel matematiğin sınır değer problemlerine yaklaşık çözümler elde etmek için kullanılan sayısal bir yöntemdir. SEY' in hem karmaşık fiziksel şekilleri kolay modellemesi hem de lineer olmayan malzemelerin tanımlanmasına izin vermesinden dolayı elektrik motorlarının analizinde en çok tercih edilen sayısal yöntemdir[17].

Elektromanyetik problemlerde amaç, alan dağılımlarını belirleyerek buna bağlı olan diğer fiziki büyüklüklere ulaşmaktır. Bu tasarım aşamasında önemli bir noktadır. Elektrik motorlarının tasarımında ve iyileştirilmesinde de alan dağılımlarını hesaplamak ya da bir şekilde ulaşılmak istenen büyüklükleri ölçmek gerekir. Ancak, sonuçların modelin imalat safhasından sonra elde edilmesi, zaman ve maliyet kaybına yol açacaktır. Bu durumda da esnek ve doğru bir tasarım yöntemi olmayacaktır. Bunun için motorun modeli kağıt üzerinde tasarlandığı anda gerekli hesapların ve ölçmelerin yapılabilmesi lazımdır. Bunun için analitik yöntemler kullanılabilir. Ancak, geometri analitik çözümü bilinen tarzlara uymuyorsa veya karmaşıksa sayısal hesaplama yöntemlerinden yararlanır. Bu yöntemler, yaklaşık sonuç veren yöntemler olup sonlu elemanlar yöntemi de bunlardan bir tanesidir[18].

Sonlu elemanlar yönteminde ilk aşama olarak çözüm bölgesi küçük üçgen elemanlara bölünür. Nümerik hesaplamalarda bu şart olup, yaklaşık çözümü ifade eder. Üçgenlere bölünen bu elemanların iki boyutlu analizinin yapılması esnasında alanlarının, üç boyutlu analizinin yapılması esnasında ise hacimlerinin hesaplamalara katılmasından dolayı, alan ve hacim hesaplamalarının kolay yapılabileceği ve çözüm bölgesinin sınırlarını bozmayacak elemanlara bölünmesi esas alınır. Eğrisel sınırları sağlayabilmesi nedeniyle en çok üçgen ve tetrahedron elemanlar tercih edilir. Çözüm bölgesinin mümkün olduğu kadar küçük elemanlara bölünmesi ve vektör potansiyel değişimlerinin fazla olduğu kısımların daha küçük elemanlara bölünmesi çözümün doğruluğunu artırmaktadır. Ancak buna dayanarak çok fazla eleman kullanmak çözümün yapılması için gerekli sürenin uzamasına neden olmaktadır [19].

Elektromanyetik problemlerde Laplace veya Poisson denklemleri geçerlidir. Aranacak değerler, bu denklemleri sağlayan ve enerji fonksiyonunu minimum yapan değerlerdir. Bu noktada, gerçek alan fonksiyonuna bir yaklaştırma olarak deneme fonksiyonu devreye girer. Bunlar birinci, ikinci veya daha yüksek dereceden polinomlardır. Alan fonksiyonunun (skalär veya vektörel potansiyel) bu noktalardaki değerleri temsil edilerek deneme fonksiyonuna oturtulur. Bu sayede bilinen vektör potansiyel değerleri ve uyartımlar cinsinden bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde düğüm noktalarındaki alan (potansiyel) değerleri ortaya çıkar. Bölge sınırlı sayıda elemanlara bölüdüğünden ve deneme fonksiyonu yaklaştırım olduğundan, erişilen sonuçlar yaklaşık olacaktır.

Sonlu elemanlar yöntemini genel olarak, şu aşamalarla anlatabiliriz:

- 1- Düğüm numaraları ve eleman numaralarının verilmesi.
- 2- Çözüm bölgesinin bölmelendirilmesi: Çözüm bölgesi elemanlara ayrılır ve düğüm noktaları belirlenir.
- 3- Katsayılar matrisinin oluşturulması.
- 4- Bilinen vektör potansiyel değerleri ve uyartımların (akım vb.) probleme dahil edilmesi.
- 5- Denklem sisteminin çözülmesi ve düğüm noktalarındaki potansiyellerin bulunması.
- 6- Hesaplanması gereken diğer büyüklüklerin bu potansiyel değerlerinden faydalanılarak hesaplanması.

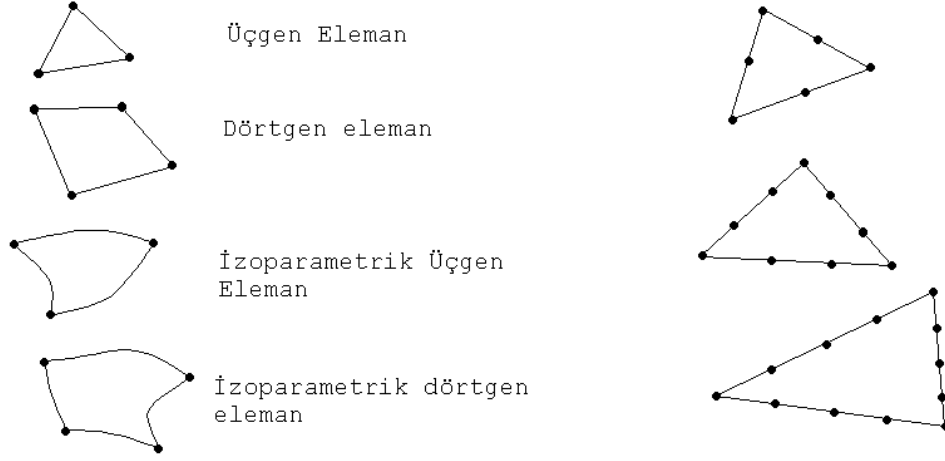
2.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi İçin Bölmelendirme:

2.1.1. Eleman Çeşitleri:

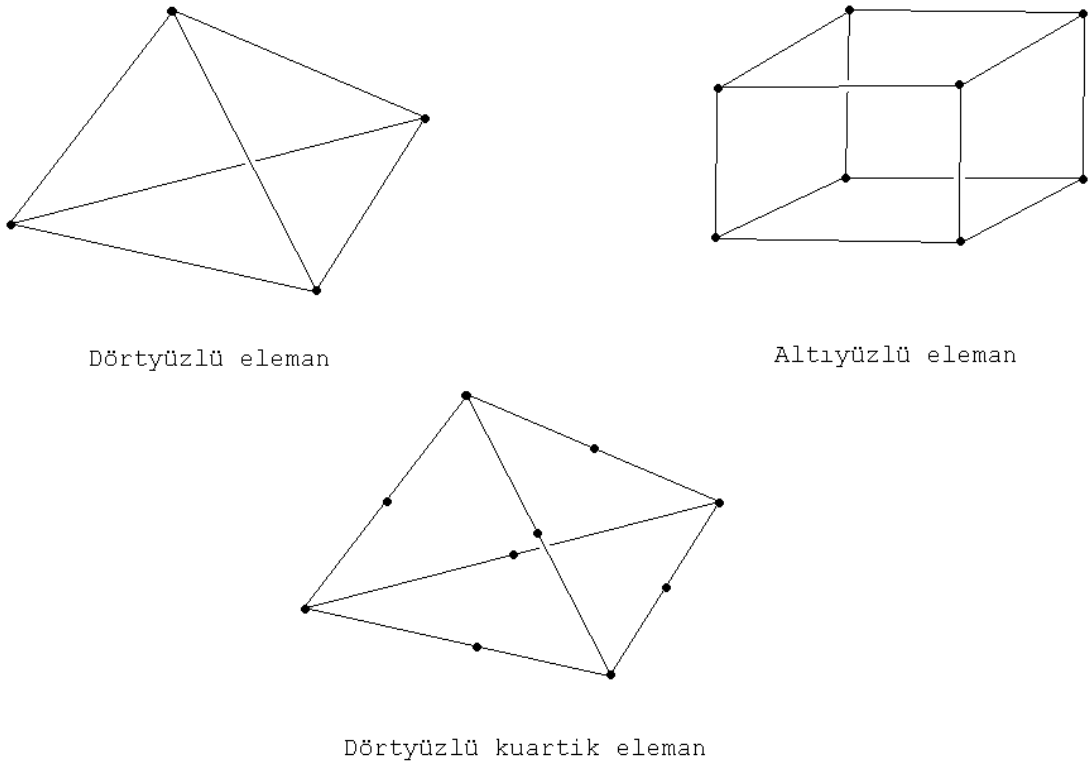
Sonlu elemanlar yöntemini kullanabilmek için, bölgenin yüzey veya hacim olma özelliğine göre hesaplama yapılacak olan çözüm bölgesini parçalara bölmek, uygun elemanlara ayırmak gerektiğinden bahsetmiştik. Düzlemsel bölgeler için kullanılacak en basit eleman üçgendir. Çözüm bölgesi üçgen parçalara bölünür. Uygun matematik kullanmak şartıyla, istenirse bölge dörtgen elemanlara da bölünebilir. İki boyutlu bölmelemelerde kullanılacak eleman çeşitleri Şekil 2.1'de belirtilmiştir.

Çözüm bölgesi bir hacmi ifade ediyorsa, küçük parçalar da hacimsel (üç boyutlu) olmalıdır. Üç boyutlu en basit şekil, dört noktanın sınırlarını oluşturduğu dörtyüzlüdür

(tetrahedral). Çözüm bölgesi dörtyüzlü küçük elemanlara bölünerek hesaplama yapılır. Bölgeyi beşyüzlü (piramit, üçgen prizma vb.), altıyüzlü (küp veya dikdörtgen prizma) elemanlara bölmek de mümkündür. Üç boyutlu eleman çeşitleri Şekil 2.2’de verilmiştir.

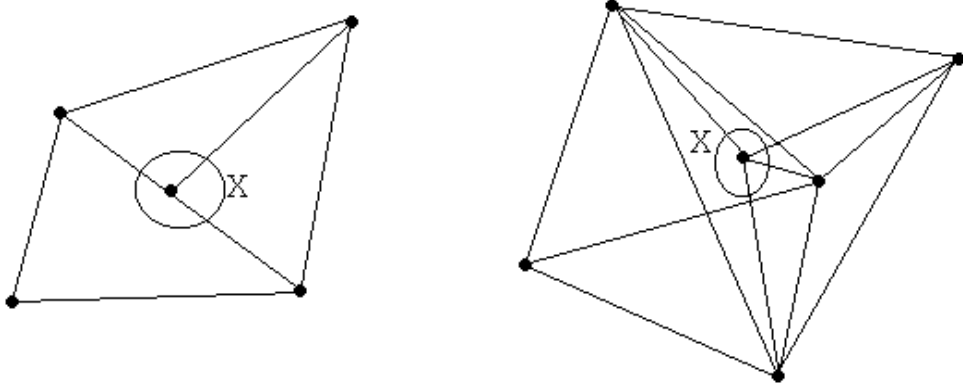


Şekil 2.1. İki boyutlu SEY’de kullanılan elemanlar.

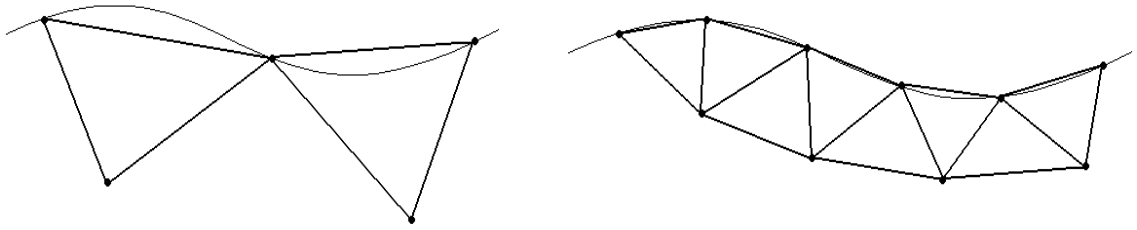


Şekil 2.2. Üç boyutlu SEY’de kullanılan elemanlar.

Bir üçgen elemanın sadece köşe noktalarında düğüm noktası oluşturulabilir. Kenar veya yüzey ortalarında düğüm noktası oluşturulması sonlu elemanlar yöntemine aykırı olup buna izin verilmez.

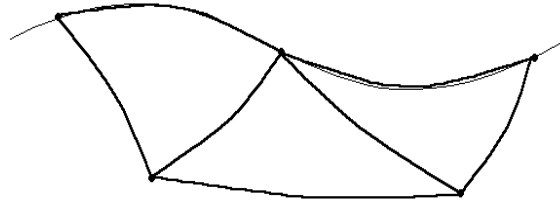


Şekil 2.3. SEY’de kullanılmayan eleman tipleri.



Seyrek Bölmeleme

Sık Bölmeleme



İzoparametrik elemanlarla
bölmeleme

Şekil 2.4. Eğri bölgelerin bölmelenmesi.

Bölmelendirme esnasında yuvarlak kenarlar, eğri yüzeyler olması durumunda bu bölgeler uygun sayıda eleman yardımıyla yaklaşık olarak ifade edilirler. Burada eğri bölgeyi çok daha iyi ifade edebilmek için izoparametrik elemanlar da kullanılabilir. (Şekil 2.4).

2.1.2. Bölmelendirme Yöntemleri:

Bölmelendirme yöntemlerini genel olarak şu şekilde sınıflandırabiliriz:

- 1- Elle bölmelendirme
- 2- Yarı otomatik bölmelendirme
- 3- Otomatik bölmelendirme

Elle bölmelendirmede, çözüm bölgesi insan tarafından elemanlara ayrılır. Kişi, kağıt kalemle, bilgisayarla veya değişik bir takım teçhizat yardımıyla elemanların yerlerini, şekillerini, özelliklerini belirler ve bir liste haline getirir.

Yarı otomatik bölmelendirmede ise, önce elle kabaca bir bölmeleme yapılır. Daha sonra programlar yardımıyla da daha sık bir bölmeleme ya da koordinat belirleme gibi işlemler yapılır. Bölmelendirme esnasında insan müdahalesi esastır.

Otomatik bölmelendirmede çözüm bölgesi ve fiziki model bir bilgisayara verilerek bölmelendirme özellikleri belirtilir. Bilgisayar programı, bölmelendirme işlemini gerçekleştirerek gerekli verileri uygun bir şekilde hazırlar. İşlemi tekrarlamak ve bazı parametreleri değiştirerek sonucu daha iyi hale getirmek de mümkündür.

Bir uzay bölgesini elemanlara bölmek, zihin olarak basit gözükse de, bilgisayarla ve hesaplanarak yapıldığında zannedilenden daha karmaşık olduğu görülecektir. Elle bölmelendirme yöntemleri prensipte basit olsalar da, elemanlara ayırma ve koordinat belirleme gibi işlemlerin karmaşık ve zor olmasının yanında çok zaman almaktadır. Ayrıca elle bölmelendirme sırasında hata yapma olasılığı da yüksektir. Bundan dolayı otomatik bölmelendirme tercih edilmektedir. İyi bir program, bir kontrol programı ve grafiklerle kontrol yardımıyla, otomatik bölmelendirme sayesinde çok daha hatasız bir bölmelendirme işlemi gerçekleştirilebilir [3].

Kullanıcı çözülecek olan probleme ve eldeki imkânlarla göre bu üç bölmelendirme yönteminden herhangi birini tercih edebilir. Genel geçer kaide olarak bir yöntem diğerinden daha üstündür gibi bir şey söylenemez.

Yöntem olarak otomatik bölmelendirmeyi ele alıp incelemek, diğer bölmelendirme yöntemlerini de büyük ölçüde anlamayı sağlayacaktır. Bu yüzden bazı otomatik bölmelendirme algoritmaları üzerinde durarak bölmelendirme yöntemlerini açıklamaya çalışacağız.

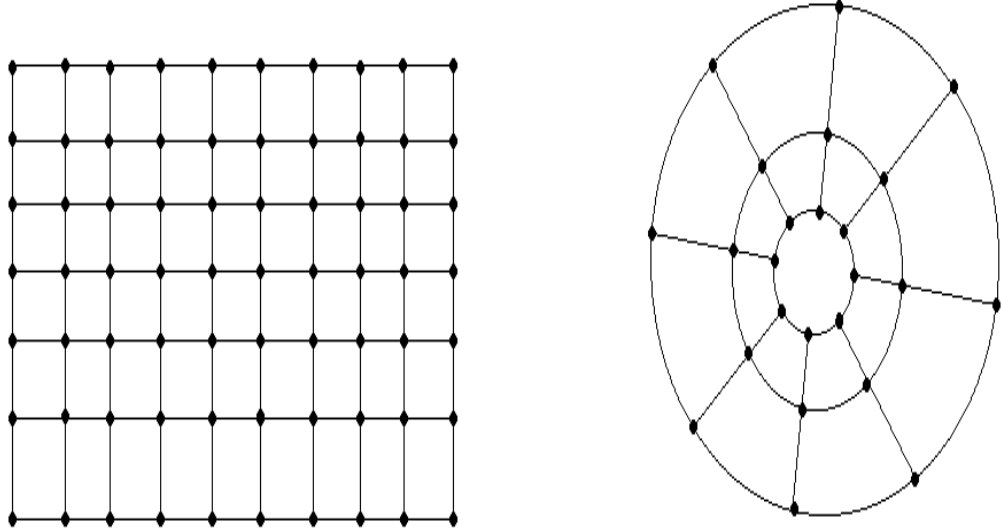
2.1.3. Çözüm Ağları:

Çözüm bölgesinin elemanlara ayrılmış, düğümleri belirlenmiş şekline çözüm ağı adı verilir. Düğüm noktalarının koordinatları, elemanlarla olan bağlantıları ve elemanlar belirlenmiştir. Çözüm ağı oluşturmakta kullanılan programlara çözüm ağı üretici denir.

Çözüm ağları bağlantı tarzına göre başlıca iki grupta toplanabilir:

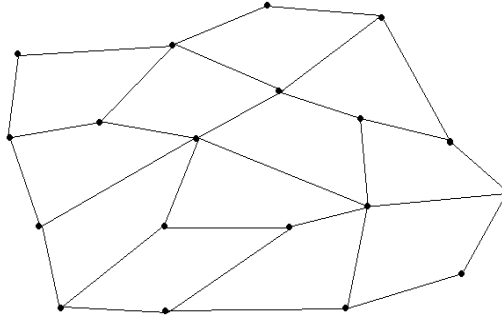
- 1-Düzenli ağlar
- 2-Düzensiz ağlar

Şekil 2.5’de görüldüğü gibi düğümler arası mesafeler ve bağlantılar sonlu farklar şeklinde ifade edilebiliyorsa, buna düzenli ağ denir.



Şekil 2.5. Düzenli ağlar.

Sonlu farklar veya benzeri bir kurala uyulmaksızın Şekil 3.6'daki gibi düğümler arası mesafeleri ve bağlantıları düzensiz olan bir topoloji belirlenmişse buna da düzensiz ağ denir.



Şekil 2.6. Düzensiz ağ.

2.2. İki Boyutlu Sonlu Elemanlar Yöntemi Teorisi

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (2.2)$$

Sonlu elemanlar yöntemi Laplace (denklem (2.1)) ve Poission (denklem (2.2)) tipi kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılan bir yöntemdir. Bölge içerisinde enerjiyi minimum yapan potansiyel çözüm aynı zamanda Laplace denklemini sağlayan potansiyel çözümdür. Bu yüzden sonlu elemanlar yönteminde Laplace denklemini doğrudan çözmek yerine, enerji fonksiyoneli minimum yapan potansiyel çözümü bulmak yoluna gidilir. Sonlu elemanlar yöntemini eğrisel sınırlara uydurmak kolaydır. Çözüm bölgesinde istediğimiz kısımda, eleman sayısını bazı gelişmiş algoritmalar kullanarak istediğimiz kadar arttırabiliriz.

Bu yöntemde, deneme fonksiyonu aramada temel olarak dört yöntem kullanılmaktadır. Bunlar;

1. Rayleigh – Ritz yöntemi
2. Galarkin yöntemi
3. En Küçük Kareler yöntemi
4. Ağırlık artıkları yöntemi

Laplace ve Poisson denklemlerinin çözümü için deneme fonksiyonunun oluşturulmasında kullanılan bu yöntemlerden en yaygın olarak kullanılanı, Reigleih – Ritz ve Galerkin yöntemidir.

Bu yöntemlerin anlatımına geçmeden önce, Varyasyon hesabından ve enerji fonksiyonelinin minimum olma koşullarından bahsedelim.

2.2.1. Varyasyon Hesabı

Varyasyonel yöntem, Laplace ve Poisson tipi kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü yerine, bu çözümü sağlayan potansiyel fonksiyonunun ele alınan sisteme ilişkin enerji fonksiyonelinin minimize edip etmediği ile ilgilenir. Laplace ve Poisson diferansiyel denkleminin çözümü aynı zamanda enerji fonksiyonelinin minimize eden potansiyel fonksiyonudur.

Diğer bir deyişle, verilen sınır koşulları altında diferansiyel denklemin varyasyonel ilkesine göre çözümü, varyasyonel bir bağıntının değişkenlere göre en küçük değere indirgenmesi ile elde edilir.

$$f(x, y(x), y'(x), \dots) \quad (2.3)$$

Denklem (2.3)'deki fonksiyonlar kümesindeki her bir fonksiyona karşılık gelerek belli bir sayısal değer alan fonksiyona, bu kümenin fonksiyoneli denir. Fonksiyonun x değerinde Δx kadar bir değişiklik olması durumunda, y deki değişiklik durumu

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) \quad (2.4)$$

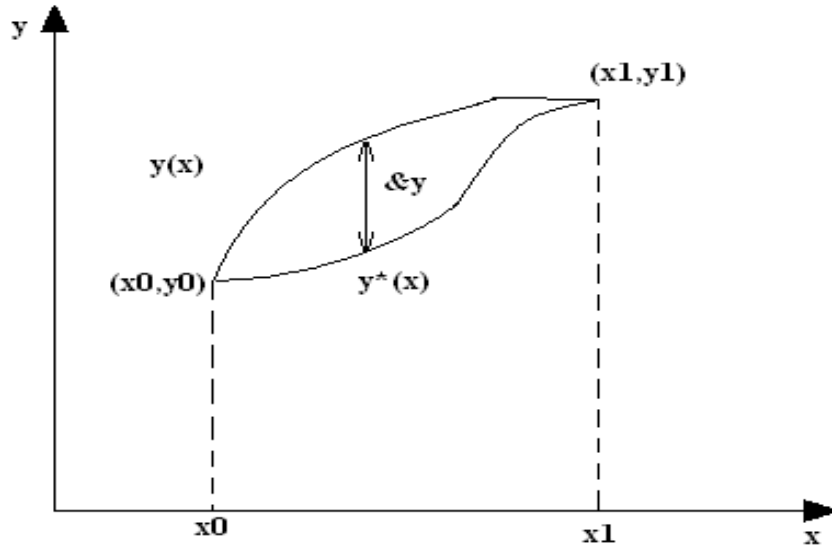
olur. Aynı şekilde $F(y(x))$ fonksiyonelinin

$$\delta y = y(x) - y_1(x) \quad (2.5)$$

farkına $y_1(x)$ 'in varyasyonu denir.

