

**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

**TÜRDEŞ OLMAYAN LEVHALAR SİSTEMİ İÇİN SÜREKSİZ
KATSAYILI BİHARMONİK PROBLEMLERİN SONLU FARK
YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ**

VİLDAN YAZICI

KOCAELİ 2017

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

TÜRDEŞ OLMAYAN LEVHALAR SİSTEMİ İÇİN SÜREKSİZ
KATSAYILI BİHARMONİK PROBLEMLERİN SONLU FARK
YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

VİLDAN YAZICI

Prof. Dr. Zahir MURADOĞLU
Danışman, Kocaeli Üniversitesi
Prof. Dr. Serdal PAMUK
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniversitesi
Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR
Jüri Üyesi, Sakarya Üniversitesi
Doç. Dr. Şevket GÜR
Jüri Üyesi, Sakarya Üniversitesi
Yrd. Doç. Dr. Ali Fuat YENİÇERİOĞLU
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniversitesi


.....

.....

.....

.....

.....

Tezin Savunulduğu Tarih: 26.12.2017

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Uygulama alanlarına bağılı olarak fiziksel ve mekanik özellikleri diğerleri ile kıyaslandığında daha kaliteli, dayanıklı, hafif ve uzun ömürlü yeni malzemelerin üretilmesi mühendisliğin ve fiziğin güncel problemlerinden biridir. Hızlı şekilde gelişen sayısal mekanik yöntemleri makine, inşaat, malzeme, uzay bilimleri, tıp, jeoloji ve jeofizik problemlerinin bilgisayar çözümlerini elde etme imkânı vermektedir. Bilgisayar deneylerinin, karayolları, savunma sanayi, otomotiv ve inşaat sektörü, tıbbi malzemeler gibi hayatın farklı alanlarında gereksinim duyulan farklı mekanik özellikleri olan yeni malzeme üretimi problemlerine büyük katkısı bulunmaktadır. Böyle problemlerin çözümü için yeni matematiksel modeller geliştirilmektedir. Bu çalışmada, dördüncü mertebeden süresiz katsayılı kısmi türevli diferansiyel denklemler (biharmonik denklem) için sınır değer problemleri ile ifade edilen, türdeş olmayan farklı özellikli esnek levhaların oluşturduğu sistemin eğilmesi probleminin sayısal analizi yapılmıştır.

Yapılan bu çalışma elasto-plastik levhaların eğilmesi probleminin matematiksel modeline karşılık gelen lineer olmayan biharmonik denklemler için ters katsayı problemlerinin sayısal çözümünün bulunmasına katkı sağlayacaktır.

Beni bu konuya yönlendiren ve bana her konuda yardımını esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Zahir MURADOĞLU' na teşekkürü bir borç bilirim.

Tez çalışması süresince önerileri ile çalışmama katkıda bulunan Sayın Prof.Dr. Serdal PAMUK, Prof.Dr. Emine CAN ve Yrd.Doç.Dr. Ali Fuat YENİÇERİOĞLU'na, aynı zamanda doktora tez çalışmalarım süresince desteğini esirgemeyen hayat arkadaşım Cüneyt YAZICI'ya, varlığı ile verdiği huzurdan dolayı oğlum Ulaş YAZICI'ya, benim için hiçbir fedakârlıktan kaçınmadan beni bu yaşa getiren ve başarımın temel taşı olan AİLEME, özellikle, belki de doktor ünvanı almamı en çok isteyen bir tanecik Rahmetli BABAM Mehmet BOYUKTAŞ'a, teşekkürü bir borç bilirim.

Aralık-2017

Vildan YAZICI

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	iv
TABLolar DİZİNİ	viii
SİMGELER DİZİNİ.....	x
ÖZET.....	xi
ABSTRACT.....	xii
GİRİŞ	1
1. TARİHÇE	3
1.1. Deformasyon Teorisinin Tarihi	3
1.2. Levhanın Deformasyon Probleminin Tarihi.....	6
2. GENEL KAVRAMLAR.....	10
2.1. Sert Cisim Mekaniğinin Genel Kavramları.....	10
2.2. Tensörler.....	20
2.2.1. Deformasyon tensörü	20
2.2.2. Gerilme tensörü	21
2.3. Denge Denklemi.....	23
2.4. Hooke Kanunu.....	23
2.5. Düzlem Deformasyon.....	30
2.6. Mil ve Çubuk Denklemi	32
3. ELASTİK LEVHANIN EĞİLMESİ İLE İLGİLİ PROBLEM.....	37
3.1. Düzlem Deformasyon Denkleminden Levhanın Denge Denklemine Elde Edilmesi	37
3.2. Klasik Levha Teorisi (Kirchhoff Teorisi) ve Kayma Deformasyon Teorisi (Reissner-Mindlin Teorisi).....	40
3.3. Levhanın Eğilmesi Problemi İçin Sınır Koşulları	46
3.4. Levhanın Denge Denklemi İçin Sınır Koşullarının Fiziksel Yorumu.....	53
4. DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN DENKLEMLER İÇİN UYUM KOŞULLARI	60
4.1. Bir Boyutlu Halde Dördüncü Mertebeden Diferansiyel Denklemler İçin Uyum Koşulları.....	60
4.2. Biharmonik Diferansiyel Denklem İçin Uyum Koşulları	65
5. SONLU FARKLAR.....	83
5.1. Genel Kavramlar	83
5.2. Bir Boyutlu Miller Sisteminin Denge Denklemine Sonlu Fark Yaklaşımı	87
5.2.1. Miller sistemi için uyum koşullarının sonlu fark yaklaşımı.....	96
5.3. Levhalar Sisteminin Denge Denklemine Sonlu Fark Yaklaşımı	105
5.3.1. Levhalar sistemi için uyum koşullarının eşit adımlı kafeste sonlu fark yaklaşımı	122
6. LEVHALAR SİSTEMİNİN EĞİLMESİ PROBLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜNÜN TEST EDİLMESİ.....	140

6.1. Levhalar Sistemi İçin Sınırlarında Basit Dayanak Koşulu Verildiğinde Sayısal Çözümünün Test Fonksiyonu ile İncelenmesi.....	140
6.2. Biharmonik Denklem İçin Sınırlarında Sert Kenetlenme Koşulu Verildiğinde Sayısal Çözümünün Test Fonksiyonu ile İncelenmesi.....	145
7. DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN DENKLEMLER İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ	150
7.1. Bir Boyutlu Durumda Farklı Özellikli Millerin Oluşturduğu Sistemin Eğilmesi Probleminin Sayısal Çözümü.....	150
7.1.1. Sınırlarında sert kenetlenme koşulu verildiğinde farklı uyum koşullarında miller sisteminin eğilmesi problemi	150
7.2. Levhalar Sistemi İçin Farklı Sınır Koşullarında Sayısal Çözümünün İncelenmesi.....	157
7.2.1. Ortak sınırında uyum koşullarının fark denklemlerinin katsayıları	157
7.2.2. Sert kenetlenme ve basit dayanak sınır koşulu verildiği durumda farklı uyum koşullarında levhalar sisteminin eğilmesi problemi	161
7.3. Sınırlarında Farklı Sınır Koşulları Verilmiş Üç Levhadan Oluşan Sistemin Eğilmesi Probleminin Sayısal Çözümü.....	177
8. FARKLI SINIR KOŞULLARINDA BAŞLANGIÇ VERİLERİNDEN YARARLANILARAK LEVHALARIN ÖZELLİKLERİNİN BULUNMASI	188
8.1. Ek Koşulardan Yararlanarak E-Elastisite Modülünün Bulunması.....	188
8.2. Sert Kenetlenme Sınır Koşulları Verilmiş Üç Levhadan Oluşan Sistemin Eğilmesi Probleminde Başlangıç Verilerinden Yararlanılarak Levhaların Boyutlarının Bulunması.....	195
9. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	204
KAYNAKLAR	206
KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER	211
ÖZGEÇMİŞ	213

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1.	Gerilme türleri	12
Şekil 2.2.	Kesme gerinimi	12
Şekil 2.3.	Elastik bir malzemedeki gerilme ve gerinim ilişkisi	14
Şekil 2.4.	Elastik cisimde atomlar arasındaki yer değiştirmeler için model	15
Şekil 2.5.	Elastik şekil değiştirmede atomların, (a) herhangi bir kuvvet uygulanmadan önceki ilk durum, (b) çekme kuvveti uygulandığında oluşan gerilme durumu, (c) basma kuvveti uygulandığındaki gerilme durumu ve (d) uygulanan kuvvet kaldırıldıktan sonra elde edilen gerilmesiz durum	16
Şekil 2.6.	Yükleme ve boşaltma-şekil değişimi ilişkisi (a) Elastik, (b) Lineer elastik ve (c) tam elastik şekil değiştirme	16
Şekil 2.7.	Elasto-plastik deformasyon durumunda yükleme ve boşaltma eğrisi	17
Şekil 2.8.	Çekme deneyinde oluşan uzama ve daralma.....	18
Şekil 2.9.	(a) İdeal plastik , (b) İdeal elasto plastik , (c)-(d) Lineer sert, (e) Sert plastik malzemeler için gerilme deformasyon eğrileri	19
Şekil 2.10.	Gerilme-deformasyon eğrisi [65]	19
Şekil 2.11.	Hacim elemanının yüzeylerinde gerilme tensörünün bileşenleri.....	22
Şekil 2.12.	Bir yüzeyinden duvara sabitlenerek yüklenmiş kiriş	33
Şekil 2.13.	Bir kesiti verilen kiriş	34
Şekil 3.1.	Kalınlığı h olan türdeş elastik levha	37
Şekil 3.2.	(a)-(b) Klasik Levha Teorisinin geometrisi.....	41
Şekil 4.1.	Levhalar sistemi	65
Şekil 5.1.	13 noktalı şebeke	121
Şekil 6.1.	$\bar{\Omega}$ dikdörtgen bölgesi.....	140
Şekil 6.2.	(a) $\omega(x_1, x_2) = -\sin\pi x_1 \sin\pi x_2$ fonksiyonunun grafiği, (b) $\omega_h(x_1, x_2)$ yaklaşık çözümün grafiği	141
Şekil 6.3.	Test probleminin çözümünün, (a) mutlak hatası, (b) bağıl hatası.....	142
Şekil 6.4.	(a) $\omega(x_1, x_2) = -\sin\pi x_1 \sin\pi x_2$ fonksiyonunun grafiği, (b) $\omega_h(x_1, x_2)$ yaklaşık çözümün grafiği	143
Şekil 6.5.	Test probleminin çözümünün mutlak hatası	143
Şekil 6.6.	Test probleminin çözümünün sırasıyla, (a) 21x21 (b) 31x31, (c) 41x41, (d) 51x51 boyutlu kafeslerdeki bağıl hata grafikleri.....	144
Şekil 6.7.	(a) $\omega(x_1, x_2) = -(1 - \cos 2\pi x_1)(1 - \cos 2\pi x_2)$ fonksiyonunun grafiği, (b) $\omega_h(x_1, x_2)$ yaklaşık çözümün grafiği.....	146
Şekil 6.8.	Test probleminin çözümünün, (a) mutlak hatası, (b) bağıl hatası.....	146
Şekil 6.9.	(a) $\omega(x_1, x_2) = -(1 - \cos 2\pi x_1)(1 - \cos 2\pi x_2)$ fonksiyonunun grafiği, (b) $\omega_h(x_1, x_2)$ yaklaşık çözümünün grafiği	147
Şekil 6.10.	Test probleminin çözümünün, (a) mutlak hatası, (b) bağıl hatası	148
Şekil 7.1.	$\alpha = \beta = 0$ durumu için eğilmeleri gösteren grafik	150

Şekil 7.2.	(a)-(c) $\alpha = \text{sabit}, \beta = 0$ olduğunda α 'nın aldığı farklı değerlerde eğilmelerdeki değişimleri gösteren grafikler.....	151
Şekil 7.3.	$\alpha = \infty, \beta = 0$ durumu için eğilmeleri gösteren grafik.....	152
Şekil 7.4.	(a)-(c) $\alpha = 0, \beta = \text{sabit}$ olduğunda β 'nın aldığı farklı değerlerde eğilmelerdeki değişimlerini gösteren grafikler	152
Şekil 7.5.	(a)-(f) $\alpha = \text{sabit}, \beta = \text{sabit}$ olduğunda α ve β 'nın aldığı farklı değerlerde eğilmelerdeki değişimleri gösteren grafikler.....	153
Şekil 7.6.	(a)-(c) $\alpha = \infty, \beta = \text{sabit}$ olduğunda β 'nın aldığı farklı değerlerde eğilmelerdeki değişimleri gösteren grafikler.....	155
Şekil 7.7.	$\alpha = 0, \beta = \infty$ durumu için eğilmeleri gösteren grafik.....	155
Şekil 7.8.	(a)-(c) $\alpha = \text{sabit}, \beta = \infty$ olduğunda α 'nın aldığı farklı değerlerde eğilmelerdeki değişimleri gösteren grafikler.....	156
Şekil 7.9.	$\alpha = \infty, \beta = \infty$ durumu için eğilmeleri gösteren grafik	157
Şekil 7.10.	$\alpha = \beta = 0$ durumu için, (a)-(c) eğilmeleri gösteren grafikler, (d) eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesiti	162
Şekil 7.11.	$\alpha = 0, \beta = 100$ olduğunda, (a)-(c) eğilmeleri gösteren grafikler, (d) eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesiti.....	163
Şekil 7.12.	$\alpha = 0, \beta = \infty$ olduğunda, (a)-(c) eğilmeleri gösteren grafikler, (d) eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesiti.....	164
Şekil 7.13.	$\alpha = \text{sabit}, \beta = 0$ durumunda, (a)-(c) eğilmeleri gösteren grafikler, (d) eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesiti.....	165
Şekil 7.14.	$\alpha = 100, \beta = 100$ olduğunda, (a)-(c) eğilmeleri gösteren grafikler, (d) eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesiti.....	165
Şekil 7.15.	$\alpha = 100, \beta = \infty$ olduğu durumda, (a)-(c) eğilmeleri gösteren grafikler, (d) eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesiti.....	166
Şekil 7.16.	$\alpha = \infty, \beta = 0$ olduğunda, (a)-(c) eğilmeleri gösteren grafikler, (d) eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesiti.....	167
Şekil 7.17.	$\alpha = \infty, \beta = 100$ olduğunda, (a)-(c) eğilmeleri gösteren grafikler, (d) eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesiti.....	168
Şekil 7.18.	$\alpha = \infty, \beta = \infty$ olduğunda, (a)-(c) eğilmeleri gösteren grafikler, (d) eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesiti.....	169
Şekil 7.19.	$\alpha = 0$ durumunda, (a)-(c) β 'nın aldığı farklı değerler için Poisson sabitindeki değişimin eğilmelere etkisini gösteren grafikler	174
Şekil 7.20.	$\alpha = 100$ durumunda, (a)-(c) β 'nın aldığı farklı değerler için Poisson sabitindeki değişimin eğilmelere etkisini gösteren grafikler	175
Şekil 7.21.	$\alpha = \infty$ durumunda, (a)-(c) β 'nın aldığı farklı değerler için Poisson sabitindeki değişimin eğilmelere etkisini gösteren grafikler	176
Şekil 7.22.	Ω bölgesini dolduran levhalar sistemi	177

Şekil 7.23. $\alpha = \infty, \beta = 0$ durumunda üç demir levhadan oluşan sistemin sınırlarında, (a) Sert kenetlenme koşulu, (b) Menteşe koşulu verildiğinde eğilmelerin grafikleri	178
Şekil 7.24. $\alpha = \infty, \beta = 0$ durumunda farklı sınır koşullarında üç demir levhadan oluşan sistemde elde edilen eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesitleri.....	178
Şekil 7.25. $\alpha = \infty, \beta = \infty$ durumu için üç demir levhadan oluşan sistemin sınırlarında, (a) Sert kenetlenme koşulu, (b) Menteşe koşulu verildiğinde eğilmelerin grafikleri	179
Şekil 7.26. $\alpha = \infty, \beta = \infty$ durumu için farklı sınır koşullarında üç demir levhadan oluşan sistemde elde edilen eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesitleri.....	180
Şekil 7.27. $\alpha = 0, \beta = \infty$ durumunda üç demir levhadan oluşan sistemin sınırlarında, (a) Sert kenetlenme koşulu, (b) Menteşe koşulu verildiğinde eğilmelerin grafikleri	180
Şekil 7.28. $\alpha = 0, \beta = \infty$ durumunda farklı sınır koşullarında üç demir levhadan oluşan sistemde elde edilen eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesitleri.....	181
Şekil 7.29. $\alpha = 0, \beta = 0$ durumu için üç demir levhadan oluşan sistemin sınırlarında, (a) Sert kenetlenme koşulu, (b) Menteşe koşulu verildiğinde eğilmelerin grafikleri	181
Şekil 7.30. $\alpha = 0, \beta = 0$ durumu için farklı sınır koşullarında üç demir levhadan oluşan sistemde elde edilen eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesitleri.....	182
Şekil 7.31. $\alpha = \infty, \beta = 0$ durumunda ortadaki levha bakır ve diğer iki levha demir olmak üzere oluşturulan sistemin sınırlarında, (a) Sert kenetlenme koşulu, (b) Menteşe koşulu verildiğinde eğilmelerin grafikleri.....	183
Şekil 7.32. $\alpha = \infty, \beta = 0$ durumunda farklı sınır koşullarında ortadaki levha bakır ve diğer iki levha demir olmak üzere oluşturulan sistemde elde edilen eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesitleri	183
Şekil 7.33. $\alpha = \infty, \beta = \infty$ durumu için ortadaki levha bakır ve diğer iki levha demir olmak üzere oluşturulan sistemin sınırlarında, (a) Sert kenetlenme koşulu, (b) Menteşe koşulu verildiğinde eğilmelerin grafikleri	184
Şekil 7.34. $\alpha = \infty, \beta = \infty$ durumu için farklı sınır koşullarında ortadaki levha bakır ve diğer iki levha demir olmak üzere oluşturulan sistemde elde edilen eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesitleri	185
Şekil 7.35. $\alpha = 0, \beta = \infty$ durumunda ortadaki levha bakır ve diğer iki levha demir olmak üzere oluşturulan sistemin sınırlarında, (a) Sert kenetlenme koşulu, (b) Menteşe koşulu verildiğinde eğilmelerin grafikleri.....	185

Şekil 7.36. $\alpha = 0, \beta = \infty$ durumunda farklı sınır koşullarında ortadaki levha bakır ve diğer iki levha demir olmak üzere oluşturulan sistemde elde edilen eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesitleri	186
Şekil 7.37. $\alpha = 0, \beta = 0$ durumu için ortadaki levha bakır ve diğer iki levha demir olmak üzere oluşturulan sistemin sınırlarında (a) Sert kenetlenme koşulu (b) Menteşe koşulu verildiğinde eğilmelerin grafikleri	186
Şekil 7.38. $\alpha = 0, \beta = 0$ durumu için farklı sınır koşullarında ortadaki levha bakır ve diğer iki levha demir olmak üzere oluşturulan sistemde elde edilen eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesitleri	187
Şekil 8.1. $\bar{\Omega}$ kare bölgesini dolduran levhalar sistemi.....	191
Şekil 8.2. $\alpha = 0, \beta = 100$ olduğunda, (a) $c_0 = 2$ [cm], (b) $c_1 = 6$ [cm], (c) $c_8 = 3,3438$ [cm] için sistemdeki eğilmeler	200
Şekil 8.3. $\alpha = 0, \beta = 100$ olduğunda, (a) $c_0 = 2$ [cm], (b) $c_1 = 6$ [cm], (c) $c_9 = 3,3282$ [cm] için sistemdeki eğilmeler.....	202

TABLolar DİZİNİ

Tablo 6.1.	Sınırlarında basit dayanak sınır koşulu verildiğinde farklı kafeslerde test probleminin çözümünde oluşan maksimum mutlak ve bağıl hatalar.....	171
Tablo 6.2.	Sınırlarında basit dayanak sınır koşulu verilen levhalar sisteminde farklı kafesler için test probleminin çözümünde oluşan maksimum eğilme, maksimum mutlak ve bağıl hatalar.....	171
Tablo 6.3.	Sınırlarında sert kenetlenme koşulu verildiğinde farklı kafeslerde test probleminin çözümünde oluşan maksimum mutlak ve bağıl hatalar.....	171
Tablo 6.4.	Sınırlarında sert kenetlenme koşulu verilen levhalar sisteminde farklı kafesler için Test probleminin çözümünde oluşan maksimum eğilme, maksimum mutlak ve bağıl hatalar	171
Tablo 6.5.	Farklı kafesler için Test probleminin çözümünde bağıl hataların maksimum olduğu noktadaki ω fonksiyonunun değeri, ω_h yaklaşık değeri, mutlak ve bağıl hata değerleri.....	171
Tablo 7.1.	Dört kenarında sert kenetlenme koşulu verilen levhalar sisteminde α ve β 'nın değişimine göre oluşan maksimum eğilmelerde E Elastisite modülünün etkisi	171
Tablo 7.2.	İki kenarında sert kenetlenme koşulunun verildiği ve diğer iki kenarın serbest bırakıldığı durumda verilen levhalar sisteminde α ve β 'nın değişimine göre oluşan maksimum eğilmelerde E Elastisite modülünün etkisi	171
Tablo 7.3.	Dört kenarında menteşe koşulu verilen levhalar sisteminde α ve β 'nın değişimine göre oluşan maksimum eğilmelerde E Elastisite modülünün etkisi.....	172
Tablo 7.4.	Dört kenarında sert kenetlenme koşulu verilen levhalar sisteminde α ve β 'nın değişimine göre oluşan maksimum eğilmelerde v^+ Poisson sabitindeki değişimin etkisi.....	172
Tablo 7.5.	Dört kenarında sert kenetlenme koşulu verilen levhalar sisteminde α ve β 'nın değişimine göre oluşan maksimum eğilmelerde v^- Poisson sabitindeki değişimin etkisi.....	172
Tablo 8.1.	Üç demir levhanın yan yana koyulmasıyla oluşan sitemin sınırlarında sert kenetlenme koşulu verildiği durumda ikiye bölme yöntemiyle elde edilen çözüme karşılık aranan \tilde{E} değerleri	191
Tablo 8.2.	Üç demir levhanın yan yana koyulmasıyla oluşan sitemin sınırlarında sert kenetlenme koşulu verildiği durumda hızlandırma parametresi kullanılarak elde edilen ω_h çözümleri, bunlara karşılık aranan \tilde{E} değerleri.....	192

Tablo 8.3.	Üç demir levhanın yan yana koyulmasıyla oluşan sitemin sınırlarında sert kenetlenme koşulu verildiği durumda hızlandırma parametresi kullanılarak \tilde{E} değerleri için kullanılan iterasyonlar.....	192
Tablo 8.4.	Üç demir levhanın yan yana koyulmasıyla oluşan sitemin sınırlarında menteşe sınır koşulu verildiği durumda ikiye bölme yöntemiyle elde edilen çözüme karşılık aranan \tilde{E} değerleri	193
Tablo 8.5.	Üç demir levhanın yan yana koyulmasıyla oluşan sitemin sınırlarında menteşe sınır koşulu verildiği durumda hızlandırma parametresi kullanarak elde edilen ω_h çözümleri ve bunlara karşılık aranan \tilde{E} değerleri.....	193
Tablo 8.6.	İki kenarında demir ve ortasında bakır levha olacak şekilde üç levhanın yan yana konulmasıyla oluşan sistemin sınırlarında sert kenetlenme koşulu verildiği durumda hızlandırma parametresi kullanılarak elde edilen ω_h çözümleri ve bunlara karşılık aranan \tilde{E} değerleri.....	194
Tablo 8.7.	İki kenarında demir ve ortasında bakır levha olacak şekilde üç levhanın yan yana konulmasıyla oluşan sistemin sert kenetlenme koşulu verildiği durumda hızlandırma parametresi kullanılarak \tilde{E} değerleri için kullanılan iterasyonlar	194
Tablo 8.8.	İki kenarında demir ve ortasında bakır levha olacak şekilde üç levhanın yan yana konulmasıyla oluşan sistemin sert kenetlenme koşulu verildiği durumda hızlandırma parametresi kullanılarak hatalı verilen başlangıç verisinin sonuca etkisi	194
Tablo 8.9.	Sınırlarında sert kenetlenme koşulu verilen sisteminde ikiye bölme yöntemi kullanılarak elde edilen ω_h çözümleri, bunlara karşılık aranan c uzunluk değerleri	197
Tablo 8.10.	α ve β 'nın farklı değerleri için $E_1 = E_3 = 30000$ [kN/cm ²], $E_2 = 18100$ [kN/cm ²], $v_1 = v_3 = 0,27$, $v_2 = 0,36$ verilerinden yararlanarak ikiye bölme yöntemi kullanıldığında elde edilen ω_h çözümleri ve c boyutları	198
Tablo 8.11.	α ve β 'nın farklı değerleri için $E_1 = E_3 = 18100$ [kN/cm ²], $E_2 = 30000$ [kN/cm ²], $v_1 = v_3 = 0,36$, $v_2 = 0,27$ verilerinden yararlanarak ikiye bölme yöntemi kullanıldığında elde edilen ω_h çözümleri ve c boyutları.....	199
Tablo 8.12.	(a) durumu için $\delta_c = 0,5$ adımla $\varepsilon = 10^{-3}$ kesinliğiyle hızlandırma parametresinden yararlanılarak elde edilen sonuçlar	200
Tablo 8.13.	(a) durumu için $\delta_c = 0,5$ adımla $\varepsilon = 10^{-4}$ kesinliğiyle hızlandırma parametresinden yararlanılarak elde edilen sonuçlar	201

Tablo 8.14. (a) durumu için $\delta_c = 0,3$ adımla $\varepsilon = 10^{-4}$ kesinliğiyle hızlandırma parametresinden yararlanılarak elde edilen sonuçlar.....	205
Tablo 8.15. (b) durumu için $\delta_c = 0,5$ adımla $\varepsilon = 10^{-4}$ kesinliğiyle hızlandırma parametresinden yararlanılarak elde edilen sonuçlar.....	203
Tablo 8.16. (b) durumu için $\delta_c = 0,3$ adımla $\varepsilon = 10^{-4}$ kesinliğiyle hızlandırma parametresinden yararlanılarak elde edilen sonuçlar.....	203



SİMGELER DİZİNİ

M_{12}	: Burulma momenti, (Nm)
D_{kp}	: Burulma sertlik katsayısı
C, C^{\pm}, C_{φ}	: Burulma sertlik katsayıları
ε_{ij}	: Deformasyon/Genleme (Strain) tensörünün bileşenleri, (N/cm ²)
q	: Düzleme etkiyen kuvvet, (kN)
ω	: Eğilme fonksiyonu
M, M_i, M_i^{\pm}	: Eğilme momentleri, (Nm)
B, B^{\pm}, B_{φ}	: Eğilme sertlik katsayıları
$W, \overset{\circ}{W}, W^{\pm}$: Elastik deformasyon enerjileri, (J)
E, E_i, E_i^{\pm}	: Esneklik (Stiffness) modülü / Young modülü, (kN/cm ²)
ε_T, σ_T	: Esneklik ve deformasyon limitleri
σ_{ij}	: Gerilme (Stress) tensörünün bileşenleri, (kN/cm ²)
S_{ij}	: Gevşeklik matrisinin bileşenleri
G, G_{ij}	: Kayma modülü (Shear module)
τ	: Kesme/ Kayma gerilme (Shear stress)
γ, γ_{ij}	: Kesme/ Kayma gerinimi (Shear strain), (radyan)
Q, Q_i, Q_i^{\pm}	: Kesme/Kayma kuvvetleri
F	: Kuvvet, (kN)
λ, μ	: Lamé sabitleri
Δ	: Laplace operatörü
h, h_i	: Levhanın kalınlığı, (cm)
$I(\omega)$: Levhanın tam potansiyel enerjisi, (J)
ω_{max}	: Maksimal eğilme, (cm)
$\partial\vartheta/\partial n$: Normal yönünde türev
$n(n_1, n_2)$: Ω bölgesinin dış normali, (°)
$\Omega, \Omega_i, \bar{\Omega}$: $0x_1x_2$ düzleminde dikdörtgen bölgeler, (cm ²)
ν, ν_{ij}, ν^{\pm}	: Poisson katsayıları
c_{ij}	: Sertlik matrisinin bileşenleri
D, D_i, D^{\pm}	: Silindirik sertlik katsayıları
$\partial\vartheta/\partial\tau$: Teğet yönünde türev
l, l_{φ}	: Uzunluk, (cm)

TÜRDEŞ OLMAYAN LEVHALAR SİSTEMİ İÇİN SÜREKSİZ KATSAYILI BİHARMONİK PROBLEMLERİN SONLU FARK YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

ÖZET

Türdeş olmayan farklı özellikli esnek levhaların yan yana birleştirilmesi ile oluşmuş levhalar sisteminin eğilmesi ile ilgili problemlerin matematiksel modeli, dördüncü mertebeden süreksiz katsayılı kısmi türevli diferansiyel denklemler (biharmonik denklem) için sınır değer problemleri ile ifade edilmektedir. Bu çalışmada, farklı sınır koşulları ile verilen levhalar sisteminin dış kuvvetlerin etkisiyle eğilmesi probleminin sonlu fark denklemleri fonksiyonelin yaklaşımı yöntemiyle elde edilmiştir. Sistemi oluşturan levhaların ortak sınırında sürekliliğin sağlanması açısından uyum koşulları ve onların sonlu fark yaklaşımları eşit adımlı olmayan kafeste elde edilmiştir. Daha sonra başlangıç verileri olarak ele alınan kuvvet ve maksimal eğilme arasındaki ilişkiden yararlanarak, sistemi oluşturan levhaların E-Young modülü farklı iki yöntemle bulunmuştur. Başlangıç verilerinin bir deney sonucu verildiği ve her zaman hata içerdiği bilinmektedir. Bu nedenle başlangıç verileri belli yüzdelerle hatalarla verilerek, bu hataların sonuca etkisi analiz edilmiştir. Benzer algoritma ile bu verilerinden yararlanarak sistemi oluşturan levhaların boyutlarını bulmak için bir yöntem verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Biharmonik Denklem, Elastik Levha, Fonksiyonelin Yaklaşımı Yöntemi, Sonlu Fark Denklemi, Uyum Koşulu.

THE SOLUTION OF BIHARMONIC PROBLEMS WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENT USING THE FINITE DIFFERENCE METHOD FOR NON-HOMOGENEOUS PLATES SYSTEM

ABSTRACT

The mathematical model of bending problem for the plates system which is formed by placing side by side nonhomogeneous elastic plates with differing elastic properties is expressed by boundary value problems for the fourth order partial differential equations (biharmonic equation) with discontinuous coefficients. In this study, the finite difference equations of the bending problem for the plates system, under the effect of external forces, with different boundary conditions are obtained by using functional approximation method. To ensure continuity at the common borders of the plates the transmission conditions and their finite difference approximations are obtained on non-uniform mesh. By using the relation between the force affecting on the system and the maximum bending as initial data, the E-Young modules of the plates forming the system are found with two different methods. It is clear that the initial data are experimental results and always contains errors. For this reason, the effect of these errors is analyzed by giving the initial data with certain percentage errors. A method is given to find out the dimensions of the plates forming the system using these data with similar algorithm.

Keywords: Biharmonic Equation, Elastic Plate, Functional Approximation Method, Finite Difference Equation, Transmission Condition.

GİRİŞ

Levhalar sisteminin dış kuvvetlerin etkisi ile eğilmesi probleminin sayısal çözümünün bulunması, farklı özellikli levhalar için literatürde yaygın bir şekilde incelenmektedir. Bu inceleme temel olarak mühendislik, malzeme ve matematik bilimlerini ilgilendirmektedir. Ele alınan problem, fiziksel ve mekanik özellikleri bakımından daha kaliteli, dayanıklı, uzun ömürlü, hafif ve yenilenebilir yeni malzeme üretimi için son yıllarda mühendisliğin ve fiziğin güncel problemlerinden biridir.

Bu çalışmada farklı mekanik özelliklere sahip levhaların yan yana birleştirilmesiyle levhalar sistemi oluşturulduğu durum ele alındı. Sistemi oluşturan levhaların ortak sınırında sürekliliğin sağlanması için gerekli olan uyum koşulları ve bu koşullara karşılık sonlu fark denklemleri elde edildi. Elde edilen uyum koşulları da göz önüne alınarak farklı sınır koşullarında dış kuvvetin etkisiyle sistemin eğilmesi sayısal olarak incelendi. Bunun için hazırlanan algoritma ile Matlab’de yazılan programdan yararlanarak sayısal sonuçlar elde edildi.

Bölüm 1’de deformasyon teorisinin ve matematiksel modeli biharmonik denklem için sınır değer problemi ile verilen esnek levhanın deformasyon probleminin tarihi gelişimi literatür incelemesi yapılarak verildi.

Bölüm 2’de malzeme, tensör, gerilme, deformasyon, Hooke kanunu vb. gibi sert cisim mekaniği için temel oluşturan genel kavramlar tanımlandı. Daha sonra bu kavramlar yardımıyla düzlem deformasyon, mil ve çubuk denklemleri verildi.

Bölüm 3’te dış kuvvetlerin etkisiyle eğilmekte olan esnek levhanın denge denklemi, Klasik levha (Kirchhoff) teorisi kullanılarak düzlem deformasyon denkleminde elde edildi. Levhalar sisteminin eğilmesinin matematiksel modeli için bu problemde verilen sınır koşulları ve bu koşulların fiziksel olarak ne anlama geldiği verildi.

Bölüm 4’te, önce daha basit durum olan 1-boyutlu miller sistemi ele alındı. Farklı mekanik özelliklerdeki millerin oluşturduğu sistemdeki millerin ortak sınırında

sürekli olarak uyum koşulları elde edildi. Sonra, farklı mekanik özelliklere sahip levhaların yan yana birleştirilmesiyle oluşturulan levhalar sisteminde levhaların birlikte hareket edebilmesi için sistemi oluşturan levhaların ortak sınırında uyum koşulları elde edildi.

Bölüm 5'te sonlu farklar için temel kavramların tanımları verildi. Bu tanımlar yardımıyla mil ve levha için verilen denge denklemlerinin ve Bölüm 4'te elde edilen uyum koşullarının ayrı denklemleri (sonlu fark denklemleri) elde edildi.

Bölüm 6'da ele alınan levhalar sisteminin eğilmesi probleminin analizi için hazırlanan bilgisayar programını test etmek amacıyla sistemin sınırlarında sert kenetlenme (clamped) ve basit dayanak (simply supported) sınır koşulları verildiği durumlarda özel test fonksiyonları seçildi.

Bölüm 7'de dış kuvvetlerin etkisiyle hem bir boyutlu durum olan miller sistemi için hem de levhalar sistemi için sınırlarda farklı sınır koşulları verildiğinde sistemlerin eğilmesi probleminin çözümü, hazırlanan bilgisayar programı yardımıyla yapılan sayısal deneylerle analiz edildi.