2.2.2. Fonksiyonelin Extremum Olma Koşulu

$y(x_0) = y_0$ ve $y(x_1) = y_1$ şartlarını sağlayan birinci ve ikinci dereceden türevlere sahip bir $y = y(x)$ fonksiyonu arayalım. Bu koşulları sağlayan $y(x)$ eğrisine komşu bir eğri $y^*(x)$ eğrisi olsun. Bu durumda $y(x)$ 'e ilişkin varyasyon,



Şekil 2.7. Bir fonksiyonun varyasyonu

$$\delta y = y(x) - y^*(x) \quad (2.6)$$

olacaktır. Bu varyasyon Şekil 2.7'de gösterilen uç noktalarında sıfır değerindedir. α herhangi bir sabiti göstermek üzere

$$y(x, \alpha) = y(x) - \alpha \Delta y \quad (2.7)$$

olsun. Bu ifade de $\alpha = 0$ alındığında fonksiyoneli, extremum yapan eğri

$$y(x) = y(x, \alpha = 0) \quad (2.8)$$

olarak elde edilir. $\alpha = 1$ alındığında komşu eğri

$$y^*(x) = y(x, \alpha = 1) = y(x) + \alpha y \quad (2.9)$$

olarak elde edilir. Yani $y(x, \alpha)$ fonksiyonu $y(x)$ ve buna komşu eğri ailesini vermektedir. Fonksiyonel ifadesinde $y(x)$ yerine $y(x, \alpha)$ ifadesi yazıldığında

$$f[y(x, \alpha)] = \varphi(\alpha) \quad (2.10)$$

olur. $A(\alpha)$, $\alpha = 0$ değeri için bir extremuma sahiptir. Yani

$$\varphi'(\alpha = 0) = 0 \quad (2.11)$$

dır. Gerekli matematiksel işlemden sonra

$$\frac{\delta f}{\delta y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta f}{\delta y'} \right) = 0 \quad (2.12)$$

denklemini elde edilir. Elde edilen bu diferansiyel denkleme verilen fonksiyonelin Euler Diferansiyel Denklemi denir. Bir fonksiyonelin extremum koşulu Euler Diferansiyel Denklemi sağlamasıdır.

Varyasyonel yöntemlerle herhangi bir problemi çözmek ve ek fonksiyonlar kullanmak için gerekli koşul, o diferansiyel denkleme özdeş Euler eşitliği veren bir fonksiyonel elde etmektir.

2.2.3. Sınır Koşulları

Sınır koşulları üç grupta toplanır:

a) Dirichlet Sınır Koşulu

Bu koşulda potansiyel fonksiyonu ϕ_s sınırın belirli bir kısmında veya bütün sınır boyunca belirli bir değerdedir. Eğer sınır koşulu sıfır ise homojen Dirichlet sınır koşulu olarak adlandırılır.

b) Neumann sınır koşulu

Bu koşul sınıra dik doğrultuda gelen akı yoğunluğu ile ilgilidir. Eğer ortam izotropik ise sınıra dik doğrultuda gelen akı genel olarak,

$$K(s) \frac{\partial \phi}{\partial n} = h(s) \quad (2.13)$$

bağıntısı ile ifade edilir. Burada n , sınırın dışına doğru birim vektörü göstermektedir. Bu ifade çözüm bölgesindeki alandan bağımsızdır. $h(s) = 0$ olması durumuna, homojen Neumann sınır koşulu adı verilir.

c) Karışık Sınır Koşulu

Sınırdaki bulunan iletken bir malzeme sınıra normal doğrultuda gelen akıyı etkiler. Sınırdaki bu değişimler, lineer değişimler ise bu sınır koşulu genel olarak şu şekilde ifade edilir.

$$K(s) * \frac{\partial \phi}{\partial n} = \sigma(s) (\phi_{0(s)} - \phi_{(s)}) \quad (2.14)$$

Burada $\sigma(s)$ sınırdaki elektriksel iletkenlik fonksiyonunu göstermektedir. Bu sınır koşulu yeniden düzenlenerek

$$\begin{aligned}
K(s) * \frac{\partial \phi}{\partial n} + \sigma(s) \phi_{(s)} &= \sigma(s) \phi_{0(s)} \\
K(s) * \frac{\partial \phi}{\partial n} + \sigma(s) \phi_{(s)} &= h(s)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

yazıldığında daha önceki sınır koşullarını da içeren yeni bir bağıntı elde edilir.

2.2.4. Rayleigh – Ritz Yöntemi

Verilen sınır koşulları altında temel diferansiyel denklemi minimum yapan, sınır değer problemlerinin işlevsel olarak adlandırılan varyasyonel bir yöntemdir.

$$-\nabla^2 \phi = f \tag{2.16}$$

$$L = -\nabla^2 \tag{2.17}$$

$$F = \langle L\phi, \phi \rangle - 2\langle \phi, f \rangle \tag{2.18}$$

$$F = \iint \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - 2\phi f \right] dx dy \tag{2.19}$$

Bu fonksiyonel $\phi(x, y)$ deneme fonksiyonu ile yaklaşık olarak ifade edilir.

$$\phi = \sum_{j=1}^n a_j \psi_j \tag{2.20}$$

Bu ifadelerde a_j bilinmeyen katsayıları öyle belirlenmeli ki fonksiyonel minimum olsun. Sonlu Elemanlar Yöntemine göre deneme fonksiyonu, koordinat fonksiyonları denilen fonksiyonların toplamı şeklinde ifade edilecek olursa ϕ , F de yerine konularak, fonksiyonel ψ_j ve a_j ler cinsinde yazılmış olur. Burada kullanılan a_j bilinmeyen katsayılarıdır. Bu katsayılar, F minimum olacak şekilde

$$\frac{\partial f}{\partial a_j} = 0 \quad (2.21)$$

ifadesinden belirlenir. Bu işlemle bir lineer cebirsel denklem takımı elde edilir. Bu denklemlerin çözümü ile a_j ler belirlenerek, ϕ deneme fonksiyonu bulunur. Böylece elde edilen ϕ , fonksiyoneli minimum yaparken ilgili poisson denklemini de gerçekleştirmiş olur.

$$F = \iint \left[\left(\sum a_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\sum a_j \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right)^2 - 2 \sum a_j \psi_j f \right] dx dy \quad (2.22)$$

Bu ifade a_i inci katsayıya göre yeniden düzenlenecek olursa

$$F = a_i^2 \iint \left[\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - 2 \sum_{j=1}^n a_i a_j \iint \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) dx dy - 2 \quad (2.23)$$

$a_i \iint \psi_i f dx dy + a_i$ 'yi içermeyen terimler bu ifadede kısaltılarak yazılırsa

$F = K_{ii} a_i^2 + 2K_{ij} a_i - 2a_i b_i + a_i$ 'yi içermeyen terimler F nin minimum olması için

$$\frac{\partial F}{\partial a_j} = 0 \quad (2.24)$$

olmalıdır. Buradan

$$\frac{\partial F}{\partial a_j} = 2A_{ii} \cdot a_i + 2A_{ij} - 2b_i = 0$$

$$A_{ii} \cdot a_i + A_{ij} = b_i \quad (2.25)$$

ve genel olarak ifade edilecek olursa

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} a_j = b_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.26)$$

elde edilir. Buradaki katsayılar açık olarak ifade edilirse

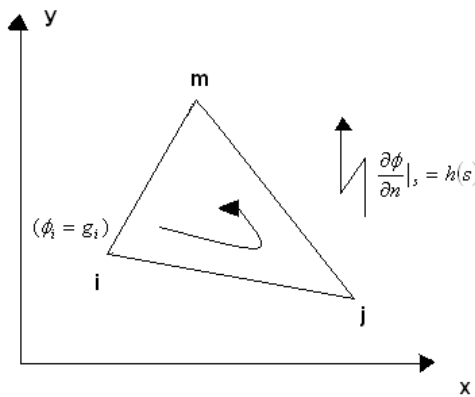
$$A_{ij} = \iint \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} - \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) dx dy$$

$$b_{ij} = \iint \psi_i f dx dy \quad (2.27)$$

şeklindedir.

2.2.5. Sonlu Elemanlar ve Rayleigh-Ritz Yöntemi

Sonlu elemanlar yönteminin esası, karmaşık sınır koşulları nedeniyle tüm çözüm bölgesi için bir potansiyel fonksiyonu bulmanın mümkün olmadığı durumlarda, çözümün sonlu küçük elemanlar içinde aranmasına dayanır. Çözüm için elemanların geometrik yapısı aynı kalmak koşulu ile tüm çözüm bölgesi aynı geometrik elemanlara bölünür. Bu geometrik elemanlar üçgen, dörtgen ve benzeri şekiller olabilir. Düzensiz şekillerle ve gelişigüzel bölmelendirmede üçgen elemanlar kolaylık sağlar. Böyle elemanlar sınır yüzeylere kolayca uyum sağlar. Bu sebeplerden dolayı bu çalışmamızda üçgen elemanlar kullandık.



Şekil 2.8 Bir üçgen elemanı

Bu yöntemle çözüm yaparken ilk olarak bir deneme fonksiyonu seçilir. Bu fonksiyon alan değişimini ifade eder.

$$\phi(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 x^3 + \alpha_7 x^2 y + \dots \quad (2.28)$$

Bu deneme fonksiyonunun birinci dereceden polinom kısmı (denklem(3.29)) çoğu problemde yeterli hassasiyeti sağlar:

$$\phi(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y \quad (2.29)$$

Bu deneme fonksiyonunda ϕ , x ve y ye göre doğrusal bir şekilde değişmektedir. Eğer üçgenin köşelerindeki potansiyeller ϕ_i, ϕ_j, ϕ_m ise, deneme fonksiyonu bu köşe noktalarında bu değerleri sağlamak zorundadır. Bu nedenle aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$\begin{aligned} \phi_i &= \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 y_i \\ \phi_j &= \alpha_0 + \alpha_1 x_j + \alpha_2 y_j \\ \phi_m &= \alpha_0 + \alpha_1 x_m + \alpha_2 y_m \end{aligned} \quad (2.30)$$

Ele alınan deneme fonksiyonunu üçgenlerin köşe (ϕ_i, ϕ_j, ϕ_m) değerleri ile denklem (2.31)'da verildiği şekilde ifade etmek için N_i, N_j, N_m şekil veya enterpolasyon fonksiyonları kullanılır.

$$\phi(x, y) = N_i(x, y) \cdot \phi_i + N_j(x, y) \cdot \phi_j + N_m(x, y) \cdot \phi_m \quad (2.31)$$

Denklem (2.31)'daki deneme fonksiyonunda N_i, N_j, N_m şekil fonksiyonları, i,j,m köşe koordinatlarının deneme fonksiyonunda yerine yazılması durumunda, ϕ_i, ϕ_j, ϕ_m değerlerini verecek şekilde fonksiyonlar olmalıdır. Yani üçgenin köşelerinde şekil fonksiyonlarının değerleri

i .köşede: $N_i = 1, N_j = 0, N_m = 0,$

j .köşede: $N_i = 0, N_j = 1, N_m = 0,$

m .köşede: $N_i = 0, N_j = 0, N_m = 1$

olmalıdır. Bu şarta göre üçgenin alan matrisinden enterpolasyon fonksiyonları bulunur.

Şekil 2.2'deki üçgenin alanı, köşe koordinatları cinsinden

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} \quad (2.32)$$

dir. Denklem (2.30)'daki ifadelerinden α_0, α_1 ve α_2 değerleri,

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= (a_i\phi_i + a_j\phi_j + a_m\phi_m)/2\Delta \\ \alpha_1 &= (b_i\phi_i + b_j\phi_j + b_m\phi_m)/2\Delta \\ \alpha_2 &= (c_i\phi_i + c_j\phi_j + c_m\phi_m)/2\Delta \end{aligned} \quad (2.33)$$

bulunarak deneme fonksiyonunda yerine yazmak üzere aşağıdaki kısaltmalar yapılırsa

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j & b_i &= y_j - y_m & c_i &= x_m - x_j \\ a_j &= x_m y_i - x_i y_m & b_j &= y_m - y_i & c_j &= x_i - x_m \\ a_m &= x_i y_j - x_j y_i & b_m &= y_i - y_j & c_m &= x_j - x_i \end{aligned} \quad (2.34)$$

Bu noktada, şekil fonksiyonları tanımlanır.

$$\begin{aligned} N_i &= (a_i + b_i x + c_i y)/2\Delta \\ N_j &= (a_j + b_j x + c_j y)/2\Delta \\ N_m &= (a_m + b_m x + c_m y)/2\Delta \end{aligned} \quad (2.35)$$

Potansiyel fonksiyonunu şekil fonksiyonları cinsinden yazarsak (2.36) denklemi elde edilir. Elde edilen potansiyel fonksiyonu ifadesi, üçgenin kenar ve köşeleri dahil her yerinde geçerlidir.

Her bir üçgen eleman içinde, potansiyel fonksiyonunun Laplace diferansiyel denklemini sağladığı varsayıldığından, homojen sınır koşullarında Laplace denkleminin karşılık gelen fonksiyonel

$$F = \iint \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (2.36)$$

dir. Potansiyel fonksiyonları yerine denklem (3.30)'da elde edilen deneme fonksiyonu kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial x} + \phi_j \frac{\partial N_j}{\partial x} + \phi_m \frac{\partial N_m}{\partial x} = (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_m \phi_m) / 2\Delta \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial y} + \phi_j \frac{\partial N_j}{\partial y} + \phi_m \frac{\partial N_m}{\partial y} = (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_m \phi_m) / 2\Delta \\ F &= \left[\frac{(b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_m \phi_m)}{2\Delta} \right]^2 \iint dx dy + \left[\frac{(c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_m \phi_m)}{2\Delta} \right]^2 \iint dx dy \end{aligned} \quad (2.37)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \Delta &= \iint dx dy \text{ olmak üzere} \\ F &= \frac{1}{4\Delta} \left[(b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_m \phi_m)^2 + (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_m \phi_m)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.38)$$

elde edilir.

$F = f(\phi_i, \phi_j, \phi_m)$ de F yi minimum yapan ϕ_i, ϕ_j, ϕ_m değerlerini bulmak için, değişkenlere göre kısmi türevler alınır,

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_i} = 2 \left[\frac{(b_i^2 + c_i^2)}{4\Delta} \phi_i + \frac{(b_i b_j + c_i c_j)}{4\Delta} \phi_j + \frac{(b_i b_m + c_i c_m)}{4\Delta} \phi_m \right] \quad (2.39)$$

olup, burada

$$S_{ii} = \frac{(b_i^2 + c_i^2)}{4\Delta}$$

$$S_{ij} = \frac{(b_i b_j + c_i c_j)}{4\Delta}$$

$$S_{im} = \frac{(b_i b_m + c_i c_m)}{4\Delta}$$

ve benzer şekilde

$$S_{jm} = \frac{(b_j b_m + c_j c_m)}{4\Delta}$$

$$S_{jj} = \frac{(b_j^2 + c_j^2)}{4\Delta}$$

$$S_{ji} = S_{ij}$$

$$S_{mi} = S_{im}$$

$$S_{jm} = S_{mj} \quad (2.40)$$

Kısaltmalarıyla

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_i} = 2(S_{ii}\phi_i + S_{ij}\phi_j + S_{im}\phi_m)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_j} = 2(S_{ji}\phi_i + S_{jj}\phi_j + S_{jm}\phi_m)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_m} = 2(S_{mi}\phi_i + S_{mj}\phi_j + S_{mm}\phi_m)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = \frac{\partial F}{\partial \phi_i} + \frac{\partial F}{\partial \phi_j} + \frac{\partial F}{\partial \phi_m} = 0$$

$$2 \begin{bmatrix} S_{ii} & S_{ij} & S_{im} \\ S_{ji} & S_{jj} & S_{jm} \\ S_{mi} & S_{mj} & S_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

elde edilir. Şekilde verildiği haliyle $\phi_i = g_i$ sınır koşulu matrisin ilk satırına yerleştirilirse

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ S_{ji} & S_{jj} & S_{jm} \\ S_{mi} & S_{mj} & S_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ve bu matrisi düzenlersek

$$\begin{bmatrix} S_{jj} & S_{jm} \\ S_{mj} & S_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_j \\ \phi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_i S_{ji} \\ -g_i S_{mi} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

elde edilir.

2.2.6. Elemanların Birleştirilmesi

Çözümü aranan potansiyel işlevinin tüm bölge içinde, elemanlar arasındaki sınırlarda sürekli olması gerekir. Bir üçgen elemanın içinde ve kenarlarında potansiyel doğrusal olarak değişir.

Elemanların birbirinden ayrı düşünülmesi durumunda potansiyel, üçgenler arasındaki sınırlarda süreksizlik gösterir. Elemanlar arasındaki süreksizlik komşu düğümlerin eşdeğer düşünülmesiyle giderilir.

Çözüm bölgesinin tamamı için enerji fonksiyoneli her bir üçgen eleman için elde edilen fonksiyonellerin toplamıdır.

$$F = \sum_{n=1}^n \dot{U}_s F$$

F'yi minimum yapan ϕ_i, ϕ_j, ϕ_m değerlerini bulmak için bu değişkenlere göre kısmi türevler alınıp sıfıra eşitlenir.

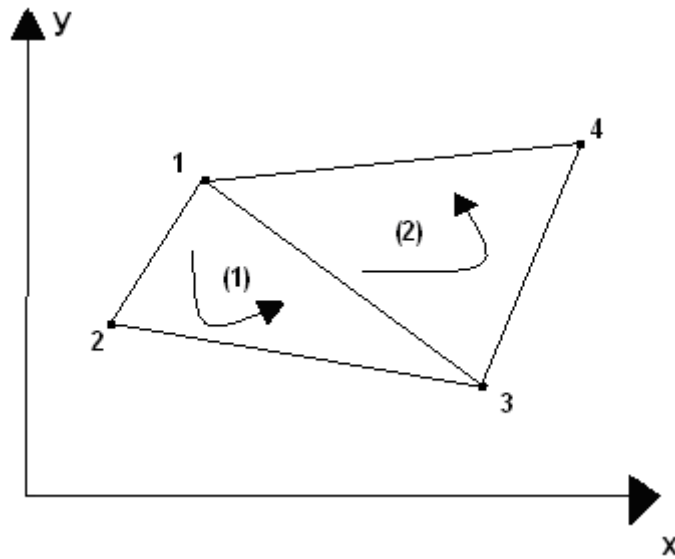
$$\frac{\partial F^{(n)}}{\partial \phi_i} = 2 \left(S_{ii}^{(n)} \cdot \phi_i + S_{ij}^{(n)} \cdot \phi_j + S_{im}^{(n)} \cdot \phi_m \right)$$

$$\frac{\partial F^{(n)}}{\partial \phi_j} = 2 \left(S_{jj}^{(n)} \cdot \phi_j + S_{ji}^{(n)} \cdot \phi_i + S_{jm}^{(n)} \cdot \phi_m \right)$$

$$\frac{\partial F^{(n)}}{\partial \phi_m} = 2 \left(S_{mm}^{(n)} \cdot \phi_m + S_{mi}^{(n)} \cdot \phi_i + S_{mj}^{(n)} \cdot \phi_j \right)$$

$$\begin{bmatrix} S_{ii}^{(n)} & S_{ij}^{(n)} & S_{im}^{(n)} \\ S_{ji}^{(n)} & S_{jj}^{(n)} & S_{jm}^{(n)} \\ S_{mi}^{(n)} & S_{mj}^{(n)} & S_{mm}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2.43)



Şekil 2.9. İki üçgen elemanın birleşimi

Şekil 2.9’da iki üçgenden oluşan bir çözüm bölgesinde 4 düğüm mevcut olup enerji fonksiyoneline her bir düğüm için kısmi türev alındığında denklem (2.43)’deki denklemler oluşur. Bu denklemlerde S’nin üzerindeki indis hangi üçgene ait olduğunu gösterir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \phi_1} &= \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \phi_1} + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial \phi_1} = S_{11}^{(1)} \cdot \phi_1 + S_{12}^{(1)} \cdot \phi_2 + 0 \cdot \phi_3 + S_{41}^{(1)} \cdot \phi_4 \\
\frac{\partial F}{\partial \phi_2} &= \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \phi_2} + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial \phi_2} = S_{12}^{(1)} \cdot \phi_1 + (S_{22}^{(1)} \cdot S_{22}^{(2)}) \phi_2 + S_{23}^{(2)} \cdot \phi_3 + (S_{24}^{(1)} \cdot S_{42}^{(2)}) \phi_4 \\
\frac{\partial F}{\partial \phi_3} &= \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \phi_3} + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial \phi_3} = 0 \cdot \phi_1 + S_{23}^{(2)} \cdot \phi_2 + S_{33}^{(2)} \cdot \phi_3 + S_{34}^{(2)} \cdot \phi_4 \\
\frac{\partial F}{\partial \phi_4} &= \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \phi_4} + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial \phi_4} = S_{41}^{(1)} \cdot \phi_1 + (S_{24}^{(1)} \cdot S_{42}^{(2)}) \phi_2 + S_{34}^{(2)} \cdot \phi_3 + (S_{44}^{(1)} \cdot S_{44}^{(2)}) \phi_4
\end{aligned} \tag{2.44}$$

1. eleman için:

2. eleman için:

$$\begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} & S_{12}^{(1)} & S_{13}^{(1)} \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} & S_{23}^{(1)} \\ S_{31}^{(1)} & S_{32}^{(1)} & S_{33}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} S_{11}^{(2)} & S_{13}^{(2)} & S_{14}^{(2)} \\ S_{31}^{(2)} & S_{33}^{(2)} & S_{34}^{(2)} \\ S_{41}^{(2)} & S_{43}^{(2)} & S_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Şekil 2.10’da 2 ve 4 nolu düğümler hem 1, hemde 2 numaralı üçgenin düğümleri olduğundan dolayı her iki üçgenin fonksiyoneline de yer alırlar. Bundan dolayı ikinci ve dördüncü denklemde hem bir hem de iki numaralı üçgenden gelen S’ler mevcuttur. Bunun dışında 1 ve 3 nolu düğümler sadece tek bir üçgenin köşe düğümleri olduklarından dolayı hangi üçgenin köşe düğümleri ise sadece o üçgenden gelen S’ler mevcuttur. Denklem

(2.44)'deki denklemler sıfıra eşitlenir. Bu denklemlerimiz matrisel formda aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} + S_{11}^{(2)} & S_{12}^{(2)} & S_{13}^{(1)} + S_{13}^{(2)} & S_{14}^{(2)} \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} & S_{23}^{(1)} & 0 \\ S_{31}^{(1)} + S_{31}^{(2)} & S_{32}^{(1)} & S_{33}^{(1)} + S_{33}^{(2)} & S_{34}^{(2)} \\ S_{41}^{(2)} & 0 & S_{43}^{(2)} & S_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Uygulamada çözüm bölgesinin fonksiyonelinin bir düğüme göre kısmi türevi alınırken, o düğümü çevreleyen üçgen elemanlar tespit edilip o düğümün üçgeninin i, j, m isimli düğüm olmasına göre S matrisi oluşturulur.

Bu işlem sonunda çözüm bölgesinde yer alan düğüm sayısı kadar denklem elde edilip, sınır düğümlerinin değerleri verilmek suretiyle çözüm yapılır. Örnek olarak üçüncü düğümün değeri g olarak verirse, S matrisi denklem (2.46) 'deki gibi değiştirilerek çözüm yapılır.

$$\begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} + S_{11}^{(2)} & S_{12}^{(2)} & S_{13}^{(1)} + S_{13}^{(2)} & S_{14}^{(2)} \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} & S_{23}^{(1)} & 0 \\ S_{31}^{(1)} + S_{31}^{(2)} & S_{32}^{(1)} & S_{33}^{(1)} + S_{33}^{(2)} & S_{34}^{(2)} \\ S_{41}^{(2)} & 0 & S_{43}^{(2)} & S_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Elde edilen $[S]$ matrisine, *katsayılar matrisi* adı verilir. Bu matris, bant yapıda ve simetriktir. Değeri belli olan düğümler yerlerine konulduktan sonra denklem sistemi çözülür.

Problemin tabiatı gereği, bazı düğümlerde akım olabilir. Bu durumda denklem sistemi şu şekilde düzenlenir [20].

$$\begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} + S_{11}^{(2)} & S_{12}^{(2)} & S_{13}^{(1)} + S_{13}^{(2)} & S_{14}^{(2)} \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} & S_{23}^{(1)} & 0 \\ S_{31}^{(1)} + S_{31}^{(2)} & S_{32}^{(1)} & S_{33}^{(1)} + S_{33}^{(2)} & S_{34}^{(2)} \\ S_{41}^{(2)} & 0 & S_{43}^{(2)} & S_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ J_2/3 \\ 0 \\ J_4/3 \end{bmatrix} \Delta \quad (2.47)$$

Düğümlerdeki akım yoğunlukları denklemin direk olarak sağ tarafına yazılır. Denklem sistemi çözüldüğünde, her düğüm için potansiyel değerleri belli olur.

3.POİSSON DENKLEMİ VE MANYETİK DEVRE BÜYÜKLÜKLERİNİN HESAPLAMALARI

3.1. Poisson Denklemlerinin Elde Edilmesi

Manyetik alan problemlerinde Maxwell denklemleri kullanılır.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (3.1)$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.3)$$

$$v = \frac{1}{\mu} \quad (3.4)$$

H:Manyetik alan şiddeti (At/m),

B:Manyetik indüksiyon (T),

μ =Manyetik permabilite,

v= Manyetik geçirgenlik

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (3.5)$$

Burada A Vektör potansiyel olup, birimi Wb/m'dir. Denklem (3.1)'de \vec{H} yerine denklem (3.2)'deki eşitlik konulduğunda denklem (3.3) elde edilir. Bu denklemde B yerine denklem (3.5)'deki eşitlik konulduğunda denk (3.7) elde edilir. Bu denklem, denklem (3.8)'de düzenlendiğinde denklem (3.2) Poisson denklemi elde edilir.

$$\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{J} \quad (3.6)$$

$$\nabla \times \frac{\nabla \times \vec{A}}{\mu} = \vec{J} \quad (3.7)$$

$$\nu \cdot \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) = \vec{J} \quad (3.8)$$

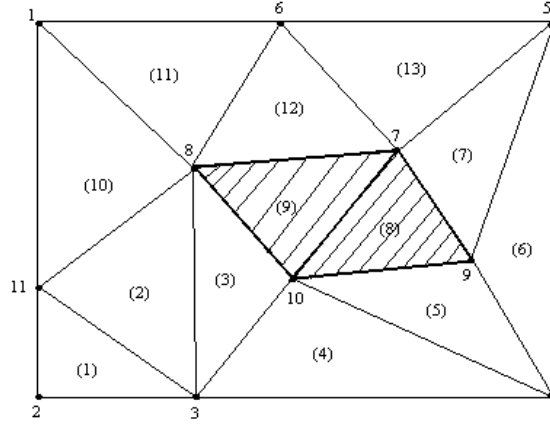
İki boyutlu sonlu elemanlar yöntemi analizi yapılırken denklem (3.8)'deki J akım yoğunluğu z ekseninde olduğu için, manyetik vektör potansiyel $A(x,y)=A_z(x,y)$ olur.

3.2. Kaynak Fonksiyonlarının Girilmesi

Manyetik alan problemlerinde sonlu elemanlar yöntemi ile analiz yapılırken dış etki olarak akım yoğunluğu alınır. Akım yoğunluğu bakır bölgede var olduğundan bölmelendirme sırasında bakır bölgede bulunan elemanlar belirlenir. Bakır bölgede bulunan üçgenlerin her biri için denklem (3.9) yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} S_{ii}^{(n)} & S_{ij}^{(n)} & S_{im}^{(n)} \\ S_{ji}^{(n)} & S_{jj}^{(n)} & S_{jm}^{(n)} \\ S_{mi}^{(n)} & S_{mj}^{(n)} & S_{mm}^{(n)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_i \\ A_j \\ A_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \Delta \cdot J \quad (3.9)$$

Demir bölgede de girdap akımları aynı şekilde ifade edilir. Bakır bölgeden geçen akım kompleks olduğunda çözüm karmaşık sayılı bir denklemin çözümü olacaktır. Hava bölgesinde, bakır bölgesinde bulunan üçgenler hariç diğer üçgenler için denklem (3.9)'un sağ tarafı sıfır alınır. Bu durumda Poisson denklemini denklem (3.1) Laplace denklemini haline gelecektir.



Şekil 3.1. Kaynak fonksiyonlarının tanımlanması

$$[\text{STE}][A] = [\text{RHS}] \quad (3.10)$$

Şekil 3.1’de taralı kısımda J akım yoğunluğuna sahip bir akım geçiyorsa, denklem (3.9)’daki denklem sisteminin sağ tarafı akım yoğunluğunun ve bakır bölgesinde bulunan 8 ve 9 üçgenlerinin alanlarına bağlı olarak değişecektir. Denklem (3.9)’da bir çözüm bölgesinde akım yoğunluğuna sahip bir üçgen için yazılan ifade S matrisinin oluşturulduğu şekilde ele alınır. Bu elemanlar denklem takımının sağ tarafında aynı şekilde akuple edilebilir. Bu işlem için bir başka yöntem ise düğümlere direk akımın üçte birinin ilave edilmesidir. Denklem (3.11)’de Şekil 3.1’in denklem takımı oluşturulmuştur.

$$\begin{bmatrix}
\binom{10+11}{S_{1-1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{1-6}^{11} & 0 & \binom{10+11}{S_{1-8}} & 0 & 0 & S_{1-11}^{10} \\
0 & S_{2-2}^1 & S_{2-3}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{2-11}^1 \\
0 & S_{3-2}^1 & \binom{1+2+3+4}{S_{3-3}} & S_{3-4}^4 & 0 & 0 & 0 & \binom{2+3}{S_{3-8}} & 0 & \binom{3+4}{S_{3-10}} & \binom{1+2}{S_{3-11}} \\
0 & 0 & S_{4-3}^4 & \binom{4+5+6}{S_{4-4}} & S_{4-5}^6 & 0 & 0 & 0 & \binom{5+6}{S_{4-9}} & \binom{4+5}{S_{4-10}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & S_{5-4}^6 & \binom{6+7+13}{S_{5-5}} & S_{5-6}^{13} & \binom{7+13}{S_{5-7}} & 0 & \binom{6+7}{S_{5-9}} & 0 & 0 \\
S_{6-1}^{11} & 0 & 0 & 0 & S_{6-5}^{13} & \binom{11+12+13}{S_{6-6}} & \binom{12+13}{S_{6-7}} & \binom{11+12}{S_{6-8}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \binom{7+13}{S_{7-5}} & \binom{12+13}{S_{7-6}} & \binom{7+8+9+12+13}{S_{7-7}} & \binom{9+12}{S_{7-8}} & \binom{7+8}{S_{7-9}} & \binom{8+9}{S_{7-10}} & 0 \\
\binom{10+11}{S_{8-1}} & 0 & \binom{2+3}{S_{8-3}} & 0 & 0 & \binom{11-12}{S_{8-6}} & \binom{9-12}{S_{8-7}} & \binom{2+3+9+10+11+12}{S_{8-8}} & 0 & \binom{3+9}{S_{8-10}} & \binom{2+10}{S_{8-11}} \\
0 & 0 & 0 & \binom{5+6}{S_{9-4}} & \binom{6+7}{S_{9-5}} & 0 & \binom{7+8}{S_{9-7}} & 0 & \binom{5+6+7+8}{S_{9-9}} & \binom{5+8}{S_{9-10}} & 0 \\
0 & 0 & \binom{3+4}{S_{10-3}} & \binom{4+5}{S_{10-4}} & 0 & 0 & \binom{8+9}{S_{10-7}} & \binom{3+9}{S_{10-8}} & \binom{5+8}{S_{10-9}} & \binom{3+4+5+8+9}{S_{10-10}} & 0 \\
S_{11-1}^{10} & S_{11-2}^1 & \binom{1+2}{S_{11-3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \binom{2+10}{S_{11-8}} & 0 & 0 & \binom{1+2+10}{S_{11-11}} 0
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
A_1 \\
A_2 \\
A_3 \\
A_4 \\
A_5 \\
A_6 \\
A_7 \\
A_8 \\
A_9 \\
A_{10} \\
A_{11}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
\frac{1}{3}(\Delta_8 + \Delta_9)J \\
\frac{1}{3}\Delta_9J \\
\frac{1}{3}\Delta_8J \\
\frac{1}{3}(\Delta_8 + \Delta_9)J \\
0
\end{bmatrix}
\quad (3.11)$$

3.3. Manyetik İndüksiyonun Hesabı

Doymadan dolayı elde edilen Poisson denklemindeki manyetik permabilite, A vektör potansiyelin bir fonksiyonudur. Bu durum Poisson denkleminin nonlineer olmasına yol açar. Çözüm yapılırken A vektör potansiyel değerleri bulunduğundan sonra B_x ve B_y değerleri denklem (3.12)'de verilen denklemlerle hesaplanır.

$$B(x, y) = \text{rot } A(x, y)$$

eşitliğini açtığımız zaman,

$$B(x, y) = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A(x, y) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z(x, y)}{\partial y} & B_x &= \frac{1}{2\Delta} \cdot (c_i \cdot A_i + c_j \cdot A_j + c_m \cdot A_m) \\ B_y &= \frac{\partial A_z(x, y)}{\partial x} & B_y &= \frac{1}{2\Delta} \cdot (b_i \cdot A_i + b_j \cdot A_j + b_m \cdot A_m) \end{aligned} \quad (3.12)$$

olur. Toplam akı yoğunluğu ise denklem (3.13)'deki gibi bulunur [1].

$$B(x, y) = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \quad (3.13)$$

Tasarımda kullanılan ferromanyetik malzemenin B-H eğrisinin matematiksel modelinden, denklem (4.13)'de bulunan B manyetik akı değerlerine göre manyetik permabilite değeri bulunur. Daha sonra hesaplanmış olduğumuz manyetik permabiliteye göre yeniden çözüm yapılır. Çözüm sonucunda elde edilen B değerleri veya A değerleri bir önceki hesaplanan değerlerle karşılaştırılır. Aralarında kabul edilebilir bir fark oluncaya kadar bu işleme devam edilir.

3.4. Manyetik Akı Yolu Çizimi

Manyetik yapının akı yolu şeması, manyetik bölgenin sonlu elemanlar yöntemiyle yapılan çözümlerin sonucunda elde edilen düğümlerin vektör potansiyel değerlerine göre çizilebilmektedir. Çizilen akı yolu, manyetik yapıımız hakkında birçok önemli bilgiler içermektedir. Ayrıca vektör potansiyel değerlerin bölgelere göre değişimini bu şema üzerinde daha kolay gözlemleyebiliriz. Bu değişim miktarı, çözüm bölgesini üçgen elemanlara bölerken hangi bölgenin daha çok üçgen elemanlara bölünmesi gerektiği bilgisini verir. Daha doğru sonuçlara ulaşmak için vektör potansiyel değişiminin fazla olduğu bölgeler daha küçük üçgen elemanlara bölünür. Çözüm bölgesindeki eş vektör potansiyel noktaları elde edilip bunlar birbirine çizgilere bağlanması durumunda oluşan şekil akı yolunun şeklidir [18].

Bir üçgenin köşe düğümlerinin vektör potansiyel değerleri bulunduğunda, istenilen koordinattaki vektör potansiyel değerini üçgen içindeki veya üçgen kenarlarındaki tüm noktalarda geçerli olan deneme fonksiyonunu kullanarak denklem (3.14)'den hesaplanabilir.

$$A(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot y \quad (3.14)$$

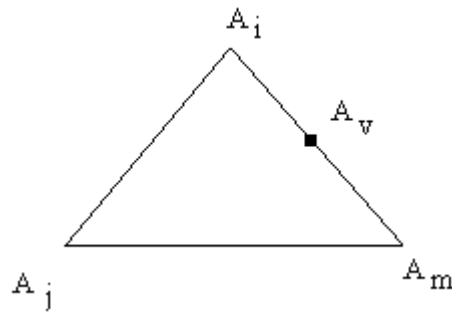
Eş vektör potansiyel eğrileri çizilirken, üçgen üzerindeki bir noktanın vektör potansiyel değerini hesaplamak yerine, üçgen eleman üzerinde, haritası çizilecek olan ve önceden belirlenen bir vektör potansiyel değerine eşit noktalar aranır. Bunun için eğrisi çizilecek vektör potansiyel değeri önceden belirlenir. Eğrisi çizilecek vektör potansiyel değerler iki şekilde belirlenir:

1. En küçük vektör potansiyel değerinden başlayıp, belirli bir artış miktarı kadar sonraki eş vektör potansiyel değerli eğrileri çizmek. Bu durumda toplam harita çizgi sayısı, en büyük vektör potansiyel değeri ile en küçük vektör potansiyel değeri arasındaki farkın, artım miktarına oranı kadar olur.

2. Toplam harita çizgi sayısını belirledikten sonra, en büyük vektör potansiyel değeri ile en küçük vektör potansiyel değeri arasındaki farkın çizilmesi istenen çizgi sayısına bölerek artım miktarı belirlenir. En küçük vektör potansiyel değerinden başlanarak, her seferinde artım miktarı kadar artırılarak eş vektör potansiyel eğrileri çizilir.

Bu çalışmada ikinci yöntem kullanıldı. Programda çizime en küçük vektör potansiyel değerinden başlandı. Her bir üçgen elemanı oluşturan üç kenar düğümlerinin vektör potansiyel değeri çizimi yapılmak istenen vektör potansiyel değerle karşılaştırıldı. Bu değer,

bir kenarı oluşturan iki düğümün birisinin değerine eşit veya bu iki düğümün vektör potansiyelleri arasında bir değer olup olmadığına bakıldı. Eğer çizimi yapılan vektör potansiyel değeri bir üçgen kenarının iki düğümü arasında bir değer ise, bu kenar üzerinde haritası çizilen vektör potansiyel değerine eşit bir değer mutlaka vardır. Kenar düğümlerin koordinatları ve vektör potansiyel değerlerinden bulunan noktanın koordinatları hesaplanır. Vektör potansiyel değişiminin Lineer olduğu hesaba katılır. Eğer bir üçgeni oluşturan kenarlardan birinde aranan vektör potansiyel değeri bulunmuş ise, o zaman mutlaka diğer iki kenarından birinde de bu değer mevcuttur.



Şekil 3.2. A_v noktasının vektör potansiyelinin bulunması

Şekil 3.2.'de çizilecek vektör potansiyel değerinin A_i ve A_m değerleri arasında olduğunu kabul edersek A_v vektör potansiyel değerinin yerini Denklem (3.15)'den bulabiliriz.

$$\frac{x_i - x_v}{x_i - x_m} = \frac{A_i - A_v}{A_i - A_m} \quad (3.15)$$

Bu eşitlikte, x_v dışında bütün değerler bilindiğine göre, x_v 'yi çekersek denklem (3.16)'yı elde etmiş oluruz.

$$x_v = x_i - \frac{(x_i - x_m)(A_i - A_v)}{A_i - A_m} \quad (3.16)$$

Denklem (3.16)'daki bu eşitlik aynı zamanda y_v içinde geçerlidir.

$$y_v = y_i - \frac{(y_i - y_m)(A_i - A_v)}{A_i - A_m} \quad (3.17)$$

(x_v, y_v) koordinatının vektör potansiyel değeri, çizimi yapılan vektör potansiyel değerine eşittir. Eğer bir üçgenin bir kenarında haritası çizilen vektör potansiyel değerine eşit bir nokta var ise, mutlaka bu üçgenin diğer iki kenarından birinde de haritası çizilen vektör potansiyeline eşit bir nokta bulunmaktadır. Bulunan ikinci nokta ile birinci noktayı birleştirdiğimiz zaman ortaya çıkan doğru, eş vektör potansiyel doğrusudur.

Her bir artım değeri için, her seferinde bütün üçgenlerin vektör potansiyel değerleri kontrol edilir ve çizilen eş potansiyel doğrularıyla tüm çözüm bölgesinin eş vektör potansiyel eğrileri elde edilir.

3.5. Magnetik Enerji ve İndüktansın Hesabı

Magnetik enerjinin hesaplanabilmesi için önce her bir üçgen elemanın, manyetik indüksiyon değeri, alanı ve manyetik permabilitesi hesaplanmalıdır. İlaveten motorumuzun yüksekliği de gerekir. Programımızda enerjinin başlangıç değeri sıfır alınmıştır. Her bir üçgen elemanın enerjisi denklem (3.18)'den teker teker hesaplanarak birbirleri ile toplanmış ve toplam enerji bulunmuştur.

$$Enerji = \frac{(B^2 * Alan * Yükseklik)}{2 * \mu} \quad (3.18)$$

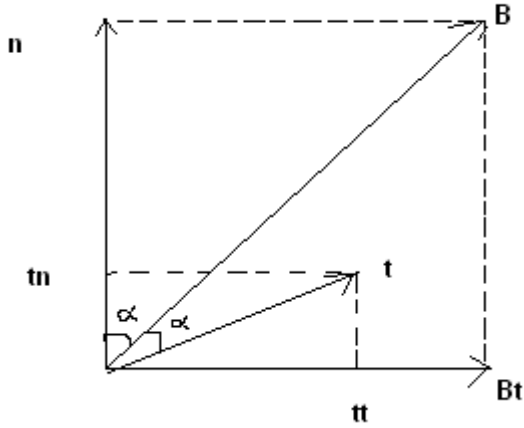
Denklem (3.18)'deki eşitlikten faydalanarak yapılan hesaplamalara göre toplam magnetik enerji belli olduktan sonra motordan geçen akım değerine göre indüktans değeri Denklem (3.19)'den kolayca hesaplanabilir.

$$L = \frac{2 * Enerji}{I^2} \quad (3.19)$$

3.6. Moment Hesabı:

Asenkron motorlarda moment biri stator üzerinde, diğeri de rotor üzerinde oluşan iki elektrik alanının etkileşimi sonucu ortaya çıkar. Sabit bir momentin üretilebilmesi için, bu iki alanın, motorun hava aralığında eş zamanlı bir durumda olması gerekir. Bu çalışmada Maxwell stress metodu kullanılarak moment hesaplandı.

Maxwell stress metodunda; yerel stress (şiddet), yüzeyde tüm sınır noktalarda hesaplanır, toplam normal ve teğet kuvvet bileşenlerini bulmak için yüzey integrali (veya iki boyutlu çizgisel integral) alınır. İki boyutlu problemlerde Maxwell stress metodu, çevre çizgisi boyunca tüm noktalarda akı yoğunluğu değerlerinin normal ve teğet değerlerinin bilinmesine ihtiyaç duyar [23]. magnetik alan B, yerel stress (şiddet) t ve diğeri bileşenler Şekil 3.4' de görülmektedir. Stress bileşenleri alan bileşenlerine bağlıdır.



Şekil 3.3. Magnetik alan diyagramı, yerel stress ve diğeri bileşenler

Teğet kuvvet değeri, tanımlanan çevre çizgisi boyunca teğet kuvvet değeri denklem (3.20) elde edildi.

$$F_t = \frac{1}{\mu_0} \int B_n B_t ds \quad (3.20)$$

Asenkron motorun oluşturduğu moment kuvvet ile kuvvet kolunun çarpımına eşit olacaktır. Momenti üreten kuvvet, teğet kuvvet olduğu için moment $T = rF_t$ şeklinde hesaplanır.

Asenkron motorun ürettiği momenti hesaplayan bazı çalışmalar;

$$T = \frac{1}{\mu_0(rs - rr)} \int_{S_{ag}} r B_r B_\varphi ds \quad (3.21)$$

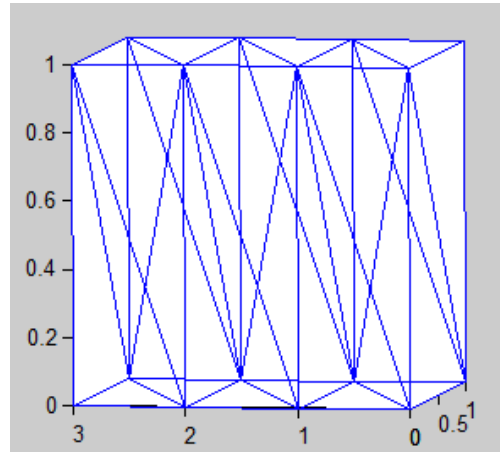
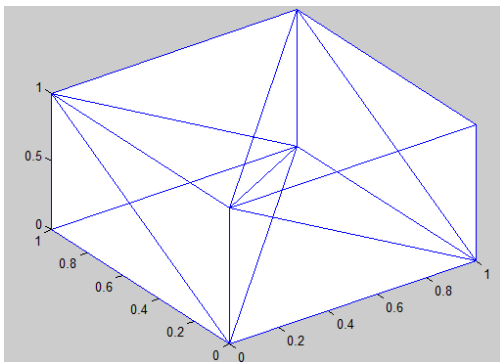
l makinenin uzunluğu, μ_0 boşluğun permeabilitesi, rs ve rr hava aralığının dış ve iç yarıçapı, r yarıçap, B_r ve B_φ r ve φ bileşenlerin akı yoğunluğu, S_{ag} hava aralığının kesit alanıdır. [24]

$$T = rdl \left(\sum \frac{B_n B_t}{\mu_0} \right) \quad (3.22)$$

r dairesel yolun yarıçapı, d yolun uzunluğu, l makinenin uzunluğu, B_n akı yoğunluğunun normal bileşeni, B_t akı yoğunluğunun teğet bileşenidir. [25]

Bu çalışmada moment hesaplanırken Maxwell stress metodu kullanıldı. Denklem (3.22) formülü kullanılarak moment hesaplandı.

3.7. Üç Boyutlu Sonlu Elemanlar Yöntemi



Şekil 3.4. Dörtüzlü elemanlara bölünmüş 3 boyutlu hacim elemanları

Şekil 3.4 deki gibi birinci dereceden bir dörtüzlü elamanın içerisinde ve köşelerinde geçerli olan deneme fonksiyonu:

$$\phi(x, y, z) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \quad (3.23)$$

Olarak birinci dereceden bir polinomla ifade edilir. (Demerdash ve Fouad, 1981).

Buradan görüldüğü gibi ϕ değeri x, y ve z 'ye göre lineer bir şekilde değişmektedir.