Bölüm 8'de levhalar sisteminin eğilmesi probleminde, sistemin sınırlarında farklı sınır koşulu verildiğinde başlangıç verilerinden yararlanarak malzemelerin karakteristik özelliği olan E Elastisite modülünün bulunması için farklı iki algoritma verilmiş ve sayısal sonuçlar karşılaştırılmıştır. Daha sonra sınırlarında sert kenetlenme koşulu verilen (üç levhadan oluşan) sistemin eğilmesi ile ilgili sayısal çözümünün analizi için bilgisayar deneyleri yapıldı ve incelendi. Başlangıç verilerinden yararlanarak, sistemde istenilen eğilmeye karşılık ortadaki levhanın boyutlarının belirlenmesi için, ikiye bölme yöntemi ve hızlandırma parametresi kullanılmış ve yaklaşma hızları incelenmiştir.

1. TARİHÇE

1.1. Deformasyon Teorisinin Tarihi

Modern Elastisite teorisinin doğuşu Fransız mühendis H. Navier'in 1821 yılında elastik sert cisimlerin dengesi ve hareketi için sunduğu diferansiyel denklemlerle başladığı kabul edilir. Bu teori daha sonra A. L. Cauchy ve S. D. Poisson tarafından geliştirilmiştir. Aslında bu teorisinin gelişimi 17. yy ve 18. yy'da yapılan çalışmalarla başlar. Bu bilimsel çalışmalardan ilki 1638 yılında Galileo Galilei tarafından *Discorsi* (Söyleşiler) kitabında verilmiştir [1]. Bu kitapta gelecek yüzyıllardaki matematikçi ve fizikçilerin bu alandaki çalışmalarına ışık tutacak önemli notlar verilmiştir. Kirişlerin gerilmesi ve kırılması, içi boş silindirin kırılması ile ilgili on yedi öneride bulunulmuştur. Bu kitapta Galilei'nin anılarının arasında tartışılan önemli iki nokta vardır. Bunlardan biri günümüzde Galilei problemi olarak bilinen, yatay olarak duvara yerleştirilen bir kirişin kendi eksenini ile dikey bir kesit üzerindeki kırılma kuvvetini bulmak için uygulanan kuvvetin veya kendi ağırlığının oluşturduğu gerilmenin belirlenmesidir. İkinci problem ise, sert cisimlerin eşit direnç göstermesini keşfetmesidir. Bu keşif bilim dünyasında unutulmaz bir tartışmanın başlamasına yol açmıştır (P. Wurtz ve F. Blondel (*Galilaeus Promotus*, 1649; *Surla Resistance des Solides*, 1692), A. Marchetti (*De Restentia Solidorum*, 1669), V. Viviani (*Opere Galilei*, 1655) ve G. Grandi (*La Controversia Conto del Sig...*, 1712)). Aynı konuda yapılan araştırmaların ilginç bir açıklaması Grandi'nin "Extrait du rapport fait a la classe des sciences physiques et mathematiques de l'institut national des sciences" isimli çalışmasında bulunmaktadır [2]. Eşit dirençli sert cisimlerin problemi, matematiksel Elastisite teorisinin gelişmesiyle ilişkili olduğu için bütün teoriyi ürettiği söylenebilecek yatay bir kirişin bükülmesi problemidir.

Robert Hooke, yaptığı "De potentia restitutive, (1678)" çalışmasının yayınlanma tarihinden 18 yıl önce ilk kez yay teorisini bulmuştu. Ancak, uygulama üzerine yapacağı çalışma için patent alma konusunda endişeleri olduğundan o dönemde yayınlamayı ihmal etmişti. Gerilme ve genleme arasındaki lineer ilişki Hooke kanunuyla verildi [3]. Galilei probleminde kirişin tellerden oluştuğu varsayımı ile

Hooke kanununu uygulayan en eski araştırmacılardan biri Mariotte'dir. Yaptığı deneylerin sonuçlarını "Traite' du mouvement des eaux, (1686)" isimli çalışmasında yayınladı ve Galilei teorisinin yapılan deney sonuçları ile uyuşmadığını gösterdi. Kirişlerin içindeki tellerin bir kısmının kopmadan önce uzadığını, bir kısmının ise sıkıştığını belirtti. Bununla birlikte, tellerin yarısı sıkıştırıldığında uzamalarının da yarısı oranda olduğunu varsaydı.

Mariotte'nin deneylerinin yarattığı heyecan ile Alman matematikçi G. Leibniz bu alana girmiş oldu. G. Leibniz, Galilei ve Mariotte'nin hipotezlerini inceledi ve tellerin kopmadan önce her zaman uzadığını keşfetti. Bununla birlikte, tellerin dirençleri ile uzama miktarlarının orantılı olduğunu belirtti. İlk defa 1690 yılında G. Leibniz lineer olmayan Elastisite kuralını matematiksel olarak formüle etti. J. Bernoulli, bükülmüş elastik bir levhayı ele aldığı "Curvatura laminae elasticae, (1694)" isimli yayınında elastiklik teorisinin ilk orijinal matematiksel çalışmasını yaptı. Önce, cismin parçalarının sıkıştırılmasını ilk olarak kendisinin sunduğunu iddia ederken, önceki yazarların ise sadece cisimde oluşan uzama ile ilgilendiklerine dikkat çekti.

Musschenbroek yaptığı deneyler sonucunda, uzunluklarına paralel olan kuvvetlerle sıkıştırılan kirişlerin direncinin, uzunluklarının kareleri ile ters orantılı olduğunu keşfetti. Daha sonra bu çalışmanın teorisi Euler tarafından geliştirildi. Daniel Bernoulli ve Euler şu anda dahi kullanılan matematiksel denklemleri elde etti. Galilei, Mariotte, Leibniz, Bernoulli, Bulfinger ve Musschenbroek birbirinden bağımsız olarak yaptıkları deneylerle elde ettikleri sonuçların bir şekilde köprü ve çatı yapımında kullanılması gerektiğini önerdi. Mekanik sistemlerin hareket denklemlerinin elde edilme yöntemleri D'Alambert ve Lagrange zamanında genel şekilde incelendi.

1800'lü yıllardan önceki matematikçi ve fizikçilerin çalışmalarının genel sonucu olarak şu söylenebilir: elastik sert bir cismin hareket ya da dengesi için genel denklemler oluşturmak henüz denenmemiştir. Bu problemlerden en önemlileri, James Bernoulli tarafından elastik tabakanın, Daniel Bernoulli ve Euler tarafından titreşen çubuğun, Lagrange ve Euler tarafından da yayların ve kolonların dengesinin ele alınmasıdır. Esnekliğin doğasıyla ilişkili yarı-metafizik bir hipotez Descartes

tarafından başlatıldı ve John Bernoulli ve Euler tarafından geliştirildi. Elastik sert cisimlerin titreşim hareketi Blanchet, Stokes ve Haughton tarafından değerlendirildi.

G. Lamé Rusya'daki demir köprülerin inşasında kullanılan demirin gücünü araştırmak ve test etmek için bir tür hidrolik test makinesi icat etti. Navier teorisini geliştiren G. Lamé ve P. E. Clapeyron bu teorisinin inşaat çalışmalarında uygulamalarını verdi. G. Lamé esneklik teorisi ile ilgili araştırmalarını 1852 yılında ilk kez "Leçons sur la Théorie Mathématique de L'élasticité des Corps Solides" isimli kitapta kaleme aldı.

1840-1850 yılları arasındaki bilimsel çalışmalar yalnızca fiziki ve teknik açıdan değil, aynı zamanda teori açısından da dikkat çekiciydi. Teknik açıdan teorisinin gelişiminde artık sadece asma köprüler değil demir yoluna olan ihtiyaçtan ötürü demir üzerine sayısız deneyler yapıldı. Stokes, Willis ve Cox tarafından esneklik problemlerinin araştırılması, teknik ihtiyaçlardan dolayı doğrudan üretilen teorisinin dikkat çekici bir örneğiydi.

Sanayinin gelişmesiyle sert cisimlerin özelliklerinin incelenmesi için bilimsel laboratuvarları kuruldu. Bu dönemde Brewster, Neumann ve Maxwell'in araştırmalarını takiben esneklik teorisi için uçsuz bucaksız yeni bir alan açtılar. Bu ise, deforme olan sert cisimlerin uygulama alanı yelpazesinin daha da genişlemesini sağladı. Bu alandaki gelişmeler iki yönde devam etti. Bir taraftan Lamé tarafından temeli atılan ve H. Navier tarafından kurulan esneklik teorisinin matematiksel modelleri, diğer taraftan da Bernoulli ve Euler tarafından geliştirilen yöntemlerden yola çıkılarak malzeme üretimi ve özellikleri ile ilgili basitleştirilmiş Sert Cisimlerin Mukavemeti teorisi geliştirildi.

XX yüzyılın başlarında yeni uygulama alanlarının ortaya çıkması ile yeni yöntemler geliştirilmeye başlandı. 1950 yıllarından başlayarak sayısal çözüm yöntemleri çok hızlı olarak gelişmektedir. Sert cismin uzay kinematığının matris yaklaşımı ile ilgili sayısal mekaniğin temelleri ilk kez 1955 yılında Denavit J. ve Hartenberg R.S. tarafından atıldı [4]. Bu yaklaşımı ise, ilk kez Uicker J.J. kendi araştırmalarında dinamiğe uyguladı [5]. Hızlı şekilde gelişen sayısal mekanik yöntemlerinin uzay aracı üretim alanlarına 1965 [6], biyomekaniğe uygulamaları 1970 yılında verildi [7].

Son yıllarda gerçek olaylara karşılık gelen matematiksel modellerin çözümü için, bilgisayar deneylerinin yapılabilmesi gereksinimi iyi matematiksel modellerin ve sayısal çözüm yöntemlerinin geliştirilmesi ile sonuçlandı.

Isı transferi, sıvıların akışkanlığı, elektrostatik ve sert cisimler mekaniği gibi bilim ve tekniğin önemli problemlerinin matematiksel modelleri, diferansiyel veya kısmi türevli diferansiyel denklemler için sınır değer problemi ile verilir. Sert cisimler mekaniğinde her hangi bir cismin deformasyon problemi için ele alınan diferansiyel denklem cismin denge denklemdir. Sınır koşulları ise kuvvet, yer değişme, moment veya bunların lineer bileşimleri şeklinde verilir.

Biharmonik denklem için sınır değer probleminin çözümü, literatürde genel olarak Sonlu Elemanlar yöntemi uygulanarak incelenmiştir. Bu tezde ise, bu tür matematiksel modellerden biri olan türdeş olmayan farklı özellikli elastik levhaların oluşturduğu sistemin dış kuvvetlerin etkisiyle eğilmesi ile ilgili problem ve onun sayısal çözümü incelendi.

1.2. Levhanın Deformasyon Probleminin Tarihi

Elastik levhanın eğilmesi probleminin incelenmesine teorik olarak ilk adım, levhayı karşılıklı dik miller sistemi olarak ele aldığı araştırmalarıyla 1767 yılında L. Euler tarafından atılmıştır. Daha sonra 1789 yılında J. Bernoulli, levhayı dik açılarla birbiri ile kesişen çubuklar sistemi gibi ele almış, çubuğun eğilmesi ile ilgili o zamana kadar belli olan çalışmaların sonuçlarına dayanarak incelemiş ve salınım (titreşim) denklemini (hatalı olarak) elde etmiştir [8]. E. Chladni, 1802 yılında, levhanın eğilmesi problemini deneysel olarak ilk kez inceleyen bilim adamı olmuştur. Fransız matematikçi S. Germain, işlemler belli hatalar içerse de, ilk defa levhanın eğilmesi için bir diferansiyel denklem elde etmiştir. Bu alanda eleştirmen olan J. Lagrange 1813 yılında, hatalı olan terimleri düzelterek tam anlamıyla genel bir levha denklemini ileri süren ilk bilim adamı olmuştur. Dikdörtgen levhanın sınırlarında menteşe koşulu verildiği zaman eğilme problemi ilk kez 1820 yılında C. L. Navier tarafından çözülmüştür. Daha sonraki 20 yıl içinde A. Cauchy ve S. Poisson esneklik teorisinin genel denklemlerinden yararlanarak, levhanın kalınlığını küçük parametre olarak ele almış ve levhanın eğilme problemini matematiksel olarak formüle etmişlerdir. 1829 yılında Poisson, statik yük altındaki bir levhanın eğilme problemi

için Germain-Lagrange denklemini başarıyla geliştirmiştir. D sertlik fonksiyonu olmak üzere genel levhanın denge denklemi levhanın kalınlığını da ele alan Navier tarafından verilmiştir.

Bugün bile levhanın eğilme teorisinde yaygın olarak kabul edilen Kirchhoff ince levha teorisi, 1850 yılında Kirchhoff tarafından tez olarak yayınlandı. Kirchhoff' un diğer önemli katkısı ise, levhanın frekans denklemini keşfetmesi ve levha problemlerinin çözümlerindeki gerçek yer değişimleri tanımlamasıdır. Daha sonra Kirchhoff teorisi Saint-Venant tarafından geliştirilmiştir.

1899 yılında M. Lewis iki paralel kenarında menteşe koşulu, diğer kenarlarında ise, her hangi koşul verilen levhalar için seri çözümü elde etmiştir [9].

19. yüzyılın sonlarında ve 20. yüzyılın başlarında gemi yapımında ahşap yerine yapısal çelik kullanılmaya başlanması çeşitli levha teorilerinin geliştirilmesinde büyük katkı sağladı. Rus bilim adamları kendi çalışmaları ile deniz araçları mimarisine önemli bir katkı yaptılar. Özellikle, Krylov ve onun öğrencisi Bubnov, bükülgenlik ve genişleme sertliği konusu ile ince levha teorisine geniş ölçüde katkıda bulunmuştur [10,11]. Bubnov levhanın bükülme teorisinin temelini oluşturdu ve modern levha sınıflandırmasını tanımlayan ilk kişi oldu. Bubnov, elastikliğin diferansiyel denkleminin entegrasyonunun yeni bir metodunu önerdi ve çeşitli özelliklerdeki levhalar için maksimum eğilme ve maksimum bükülme momentlerinin tablolarını belirledi. Daha sonra Galerkin bu yöntemi geliştirdi ve levha bükülme analizine uyguladı [12].

Timoshenko teoriye ve levha bükülme analizinin uygulamalarına büyük eğilmeleri ve elastik denge problemlerini dikkate alan dairesel levhaların çözümlerinin yer aldığı çalışmalarıyla önemli katkılarda bulundu [13,14]. Timoshenko ve Woinowsky-Krieger, çeşitli levha bükülme problemlerinin derin analizleri ile belirtilen elemanter bir monografi [15] yayınladı. Levhanın bükülme teorisi alanındaki kapsamlı çalışmalar ve çeşitli uygulamalar Hencky, Huber, Von Karman, Nadai gibi seçkin bilim adamları tarafından tamamlandı [16-20]. Anizotropik levhaların genel teorisinin temelleri Gehring ve Boussinesq tarafından geliştirildi [21,22]. Lekhnitskii anizotropik lineer ve lineer olmayan levha analizlerinin uygulamalarına önemli bir

katkıda bulundu [23]. Levhaların eğilmesinin lineer olmayan problemlerinin çözümü Volmir ve Panov tarafından incelenmiştir [24,25].

Varyasyonel problemin sonsuz cebirsel denklemler sistemi elde edilerek, yaklaşık çözüm yöntemi 1904 yılında B. Ritz tarafından verilmiştir, daha sonra ise G. Genki ve I. G. Bubnov tarafından geliştirilmiştir. Sert kenetlenme durumunda daha genel yaklaşım ile çözüm yöntemleri S. P. Timoshenko tarafından 1938 yılında verilmiştir. Çeşitli kuvvetlerin etkisiyle farklı şekillerdeki ince levhalar için lineer ve lineer olmayan burulma problemlerinin kapsamlı analizleri S.P. Timoshenko ve Gere, Gerard ve Becker , Volmir, Cox vb tarafından sunulmuştur [26-29].

İkinci Dünya Savaşı'ndan sonraki yıllarda esneklik teorisinin araştırmaları, mühendisliğin ilgilendiği özel problemler için analitik çözümlerin bulunması problemi haline geldi. 1970 yılından başlayarak levhanın deformasyon teorisinin problemlerinin bilgisayarların yardımıyla yaklaşık olarak çözülmesi yönünde geniş araştırmalar yapıldı. Sonlu farklar yönteminin yanı sıra sonlu elemanlar ve sınır elemanı teorisini kullanan nümerik yöntemler üzerinde önemli çalışmalar yapıldı [30,31]. Elasto-plastik türdeş ve türdeş olmayan levhaların eğilmesi ile ilgili düz veya ters problemlerin farklı yaklaşımlarla elde edilen sayısal çözümleri literatürde birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir [32–41]. Samarskii ve Andreev levhaların eğilmesi probleminin uyum koşullarının sonlu farklar yaklaşımlarını elde etme tekniğini vermişlerdir [42,43]. Ayrıca levhaların eğilme problemleri Sonlu Farklar ve Sonlu Elemanlar Yöntemleri kullanılarak birçok bilim adamı tarafından incelendi [44-46].

Genel olarak literatür incelendiğinde farklı özellikli levhaların oluşturduğu kompozit malzemelerin dış kuvvetlerin etkisi ile eğilmesi probleminin incelendiği görülür. Reddy birinci dereceden Kayma Deformasyon Teorisini kullanarak anizotropik kompozit levhaların eğilmesi için sonlu elemanlar çözümünü geliştirmiştir [47]. Dirichlet ve Neumann başlangıç sınır koşullarıyla verilen termo-elastik levhaların eğilmesi problemini zamana bağlı sınır integral denklemleriyle çözmüştür [48]. Cho ve arkadaşları ince elastik levhaların sayısal analizi için Reissner- Mindlin levha teorisinin doğal eleman yaklaşımı sunmuştur [49]. Kvasov ve Steinberg, Reissner levha teorisine dayanan mikropolar levha eğilme teorisini sonlu elemanlar

kullanılarak geliştirmiştir [50]. Nimbolkar ve Jain ise bu teoriyi elastik ve kompozit levhaların silindirik eğilmesinde kullanmıştır [51]. Shaat, doğal sınır koşullarına sahip Kirchhoff levhaların eğilmesi problemi için tekrarlamalı bir model kullanmıştır [52]. Badriev ve arkadaşları kompozit malzemelerin eğilme problemini yaklaşık yontemler içeren ve lineer olmayan kabuk teorisi ile çalışmıştır [53]. Anssi ve arkadaşları Sonlu Elemanlar yontemini kullanarak elastik dairesel levhanın eğilmesi problemini incelemişlerdir [54]. Pavan ve Rao, kullandıkları yontemle Reissner-Mindlin levha teorisine göre kompozit levhaların eğilme analizi yapmıştır [55]. Lisboa ve Marczak, anizotropik ince levhaların lineer eğilme problemlerini ozmek için yeni bir metodoloji geliştirmişlerdir [56]. Atashipour ve arkadaşları, Reissner-Mindlin ve Reddy kayma deformasyon levha teorilerinden yararlanarak Levy tipi sınır koşullarına sahip simetrik katmanlı ortotropik levhaların statik eğilmesini incelemişlerdir [57]. Ayrıca literatürde, Sınır Elemanları Yontemi, Optimal Dizayn, Galerkin Yontemi, Varyasyonel İterasyon Yontemi ve En Küçük Kareler Yontemi kullanılarak levhaların eğilme problemi incelenmiştir [58-62].

Bu tezde, literatürde yer almayan farklı mekanik özelliklere sahip levhaların yan yana birleştirilmesiyle levhalar sistemi oluşturulduğu durum ele alındı.

2. GENEL KAVRAMLAR

2.1. Sert Cisim Mekanikinin Genel Kavramları

Malzeme kavramı için farklı tanımlar bulunmaktadır. İnsanoğlunun kullandığı veya işlediği, imal edip tüketiciye sunduğu her maddeye malzeme denir. Bu tanımlamalardan yola çıkarak taşın tek başına bir malzeme olmadığını, ancak beton yapımı için çimento ile birlikte kullanıldığında malzeme olduğunu söyleyebiliriz. Bir diğer örnek olarak, deri bir malzeme değildir, fakat işlenip ayakkabı yapımında kullanıldığında bir malzemedir.

Malzemelerin başarılı bir şekilde kullanılabilmesi için malzemenin yapısıyla ilgili olan ve termal, optik, mekanik, fiziksel, kimyasal ve nükleer olarak sınıflandırılan malzemelerin özelliklerinin bilinmesi gerekir. Örneğin, metaller ve alaşımlar genel olarak fiziksel, mekanik, kimyasal ve teknolojik özellikleri ile karakterize edilmektedir. Malzemenin fiziksel özellikleri yoğunluk, parlaklık, erime sıcaklığı, ısı ve elektrik geçirgenliği, manyetik özellikler vb. ile verilir. Kimyasal özellikler olarak kimyasal içerik, dış ortama karşı koruma özellikleri vb. verilebilir. Teknolojik özellikler ise, üretim koşulları ve yöntemleri vb. ile karakterize edilmektedir. Son zamanlarda üretilen biometaller de, farklı özelliklerle birlikte yukarıdaki özellikleri de sağlamaktadır.

Dış kuvvetlerin etkisiyle malzemede meydana gelen şekil değişimleri ve malzemenin uygulanan kuvvete karşı koyduğu iç direnç, malzemelerin mekanik özellikleri ile ilgilidir. Mekanik özelliklere cismin sertlik, esneklik, plastiklik, kırılma, devamlılık, yorulma mukavemeti gibi özellikleri aittir [63,64]. Uygulama alanlarına bağlı olarak fiziksel ve mekanik özellikleri diğerleri ile kıyaslandığında daha kaliteli, dayanıklı, hafif, uzun ömürlü ve geri dönüştürülebilir yeni malzemelerin üretilmesi çok önemli mühendislik problemi gibi ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle üretilmek istenilen herhangi bir şeyin üretiminin daha sağlıklı bir şekilde yapılabilmesi için kullanılan malzemenin tüm özelliklerinin bilinmesi ve bu doğrultuda deneyler yaparak elde edilen verilerin incelenmesi zorunluluğu doğar.

Fakat bu işlemler ve deneyler ekonomik olarak çok pahalı olduğundan daha az masrafla bilgisayar deneyleri yaparak yeni malzeme üretimini sağlamak mümkündür. Böyle problemlerin çözümü için yeni matematiksel modeller geliştirilmektedir.

Malzemelerin mekanik davranışları için ilk olarak gerilme (stress) ve gerinim (strain) kavramlarını verelim.

Gerilme (Stress): Dış kuvvetin etkisiyle malzemenin herhangi bir kesitinde tepki olarak iç kuvvetler oluşur. Malzemenin kesitinde doğan ve birim alana isabet eden bu karşı koymaya gerilme denir. Bir cisim üzerine etki eden kuvvetler çekme, basma ve kesme olmak üzere üç farklı türde gerilme ortaya çıkarır. Bunlar,

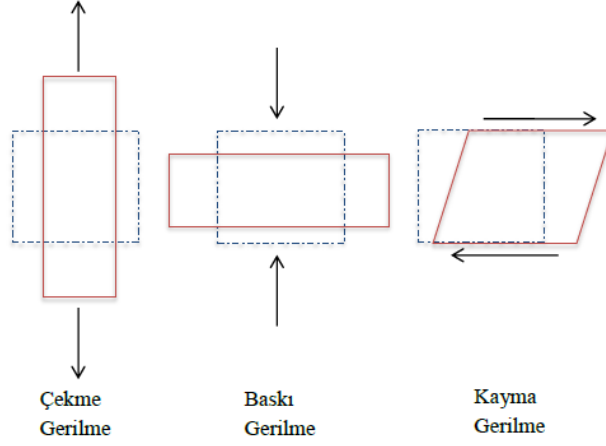
1. Çekme gerilme (Tensile stress): Malzemeye yüzey alanına dik yönde olacak şekilde uygulanan kuvvetin yönünde, malzemenin uzamasıyla oluşan gerilmedir. İşareti pozitifdir (+).

2. Baskı gerilmesi (Compressive stress): Malzemeyi sıkıştıracak şekilde malzemenin yüzey alanına dik yönde uygulanan kuvvet sonucu ortaya çıkan gerilmedir. İşareti negatiftir (-).

Çekme ve basma gerilmeleri malzemenin yüzeyine dik etki ettiklerinden bu gerilmelere normal gerilmeler (σ) denir.

3. Kesme gerilmesi (Shear stress): Malzemenin yüzeyine paralel, normaline dik açıyla etki eden kuvvetin meydana getirdiği gerilme kesme (kayma) gerilmesidir. Kayma gerilme τ ile gösterilir. Gerilme türleri Şekil 2.1'deki gibi gösterilebilir.

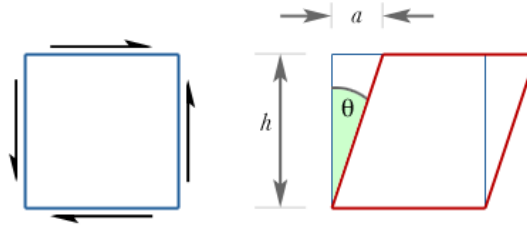
Kayma gerilmelerinin etkisinde oluşan deformasyon normal gerilmelerin etkisinde oluşan deformasyondan farklıdır. Normal gerilmeler malzemenin biçiminde değişikliğe neden olmazken, kayma deformasyon değişikliğe neden olur.



Şekil 2.1. Gerilme türleri

Gerinim (Strain): Cisme uygulanan bir kuvvetten dolayı cismin şeklinde oluşan değışime gerinim (deformasyon) denir. Örneğın, deformasyon, noktalardan oluşan bir cisimde kuvvet uygulandıktan sonra oluşan şekil değışimini sonrasında bu noktaların başlangıçtaki yerlerini ne kadar değıştirdiklerinin matematiksel gösterimidir.

Gerilmeye benzer şekilde, gerinim, uygulanan kuvvet ile aynı yönde oluşuyorsa normal gerinim olarak adlandırılır. Eğer malzeme üzerine Şekil 2.2’de olduğı gibi malzemede açısal bir şekil değışimine neden olacak şekilde bir kesme (kayma) kuvveti etkilyorsa, oluşan bu şekil değışimine kesme gerinimi (shear strain) denir.



Şekil 2.2. Kesme gerinimi

Düzlemler arasındaki açı θ , yer değışimi a ve düzlemler arası mesafe h olarak alınırsa, bu durumda kesme gerinimi,

$$\gamma = \frac{a}{h} = \tan(\theta) \quad (2.1)$$

(2.1) ifadesi ile verilir.

Dış kuvvetlerin etkisi ile malzemeler kendilerini elastik veya plastik cisim gibi göstermektedir. Uygulanan kuvvet kaldırıldığında cisimde orijinal uzunluğuna esnemiş gibi geri dönebilir şekilde geçici, ya da bükülme veya kırılma gibi geri dönülemez şekilde kalıcı deformasyon olabilir.

Elastiklik: Cisimlerin dış etki sonucunda değişmiş olduğu hacim ve boyutlarının etki kaldırıldıktan sonra başlangıç durumuna geri dönme özelliğine elastiklik denir.

Elastik şekil değişiminin matematiksel kökeni, İngiliz bilim adamı Robert Hooke'un yaylarla yaptığı deneylere dayanır. Hooke yaptığı gözlemlerde, uzunlukları farklı olan ve bir ucu tavana sabitlenmiş yayların diğer uçlarına eşit miktarda ağırlık asıp, yaylarda oluşan uzama miktarını ölçer. Yaptığı deneyler sonucunda yayların uzunluklarının eşit yükler asıldığında aynı oranda uzadığını görür. Örneğin, bir ucundan tavana asılan l_1 ve l_2 uzunluğundaki yayların diğer uçlarına m ağırlığındaki yük asıldığında her iki yayın da ilk uzunluklarıyla kıyasla uzunluklarının %50 arttığı gözlemleniyor. Yayların ucuna asılan kuvveti F , yaylarda kuvvet sonucu oluşan uzama miktarını x ve aralarındaki orantıyı da k sabiti ile gösterirsek, Hooke'un yapmış olduğu bu gözlemin matematiksel olarak ifadesi,

$$F = k x \quad (2.2)$$

şeklindedir. Buradaki k sabiti yayın yapıldığı malzemeye ve yayın kalınlığına göre değişiklik gösterir. Yaylar üzerinde yapılan bu deneyi uzun ve silindirik geometriye sahip çubuklar için yapıldığında, çubuğun altına asılan ağırlık çubuğun yüzey alanına etki edeceği için, çubukta oluşan gerilme üzerinden değerlendirilebilir. Çubukta oluşan esneme miktarı çubuğun ilk uzunluğuna oranlanarak (gerinim olarak ifade edildiğinde) yukarıda verilen yay denkleminin gerilme-gerinim ile ilişkisi,

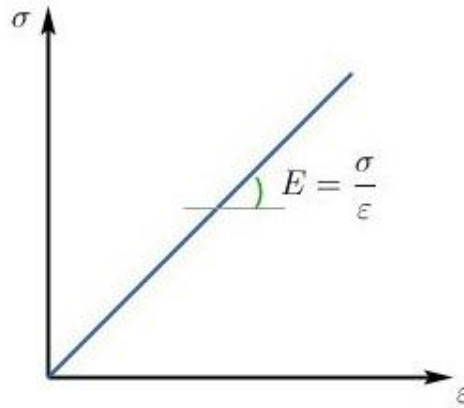
$$\sigma = E \varepsilon \quad (2.3)$$

şeklinde yazılabilir. Burada σ normal gerilme, E malzemenin Young modülü ve ε ise deformasyonu karakterize eder.

Elastik malzemelerde, gerilme-gerinim arasındaki doğrusal ilişkiye Hooke kanunu adı verilir. Bu malzemeler için normal gerilme ile deformasyon arasındaki oran E ile gösterilirse,

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\text{normal gerilme}}{\text{deformasyon}} \quad (2.4)$$

şeklinde olur (Şekil 2.3). Bu matematiksel ifadenin temellerini ilk olarak 1727'de İsviçreli matematikçi ve fizikçi Leonhard Euler oluşturmuştur. Daha sonra, bu ifade İngiliz bilim adamı Thomas Young tarafından bulunmuştur. Bu nedenle de E katsayısı Thomas Young'a ithafen Young modülü (Stiffness) veya elastiklik modülü olarak literatüre geçmiştir. Bu katsayı ilk kez İtalyan bilim adamı Giordano Riccati tarafından 1782'de yaptığı deneylerde kullanılmıştır.



Şekil 2.3. Elastik bir malzemedeki gerilme-gerinim ilişkisi

Malzemenin karakteristik bir özelliği olan Elastisite modülü, elastik bölgede malzemenin sertliğinin bir ölçüsüdür ve malzemedan malzemeye değişir. Malzemenin deformasyonlara karşı gösterdiği iç direncin ölçüsü de Elastik modülü ile karakterize edilebilir. Elastisite modülü malzemenin atomları arasındaki bağlar ile ilgili olduğundan, bu bağ enerjisi arttıkça Elastik modülü de artar. Elastik modüle yüksek olan bir malzemenin elastik olarak esnemesi zordur ve yüklenme altında boyutunu ve şeklini korur. Aksine Elastik modüle düşük olan bir malzemenin elastik olarak esnemesi daha kolaydır. Yani Elastik modülü ile elastik uzama oranı arasında ters bir orantı vardır.

Kayma Modülü (Shear module) : Bir kuvvet uygulanması sonucu malzemede oluşan gerilme ve deformasyon arasında bir orantı var ise, buradaki orantılılık sabiti

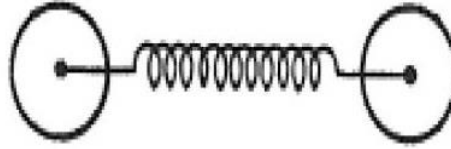
katsayısına kayma modülü denir ve G ile gösterilir. Yani, gerilme-kayma eğrisinin doğrusal parçasının eğimidir: $G = \tan(\alpha) = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{\text{kayma gerilme}}{\text{kayma gerinimi}}$.

Kayma modülü değerleri, genellikle Elastisite modülü değerlerinin %40'ı civarındadır. Normal gerilme ve deformasyon arasındaki ilişkiye benzer şekilde Kayma gerilme-kayma gerinimi arasında da doğrusal bir ilişki bulunur. Kayma gerilmesi altında elastik deformasyon,

$$\tau = G\gamma \quad (2.5)$$

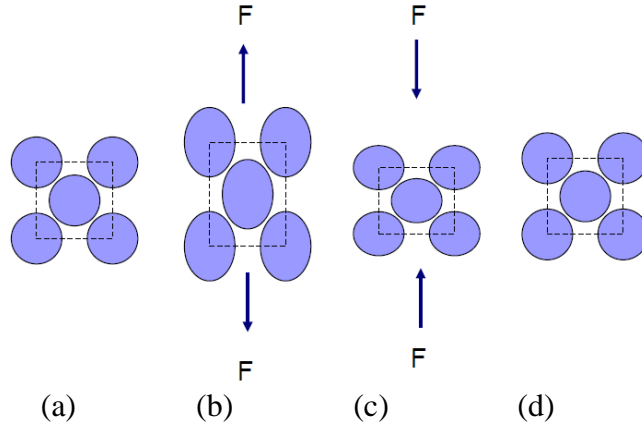
Hooke Kanunu ile geliştirilmiştir. Hooke kanunu Kısım 2.4'te verilecektir.

Kuvvet uygulandığında cismin içindeki noktacıkların arasındaki bağların bir yay gibi, birbirinden ayrılmadan sadece uzaklaştığı ve uygulanan kuvvet kaldırıldığında tekrar eski konumuna geldiği durum elastik şekil değişimi durumudur (Şekil 2.4).



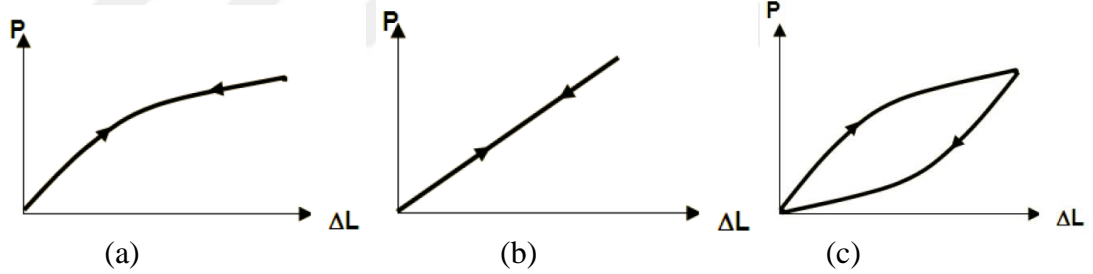
Şekil 2.4. Elastik cisimde atomlar arasındaki yer değiştirmeler için model

Elastik şekil değiştirmede malzemenin atomları arasındaki ilişkiler, sırasıyla herhangi bir kuvvet uygulanmadan önceki ilk durum, çekme kuvveti uygulandığında oluşan gerilme durumu, basma kuvveti uygulandığındaki gerilme durumu ve uygulanan kuvvet kaldırıldıktan sonra elde edilen gerilmesiz durum olmak üzere Şekil 2.5 (a)-(d)'de verildi.