Dört yüzlü elemanın köşelerinde potansiyeller ϕ_i, ϕ_j, ϕ_m ve ϕ_p ise ϕ köşelerde de geçerli olduğundan;

$$\phi_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 y_i + \alpha_3 z_i \quad (3.24)$$

$$\phi_j = \alpha_0 + \alpha_1 x_j + \alpha_2 y_j + \alpha_3 z_j \quad (3.25)$$

$$\phi_m = \alpha_0 + \alpha_1 x_m + \alpha_2 y_m + \alpha_3 z_m \quad (3.26)$$

$$\phi_p = \alpha_0 + \alpha_1 x_p + \alpha_2 y_p + \alpha_3 z_p \quad (3.27)$$

olarak yazılabilir. Bu denklemler matris formda yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

elde edilir. Buradan;

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{bmatrix}^{(-1)} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Bu denklem sistemi $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ ve α_3 'e göre çözüldüğünde:

$$\alpha_0 = (a_i \phi_i + a_j \phi_j + a_m \phi_m + a_p \phi_p) / 6V \quad (3.30)$$

$$\alpha_1 = (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_m \phi_m + b_p \phi_p) / 6V \quad (3.31)$$

$$\alpha_2 = (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_m \phi_m + c_p \phi_p) / 6V \quad (3.32)$$

$$\alpha_3 = (d_i \phi_i + d_j \phi_j + d_m \phi_m + d_p \phi_p) / 6V \quad (3.33)$$

elde edilir. Burada V dörtyüzlü elemanın hacmini göstermekte ve

$$6V = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad (3.34)$$

$$a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad (3.35)$$

$$b_i = - \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad (3.36)$$

$$c_i = \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_m & 1 & z_m \\ x_p & 1 & z_p \end{vmatrix} \quad (3.37)$$

$$d_i = - \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix} \quad (3.38)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} N_i &= (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) / 6V \\ N_j &= (a_j + b_j x + c_j y + d_j z) / 6V \\ N_m &= (a_m + b_m x + c_m y + d_m z) / 6V \\ N_p &= (a_p + b_p x + c_p y + d_p z) / 6V \end{aligned} \quad (3.39)$$

Tanımlamaları kullanılarak dörtyüzlü eleman içinde ve köşelerinde geçerli olan potansiyel fonksiyonu:

$$\phi(x, y, z) = N_i(x, y, z)\phi_i + N_j(x, y, z)\phi_j + N_m(x, y, z)\phi_m + N_p(x, y, z)\phi_p \quad (3.40)$$

Olarak elde edilir. Burada kullanılan N fonksiyonlarına şekil yada enterpolasyon fonksiyonları denir. Her köşede o köşeye ait şekil fonksiyonunun değeri 1, diğer köşelere ait şekil fonksiyonunun değeri ise sıfırdır.

Dörtyüzlü elemanın içinde potansiyel fonksiyonun Laplace difaransiyel denklemini sağladığını varsayalım. Homojen sınır koşullarında Laplace difarensiyel denklemine karşı düşen enerji fonksiyoneli:

$$F = \iiint \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\phi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 \right] dx dy dz \quad (3.41)$$

Olduğundan burada potansiyel fonksiyonu yerine yukarıda elde edilen deneme fonksiyonu kullanılırsa:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\phi_i b_i + \phi_j b_j + \phi_m b_m + \phi_p b_p}{6V} \quad (3.42)$$

$$\frac{d\phi}{dy} = \frac{\phi_i c_i + \phi_j c_j + \phi_m c_m + \phi_p c_p}{6V} \quad (3.43)$$

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{\phi_i d_i + \phi_j d_j + \phi_m d_m + \phi_p d_p}{6V} \quad (3.44)$$

olarak elde edilir.

$$\iiint dx dy dz = V \quad (3.45)$$

dörtyüzlü elemanın hacmi olarak alındığında

$$F = ((b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_m \phi_m + b_p \phi_p)^2 + (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_m \phi_m + c_p \phi_p)^2 + (d_i \phi_i + d_j \phi_j + d_m \phi_m + d_p \phi_p)^2) / 36V \quad (3.46)$$

olacaktır.

F'i minimum yapacak ϕ_i, ϕ_j, ϕ_m ve ϕ_p değerlerini bulmak için değişkenlere göre kısmi türev alınır:

$$\frac{dF}{d\phi_i} = 2(S_{ii}\phi_i + S_{ij}\phi_j + S_{im}\phi_m + S_{ip}\phi_p) \quad (3.47)$$

$$\frac{dF}{d\phi_j} = 2(S_{ji}\phi_i + S_{jj}\phi_j + S_{jm}\phi_m + S_{jp}\phi_p) \quad (3.48)$$

$$\frac{dF}{d\phi_m} = 2(S_{mi}\phi_i + S_{mj}\phi_j + S_{mm}\phi_m + S_{mp}\phi_p) \quad (3.49)$$

$$\frac{dF}{d\phi_p} = 2(S_{pi}\phi_i + S_{pj}\phi_j + S_{pm}\phi_m + S_{pp}\phi_p) \quad (3.50)$$

Burada:

$$S_{ii} = \frac{b_i^2 + c_i^2 + d_i^2}{36V} \quad (3.51)$$

$$S_{jj} = \frac{b_j^2 + c_j^2 + d_j^2}{36V} \quad (3.52)$$

$$S_{mm} = \frac{b_m^2 + c_m^2 + d_m^2}{36V} \quad (3.53)$$

$$S_{pp} = \frac{b_p^2 + c_p^2 + d_p^2}{36V} \quad (3.54)$$

$$S_{ij} = S_{ji} = \frac{b_i b_j + c_i c_j + d_i d_j}{36V} \quad (3.55)$$

$$S_{im} = S_{mi} = \frac{b_i b_m + c_i c_m + d_i d_m}{36V} \quad (3.56)$$

$$S_{ip} = S_{pi} = \frac{b_i b_p + c_i c_p + d_i d_p}{36V} \quad (3.57)$$

$$S_{jp} = S_{pj} = \frac{b_j b_p + c_j c_p + d_j d_p}{36V} \quad (3.58)$$

$$S_{jm} = S_{mj} = \frac{b_j b_m + c_j c_m + d_j d_m}{36V} \quad (3.59)$$

$$F = f(\phi_i, \phi_j, \phi_m, \phi_p) \quad \text{olduğundan;} \quad (3.60)$$

$$\frac{dF}{d\phi} = \frac{dF}{d\phi_i} + \frac{dF}{d\phi_j} + \frac{dF}{d\phi_m} + \frac{dF}{d\phi_p} = 0 \quad (3.61)$$

$$2 \begin{bmatrix} S_{ii} & S_{ij} & S_{im} & S_{ip} \\ S_{ji} & S_{jj} & S_{jm} & S_{jp} \\ S_{mi} & S_{mj} & S_{mm} & S_{mp} \\ S_{pi} & S_{pj} & S_{pm} & S_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_m \\ \phi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Bu matris eşitliği çözüldüğünde dörtyüzlü elemanın her köşesindeki ve deneme fonksiyonu ile içindeki her noktada değerleri bulunur.

Çözüm bölgesi birden fazla dörtyüzlü elemana bölünerek çözümün doğruluğu artırıldığında, bu durumda bütün bu işlemler her bir dörtyüzlü eleman için tekrarlanacaktır. Her elemanın ayrı ayrı minimizasyonu ile elde edilen denklem takımı uygun biçimde birleştirilerek doğrudan yada iteratif yöntemlerle çözümlenerek, çözüm bölgesi içindeki bütün noktalardaki potansiyel değerleri elde edilir.[21]

4. ASENKRON MOTORUN MAXWELL 3D PAKET PROGRAMI VE MATLAB PROGRAMI KULLANILARAK SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ANALİZİ

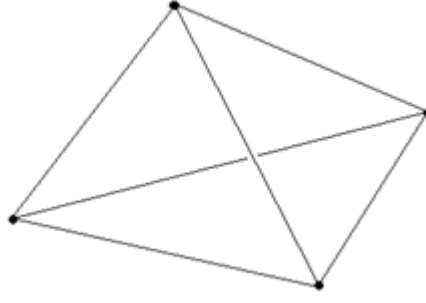
4.1.Maxwell 3D Paket Programı

Bu çalışmada Ansoft firmasının “Maxwell 3D” isimli statik manyetik çözücüsü incelenmiştir. Statik manyetik alan çözücü Sonlu Elemanlar Yöntemiyle 3 boyutlu analiz yapmaktadır. Öncelikle modellenecek sistem dörtyüzlü elemanlara bölünür ve sonlu elemanlar ağı oluşturulur. Çözüm sürecinde iterasyonlarla ağlar iyileştirilerek hata azaltılır. Alan çözümüne başlamadan önce iletkenlerdeki iletim akımının simülasyonu yapılır. ve alan çözümü başlar. Sonlu eleman ağındaki her dörtyüzlü elemanın kenarlarının orta noktalarındaki H manyetik alan şiddeti akım yoğunluğu kullanılarak hesaplanmaktadır. Manyetik nüve malzemesinin doğrusal olmaması halinde Newton-Raphson yöntemi manyetik alan şiddeti, H hesaplaması için kullanılmaktadır. Ayrıca doğrusal olmayan bir problemin çözümünün doğrusal bir yaklaşımla yapılması için, malzemenin B-H eğrisi kullanılır. Bu yaklaşım ile H'nin doğrusal olmayan çözümü için yakın sonuçlar elde edilir. Çözücü tamamladığı çözümü bir dosyaya yazar ve hata analizini icra eder. Çözücü adaptif analiz ile en hatalı dörtyüzlü elemanları küçülterek, belirlenen kriter yerine gelene kadar çözüme devam eder. Sonuç olarak endüktans değerleri hesaplanır, akım yoğunluğu, manyetik alan şiddeti, manyetik akı yoğunluğu, kuvvetler ve torklar genlik ve vektörel olarak elde edilir. Ayrıca 6/4 kutuplu bir ARM'nin ve 6 kutuplu bir alternatörün statik manyetik çözümü ile elde edilen parametrik ve görsel sonuçları örneklendirilmiştir. Bilgisayar destekli tasarım manyetik aygıt endüstrisinde rüştünü ispatlamıştır. 1960'lı yılların başlangıcında deneysel fizik topluluğunun bilgisayar destekli mıknatıs tasarımından sonra CAD (Computer Aided Design : Bilgisayar Destekli Tasarım) yazılımı endüstriyel tasarımcı için vazgeçilmez olmuştur. Manyetik analiz ve tasarım çalışmalarında bazı ticari CAD sistemleri halen mevcuttur ve çok daha fazla yazılım paketleri büyük endüstriyel firmalar tarafından ilgili amaçlar doğrultusunda kullanılmaktadır. Çeşitli CAD yazılım sistemlerinin kapasiteleri değişmekle birlikte, bu yazılım sistemlerinin tamamının yöntemibilim ve amaçları ortak bir paydayı paylaşmaktadır. Buna göre çözüm yöntemlerindeki yaklaşımlar, hesaplanabilecek büyüklükler ve hesaplama sonuçlarının tasarımcının ihtiyaçlarını karşılamadaki başarısı önemli bir yer tutar. Elektrik makinalarının tasarımında CAD yazılımlarının sağladığı yeni ve güçlü analiz teknikleri, mevcut analitik hesap teknikleri yanında oldukça hızlı ve net sonuçlar alınmasına yardım etmektedir. CAD'in bu güçlü etkisi endüstride de hissedilmeye başlandıktan, manyetik

analiz yapma durumundaki araştırmacıların ve endüstrideki uzmanların becerilerini güçlendirmiştir. Manyetik aygıtlar, geleneksel olarak basitleştirilmiş devre modelleri ile deneysel kanıta dayanan kuralların birleştirilmesi ile tasarlanmaktadır.[26,27]. Bu alışmada Ansoft firmasının Maxwell 3D alan simülatörü ile manyetik bir sistemin tasarımı, elektriksel ve manyetik parametrelerinin tahminindeki çözüm aşamaları ele alınmıştır. Maxwell 3D alan simülatörü programı etkileşimli bir yazılım paketidir. 3 boyutlu elektrostatik, statik manyetik ve eddy akımları problemlerini, sonlu elemanlar yöntemini (FEM) kullanarak çözmektedir [26,27,28]. Bu program statik elektrik alanları, kuvvet, tork ve gerilim dağılımları ile yüklerin sebep olduğu kapasitelerin; statik manyetik alanların, statik harici manyetik alanların ve sabit mıknatısların oluşturduğu kuvvet, tork ve endüktansların hesaplanmasında; doğrusal ve doğrusal olmayan malzemelerin kullanıldığı yapılardaki alanların simüstasyonlarının yapılmasında ve ayrıca sıcaklık ile ısı akışı gibi termal büyüklüklerin hesaplanmasında kullanılmaktadır.

4.1.1. Materyal ve Yöntemler

Maxwell 3D, düzgün olmayan geometrik bölgelerde elektrik veya manyetik alanları belirlemek için, bölgeyi piramide benzeyen çok sayıda dörtyüzlü eleman (tetrahedra) olarak adlandırılan alt bölgelere ayırır. Her dörtyüzlü elemandaki alan ayrı bir polinomla belirlenir. Bu elemanların toplamı sonlu eleman ağ veya basitçe ağ (mesh) olarak ifade edilir. Bir ağ otomatik olarak üretilir ve her model için bir alan çözümü hesaplanır [26,27,28,29]. Bu çözümde stator, rotor ve sargılardaki dörtyüzlü elemanlar kolaylıkla görülebilir. özümdeki en temel yapı olan bir dörtyüzlü eleman (tetrahedral) Şekil 5.1'de verilmiştir. Bir manyetik alanın tam bir çözümünü elde etmek için, manyetik analizi yapılacak olan sistem, yeterli sayıda ve küçük olarak boyutlandırılmış dörtyüzlü elemanlardan oluşturulur. Elektrostatik alan çözücüsü, her dörtyüzlü eleman düğümünde ve tüm kenarların orta noktalarındaki elektrik potansiyel değerini sakladığından, dörtyüzlü elemandaki potansiyel 2. dereceden bir polinom fonksiyonunun kullanılmasıyla bu düğümlerdeki değerlerden bulunur [26,27,28,29,30].



Şekil 4.1. Dörtüzlü eleman (tetrahedral)

Statik manyetik alan çözücüsü ortamı, homojen ve özel bir çözüm içinde, H alanlarına böler. H' nin bu homojen çözümü için sistem, her düğümde bir skaler potansiyel tutar. Özel çözüm için sistem, dörtüzlü eleman kenarlarında teğet H' nin bileşenlerini saklar. Çözümün doğruluğu, dörtüzlü elemanların her birinin ne kadar küçük olduğuna bağlıdır. Çözüm binlerce sonlu eleman kullanılmasıyla oluşturulan ağlarla gerçekleşir.[26,27,28,29].

Alan çözümü için ağ üretimi, dörtüzlü eleman düğümlerinin bulunduğu çok elemanlı bir ters matrisi içerir. Büyük sayıda elemanlı ağlar için güçlü bir hesaplamaya ve belleğe gerek vardır. Bu yüzden doğru bir alan çözümü elde etmek için yeterli sayıda elemandan oluşan ağ kullanmak arzu edilir. Bunun için kullanılacak bilgisayarın işlem gücü ve bellek miktarı yeterli olmalıdır. Optimal ağ üretiminde bir iterasyon süreci kullanan Maxwell 3D ile, önce kritik bölgede ağ eleman sayısı otomatik olarak artırılır; daha sonra kaba başlangıç ağa göre hata yoğunluğunun yüksek olduğu alanlarda ağ eleman sayısı artırılarak çözüme ulaşılır. Seçilen parametrelerle istenilen sınır aynı değere ulaştığı zaman çözüm adaptif döngünün dışına çıkarak sona erer. Manyetik bir yapının alan çözümünde kullanılacak optimal ağda, yeteri kadar dörtüzlü sonlu eleman bulunmalıdır. Ancak işlem gücü ve bellek miktarı büyük olan bir bilgisayar olduğu takdirde ağdaki sonlu eleman sayısı gereğinden fazla artırılabilir. Manyetik yapı için üretilen başlangıç sonlu elemanlar ağı genelde optimal olmadığından başlangıç çözümünden sonra iterasyon yoluyla ağdaki eleman sayısı artırılarak, doğru bir çözüme yaklaşılır. Bununla birlikte mevcut bilgisayarın daha verimli kullanılması için ağdaki eleman sayısı artırımını akıllıca yapmak gerekir. Bu yüzden dörtüzlü elemanların sayısını akıllıca belirlemekten emin olmak önemlidir [26,27,28,29,30]. Böylece eldeki mevcut bilgisayarın optimal kullanımı sağlanmış olur.

4.1.2. İletim akımı, akım yoğunluğu çözümleri

Bir serbest elektron kristal kafesinin bütününde hareket kabiliyetine sahiptir. Bununla beraber ağır ve pozitif yüklü iyonlar kristal kafeste düzenli pozisyonlarında iyice sabitlenmişler ve metaldeki akıma katkı sağlamazlar. Bundan dolayı bir metal iletkendeki akım iletim akımı olarak adlandırılır ve temelde bir elektron akışıdır. Sistem statik manyetik alanları iki adımda çözer:

1. Modelin akım akışını simüle eder ve J akım yoğunluğu hesaplar.

2. Akım yoğunluğuna göre H alanını hesaplar. Harici alanlar ise bir kaynak gibi sınır koşullarında belirtilir.

Alan simülatörü manyetik alanları çözmeye başlamadan önce iletkenler için yüzey akımlarını ve iletken kesitinden akım yoğunluğunu hesaplar. Maxwell 3D, akım verilmemiş iletkenlerin veya iletken olmayan malzemelerin akım yoğunluğunu hesaplayamaz. J akım yoğunluğu bir potansiyel fark için oluşturulmuş elektrik alanıyla orantılıdır.

$$J = \sigma E = -\sigma \Phi$$

Burada; E Elektrik alanı (V/m), σ malzemenin iletkenliği (siemens/m), Φ elektrik potansiyeli (V) dir. Sürekli rejimde küçük bir bölgeye giren yük miktarı ile bu bölgeden ayrılan yük miktarı birbirine eşit olmalıdır. Bu yük yoğunluğu $\rho(x,y,z)$ zamanla değişmez.

4.1.3. Manyetik alan enerjisi, manyetik ko-enerji yaklaşımları

Maxwell 3D alan simülatörü endüktans matrisini, eksenlerde oluşan kuvvetler ve torkları çözebilmesi için manyetik alanda depo edilen enerjii ve ko-enerjii hesap etmesi gereklidir.

Doğrusal malzemede μ sabittir ve enerji ko-enerjiye eşittir [26, 28, 29]. Doğrusal olmayan malzemede μ , B-H eğrisine göre değişir ve enerji ko-enerjiden daha küçüktür. Maxwell 3D alan simülatörü ile yapılan çözümden sonra elektriksel ve manyetik parametreler genlik ve vektör olarak tahmin edilmiştir. Bu parametreler akım yoğunluğu, öz ve ortak endüktansların oluşturduğu endüktans matrisi, aksenal kuvvetler, üretilen torklar, manyetik alan şiddeti, manyetik akı yoğunluğu ve enerji ifadelerinin genlik ve vektörel olarak değerleridir.

4.2. MATLAB Programı

MATLAB; (MATrix LABoratory); ilk defa 1985'de C.B Moler tarafından matematik ve özellikle de matris esaslı matematik ortamında kullanılmak üzere geliştirilmiş etkileşimli bir paket programlama dilidir. İlk sürümleri FORTRAN diliyle yazılmış olmakla beraber son

sürümleri (2009 yılı itibariyle 7.8 dir) C dilinde hazırlanmıştır. MATLAB mühendislik alanında; sayısal hesaplama, veri çözümleri ve grafik işlemlerinde kullanılacak genel amaçlı bir program olmakla beraber özel amaçlı modüler paketlere de sahiptir. Control Toolbox, Signal Toolbox gibi paket programlar (bilgisayar destekli denetim sistemi tasarımı) olup bunlar denetim sistemlerinin tasarımında çok etkili araçlardır. Ayrıca WINDOWS ortamında çalışan SIMULINK, etkileşimli benzetim programlarının hazırlanması ve çalıştırılmasında büyük kolaylıklar sağlamaktadır.

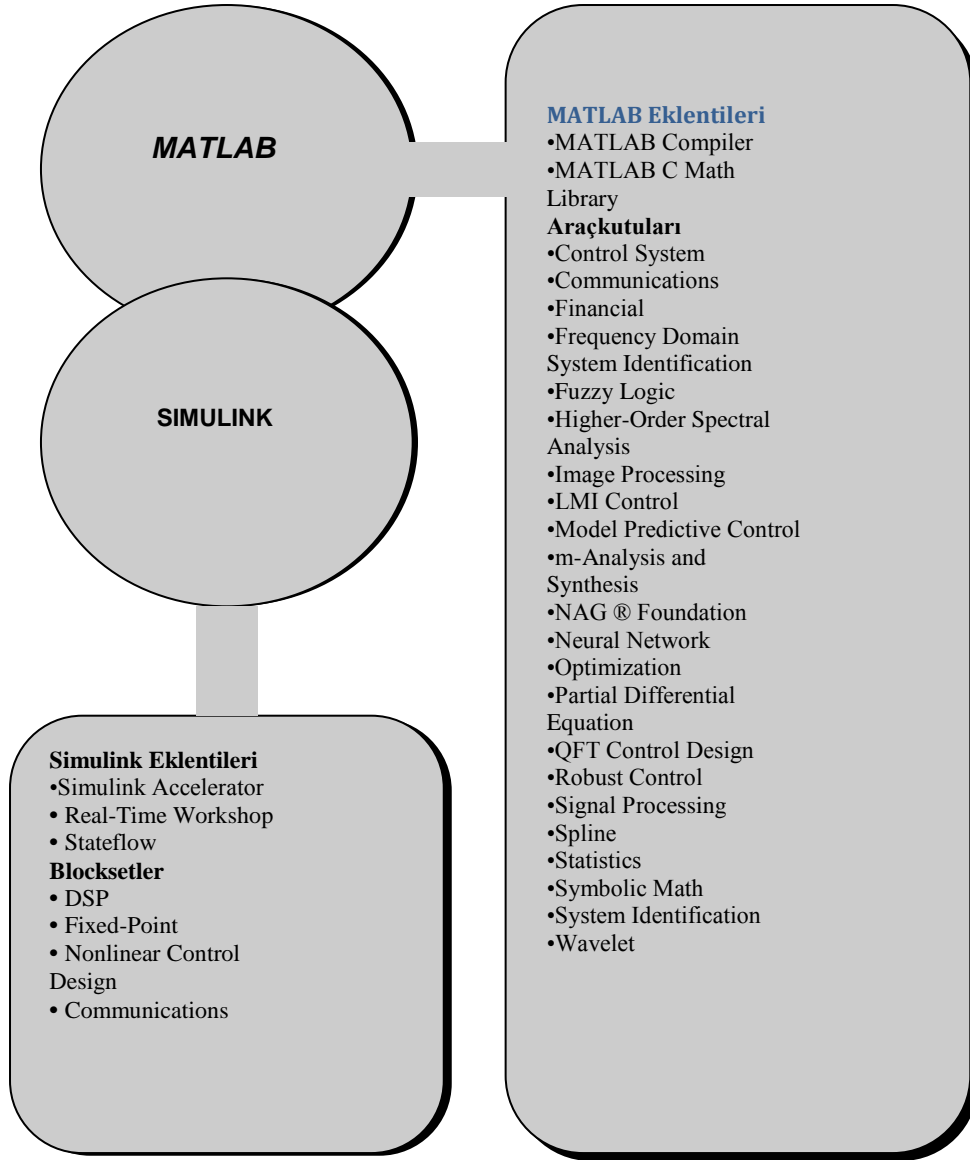
Bugün (2009 yılı itibariyle) 7.8 sürümüne ulaşan MATLAB'ın değişik bilgisayar sistemlerinde çalışan çok çeşitli sürümleri vardır. En basiti Öğrenci sürümü olup bu sürüm Profesyonel MATLAB benzeri özelliklere sahiptir. Yalnız bazı sınırlamalar vardır.

4.2.1. Matlab Ürün Ailesi

Matlab, bütün mathworks ürünleri için bir altyapıdır. Matlab'ta, kullanımı kolay olan tek bir ortamda sayısal hesaplama, 2-d ve 3-d grafikleri ve dil yetenekleri birleştirilmiştir. Matlab eklentileri, Matlab'ta geliştirilen sistemlerin gerçekleştirmesini destekleyen seçimli araçlardır.

Araç kutuları, özel sorunların çözümü için Matlab'a uyarlanan Matlab işlevlerinin bir tür kitaplıklarıdır. Araç kutuları, açık ve eklenebilir olup; kendi algoritmalarını ve ekini görebilirsiniz.

Simulink, blok diyagram ara yüzü ile doğrusal olmayan simülasyon ve “canlı” simülasyon yetenekleriyle öz sayıları, Matlab'ın grafiklerini ve dil fonksiyonlarını birleştiren bir sistemdir [31].