Şekil 2.5. Elastik şekil değiştirmede atomların, (a) herhangi bir kuvvet uygulanmadan önceki ilk durum, (b) çekme kuvveti uygulandığında oluşan gerilme durumu, (c) basma kuvveti uygulandığında oluşan gerilme durumu ve (d) uygulanan kuvvet kaldırıldıktan sonra elde edilen gerilmesiz durum

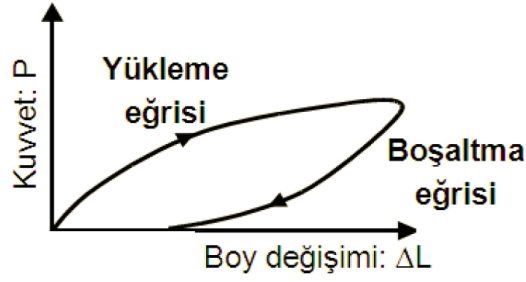
Her malzemenin deformasyonlara karşı koyması Elastisite modülü ile belirlenir. Yani, yükleme ve boşaltma-şekil değişimi ilişkisi arasında farklılık gözlenebilir.



Şekil 2.6. Yükleme ve boşaltma-şekil değişimi ilişkisi (a) Elastik, (b) Lineer elastik ve (c) tam elastik şekil değiştirme

Elastik şekil değiştirme grafiği malzemeye kuvvet uygulandığında (yükleme) ve uygulanan kuvvet kaldırıldığında (boşaltma) durumlar için çizilen eğrilerin çakıştığı durumdur (Şekil 2.6 (a)). Eğer çakışan bu eğriler doğrusal ise oluşan grafik lineer elastik şekil değiştirme durumudur (Şekil 2.6 (b)). Kuvvet uygulandığında oluşan eğrinin başlangıç noktası ile, kuvvet kaldırıldığında oluşan eğrinin bitiş noktası çakıştığında oluşan grafik Şekil 2.6 (c)'deki gibidir ve bu eğriler zamana bağlı değildir (Burada P kuvveti, ΔL ise boy değişimini göstermektedir.).

Plastiklik: Eğer dış kuvvetlerin etkisi sonlandırıldığında deformasyon tümüyle aradan kalkmıyor ise, bu deformasyon türüne plastik deformasyon denir.



Şekil 2.7. Elasto-plastik deformasyon durumunda yükleme ve boşaltma eğrisi

Elasto-plastik şekil değiştirme için Şekil 2.7’de yükleme ve boşaltma eğrilerinde yükleme eğrisinin başlangıcı ile boşaltma eğrisinin sonunun çakışmadığı görülür.

Kalıcı deformasyon alanındaki bir cisim, ilk olarak elastik deformasyon geçireceğinden kısmen ilk haline geri dönecektir, fakat tamamen geri dönüşümlü değildir.

Malzemeleri kendi aralarında karşılaştırmak için kullanılan en önemli özellik plastik şekil değiştirme özelliğidir. Bu nedenle malzemenin plastik şekil değiştirme özelliği ne kadar iyi bilinirse malzemenin şekillendirme işlemi o ölçüde sağlıklı yapılır.

Özetle, Plastik şekil değiştirmeyi, malzemeyi oluşturan atomların kuvvet uygulandığında kalıcı olarak başlangıçtaki yerlerinden uzaklaşıp, yeni yerlerine yerleşmesi olarak tanımlarsak, malzemede oluşan deformasyonu elastik ve plastik deformasyonların toplamı şeklinde söyleyebiliriz.

Malzemelerin elastik özelliklerini belirleyen diğer bir parametre de Poisson sabitidir.

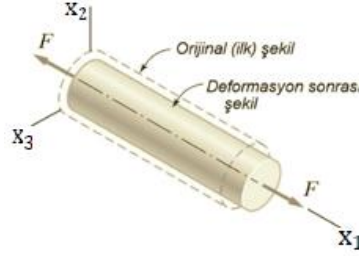
Poisson Oranı (Poisson ratio): Tek eksenli gerilme halinde yanal gerilmenin eksenel gerilmeye negatif oranı Poisson sabiti olarak adlandırılır.

Plastik deformasyonda malzemenin hacmi değişmezken elastik durumda hacimde değişim gözlemlenir. Örneğin, basma kuvveti uygulanan bir malzemede enine genişleme görülürken boyunda kısalma olur. Benzer şekilde çekme kuvveti uygulandığında da boyuna uzama görülürken eninde de daralma olduğu gözlemlenir. Aradaki bu oran, Poisson oranı ile belirlenir. Diğer bir deyişle, enlemesine birim

uzamanın boylamasına birim uzamaya oranıdır (Şekil 2.8) ve ν ile gösterilir:

$$\nu = -\frac{\text{yanal gerilme}}{\text{çekme / basma gerilmesi}}$$

Her malzemenin Poisson oranı sabittir ve değişmez. Bu nedenle Poisson oranına Poisson sabiti de denir.



Şekil 2.8. Çekme deneyinde oluşan uzama ve daralma

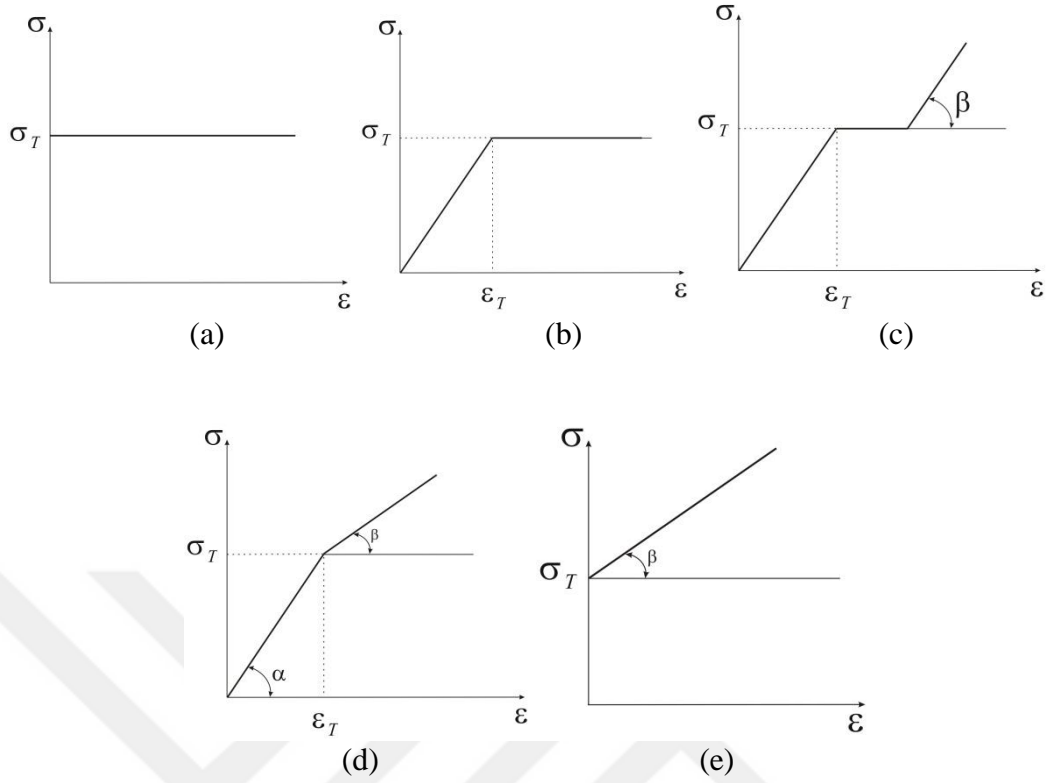
Elastik modülü ile kayma modülü arasındaki ilişki de Poisson sabiti ile verilir:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.6)$$

Herhangi bir malzemedeki bir nokta için deformasyon belli bir değere ulaştığında o noktada esneklik sonlanır ve artık plastik deformasyon başlar.

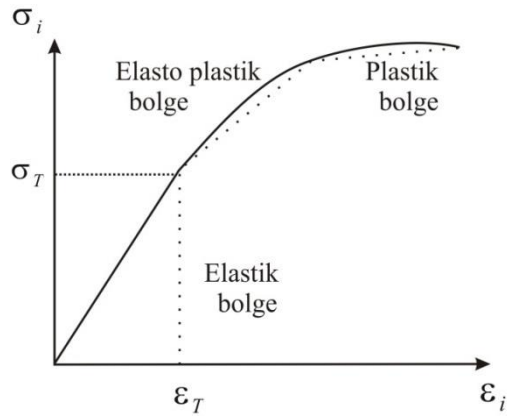
Esneklik Limiti: Elastik bölgenin son durumuna karşılık gelen ϵ_T değerine esneklik limiti denir. σ_T ise, ϵ_T esneklik limiti değerine karşılık gelen gerilmenin değerini göstermektedir.

Bazı özel malzemeler için gerilme-deformasyon grafikleri kısmi lineer fonksiyonlar ile gösterilmektedir. Farklı malzemeler için gerilme-deformasyon eğrileri Şekil 2.9 (a)-(e)'de gösterilmiştir.



Şekil 2.9. (a) İdeal plastik , (b) İdeal elasto-plastik , (c)-(d) Lineer sert, (e) Sert plastik malzemeler için gerilme deformasyon eğrileri

Sert cisimler için gerilme ve şekil değiştirme arasındaki ilişki Şekil 2.10'daki gibi gerilme-deformasyon eğrisi ile verilir.



Şekil 2.10. Gerilme-deformasyon eğrisi [65]

Sertlik: Deneyler yardımı ile belirlenebilen elasto-plastik deformasyon veya kırılma etkisi zamanı malzemenin kalıcı şekil değiştirmeye karşı gösterdiği dirence sertlik denir.

Dayanıklılık: Metallerin fiziksel, sıcaklık, manyetik, kimyasal vs. etkilere karşı dağılmadan (kırılmadan) uzun süre mukavemet göstermesine dayanıklılık denir.

Kırılma: Dış kuvvetin etkisiyle malzeme plastik deformasyona geçtikten sonra son olarak plastik deformasyon ile artan kuvvet belli bir noktaya yığılır ve cisimde oluşan çatlaklar sonucunda kırılma olur. Eğer yeterli kuvvet uygulanırsa, sonuçta tüm malzemeler kırılır.

2.2. Tensörler

Vektörler, hız, kuvvet, yer değiştirme vb. gibi birçok fiziksel niceliklerin tanımlanması için yaygın olarak kullanılır. Bununla birlikte, vektörler tüm fiziksel nicelikleri göstermek için tek başına yeterli değildir. Örneğin, gerilme, deformasyon ve gerilme-gerinim kuralları vektörlerle gösterilemez. Tensörler, özellikle vektörlerin yararlı bir genelleştirmesidir. Tsai kompozit malzeme analizi için yararlı olan tensör teorisinin tam işleyişini vermiştir [67].

Kartezyen koordinatlarda bir noktanın yerini tanımlamak için üç adet bağımsız nicelik gerekir. Üç boyutlu uzayda üç tane koordinat düzlemi olduğundan $x_i=(x_1,x_2,x_3)$, $i=1,2,3$ olmak üzere x_i nicelikler kümesini gösterir. n -boyutlu bir uzayda k -yüncü dereceden tensör için gerekli bileşen sayısı $N=n^k$ şeklindedir. Alt indislerdeki sembollerin sayısı tensörün derecesini gösterir. Örneğin, a skalerinin alt indisi olmadığı için sıfırıncı dereceden tensördür ($3^0 = 1$ bileşeni vardır). a_i bir tane alt indisi olduğundan a_i vektörü birinci dereceden tensördür ($3^1 = 3$ bileşeni vardır). a_{ij} de i ve j gibi 2 adet alt indisi olduğundan ikinci dereceden tensördür ($3^2 = 9$ bileşeni vardır) ve dört alt indisli a_{ijkl} dördüncü dereceden tensördür ($3^4 = 81$ bileşeni vardır), vb. [68].

2.2.1. Deformasyon tensörü

Cismin herhangi bir noktasında deformasyon durumu deformasyon tensörü ile verilmektedir. Ele alınan noktaya göre $u_i = (u_1, u_2, u_3)$ yer değişme vektörünün bileşenleri ile verilen,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.7)$$

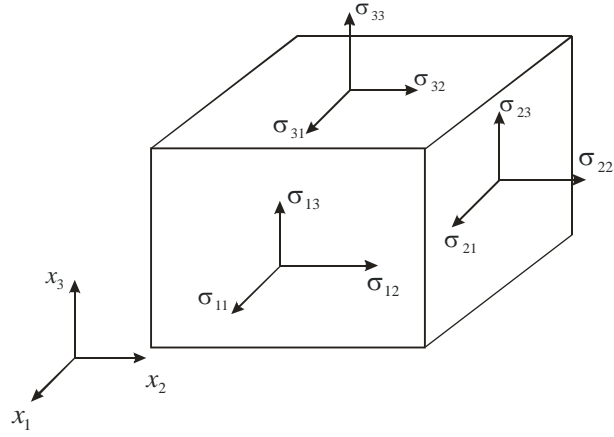
ifadeleri ile tanımlanan $\varepsilon_{ij}(x)$ fonksiyonları deformasyon tensörü bileşenleridir ve deformasyon tensörü matrisi,

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

şeklindedir. Bu bileşenler başlangıçta x_i koordinat eksenlerine paralel sonsuz küçük lineer elemanlar için deformasyonları göstermektedir. Burada $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ (indislerin aynı olduğu köşegen bileşenleri) normal deformasyon bileşenleridir ve sonsuz küçük lineer elemanların boyutlarının x_i koordinatlarına göre değişimini karakterize etmektedir. Normal deformasyonun işareti çekme durumunda pozitif, basma durumunda ise negatif olduğu varsayılmaktadır. İndislerin farklı olduğu $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}, \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}, \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$ bileşenleri ise yer değiştirme deformasyonudur.

2.2.2. Gerilme tensörü

Sert cismin içinde herhangi bir dikdörtgen prizma şeklinde ele alınan hacim elemanın yüzeyine, koordinat eksenlerine paralel veya dik olarak etkileyen kuvvetler gerilme tensörünün bileşenleri olarak tanımlanır (Şekil 2.11). Alt indislerdeki ilk indis gerilmenin yönünü, ikinci indis ise gerilmenin etki ettiği düzlemi gösterir. Örneğin σ_{23} , x_2 eksenine dik ve x_3 eksenine paralel olarak etkileyen kuvvet bileşenidir. Gerilme tensörünün bileşenlerinin alt indislerine bakarak gerilmenin normal veya kayma gerilmesi olduğunu söyleyebiliriz. Eğer alt indislerin işareti aynı ise gerilme normal, farklı ise kayma gerilmesidir. Normal gerilmeler çekme ve basma şeklinde olur ve gerilmenin işareti çekme durumunda pozitif, basma durumunda negatiftir.



Şekil 2.11. Hacim elemanın yüzeylerinde gerilme tensörünün bileşenleri [3]

Kartezyen koordinat sisteminde gerilmenin üçü normal, altısı kayma gerilmesi olmak üzere $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}$ gibi 9 bileşeni vardır. Bu bileşenler,

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Cauchy gerilme tensörünü oluşturur. Gerilme tensörünün bileşenleri cismin farklı noktalarında keyfi olarak verilemez ve gerilme tensörünün simetrikliği momentlerin denge koşulundan elde edilir:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (2.10)$$

Gerilme tensörünün sadece 6 bileşenin bağımsız olduğu, 1822 yılında O. Cauchy tarafından ispatlanmıştır.

x_i yönünde, cismin her bir yüzeyine etki eden gerilme değeri ile ilgili yüzeyin alanı çarpılıp tüm yüzeyler için elde edilen değerlerin toplamının sıfıra eşit olması o yöndeki kuvvetlerin dengesini gösterir. Yani gerilme elemanın dengede olması için ilgili yönde elemana etki eden kuvvetlerin bileşkesi sıfıra eşit olmalıdır.

2.3. Denge Denklemi

Sert cismin denge durumunda olması için gerilme tensörünün bileşenleri, momentlerin denge koşulundan (2.10) gerilme tensörünün simetrikliğini ve kuvvetlerin denge koşulundan ise,

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + F_1 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + F_2 = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + F_3 = 0$$

eşitliklerini sağlamalıdır. Burada F_i , $i = 1, 2, 3$ hacim kuvvetleridir. (2.11) ifadelerine denge denklemi denir.

Denge denklemi gerilme tensörünün 6 bağımsız bileşenini kullanarak sadece 3 denkleme verilmektedir.

2.4. Hooke Kanunu

Lineer Esnek Cisim: Eğer gerilme tensörünün her bir bileşeni deformasyon tensörünün bileşenlerinin lineer bileşimi olarak tanımlanabilir ise, bu durumda cisim lineer esnek cisim denir.

Gerilme ile deformasyon tensörlerinin bileşenleri arasındaki ilişki genelleşmiş Hooke kanunu ile verilmektedir:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 c_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.12)$$

Hooke kanunu, cismin boyutundaki küçük değişimler için basit mekanik esnemenin fiziksel özelliklerini tümüyle modellemektedir. (2.12) ifadesi ile verilen genelleşmiş Hooke kanunun matris gösterimi aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1123} & c_{1131} & c_{1112} & c_{1132} & c_{1113} & c_{1121} \\ c_{2211} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2223} & c_{2231} & c_{2212} & c_{2232} & c_{2213} & c_{2221} \\ c_{3311} & c_{3322} & c_{3333} & c_{3323} & c_{3331} & c_{3312} & c_{3332} & c_{3313} & c_{3321} \\ c_{2311} & c_{2322} & c_{2333} & c_{2323} & c_{2331} & c_{2312} & c_{2332} & c_{2313} & c_{2321} \\ c_{3111} & c_{3122} & c_{3133} & c_{3123} & c_{3131} & c_{3112} & c_{3132} & c_{3113} & c_{3121} \\ c_{1211} & c_{1222} & c_{1233} & c_{1223} & c_{1231} & c_{1212} & c_{1232} & c_{1213} & c_{1221} \\ c_{3211} & c_{3222} & c_{3233} & c_{3223} & c_{3231} & c_{3212} & c_{3232} & c_{3213} & c_{3221} \\ c_{1311} & c_{1322} & c_{1333} & c_{1323} & c_{1331} & c_{1312} & c_{1332} & c_{1313} & c_{1321} \\ c_{2111} & c_{2122} & c_{2133} & c_{2123} & c_{2131} & c_{2112} & c_{2132} & c_{2113} & c_{2121} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{32} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Dört indisli c_{ijkl} tensörü esneklik modülü tensörü olarak adlandırılır ve sertlik (Stiffness) matrisi $9 \times 9 = 81$ bağımsız katsayı içerir. Benzer şekilde sertlik (Stiffness) matrisinin tersi olarak bilinen gevşeklik (Compliance) matrisinin bileşenleri,

$$\epsilon_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 s_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.14)$$

gibidir. Burada dört indisli s_{ijkl} tensörü gevşeklik tensörü olarak adlandırılır ve (2.14) ifadesinin matris gösterimi aşağıdaki şekilde olur:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{32} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{1111} & s_{1122} & s_{1133} & s_{1123} & s_{1131} & s_{1112} & s_{1132} & s_{1113} & s_{1121} \\ s_{2211} & s_{2222} & s_{2233} & s_{2223} & s_{2231} & s_{2212} & s_{2232} & s_{2213} & s_{2221} \\ s_{3311} & s_{3322} & s_{3333} & s_{3323} & s_{3331} & s_{3312} & s_{3332} & s_{3313} & s_{3321} \\ s_{2311} & s_{2322} & s_{2333} & s_{2323} & s_{2331} & s_{2312} & s_{2332} & s_{2313} & s_{2321} \\ s_{3111} & s_{3122} & s_{3133} & s_{3123} & s_{3131} & s_{3112} & s_{3132} & s_{3113} & s_{3121} \\ s_{1211} & s_{1222} & s_{1233} & s_{1223} & s_{1231} & s_{1212} & s_{1232} & s_{1213} & s_{1221} \\ s_{3211} & s_{3222} & s_{3233} & s_{3223} & s_{3231} & s_{3212} & s_{3232} & s_{3213} & s_{3221} \\ s_{1311} & s_{1322} & s_{1333} & s_{1323} & s_{1331} & s_{1312} & s_{1332} & s_{1313} & s_{1321} \\ s_{2111} & s_{2122} & s_{2133} & s_{2123} & s_{2131} & s_{2112} & s_{2132} & s_{2113} & s_{2121} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Klasik esneklik teorisi genelleşmiş Hooke yasasına dayanmaktadır. Üç boyutlu lineer esnek cismin her bir noktasında gerilme tensörünün $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ altı bileşeni ile deformasyon tensörünün $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ altı bileşeni arasında lineer bir bağıntı vardır. Gerilme, deformasyon, sertlik ve gevşeklik tensörleri için mekanikte aşağıdaki gibi yaygın olarak kullanılan kısaltılmış notasyonlar kullanılır: $\sigma_{11} = \sigma_1, \sigma_{22} = \sigma_2,$

$$\sigma_{33} = \sigma_3, \sigma_{12} = \tau_{12}, \sigma_{23} = \tau_{23}, \sigma_{31} = \tau_{31}, \varepsilon_{11} = \varepsilon_1, \varepsilon_{22} = \varepsilon_2, \varepsilon_{33} = \varepsilon_3, \varepsilon_{12} = \gamma_{12}, \varepsilon_{23} = \gamma_{23}, \varepsilon_{31} = \gamma_{31}.$$

Bu durumda sertlik ve gevşeklik matrislerindeki bağımsız elastik malzeme sayısı $6 \times 6 = 36$ 'ya indirgenir. Böylece kısaltılmış notasyonlarla gerilme-deformasyon ve deformasyon-gerilme bağıntılarının matris gösterimleri aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} & s_{56} \\ s_{61} & s_{62} & s_{63} & s_{64} & s_{65} & s_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Sonuçta genel olarak simetriklik özelliği sağlanmaktadır: $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}$,

$$s_{ijkl} = s_{jikl} = s_{ijlk} = s_{klij}.$$

Simetriklik durumu da göz önüne alınırsa, 81 parametreden sadece 21 tanesi birbirinden farklı olur. Bu durumda yukarıdaki matris gösterimleri,

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ s_{15} & s_{25} & s_{35} & s_{45} & s_{55} & s_{56} \\ s_{16} & s_{26} & s_{36} & s_{46} & s_{56} & s_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

şeklini alır.

Genelleşmiş Hooke kanunu daha genel durumlarda farklı şekillerde ifade edilir. Eğer cisimler moleküler yapısına göre herhangi bir simetriye sahip ise, o halde farklı yönlerde aynı olmayan esneklik özelliği gösterir. Yani, mekanik yüklemelere karşı c_{ijkl} ve s_{ijkl} katsayıları cismin bir noktasından diğerine değişebilir. Bu şekilde yüklemeye altında özellikleri doğrultuya göre değişen ve yöne göre farklı mekanik davranış gösteren malzemelere anizotropik malzeme denir. Enine izotropik (Transversal anizotropik) ve monoklinik malzemeler anizotropik malzemelerin özel halidir. İzotropik malzemeler ise anizotropik malzemelerin en özel halidir.

Yukarıda yapılan işlemler özetlenecek olursa, başlangıçta $9 \times 9 = 81$ adet bağımsız malzeme sabiti vardır. Şekil değiştirme tensörünün simetri özelliği göz önüne alındığında, yani $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$ ise $c_{ijkl} = c_{ijlk}$ olduğunda, bağımsız katsayıların sayısı 54'e düşer. Gerilme tensörünün $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ simetriklik özelliği kullanıldığında $c_{ijkl} = c_{jikl}$ olur ve bağımsız katsayıların toplamı 36'ya düşer. Elastik sabitlerin dört alt indisi ikişerli olarak düşünülürse ve bunlar da kendi aralarında yer değiştirebiliyorsa, $c_{(ij)(kl)} = c_{(kl)(ij)}$ yazılabilir. Böylece bağımsız katsayıların sayısı 36'dan 21'e düşer. Yani, bu 21 sabit bilirse 81 sabit bulunabilir. Böylece, genel olarak, anizotropik bir malzemede birbirinden bağımsız 21 adet bağımsız malzeme sabiti vardır denir. Anizotropik bir malzemede belirli bir nokta için bu 21 sabit belirlenirse o nokta için gerilme-genleme bağıntıları yazılabilir. Eğer malzeme homojen değil ise, bu sabitler noktadan noktaya değişir.

Eğer malzemenin bir simetri düzlemi özelliği varsa, yani tek düzleme göre simetriklik gösteriyorsa bu tür malzemeler monoklinik olarak adlandırılır. Bu durumda monoklinik malzemeler için elastik sabiti sayısı 13'e düşer.

Malzemenin birbirine dik iki eksene göre simetrik olması durumunda bu tür malzemelere ortotrop malzemeler denir.

Bu durum için elastik sabitlerinin sayısı 9'a düşer. İki eksene göre simetrisinin bulunduğu malzemeler bu eksenlere dik üçüncü bir eksene göre de simetriktirler. Bu durumda sertlik ve gevşeklik matrisleri aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Dikkat edilmelidir ki normal gerilmeler $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ve kesme genlemeleri $\gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12}$ arasında anizotropik malzemelerde olduğu gibi bir etkileşim yoktur. Benzer şekilde hem kesme gerilmeleri ve normal genlemeler arasında hem de kesme gerilmeleri ve kesme genlemeleri arasında hiçbirinin bir etkileşimi yoktur. Bu durumda sertlik ve gevşeklik matrislerinde yalnızca 9 bağımsız sabit vardır.

Transversal İzotropik: Her noktasında birbirine paralel izotropi düzlemleri olan ortotropik malzemeye transversal izotropik malzeme denir.

Transversal izotropik malzemeler her doğrultuda aynı, düzleme dik doğrultuda farklı özelliklere sahiptir. Örneğin, 1-2 düzlemi özel bir izotrop düzlemi ise 1 ve 2 alt indisleri aralarında yer değiştirebilir. Böylece gerilme genleme ve genleme gerilme bağıntılarındaki bağımsız sabit sayısı 9'dan 5'e indirgenmiş olur.

İzotropik malzeme: Malzemenin içerisindeki tüm düzlem ve doğrultularda aynı özelliklere sahip malzemelere izotropik malzemeler denir. Bu nedenle yönden bağımsız olan elastik malzeme sabitlerinin sayısı 5’den 2’ye indirgenmiş olur.

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \quad (2.22)$$

Lame sabitleri olmak üzere, izotropik malzemeler için sertlik ve gevşeklik matrislerinin elemanlarının Elastik modülü, Kayma modülü ve Poisson sabiti türünden ifadeleri sırasıyla,

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda+2\mu) & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & (\lambda+2\mu) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & (\lambda+2\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

ve,

$$[S] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

şeklinde. Burada $E_i, G_{ij}, \nu_{ij}, i, j=1,2,3$ sabitleri, sırasıyla, $x_i, i=1,2,3$ düzlemindeki i doğrultularındaki Elastik modülü, ij düzlemlerindeki Kayma modülü ve i doğrultusunda gerilme uygulandığında j doğrultusunda oluşan Poisson sabitidir ($\nu_{ij} = -\varepsilon_j/\varepsilon_i$).

Sonuç olarak izotropik malzemeler için gerilme-deformasyon ve deformasyon-gerilme bağıntıları aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

ve,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Literatürde genelleşmiş Hooke yasası aşağıdaki şekilde tanımlanır [3]: $i, j = 1, 2, 3$ olmak üzere,

$$\sigma_{ij} = \lambda \sum_{j=1}^3 (\varepsilon_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}), \quad i = j \quad (2.27)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad i \neq j.$$

Lame sabitlerinin yardımı ile Young modülü ve Poisson sabiti sırasıyla

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \text{ olarak tanımlanır. } \nu \text{ ve } \mu \text{ sabitlerinden yararlanılarak}$$

(2.27) ifadeleri açık şekilde (2.28)-(2.31) gibi tanımlanır [3]:

$$\sigma_{11} = \frac{2\mu}{1-2\nu} \left[(1-\nu)\varepsilon_{11} + \nu(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right], \quad (2.28)$$

$$\sigma_{22} = \frac{2\mu}{1-2\nu} \left[(1-\nu)\varepsilon_{22} + \nu(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) \right], \quad (2.29)$$

$$\sigma_{33} = \frac{2\mu}{1-2\nu} \left[(1-\nu)\varepsilon_{33} + \nu(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \right], \quad (2.30)$$

$$\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{13} = 2\mu\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{23} = 2\mu\varepsilon_{23}. \quad (2.31)$$

2.5. Düzlem Deformasyon

Cismin x_3 eksenine paralel herhangi bir düzlemlerle kesitinde bu düzlem boyunca tüm yer değişimleri birbirine eşit olduğundan çoğu zaman model olarak üçüncü boyut aradan kaldırılır ve problem iki değişkenli olarak formüle edilir. Bu durumda deformasyon tensörünün $\varepsilon_{33}, \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}$ ve $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$ bileşenleri sıfıra eşit olur ve diğer bileşenler x_3 koordinatına bağlı olmaz. Bu durumda sıfırdan farklı bileşenler (2.32) ifadeleri ile belirlenir:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right). \quad (2.32)$$

Burada, deformasyon tensörünün 3. bileşeni u_1 ve u_2 bileşenleri ile tanımlanır. (2.32) ifadesinin yardımıyla,

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} = \frac{2\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (2.33)$$

uyum koşulu elde edilebilir. (2.33) uyum koşulu, x_1 ve x_2 değişkenlerine bağlı olan $u = (u_1, u_2)$ yer değişme vektörünün tek değerli olarak belirlenebilmesi için gerek ve

yeter koşuldur [66]. Bu koşul cismin iç kısmında boşlukların ortaya çıkması olasılığını ortadan kaldırır. Eğer u_1 ve u_2 , x_1 ve x_2 değişkenlerine göre diferansiyellenebilir fonksiyon ise, (2.33) uyum koşulu kendiliğinden sağlanacağı bellidir.

Düzlem deformasyon durumunda (2.28)-(2.31) ifadeleri,

$$\sigma_{11} = 2\mu \left[\varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \right], \quad (2.34)$$

$$\sigma_{22} = 2\mu \left[\varepsilon_{22} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \right], \quad (2.35)$$

$$\sigma_{33} = 2\mu \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \quad (2.36)$$

$$\sigma_{12} = 2\mu \varepsilon_{12}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad (2.37)$$

şeklini alır. Bu ifadelerin indislerle yazılımı,

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (2.38)$$

şeklindedir.

Düzlem deformasyon durumunda,

$$\sum_{j=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) \right] + F_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.39)$$

denklemler sisteminde $F_3 = 0$, $u_3 = 0$ ve F_1, F_2, u_1, u_2 , x_3 değişkenine bağlı olmadığından düzlem problemi için Lamé denklemler sistemi,

$$(2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + F_1 = 0, \quad (2.40)$$

$$(\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + F_2 = 0 \quad (2.41)$$

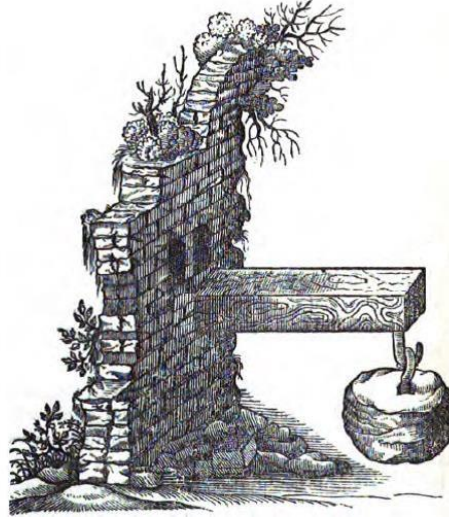
şeklinde tanımlanır [3].

2.6. Mil ve Çubuk Denklemi

Kirişler, özellikle inşaat mühendisliğinde en yaygın yapısal bileşen türüdür. Uzunluğu nispeten enine kesit alanından fazladır. Bir kiriş çubuk benzeri yapısal eleman olup, asıl işlevi çapraz yüklemeyi desteklemek ve desteklere taşımaktır.

Bir yapıda yapısal elemanlar olarak kullanılırlar. Yükü üstyapıdan sütunlara ve alt toprak temeline aktarırlar (Şekil 2.12). Hafif araçların yanı sıra hafif nakliye köprülerinde de kullanılmaktadırlar. Euler-Bernoulli kiriş teorisi (mühendisin kiriş teorisi veya klasik kiriş teorisi olarak da bilinir), kirişlerin yük taşıma ve eğilme özelliklerini hesaplamak için bir yöntem sağlayan elastikiyet teorisinin basitleştirilmesidir.

Kiriş teorisi kullanım alanları olarak binalardan köprülere, hatta insan vücudundaki tüm yükü taşıyan kemiklere kadar bir çok yapının dizayn ve analizinde karşımıza çıkmaktadır. Mühendislik mekaniği açısından ise kiriş kavramı önemli bir anlam taşır. Leonard Euler ve Jacob Bernoulli gibi öncülerin milin eğilmesi teorisindeki erken gelişmelerin çoğu deneye dayanan yöntemler ve gerçeklikten yararlanarak sonuç çıkarmaya çalışan düzenli bilgilerdi. Bu gelişmeleri mekanik açıdan daha teorik olan Lagrange, Navier, Cauchy, Green ve Timoshenko'nun yaptıkları yaklaşımlar izledi [8]. Kirişin eğilme analizinin teorisini geliştirmek için düzlem kesiti hipotezi ve Euler- Bernoulli hipotezi (basit kiriş teorisi) olmak üzere iki hipotezden biri alınabilir.



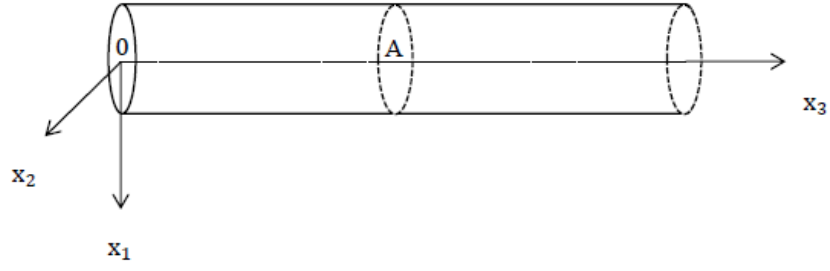
Şekil 2.12. Bir yüzeyinden duvara sabitlenerek yüklenmiş kiriş [1]

Düzlem kesit hipotezine göre, çubuğun Ox_3 eksenine dik düzlemle kesiti, deformasyondan sonra da Ox_3 eksenine dik düzlem olarak kalır. Yani, kiriş terimi, yatay ekseninde yüklenen yüklerin, bu eksene dik olan yükleri desteklemesi için tasarlanmıştır. Euler-Bernoulli hipotezine göre, $\omega(x_3)=u_3(0,0,x_3)$ eğilme fonksiyonu; I , çubuğun enine kesitinin eylemsizlik momenti, E ise Elastisite modülü olmak üzere $d^2\omega/dx_3^2$ bükülmesi ve M eğilme momenti arasındaki bağıntı,

$$\frac{d^2\omega}{dx_3^2} = -\frac{M}{EI} \quad (2.42)$$

şeklindedir. Burada EI çarpımı eğilme sertliğini (flexural rigidity) ifade eder. Bu teoride yapılan kabuller aşağıdaki gibi sıralanabilir:

- Kiriş düz ve üniform kesit alanlıdır (Şekil 2.13),
- Kuvvet(lerin) doğrultusu ile kesite ait simetri eksenini çakıştır,
- Kirişlerin şekli değiştirmeden önce kiriş eksenine dik kesitleri, şekil değiştirdikten sonra da düzlem kalırlar.