Şekil 4.2. Matlab Ürün Ailesi

Simulink eklentileri, simulinkte geliştirilen sistemlerin gerçekleştirilmesini destekleyen seçime dayalı araçlardır.

Bloksetler, özgül uygulama alanlarında kullanım için tasarlanmış simulink bloğunun toplamlarıdır.

4.2.2. Matlab Araç Kutuları(Toolboxes):

MATLAB'ın kullanılabilirliği ve çok yönlülüğü, uygulamalara özgü çeşitli araç kutuları eklemekle geliştirilebilir. Araç kutuları, çeşitli bilimsel alan ve konularda yazılan Matlab

fonksiyon dosyalarından oluşurlar. Aşağıda kısaca açıklanan, değişik bilim dalları ile ilgili olarak yazılmış hazır araç kutuları yer almaktadır.

- Signal Processing Toolbox (Sinyal İşleme Araç kutusu): 1 boyutlu ve 2 boyutlu sayısal sinyal işleme (zaman serilerinin analizi) ile ilgili fonksiyonlardan oluşmaktadır. Ayrıca, sayısal filtreler için geliştirilen analiz ve tasarım fonksiyonları ile güç spektrumu analizine ilişkin fonksiyonları da içermektedir.

- Control Systems Toolbox (Kontrol Sistemleri Araç kutusu): Durum uzayı tekniklerini kullanarak kontrol mühendisliği ve sistemler teorisi ile ilgili fonksiyonlardan oluşmaktadır.

- System Identification Toolbox (Sistem Tanımlama Araç kutusu): Parametrik modelleme ve sistem tanımlama ile ilgili fonksiyonlardan oluşmaktadır.

- Neural Network Toolbox (Yapay Sinir Ağları Araç kutusu): Yapay sinir ağları için tasarım ve benzetim (simülasyon) fonksiyonlarından oluşmaktadır. Bu fonksiyonlar birkaç kategoriye ayrılırlar. Bunlar;

- 1) Ağ benzetimi için transfer fonksiyonlarının belirtilmesi,
- 2) Ağ parametrelerini güncelleştirmek için kuralların belirtilmesi,
- 3) Veriler üzerinde ağın işlem yapabilmesi için fonksiyonların belirtilmesi.

Bazı fonksiyonlar, lineer ve Hapfield ağlarının doğrudan tasarımını için kullanılabilirler.

- Spline Toolbox (Oluşum Araç kutusu): Oluşumlar ile ilgili M-dosyalarından oluşmaktadır. Oluşum araç kutusu fonksiyonel modellemede kullanılmaktadır. Eğrilerin modellenmesi, verilere göre eğri uydurulması, fonksiyonel denklemlerin çözülmesi vb. için oldukça kullanışlıdır.

- Robust-Control Toolbox (Robot Kontrol Araç kutusu): Robot kontrol sistemleri tasarımı ile ilgili fonksiyonlardan oluşmaktadır.

- μ -Analysis and Synthesis Toolbox (μ -Analiz ve Sentez Araç kutusu): μ -Analiz ve sentez tekniklerinin kullanılarak robot ve lineer kontrol sistemlerinin incelenmesi ve tasarlanması için yazılmış fonksiyonlardan oluşmaktadır.

4.2.3. Matlab'ın kullanım amacı ve alanı:

MATLAB tüm mühendislik alanında, sayısal hesaplamalar, veri çözümlenmesi ve grafik işlemlerinde kolaylıkla kullanılabilen bir program dilidir. FORTRAN ve C dili gibi yüksek seviyeli programa dili ile yapılabilen hesaplamaların pek çoğunu Matlab ile yapmak mümkündür. Ayrıca bunu yanında diğer programlama dillerine göre Matlab'ta daha az sayıda

komutla çözüm üretmek mümkündür. Gerçekte Matlab, M-dosyaları (M-Files) olarak bilinen pek çok sayıda fonksiyon dosyalarından, alt programlardan ibarettir. Hazırlanması düşünülen bir program içinde M-dosyalarını kullanmak suretiyle komut sayısını çok kısa tutmak mümkündür.

4.2.4. Matlab'ın Kullanım Yerleri:

Denklem takımlarının çözümü, doğrusal ve doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin çözümü, integral hesabı gibi sayısal hesaplamalar.

- Veri çözümleme işlemleri
- İstatiksel hesaplamalar ve çözümlenmeler
- Grafik çizimi ve çözümlenmeler
- Bilgisayar destekli denetim sistemi tasarımı
- Devre analizinde düğüm kol denklemlerinin çözümü

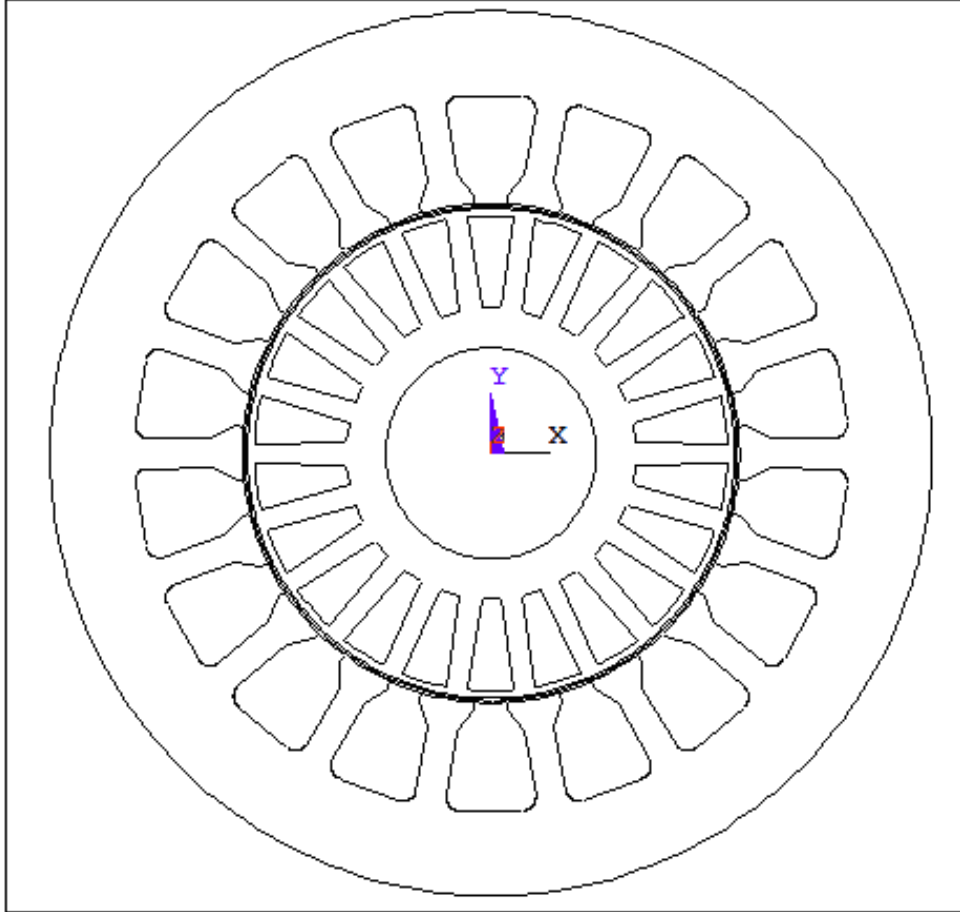
4.2.5. Asenkron Motorun Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Analizi

Bu tezde asenkron motorun üç boyutlu sonlu elemanlar yöntemiyle analizi yapılmıştır. Dalgıç pompa motoru olarak kullanılan motorumuz üç fazlı asenkron motor olup, 380V şebeke geriliminde çalıştırılmaktadır. AA gerilimi ile uyarılan stator sargılarına sahip motorun davranışının incelenmesi için öncelikle sonlu elemanlar yöntemi ile harmonik analizi yapılmıştır. Yapılan bu analizde manyetik saçların lineer geçirgenliğe sahip olduğu kabul edilmiştir. Ayrıca rotor çubuklarının haricinde manyetik saç ve mil üzerinde oluşacak girdap akımları ihmal edilmiştir.

Bu analiz sonucunda asenkron motorun çizilmiş, küçük dörtyüzlü elemanlara ayrılmıştır. Asenkron Motorun stator kısmı, rotor kısmı, bobinler, ayrı ayrı bölmelendirilmiş halleri gösterilmiştir. Moment, manyetik akı yoğunlukları ve manyetik indüksiyonlu kısımların değerleri hesaplanmış ve şekil üzerinde gösterilmiştir. Böylece motorun analizi sağlanmıştır.

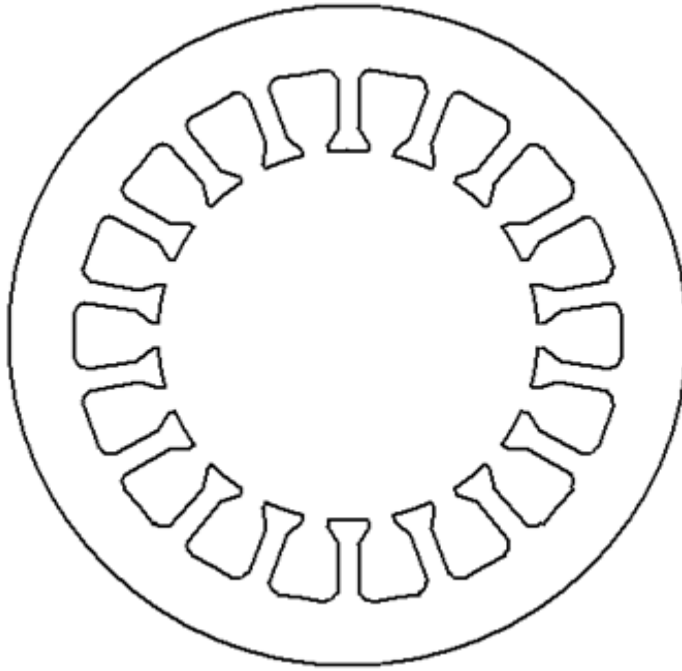
4.3. Motor Geometrisinin Tanımlanması:

Analizi yaptığımız motor Şekil 4.3’de görüldüğü gibi 18 stator, 22 rotor oluğuna sahiptir. Stator ile rotor arasındaki hava aralığı 0.5mm’dir.



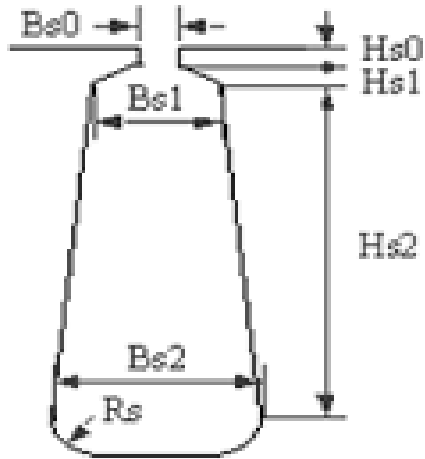
Şekil 4.3. Motorumuzun önden görünüşü

4.3.1. Stator Geometrisi:



Dış çap : 92.2 mm
İç çap : 52 mm
Stator boyu: 229 mm

(a)



$Hs0$: 0.75 mm
 $Hs1$: 2.21 mm
 $Hs2$: 6.84 mm
 $Bs0$: 3.61 mm
 $Bs1$: 7.14 mm
 $Bs2$: 9.39 mm

(b)

Şekil 4.4. a) Stator ölçüleri b) Stator oluk ölçüleri

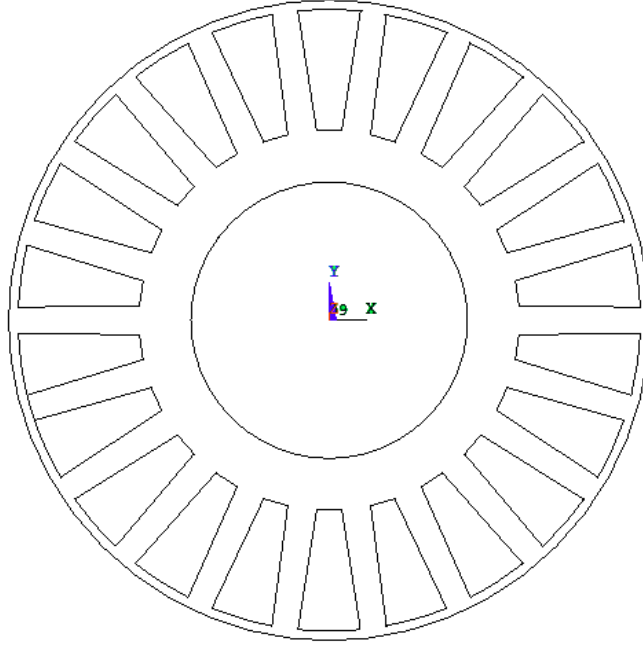
4.3.2. Rotor Geometrisi:

Rotor çubukları alüminyum eritilerek rotor oluklarına dökülmesi sonucu oluşturulmuştur.

Dış Çap : 51 mm

İç Çap : 22 mm

Rotor Uzunluğu : 229 mm



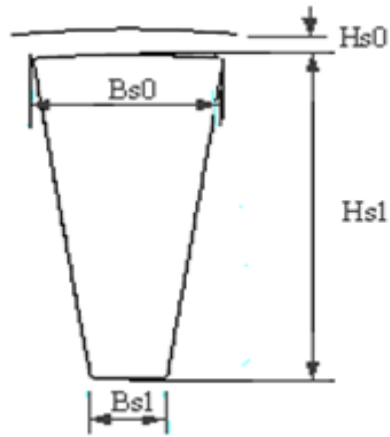
(a)

Hs0 : 0.75 mm

Hs1 : 9.62 mm

Bs0 : 5 mm

Bs1 : 2 mm

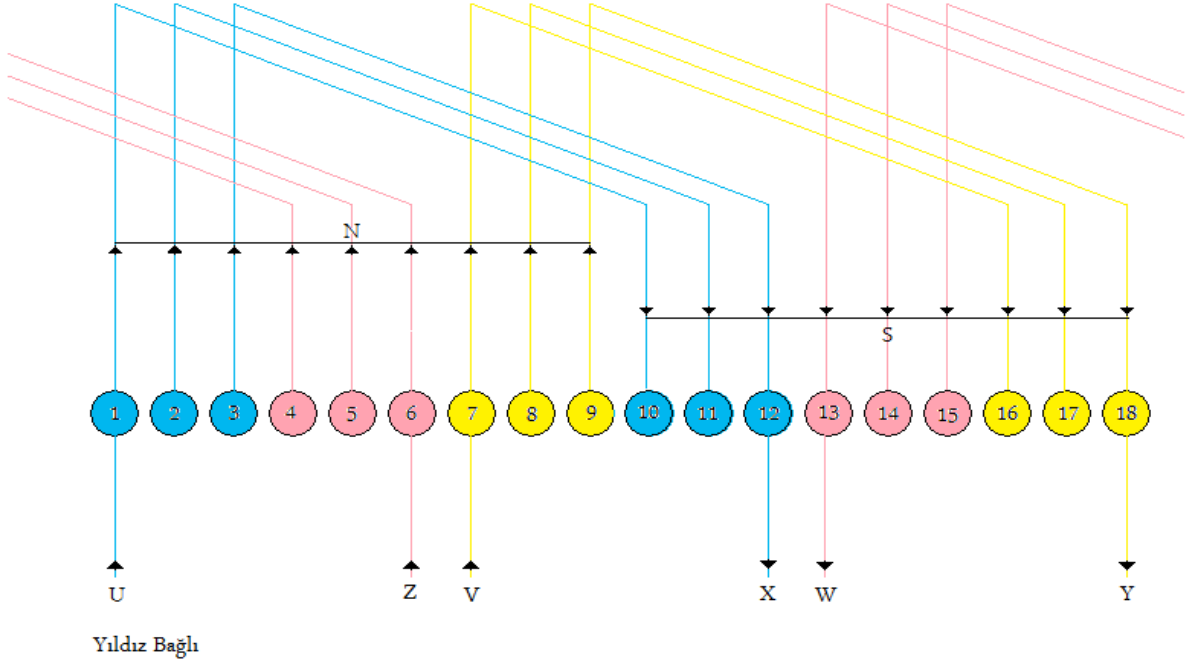


(b)

Şekil 4.5 a) Rotor Ölçüleri b) Rotor Oluk Ölçüleri

4.3.3. Stator Sarım Şeması:

İncelemesi yapılan üç fazlı asenkron motor yarım kalıp olarak sarılmış ve sarım şeması Şekil 4.6'de verilmiştir. Motor Yıldız bağlanmıştır. Kullanılan emaye kaplı bakır iletkenlerin çapı 2*0.55 mm olup 47 sarım olarak sarılmıştır.



Şekil 4.6 Stator sarım şeması

Tel Çapı : 2*0.55mm

Sarım Sayısı : 47 Sarım

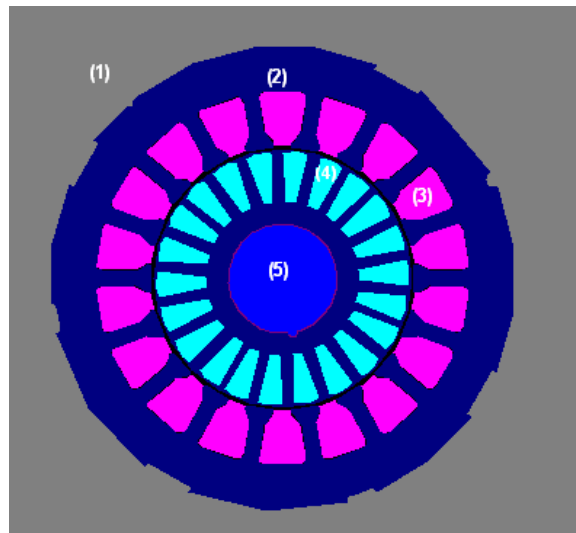
4.3.4. Motorda Kullanılan Materyallerin Tanımlanması:

Motorumuzun analizinde 5 materyal modeli kullanılmıştır. Bu modellerin özellikleri Tablo 4.1’de verilmiştir.

Tablo 4.1. Motor analizinde kullanılan materyal özellikleri

Materyal Numarası	BağılManyetik geçirgenlik (μ_r)	Direnç(Ohm)	Hız(Hz)	Malzeme Türü
1	1	0	0	Hava
2	3500	0	0	Silisyumlu saç (stator ve rotor)
3	1	1.588e-8	0	Stator bakır sargı
4	1	2.7778e-8	47	Rotor Alüminyum sargı
5	100	0	0	Rotor mili

Motor analizinde kullanılan materyal türlerine göre motorumuzun geometrisi Şekil 4.7’de verilmiştir.



Şekil 4.7 Materyal türlerine göre motor geometrisi

4.3.5. Programımızın Tanıtımı:

Hafıza probleminin önüne geçilmesi, işlem kolaylığı ve daha hızlı sonuç alabilmek amacıyla yapılan çalışmada motorun en az 2 bobini, en fazla 6 bobini ele alınmıştır. Diğer sargılar konulunca program yanıt vermemiştir. Buna göre gerekli analizler ve hesaplamalar yapılmıştır.

Bu problemin çözülebilmesi için ilk önce asenkron motorumuzun dışında vektör potansiyel değerlerinin sıfır olduğu bir bölge belirlendi. Ancak buradaki potansiyel değerlerin teoride sıfır olmadığı da bilinmektedir. Bunun için bu sınırı motordan ne kadar uzakta alırsak sıfır potansiyel değerlerine de o kadar yaklaşırız. Bu durumda çözüm sonuçlarımız daha da doğru olacaktır.

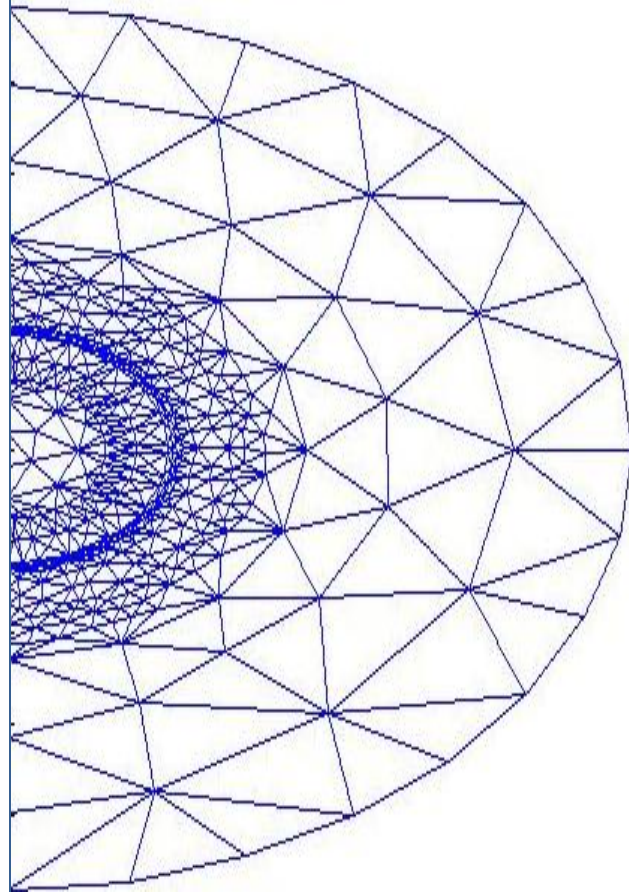
Yapmış olduğumuz programı adım adım anlatacak olursak;

1.adım: Programımızda ilk adım olarak dörtyüzlü elemanların koordinatlarının ve her bir dörtyüzlü elemanı oluşturan düğüm numaralarının girilmesi gerekmektedir. Bu verilerin girişi teker teker yapılabileceği gibi dosyalardan da okutulabilir.

Dosyadan okutmak için bilgisayarımızın C:\MATLAB7.0.1\work dizininde geneldugumler.dat, potansiyelmateryalliDnoktalari.dat ve sinirdugumler.dat isimli text dosyaları oluşturmamız gerekir.

2.adım: Gerekli olan verilerin belirtilen dosyalardan okutulması işleminden sonra 2. adım olarak motorun çizdirme adımına geçildi.

Programda sonlu elemanlar yöntemine göre, Şekil 4.8'da görülen asenkron motorumuza elle yapmış olduğumuz bölmelendirme işleminden sonra, her düğümün x,y ve z koordinatlarından ve dörtyüzlüyü oluşturan düğüm numaralarından yararlanılarak yapılan elle bölmelendirme işleminin çizdirilmesi ile ayrıca bir tür hata kontrolü yapmış olunmaktadır. Eğer bir dörtyüzlüyü oluşturan düğüm numaraları, x,y ve z koordinatlarından biri veya hepsi yanlış girilmiş ise bunu bu kısımda çok rahat bir şekilde görebilirsiniz ve bu hatayı düzeltebilirsiniz.