Şekil 2.13. Bir kesiti verilen kiriş

Enine kesit alanı küçük olduğundan dış kuvvetlerin etkisi, kesitlerin üzerindeki kuvvetlerin $q(x_3)$ toplamı olarak yazılabilir. $0x_1x_3$ düzlemi simetri düzlemi olarak alınır ve A kesitinde hacim kuvvetinin de sıfır olduğu göz önüne alınır, bu kesit üzerinde sıfırdan farklı Q kesme kuvveti ile M eğilme momenti olacaktır. Bunların matematiksel ifadeleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$Q = \iint_A \sigma_{13} dx_1 dx_2, \quad M = \iint_A \sigma_{33} x_1 dx_1 dx_2. \quad (2.43)$$

Herhangi (a,b) aralığında milin bu kısmı etkileyen bileşke kuvvet ve bileşke momentin sıfır olması koşulundan yararlanılarak milin eğilmesinin denge denklemi elde edilsin. $Q(x_3)$ türevlenebilirse ve bileşke kuvvetlerin de,

$$\int_a^b q(x_3) dx_3 + Q(b) - Q(a) = 0 \quad (2.44)$$

olduğu göz önüne alınır,

$$\int_a^b \left[q(x_3) + \frac{dQ}{dx_3} \right] dx_3 = 0 \quad (2.45)$$

elde edilir. (a,b) aralığı keyfi olduğu için,

$$q(x_3) + \frac{dQ}{dx_3} = 0 \quad (2.46)$$

yazılabilir. Benzer şekilde momentin,

$$-\int_a^b q(x_3)(x_3-a)dx_3 - Q(b)(b-a) + M(b) - M(a) = 0 \quad (2.47)$$

denge koşulundan,

$$\int_a^b \left[-q(x_3)(x_3-a) - \frac{d[Q(x_3)(x_3-a)]}{dx_3} + \frac{dM(x_3)}{dx_3} \right] dx_3 = 0 \quad (2.48)$$

ifadesi elde edilir. (2.46) ifadesinden herhangi (a,b) aralığında,

$$\int_a^b \left[\frac{dM(x_3)}{dx_3} - Q(x_3) \right] dx_3 = 0 \quad (2.49)$$

bulunur. Burada da (2.42) bağıntısı göz önüne alınırsa,

$$EI \frac{d^3 \omega}{dx_3^3} + Q(x_3) = 0 \quad (2.50)$$

elde edilir. Bu ifadenin sol tarafını, x_3 değişkenine göre türevi alınır ve (2.46) ifadesi kullanılırsa, $D=EI$ (eğilme sertliği) olmak üzere, bir boyutlu elastik milin eğilmesinin denge denklemi elde edilir:

$$D \frac{d^4 \omega}{dx_3^4} = q(x_3), \quad x_3 \in (a,b). \quad (2.51)$$

Eğer mil türdeş değilse, $I=I(x_3)$, bu denklem,

$$\frac{d^2}{dx_3^2} \left(D(x_3) \frac{d^2 \omega}{dx_3^2} \right) = q(x_3), \quad x_3 \in (a,b) \quad (2.52)$$

şeklini alır [69].

Çubuğun uçlarında verilebilecek sınır koşulları aşağıdaki gibi olabilir:

1. Basit dayanak (simply supported) sınır koşulu, çubuk sabit $0x_2$ eksenini etrafında serbestçe dönebileceği için çubuğun uçlarında eğilme ve eğilme momenti sıfıra eşittir:

$$\omega=0, M=-EI \frac{d^2\omega}{dx_3^2}=0. \quad (2.53)$$

2. Sert kenetlenme (clamped) sınır koşulu, çubuğun bir ucu öyle kenetlenmiş ki bu noktada eğilme ve dönme sifira eşit:

$$\omega=0, \frac{d\omega}{dx_3}=0. \quad (2.54)$$

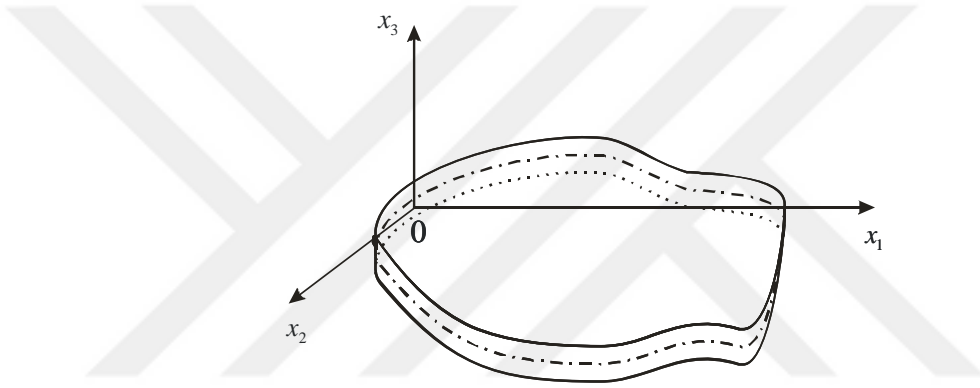
3. Serbest uçlar (free boundary) koşulu, M eğilme momenti ve Q kuvveti sifira eşit olur. (2.42) bağıntısı, Euler- Bernoulli koşulu ve (2.50) ifadesinden aşağıdaki gibi olmalıdır:

$$\frac{d^2\omega}{dx_3^2}=0, \frac{d^3\omega}{dx_3^3}=0. \quad (2.55)$$

3. ELASTİK LEVHANIN EĞİLMESİ İLE İLGİLİ PROBLEM

3.1. Düzlem Deformasyon Denkleminden Levhanın Denge Denkleminin Elde Edilmesi

Koordinat sistemi, x_1 ve x_2 eksenleri levhanın orta yüzeyinde, x_3 ise yukarıya doğru yönelmiş olacak şekilde yerleştirilen h kalınlığında türdeş elastik levha ele alınsın (Şekil 3.1).



Şekil 3.1. Kalınlığı h olan türdeş elastik levha

Levhanın ağırlığı göz ardı edilerek, $0x_1x_2$ düzlemine dikey x_3 yönünde levhanın üst yüzeyine uygulanan q kuvveti ile levhanın eğilmekte olduğu varsayılsın.

$F_1 = F_2 = F_3 = 0$ durumunda (yani, hacim kuvvetleri olmadığında) levhanın alt yüzeyi serbest kaldığından ve uygulanan yüzeysel kuvvet levhanın üst kısmına dikey yönde olduğundan,

$$\begin{aligned} \sigma_{13}(x_1, x_2, h/2) &= \sigma_{13}(x_1, x_2, -h/2) = \sigma_{23}(x_1, x_2, h/2) \\ &= \sigma_{23}(x_1, x_2, -h/2) = \sigma_{33}(x_1, x_2, -h/2) = 0, \quad \sigma_{33}(x_1, x_2, h/2) = q \end{aligned} \quad (3.1)$$

dir.

(2.11) denge denklemler sisteminin ilk iki ifadesi x_3 ile çarpılıp $[-h/2, h/2]$ aralığında x_3 'e göre integrallendiğinde, gerilim tensörünün simetrikliği ve kuvvet fonksiyonunun levhanın düzlemine dik olduğu da göz önüne alınarak,

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} x_3 dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} x_3 dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} x_3 dx_3 = 0, \quad (3.2)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} x_3 dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} x_3 dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} x_3 dx_3 = 0$$

elde edilir. (3.1) ifadesindeki eşitlikler göz önüne alınarak, (3.2)'deki denklemlerin son integrallerine kısmi integralleme formülü uygulanırsa,

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} x_3 dx_3 = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} dx_3 + \sigma_{13}(x_1, x_2, \xi) \xi \Big|_{-h/2}^{h/2} = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} dx_3 \quad (3.3)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} x_3 dx_3 = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} dx_3 + \sigma_{23}(x_1, x_2, \xi) \xi \Big|_{-h/2}^{h/2} = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} dx_3$$

olur [42]. (3.2)'deki diğer integraller ise,

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} x_3 dx_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial}{\partial x_1} (\sigma_{11} x_3) dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} x_3 dx_3,$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} x_3 dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} x_3 dx_3, \quad (3.4)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} x_3 dx_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} x_3 dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} x_3 dx_3,$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} x_3 dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} x_3 dx_3.$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikler (3.2)'de yerlerine yazıldığında,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} x_3 dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} x_3 dx_3 - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} x_3 dx_3 = 0, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} x_3 dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} x_3 dx_3 - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} x_3 dx_3 = 0$$

elde edilir.

Denge denklemler sisteminin ilk iki ifadesinde olduğu gibi aynı koşullar altında sistemin 3. denklemi de $[-h/2, h/2]$ aralığında x_3 'e göre integrallendiğinde,

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} dx_3 = 0 \quad (3.6)$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{31} dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{32} dx_3 + \sigma_{33} \left(x_1, x_2, \frac{h}{2} \right) - \sigma_{33} \left(x_1, x_2, -\frac{h}{2} \right) = 0 \quad (3.7)$$

ve,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} dx_3 + q = 0 \quad (3.8)$$

elde edilir.

Denge denklemler sistemi için elde edilen gerilmelerin son ifadelerindeki integraller fiziksel anlamına göre momentleri göstermektedir:

$$M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} x_3 dx_3, \quad M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} x_3 dx_3, \quad M_{12} = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} x_3 dx_3, \quad (3.9)$$

$$q = \sigma_{33} \left(x_1, x_2, h/2 \right), \quad Q_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} dx_3, \quad Q_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} dx_3.$$

Burada, $M_1(x_1, x_2)$ ve $M_2(x_1, x_2)$ eğilme momentleri, $M_{12}(x_1, x_2)$ burulma momenti, $Q_1(x_1, x_2)$ ve $Q_2(x_1, x_2)$ ise kayma kuvvetleridir. Denge denklemlerinin momentler ve kuvvetlere bağlı ifadesi yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_1}{\partial x_1} - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - Q_1 &= 0 \\ -\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - Q_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + q = 0.$$

şeklinde olur. (3.10) denklemler sisteminde Q_1 ve Q_2 yok edilirse,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial M_1}{\partial x_1} - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial M_2}{\partial x_2} - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} \right) + q = 0 \quad (3.11)$$

elde edilir. Son ifade de türevler hesaplandığında momentlere bağlı üç bilinmeyenli,

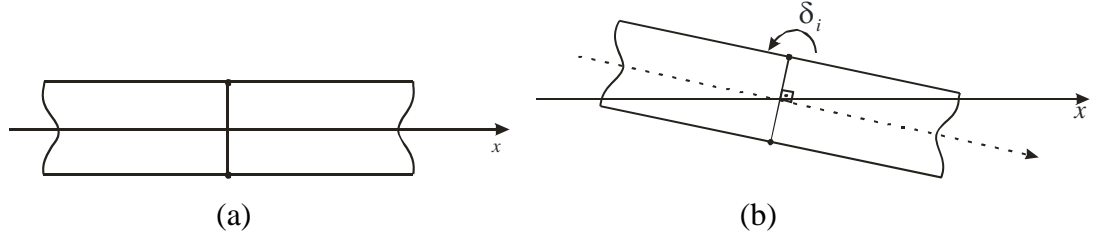
$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2} + q = 0 \quad (3.12)$$

kısmi türevli diferansiyel denklemi elde edilir. Ancak, bu momentlerin $\omega(x_1, x_2) = u_3(x_1, x_2, 0)$ eğilme fonksiyonu ile ifadeleri göz önüne alınırsa, aslında bilinmeyen olmadıkları ve buradan da levhanın $\omega(x_1, x_2)$ eğilme fonksiyonu ile ifade edilmiş denge denklemi elde edilir.

3.2. Klasik Levha Teorisi (Kirchhoff Teorisi) ve Kayma Deformasyon Teorisi (Reissner-Mindlin Teorisi)

Dış kuvvetlerin etkisi ile eğilmekte olan levhaların analizi için genel olarak klasik levha teorisi (Kirchhoff Teorisi) ve kayma deformasyon levha teorisi (Reissner-Mindlin Teorisi) olmak üzere iki teori kullanılır. Kirchhoff Teorisi ince levhalar (thin plates) için kullanılırken Reissner-Mindlin Teorisi kalın levhalar (thick plates) için uygundur. Klasik levha teorisinde levhanın orta yüzeyine normal yönünde çizilmiş

doğrunun deformasyondan sonra orta düzleme dik yönde kalması varsayılmaktadır (Şekil 3.2 (a)-(b)).



Şekil 3.2. (a)-(b) Klasik Levha Teorisinin geometrisi

Reissner-Mindlin teorisinde ise, normal yönünde çizilmiş doğrunun deformasyondan sonra normal yönünden kayabileceği kabul edilir. Bu küçük ayrıntı levhanın eğilmesi probleminde iki farklı denklemin ortaya çıkmasına neden olur. Reissner ve Mindlin teorileri aralarında farklılıklar bulunmasına rağmen çoğu yönden benzer olduklarından tek bir teori gibi anılırlar. Reissner teorisinde levhanın kalınlığı yönünde gerilme doğrusal iken kayma gerilmeleri parabolik kabul edilir ve Mindlin teorisinde de yer değiştirmeler doğrusal olarak alınır.

Bu çalışmada detaylı ayrıntılara girmeden klasik levha teorisi incelenecektir. Levhanın eğilme probleminde, klasik levha teorisinden, $\omega(x_1, x_2) = u_3(x_1, x_2, 0)$ levhanın orta yüzeyinin eğilmesi olmak üzere, levha noktalarının yer değişme vektörünün ve deformasyon tensörünün bileşenleri sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = -x_3 Q_1(x_1, x_2) = -x_3 \frac{\partial \omega}{\partial x_1}, \quad (3.13)$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = -x_3 Q_2(x_1, x_2) = -x_3 \frac{\partial \omega}{\partial x_2}.$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -x_3 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2}, & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -x_3 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2}, & \varepsilon_{33} &= \frac{\partial \omega}{\partial x_3}, \\
\varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(-x_3 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2 \partial x_1} - x_3 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = -x_3 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2}, \\
\varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right) = 0, \\
\varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Bu durumda, Kirchhoff teorisinde levhanın orta yüzeyinde gerilimin σ_{33} bileşenlerinin σ_{11} ve σ_{22} bileşenlerine göre çok küçük olduğu için göz ardı edilebileceği kabulünden eğilme problemine düzlem deformasyon problemi gibi yaklaşılabilir. Genelleşmiş Hooke yasasının λ, μ Lamé sabitleri ile verilen (2.32) ifadelerinde [42], elde edilen eşitlikler göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{4\mu(\mu + \lambda)}{2\mu + \lambda} \varepsilon_{11} + \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda} \varepsilon_{22}, \\
\sigma_{22} &= \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda} \varepsilon_{11} + \frac{4\mu(\mu + \lambda)}{2\mu + \lambda} \varepsilon_{22},
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}$$

olur. Lamé sabitlerinin (2.22) ifadelerinden yararlanılarak, (3.15) ifadelerindeki gerilim tensörünün bileşenleri aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}), \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}), \quad \sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{12}. \tag{3.16}$$

ε_{ij} deformasyon tensörünün bileşenlerinin (3.14) ifadeleri, (3.16)'da yerlerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(-x_3 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} - \nu x_3 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) x_3, \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(-x_3 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} - \nu x_3 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) x_3,\end{aligned}\quad (3.17)$$

$$\sigma_{12} = -\frac{E}{1+\nu} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} x_3$$

elde edilir. Elde edilen son formüller, momentlerin (3.9) ifadelerinde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}M_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} x_3 dx_3 = -\int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) x_3^2 dx_3 \\ &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} x_3^2 dx_3 = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \\ &= -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right),\end{aligned}\quad (3.18)$$

$$M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} x_3 dx_3 = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \quad (3.19)$$

ve,

$$M_{12} = -\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} x_3 dx_3 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (3.20)$$

elde edilir. Burada,

$$D = Eh^3 / (12(1-\nu^2)) \quad (3.21)$$

levhanın silindirik sertlik katsayısıdır.

Momentler için elde edilen (3.18)-(3.20) ifadeleri, denge denkleminin momentlere bağlı ifadesi olan (3.12)'de yerlerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(-D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right) - 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(D(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(-D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \right) + q = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

yani,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left[D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \right] \\ & + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[D(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right] = q \end{aligned} \quad (3.23)$$

elde edilir. Türdeş izotrop levha için D silindirik sertlik katsayısı yönden bağımsız olduğundan sabit olarak parantezin dışına çıkar ve (3.22) denklemi aşağıdaki şekilde olur:

$$-D \left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial x_1^4} + \nu \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_2^4} + \nu \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right) = -q \quad (3.24)$$

ve buradan da,

$$\Delta^2 \omega = \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_2^4} = \frac{q}{D} \quad (3.25)$$

denklemini elde edilir [42],

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \quad (3.26)$$

biharmonik operatörünün yardımı ile (3.25) denklemi,

$$\Delta^2 \omega = \frac{q}{D} \quad (3.27)$$

şeklinde de yazılabilir.

(3.27) denklemi, homojen elastik levhanın denge denklemidir. Eğer levhanın D silindirik sertlik katsayısı sabit değil ise (levhanın kalınlığının $h(x)$ olduğu durumda $D = D(x_i)$), yani silindirik sertlik katsayısı noktadan noktaya değişiyorsa, denge denklemi aşağıdaki şekli alır [42]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(D(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = q. \quad (3.28)$$

Eğer levhanın malzemesi ortotrop ise, bu durumda ortotrop malzemeler için Hooke kanunu (3.16) ifadelerine benzer şekilde,

$$\sigma_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2} (\varepsilon_{11} + \nu_2\varepsilon_{22}), \quad \sigma_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2} (\varepsilon_{22} + \nu_1\varepsilon_{11}), \quad \sigma_{12} = G\varepsilon_{12} \quad (3.29)$$

dir. Burada E_1 ve E_2 Young modülü, ν_1 ve ν_2 Poisson sabiti ($E_1\nu_2 = E_2\nu_1$), ve G kayma modülüdür. Türdeş ortotrop esnek levhanın denge denklemi ise,

$$D_1 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_1^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_2^4} = q \quad (3.30)$$

şeklindedir [42]. Burada D_1 ve D_2 sırasıyla x_1 ve x_2 yönlerindeki silindirik sertlik katsayıları ve D_{kp} burulma sertlik katsayısı olmak üzere, bu katsayılar aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}, \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}, \quad D_3 = D_1\nu_2 + 2D_{kp}, \quad D_{kp} = Gh^3/12. \quad (3.31)$$

Eğer ortotrop levha homojen değil ise, yani D_1 ve D_2 katsayıları sabit değil ise, o halde levhanın denge denklemi aşağıdaki şekilde olur [42]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left[D_1 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[D_2 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \right] + 4 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} D_{kp} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} = q. \quad (3.32)$$

3.3. Levhanın Eğilmesi Problemi İçin Sınır Koşulları

Ω bölgesini dolduran homojen esnek levhanın dış kuvvetlerin etkisi ile eğilmesine karşılık gelen elastik deformasyonlarının enerjisi,

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + 2\sigma_{12} \varepsilon_{12}) dx_3 \right) dx_1 dx_2 \quad (3.33)$$

şeklinde tanımlanır. ε_{ij} ve σ_{ij} gerilim ve deformasyon tensörlerinin ifadeleri, (3.33)

enerji fonksiyoneline yerlerine yazıldığında,

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} x_3^2 + \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} x_3^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 x_3^2 \right) dx_3 \right) dx_1 dx_2 \quad (3.34)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu^2} \int_{\Omega} \left(\int_{-h/2}^{h/2} \left(\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right. \right. \\ \left. \left. + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right) x_3^2 dx_3 \right) dx_1 dx_2$$

elde edilir. (3.34) ifadesinden (3.35) ifadesi bulunur:

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu^2} \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right. \\
&\quad \left. + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \int_{-h/2}^{h/2} x_3^2 dx_3 \right) dx_1 dx_2 \\
&= \frac{1}{2} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right) dx_1 dx_2 \\
&= \frac{D}{2} \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right) dx_1 dx_2
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Levhanın sınırlarında hiçbir kuvvet uygulanmadığında, levhanın tam potansiyel enerjisi,

$$I(\omega) = W(\omega) - \int_{\Omega} q \omega dx_1 dx_2 \tag{3.36}$$

şeklinde tanımlanır. Yüklenmiş elastik cismin dengede olması için levhanın tam potansiyel enerjisinin Gateaux türevinin sıfıra eşit olması gerekir:

$$\delta I(\omega) = \frac{d}{dt} [I(\omega + t\vartheta)]_{t=0} = 0 \tag{3.37}$$

Burada, $\vartheta(x_1, x_2)$, $H^2(\Omega)$ Sobolev uzayından keyfi fonksiyon, t ise parametredir.

$\delta I(\omega)$ Gateaux diferansiyeli hesaplandığında,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [I(\omega + t\vartheta)]_{t=0} &= \frac{D}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_2^2} \right. \right. \\ &\left. \left. + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2 \right\}_{t=0} - \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\Omega} q(\omega + t\vartheta) dx_1 dx_2 \right\}_{t=0} \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{D}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + t \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + t \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + t \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + t \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_2^2} \right) \right. \right. \\ &\left. \left. + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} + t \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2 \right\}_{t=0} - \frac{d}{dt} \int_{\Omega} q \vartheta dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan da,

$$\begin{aligned} D \int_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} + \right. \\ \left. + \nu \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \right] dx_1 dx_2 - \int_{\Omega} q \vartheta dx_1 dx_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

olur.

(3.39) denklemindeki birinci integrale her bir terim için Green formülü uygulandığında birinci terim,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} dx_1 dx_2 &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} \frac{\partial^3 \omega}{\partial x_1^3} dx_1 dx_2 + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} n_1 ds \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_1^4} \vartheta dx_1 dx_2 - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial^3 \omega}{\partial x_1^3} \vartheta n_1 ds + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} n_1 ds \end{aligned} \quad (3.40)$$

şeklinde olur. Burada, $\partial \Omega$, Ω bölgesinin sınırı, $n(n_1, n_2)$ ise dış normalidir. Benzer şekilde ikinci, dördüncü ve beşinci terimler için,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_2^4} \vartheta dx_1 dx_2 - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial^3 \omega}{\partial x_2^3} \vartheta n_2 ds + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} n_2 ds \quad (3.41)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} dx_1 dx_2 = - \int_{\Omega} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} \frac{\partial^3 \omega}{\partial x_1 \partial x_2^2} dx_1 dx_2 + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} n_1 ds \quad (3.42)$$

$$= \int_{\Omega} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \vartheta dx_1 dx_2 - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial^3 \omega}{\partial x_1 \partial x_2^2} \vartheta n_1 ds + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} n_1 ds,$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \vartheta dx_1 dx_2 - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial^3 \omega}{\partial x_2 \partial x_1^2} \vartheta n_2 ds + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} n_2 ds \quad (3.43)$$

elde edilir. (3.39) denklemindeki,

$$\int_{\Omega} 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 \quad (3.44)$$

teriminin integrali, iki integralin toplamı şeklinde düşünülerek, Green formülü farklı argümanlar üzerine uygulanıldığında,

$$\int_{\Omega} (1-\nu) \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 = -(1-\nu) \int_{\Omega} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} \frac{\partial^3 \omega}{\partial x_1 \partial x_2^2} dx_1 dx_2 + (1-\nu) \int_{\partial \Omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} n_2 ds \quad (3.45)$$

$$= (1-\nu) \int_{\Omega} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \vartheta dx_1 dx_2 - (1-\nu) \int_{\partial \Omega} \frac{\partial^3 \omega}{\partial x_1 \partial x_2^2} \vartheta n_1 ds + (1-\nu) \int_{\partial \Omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} n_2 ds,$$

ve,

$$\int_{\Omega} (1-\nu) \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 = (1-\nu) \int_{\Omega} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \vartheta dx_1 dx_2 - (1-\nu) \int_{\partial \Omega} \frac{\partial^3 \omega}{\partial x_1^2 \partial x_2} \vartheta n_2 ds \quad (3.46)$$

$$+ (1-\nu) \int_{\partial \Omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} n_1 ds$$

eşitlikleri sağlanır. (3.40)-(3.46) ifadeleri, (3.39) denkleminde göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
& D \int_{\Omega} \left[\frac{\partial^4 \omega}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_2^4} + 2(1-\nu) \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + 2\nu \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right] \vartheta dx_1 dx_2 - \int_{\Omega} q \vartheta dx_1 dx_2 \\
& - D \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial^3 \omega}{\partial x_1^3} n_1 + \frac{\partial^3 \omega}{\partial x_2^3} n_2 + (1-\nu) \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x_1 \partial x_2^2} n_1 + \frac{\partial^3 \omega}{\partial x_1^2 \partial x_2} n_2 \right) \right. \\
& \left. + \nu \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x_1 \partial x_2^2} n_1 + \frac{\partial^3 \omega}{\partial x_1^2 \partial x_2} n_2 \right) \right] \vartheta ds + D \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} n_2 + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} n_1 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} n_2 \right) + (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} n_2 + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} n_1 \right) \right] ds = 0
\end{aligned} \tag{3.47}$$

olur. Elde edilen (3.47) denklemde, (3.25) biharmonik denklemi göz önüne alındığında,

$$\int_{\Omega} \left[D \left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_2^4} \right) - q \right] \vartheta dx_1 dx_2 = 0 \tag{3.48}$$

ifadesi sağlandığı için, sadece $\partial\Omega$ sınırındaki integraller kalacaktır. Normal ve teğet yönünde türevlerin sırasıyla,

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} n_2, \tag{3.49}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = -\frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} n_2 + \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} n_1$$

şeklinde belirlendiği göz önüne alınsın.

$n_1^2 + n_2^2 = 1$ olduğu bilinerek sırasıyla, ilk olarak (3.49) ifadesindeki ilk eşitliğin her iki tarafı n_2 ve diğer eşitliğin her iki tarafı da n_1 ile çarpılıp taraf tarafa toplansın. Daha sonra yine, (3.49) ifadesindeki ilk eşitliğin her iki tarafı n_2 ve ikinci eşitlik ise, bu kez $-n_1$ ile çarpılıp taraf tarafa toplansın. Bu durumda, sırasıyla, aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} = \frac{\partial \vartheta}{\partial n} n_1 - \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} n_2, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} = \frac{\partial \vartheta}{\partial n} n_2 + \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} n_1 \quad (3.50)$$

Elde edilen eşitlikleri ve,

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} n_1^2 + 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} n_1 n_2 + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} n_2^2 \quad (3.51)$$

formülü kullanılarak (3.47) denklemindeki sınır üzerinde verilen integraller sade şekle getirilebilir. Kolaylık açısından integraller ayrı ayrı incelenebilir. (3.47) denklemindeki $\partial \Omega$ sınırındaki birinci integral basit işlemler sonucunda,

$$\begin{aligned} & \int_{\partial \Omega} \left[\frac{\partial^3 \omega}{\partial x_1^3} n_1 + \frac{\partial^3 \omega}{\partial x_2^3} n_2 + (1-\nu) \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x_1 \partial x_2^2} n_1 + \frac{\partial^3 \omega}{\partial x_1^2 \partial x_2} n_2 \right) \right. \\ & \left. + \nu \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x_1 \partial x_2^2} n_1 + \frac{\partial^3 \omega}{\partial x_1^2 \partial x_2} n_2 \right) \right] \vartheta ds = \int_{\partial \Omega} \left[\frac{\partial^3 \omega}{\partial x_1^3} n_1 + \frac{\partial^3 \omega}{\partial x_2^3} n_2 + \frac{\partial^3 \omega}{\partial x_1^2 \partial x_2} n_2 + \frac{\partial^3 \omega}{\partial x_1 \partial x_2^2} n_1 \right] \vartheta ds \quad (3.52) \\ & = \int_{\partial \Omega} \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} (\Delta \omega) n_1 + \frac{\partial \omega}{\partial x_2} (\Delta \omega) n_2 \right] \vartheta ds = \int_{\partial \Omega} \vartheta \frac{\partial}{\partial x_n} (\Delta \omega) ds \end{aligned}$$

şekline dönüştürülür. Benzer şekilde 2. sınır integralinde (3.50) ve (3.51) ifadeleri göz önüne alınırsa, belli işlemler yapıldığında,

$$\begin{aligned} & \int_{\partial \Omega} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial n} n_1 - \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} n_2 \right) n_1 + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial n} n_2 + \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} n_1 \right) n_2 + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial n} n_1 - \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} n_2 \right) n_1 \right. \\ & \left. + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial n} n_2 + \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} n_1 \right) n_2 + (1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial n} n_1 - \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} n_2 \right) n_2 \right. \\ & \left. + (1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial n} n_2 + \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} n_1 \right) n_1 \right] ds = \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \vartheta}{\partial n} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} n_1^2 + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} n_2^2 + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} n_1^2 + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} n_2^2 \right. \\ & \left. + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} n_1 n_2 \right] ds - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} n_1 n_2 - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} n_1 n_2 + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} n_1 n_2 - \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} n_1 n_2 \right] ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} n_2^2 - (1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} n_1^2 \Big] ds = \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial n} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} (n_1^2 + \nu n_2^2) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} (n_2^2 + \nu n_1^2) \right. \\
& \left. + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} n_1 n_2 \right] ds - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \tau} \left[(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} n_1 n_2 - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} n_1 n_2 + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} (n_2^2 - n_1^2) \right) \right] ds \\
& = \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial n} \left[(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} n_1^2 + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} n_2^2 + 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} n_1 n_2 \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] ds \\
& - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \tau} \left[(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} (n_2^2 - n_1^2) + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) n_1 n_2 \right) \right] ds \\
& = \int_{\partial \Omega} \left[(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2} + \nu \Delta \omega \right] \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial n} ds - (1-\nu) \int_{\partial \Omega} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} (n_2^2 - n_1^2) + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) n_1 n_2 \right] \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \tau} ds. \quad (3.53)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.53) ifadesindeki son integral, bir kapalı eğri üzerinde integral olduğundan, Green formülü uygulanırsa, eğrinin başlangıç ve son noktaları aynı olduğundan,

$$\begin{aligned}
& - (1-\nu) \int_{\partial \Omega} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} (n_2^2 - n_1^2) + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) n_1 n_2 \right] \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \tau} ds \\
& = (1-\nu) \int_{\partial \Omega} \mathfrak{G} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} (n_2^2 - n_1^2) + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) n_1 n_2 \right] ds
\end{aligned} \quad (3.54)$$

eşitliği sağlanır. Böylece elde edilen (3.52)-(3.54) ifadeleri (3.47) denkleminde yazıldığında,

$$-D \int_{\partial \Omega} \mathfrak{G} \frac{\partial}{\partial n} (\Delta \omega) ds + D \int_{\partial \Omega} \left[(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2} + \nu \Delta \omega \right] \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial n} ds + \quad (3.55)$$

$$D(1-\nu) \int_{\partial \Omega} \mathfrak{G} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} (n_2^2 - n_1^2) + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) n_1 n_2 \right] ds = 0$$

veya,

$$D \int_{\partial\Omega} \left[(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2} + \nu \Delta \omega \right] \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial n} ds + D \int_{\partial\Omega} \left\{ -\frac{\partial}{\partial n} (\Delta \omega) + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} (n_2^2 - n_1^2) + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) n_1 n_2 \right] \right\} \mathfrak{G} ds = 0 \quad (3.56)$$

eşitliği sağlanmış olur. (3.56) ifadesinin her iki tarafı $D (\neq 0)$ ile bölünürse ve,

$$M\omega = \nu \Delta \omega + (1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2} \quad (3.57)$$

$$N\omega = -\frac{\partial}{\partial n} (\Delta \omega) + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} (n_2^2 - n_1^2) + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) n_1 n_2 \right] \quad (3.58)$$

olarak alınır,

$$\int_{\partial\Omega} M\omega \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial n} ds + \int_{\partial\Omega} N\omega \mathfrak{G} ds = 0 \quad (3.59)$$

elde edilir. Burada, $M\omega$ sınırdaki uygulanmış momenti, $N\omega$ ise kayma kuvvetini göstermektedir. Böylece, levhanın serbest sınırı için, (3.59) denkleminde, \mathfrak{G} fonksiyonunun $H^2(\Omega)$ uzayında keyfi fonksiyon olduğu göz önüne alınır,

$$M\omega = 0, \quad N\omega = 0 \quad (3.60)$$

elde edilir. Biharmonik denklem için bu koşullar dışında özel durumlara bağlı olarak uygulama açısından fiziksel anlamına göre farklı sınır koşulları verilir.

3.4. Levhanın Denge Denklemi İçin Sınır Koşullarının Fiziksel Yorumu

Biharmonik denklem için sınır değer probleminin sınır koşulları, genel durumda (3.39) şeklinde verilir. Fiziksel duruma göre uygulama açısından daha önemli olan özel koşullar aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$0x_1x_2$ düzleminde $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \mid 0 \leq x_\varphi \leq \ell_\varphi, \varphi = 1, 2\}$ bölgesini dolduran dikdörtgen levha ele alınır. $x_1 = 0$ 'da levhanın eğilme sertlik katsayısı B , burulma

sertlik katsayısı C olan mil ile sert bağlandığı varsayılınsın. Milin sertliği ve sınırdaki bağlanma yöntemi göz önüne alınmadan levhanın enerjisi,

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} D \left\{ (\Delta \omega)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] \right\} dx_1 dx_2, \quad (3.61)$$

milin eğilme ve burulma enerjisi ise, sırasıyla,

$$\frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} B \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 dx_2, \quad (3.62)$$

ve,

$$\frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} C \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 dx_2 \quad (3.63)$$

formülleriyle hesaplanır. Levhanın, $x_1 = 0$ kenarının herhangi bir yöntem ile sert bağlandığında enerjisi,

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} \left\{ D (\Delta \omega)^2 - 2(1-\nu) D \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] \right\} dx_1 dx_2 + \quad (3.64)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} \left[B \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + C \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right]_{x_1=0} dx_2 + \frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} \left\{ \alpha \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right)^2 + \beta \omega^2 \right\}_{x_1=0} dx_2$$

şeklinde belirlenir. Burada, α ve β sırasıyla, levhaların ortak sınırın olan $x_1 = 0$ kenarındaki menteşenin ve ortak sınırdaki dayanağın sertlik katsayısıdır.

$$I(\omega) = W - \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} q(x) \omega(x) dx_1 dx_2 \quad (3.65)$$

Levhanın potansiyel enerjisini tanımlayan $I(\omega)$ fonksiyonelinin Gateaux türevi hesaplanıp sifıra eşitlenirse,

$$\begin{aligned}
\delta I(\omega) &= \frac{d}{dt} [I(\omega + t\vartheta)]_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} D \left[(\Delta(\omega + t\vartheta))^2 - 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_2^2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(\frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2 + \frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} \left[B \left(\frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_2^2} \right)^2 + C \left(\frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right]_{x_1=0} dx_2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} \left[\alpha \left(\frac{\partial(\omega + t\vartheta)}{\partial x_1} \right)^2 + \beta(\omega + t\vartheta)^2 \right]_{x_1=0} dx_2 - \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} q(x)(\omega + t\vartheta) dx_1 dx_2 \right\}_{t=0} \\
&= \left\{ \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} D \left[\left(\frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_2^2} \right) \left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial x_2^2} \right) - (1-\nu) \left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_2^2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2\vartheta}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2\vartheta}{\partial x_1 \partial x_2} \right] dx_1 dx_2 + \int_0^{\ell_2} \left[B \frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2\vartheta}{\partial x_2^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + C \frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2\vartheta}{\partial x_1 \partial x_2} \right]_{x_1=0} dx_2 + \int_0^{\ell_2} \left[\alpha \frac{\partial(\omega + t\vartheta)}{\partial x_1} \frac{\partial\vartheta}{\partial x_1} + \beta(\omega + t\vartheta)\vartheta \right]_{x_1=0} dx_2 \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} q(x)\vartheta dx_1 dx_2 \right\}_{t=0} \\
&= \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} D \left[\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial x_2^2} \right) \left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial x_2^2} \right) - (1-\nu) \left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2\omega}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2\vartheta}{\partial x_2^2} \right) \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{\partial^2\omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2\vartheta}{\partial x_1 \partial x_2} \right] dx_1 dx_2 + \int_0^{\ell_2} \left[B \frac{\partial^2\omega}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2\vartheta}{\partial x_2^2} + C \frac{\partial^2\omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2\vartheta}{\partial x_1 \partial x_2} \right]_{x_1=0} dx_2 \\
&\quad + \int_0^{\ell_2} \left[\alpha \frac{\partial\omega}{\partial x_1} \frac{\partial\vartheta}{\partial x_1} + \beta\omega\vartheta \right]_{x_1=0} dx_2 - \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} q(x)\vartheta dx_1 dx_2 = 0
\end{aligned}$$

olur. Buradan ise,

$$\begin{aligned}
\delta I(\omega) = & \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} D \left[\frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \right. \\
& \left. + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial x_1 \partial x_2} \right] dx_1 dx_2 + \int_0^{\ell_2} \left[B \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial x_2^2} + C \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial x_1 \partial x_2} \right]_{x_1=0} dx_2 \\
& + \int_0^{\ell_2} \left[\alpha \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} + \beta \omega \mathfrak{G} \right]_{x_1=0} dx_2 - \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} q(x) \mathfrak{G} dx_1 dx_2 = 0
\end{aligned} \tag{3.66}$$

elde edilir. (3.66) ifadesindeki integralleri hesaplamak için kısmi integralleme formülü uygulandığında (3.37) ifadesi elde edilir:

$$\begin{aligned}
\delta I = & \int_0^{\ell_2} \left\{ - \left[D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x_2} D(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \mathfrak{G} \right] \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} B \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \mathfrak{G} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} + \alpha \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} + \beta \omega \mathfrak{G} \right\}_{x_1=0} dx_2 \\
& + \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right) \mathfrak{G} + \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial x_2^2} D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - 2 \frac{\partial}{\partial x_1} D(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_2} \right] dx_1 dx_2 + \left(2D(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(B \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right) \mathfrak{G} \\
& + B \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_2} + C \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} - \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} q(x) \mathfrak{G} dx_1 dx_2 = 0.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Buradan da $x_1 = 0$ kenarına karşılık gelen,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\ell_2} \left\{ - \left[D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + 2 \frac{\partial}{\partial x_2} (1-\nu) D \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \vartheta \right] + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} B \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \vartheta - \right. \\
& \left. - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + \alpha \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + \beta \omega \vartheta \right\}_{x_1=0} dx_2
\end{aligned} \tag{3.68}$$

integralinde, ardışık olarak $\frac{\partial \vartheta}{\partial x_1}$ ve ϑ için katsayılar sıfıra eşitlenerek, aranan sınır

koşulları genel durumda aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\alpha \frac{\partial \omega}{\partial x_1} = D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right), \tag{3.69}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x_2} (1-\nu) D \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} = -\beta \omega - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} B \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2}.$$

α ve β sayıları herhangi sabitlerdir. Bu sabitlerin farklı değerleri, farklı fiziksel durumlara karşılık geldiğinden bazı değerleri için $x_1 = 0$ noktasında tanımlanan sınır koşulları aşağıdaki şekilde özetlenebilir. $x = (x_1, x_2)$ olmak üzere,

1. $\alpha = \beta = \infty$. Sert kenetlenme sınır koşulu (Clamped boundary condition)

$$\omega(x) = \frac{\partial \omega}{\partial n}(x) = 0, \quad x = (x_1, x_2), \tag{3.70}$$

2. $\alpha = C = 0$, $\beta = \infty$. Basit dayanak (menteşe) sınır koşulu (Simply supported boundary condition)

$$\omega(x) = D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \tag{3.71}$$

veya,

$$\omega(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2} = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad (3.72)$$

3. $\alpha = \beta = B = C = 0$. Serbest uçlar sınır koşulu (Free boundary condition)

$$D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x_2} (1 - \nu) D \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2). \quad (3.74)$$

Levhanın iki komşu sınırında serbest uçlar koşulu verildiği durumda levhanın köşe noktasında uyum koşulunun elde edilmesi gerekir. Bunun için $x_1 = 0$ ve $x_2 = 0$ kenarlarından sert çubuk yardımıyla bağlanan dikdörtgen levhanın enerji ifadesinden yararlanılabilir. $x_1 = 0$ kenarına ait parametreleri $B_1, C_1, \alpha_1, \beta_1$ ve $x_2 = 0$ kenarına ait parametreleri $B_2, C_2, \alpha_2, \beta_2$ ile gösterilerek, bu durumda levhanın enerjisi,

$$W = \overset{\circ}{W} + \frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} \left\{ B_1 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + C_1 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \alpha_1 \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right)^2 + \beta_1 \omega^2 \right\}_{x_1=0} dx_2 + \quad (3.75)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\ell_1} \left\{ B_2 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)^2 + C_2 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right)^2 + \beta_2 \omega^2 \right\}_{x_2=0} dx_1,$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\overset{\circ}{W}$,

$$\overset{\circ}{W} = \frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} D \left\{ (\Delta \omega)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] \right\} dx_1 dx_2 \quad (3.76)$$

ifadesi ile belirlenmektedir. Yine $I(\omega)$ fonksiyoneli tanımlanıp bu fonksiyonelin (3.66) ifadesine benzer şekilde Gateaux türevinde $x_1 = x_2 = 0$ noktasına karşılık gelen bileşenler sıfıra eşitlenirse,

$$2(1-\nu)D \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \vartheta - B_1 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2} B_1 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \vartheta - C_1 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} -$$

(3.77)

$$-B_2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} B_2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \vartheta - C_2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} = 0$$

elde edilir. Elde edilen son ifadede $x_1 = x_2 = 0$ için, ϑ , $\frac{\partial \vartheta}{\partial x_1}$ ve $\frac{\partial \vartheta}{\partial x_2}$ ifadelerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse,

$$2(1-\nu)D \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} B_1 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} B_2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} = 0,$$

(3.78)

$$B_1 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + C_2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad C_1 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} + B_2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} = 0$$

uyum koşulları elde edilir. Bu koşullar ϑ , $\frac{\partial \vartheta}{\partial x_\varphi}$, $\varphi = 1, 2$ ϑ , $\frac{\partial \vartheta}{\partial x_\varphi}$, $\varphi = 1, 2$

ϑ , $\frac{\partial \vartheta}{\partial x_\varphi}$, $\varphi = 1, 2$ fonksiyonlarının kendilerinin sıfıra eşit olmadığı durumda geçerlidir.

Çünkü $\vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial x_\varphi} = 0$, $\varphi = 1, 2$ sert kenetlenme durumuna karşılık gelen koşullardır. Eğer

$\vartheta = 0$ ise, (3.78) ifadesindeki birinci koşul ortadan kalkar. Eğer $B_\varphi = C_\varphi = 0$, $\varphi = 1, 2$ ise, tek bir uyum koşulu elde edilir:

$$2(1-\nu)D \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} = 0. \quad (3.79)$$

Sınır koşulları veya uyum koşulları elde edildiği zaman dış kuvvetlerin etkisi hiçbir yerde göz önüne alınmadığından yazılmış olan tüm koşullar türdeş koşullar olur. Eğer dış kuvvetler göz önüne alınırsa, bu durumda koşullar türdeş olmaz.

4. DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN DENKLEMLER İÇİN UYUM KOŞULLARI

4.1. Bir Boyutlu Halde Dördüncü Mertebeden Diferansiyel Denklemler İçin Uyum Koşulları

Levhanın denge denkleminin bir boyutlu durumu ince milin denge denklemini ifade eder [42]:

$$B\omega^{IV}(x) = q(x), x \in (0, \ell). \quad (4.1)$$

Burada $B = EJ$ sert eğilme katsayısı, J milin kesitinin eylemsizlik momenti, q dış kuvvetin yoğunluğu, ω eğilme, ω' dönme açısı, $-B\omega''$ eğilme momenti olarak adlandırılır. ℓ uzunluklu (sol ucu $x = 0$, sağ ucu ise $x = \ell$ noktasında) bir mil ele alınsın. Milin elastik deformasyon enerjisi,

$$W = \frac{B}{2} \int_0^{\ell} (\omega'')^2 dx \quad (4.2)$$

ifadesi ile tanımlanır. (4.1) denkleminin $\omega(x)$ çözümünün bulunması problemi,

$$I(\omega) = W - \int_0^{\ell} \omega(x)q(x)dx \quad (4.3)$$

fonksiyonelinin birinci mertebeden Gateaux türevine sıfır değerini veren $\omega(x)$ fonksiyonunun bulunması problemine denktir [42]. İlk olarak x -ekseni boyunca $[-\ell, 0]$ ve $[0, \ell]$ bölgelerini dolduran ve soldaki milin sertlik katsayısı B^- , sağdaki milin sertlik katsayısı ise B^+ olan iki milin oluşturduğu sistem ele alınsın. Sistemin $q(x)$ kuvvetinin etkisi altında olduğu varsayılarak, sistem bir bütün olarak incelensin. (4.2) enerji fonksiyoneline göre sol ve sağ millerin enerjileri, sırasıyla, (4.4) şeklindedir:

$$W^- = \frac{B^-}{2} \int_{-\ell}^0 (\omega'')^2 dx, \quad W^+ = \frac{B^+}{2} \int_0^{\ell} (\omega'')^2 dx. \quad (4.4)$$

Bu durumda potansiyel enerjiyi gösteren $I(\omega)$ fonksiyoneli,

$$I(\omega) = W^- + W^+ - \int_{-\ell}^{\ell} \omega(x)q(x)dx \quad (4.5)$$

şeklinde tanımlanır [42].

Milin eğilmesi problemi için $x = 0$ noktasında uyum koşullarını elde etmek amacıyla

(4.5) fonksiyoneline $\left(\frac{\alpha}{2} [\omega']^2 + \frac{\beta}{2} \omega^2 \right)_{x=0}$ terimi eklenerek miller sisteminin potansiyel enerjisi, genel durumda,

$$I(\omega) = \frac{B^-}{2} \int_{-\ell}^0 (\omega'')^2 dx + \frac{B^+}{2} \int_0^{\ell} (\omega'')^2 dx + \left(\frac{\alpha}{2} [\omega']^2 + \frac{\beta}{2} \omega^2 \right)_{x=0} - \int_{-\ell}^{\ell} q \omega dx \quad (4.6)$$

şeklinde olur. Burada $\alpha \geq 0$ ve $\beta \geq 0$ herhangi sabitlerdir. Bu fonksiyonelde $\frac{\beta}{2} \omega^2(0)$ teriminin olması $x = 0$ noktasında $\omega(x)$ fonksiyonunun sürekliliğinin varsayımını zorunlu kılar.

$$\frac{\alpha}{2} [\omega']^2 = \frac{\alpha}{2} \left\{ \omega'(0^+) - \omega'(0^-) \right\}^2 \quad (4.7)$$

terimi ise, $x = 0$ noktasında $\omega'(x)$ fonksiyonunun süreksizliği durumunda anlamlı olur. (4.6) fonksiyonelinin Gateaux türevi hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} \delta I(\omega) = \frac{d}{dt} [I(\omega + t\vartheta)]_{t=0} &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{B^-}{2} \int_{-\ell}^0 [(\omega + t\vartheta)']^2 dx + \frac{B^+}{2} \int_0^{\ell} [(\omega + t\vartheta)']^2 dx \right. \\ &\left. + \left(\frac{\alpha}{2} [(\omega + t\vartheta)']^2 + \frac{\beta}{2} (\omega + t\vartheta)^2 \right)_{x=0} - \int_{-\ell}^{\ell} q(\omega + t\vartheta) dx \right\}_{t=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \mathbf{B}^- \int_{-\ell}^0 (\omega'' + t\vartheta'') \vartheta'' dx + \mathbf{B}^+ \int_0^\ell (\omega'' + t\vartheta'') \vartheta'' dx + (\alpha(\omega' + t\vartheta') \vartheta' + \beta(\omega + t\vartheta) \vartheta)_{x=0} - \int_{-\ell}^\ell q \vartheta dx \right\}_{t=0} \\
&= \mathbf{B}^- \int_{-\ell}^0 \omega'' \vartheta'' dx + \mathbf{B}^+ \int_0^\ell \omega'' \vartheta'' dx + (\alpha\omega' \vartheta')_{x=0} + (\beta\omega \vartheta)_{x=0} - \int_{-\ell}^\ell q \vartheta dx \quad (4.8)
\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen son eşitlikteki integrallere ardışık olarak iki kez kısmi integralleme yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\delta I &= \mathbf{B}^- \left(- \int_{-\ell}^0 \omega''' \vartheta' dx + \omega'' \vartheta' \Big|_{-\ell}^0 \right) + \mathbf{B}^+ \left(- \int_0^\ell \omega''' \vartheta' dx + \omega'' \vartheta' \Big|_0^\ell \right) \\
&+ \alpha [\omega'] [\vartheta'] \Big|_{x=0} + \beta \omega \vartheta \Big|_{x=0} - \int_{-\ell}^\ell q \vartheta dx \\
&= \mathbf{B}^- \int_{-\ell}^0 \omega^{IV} \vartheta dx + \mathbf{B}^+ \int_0^\ell \omega^{IV} \vartheta dx - \int_{-\ell}^\ell q \vartheta dx + \mathbf{B}^- (\omega'' \vartheta' - \omega''' \vartheta) \Big|_{-\ell}^0 \\
&+ \mathbf{B}^+ (\omega'' \vartheta' - \omega''' \vartheta) \Big|_0^\ell + \alpha [\omega'] [\vartheta'] \Big|_{x=0} + \beta \omega \vartheta \Big|_{x=0} \quad (4.9)
\end{aligned}$$

olur.

Birinci türev sıfıra eşitlenirse ve ϑ nin keyfiliği göz önüne alınırsa, $x = 0$ noktasında,

$$\{[\mathbf{B}\omega'''] + \beta\omega\} \vartheta \Big|_{x=0} + \{-\alpha[\omega'] + \mathbf{B}\omega''\} \vartheta' \Big|_{x=0^-} + \{\alpha[\omega'] - \mathbf{B}\omega''\} \vartheta' \Big|_{x=0^+} = 0 \quad (4.10)$$

eşitliği elde edilir.

ϑ fonksiyonunun keyfi olması koşulundan yararlanılırsa ve ardışık olarak $\vartheta'(0^-)$ ve $\vartheta'(0^+)$, $\vartheta(0)$ ve $\vartheta'(0^+)$, $\vartheta(0)$ ve $\vartheta'(0^-)$ değerleri sıfıra eşitlenirse, ω fonksiyonu için aşağıdaki uyum koşulları elde edilir:

$$[\mathbf{B}\omega'''] = -\beta\omega \Big|_{x=0}, \quad \alpha[\omega'] = \mathbf{B}\omega'' \Big|_{x=0^-}, \quad \alpha[\omega'] = \mathbf{B}\omega'' \Big|_{x=0^+}. \quad (4.11)$$

Son iki eşitlik toplanarak ve çıkartılarak ve ω fonksiyonunun $x = 0$ noktasında sürekli olduğu göz önüne alınarak, genel halde, uyum koşulları,

$$[\omega] = 0, \quad \alpha[\omega'] = B\omega'', \quad [B\omega''] = 0, \quad [B\omega'''] = -\beta\omega \quad (4.12)$$

şeklinde elde edilir. Elde edilen ifadelerdeki negatif olmayan α ve β sabitlerinin aldığı değerlere göre farklı mekanik anlamları vardır.

Şimdi ise α menteşenin sertlik katsayısı ve β dayanağın sertlik katsayısı olmak üzere, (4.12) uyum koşullarının mümkün olabilen tüm özel durumları gösterilsin.

1. $\alpha = \beta = 0$. Bu durumda, $\omega''_{\text{sol}} = \omega''(0^-)$, $\omega''_{\text{sag}} = \omega''(0^+)$ olmak üzere,

$$[\omega] = 0, \quad \omega''_{\text{sol}} = \omega''_{\text{sag}} = 0, \quad [B\omega''] = 0. \quad (4.13)$$

olur. $\alpha = 0$ koşulu menteşenin ideal olması, $\beta = 0$ koşulu ise $x = 0$ birleşme noktasının altında herhangi bir dayanağın olmadığı anlamına gelir.

2. $\alpha = \text{sabit}$, $\beta = 0$. Bu durumda,

$$[\omega] = 0, \quad \alpha[\omega'] = B\omega'', \quad [B\omega''] = [B\omega'''] = 0 \quad (4.14)$$

olur. Bu koşullar $x = 0$ noktasında menteşenin sonlu sertliğe sahip olması anlamına gelir.

3. $\alpha = \infty$, $\beta = 0$. Bu durumda, $\alpha = \infty$ koşulu ω' in $x = 0$ noktasında sürekliliğini göstermektedir. Bunun sonucu olarak (4.6) fonksiyoneline ω' e karşılık gelen terim ortadan kalkar ve iki integral yerine $[-\ell, \ell]$ aralığında tek bir integral yazılır. Uyum koşulları ise, aşağıdaki şekle dönüşür:

$$[\omega] = [\omega'] = [B\omega''] = [B\omega'''] = 0. \quad (4.15)$$

Bu koşullar ise, millerin $x = 0$ noktasında mutlak sert olarak birleştiğini, yani tek bir mil oluşturduğunu gösterir.

4. $\alpha = 0$, $\beta = \text{sabit}$. Bu durumda, (4.12) uyum koşulları aşağıdaki şekle dönüşür:

$$[\omega] = 0, \quad \omega''_{\text{sol}} = \omega''_{\text{sağ}} = 0, \quad [B\omega'''] = -\beta\omega. \quad (4.16)$$

İlk üç koşul birleşme noktasında ideal menteşe olmasını, dördüncü koşul ise $x = 0$ noktasında sert dayanağın varlığını ifade etmektedir.

5. $\alpha = \text{sabit}$, $\beta = \text{sabit}$. Bu durumda,

$$[\omega] = 0, \quad \alpha[\omega'] = B\omega'', \quad [B\omega'''] = 0, \quad [B\omega'''] = -\beta\omega \quad (4.17)$$

olur. Burada ilk üç koşul sonlu sertliği olan menteşenin, dördüncü koşul ise, esnek dayanağın varlığını göstermektedir.

6. $\alpha = \infty$, $\beta = \text{sabit}$.

$$[\omega] = [\omega'] = [B\omega''] = 0, \quad [B\omega'''] = -\beta\omega. \quad (4.18)$$

Burada ise, ilk üç koşul millerin sert birleşimini, yani tek mil oluşturduğunu, dördüncü koşul ise, esnek dayanağın varlığını göstermektedir.

7. $\alpha = 0$, $\beta = \infty$.

$$\omega_{\text{sol}} = \omega_{\text{sağ}} = \omega''_{\text{sol}} = \omega''_{\text{sağ}} = 0 \quad (4.19)$$

Burada, birinci ve üçüncü koşullar $x = 0$ noktasında sol mil, ikinci ve dördüncü koşullar ise, sağ mil için menteşenin olması demektir. Bu durum sol ve sağ milin arasında hiçbir bağlantının olmamasını, yani farklı iki mil olmasını göstermektedir.

8. $\alpha = \text{sabit}$, $\beta = \infty$. Bu durumda,

$$\omega_{\text{sol}} = \omega_{\text{sağ}} = 0, \quad \alpha[\omega'] = B\omega'', \quad [B\omega'''] = 0. \quad (4.20)$$

olur. Bu ise, birleşme noktasında sonlu sertlik katsayısına sahip menteşenin varlığını ve bu noktanın mutlak sert dayanak üzerinde olmasını ifade etmektedir.

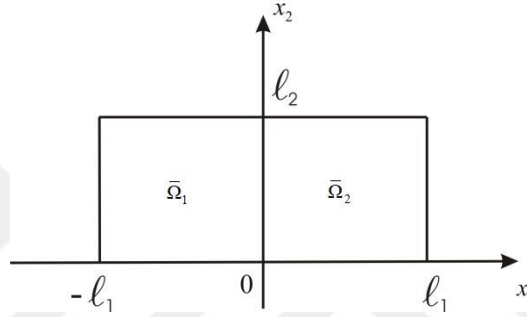
9. $\alpha = \infty$, $\beta = \infty$.

$$\omega_{\text{sol}} = \omega_{\text{sağ}} = 0, \quad [\omega'] = [B\omega''] = 0 \quad (4.21)$$

koşulları millerin $x = 0$ noktasında mutlak sert dayanak üzerinde olduğunu göstermektedir.

4.2. Biharmonik Diferansiyel Denklem İçin Uyum Koşulları

Esnek türdeş levhanın denge denklemi (3.25) şeklinde verilir [42].



Şekil 4.1. Levhalar sistemi

$$\bar{\Omega}_1 = \{x = (x_1, x_2) \mid -l_1 \leq x_1 \leq 0, 0 \leq x_2 \leq l_2\}, \bar{\Omega}_2 = \{x = (x_1, x_2) \mid 0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2\}$$

olmak üzere, $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 = \{x = (x_1, x_2) \mid -l_1 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2\}$ dikdörtgen

bölgesini dolduran farklı özellikli iki levhanın $x_1 = 0$ 'da eğilme sertlik katsayısı B^\pm ,

burulma sertlik katsayısı C^\pm olan mil ile sert bağlandığı varsayılınsın. Oluşan sistemin

eğilmesi problemi incelendiği durumda $\bar{\Omega}_1$ ve $\bar{\Omega}_2$ bölgelerindeki levhalar için sertlik

katsayısı ve Poisson sabiti sırasıyla, D^- , v^- ve D^+ , v^+ alınsın. Sistemi oluşturan

levhaların bu sınırdaki birlikte hareket etmesini sağlamak amacı ile $x_1 = 0$ ortak

sınırdaki uyum koşullarının verilmesi gerekmektedir. Milin sertliği ve sınırdaki

bağlanma yöntemi göz önüne alınmadan levhanın enerjisi,

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} D^+ \left\{ (\Delta\omega)^2 - 2(1-v^+) \left[\frac{\partial^2\omega}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2\omega}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \right\} dx_1 dx_2 \right. \\
&\quad \left. + \int_{0-\ell_1}^{\ell_2} \int_0^0 D^- \left\{ (\Delta\omega)^2 - 2(1-v^-) \left[\frac{\partial^2\omega}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2\omega}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \right\} dx_1 dx_2 \right\}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

milin eğilme ve burulma enerjisi ise, sırasıyla,

$$\frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} B^\pm \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x_2^2} \right)^2 dx_2, \quad \frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} C^\pm \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 dx_2 \tag{4.23}$$

şeklinde tanımlanır [42]. Farklı özellikli iki levhanın $x_1 = 0$ sınırındaki noktalarında herhangi bir yöntem ile sert bağlandığında oluşan levhalar sisteminin enerjisi,

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} D^+ \left\{ (\Delta\omega)^2 - 2(1-v^+) \left[\frac{\partial^2\omega}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2\omega}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \right\} dx_1 dx_2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} \left[B^+ \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + C^+ \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right]_{x_1=0} dx_2 \\
&\quad + \int_{0-\ell_1}^{\ell_2} \int_0^0 D^- \left\{ (\Delta\omega)^2 - 2(1-v^-) \left[\frac{\partial^2\omega}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2\omega}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \right\} dx_1 dx_2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} \left[B^- \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + C^- \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right]_{x_1=0} dx_2 + \frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} \left\{ \alpha \left[\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x_1^2} \right)^2 + \beta \omega^2 \right] \right\}_{x_1=0} dx_2
\end{aligned} \tag{4.24}$$

şeklinde belirlenir. Burada, ω levhanın eğilme fonksiyonu, D^\pm ise sistemi oluşturan levhaların silindirik sertlik katsayısı, q ise levhalar sistemini etkileyen dış kuvvettir. Ayrıca, α levhaları birbirine bağlayan menteşenin, β ise menteşenin altında olabilecek dayanağın sertlik katsayısıdır.

(3.25) esnek türdeş levhanın denge denkleminin $\omega(x)$ çözümünün bulunması problemi, levhanın potansiyel enerjisini tanımlayan,

$$I(\omega) = W - \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} q(x) \omega dx_1 dx_2 \quad (4.25)$$

fonksiyonelinin Gateaux türevine sıfır değerini veren $\omega(x)$ fonksiyonunun bulunması problemine denktir [42]. Bunun için önce (4.22) ifadesindeki $I(\omega)$ fonksiyonelinin Gateaux türevi hesaplanıp sıfıra eşitlensin.

$$\begin{aligned} \delta I(\omega) &= \left. \frac{d}{dt} [I(\omega + t\vartheta)] \right|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} D^+ \left\{ (\Delta(\omega + t\vartheta))^2 - 2(1-v^+) \left[\frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \right\} dx_1 dx_2 \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} \left[B^+ \left(\frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_2^2} \right)^2 + C^+ \left(\frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right]_{x_1=0} dx_2 \\ &\quad + \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} D^- \left\{ (\Delta(\omega + t\vartheta))^2 - 2(1-v^-) \left[\frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \right\} dx_1 dx_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} \left[B^- \left(\frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_2^2} \right)^2 + C^- \left(\frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right]_{x_1=0} dx_2 \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} \left\{ \alpha \left[\left(\frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_1^2} \right)^2 + \beta(\omega + t\vartheta)^2 \right] \right\}_{x_1=0} dx_2 - \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} q(x) \omega dx_1 dx_2 \right\}_{t=0} \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} D^+ \left\{ 2 \left(\frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_2^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_2^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2(1-v^+) \left[\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \right\} dx_1 dx_2 \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} \left[2B^+ \frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_2^2} + 2C^+ \frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1 \partial x_2} \right]_{x_1=0} dx_2 \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} \int_{-\ell_1}^0 D^- \left\{ 2 \left(\frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_2^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_2^2} \right) \right. \\
& \left. - 2(1 - \nu^-) \left[\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \right\} dx_1 dx_2 \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} \left[2B^- \frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_2^2} + 2C^- \frac{\partial^2(\omega + t\vartheta)}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1 \partial x_2} \right]_{x_1=0} dx_2 \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} \left[2\alpha \frac{\partial(\omega + t\vartheta)}{\partial x_1} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + 2\beta(\omega + t\vartheta)\vartheta \right]_{x_1=0} dx_2 - \int_0^{\ell_2} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} q(x)\vartheta dx_1 dx_2 \Bigg\} \Bigg|_{t=0} \\
& = \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} D^+ \left\{ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_2^2} \right) \right. \\
& \left. - (1 - \nu^+) \left[\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \right\} dx_1 dx_2 \\
& + \int_0^{\ell_2} \left[B^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_2^2} + C^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1 \partial x_2} \right]_{x_1=0} dx_2 + \int_0^{\ell_2} \int_{-\ell_1}^0 D^- \left\{ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_2^2} \right) \right. \\
& \left. - (1 - \nu^-) \left[\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \right\} dx_1 dx_2 \\
& + \int_0^{\ell_2} \left[B^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_2^2} + C^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1 \partial x_2} \right]_{x_1=0} dx_2 + \int_0^{\ell_2} \left[\alpha \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + \beta \omega \vartheta \right]_{x_1=0} dx_2 \\
& - \int_0^{\ell_2} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} q(x)\vartheta dx_1 dx_2
\end{aligned}$$

Kolaylık için elde edilen ifadedeki integraller ayrı-ayrı hesaplınsın. Bu durumda ilk integral aşağıdaki şekilde olacaktır:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} D^+ \frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) dx_1 dx_2 \\
&= \int_0^{\ell_2} \left\{ D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \Big|_0^{\ell_1} - \int_0^{\ell_1} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] dx_1 \right\} dx_2 \\
&= \int_0^{\ell_2} D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \Big|_0^{\ell_1} dx_2 - \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] dx_1 dx_2 \\
&= \int_0^{\ell_2} D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \Big|_0^{\ell_1} dx_2 - \int_0^{\ell_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] \mathfrak{G} \Big|_0^{\ell_1} dx_2 \\
&\quad + \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] \mathfrak{G} dx_1 dx_2.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

I_1 integraline benzer olan diğer bir integral benzer işlemler sonucunda,

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_1 &= \int_0^{\ell_2} \int_{-\ell_1}^0 D^- \frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) dx_1 dx_2 \\
&= - \int_0^{\ell_2} D^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \Big|_0^{\ell_1} dx_2 + \int_0^{\ell_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[D^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] \mathfrak{G} \Big|_0^{\ell_1} dx_2 \\
&\quad - \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[D^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] \mathfrak{G} dx_1 dx_2
\end{aligned} \tag{4.28}$$

şeklinde elde edilir. İkinci integral aşağıdaki şekilde belirlenir:

$$I_2 = \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_2} D^+ \frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) dx_2 dx_1$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\ell_1} \left\{ D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_2} \Big|_0^{\ell_2} - \int_0^{\ell_2} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \right] dx_2 \right\} dx_1 \\
&= \int_0^{\ell_1} D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_2} \Big|_0^{\ell_2} dx_1 - \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_2} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \right] dx_2 dx_1 \\
&= \int_0^{\ell_1} D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_2} \Big|_0^{\ell_2} dx_1 - \int_0^{\ell_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \right] \mathfrak{G} \Big|_0^{\ell_2} dx_1 \\
&+ \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_2} \mathfrak{G} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \right] dx_2 dx_1.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

I_2 integraline benzer olan diğerk bir integral de,

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_2 &= \int_{-\ell_1}^0 D^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_2} \Big|_0^{\ell_2} dx_1 - \int_{-\ell_1}^0 \frac{\partial}{\partial x_2} \left[D^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \right] \mathfrak{G} \Big|_0^{\ell_2} dx_1 \\
&+ \int_{-\ell_1}^0 \int_0^{\ell_2} \mathfrak{G} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[D^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \right] dx_2 dx_1
\end{aligned} \tag{4.30}$$

şeklinde bulunur. Üçüncü integral aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}
I_3 &= 2 \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} D^+ (1 - v^+) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 \\
&= 2 \left\{ \int_0^{\ell_1} D^+ (1 - v^+) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \Big|_0^{\ell_2} dx_1 - \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[D^+ (1 - v^+) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} dx_2 dx_1 \right\} \\
I_3 &= 2 \left\{ \int_0^{\ell_1} D^+ (1 - v^+) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \Big|_0^{\ell_2} dx_1 - \int_0^{\ell_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[D^+ (1 - v^+) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \mathfrak{G} \Big|_0^{\ell_1} dx_2 \right. \\
&\left. + \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[D^+ (1 - v^+) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \mathfrak{G} dx_2 dx_1 \right\}.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

I_3 integraline benzer olan diğ er bir integral de,

$$\begin{aligned} \tilde{I}_3 = 2 \left\{ \int_{-\ell_1}^0 D^- (1-v^-) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \Big|_0^{\ell_2} dx_1 - \int_0^{\ell_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[D^- (1-v^-) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \mathfrak{G} \Big|_{-\ell_1}^0 dx_2 \right. \\ \left. + \int_{-\ell_1}^0 \int_0^{\ell_2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[D^- (1-v^-) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \mathfrak{G} dx_2 dx_1 \right\} \end{aligned} \quad (4.32)$$

şeklinde olur. Dördüncü integral aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{aligned} I_4 = \int_0^{\ell_2} B^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial x_2^2} dx_2 = B^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_2} \Big|_0^{\ell_2} - \int_0^{\ell_2} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(B^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) dx_2 \\ = B^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_2} \Big|_0^{\ell_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(B^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \mathfrak{G} \Big|_0^{\ell_2} + \int_0^{\ell_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(B^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \mathfrak{G} dx_2. \end{aligned} \quad (4.33)$$

I_4 integraline benzer olan diğ er bir integral de,

$$\tilde{I}_4 = B^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_2} \Big|_0^{\ell_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(B^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \mathfrak{G} \Big|_0^{\ell_2} + \int_0^{\ell_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(B^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \mathfrak{G} dx_2 \quad (4.34)$$

şeklinde dir. Beşinci integral aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$I_5 = \int_0^{\ell_2} C^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2 = C^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \Big|_0^{\ell_2} - \int_0^{\ell_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} dx_2. \quad (4.35)$$

I_5 integraline benzer olan diğ er bir integral de,

$$\tilde{I}_5 = C^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \Big|_0^{\ell_2} - \int_0^{\ell_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} dx_2 \quad (4.36)$$

şeklinde belirlenir. Altıncı integral aşağıdaki şekilde olur:

$$I_6 = \int_0^{\ell_2} \left[\alpha \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} + \beta \omega \mathfrak{G} \right] \Big|_{x_1=0} dx_2. \quad (4.37)$$

Son olarak yedinci integral de,

$$I_7 = - \int_0^{\ell_2} \int_{0-\ell_1}^{\ell_1} q(x) \mathfrak{G} dx_1 dx_2 \quad (4.38)$$