Şekil 4.8. Motorun matlab ile elle bölmelendirilmiş durumu

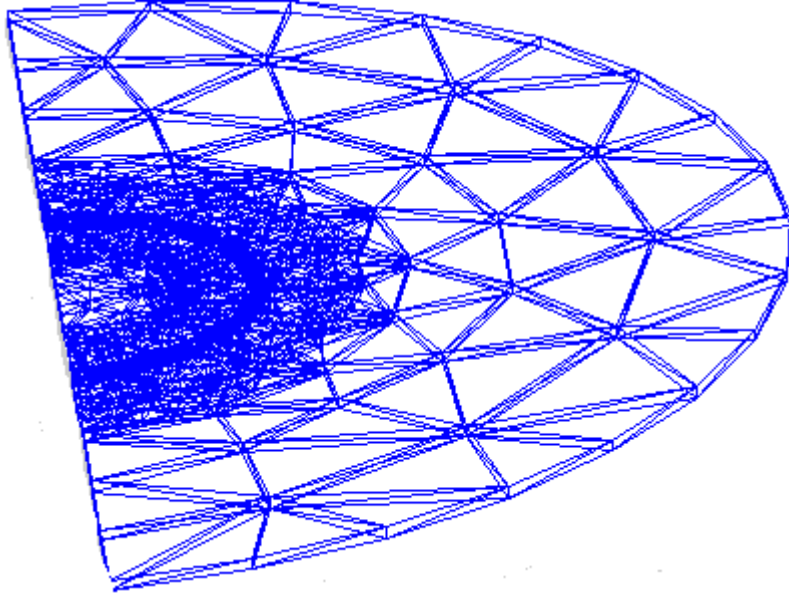
Motorun elle bölmelendirilmiş değerleri;

Düğüm Sayısı = 822,

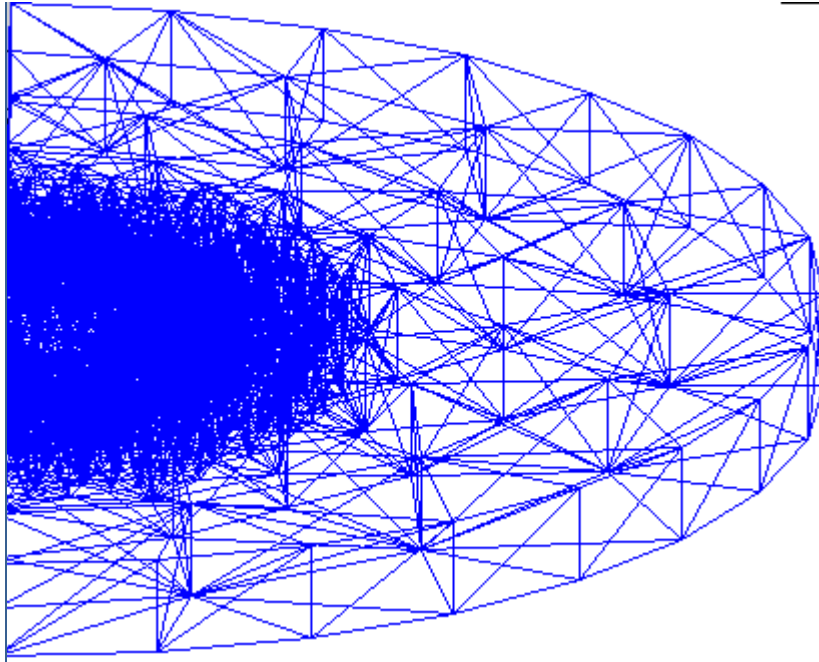
Dörtüzlü Eleman Sayısı = 2325,

Sınır Düğüm Sayısı = 34'dir.

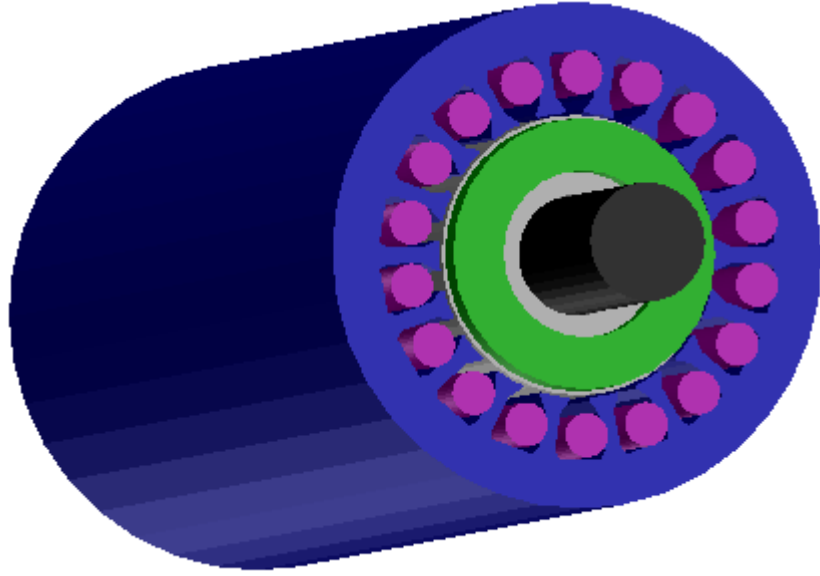
Çözüm bölgesinin görünüşünün çizdirilmesi sırasında (Şekil.4.8) , bu çözüm bölgesinin datalarının (her düğümün x, y ve z koordinatları ve dörtüzlüyü oluşturan düğüm numaraları) dosyadan okunabilmesi için bir dosya halinde C:\MATLAB7.0.1)\work'un içine kaydetmeniz gerekmektedir.



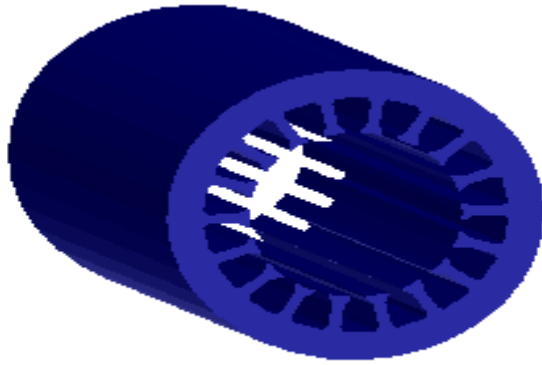
Şekil 4.9. Motorun Matlap ile 3 boyutlu bölmelendirilmiş durumu



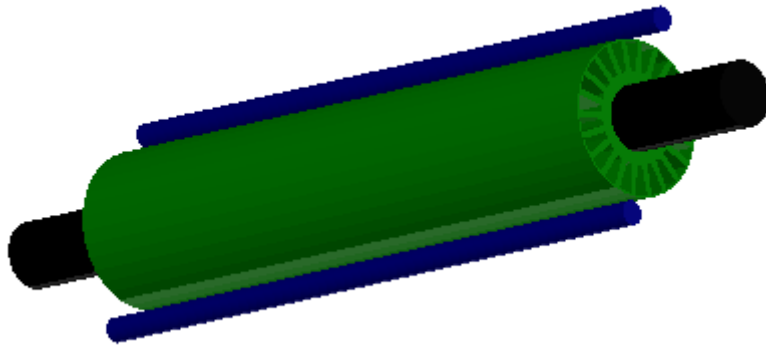
Şekil 4.10. Motorun Matlap ile 3 boyutlu bölmelendirilmiş durumu



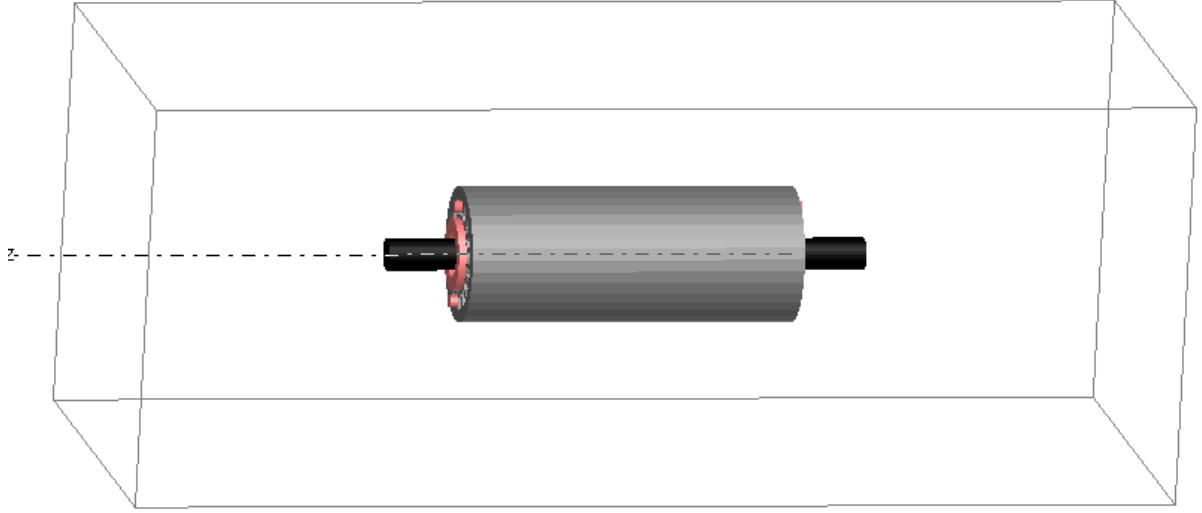
Şekil 4.11. Asenkron Motorun Maxwell 3d ile 3 boyutlu durumu



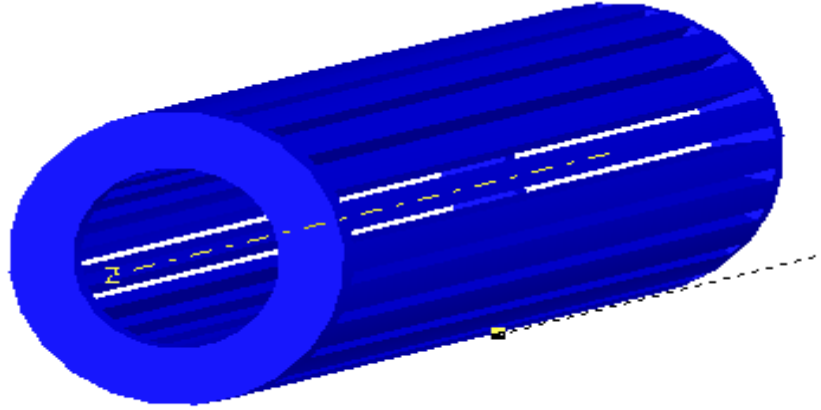
Şekil 4.12 Asenkron Motorun statorunun 3 boyutlu durumu



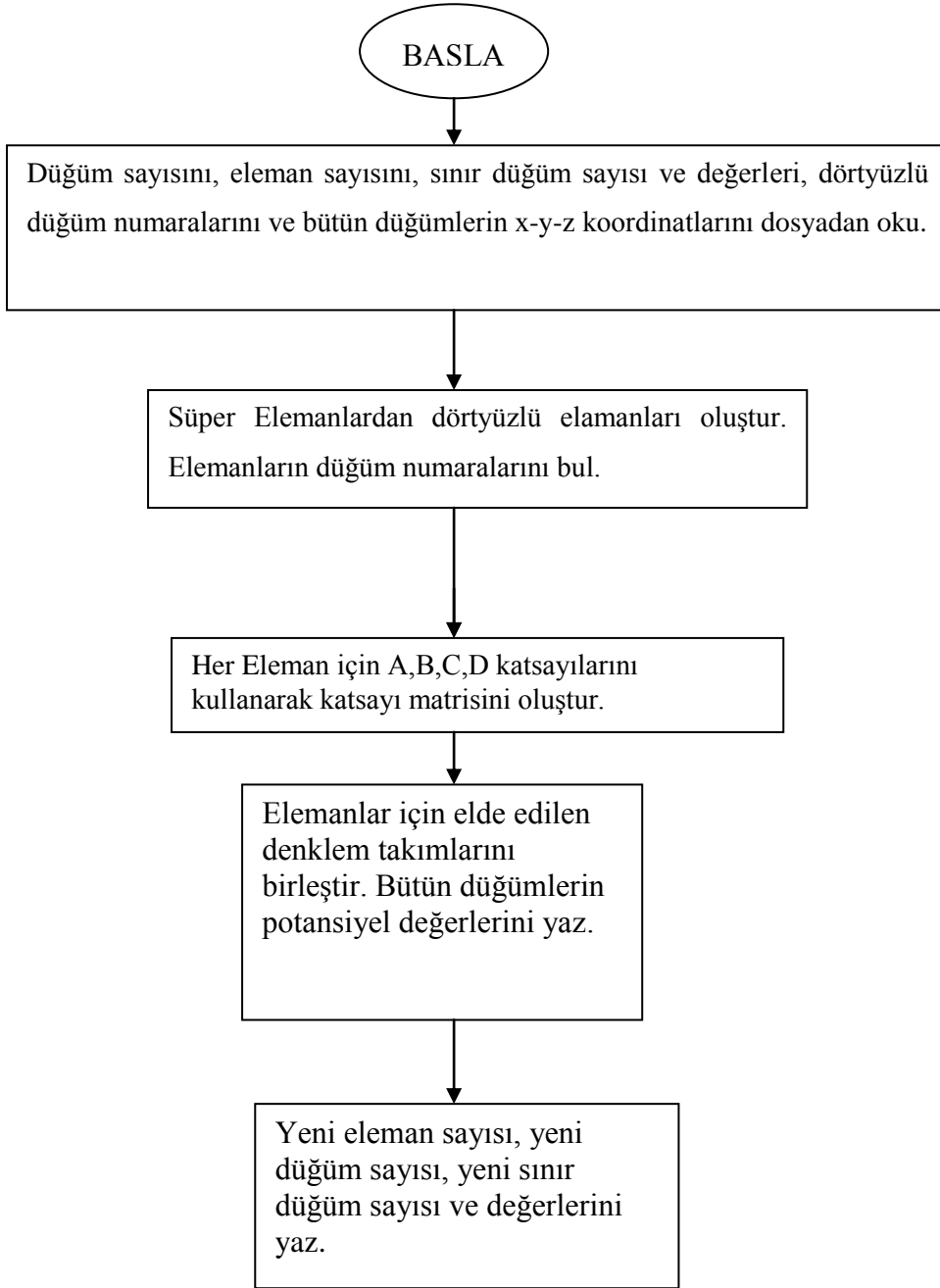
Şekil 4.13 Asenkron Motorun 1 sargılı halinin 3 boyutlu durumu

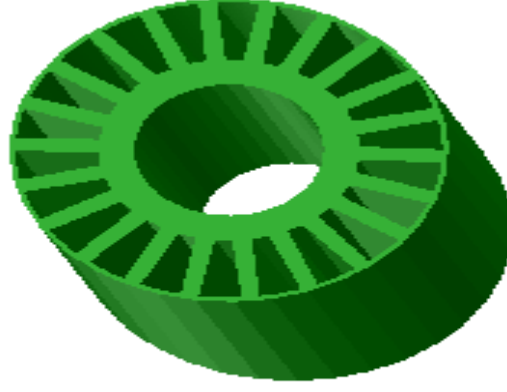


◆
Şekil 4.14 Asenkron Motorun Sınır Koşullarında 3 Boyutlu Durumu



Şekil 4.15 Asenkron Motorun 3 Boyutlu Rotor Kafesi Durumu





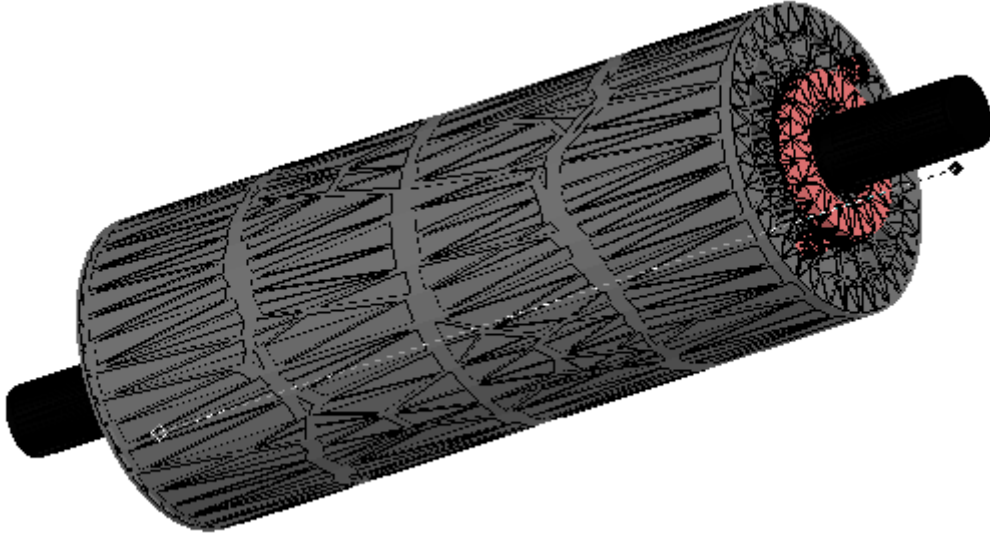
Şekil 4.16 Asenkron Motorun 3 Boyutlu Rotor Durumu

3.adım: Asenkron motorun 3 Boyutlu elle yapmış olduğumuz çizdirilmesinden sonra bu adımda çözüm bölgemizin Sonlu Elemanlar Yöntemine göre otomatik bölmelendirme işlemi yaptırılmaktadır.

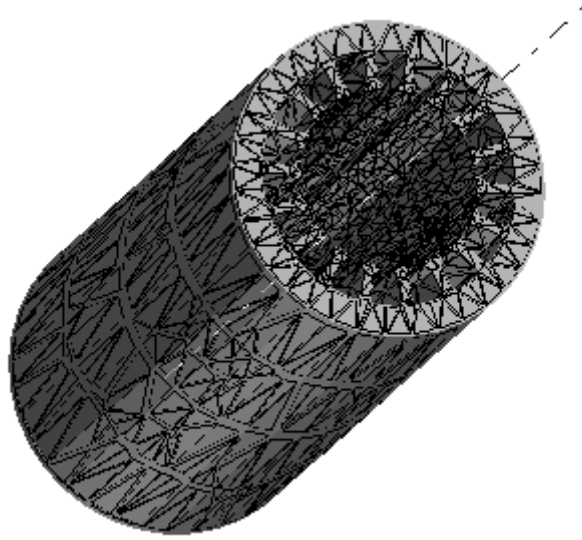
Sonlu elemanlar yönteminde çözümün doğruluğunu arttırmak için, vektör potansiyel değerine ait değişimin fazla olduğu bölgelerde (bakır, demir..vb.) dörtyüzlü sayısı çoğaltılır. Belirlenen çözüm bölgesini çok sayıda dörtyüzlü elemanlara bölme işlemi elle, direk bilgisayar programı ve her ikisi ile de yapılabilir.

Sonlu Elemanlar Yönteminden yararlanarak ellede dörtyüzlü elemanlara böldürebiliriz. Otomatik Bölmelendirme Akış Diyagramı:

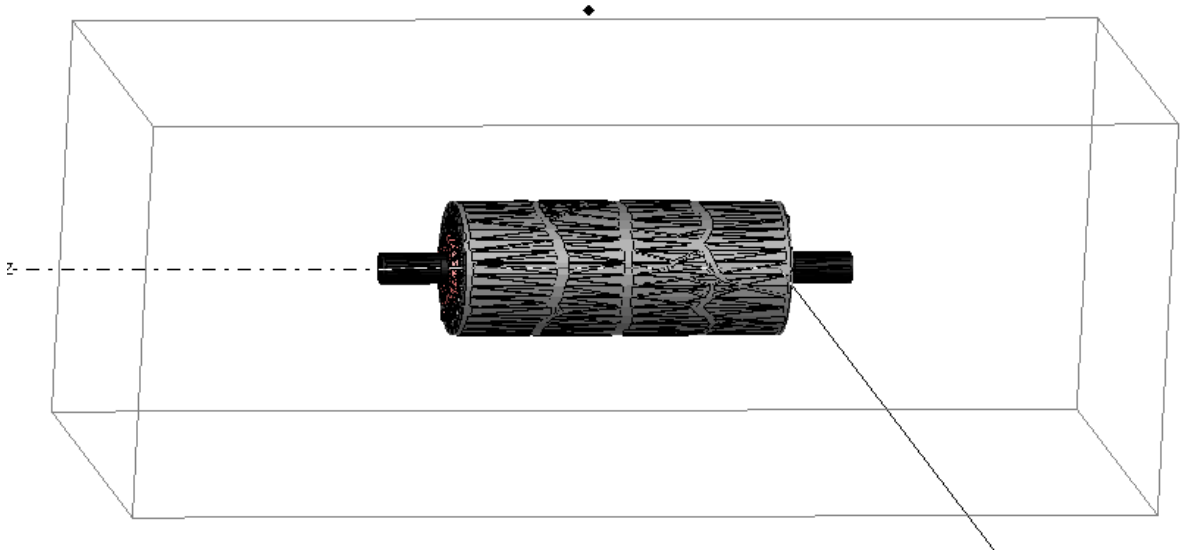
4.adım: Bir sonraki adımda Sonlu elemanlar yöntemine göre yapmış olduğumuz 1 defa bölmelendirme işlemi sonucunda elde edilen her düğümün x,y ve z koordinatlarından ve dörtyüzlüleri oluşturan düğüm numaralarından yararlanarak asenkron motor yeniden çizdirilir.