şeklinde olur. Aynı ayrı hesaplanan $I_1 - I_7$ integralleri I integralinde yerine yazılırsa, aşağıdaki ifade bulunur:

$$\begin{aligned} I = & \int_0^{\ell_2} D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \Big|_0^{\ell_1} dx_2 - \int_0^{\ell_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] \mathfrak{G} \Big|_0^{\ell_1} dx_2 \\ & + \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] \mathfrak{G} dx_1 dx_2 + \int_0^{\ell_1} D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_2} \Big|_0^{\ell_2} dx_1 \\ & - \int_0^{\ell_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \right] \mathfrak{G} \Big|_0^{\ell_2} dx_1 + \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} \mathfrak{G} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \right] dx_1 dx_2 \\ & + 2 \left\{ \int_0^{\ell_1} D^+ (1-v^+) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \Big|_0^{\ell_2} dx_1 - \int_0^{\ell_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[D^+ (1-v^+) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \mathfrak{G} \Big|_0^{\ell_1} dx_2 \right. \\ & \left. + \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[D^+ (1-v^+) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \mathfrak{G} dx_2 dx_1 \right\} \\ & + B^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_2} \Big|_0^{\ell_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(B^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \mathfrak{G} \Big|_0^{\ell_2} + \int_0^{\ell_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(B^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \mathfrak{G} dx_2 + C^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \Big|_0^{\ell_2} \\ & - \int_0^{\ell_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} dx_2 + \int_0^{\ell_2} D^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \Big|_{-\ell_1}^0 dx_2 \\ & - \int_0^{\ell_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[D^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] \mathfrak{G} \Big|_{-\ell_1}^0 dx_2 - \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[D^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] \mathfrak{G} dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-\ell_1}^0 D^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_2} \Big|_0^{\ell_2} dx_1 - \int_{-\ell_1}^0 \frac{\partial}{\partial x_2} \left[D^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \right] \mathfrak{G} \Big|_0^{\ell_2} dx_1 \\
& + \int_{-\ell_1}^0 \int_0^{\ell_2} \mathfrak{G} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[D^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \right] dx_2 dx_1 \\
& + 2 \left\{ \int_{-\ell_1}^0 D^- (1-v^-) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \Big|_0^{\ell_2} dx_1 - \int_0^{\ell_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[D^- (1-v^-) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \mathfrak{G} \Big|_{-\ell_1}^0 dx_2 \right. \\
& \left. + \int_{-\ell_1}^0 \int_0^{\ell_2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[D^- (1-v^-) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \mathfrak{G} dx_2 dx_1 \right\} \\
& + B^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_2} \Big|_0^{\ell_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(B^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \mathfrak{G} \Big|_0^{\ell_2} + \int_0^{\ell_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(B^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \mathfrak{G} dx_2 + C^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \Big|_0^{\ell_2} \\
& - \int_0^{\ell_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} dx_2 + \int_0^{\ell_2} \left[\alpha \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} + \beta \omega \mathfrak{G} \right]_{x_1=0} dx_2 - \int_0^{\ell_2} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} q(x) \mathfrak{G} dx_1 dx_2 = 0.
\end{aligned}$$

Yani ifadeler düzenlendiğinde I integrali aşağıdaki şekilde olur:

$$\begin{aligned}
I & = \int_0^{\ell_2} \left\{ \left[D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \right]_{x_1=\ell_1} - \left[D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \right]_{x_1=0^+} \right\} dx_2 \\
& - \int_0^{\ell_2} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right) \mathfrak{G} \right]_{x_1=\ell_1} - \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right) \mathfrak{G} \right]_{x_1=0^+} \right\} dx_2 \\
& + \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] \mathfrak{G} dx_1 dx_2 \\
& + \int_0^{\ell_1} \left\{ \left[D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_2} \right]_{x_2=\ell_2} - \left[D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_2} \right]_{x_2=0^+} \right\} dx_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{\ell_1} \left\{ \left[\mathfrak{G} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \right) \right]_{x_2=\ell_2} - \left[\mathfrak{G} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \right) \right]_{x_2=0^+} \right\} dx_1 \\
& + \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} \mathfrak{G} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \right] dx_1 dx_2 \\
& + 2 \left\{ \int_0^{\ell_1} \left\{ \left[D^+ (1-v^+) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \right]_{x_2=\ell_2} - \left[D^+ (1-v^+) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \right]_{x_2=0^+} \right\} dx_1 \right. \\
& - \int_0^{\ell_2} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left[D^+ (1-v^+) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \mathfrak{G} \right]_{x_1=\ell_1} - \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left[D^+ (1-v^+) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \mathfrak{G} \right]_{x_1=0^+} \right\} dx_2 \\
& \left. + \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[D^+ (1-v^+) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \mathfrak{G} dx_2 dx_1 \right\} \\
& + \left[B^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_2} \right]_{x_2=\ell_2} - \left[B^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_2} \right]_{x_2=0^+} - \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(B^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \mathfrak{G} \right]_{x_2=\ell_2} \\
& + \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(B^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \mathfrak{G} \right]_{x_2=0^+} + \int_0^{\ell_2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(B^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \mathfrak{G} \right]_{x_1=0} dx_2 + \left[C^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \right]_{x_2=\ell_2} \\
& - \left[C^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \right]_{x_2=0^+} - \int_0^{\ell_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \right]_{x_1=0} dx_2 \\
& - \int_0^{\ell_2} \left\{ \left[D^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \right]_{x_1=\ell_1} - \left[D^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \right]_{x_1=0^-} \right\} dx_2 \\
& + \int_0^{\ell_2} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(D^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right) \mathfrak{G} \right]_{x_1=\ell_1} - \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(D^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right) \mathfrak{G} \right]_{x_1=0^-} \right\} dx_2 \\
& - \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[D^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] \mathfrak{G} dx_1 dx_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\int_0^{\ell_1} \left\{ \left[D^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} \right]_{x_2=\ell_2} - \left[D^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} \right]_{x_2=0^-} \right\} dx_1 \\
& + \int_0^{\ell_1} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left[D^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \vartheta \right]_{x_2=\ell_2} - \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left[D^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \vartheta \right]_{x_2=0^-} \right] \right\} dx_1 \\
& - \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} \vartheta \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[D^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \right] dx_1 dx_2 \\
& - 2 \int_0^{\ell_1} \left\{ \left[D^- (1-v^-) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} \right]_{x_2=\ell_2} - \left[D^- (1-v^-) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} \right]_{x_2=0^-} \right\} dx_1 \\
& - \int_0^{\ell_2} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left[D^- (1-v^-) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \vartheta \right]_{x_1=\ell_1} - \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left[D^- (1-v^-) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \vartheta \right]_{x_1=0^-} \right\} dx_2 \\
& + \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[D^- (1-v^-) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \vartheta dx_2 dx_1 + \left[B^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} \right]_{x_2=\ell_2} - \left[B^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} \right]_{x_2=0^-} \\
& - \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(B^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \vartheta \right]_{x_2=\ell_2} + \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(B^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \vartheta \right]_{x_2=0^-} + \int_0^{\ell_2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(B^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \vartheta \right]_{x_1=0} dx_2 \\
& + \left[C^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} \right]_{x_2=\ell_2} - \left[C^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} \right]_{x_2=0^-} - \int_0^{\ell_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} \right]_{x_1=0} dx_2 \\
& + \int_0^{\ell_2} \left[\alpha \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + \beta \omega \vartheta \right]_{x_1=0} dx_2 - \int_0^{\ell_2} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} q(x) \vartheta dx_1 dx_2 = 0 \tag{4.39}
\end{aligned}$$

Levhaların $x_1 = 0$ ortak sınırında uyum koşullarını elde etmek için önce bu kenara karşılık gelen terimler yazılısın:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\ell_2} \left\{ \left[-D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] \mathfrak{G} \right. \right. \\
& + 2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left[D^+ (1 - v^+) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \mathfrak{G} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(B^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \mathfrak{G} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \left. \right] \Bigg|_{x_1=0^+} \\
& + \left[D^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[D^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] \mathfrak{G} \right. \\
& - 2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left[D^- (1 - v^-) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \mathfrak{G} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(B^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \mathfrak{G} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \left. \right] \Bigg|_{x_1=0^-} \\
& + \left[\alpha \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \beta \omega \mathfrak{G} \right] \Bigg|_{x_1=0} \Bigg\} dx_2
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Elde edilen ifadeyi basit şekilde yazmak için,

$$M_1^+(x) = -D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \Bigg|_{x_1=0^+} \tag{4.41}$$

$$M_1^-(x) = -D^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \Bigg|_{x_1=0^-} \tag{4.42}$$

$$Q_1^+(x) = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left[D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] - 2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left[D^+ (1 - v^+) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \Bigg|_{x_1=0^+} \tag{4.43}$$

$$Q_1^-(x) = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left[D^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] - 2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left[D^- (1 - v^-) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \Bigg|_{x_1=0^-} \tag{4.44}$$

fonksiyonları tanımlanırsa,

$$\begin{aligned}
\delta I(\omega) = & \int_0^{\ell_2} \left\{ -M_1^+ \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} (x) \Big|_{x_1=0^+} - Q_1^+ (x) \mathfrak{G} \Big|_{x_1=0^+} - M_1^- \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} (x) \Big|_{x_1=0^-} \right. \\
& + Q_1^- (x) \mathfrak{G} \Big|_{x_1=0^-} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(B^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \mathfrak{G} \Big|_{x_1=0^+} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0^+} \\
& + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(B^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \mathfrak{G} \Big|_{x_1=0^-} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0^-} \\
& \left. + \alpha \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0^+} - \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0^-} \right] \left[\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0^+} - \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0^-} \right] + \beta \omega \mathfrak{G} \Big|_{x_1=0} \right\} dx_2 + \dots
\end{aligned} \tag{4.45}$$

elde edilir. Yukarıdaki integralde sırasıyla \mathfrak{G} , $\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0^+}$, $\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0^-}$ ifadelerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse,

$$-Q_1^+ + Q_1^- + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(B^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(B^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) + \beta \omega = 0 \tag{4.46}$$

olur. Yani,

$$-Q_1^+ + Q_1^- = \left(-\beta \omega - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[(B^+ + B^-) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right] \right) \Big|_{x_1=0} . \tag{4.47}$$

$$M_1^+ - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \alpha \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right]_{x_1=0} = 0 \tag{4.48}$$

ifadesinden,

$$\alpha \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right]_{x_1=0} = \left(-M_1^+ + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right) \Big|_{x_1=0^+} \tag{4.49}$$

elde edilir. Son olarak,

$$-M_1^- - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) - \alpha \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right]_{x_1=0} = 0 \quad (4.50)$$

ifadesinden de,

$$\alpha \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right]_{x_1=0} = \left(-M_1^- - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right) \Big|_{x_1=0^-} \quad (4.51)$$

bulunur. Elde edilen bu ifadelerden,

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1^+ + Q_1^- = \left(-\beta \omega - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[(B^+ + B^-) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right] \right) \Big|_{x_1=0}, \\ \alpha \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right]_{x_1=0} = \left(-M_1^+ + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right) \Big|_{x_1=0^+} \\ \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right]_{x_1=0} = \left(-M_1^- - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right) \Big|_{x_1=0^-} \end{array} \right. \quad (4.52)$$

yazılabilir. Son iki ifade yerine onların yarım toplam ve farkları yazılırsa, uyum koşulları daha fazla simetrik olarak gözükecektir. (4.49) ve (4.51) ifadelerinden,

$$\alpha \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right]_{x_1=0} = \frac{1}{2} \left\{ - \left(M_1^+ \Big|_{x_1=0^+} + M_1^- \Big|_{x_1=0^-} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \Big|_{x_1=0^+} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \Big|_{x_1=0^-} \right\} \quad (4.53)$$

ve,

$$0 = -M_1^+ \Big|_{x_1=0^+} + M_1^- \Big|_{x_1=0^-} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \Big|_{x_1=0^+} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \Big|_{x_1=0^-}$$

$$\left(M_1^+ - M_1^- \right) \Big|_{x_1=0} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \Big|_{x_1=0^+} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \Big|_{x_1=0^-} \quad (4.54)$$

elde edilir. ω 'nın $x_1 = 0$ 'daki süreksizliği de eklenirse, $[\omega] = 0$ olur. O halde, $x_1 = 0$ 'daki uyum koşulları aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right] = \frac{1}{2} \left\{ D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \Big|_{x_1=0^+} + D^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \Big|_{x_1=0^-} \right. \quad (4.55)$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \Big|_{x_1=0^+} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \Big|_{x_1=0^-} \right\}$$

$$\left(D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \Big|_{x_1=0^+} - D^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \Big|_{x_1=0^-} \right) \quad (4.56)$$

$$= - \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \Big|_{x_1=0^+} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \Big|_{x_1=0^-} \right\}$$

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left[D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left[D^+ (1 - v^+) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \right) \Big|_{x_1=0^+} \right. \quad (4.57)$$

$$\left. - \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left[D^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left[D^- (1 - v^-) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \right) \Big|_{x_1=0^-} \right\}$$

$$= \left(-\beta \omega - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (B^+ + B^-) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \Big|_{x_1=0}$$

(4.55)-(4.57) uyum koşullarından yararlanılarak sabitlerin bazı değerlerine karşılık gelen, fiziksel olarak yorumlanabilen ve literatürde en çok incelenen özel durumlar aşağıdaki gibi yazılabilir:

1) $\alpha = \infty$, $\beta = B^\pm = C^\pm = 0$. Bu durumda,

$$[\omega] = 0, \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right] = (M_1^+ - M_1^-) = Q_1^- + Q_1^+ = 0 \quad (4.58)$$

$$(Q_1^- + Q_1^+)_{x_1=0} = \left(\beta \omega + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (B^+ + B^-) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)_{x_1=0} \quad (4.59)$$

olur. $\alpha = \infty$ koşulu menteşenin hareketsiz olması, $\beta = 0$ koşulu ise $x_1 = 0$ noktalarında dayanağın olmaması anlamına gelir. Bu koşullara göre levhalar birbirine kaynak edilmiş durumda mutlak sert olarak birleştirilmiştir, yani tek bir levha oluşturulmuştur.

2) $\alpha = \beta = 0$, $B^+ = B^- = B$, $C^+ = C^- = C$. Bu durumda, levhalar arasındaki uyum koşulları,

$$[\omega] = (M_1^+ - M_1^-) \pm \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)_{x_1=0^\pm} = 0 \quad (4.60)$$

şeklinde olur. $\alpha = 0$ koşulu menteşenin ideal olması, $\beta = 0$ koşulu ise levhaların ortak sınırında dayanağın olmaması anlamına gelir.

3) $\alpha = \infty$, $\beta = 0$, $B^+ = B^- = B$, $C^+ = C^- = C$. Bu durumda,

$$[\omega] = \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right] = 0, (M_1^+ - M_1^-) = 2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(C \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right), (Q_1^+ - Q_1^-) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(B \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \quad (4.61)$$

olur. $\alpha = \infty$ koşulu menteşenin hareketsiz olması, $\beta = 0$ koşulu ise $x_1 = 0$ noktalarında dayanağın olmaması anlamına gelir. Bu koşullara göre levhalar tek bir levha gibi davranmaktadır.

4) $\alpha = \beta = C^+ = C^- = 0$, $B^+ = B^- = B$. Bu durumda, levhalar arasındaki uyum koşulları,

$$[\omega] = 0, (M_1^+ - M_1^-) = 0, (M_1^+ + M_1^-) = 0, (Q_1^+ - Q_1^-) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(B \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \quad (4.62)$$

şeklinde olur. Burada $\alpha = 0$ koşulu menteşenin ideal olması, $\beta = 0$ koşulu ise levhaların ortak sınırında dayanağın olmaması anlamına gelir.

5) $\alpha = \infty$, $\beta = C^+ = C^- = 0$, $B^+ = B^- = B$. Bu durumda, uyum koşulları,

$$[\omega] = 0, \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right] = 0, (M_1^+ - M_1^-) = 0, (Q_1^+ - Q_1^-) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(B \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \quad (4.63)$$

şeklindedir. $\alpha = \infty$ koşulu menteşenin hareketsiz olması, $\beta = 0$ koşulu ise $x_1 = 0$ noktalarında dayanağın olmaması anlamına gelir.



5. SONLU FARKLAR

5.1. Genel Kavramlar

Diferansiyel veya kısmi türevli diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerinin yaklaşık yöntemlerle çözümü, verilen probleme karşılık gelen lineer cebirsel denklem sisteminin çözümü problemine dönüşür. Bu lineer cebirsel denklem sistemi genel olarak diferansiyel denklemdeki türevlerin yaklaşık ifadelerinin yerlerine yazılması sonucunda elde edilir. Diferansiyel operatörlerin yerine sonlu fark ifadeleri yazılarak elde edilen sisteme sonlu fark denklemi denir. Basitlik için $[a,b]$ aralığında tanımlı $y(x)$ fonksiyonunun türevlerinin yaklaşık ifadelerini (fark operatörlerini) elde etmek için bu aralıkta sonlu sayıda noktalardan oluşan kafes (şebeke) tanımlanır [70].

Tanım 5.1.1.

$$\bar{w}_h = \left\{ x_i \mid x_{i+1} = x_i + h_i, \quad x_1 = a, \quad x_n = b, \quad i = \overline{1, n-1} \right\}, \quad \sum_{i=1}^{n-1} h_i = b - a \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlanan \bar{w}_h kafesine eşit adımlı olmayan kafes denir.

Tanım 5.1.2. Eğer $h_i = h = \text{sabit}$ durumunda,

$$w_h = \left\{ x_i \mid x_{i+1} = x_i + h, \quad x_1 = a, \quad x_n = b, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad h = \frac{b-a}{n-1} \right\} \quad (5.2)$$

şeklinde tanımlanan kafeslere eşit adımlı kafes denir.

$[a,b]$ aralığında tanımlı $y(x)$ fonksiyonunun $x_i \in w_h, i = \overline{1, n}$ noktalarında $y_i = y(x_i), i = \overline{1, n}$, değerlerinden yararlanarak,

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad (5.3)$$

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1} \quad (5.4)$$

$$\delta y_i = \frac{1}{2}(\Delta y_i + \nabla y_i) = \frac{1}{2}(y_{i+1} - y_{i-1}) \quad (5.5)$$

farkları tanımlanabilir.

Tanım 5.1.3. (5.3) ve (5.4) şeklinde tanımlanan Δy_i ve ∇y_i değerlerine sırasıyla ileri ve geri sonlu farklar, (5.5) şeklinde tanımlanan, ileri ve geri sonlu farkların aritmetik ortalaması olan δy_i ifadesine ise merkezi sonlu fark denir.

(5.3)-(5.5) ifadeleri 1. dereceden sonlu fark ifadeleridir.

Benzer şekilde ikinci dereceden sonlu farklar da aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta(y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - y_{i+1} - y_{i+1} + y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i, \quad (5.6)$$

$$\Delta(\nabla y_i) = \Delta(y_i - y_{i-1}) = y_{i+1} - y_i - y_i + y_{i-1} = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}, \quad (5.7)$$

$$\nabla(\Delta y_i) = \nabla(y_{i+1} - y_i) = y_{i+1} - y_i - y_i + y_{i-1} = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}, \quad (5.8)$$

$$\nabla^2 y_i = \nabla(\nabla y_i) = \nabla(y_i - y_{i-1}) = y_i - y_{i-1} - y_{i-1} + y_{i-2} = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}. \quad (5.9)$$

ikinci dereceden sonlu farklar son ifadelerinden,

$$\nabla^2 y_{i-1} = \nabla(\nabla y_i) = \Delta(\nabla y_i) = \Delta^2 y_{i+1} \quad (5.10)$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

Her hangi her mertebeden sürekli diferansiyellenebilir $y(x)$ fonksiyonunun x_i noktası civarında Taylor serisine açılımından yararlanılarak, birinci mertebeden yaklaşık türevler için eşit adımlı kafeste sonlu fark ifadeleri,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_i} \sim y_{x,i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + O(h) = \frac{\Delta y_i}{h} + O(h), \quad (5.11)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_i} \sim y_{\bar{x},i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + O(h) = \frac{\nabla y_i}{h} + O(h), \quad (5.12)$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x_i} \sim y_{x,i} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2) = \frac{\delta y_i}{h} + O(h^2) \quad (5.13)$$

ve eşit adımlı olmayan kafeste sonlu fark ifadeleri,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_i} \sim y_{x,i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} + O(h_i) = \frac{\Delta y_i}{h_i} + O(h_i), \quad (5.14)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_i} \sim y_{\bar{x},i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} + O(h_{i-1}) = \frac{\nabla y_i}{h_{i-1}} + O(h_{i-1}), \quad (5.15)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_i} \sim y_{x,i} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{h_i} y_{i+1} - \left(\frac{1}{h_i} - \frac{1}{h_{i-1}} \right) y_i - \frac{1}{h_{i-1}} y_{i-1} + O(h_i + h_{i-1}) \right] \quad (5.16)$$

şeklinde yazılabilir. Elde edilen (5.11) ve (5.14) ifadeleri x_i noktasında ileri türevin, (5.12) ve (5.15) ifadeleri geri türevin, (5.8) ve (5.11) ifadeleri ise merkezi türevin ifadeleridir.

Benzer şekilde, 2. mertebeden türev için sonlu fark ifadesi eşit adımlı kafeste,

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x_i} \sim y_{\bar{x},i} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2) = \frac{\Delta(\nabla y_i)}{h^2} + O(h^2) = \frac{\nabla(\Delta y_i)}{h^2} + O(h^2) \quad (5.17)$$

ve eşit adımlı olmayan kafeste,

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x_i} \sim y_{\bar{x},i} = \frac{1}{h_i^2} y_{i+1} - \left(\frac{1}{h_i^2} + \frac{1}{h_i h_{i-1}} \right) y_i + \frac{1}{h_i h_{i-1}} y_{i-1} + O(h_i^2 + h_{i-1}^2) \quad (5.18)$$

şeklinde elde edilir.

Benzer şekilde, $y(x_1, x_2)$ iki değişkenli fonksiyonu için (x_1^i, x_2^j) noktasında eşit adımlı olmayan kafeste kısmi türevlerin sonlu fark ifadeleri yazılabilir. $y_{ij} = y(x_1^i, x_2^j)$ olmak üzere, birinci mertebeden kısmi türevlerin sonlu fark ifadeleri,

$$y_{\bar{x}_1} = \frac{y_{ij} - y_{i-1j}}{h_{i-1}}, \quad y_{x_1} = \frac{y_{i+1j} - y_{ij}}{h_i}, \quad y_{\bar{x}_2} = \frac{y_{ij} - y_{ij-1}}{h_2}, \quad y_{x_2} = \frac{y_{ij+1} - y_{ij}}{h_2} \quad (5.19)$$

ikinci mertebeden kısmi türevlerin sonlu fark ifadeleri,

$$\begin{aligned}
y_{\bar{x}_1 x_1} &= \frac{1}{h_i^2} y_{i+1j} - \left(\frac{1}{h_i^2} + \frac{1}{h_i h_{i-1}} \right) y_{ij} + \frac{1}{h_i h_{i-1}} y_{i-1j} \\
y_{\bar{x}_1 \bar{x}_1} &= \frac{1}{h_{i-1}^2} y_{ij} - \left(\frac{1}{h_{i-1}^2} + \frac{1}{h_{i-1} h_{i-2}} \right) y_{i-1j} + \frac{1}{h_{i-1} h_{i-2}} y_{i-2j} \\
y_{x_1 x_1} &= \frac{1}{h_{i+1} h_i} y_{i+2j} - \left(\frac{1}{h_{i+1} h_i} + \frac{1}{h_i^2} \right) y_{i+1j} + \frac{1}{h_i^2} y_{ij} \\
y_{\bar{x}_2 \bar{x}_2} &= \frac{y_{ij+1} - 2y_{ij} + y_{i,j-1}}{h_2^2}, \quad y_{\bar{x}_2 \bar{x}_2} = \frac{y_{ij} - 2y_{i,j-1} + y_{i,j-2}}{h_2^2}, \quad y_{x_2 x_2} = \frac{y_{ij+2} - 2y_{ij+1} + y_{ij}}{h_2^2}
\end{aligned} \tag{5.20}$$

ikinci mertebeden karışık türevlerin sonlu fark ifadeleri,

$$\begin{aligned}
y_{\bar{x}_1 x_2} &= \frac{y_{ij+1} - y_{i-1j+1} - y_{ij} + y_{i-1j}}{h_{i-1} h_2}, \quad y_{x_1 \bar{x}_2} = \frac{y_{i+1j} - y_{ij} - y_{i+1j-1} + y_{ij-1}}{h_i h_2}, \\
y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} &= \frac{y_{ij} - y_{i-1j} - y_{i,j-1} + y_{i-1j-1}}{h_{i-1} h_2}, \quad y_{x_1 x_2} = \frac{y_{i+1j+1} - y_{ij+1} - y_{i+1j} + y_{ij}}{h_i h_2}
\end{aligned} \tag{5.21}$$

ve son olarak dördüncü mertebeden kısmi türevlerin sonlu fark ifadeleri,

$$\begin{aligned}
y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_1 x_1} &= \frac{1}{h_{i+1}^2 h_i^2} y_{i+2j} - \left(\frac{1}{h_i^3 h_{i-1}} + \frac{1}{h_{i+1}^2 h_i^2} + \frac{1}{h_{i+1} h_i^3} + \frac{1}{h_i^4} \right) y_{i+1j} \\
&+ \left(\frac{2}{h_i^3 h_{i-1}} + \frac{1}{h_i^2 h_{i-1}^2} + \frac{1}{h_i h_{i-1}^3} + \frac{1}{h_{i+1} h_i^3} + \frac{1}{h_i^4} \right) y_{ij} \\
&- \left(\frac{1}{h_i^2 h_{i-1}^2} + \frac{1}{h_i h_{i-1}^3} + \frac{1}{h_i h_{i-1}^2 h_{i-2}} + \frac{1}{h_i^3 h_{i-1}} \right) y_{i-1j} + \frac{1}{h_i h_{i-1}^2 h_{i-2}} y_{i-2j}
\end{aligned} \tag{5.22}$$

$$y_{\bar{x}_2 x_2 \bar{x}_2 x_2} = \frac{y_{ij+2} - 4y_{ij+1} + 6y_{ij} - 4y_{i,j-1} + y_{i,j-2}}{h_2^4} \tag{5.23}$$

şeklinde elde edilir.

5.2. Bir Boyutlu Miller Sisteminin Denge Denkleminin Sonlu Fark Yaklaşımı

Ox - ekseninde $[-\ell, 0]$ ve $[0, \ell]$ aralıklarını dolduran miller sistemi ele alınsın. Birinci milin sertlik katsayısı B^- , ikinci milin sertlik katsayısı ise B^+ olsun. Bu millerin oluşturduğu sistemin $q(x)$ kuvvetinin etkisi altında olduğu varsayılınsın. Milin denge denkleminin (4.1) olduğu göz önüne alınırsa [42], birinci mil için $B = B^-$, ikinci mil için ise $B = B^+$ alınması gerekir. $x = 0$ noktasında (millerin birleştiği noktada) milin $\omega(x)$ eğilme fonksiyonunun (4.12) uyum koşullarını sağladığı varsayılınsın. Amaç, bu koşulların kafeste sonlu fark yaklaşımlarını elde etmektir. Bunun için $[-\ell, \ell]$ aralığında eşit adımlı $\bar{w} = \{x_i = ih : i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N\}$ kafesi tanımlansın ve,

$$I(\omega) = \frac{B^-}{2} \int_{-\ell}^0 (\omega'')^2 dx + \frac{B^+}{2} \int_0^{\ell} (\omega'')^2 dx + \left(\frac{\alpha}{2} [\omega']^2 + \frac{\beta}{2} \omega^2 \right)_{x=0} - \int_{-\ell}^{\ell} q \omega dx \quad (5.24)$$

enerji fonksiyonelinin yaklaşımı elde edilsin. $w = \{x_i : i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N-1)\}$ ile \bar{w} kafesinin iç noktaları, $w_{\text{sol}} = \{x_i : i = -1, -2, \dots, -(N-1)\}$ ile $[-\ell, 0]$ aralığındaki iç noktaları, $w_{\text{sağ}} = \{x_i : i = 1, 2, \dots, (N-1)\}$ ile $[0, \ell]$ aralığındaki iç noktaları gösterilsin. Bu durumda millerin kesişme noktasında uyum koşullarının sonlu fark ifadelerinin elde edilmesi gerekmektedir. Basitlik için $x = \pm \ell$ noktalarında,

$$\omega = \omega'' = 0, \quad x = \pm \ell \quad (5.25)$$

menteşe koşulunun sağlandığı varsayılınsın. (5.24) fonksiyoneline ait olan integraller yamuk yönteminin yardımıyla hesaplanırsa,

$$\int_{-\ell}^{\ell} q \omega dx = \sum_w q(x) \omega(x) h, \quad (5.26)$$

$$\int_{-\ell}^0 (\omega'')^2 dx \sim \sum_{w_{\text{sol}}} (\omega'')^2 h + (\omega''_{\text{sol}})^2 \frac{h}{2}, \quad (5.27)$$

$$\int_0^{\ell} (\omega'')^2 dx \sim \sum_{w_{sağ}} (\omega'')^2 h + (\omega''_{sağ})^2 \frac{h}{2} \quad (5.28)$$

elde edilir. Burada, $\omega''_{sol} = \omega''(0^-)$, $\omega''_{sağ} = \omega''(0^+)$ 'dir. Yukarıdaki ifadeler (5.24) fonksiyonelinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} I(\omega) &\sim \frac{B^-}{2} \left[\sum_{w_{sol}} (\omega'')^2 h + (\omega''_{sol})^2 \frac{h}{2} \right] + \frac{B^+}{2} \left[\sum_{w_{sağ}} (\omega'')^2 h + (\omega''_{sağ})^2 \frac{h}{2} \right] \\ &+ \left(\frac{\alpha}{2} [\omega']^2 + \frac{\beta}{2} \omega^2 \right)_{x=0} - \sum_w q(x) \omega(x) h \\ &= \frac{1}{2} \left\{ B^- \sum_{w_{sol}} (\omega'')^2 h + B^+ \sum_{w_{sağ}} (\omega'')^2 h - 2 \sum_w q(x) \omega(x) h \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{B^- h}{2} (\omega''_{sol})^2 + \frac{B^+ h}{2} (\omega''_{sağ})^2 + \alpha [\omega']^2 \Big|_{x=0} \right\} + \frac{\beta}{2} \omega^2(0) \end{aligned} \quad (5.29)$$

buradan ise,

$$I(\omega) \sim \frac{1}{2} \left\{ B^- \sum_{w_{sol}} (\omega'')^2 h + B^+ \sum_{w_{sağ}} (\omega'')^2 h - 2 \sum_w q(x) \omega(x) h \right\} + I_0 + \frac{\beta}{2} \omega^2(0) \quad (5.30)$$

elde edilir. Son ifadede I_0 ,

$$I_0 = \frac{1}{2} \left\{ h \frac{B^-}{2} (\omega''_{sol})^2 + h \frac{B^+}{2} (\omega''_{sağ})^2 + \alpha [\omega']^2 \Big|_{x=0} \right\} \quad (5.31)$$

olarak ele alınmıştır.

$x \in w_{sol}$ ve $x \in w_{sağ}$ olduğunda ω'' türevinin sonlu fark yaklaşımı $\omega'' \sim \omega_{xx}$, $x \in w_{sol}$, $w_{sağ}$ gibi ele alınsın [43,71]. $x=0$ noktasında sonlu fark yaklaşımını elde etmek için ise, ek işlemler yapılarak, önce α sayısının sonlu ve sıfırdan farklı durumu incelenmiştir. $\alpha < \infty$, $\alpha \neq 0$ ve (4.12) uyum koşullarından,

$$\alpha[\omega'] = B\omega'', \quad [B\omega''] = 0 \Rightarrow B^+\omega''_{\text{sağ}} = B^-\omega''_{\text{sol}}$$

olduğu için,

$$\begin{aligned} B^-(\omega''_{\text{sol}})^2 + B^+(\omega''_{\text{sağ}})^2 &= \frac{1}{B^-} (B^-\omega''_{\text{sol}})^2 + \frac{1}{B^+} (B^+\omega''_{\text{sağ}})^2 \\ &= \frac{1}{B^-} (B^-\omega''_{\text{sol}})^2 + \frac{1}{B^+} (B^-\omega''_{\text{sol}})^2 = \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right) (B^-\omega''_{\text{sol}})^2 \\ &= \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right) (\alpha[\omega']|_{x=0})^2 = \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right) \alpha^2 [\omega']^2|_{x=0} \end{aligned} \quad (5.32)$$

yazılabilir. Yukarıdaki ifade (5.31)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right) \alpha^2 [\omega']^2|_{x=0} + \alpha [\omega']^2|_{x=0} \right\} \\ I_0 &= \frac{\alpha}{2} \left\{ 1 + \frac{\alpha \hbar}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right) \right\} [\omega']^2|_{x=0} \end{aligned} \quad (5.33)$$

elde edilir. Türevlerin sıçramalarının sonlu fark yaklaşımı yazılsın ve onların hatalarını incelensin:

$$(\omega_x - \omega_{\bar{x}})|_{x=0} = [\omega']^2|_{x=0} + \frac{\hbar}{2} (\omega''_{\text{sol}} + \omega''_{\text{sağ}}) + O(\hbar^2). \quad (5.34)$$

(4.12) ifadelerinin 2. ve 3. koşullarından ve,

$$\alpha[\omega'] = B\omega'', \quad [B\omega''] = 0 \Rightarrow B^+\omega''_{\text{sağ}} = B^-\omega''_{\text{sol}} \quad (5.35)$$

ifadesinden yararlanılarak,

$$\begin{aligned}
(\omega_x - \omega_{\bar{x}})|_{x=0} &= [\omega']|_{x=0} + \frac{h}{2}(\omega''_{\text{sol}} + \omega''_{\text{sağ}}) + O(h^2) \\
&= [\omega']|_{x=0} + \frac{h}{2}\left(\frac{B^-}{B^-}\omega''_{\text{sol}} + \frac{B^+}{B^+}\omega''_{\text{sağ}}\right) + O(h^2) \\
&= [\omega']|_{x=0} + \frac{h}{2}\left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)(B^-\omega''_{\text{sol}}) + O(h^2) \\
&= [\omega']|_{x=0} + \frac{h}{2}\left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)\alpha[\omega'] + O(h^2) \\
&= \left\{1 + \frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)\right\}[\omega']|_{x=0} + O(h^2)
\end{aligned}$$

veya,

$$[\omega']|_{x=0} = \left\{1 + \frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)\right\}^{-1} (\omega_x - \omega_{\bar{x}})|_{x=0} + O(h^2) \quad (5.36)$$

elde edilir. Bu ifadeler (5.33)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
I_0 &= \frac{\alpha}{2}\left\{1 + \frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)\right\}[\omega']^2|_{x=0} \\
&= \frac{\alpha}{2}\left\{1 + \frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)\right\}\left\{1 + \frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)\right\}^{-2} (\omega_x - \omega_{\bar{x}})^2|_{x=0} + O(h^2) \\
&= \frac{\alpha}{2}\left\{1 + \frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)\right\}^{-1} (\omega_x - \omega_{\bar{x}})^2|_{x=0} + O(h^2)
\end{aligned} \quad (5.37)$$

elde edilir. $O(h^2)$ hatası atılırsa, (5.33)'ün sonlu fark yaklaşımı,

$$I_0 \sim \frac{\alpha}{2}\left\{1 + \frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)\right\}^{-1} (\omega_x - \omega_{\bar{x}})^2 \quad (5.38)$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi ise, $\alpha = 0$ ve $\alpha = \infty$ limit durumları ele alınsın. Eğer $\alpha = 0$ ise, (4.12) ifadesine göre $B\omega'' = 0$ yani, $\omega''_{\text{sol}} = \omega''_{\text{sağ}} = 0$ ve buradan da $I_0 = 0$ olduğunu elde edilir. (5.38)'de $\alpha = 0$ yazılırsa, $I_0 \sim 0$ yaklaşımı elde edilir. Eğer $\alpha = \infty$ ise, bu durumda (4.12) uyum koşullarına göre, $\alpha[\omega'] = B\omega'' \Rightarrow [\omega'] = \frac{B}{\alpha}\omega'' \Rightarrow [\omega']|_{x=0} = 0$ olur [42] ve (5.31) ifadesi,

$$I_0 = \frac{\hbar}{4} \left\{ B^- (\omega''_{\text{sol}})^2 + B^+ (\omega''_{\text{sağ}})^2 \right\} \quad (5.39)$$

şekline dönüşür. (5.38) ifadesinde $\alpha \rightarrow \infty$ için limite geçilirse,

$$I_0 \sim \frac{\frac{\alpha}{2}}{1 + \frac{\alpha\hbar}{2} \left(\frac{B^+ + B^-}{B^+ B^-} \right)} (\omega_x - \omega_{\bar{x}})^2 \text{ olduğundan,}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} I_0 = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\frac{\alpha}{2}}{1 + \frac{\alpha\hbar}{2} \left(\frac{B^+ + B^-}{B^+ B^-} \right)} (\omega_x - \omega_{\bar{x}})^2 = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2} \left(\frac{2}{\alpha} + \hbar \left(\frac{B^+ + B^-}{B^+ B^-} \right) \right)} (\omega_x - \omega_{\bar{x}})^2$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{2}{\alpha} + \hbar \left(\frac{B^+ + B^-}{B^+ B^-} \right)} (\omega_x - \omega_{\bar{x}})^2 = \frac{B^+ B^-}{\hbar (B^+ + B^-)} (\omega_x - \omega_{\bar{x}})^2$$

olur. Böylece,

$$I_0 \sim \frac{B^+ B^-}{\hbar (B^+ + B^-)} (\omega_x - \omega_{\bar{x}})^2 \quad (5.40)$$

elde edilir [42]. Taylor formülüne göre, açılımı yazılırsa,

$$\omega_x - \omega_{\bar{x}} = \omega'' h + O(h^3) \quad (5.41)$$

olduğu göz önüne alınarak,

$$(\omega_x - \omega_{\bar{x}})^2 = (\omega'')^2 h^2 + O(h^3) = \left[\frac{1}{2} (\omega''_{\text{sol}} + \omega''_{\text{sağ}}) \right]^2 h^2 + O(h^3) \quad (5.42)$$

ifadesi, (5.40)'ın sağ tarafında yerine yazılarak gerekli işlemler yapıldığında,

$$\begin{aligned} \frac{B^+ B^-}{h(B^+ + B^-)} (\omega_x - \omega_{\bar{x}})^2 &= \frac{B^+ B^-}{h(B^+ + B^-)} \frac{h^2}{4} (\omega''_{\text{sol}} + \omega''_{\text{sağ}})^2 + O(h^3) \\ &= \frac{h B^+ B^-}{4(B^+ + B^-)} (\omega''_{\text{sol}} + \omega''_{\text{sağ}})^2 + O(h^3) \end{aligned} \quad (5.43)$$

ve buradan da,

$$\frac{B^+ B^-}{h(B^+ + B^-)} (\omega_x - \omega_{\bar{x}})^2 = \frac{h B^+ B^-}{4(B^+ + B^-)} (\omega''_{\text{sol}} + \omega''_{\text{sağ}})^2 + O(h^3) \quad (5.44)$$

ifadesini sağladığı görülür. (4.12) ifadesinin üçüncü koşuluna göre $[B\omega''] = 0$ yani,

$B^+ \omega''_{\text{sağ}} = B^- \omega''_{\text{sol}}$ ve buradan da,

$$\begin{aligned} B^+ B^- (\omega''_{\text{sol}} + \omega''_{\text{sağ}})^2 &= B^+ B^- \left((\omega''_{\text{sol}})^2 + 2\omega''_{\text{sol}} \omega''_{\text{sağ}} + (\omega''_{\text{sağ}})^2 \right) \\ &= B^+ B^- \left((\omega''_{\text{sol}})^2 + \frac{B^-}{B^+} \omega''_{\text{sol}} \omega''_{\text{sağ}} + \frac{B^+}{B^-} \omega''_{\text{sol}} \omega''_{\text{sağ}} + (\omega''_{\text{sağ}})^2 \right) \\ &= B^+ B^- (\omega''_{\text{sol}})^2 + B^+ B^- (\omega''_{\text{sağ}})^2 + (B^- \omega''_{\text{sol}})^2 + (B^+ \omega''_{\text{sağ}})^2 \\ &= (B^+ + B^-) \left\{ B^- (\omega''_{\text{sol}})^2 + B^+ (\omega''_{\text{sağ}})^2 \right\} \end{aligned} \quad (5.45)$$

olduğu görülür. Bu ifade, (5.44) eşitliğinde göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{B^+B^-}{h(B^+ + B^-)}(\omega_x - \omega_{\bar{x}})^2 &= \frac{h}{4} \frac{(B^+ + B^-)}{(B^+ + B^-)} \left\{ B^- (\omega''_{sol})^2 + B^+ (\omega''_{sağ})^2 \right\} + O(h^3) \\ &= \frac{h}{4} \left\{ B^- (\omega''_{sol})^2 + B^+ (\omega''_{sağ})^2 \right\} + O(h^3) \end{aligned} \quad (5.46)$$

olur. Elde edilen ifade, (5.39) ile karşılaştırılırsa, $\alpha = \infty$ olduğunda (5.38) ifadesinin sonlu fark yaklaşımının $O(h^3)$ hatasına sahip olduğu görülür. Şimdi ise elde edilen tüm sonlu fark yaklaşımları (5.30) ifadesinde yazılsın. Sonuçta (5.24) fonksiyonelinin aşağıdaki sonlu fark yaklaşımı elde edilir:

$$\begin{aligned} I_h(y) &= \frac{1}{2} \left\{ B^- \sum_{w_{sol}} (y_{\bar{x}x})^2 h + B^+ \sum_{w_{sağ}} (y_{\bar{x}x})^2 h - 2 \sum_w qy h \right\} \\ &+ \frac{\alpha}{2} \left\{ 1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right) \right\}^{-1} (y_x - y_{\bar{x}})^2 + \frac{\beta}{2} y^2(0). \end{aligned} \quad (5.47)$$

$x = 0$ noktasına karşılık gelen terimler gruplaştırıldığında,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} \left\{ 1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right) \right\}^{-1} (y_x - y_{\bar{x}})^2 &= \frac{\alpha h^2}{2} \left\{ 1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right) \right\}^{-1} (y_{\bar{x}x})^2 \\ &= \frac{\frac{\alpha h^2}{2}}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} (y_{\bar{x}x})^2 = \frac{\frac{\alpha h}{2} h}{\frac{\alpha h}{2} \left(\frac{2}{\alpha h} + \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right) \right)} (y_{\bar{x}x})^2 \\ &= h \frac{B^- B^+}{B^- + B^+} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} \right\} (y_{\bar{x}x})^2 \end{aligned} \quad (5.48)$$

elde edilir. Elde edilen ifadenin basitleştirilmesi amacıyla,

$$\tilde{B} = \begin{cases} B^-, & x \in W_{\text{sol}}, \\ B^+, & x \in W_{\text{sağ}}, \\ 2 \frac{B^- B^+}{B^- + B^+} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} \right\}, & x = 0. \end{cases} \quad (5.49)$$

şeklinde yazılısın [42]. Bu ifade, (5.47)'de göz önüne alınırsa,

$$\frac{\alpha}{2} \left\{ 1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right) \right\}^{-1} (y_x - y_{\bar{x}})^2 = h \frac{B^- B^+}{B^- + B^+} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} \right\} (y_{\bar{x}x})^2 \quad (5.50)$$

ve buradan da (5.24) fonksiyonelinin $I_h(y)$ sonlu fark yaklaşımı,

$$I_h(y) = \frac{1}{2} \left\{ B^- \sum_{W_{\text{sol}}} (y_{\bar{x}x})^2 h + B^+ \sum_{W_{\text{sağ}}} (y_{\bar{x}x})^2 h - 2 \sum_w qyh \right. \quad (5.51)$$

$$\left. + 2h \frac{B^- B^+}{B^- + B^+} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} \right\} (y_{\bar{x}x})^2 \right\} + \frac{\beta}{2} y^2(0)$$

şeklinde elde edilmiş olur. Buradan ise,

$$I_h(y) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{W_{\text{sol}}} B^- (y_{\bar{x}x})^2 h + \sum_{W_{\text{sağ}}} B^+ (y_{\bar{x}x})^2 h - 2 \sum_w qyh \right. \\ \left. + 2h \frac{B^- B^+}{B^- + B^+} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} \right\} (y_{\bar{x}x})^2 \right\} + \frac{\beta}{2} y^2(0)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{w_{sol}} B^- (y_{\bar{x}x})^2 h + \sum_{w_{sağ}} B^+ (y_{\bar{x}x})^2 h - 2 \sum_w qy h + \frac{\alpha h^2/2}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} (y_{\bar{x}x})^2 \right\} \quad (5.52)$$

$$+ \frac{\beta}{2} y^2(0) = \frac{1}{2} \sum_w \tilde{B} (y_{\bar{x}x})^2 h + \frac{\beta}{2} y^2(0) - \sum_w q(x)y(x)h$$

yani,

$$I_h(y) = \frac{1}{2} \sum_w \tilde{B} (y_{\bar{x}x})^2 h + \frac{\beta}{2} y^2(0) - \sum_w q(x)y(x)h \quad (5.53)$$

şekline dönüşür. Bellidir ki $I_h(y)$, $y(x)$, $x \in w$ değişkeninin fonksiyonudur. Onun $y(x)$ 'e göre diferansiyeli hesaplanırsa ve birinci türevi sıfıra eşitlenirse x_i , $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N-2)$ için,

$$(y_{\bar{x}x})^2 = \left(\frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} \right) \left(\frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} \right)$$

$$\left((y_{\bar{x}x})^2 \right)_x = \frac{1}{h} \left(\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} \right) \left(\frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} \right) + \frac{1}{h} \left(\frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} \right) \left(\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} \right)$$

$$= \frac{2}{h} \left(\frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} \right) \left(\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} \right)$$

$$= \frac{2}{h^5} (y_1 y_2 - 2y_2 y_0 + y_{-1} y_2 - 2y_1^2 + 4y_0 y_1 - 2y_{-1} y_1 + y_1 y_0 - 2y_0^2 + y_{-1} y_0)$$

$$= \frac{2}{h^3} \left(y_1 \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} - 2y_0 \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} + y_{-1} \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} \right) = \frac{2}{h} (y_{\bar{x}x})_{\bar{x}x}$$

$$\left((y_{\bar{x}x})^2 \right)_x = \frac{2}{h} (y_{\bar{x}x})_{\bar{x}x} \quad (5.54)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2}{h} \tilde{B} y_{\bar{x}x} \right)_{\bar{x}x} h - qh + \beta y = 0 \quad (5.55)$$

$$\left(\tilde{B}y_{\bar{x}\bar{x}}\right)_{\bar{x}\bar{x}} - \beta\delta(x)y = q(x) \quad (5.56)$$

denklemi elde edilir. Burada $\delta(x)$, Delta fonksiyonunun kafesteki karşılığıdır. $x = \pm 2h, \pm 3h, \dots, \pm(\ell - 2h)$ için (5.56) denkleminden, denge denkleminin basit sonlu fark ifadesi elde edilir:

$$y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}} = \frac{q(x)}{B^\pm}. \quad (5.57)$$

5.2.1. Miller sistemi için uyum koşullarının sonlu fark yaklaşımı

$x = 0, \pm h$ noktalarında (4.12) uyum koşullarının sonlu fark yaklaşımlarının elde edilmesi gerekir. Belli dönüşümler sonucu (5.56) denkleminden $x = 0, \pm h$ için aşağıdaki denklemler elde edilir:

$x = -h$ için,

$$\begin{aligned} \left(\bar{B}y_{\bar{x}\bar{x}}\right)_{\bar{x}\bar{x}} &= \frac{\tilde{B}}{h^2} \left\{ \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} - 2 \frac{y_0 - 2y_{-1} + y_{-2}}{h^2} + \frac{y_{-1} - 2y_{-2} + y_{-3}}{h^2} \right\} \\ &= \frac{1}{h^2} \left\{ \left(2 \frac{B^- B^+}{B^- + B^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} \right) \right) \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} - 2B^- \frac{y_0 - 2y_{-1} + y_{-2}}{h^2} + B^- \frac{y_{-1} - 2y_{-2} + y_{-3}}{h^2} \right\} \\ &= \frac{1}{h^2} \left\{ B^- \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} - 2B^- \frac{y_0 - 2y_{-1} + y_{-2}}{h^2} + B^- \frac{y_{-1} - 2y_{-2} + y_{-3}}{h^2} - B^- \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{\alpha h}{2} - B^- \left(1 + \frac{\alpha h}{2B^+} \right)}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} \right\} \\ &= \frac{1}{h^2} \left\{ B^- \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} - 2B^- \frac{y_0 - 2y_{-1} + y_{-2}}{h^2} + B^- \frac{y_{-1} - 2y_{-2} + y_{-3}}{h^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{h^2} \left\{ \left(\frac{\frac{\alpha h}{2} - B^- \left(1 + \frac{\alpha h}{2B^+} \right)}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} - B^- \right) \left(\frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} - \frac{y_0 - 2y_{-1} + y_{-2}}{h^2} + \frac{y_0 - 2y_{-1} + y_{-2}}{h^2} \right) \right\} \\
& = \frac{B^-}{h^2} \left\{ \frac{y_1 - 4y_0 + 6y_{-1} - 4y_{-2} + y_{-3}}{h^4} \right\} \\
& + \frac{1}{h^2} \frac{\frac{\alpha h}{2} - B^- \left(1 + \frac{\alpha h}{2B^+} \right)}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} \left\{ \frac{y_1 - 3y_0 + 3y_{-1} - y_{-2} + y_{-3}}{h^2} + \frac{y_0 - 2y_{-1} + y_{-2}}{h^2} \right\} \\
& = B^- y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}}(0) + \frac{1}{h} \frac{\frac{\alpha h}{2} - B^- \left(1 + \frac{\alpha h}{2B^+} \right)}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}(0) + \frac{1}{h^2} \frac{\frac{\alpha h}{2} - B^- \left(1 + \frac{\alpha h}{2B^+} \right)}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} y_{\bar{x}\bar{x}}(0) \\
& = B^- y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}}(0) + \frac{\frac{\alpha h}{2} - B^- \left(1 + \frac{\alpha h}{2B^+} \right)}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} \left(\frac{1}{h} y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}(0) + \frac{1}{h^2} y_{\bar{x}\bar{x}}(0) \right) \tag{5.58}
\end{aligned}$$

$x = 0$ için,

$$\begin{aligned}
(\tilde{B}y_{\bar{x}\bar{x}})_{\bar{x}\bar{x}} & = \frac{\tilde{B}}{h^2} \left\{ \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} - 2 \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} + \frac{y_0 - 2y_{-1} + y_{-2}}{h^2} \right\} \\
& = \frac{1}{h^2} \left\{ B^+ \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} - 2 \left(2 \frac{B^- B^+}{B^- + B^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} \right) \right) \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} \right. \\
& \quad \left. + B^- \frac{y_0 - 2y_{-1} + y_{-2}}{h^2} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h^2} \left\{ B^+ \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} - 2B^+ \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} + B^+ \frac{y_0 - 2y_{-1} + y_{-2}}{h^2} + 2B^+ \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} \right. \\
&\quad - B^+ \frac{y_0 - 2y_{-1} + y_{-2}}{h^2} - \frac{2\alpha h}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} + B^- \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} \\
&\quad \left. - 2B^- \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} + B^- \frac{y_0 - 2y_{-1} + y_{-2}}{h^2} + 2B^- \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} - B^- \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} \right\}
\end{aligned}$$

$$= (B^+ + B^-) y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}(0) + \frac{2}{h^2} \left(-\frac{\alpha h}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} + (B^+ + B^-) \right) y_{\bar{x}\bar{x}}(0)$$

$$- \frac{B^+}{h^2} y_{\bar{x}\bar{x}}(0) - \frac{B^-}{h^2} y_{\bar{x}\bar{x}}(0)$$

$$= (B^+ + B^-) y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}(0) - \frac{2}{h^2} \frac{\alpha h}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} y_{\bar{x}\bar{x}}(0) + \frac{B^+}{h^2} (2y_{\bar{x}\bar{x}}(0) - y_{\bar{x}\bar{x}}(0))$$

(5.59)

$$+ \frac{B^-}{h^2} (2y_{\bar{x}\bar{x}}(0) - y_{\bar{x}\bar{x}}(0))$$

$x = h$ için,

$$(\tilde{B}y_{\bar{x}\bar{x}})_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{\tilde{B}}{h^2} \left\{ \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2} - 2 \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} + \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{h^2} \left\{ B^+ \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2} - 2B^+ \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} \right.$$

$$\left. + 2 \frac{B^- B^+}{B^- + B^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} \right) \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h^2} \left\{ B^+ \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2} - 2B^+ \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} + B^+ \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} - B^+ \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{B^- B^+}{B^- + B^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} \right) \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} \right\} \\
&= \frac{B^+}{h^2} \left\{ \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2} - 2 \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} + \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{h^2} \left(2 \frac{B^- B^+}{B^- + B^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} \right) - B^+ \right) \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} \\
&= B^+ \frac{y_3 - 4y_2 + 6y_1 - 4y_0 + y_{-1}}{h^4} - \frac{1}{h^2} \frac{\frac{\alpha h}{2} - B^+ \left(1 + \frac{\alpha h}{2B^-} \right)}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} \left\{ - \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} - \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} \right\} \\
&= B^+ y_{\bar{x}xxx}(0) - \frac{1}{h} \frac{\frac{\alpha h}{2} - B^+ \left(1 + \frac{\alpha h}{2B^-} \right)}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} \frac{y_2 - 3y_1 + 3y_0 - y_{-1}}{h^2} \\
&\quad + \frac{1}{h^2} \frac{\frac{\alpha h}{2} - B^+ \left(1 + \frac{\alpha h}{2B^-} \right)}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} \\
&= B^+ y_{\bar{x}xxx}(0) - \frac{\frac{\alpha h}{2} - B^+ \left(1 + \frac{\alpha h}{2B^-} \right)}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} \left(\frac{1}{h} y_{\bar{x}xx}(0) - \frac{1}{h^2} y_{xx}(0) \right) \tag{5.60}
\end{aligned}$$

(5.56), (5.58), (5.59) ve (5.60) ifadelerinden, sırasıyla, aşağıdaki (5.61)-(5.63) ifadeler elde edilir:

$$B^- y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}(0) + \frac{\frac{\alpha h}{2} - B^- \left(1 + \frac{\alpha h}{2B^+}\right)}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)} \left(\frac{1}{h} y_{\bar{x}\bar{x}}(0) + \frac{1}{h^2} y_{\bar{x}\bar{x}}(0) \right) = q(-h) \quad (5.61)$$

$$(B^+ + B^-) y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}(0) - \frac{2}{h^2} \frac{\alpha h}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)} y_{\bar{x}\bar{x}}(0) + \frac{B^+}{h^2} (2y_{\bar{x}\bar{x}}(0) - y_{\bar{x}\bar{x}}(0))$$

$$+ \frac{B^-}{h^2} (2y_{\bar{x}\bar{x}}(0) - y_{\bar{x}\bar{x}}(0)) + \frac{\beta}{h} y(0) = q(0) \quad (5.62)$$

$$B^+ y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}(0) - \frac{\frac{\alpha h}{2} - B^+ \left(1 + \frac{\alpha h}{2B^-}\right)}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)} \left(\frac{1}{h} y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}(0) - \frac{1}{h^2} y_{\bar{x}\bar{x}}(0) \right) = q(h) \quad (5.63)$$

(5.61)-(5.63) ifadelerinin (4.12) uyum koşullarının sonlu fark yaklaşımları olduğu görülebilir. Bunun için önce (5.61)-(5.63) ifadeleri aşağıdaki şekilde yazalım:

$$B^- \frac{y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} - y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}}{h} + \frac{\frac{\alpha h}{2} - B^- \left(1 + \frac{\alpha h}{2B^+}\right)}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)} \left(\frac{1}{h} y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} + \frac{1}{h^2} y_{\bar{x}\bar{x}} \right) = q(-h) \quad (5.64)$$

$$(B^+ + B^-) \frac{y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} - y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}}{h} - \frac{2}{h^2} \frac{\alpha h}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)} y_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{B^+}{h^2} (2y_{\bar{x}\bar{x}} - y_{\bar{x}\bar{x}})$$

$$+ \frac{B^-}{h^2} (2y_{\bar{x}\bar{x}} - y_{\bar{x}\bar{x}}) + \frac{\beta}{h} y = q(0) \quad (5.65)$$

$$B^+ \frac{y_{xxx} - y_{xx\bar{x}}}{h} - \frac{\frac{\alpha h}{2} - B^+ \left(1 + \frac{\alpha h}{2B^-}\right)}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)} \left(\frac{1}{h} y_{\bar{x}xx} - \frac{1}{h^2} y_{xx} \right) = q(h) \quad (5.66)$$

Elde edilen ifadeler taraf tarafa toplanıp h ile çarpılsın. Sonuç basitleştirilirse, (4.12) uyum koşullarından sonuncunun sonlu fark yaklaşımı elde edilir:

$$(B^+ + B^-) (y_{xxx} - y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}) + \frac{1}{h} \frac{\frac{\alpha h}{2} \left(\frac{B^+}{B^-} + \frac{B^-}{B^+}\right) + (B^+ + B^-)}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)} y_{\bar{x}x} \quad (5.67)$$

$$-\frac{1}{h} (B^+ y_{\bar{x}\bar{x}} + B^- y_{xx}) + \beta y = h^3 q_{\bar{x}x} + 3hq.$$

(5.64)-(5.66) ifadelerinden 1. ve 3. denklemler aşağıdaki şekilde yazılsın:

1. denklem için,

$$B^- \frac{y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} - y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}}{h} + \frac{\frac{\alpha h}{2} - B^- \left(1 + \frac{\alpha h}{2B^+}\right)}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)} \left(\frac{1}{h} y_{\bar{x}\bar{x}x} + \frac{1}{h^2} y_{\bar{x}\bar{x}} \right) = q(-h)$$

$$-B^- \frac{y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}}{h} + \left(B^- + \frac{\frac{\alpha h}{2} - B^- \left(1 + \frac{\alpha h}{2B^+}\right)}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)} \right) \frac{y_{\bar{x}\bar{x}x}}{h} + \frac{\frac{\alpha h}{2} - B^- \left(1 + \frac{\alpha h}{2B^+}\right)}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)} \frac{y_{\bar{x}\bar{x}}}{h^2} = q(-h)$$

$$-B^- \frac{y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}}{h} + B^- \frac{y_{\bar{x}x} - y_{\bar{x}\bar{x}}}{h^2} + \frac{\frac{\alpha h}{2} - B^- \left(1 + \frac{\alpha h}{2B^+}\right)}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)} \frac{y_{\bar{x}x} - y_{\bar{x}\bar{x}}}{h^2}$$

$$+ \frac{\frac{\alpha h}{2} - B^- \left(1 + \frac{\alpha h}{2B^+}\right)}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)} \frac{y_{\bar{x}\bar{x}}}{h^2} = q(-h)$$

$$-B^- \frac{y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}}{h} + \left(B^- + \frac{\frac{\alpha h}{2} - B^- \left(1 + \frac{\alpha h}{2B^+} \right)}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} \right) \frac{y_{\bar{x}x}}{h^2} - B^- \frac{y_{\bar{x}\bar{x}}}{h^2} - \frac{\frac{\alpha h}{2} - B^- \left(1 + \frac{\alpha h}{2B^+} \right)}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} \frac{y_{\bar{x}\bar{x}}}{h^2}$$

$$+ \frac{\frac{\alpha h}{2} - B^- \left(1 + \frac{\alpha h}{2B^+} \right)}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} \frac{y_{\bar{x}\bar{x}}}{h^2} = q(-h)$$

$$-B^- \frac{y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}}{h} + \frac{\alpha}{h \left(1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right) \right)} y_{\bar{x}x} - B^- \frac{y_{\bar{x}\bar{x}}}{h^2} = q(-h)$$

$$\frac{\alpha}{h \left(1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right) \right)} y_{\bar{x}x} - B^- \left(\frac{1}{h^2} y_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{1}{h} y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} \right) = q(-h) \quad (5.68)$$

elde edilir. Benzer şekilde (5.66) denklemini de,

$$B^+ \frac{y_{xxx} - y_{xx\bar{x}}}{h} - \frac{\frac{\alpha h}{2} - B^+ \left(1 + \frac{\alpha h}{2B^-} \right)}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} \left(\frac{1}{h} y_{\bar{x}xx} - \frac{1}{h^2} y_{xx} \right) = q(h)$$

$$\frac{B^+}{h} y_{xxx} - \frac{B^+}{h} y_{xx\bar{x}} - \frac{\frac{\alpha h}{2} - B^+ \left(1 + \frac{\alpha h}{2B^-} \right)}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} \left(\frac{1}{h^2} (y_{xx} - y_{x\bar{x}}) - \frac{1}{h^2} y_{xx} \right) = q(h)$$

$$\frac{B^+}{h} y_{xxx} - \frac{B^+}{h^2} (y_{xx} - y_{x\bar{x}}) - \frac{\frac{\alpha h}{2} - B^+ \left(1 + \frac{\alpha h}{2B^-} \right)}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} \left(\frac{y_{xx} - y_{x\bar{x}} - y_{xx}}{h^2} \right) = q(h)$$

$$\frac{B^+}{h} y_{xxx} - \frac{B^+}{h^2} y_{xx} + \left(B^+ + \frac{\frac{\alpha h}{2} - B^+ \left(1 + \frac{\alpha h}{2B^-} \right)}{1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right)} \right) \frac{y_{x\bar{x}}}{h^2} = q(h)$$

$$B^+ \left(\frac{1}{h} y_{xxx} - \frac{1}{h^2} y_{xx} \right) + \frac{\alpha}{h \left(1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right) \right)} y_{\bar{x}\bar{x}} = q(h) \quad (5.69)$$

şeklinde elde edilir. Buradan,

$$\frac{\alpha}{h \left(1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right) \right)} y_{\bar{x}\bar{x}} - B^- \left(\frac{1}{h^2} y_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{1}{h} y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} \right) = q(-h) \quad (5.70)$$

$$B^+ \left(\frac{1}{h} y_{xxx} - \frac{1}{h^2} y_{xx} \right) + \frac{\alpha}{h \left(1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right) \right)} y_{\bar{x}\bar{x}} = q(h). \quad (5.71)$$

olur. (5.71) denkleminde, (5.70) denklemi çıkarılıp h^2 ile çarpılırsa,

$$B^+ \left(\frac{1}{h} y_{xxx} - \frac{1}{h^2} y_{xx} \right) + \frac{\alpha}{h \left(1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right) \right)} y_{\bar{x}\bar{x}} - \frac{\alpha}{h \left(1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+} \right) \right)} y_{\bar{x}\bar{x}} \quad (5.72)$$

$$+ B^- \left(\frac{1}{h^2} y_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{1}{h} y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} \right) = q(h) - q(-h)$$

$$B^+ \left(\frac{1}{h} y_{xxx} - \frac{1}{h^2} y_{xx} \right) + B^- \left(\frac{1}{h^2} y_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{1}{h} y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} \right) = q(h) - q(-h) \quad (5.73)$$

$$h^2 \left(\frac{1}{h^2} (B^- y_{\bar{x}\bar{x}} - B^+ y_{xx}) + \frac{1}{h} (B^+ y_{xxx} + B^- y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}) \right) = h^2 (q(h) - q(-h)) \quad (5.74)$$

$$(B^- y_{\bar{x}\bar{x}} - B^+ y_{xx}) + h (B^+ y_{xxx} + B^- y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}) = h^2 (q(h) - q(-h))$$

$$-(B^+ y_{xx} - B^- y_{\bar{x}\bar{x}}) + h (B^+ y_{xxx} + B^- y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}) = h^2 (q(h) - q(-h))$$

$$(B^+ y_{xx} - B^- y_{\bar{x}\bar{x}}) = h(B^+ y_{xxx} + B^- y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}) - h^2(q(h) - q(-h)) \quad (5.75)$$

elde edilir. Elde edilen (5.75) ifadesi, (4.12) uyum koşullarından üçüncünün sonlu fark yaklaşımıdır. Son olarak, (5.70) ve (5.71) ifadeleri,

$$\frac{\alpha}{h^2 \left(1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)\right)} (y_x - y_{\bar{x}}) - B^- \left(\frac{1}{h^2} y_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{1}{h} y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}\right) = q(-h) \quad (5.76)$$

$$B^+ \left(\frac{1}{h} y_{xxx} - \frac{1}{h^2} y_{xx}\right) + \frac{\alpha}{h^2 \left(1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)\right)} (y_x - y_{\bar{x}}) = q(h). \quad (5.77)$$

şeklinde yazılsın. Bu ifadeler taraf tarafa toplanıp $\frac{h^2}{2}$ ile çarpılırsa, (4.12) uyum koşullarının ikincisinin sonlu fark yaklaşımı aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\frac{\alpha}{h^2 \left(1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)\right)} (y_x - y_{\bar{x}}) - B^- \left(\frac{1}{h^2} y_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{1}{h} y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}\right) \quad (5.78)$$

$$+ B^+ \left(\frac{1}{h} y_{xxx} - \frac{1}{h^2} y_{xx}\right) + \frac{\alpha}{h^2 \left(1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)\right)} (y_x - y_{\bar{x}}) = q(h) + q(-h)$$

$$\frac{B^+}{h} y_{xxx} - \frac{B^+}{h^2} y_{xx} - \frac{B^-}{h^2} y_{\bar{x}\bar{x}} - \frac{B^-}{h} y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} + \frac{2\alpha}{h^2 \left(1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)\right)} (y_x - y_{\bar{x}}) = q(h) + q(-h)$$

$$\frac{h^2}{2} \left(\frac{B^+}{h} y_{xxx} - \frac{B^+}{h^2} y_{xx} - \frac{B^-}{h^2} y_{\bar{x}\bar{x}} - \frac{B^-}{h} y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}\right) + \frac{h^2}{2} \frac{2\alpha}{h^2 \left(1 + \frac{\alpha h}{2} \left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)\right)} (y_x - y_{\bar{x}})$$

$$= \frac{h^2}{2} (q(h) + q(-h))$$

$$\frac{h}{2}B^+y_{xxx} - \frac{B^+}{2}y_{xx} - \frac{B^-}{2}y_{\bar{x}\bar{x}} - \frac{h}{2}B^-y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} + \frac{\alpha}{1 + \frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)}(y_x - y_{\bar{x}}) = \frac{h^2}{2}(q(h) + q(-h))$$

$$\frac{h}{2}(B^+y_{xxx} - B^-y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}) - \frac{1}{2}(B^+y_{xx} + B^-y_{\bar{x}\bar{x}}) + \frac{\alpha}{1 + \frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)}(y_x - y_{\bar{x}})$$

$$= \frac{h^2}{2} \frac{h^2}{h^2} (q(h) + q(-h) + 2q(0) - 2q(0))$$

$$\frac{\alpha}{1 + \frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)}(y_x - y_{\bar{x}}) = \frac{1}{2}(B^+y_{xx} + B^-y_{\bar{x}\bar{x}}) - \frac{h}{2}(B^+y_{xxx} - B^-y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}) + \frac{h^2}{2}2q + \frac{h^4}{2}q_{\bar{x}\bar{x}}$$

$$\frac{\alpha}{1 + \frac{\alpha h}{2}\left(\frac{1}{B^-} + \frac{1}{B^+}\right)}(y_x - y_{\bar{x}}) = \frac{1}{2}(B^+y_{xx} + B^-y_{\bar{x}\bar{x}}) - \frac{h}{2}(B^+y_{xxx} - B^-y_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}})$$

(5.79)

$$+ h^2q + \frac{h^4}{2}q_{\bar{x}\bar{x}}.$$

Elde edilen (5.67), (5.75) ve (5.79) ifadeleri (4.12) uyum koşullarının sonlu fark yaklaşımlarıdır.