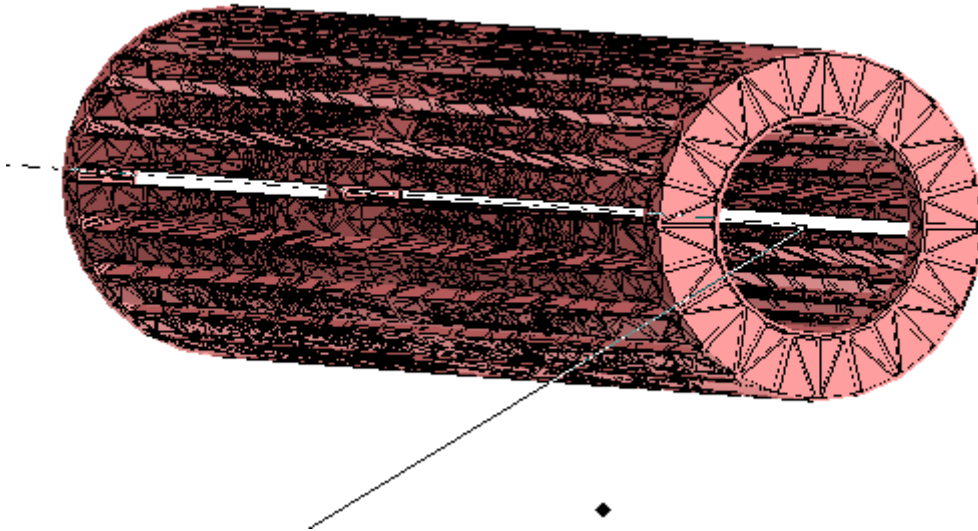
Şekil 4.17 Motorun Otomatik Bölmelendirilmiş Durumu



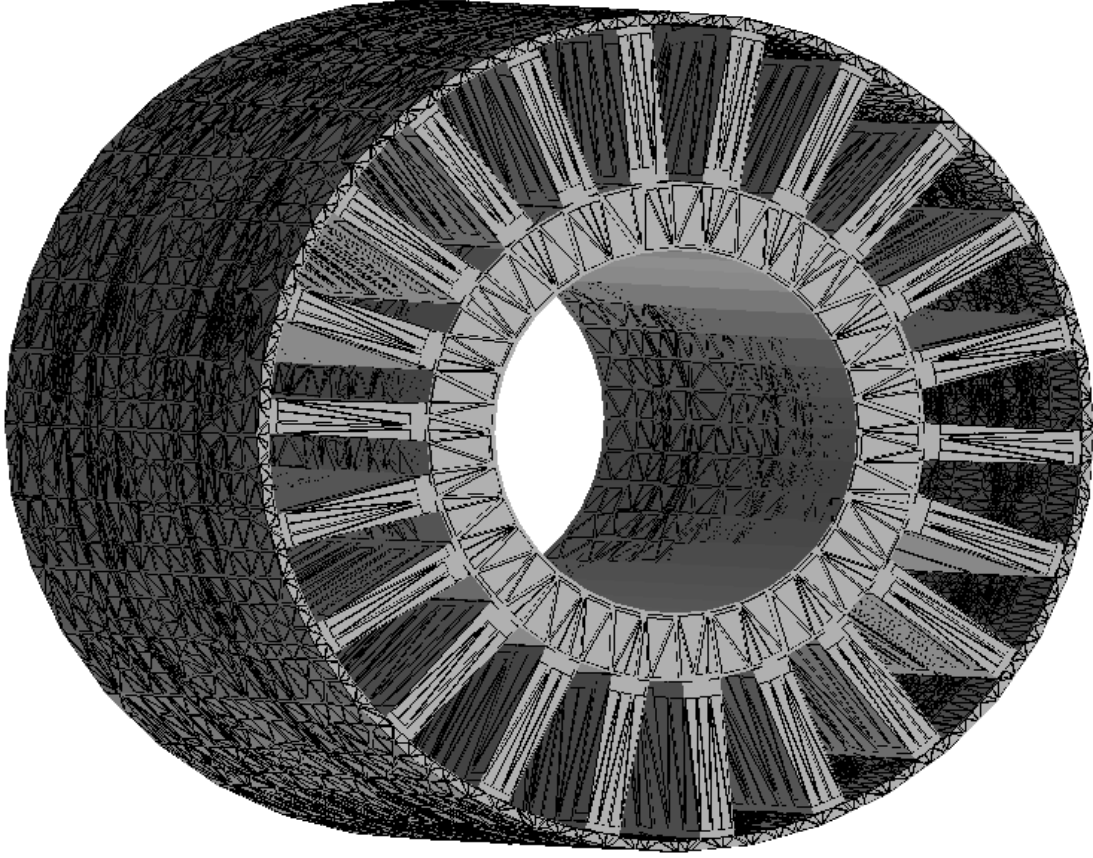
Şekil 4.18 Motorun Statorunun Otomatik Bölmelendirilmiş Durumu



Şekil 4.19 Motorun Sınır Koşulları İçindeki Otomatik Bölmelendirilmiş Durumu



Şekil 4.20 Motorun Rotor Kafesinin Bölmelendirilmiş Durumu



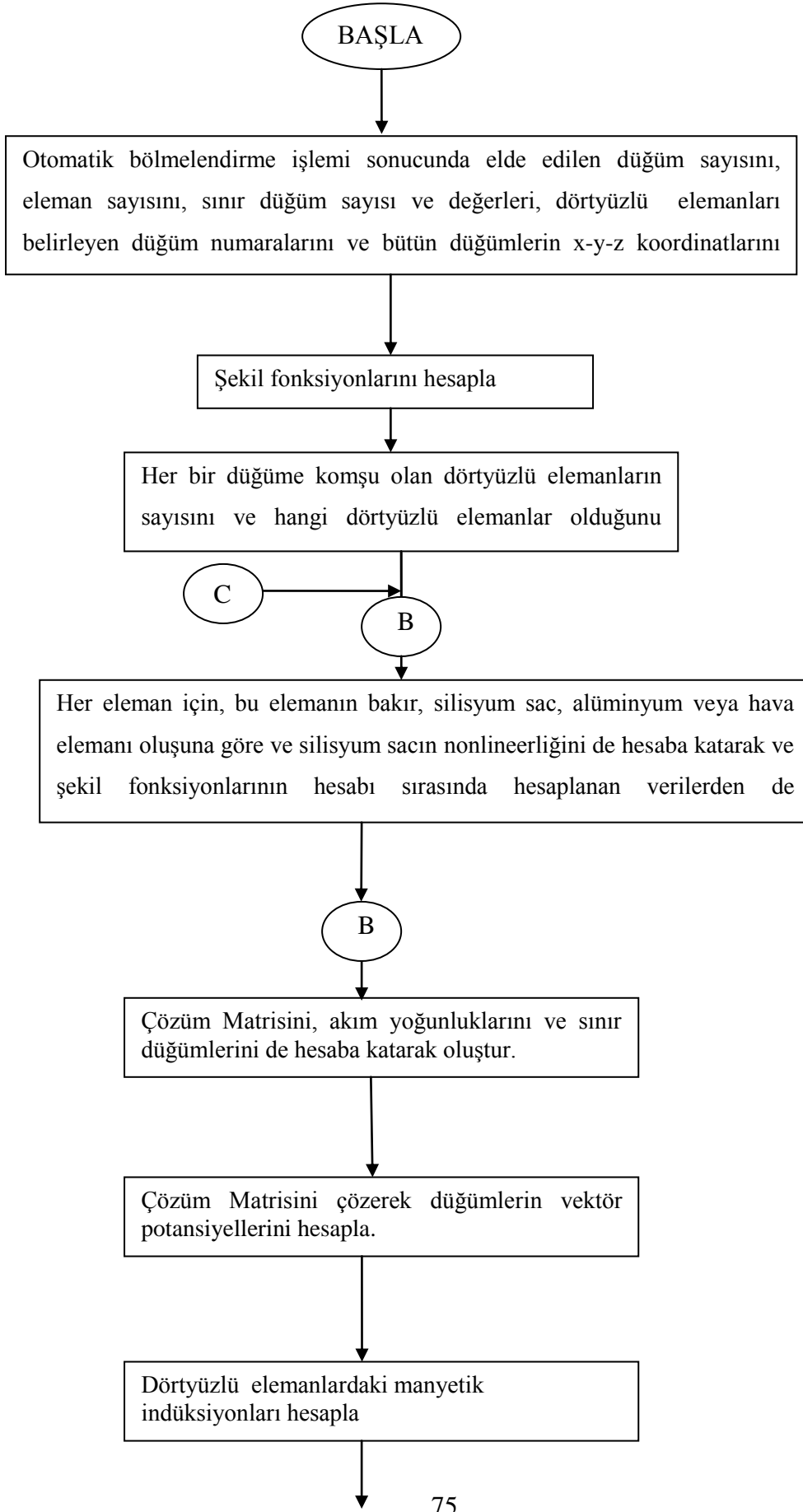
Şekil 4.21 Motorun Rotorunun Bölmelendirilmiş Durumu

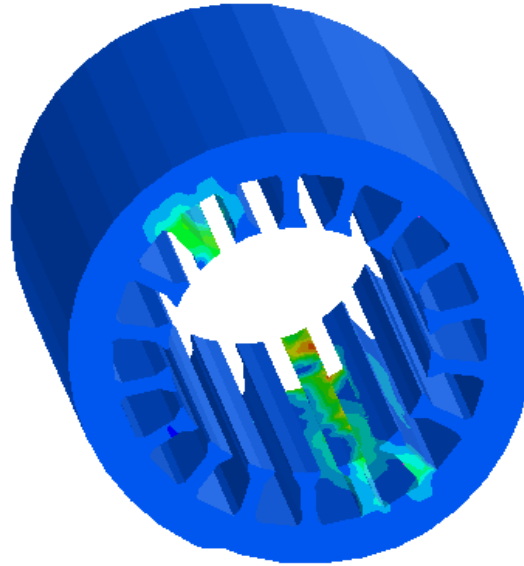
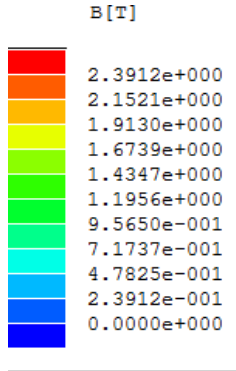
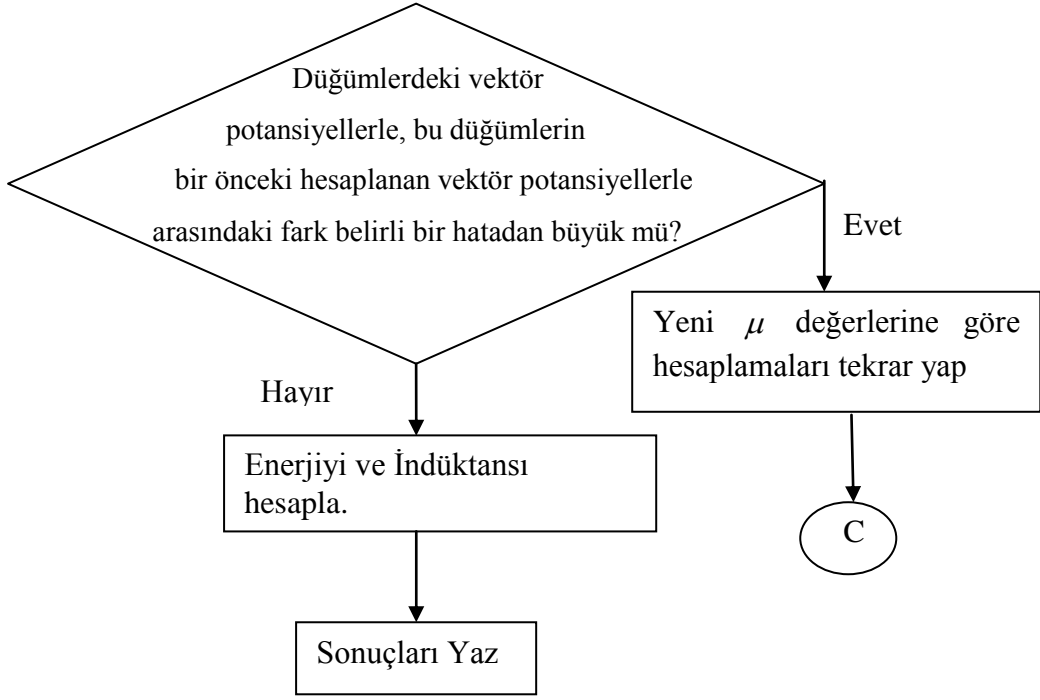
5.Adım: 3 Boyutlu Asenkron Motorun rotor kısmının, stator kısmının manyetik akı yoğunluklarını inceledik. Daha sonra moment hesaplanıp 7.518 bulundu.

Çözüm için öncelikle Denk. 3.37 - 3.40 ve Denk. 3.41 kullanılarak A, B, C, D ve N şekil fonksiyonları hesaplandı. Aynı zamanda Denk. 3.36 kullanılarak her bir dörtyüzlü elemanın hacimi hesaplandı.

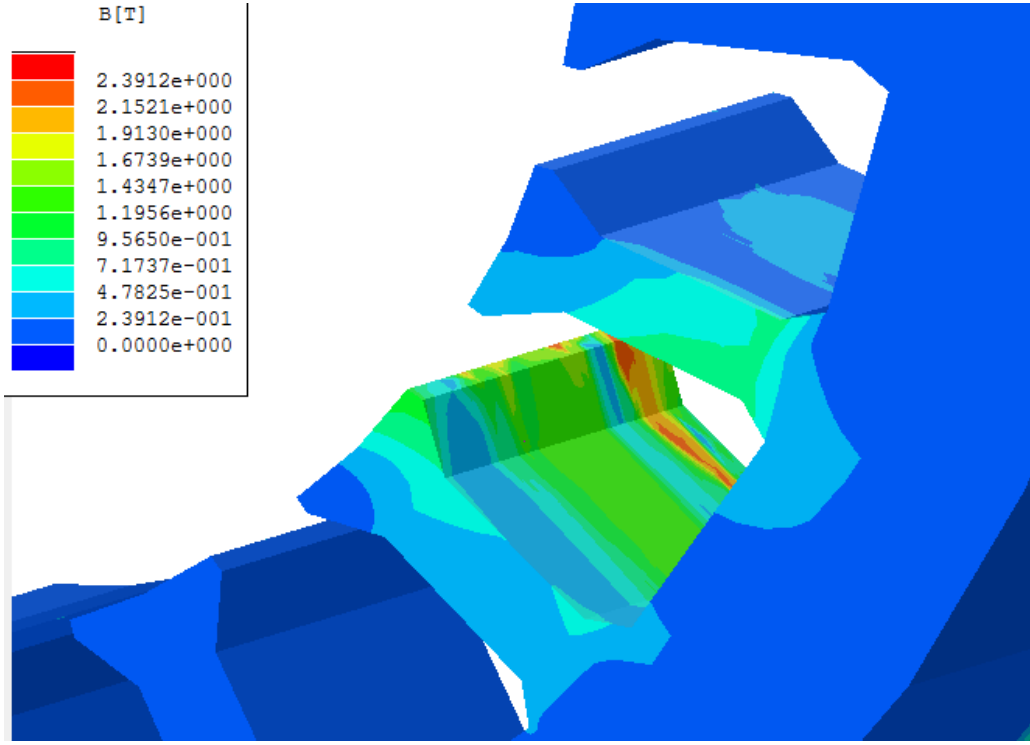
Daha sonra her bir dörtyüzlü eleman için bu elemanlarda kullanılan materyalin özelliğine göre ve şekil fonksiyonları da hesaba katılarak katsayılar matrisi oluşturuldu. Akım yoğunlukları ve sınır düğümler de çözüme eklenerek vektör potansiyel değerleri hesaplandı. Her bir dörtyüzlü elemanın dört köşe düğümündeki potansiyel değerlerinden faydalanılarak, o elemanın magnetik indüksiyon değerleri hesaplandı. Son olarak da her elemanın magnetik indüksiyon değerleri ve dörtyüzlülerin hacimleri kullanılarak moment hesaplanıp 7.518 Nm bulundu.

Şekil Fonksiyonları ve S Matrisi Hesabının Akış Diyagramı:

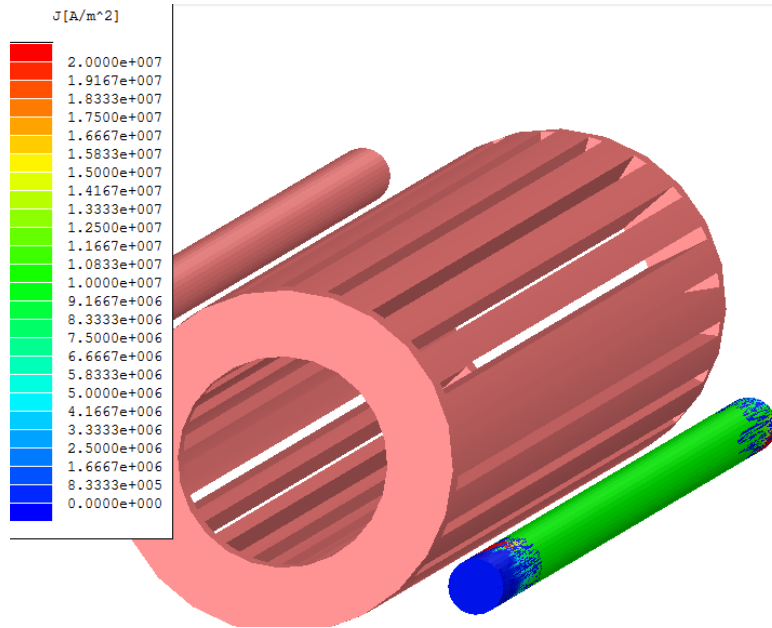




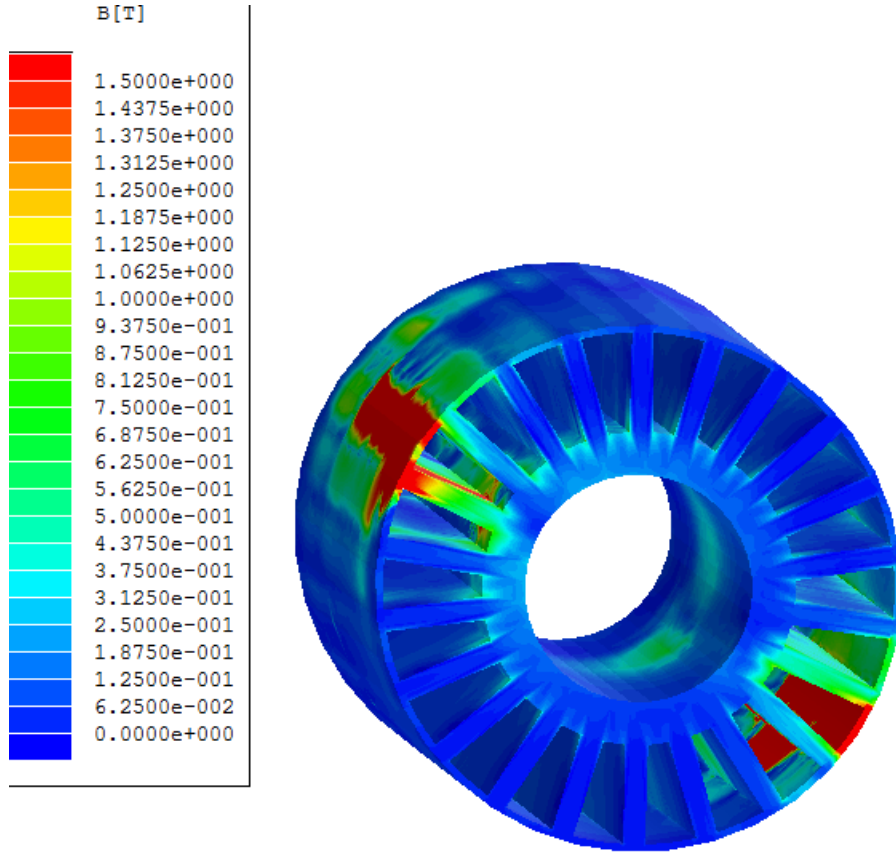
Şekil 4.22. Asenkron Motorun Statorunun 1 Sargısında Görülen Akı Yoğunluğu (B(T))



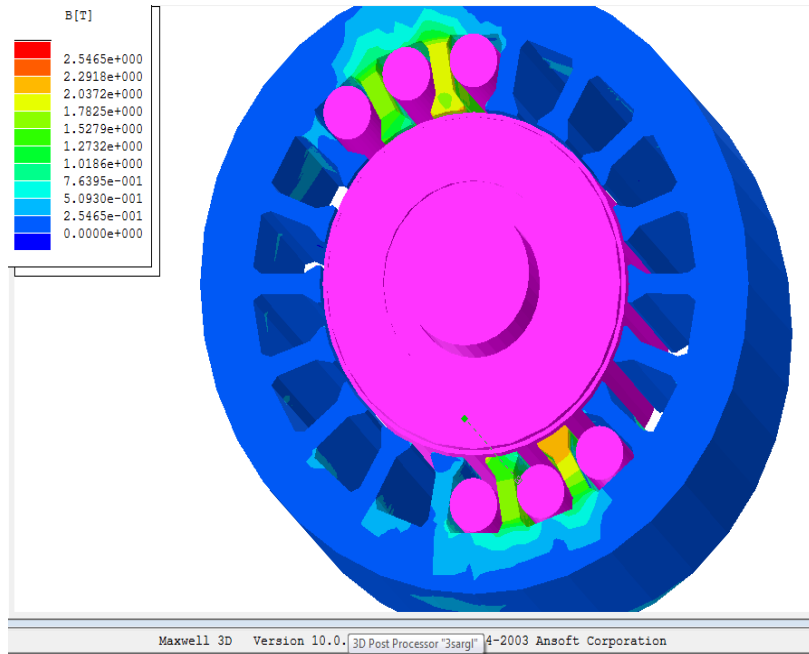
Şekil 4.23. Asenkron Motorun Statorunun 1 Sargısında Görülen Akı Yoğunluğu(B(T))



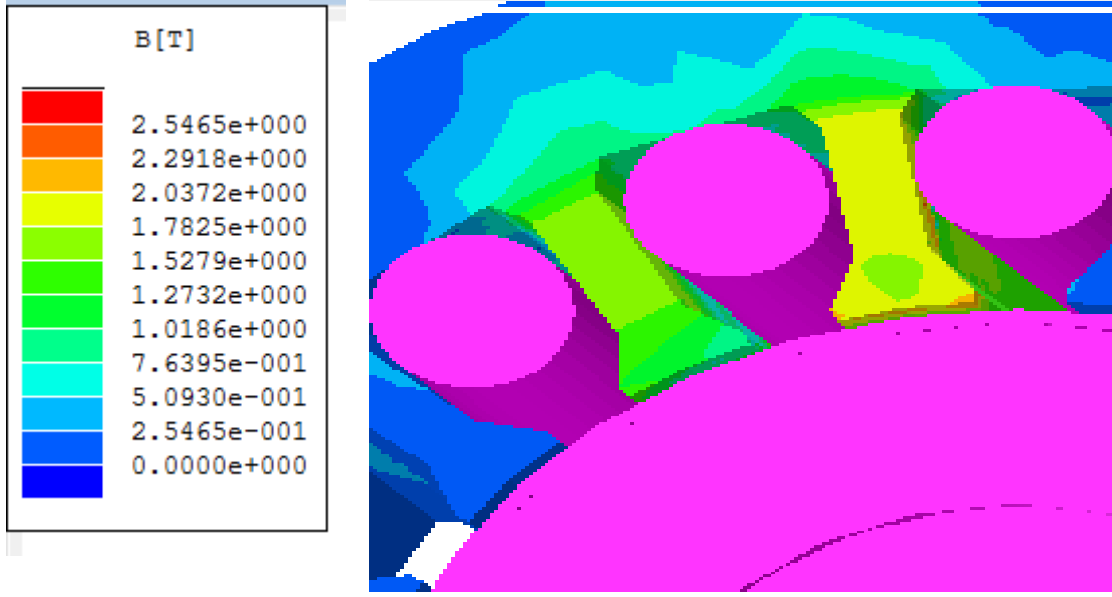
Şekil 4.24. Asenkron Motorun 1 Bobinindeki Akım Yoğunluğu(J(A/m²))



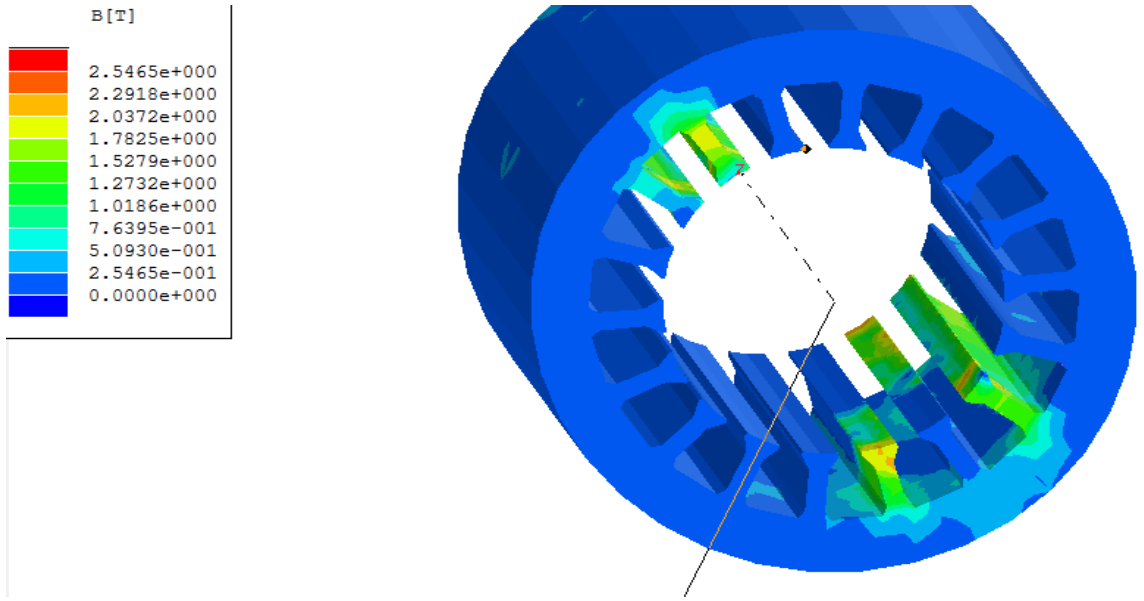
Şekil 4.25. Asenkron Motorun Rotorunun 1 Sargısındaki Manyetik Akı Yoğunluğu(B(T))



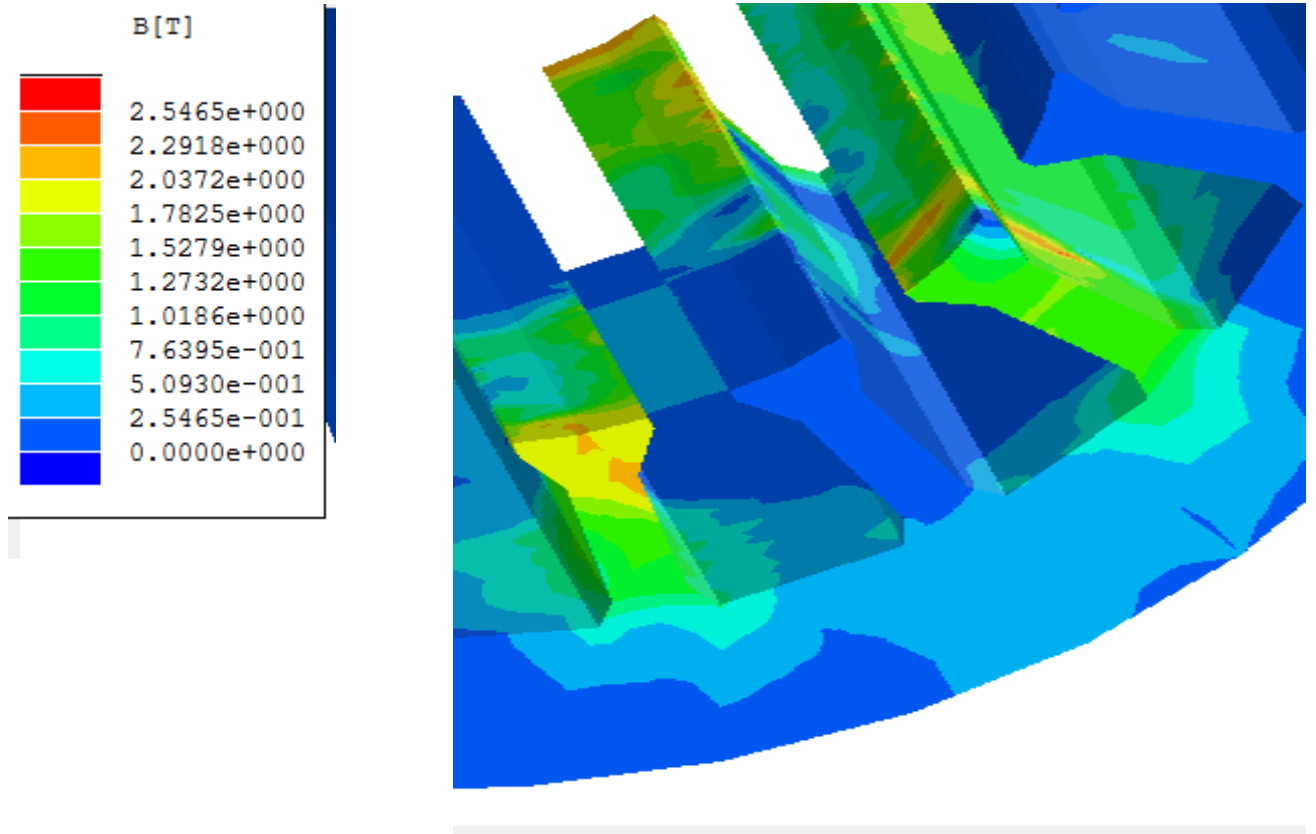
Şekil 4.26. 6 Bobinli Asenkron Motorun Akı Yoğunluğu(B(T))



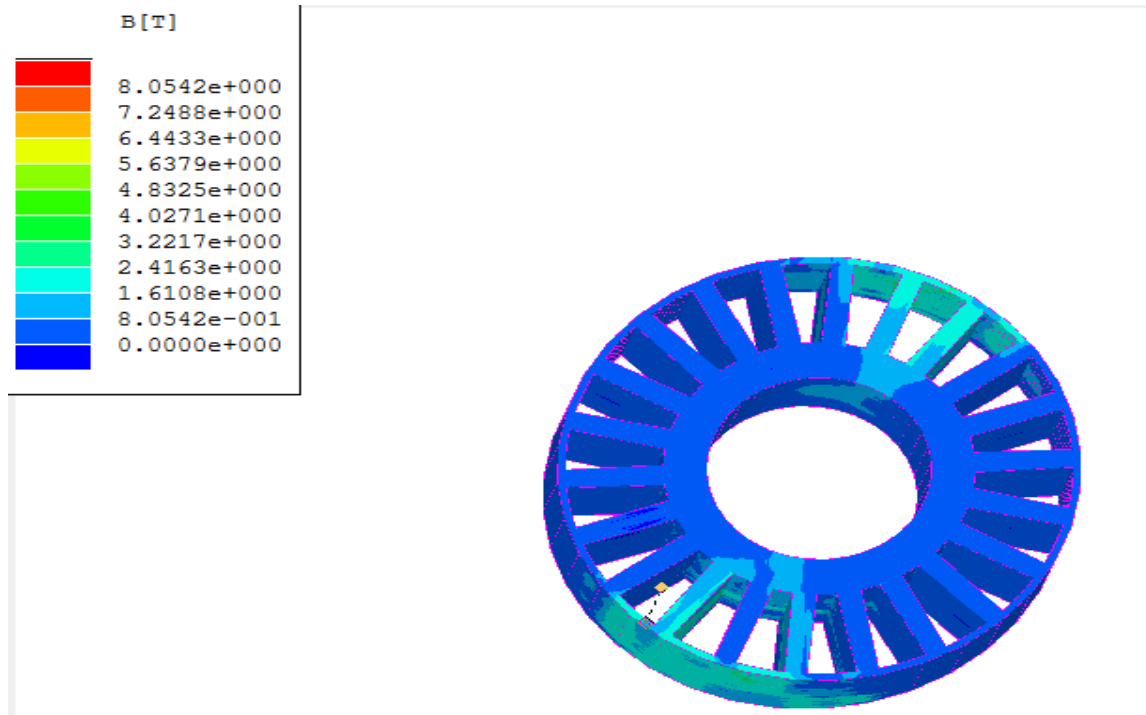
Şekil 4.27.6 Bobinli Asenkron Motorun Akı Yoğunluğu(B(T))



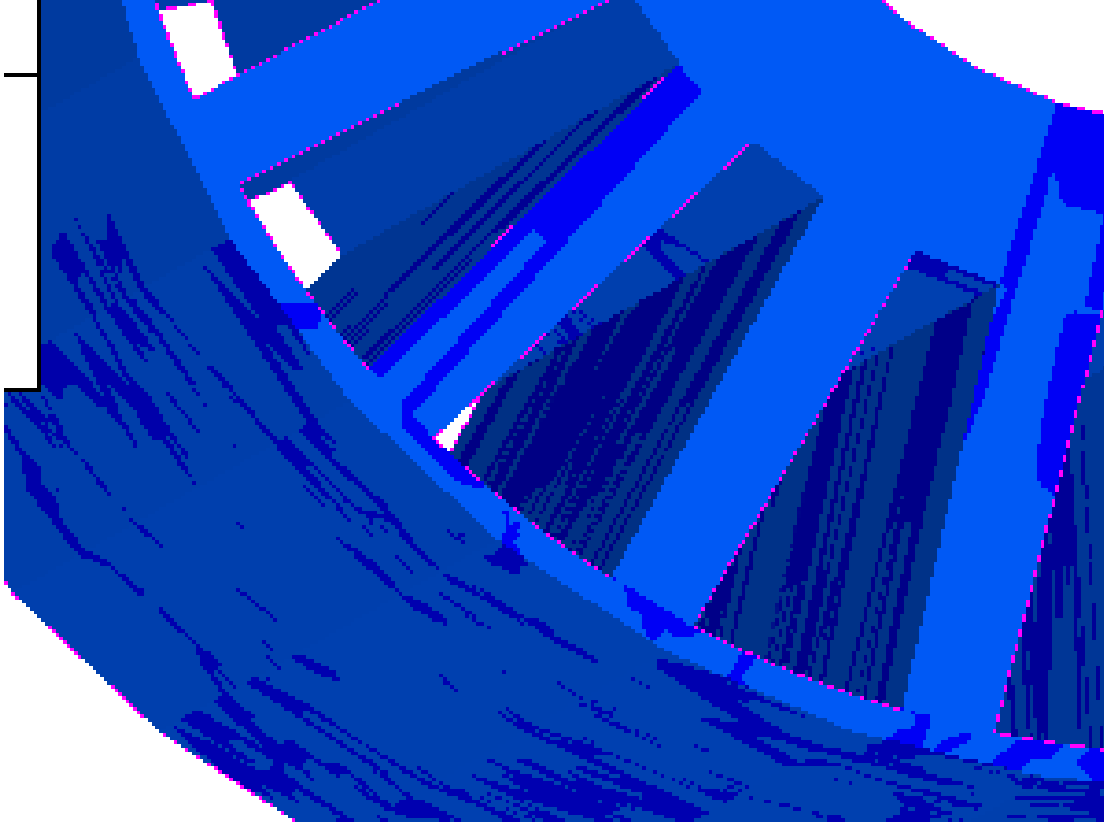
Şekil 4.28.6 Bobinli Asenkron Motorun Statorundaki Akı Yoğunluğu(B(T))



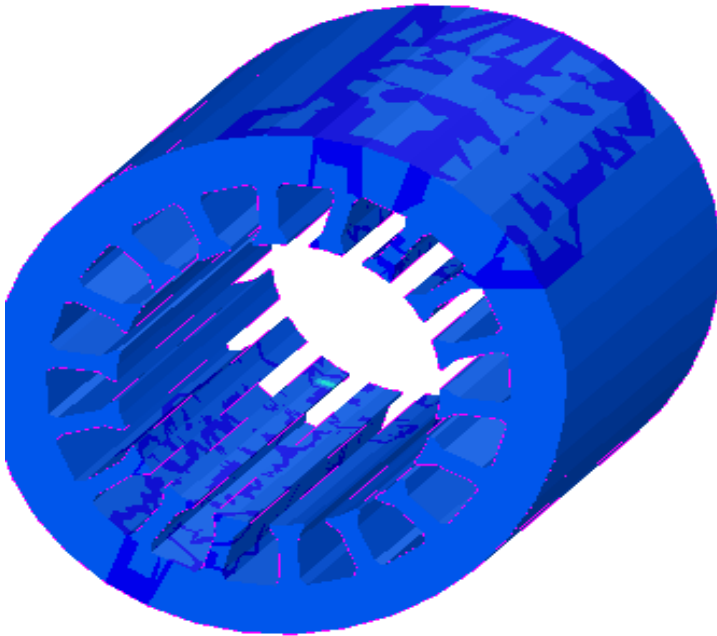
Şekil 4.29. 6 bobinli Asenkron Motorun Akı Yoğunluğu(B(T))'nun Yakından Görünümü



Şekil 4.30.6 bobinli Asenkron Motorun Rotorundaki Akı Yoğunluğu(B(T))



Şekil 4.31. 6 Bobinli Asenkron Motorun Rotorundaki Akım Yoğunluğu $J(A/m^2)$



Şekil 4.32.6 bobinli Asenkron Motorun Statorundaki Akım Yoğunluğu $J(A/m^2)$

5. SONUÇLAR

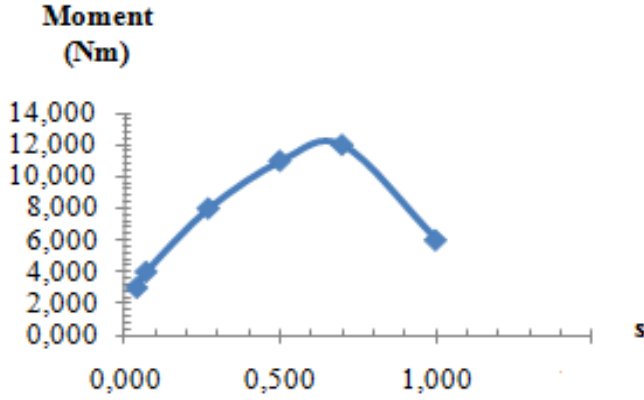
Sonlu elemanlar yöntemiyle çalışabilmek için öncelikle çözüm bölgesinin uygun bir şekilde bölmelenmesi gerekir. Çözüm ağı üretmek konusunda yazılmış binlerce makale, tez vb. yayın mevcuttur ve her geçen gün artmaktadır. Bu konuda amatörece olduğu gibi profesyonelce de ilerleme, daha iyiye ulaşma amaçlanmaktadır. Paket program üreticileri de bu konuya özel bir alaka göstermek zorunda kalmaktadırlar. En kısa sürede en uygun çözüm ağını üretme konusunda çalışmalar yapılmakta, yeni yöntemler keşfedilmeye çalışılmaktadır.

Manyetik sistemlerin tasarımı ve analizinde bilgisayar destekli çözümler vazgeçilmez bir yöntemdir. Maxwell 3D alan simülatörü alan çözümü için kullanılan doğru, etkin, hızlı ve esnek bir programdır. Maxwell 3D gibi sonlu eleman paket yazılımları araştırmada, tasarımda ve analizde güçlü aletlerdir. Bilgisayar kullanılarak, fiziksel bir prototipin inşasına gerek kalmaksızın, çok farklı geometrilerin ve çalışma şartlarının analizi mümkündür. Çoğu durumlarda sayısal simülasyon geometri karmaşıklığı ve malzemenin doğrusalsızlığını gözetmeksizin, makinanın davranışı hakkında güvenilir ve doğru bilgiyi de vermektedir. Bu 3 boyutlu sonlu eleman metodunun elektrik makinalarının tasarımına uygulanması halkalama akısı, akım yoğunluğu, sargı endüktansları ve üretilen elektromanyetik tork ve eksenel kuvvet gibi önemli tasarım parametrelerinin çok yüksek bir doğrulukla belirlenmesine imkan tanır. 2 boyutlu ve analitik olarak yapılan çözümler yeterli doğrulukta çözümler yapamamaktadır. Özellikle geometrinin değiştiği modellerde veya doğrusal olmayan durumlarda, manyetik doymanın, uç sargı alanları ve saçaklanmanın etkili olduğu tasarımlarda 3 boyutlu çözüm daha doğru tahminler vermektedir [30]. Bu nedenle Maxwell ve benzeri 3boyutlu simülatörler ile manyetik analizler yapmak daha elverişlidir. Özellikle model geometrisi üzerinde 3 boyutlu görsel sonuçlar, analiz çalışmasında sistemle ilgili daha doğru ve etkili yorum yapılmasını sağlamaktadır. Bu nedenle manyetik sistem tasarımcısı için Maxwell 3D kullanımı çok önemli bir beceridir. Bu çalışmada sadece statik manyetik çalışma durumuna göre uygulanabilecek çözüm süreçleri verilmiştir. Bunun yanı sıra aynı programla elektrostatik, eddy akımı, termal ve stres analizleri de yapılabilmektedir.

Bu çalışmada yapılan analizler sonucunda motorun 2820 d/dk hızla çalıştığı durumda hesaplanan moment değerleri aşağıda verilmiştir. Bu çalışma için tasarlanmış ve imal edilmiş asenkron motorun (6A,380V) deneysel çalışmaları sonucu elde edilen moment değeri 7.45 Nm dir.

$S=0.27$ iken ; Moment=0.834Nm (2 bobinlide hesaplanan Moment)

$S=0.5$ iken; Moment=3Nm (6 bobinlide hesaplanan Moment)



Şekil 5.1. 18 bobinli Motor Momentinin Kaymaya Göre Değişimi

Bu analiz sonucunda asenkron motorumuz çizilmiş, küçük dörtyüzlü elemanlara ayrılmıştır. Asenkron Motorun stator kısmı, rotor kısmı, bobinler, ayrı ayrı bölmelendirilmiş halleri gösterilmiştir. Manyetik akım yoğunlukları ve manyetik akı yoğunlukları kısımların değerleri hesaplanmış ve şekil üzerinde gösterilmiştir. Yaptığımız çalışmada simetri durumuna göre motorun 9 da 1' i ele alınmış olduğundan hesaplanan moment değeri 9 ile çarpılmıştır ($9*0.834$). Bu durumda momentin 7.5 Nm olduğu görülmüştür. Aradaki yaklaşık %0.05'lik hata miktarı da sonlu elemanlar yönteminde kullanılan modellerde yapılan ihmallere, deneysel çalışmada kullanılan ölçme cihazı hatalarından vb. kaynaklanmaktadır. Kayma değeri arttıkça momentin arttığıda görülmüştür. Böylece motorun analizi sağlanmıştır.

Sonuç olarak sonlu elemanlar yöntemini kullanarak asenkron motor tasarımının iyi neticeler vereceği elde edilen sonuçlardan anlaşılmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] **ÖKSÜZTEPE, E.**, 2008, “ Sinüzoidal Akı Dağılımı Olmayan Sabit Mıknatıslı Senkron Motorun Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Analizi Ve Sensörsüz Kontrolü”, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi, Elazığ.
- [2] **Chari, M.V.K., Silvester, P.**, 1970, “Finite Element Solution of Saturable Magnetic Field Problems”, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol pas-89, No:7 (1642-1650)
- [3] **Selçuk, A. H.**, 2003, “Lineer Asenkron Motorlarda Uç Etkilerinin Sonlu Elemanlar Yöntemiyle İncelenmesi”, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi, Elazığ.
- [4] **Silvester, P., Cabayan, H.S., Browne, B.T.**, 1973, “Efficient Techniques For Finite Element Analysis Of Electric Machines”, IEEE PES Winter Meeting, New York.
- [5] **Freeman, E. M., Lawther, D. A.**, 1973, “ Normal Force In Single Sided Linear Induction Motors”, Proc. Iee, Vol.120, No.12, Dec
- [6] **Chari, M.V.K.**, 1973, “Finite Element Solution Of The Eddy Current Problem In Magnetic Structures” IEEE PES Summer Meeting And EHV/UHV Conference, Vancouver, B.C. Canada.
- [7] **Demirchian, K. S., Chechurin, V., Sarma, M. S.**, 1976, “Scalar Potential Concept For Calculating The Steady Magnetic Fields And Eddy Currents”, IEEE Trans. On Mag., Vol. MAG-12, No.6 Nov.
- [8] **Hanalla, A. Y., Macdonald, D. C.**, 1976, “Numerical Analysis Of Transient Field Problems In Electrical Machines”, Proc. IEE, Vol.123, No.9, Sept.

- [9] **Zienkiewicz, O. C., Lyness, J., Owen, D. R. J.**, 1977, “Three Dimensional Magnetic Field Determination Using A Scalar Potential –A Finite Element Solution”, IEEE Trans. On Mag., Vol. MAG-13, No.5, Sept.
- [10] **Williamson, S., Ralph, J. W.**, 1982, “Finite Element Analysis For Nonlinear Magnetic Field Problems With Complex Current Sources”, IEE Proc.Vol.129 Pt.A.No. 6 August.
- [11] **Preston, T. W., Reece, A. B. J.**, 1982, “Solution Of 3 Dimensional Eddy Current Problems: T-Omega Method”, IEEE Trans. On Mag., Vol. MAG-18, No.2, March.
- [12] **Brauer, J. R.**, 1982, “Finite Element Calculation Of Eddy Currents And Skin Effects”, IEEE Trans. On Mag., Vol. MAG-18, No.2, March.
- [13] **Gieras, J.F., Dawson, G.E., Eastham, A.R.**, 1987, “A New Longitudinal End Effect Factor For Linear Induction Motors”, IEEE Transactions On Energy Conversion, Vol.Ec-2, No.1, March.
- [14] **Deshmukh, N. K., Mukherji, C.**, 1987, “Finite Element Analysis Of Three Dimensional Eddy Currents In Attractive Electromagnetic Levitation”, IEE Proc., Vol. 134, Pt. A., No.8, Sept.
- [15] **ÖKSÜZTEPE, E.**, 2003, “Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Bir Lineer Motorun Manyetik Alan Dağılımı”, Doktora Semineri, Fırat Üniversitesi, Elazığ.
- [16] **Türkbay, H.**, 1997, “Asenkron Motorların Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Analizi Ve Tasarımı”, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi, Elazığ.
- [17] **Yetgin, A. G. Ve Çanakoğlu, A. İ.**, 2005, “Sonlu Elemanlar Yöntemini Kullanarak Asenkron Motorun Hız-Moment Karakteristiğinin Elde Edilmesi”, Fırat Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, 17, 4 , 699-707.

- [18] **Kürüm, H.**, 1990, “Çift Yanlı Lineer Asenkron Motorların Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Analizi”, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi, Elazığ.
- [19] **Polat, M.**, 2005, “Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Analizin Nesnel Tabanlı Bir Programlama Dili İle Gerçekleştirilmesi ve Bir Transformatörün Manyetik Büyüklüklerinin Hesabı”, Doktora Semineri, Fırat Üniversitesi, Elazığ.
- [20] **Demerdash, N.A.**, 1982, Solution of eddy current problems using three dimensional finite element complex magnetic vector potential. IEEE Transactions On Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-101, No.11 November 1982.
- [21] **Güldemir, H., Kürüm, H., Akpınar, S.**, “Üç Boyutlu Sonlu Elemanlar Yöntemi Kullanarak Bir Transformatörün Manyetik Alan Dağılımının İncelenmesi.” Elektrik Müh. 5. Ulusal Kongresi.
- [22] **Omaç, Z.**, 1994, “ Relüktans Motorlarda Manyetik Alan Dağılımının İncelenmesi”, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi, Elazığ.
- [23] **Imal E.**,1993, “Suspension and Propulsion Forces On ThinPlate Secondaries of Linear Reluctance Motors”, D. Phil. Thesis, University of Sussex, U.K.
- [24] **Arkkio A.**, “Finite Element Analysis of Cage Induction Motors Fed by Static Frequency Converters”, IEEE Transactions on Magnetics, Vol.26, No.2, March,pp.551-553
- [25] **Salon S.J., Bhatia S., Burow D.W.**, “The Convergence of Flux in the Air Gap of Induction Motors”, IEEE Transactions on Magnetics, Vol.32, No.5, September, pp.4284-4286
- [26] **Fenercioğlu, A.**, Helisel Yapılı Anahtarlamalı Relüktans Motorun (HY-ARM) Tasarımı ve Analizi, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi F.B.E., 2006.
- [27] **Gürdal, O.**, Elektrik Makinalarının Tasarımı, s. 201-240, İstanbul, Atlas Yayın Dağıtım, 2001.

- [28] Ansoft Corporation, Maxwell 3D Technical Notes,USA, Ansoft, 656–718, 2002.
- [29] Ansoft Corporation, Getting Started: A 3D Magnetic Force Problem,USA, 2002.
- [30] **Jianning, J.**, The Finite Element Method in Electromagnetics, New York, John Wiley&Sons Inc., 1993.
- [31] **Uzunoğlu M., Kızıl A., Onar Ö.**, 2003, “ Her Yönu ile MATLAB”, Türkmen Kitapevi, İstanbul.

ÖZGEÇMİŞ

Sevcan AYTAÇ KORKMAZ

e-posta: saytac@firat.edu.tr

- 1985 :Elazığ'da doğdu.
- 1999-2002 :Gazi Lisesini Bitirdi.
- 2002-2006 :Fırat Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü' nden mezun oldu.
- 2007 :Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisansına başladı.
- 2007 :Fırat Üniversitesi Maden Meslek Yüksek Okulunda Elektronik Teknolojileri Bölümünde Okutman olarak görev yapmaktadır.