5.3. Levhalar Sisteminin Denge Denkleminin Sonlu Fark Yaklaşımı

$$\bar{\Omega} = \{x = (x_1, x_2) \mid -\ell_1 \leq x_1 \leq \ell_1, \quad 0 \leq x_2 \leq \ell_2\} \quad (5.80)$$

bölgesini dolduran levhalar sistemi ele alınır. Birinci levha için silindirik sertlik katsayısı D^- , ikinci levha için silindirik sertlik katsayısı ise D^+ olsun. Türdeş, esnek levhanın denge denkleminin (3.25) olduğu göz önüne alınırsa, birinci levha için $D = D^-$ ve ikinci levha için $D = D^+$ alınması gerekir. $x_1 = 0$ kenarında (levhaların ortak sınırında) (4.55)-(4.57) uyum koşullarının sağlandığı varsayalım. (4.55)-(4.57) koşullarının sonlu fark yaklaşımlarını elde etmek için önce bu denklemlerin elde edildiği,

$$I(\omega) = W - \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \int_0^{\ell_2} q(x) \omega dx_2 dx_1 \quad (5.81)$$

(5.81) fonksiyoneli ele alınsın. Burada,

$$W = W^+ + W^- + \frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} \left\{ \alpha \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right]^2 + \beta \omega^2 + B \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right\}_{x_1=0} dx_2 \quad (5.82)$$

$$W^+ = \frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} \int_0^{\ell_1} D^+ \left\{ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + 2(1-v^+) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right\} dx_2 dx_1 \quad (5.83)$$

$$W^- = \frac{1}{2} \int_0^{\ell_2} \int_{-\ell_1}^0 D^- \left\{ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + 2(1-v^-) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right\} dx_2 dx_1 \quad (5.84)$$

dır. $\bar{\Omega}$ dikdörtgen bölgesinde eşit adımlı,

$$\bar{w}_1 \times \bar{w}_2 = \left\{ x = (x_1, x_2) \mid x_\varphi \in \bar{w}_\varphi, \varphi = 1, 2 \right\} \quad (5.85)$$

kafesi tanımlansın. Burada \bar{w}_1 ve \bar{w}_2 sırasıyla $[-\ell_1, \ell_1]$ ve $[0, \ell_2]$ aralıklarında tanımlı kafeslerdir ve,

$$\bar{w}_{1,\text{sol}} = \left\{ x_1 \mid x_1 = i_1 h_1, \quad i_1 = 0, -1, -2, \dots, -N \right\} = [-\ell_1, 0],$$

$$\bar{w}_{1,\text{sağ}} = \left\{ x_1 \mid x_1 = i_1 h_1, \quad i_1 = 0, 1, 2, \dots, N \right\} = [0, \ell_1],$$

$$\bar{w}_1 = \bar{w}_{1,\text{sol}} \cup \bar{w}_{1,\text{sağ}} = [-\ell_1, 0] \cup [0, \ell_1] = [-\ell_1, \ell_1].$$

dır. Burada, w_φ , \bar{w}_φ kafesinin ve $w_{1,\text{sol}}(w_{1,\text{sağ}})$ ise $\bar{w}_{1,\text{sol}}(\bar{w}_{1,\text{sağ}})$ kafesinin iç noktalar kümesidir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2 = (-\ell_1, \ell_1) \times (0, \ell_2) \\
&= \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid x_1 \in (-\ell_1, \ell_1), x_2 \in (0, \ell_2) \right\} \\
&= \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid -\ell_1 < x_1 < \ell_1, 0 < x_2 < \ell_2 \right\} \\
&= \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathbf{w}_1, x_2 \in \mathbf{w}_2 \right\} \\
\mathbf{w}_{1,\text{sol}} &= (-\ell_1, 0), \quad \mathbf{w}_{1,\text{sağ}} = (0, \ell_1), \quad \mathbf{w}_2 = (0, \ell_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_{\text{sol}} &= \mathbf{w}_{1,\text{sol}} \times \mathbf{w}_2 = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathbf{w}_{1,\text{sol}}, x_2 \in \mathbf{w}_2 \right\} \\
&= \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid -\ell_1 < x_1 < 0, 0 < x_2 < \ell_2 \right\} \\
&= \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid x_1 \in (-\ell_1, 0), x_2 \in (0, \ell_2) \right\} = (-\ell_1, 0) \times (0, \ell_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_{\text{sağ}} &= \mathbf{w}_{1,\text{sağ}} \times \mathbf{w}_2 = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathbf{w}_{1,\text{sağ}}, x_2 \in \mathbf{w}_2 \right\} \\
&= \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid 0 < x_1 < \ell_1, 0 < x_2 < \ell_2 \right\} \\
&= \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid x_1 \in (0, \ell_1), x_2 \in (0, \ell_2) \right\} = (0, \ell_1) \times (0, \ell_2)
\end{aligned}$$

$$\gamma^0 = \mathbf{w} \setminus \left\{ \mathbf{w}_{\text{sol}} \cup \mathbf{w}_{\text{sağ}} \right\}$$

Bunların dışında,

$$\mathbf{w}_{1,\text{sol}}^+ = \mathbf{w}_1 \setminus \mathbf{w}_{1,\text{sağ}} = (-\ell_1, \ell_1) \setminus (0, \ell_1) = (-\ell_1, 0] = \{x_1 \mid -\ell_1 < x_1 \leq 0, \}$$

$$\mathbf{w}_{1,\text{sağ}}^+ = \bar{\mathbf{w}}_1 \setminus \bar{\mathbf{w}}_{1,\text{sol}} = [-\ell_1, \ell_1] \setminus [-\ell_1, 0] = (0, \ell_1] = \{x_1 \mid 0 < x_1 \leq \ell_1, \}$$

$${}^+ \mathbf{w}_{1,\text{sol}} = \bar{\mathbf{w}}_1 \setminus \bar{\mathbf{w}}_{1,\text{sağ}} = [-\ell_1, \ell_1] \setminus [0, \ell_1] = [-\ell_1, 0] = \{x_1 \mid -\ell_1 \leq x_1 < 0, \}$$

$${}^+ \mathbf{w}_{1,\text{sağ}} = \mathbf{w}_1 \setminus \mathbf{w}_{1,\text{sol}} = (-\ell_1, \ell_1) \setminus (-\ell_1, 0) = [0, \ell_1) = \{x_1 \mid 0 \leq x_1 < \ell_1, \}$$

olsun. Ω bölgesinin sınırında $\omega(x)$ fonksiyonunun,

$$\omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} = 0 \quad (5.86)$$

koşulunu sağladığı varsayalım. (5.81)-(5.84) fonksiyonellerindeki integrallerin yaklaşık ifadelerini elde etmek için (5.81) fonksiyonelinin son ve (5.83), (5.84) fonksiyonellerinin ilk üç terimi yamuk yönteminin yardımıyla hesaplınsın. (5.83) ve (5.84) fonksiyonellerinin son terimlerinin yaklaşımlarının elde edilmesi için ise dikdörtgenler formülünün lineer kombinasyonundan yararlanılsın. $\omega(x)$ fonksiyonu için sınır koşulları göz önüne alınarak aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$\int_{-l_1}^{l_1} \int_0^{l_2} q \omega dx_1 dx_2 \sim \sum_w q \omega h_1 h_2 \quad (5.87)$$

$$\begin{aligned} W^-(\omega) &= \frac{1}{2} \sum_{w_{sol}} \left\{ D^- \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right] h_1 h_2 \right. \\ &+ \frac{1}{2} \left[\sum_{w_{1,sol}^+ x w_2^+} D^- (1-v^-) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 h_1 h_2 + \sum_{w_{1,sol}^+ x w_2^+} D^- (1-v^-) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 h_1 h_2 \right. \\ &+ \sum_{w_{1,sol}^+ x^+ w_2} D^- (1-v^-) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 h_1 h_2 + \sum_{w_{1,sol}^+ x^+ w_2} D^- (1-v^-) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 h_1 h_2 \left. \right] \\ &+ \left. \sum_{\gamma^0} D^- \frac{h_1 h_2}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.88)$$

$$\begin{aligned}
W^+(\omega) &= \frac{1}{2} \sum_{w_{\text{sag}}} \left\{ D^+ \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right] h_1 h_2 \right. \\
&+ \frac{1}{2} \left[\sum_{w_{1,\text{sag}}^+ x w_2^+} D^+(1-v^+) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 h_1 h_2 + \sum_{w_{1,\text{sag}}^+ x w_2^+} D^+(1-v^+) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 h_1 h_2 \right. \\
&+ \sum_{w_{1,\text{sag}}^+ x^+ w_2} D^+(1-v^+) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 h_1 h_2 + \left. \sum_{w_{1,\text{sag}}^+ x^+ w_2} D^+(1-v^+) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 h_1 h_2 \right] \\
&+ \left. \sum_{\gamma^0} D^+ \frac{h_1 h_2}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{5.89}$$

Bunların dışında,

$$\frac{1}{2} \int_0^{1/2} \left\{ B \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + \alpha \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right]^2 + \beta \omega^2 \right\} dx_2 \sim \frac{1}{2} \sum_{\gamma^0} \left\{ B \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + \alpha \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right]^2 + \beta \omega^2 \right\} h_2 \tag{5.90}$$

olsun. w_{sol} ve w_{sag} kümelerine ait toplamlarda ikinci mertebeden türevlerin fark

yaklaşımı $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_\varphi^2} \sim \omega_{x_\varphi x_\varphi}$, $\varphi = 1, 2$, karışık türevler ise her bir toplamda tanımlanma

şekline bağlı olarak özel şekilde tanımlansın. O halde,

$$\begin{aligned}
W_h^-(y) &= \frac{1}{2} \sum_{w_{\text{sol}}} D^- \left\{ \left(y_{x_1 x_1}^- \right)^2 + \left(y_{x_2 x_2}^- \right)^2 + 2v^- y_{x_1 x_1}^- y_{x_2 x_2}^- \right\} h_1 h_2 \\
&+ \frac{1}{4} \left\{ \sum_{w_{1,\text{sol}}^+ x w_2^+} D^-(1-v^-) \left(y_{x_1 x_2}^- \right)^2 h_1 h_2 + \sum_{w_{1,\text{sol}}^+ x w_2^+} D^-(1-v^-) \left(y_{x_1 x_2}^- \right)^2 h_1 h_2 \right. \\
&+ \left. \sum_{w_{1,\text{sol}}^+ x^+ w_2} D^-(1-v^-) \left(y_{x_1 x_2}^- \right)^2 h_1 h_2 + \sum_{w_{1,\text{sol}}^+ x^+ w_2} D^-(1-v^-) \left(y_{x_1 x_2}^- \right)^2 h_1 h_2 \right\}
\end{aligned} \tag{5.91}$$

$$\begin{aligned}
W_h^+(y) &= \frac{1}{2} \sum_{w_{sağ}} D^+ \left\{ \left(y_{x_1 x_1}^- \right)^2 + \left(y_{x_2 x_2}^- \right)^2 + 2v^+ y_{x_1 x_1}^- y_{x_2 x_2}^- \right\} h_1 h_2 \\
&+ \frac{1}{4} \left\{ \sum_{w_{1,sağ}^+ x w_2^+} D^+ (1-v^+) \left(y_{x_1 x_2}^- \right)^2 h_1 h_2 + \sum_{w_{1,sağ}^+ x w_2^+} D^+ (1-v^+) \left(y_{x_1 x_2}^- \right)^2 h_1 h_2 \right. \\
&\left. \sum_{w_{1,sağ}^+ x^+ w_2} D^+ (1-v^+) \left(y_{x_1 x_2}^- \right)^2 h_1 h_2 + \sum_{w_{1,sağ}^+ x^+ w_2} D^+ (1-v^+) \left(y_{x_1 x_2}^- \right)^2 h_1 h_2 \right\}
\end{aligned} \tag{5.92}$$

elde edilir. (5.88)-(5.90) ifadelerinde sadece γ^0 sınırındaki ifadeler $A(\omega)$ ile tanımlanırsa,

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= \frac{1}{4} \left\{ D^- h_1 \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)_{sol}^2 + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2v^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)_{sol} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] \right. \\
&+ D^+ h_1 \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)_{sağ}^2 + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2v^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)_{sağ} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] \left. \right\} \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ \alpha \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right]^2 + B \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + \beta \omega^2 \right\}
\end{aligned} \tag{5.93}$$

olur ve buradan,

$$W^0 = \sum_{\gamma^0} A(\omega) h_2 \tag{5.94}$$

toplamındaki türevlerin fark yaklaşımlarının elde edilmesi gerekir. $\alpha \neq 0$ sonlu sayı olsun. O halde (4.55)-(4.57)'deki eşitliklerin her iki tarafının karesi alınır,

$$\begin{aligned}
\alpha^2 \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right]^2 &= \frac{1}{4} \left\{ \left(\mathbf{D}^- \right)^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)_{\text{sol}}^2 + \left(\mathbf{v}^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2\mathbf{v}^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)_{\text{sol}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] \right. \\
&+ \left(\mathbf{D}^+ \right)^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)_{\text{sağ}}^2 + \left(\mathbf{v}^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2\mathbf{v}^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)_{\text{sağ}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] + \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mathbf{C}^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)_{\text{sol}} \right)^2 \\
&+ \left. \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mathbf{C}^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)_{\text{sağ}} \right)^2 + 2 \left[\mathbf{D}^- \mathbf{D}^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \mathbf{v}^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)_{\text{sol}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \mathbf{v}^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)_{\text{sağ}} \right] \right\} \quad (5.95)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&- \mathbf{D}^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \mathbf{v}^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)_{\text{sol}} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mathbf{C}^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)_{\text{sol}} + \mathbf{D}^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \mathbf{v}^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)_{\text{sol}} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mathbf{C}^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)_{\text{sağ}} \\
&- \mathbf{D}^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \mathbf{v}^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)_{\text{sol}} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mathbf{C}^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)_{\text{sol}} + \mathbf{D}^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \mathbf{v}^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)_{\text{sol}} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mathbf{C}^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)_{\text{sağ}} \\
&- \left. \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mathbf{C}^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)_{\text{sol}} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mathbf{C}^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right)_{\text{sağ}} \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki ifadede $\mathbf{C}^\pm = \mathbf{B}^\pm = 0$ alınsın. O halde,

$$\begin{aligned}
\alpha^2 \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right]^2 &= \frac{1}{4} \left\{ \left(\mathbf{D}^- \right)^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)_{\text{sol}}^2 + \left(\mathbf{v}^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2\mathbf{v}^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)_{\text{sol}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] \right. \\
&+ \left(\mathbf{D}^+ \right)^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)_{\text{sağ}}^2 + \left(\mathbf{v}^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2\mathbf{v}^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)_{\text{sağ}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] \\
&+ 2 \left[\mathbf{D}^- \mathbf{D}^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \mathbf{v}^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)_{\text{sol}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \mathbf{v}^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)_{\text{sağ}} \right] \left. \right\} \quad (5.96)
\end{aligned}$$

olur. $A(\omega)$ ifadesinin içinde yukarıdaki formül elde edilsin.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{D}^- \mathbf{h}_1 \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)_{\text{sol}}^2 + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2\mathbf{v}^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)_{\text{sol}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] \\
& + \mathbf{D}^+ \mathbf{h}_1 \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)_{\text{sağ}}^2 + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2\mathbf{v}^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)_{\text{sağ}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] \\
& = \frac{\mathbf{h}_1}{\mathbf{D}^-} \left[\left(\mathbf{D}^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)_{\text{sol}}^2 + \left(\mathbf{D}^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2\mathbf{v}^- (\mathbf{D}^-)^2 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)_{\text{sol}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] \\
& + \frac{\mathbf{h}_1}{\mathbf{D}^+} \left[\left(\mathbf{D}^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)_{\text{sağ}}^2 + \left(\mathbf{D}^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2\mathbf{v}^+ (\mathbf{D}^+)^2 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)_{\text{sağ}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] \\
& = \frac{\mathbf{h}_1}{\mathbf{D}^-} \left\{ (\mathbf{D}^-)^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)_{\text{sol}}^2 + \left(\mathbf{v}^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 - \left(\mathbf{v}^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2\mathbf{v}^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)_{\text{sol}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] \right\} \\
& + \frac{\mathbf{h}_1}{\mathbf{D}^+} \left\{ (\mathbf{D}^+)^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)_{\text{sağ}}^2 + \left(\mathbf{v}^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 - \left(\mathbf{v}^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2\mathbf{v}^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)_{\text{sağ}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] \right\} \\
& = \frac{\mathbf{h}_1}{\mathbf{D}^-} \left\{ (\mathbf{D}^-)^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)_{\text{sol}} + \mathbf{v}^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right]^2 + (\mathbf{D}^-)^2 (1 - (\mathbf{v}^-)^2) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 \right\} \\
& + \frac{\mathbf{h}_1}{\mathbf{D}^+} \left\{ (\mathbf{D}^+)^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)_{\text{sağ}} + \mathbf{v}^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right]^2 + (\mathbf{D}^+)^2 (1 - (\mathbf{v}^+)^2) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 \right\} \\
& = \left(\frac{\mathbf{h}_1}{\mathbf{D}^-} + \frac{\mathbf{h}_1}{\mathbf{D}^+} \right) \alpha^2 \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right]^2 + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 \left\{ \mathbf{h}_1 \mathbf{D}^- \left[1 - (\mathbf{v}^-)^2 \right] + \mathbf{h}_1 \mathbf{D}^+ \left[1 - (\mathbf{v}^+)^2 \right] \right\} \quad (5.97)
\end{aligned}$$

Buradan $A(\omega)$ ifadesi aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{h_1}{D^-} + \frac{h_1}{D^+} \right) \alpha^2 \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right]^2 + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 \left\{ h_1 D^- \left[1 - (v^-)^2 \right] + h_1 D^+ \left[1 - (v^+)^2 \right] \right\} \right\} \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ \alpha \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right]^2 + B \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + \beta \omega^2 \right\} = \frac{\alpha}{2} \left(1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right) \right) \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right]^2 \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ B + \frac{h_1}{2} \left[D^- \left(1 - (v^-)^2 \right) + D^+ \left(1 - (v^+)^2 \right) \right] \right\} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + \frac{\beta \omega^2}{2}
\end{aligned} \tag{5.98}$$

Şimdi ise, $\left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right]_{x_1=0}$ sıçrayışının sonlu fark yaklaşımı elde edilsin [42].

$$\begin{aligned}
(\omega_{x_1} - \omega_{x_1^-}) \Big|_{x_1=0} &= \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right]_{x_1=0} + \frac{h_1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)_{\text{sağ}} + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)_{\text{sol}} \right\} + O(h_1^2) \\
&= \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right]_{x_1=0} + \frac{h_1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)_{\text{sağ}} + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)_{\text{sol}} - (v^+ + v^-) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \Big|_{x_1=0} \right\} \\
&+ O(h_1^2) = \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right]_{x_1=0} + \frac{h_1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)_{\text{sağ}} + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)_{\text{sol}} \right\} \\
&- \frac{h_1}{2} (v^+ + v^-) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \Big|_{x_1=0} + O(h_1^2)
\end{aligned} \tag{5.99}$$

Burada,

$$\alpha \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right] = D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)_{\text{sağ}} \Rightarrow \frac{\alpha}{D^+} \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right] = \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)_{\text{sağ}} \tag{5.100}$$

ve,

$$\alpha \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right] = D^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)_{\text{sol}} \Rightarrow \frac{\alpha}{D^-} \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right] = \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)_{\text{sol}}. \tag{5.101}$$

Buradan ise,

$$\alpha \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right) \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right] = \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)_{\text{sağ}} + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)_{\text{sol}} \quad (5.102)$$

olur. Bu durumda sıçrayışın sonlu fark yaklaşımı,

$$\left(\omega_{x_1} - \omega_{x_1^-} \right) \Big|_{x_1=0} = \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right]_{x_1=0} + \frac{h_1}{2} \alpha \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right) \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right]_{x_1=0} - \frac{h_1}{2} (v^+ + v^-) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \Big|_{x_1=0} \quad (5.103)$$

$$+ O(h_1^2) = \left(1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right) \right) \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right]_{x_1=0} - \frac{h_1}{2} (v^+ + v^-) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \Big|_{x_1=0} + O(h_1^2)$$

şeklinde olur ve sıçrayışın sonlu fark yaklaşımı,

$$\left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right]_{x_1=0} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \left\{ \left(\omega_{x_1} - \omega_{x_1^-} \right) \Big|_{x_1=0} + \frac{h_1}{2} (v^+ + v^-) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \Big|_{x_1=0} \right\} + O(h_1^2) \quad (5.104)$$

şeklinde belirlenir. Son ifade, (5.41) ifadesinde göz önüne alınırsa,

$$A(\omega) = \frac{\alpha}{2} \left(1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right) \right) \left\{ \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \left[\left(\omega_{x_1} - \omega_{x_1^-} \right) \Big|_{x_1=0} + \frac{h_1}{2} (v^+ + v^-) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \Big|_{x_1=0} \right] + O(h_1^2) \right\}^2 \quad (5.105)$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ B + \frac{h_1}{2} \left[D^- \left(1 - (v^-)^2 \right) + D^+ \left(1 - (v^+)^2 \right) \right] \right\} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + \frac{\beta \omega^2}{2}$$

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= \frac{\alpha}{2} \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \left[\left(\omega_{x_1} - \omega_{x_1^-} \right) \Big|_{x_1=0} + \frac{h_1}{2} (v^+ + v^-) \left(\omega_{x_2 x_2} \right)^2 \right. \\
&+ O(h_1^2 + h_2^2) \left. \right]^2 + \frac{1}{2} \left\{ B + \frac{h_1}{2} \left[D^- \left(1 - (v^-)^2 \right) + D^+ \left(1 - (v^+)^2 \right) \right] \right\} \left(\omega_{x_2 x_2} \right)^2 \\
&+ O(h_2^2) + \frac{\beta \omega^2}{2}
\end{aligned} \tag{5.106}$$

elde edilir. $A(\omega)$ ifadesi $\alpha = 0$ ve $\alpha = \infty$ için incelenir. (5.93)'de $\alpha = 0$ yazılırsa ve (4.55)-(4.57) uyum koşulları göz önüne alınır,

$$\alpha = 0 \Rightarrow D^+ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^+ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)_{\text{sağ}} = D^- \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v^- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)_{\text{sol}} = 0 \tag{5.107}$$

ve buradan da,

$$A(\omega) = \frac{1}{2} \left\{ B + \frac{h_1}{2} \left[D^- \left(1 - (v^-)^2 \right) + D^+ \left(1 - (v^+)^2 \right) \right] \right\} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + \frac{\beta \omega^2}{2} \tag{5.108}$$

bulunur. $\alpha = \infty$ için incelendiğinde ve (4.55)-(4.57) ifadeleri de göz önüne alındığında,

$$\alpha = \infty \Rightarrow \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right] = \frac{D}{\alpha} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + v \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) = 0 \tag{5.109}$$

için,

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= \frac{D^- D^+ h_1}{4} \left\{ \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{D^-} v^- + \frac{1}{D^+} v^+ \right) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right\} \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ \left[B + \frac{(D^- + D^+) h_1}{2} \right] \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right)^2 + \beta \omega^2 \right\}
\end{aligned} \tag{5.110}$$

ve buradan da,

$$A(\omega) = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2} + h_1 \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \left\{ h_1 \omega_{x_1 x_1}^- + \frac{h_1}{2} (v^+ + v^-) (\omega_{x_2 x_2}^-)^2 + O(h_1^2 + h_2^2) \right\}^2 \quad (5.111)$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ B + \frac{h_1}{2} \left[D^- \left(1 - (v^-)^2 \right) + D^+ \left(1 - (v^+)^2 \right) \right] (\omega_{x_2 x_2}^-)^2 + \beta \omega^2 \right\} + O(h_2^2)$$

$$\xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} A(\omega) = \frac{D^- D^+ h_1}{D^- + D^+} \left\{ \omega_{x_1 x_1}^- + \frac{1}{2} (v^+ + v^-) (\omega_{x_2 x_2}^-)^2 + O(h_1 + h_2^2 / h_1) \right\}^2 \quad (5.112)$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ B + \frac{h_1}{2} \left[D^- \left(1 - (v^-)^2 \right) + D^+ \left(1 - (v^+)^2 \right) \right] (\omega_{x_2 x_2}^-)^2 + \beta \omega^2 \right\} + O(h_2^2)$$

elde edilir. O halde, $A(\omega)$, $W_h^0(y)$ ifadesinde göz önüne alındığında,

$$W_h^0(y) = \sum_{\gamma} A(\omega) h_2 = \frac{1}{2} \sum_{\gamma} h_2 \left\{ \frac{\alpha}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \left[(y_{x_1} - y_{x_1}^-) + \frac{h_1}{2} (v^+ + v^-) y_{x_2 x_2}^- \right]^2 \right.$$

$$\left. + \left[B + \frac{h_1}{2} \left[D^- \left(1 - (v^-)^2 \right) + D^+ \left(1 - (v^+)^2 \right) \right] \right] (y_{x_2 x_2}^-)^2 + \beta y^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\gamma} h_2 \left\{ \frac{\alpha}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \left[(y_{x_1} - y_{x_1}^-)^2 + \left(\frac{h_1}{2} (v^+ + v^-) y_{x_2 x_2}^- \right)^2 \right. \right.$$

$$\left. + 2 \frac{h_1}{2} (v^+ + v^-) y_{x_2 x_2}^- (y_{x_1} - y_{x_1}^-) \right]$$

$$\left. + \left[B + \frac{h_1}{2} \left[D^- \left(1 - (v^-)^2 \right) + D^+ \left(1 - (v^+)^2 \right) \right] \right] (y_{x_2 x_2}^-)^2 + \beta y^2 \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{\gamma} h_2 \left\{ \frac{\alpha}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} (y_{x_1} - y_{x_1^-})^2 + \left[B + \frac{h_1}{2} \left[D^- \left(1 - (v^-)^2 \right) + D^+ \left(1 - (v^+)^2 \right) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{h_1^2}{4} (v^+ + v^-)^2 \frac{\alpha}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right] (y_{x_2 x_2^-})^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha h_1 (v^+ + v^-)}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} (y_{x_1} - y_{x_1^-}) y_{x_2 x_2^-} + \beta y^2 \right\}
\end{aligned} \tag{5.113}$$

yani,

$$\begin{aligned}
W_h^0(y) &= \frac{1}{2} \sum_{\gamma} h_2 \left\{ \frac{\alpha}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} (y_{x_1} - y_{x_1^-})^2 \right. \\
&\quad \left. + \left[B + \frac{h_1}{2} \left[D^- \left(1 - (v^-)^2 \right) + D^+ \left(1 - (v^+)^2 \right) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{h_1^2}{4} (v^+ + v^-)^2 \frac{\alpha}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right] (y_{x_2 x_2^-})^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha h_1 (v^+ + v^-)}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} (y_{x_1} - y_{x_1^-}) y_{x_2 x_2^-} + \beta y^2 \right\}
\end{aligned} \tag{5.114}$$

şeklinde olur. Bu durumda, (5.83) ifadesindeki $I(\omega)$ fonksiyonelinin sonlu fark yaklaşımı (5.115) şeklindedir:

$$I_h(y) = W_h(y) - \sum_w q y h_1 h_2. \tag{5.115}$$

Burada,

$$W_h(y) = W_h^-(y) + W_h^+(y) + W_h^0(y) \quad (5.116)$$

dir ve $W_h^-(y)$, $W_h^+(y)$, $W_h^0(y)$ ifadeleri, sırasıyla, (5.88), (5.89) ve (5.114) şeklinde tanımlanmaktadır.

$$(y_{x_1} - y_{x_1}^-)^2 = h_1^2 (y_{x_1 x_1}^-)^2, \quad (5.117)$$

$$\frac{\alpha h_1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} = 2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right)$$

olduğu göz önüne alınırsa, $W_h^0(y)$ aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} W_h^0(y) &= \frac{1}{2} \sum_0^{\gamma} h_2 \left\{ \frac{\alpha h_1^2}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} (y_{x_1} - y_{x_1}^-)^2 \right. \\ &+ \left[B + \frac{h_1}{2} \left[D^- \left(1 - (v^-)^2 \right) + D^+ \left(1 - (v^+)^2 \right) \right] \right. \\ &+ \left. \left. 2 \frac{h_1}{4} (v^+ + v^-)^2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) \right] \right\} (y_{x_2 x_2}^-)^2 \\ &+ \left. 2 h_1 (v^+ + v^-) \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) \left(\frac{y_{x_1} - y_{x_1}^-}{h_1} y_{x_2 x_2}^- + \frac{\beta}{h_1} y^2 \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{h_1}{2} \sum_0^{\gamma} h_2 \left\{ 2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) \left(y_{x_1 x_1}^- \right)^2 \right. \\
&+ \left. \left[\frac{B}{h_1} + \frac{1}{2} \left[D^- \left(1 - (v^-)^2 \right) + D^+ \left(1 - (v^+)^2 \right) \right] \right. \right. \\
&\left. \left. + \frac{(v^+ + v^-)^2}{2} \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) \right] \left(y_{x_2 x_2}^- \right)^2 \right. \\
&\left. + 2(v^+ + v^-) \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) y_{x_1 x_1}^- y_{x_2 x_2}^- + \frac{\beta}{h_1} y^2 \right\}
\end{aligned} \tag{5.118}$$

$$D_1 = \begin{cases} D^- & , \quad x = (-h, x_2) \\ 2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) & , \quad x = (0, x_2) \\ D^+ & , \quad x = (h, x_2) \end{cases} \tag{5.119}$$

$$D_2 = \begin{cases} D^- & , \quad x = (-h, x_2) \\ \frac{B}{h_1} + \frac{1}{2} \left[D^- \left(1 - (v^-)^2 \right) + D^+ \left(1 - (v^+)^2 \right) \right] & , \quad x = (0, x_2) \\ + \frac{(v^+ + v^-)^2}{2} \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) & \\ D^+ & , \quad x = (h, x_2) \end{cases} \tag{5.120}$$

$$D_{kp} = \frac{D^-(1-v^-) + D^+(1-v^+)}{4} \quad (5.121)$$

ifadeleri tanımlansın. Yeni işaretlemelerle $W_h(y)$ aşağıdaki şekle dönüşecektir:

$$W_h^0(y) = \frac{h_1}{2} \sum_0^y h_2 \left\{ D_1 \left(y_{x_1 x_1}^- \right)^2 + D_2 \left(y_{x_2 x_2}^- \right)^2 + D_1 \left(v^+ + v^- \right) y_{x_1 x_1}^- y_{x_2 x_2}^- + \beta y^2 \right\}. \quad (5.122)$$

$$W_h^-(y) = \frac{1}{2} \sum_{w_{sol}} D^- \left\{ \left(y_{x_1 x_1}^- \right)^2 + \left(y_{x_2 x_2}^- \right)^2 + 2v^- y_{x_1 x_1}^- y_{x_2 x_2}^- \right\} h_1 h_2$$

$$+ \frac{1}{4} \left\{ \sum_{w_{1,sol}^+ x w_2^+} D^- (1-v^-) \left(y_{x_1 x_2}^- \right)^2 h_1 h_2 + \sum_{w_{1,sol}^+ x w_2^+} D^- (1-v^-) \left(y_{x_1 x_2}^- \right)^2 h_1 h_2 \right. \quad (5.123)$$

$$\left. + \sum_{w_{1,sol}^+ x^+ w_2} D^- (1-v^-) \left(y_{x_1 x_2}^- \right)^2 h_1 h_2 + \sum_{w_{1,sol}^+ x^+ w_2} D^- (1-v^-) \left(y_{x_1 x_2}^- \right)^2 h_1 h_2 \right\}$$

ve,

$$W_h^+(y) = \frac{1}{2} \sum_{w_{sağ}} D^+ \left\{ \left(y_{x_1 x_1}^- \right)^2 + \left(y_{x_2 x_2}^- \right)^2 + 2v^+ y_{x_1 x_1}^- y_{x_2 x_2}^- \right\} h_1 h_2$$

$$\frac{1}{4} \left\{ \sum_{w_{1,sağ}^+ x w_2^+} D^+ (1-v^+) \left(y_{x_1 x_2}^- \right)^2 h_1 h_2 + \sum_{w_{1,sağ}^+ x w_2^+} D^+ (1-v^+) \left(y_{x_1 x_2}^- \right)^2 h_1 h_2 \right. \quad (5.124)$$

$$\left. + \sum_{w_{1,sağ}^+ x^+ w_2} D^+ (1-v^+) \left(y_{x_1 x_2}^- \right)^2 h_1 h_2 + \sum_{w_{1,sağ}^+ x^+ w_2} D^+ (1-v^+) \left(y_{x_1 x_2}^- \right)^2 h_1 h_2 \right\}$$

ifadeleri ve,

$$W_h(y) = W_h^-(y) + W_h^+(y) + W_h^0(y) \quad (5.125)$$

olduğu göz önüne alınarak (5.126) ifadesi aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{aligned}
W_h(y) &= \frac{1}{2} \sum_w h_1 h_2 \left\{ D_1 (y_{x_1 x_1}^-)^2 + D_2 (y_{x_2 x_2}^-)^2 + D_1 (v^+ + v^-) y_{x_1 x_1}^- y_{x_2 x_2}^- \right\} \\
&+ \frac{D_{kp}}{2} \left\{ \sum_{w_1^+ x w_2^+} (y_{x_1 x_2}^-)^2 h_1 h_2 + \sum_{w_1 x w_2^+} (y_{x_1 x_2}^-)^2 h_1 h_2 + \sum_{w_1^+ x w_2} (y_{x_1 x_2}^-)^2 h_1 h_2 \right. \\
&\left. + \sum_{w_1^+ x w_2} (y_{x_1 x_2}^-)^2 h_1 h_2 \right\} + \frac{1}{2} \sum_w h_1 h_2 \beta \delta(x_1) y^2
\end{aligned} \tag{5.126}$$

Burada $\delta(x_1)$, δ - fonksiyonunun şebekedeki karşılığıdır.

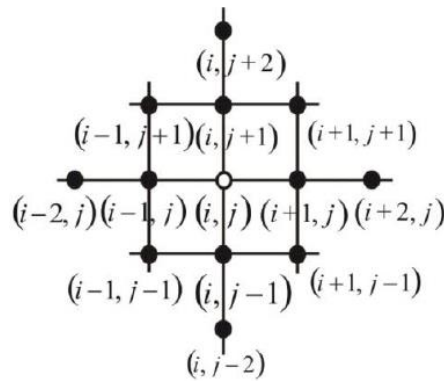
$$\delta(x_1) = \begin{cases} 1/h_1, & x_1 = 0 \\ 0, & x_1 \neq 0 \end{cases} \tag{5.127}$$

(5.115) ifadesindeki $I_h(y)$, $x \in w$ olduğunda $y(x)$ değişkeninin fonksiyonudur.

$x_1 \neq \pm(\ell_1 - h_1)$, $x_2 \neq h_2$, $(\ell_2 - h_2)$ noktalarında,

$$I_h(y) = W_h(y) - \sum_w q y h_1 h_2 \tag{5.128}$$

fonksiyonelinin $y(x)$ 'e göre türevi hesaplanıp sifira eşitlenirse 13 noktalı şebekede (Şekil 5.1),



Şekil 5.1. 13 noktalı şebeke

$$\begin{aligned}
& \left(D_1 y_{x_1 x_1}^- \right)_{x_1 x_1} + \left(D_2 y_{x_2 x_2}^- \right)_{x_2 x_2} + \left(D_1 \frac{(v^+ + v^-)}{2} y_{x_1 x_1}^- \right)_{x_2 x_2} + \left(D_1 \frac{(v^+ + v^-)}{2} y_{x_2 x_2}^- \right)_{x_1 x_1} \\
& + 4D_{kp} y_{x_1 x_1 x_2 x_2}^- + \beta \delta(x_1) y = q(x)
\end{aligned} \tag{5.129}$$

elde edilir.

5.3.1. Levhalar sistemi için uyum koşullarının eşit adımlı kafeste sonlu fark yaklaşımı

(5.129) denkleminde $x_1 = 0, \pm h_1$ yazılırsa, (4.55)-(4.57) uyum koşullarının fark yaklaşımları bulunur. İşlemler sonucunda bu ifadeler aşağıdaki şekle dönüşür.

İlk olarak $x_1 = -h_1$ için incelensin. Bunun için (5.129) denkleminin terimleri ayrı-ayrı hesaplansın. Bu durumda tüm terimler aşağıdaki şekilde belirlenir:

(5.129) denkleminin ilk terimi,

$$\begin{aligned}
\left(D_1 y_{x_1 x_1}^- \right)_{x_1 x_1} &= \frac{D_1}{h_1^2} \left[\frac{y_{1,0} - 2y_{0,0} + y_{-1,0}}{h_1^2} - 2 \frac{y_{0,0} - 2y_{-1,0} + y_{-2,0}}{h_1^2} + \frac{y_{-1,0} - 2y_{-2,0} + y_{-3,0}}{h_1^2} \right] \\
&= \frac{1}{h_1^2} \left\{ D^- \left[\frac{y_{1,0} - 2y_{0,0} + y_{-1,0}}{h_1^2} - 2 \frac{y_{0,0} - 2y_{-1,0} + y_{-2,0}}{h_1^2} + \frac{y_{-1,0} - 2y_{-2,0} + y_{-3,0}}{h_1^2} \right] \right. \\
&+ \left. \left[2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) - D^- \right] \frac{y_{1,0} - 2y_{0,0} + y_{-1,0}}{h_1^2} \right\} \\
&= D^- y_{x_1 x_1 x_1 x_1}^- + \frac{1}{h_1^2} \left[2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) - D^- \right] y_{x_1 x_1}
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Yani,

$$\left(D_1 y_{x_1 x_1}^- \right)_{x_1 x_1} = D^- y_{x_1 x_1 x_1}^- + \frac{1}{h_1^2} \left[2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) - D^- \right] y_{x_1 x_1} \quad (5.130)$$

dur. (5.129) denkleminin ikinci terimi,

$$\begin{aligned} \left(D_2 y_{x_2 x_2}^- \right)_{x_2 x_2} &= \frac{D_2}{h_2^2} \left[\frac{y_{-1,2} - 2y_{-1,1} + y_{-1,0}}{h_2^2} - 2 \frac{y_{-1,1} - 2y_{-1,0} + y_{-1,-1}}{h_2^2} + \frac{y_{-1,0} - 2y_{-1,-1} + y_{-1,-2}}{h_2^2} \right] \\ &= \frac{1}{h_2^2} \left[D^- \frac{y_{-1,2} - 2y_{-1,1} + y_{-1,0}}{h_2^2} - 2D^- \frac{y_{-1,1} - 2y_{-1,0} + y_{-1,-1}}{h_2^2} + D^- \frac{y_{-1,0} - 2y_{-1,-1} + y_{-1,-2}}{h_2^2} \right] \\ &= \frac{D^-}{h_2^2} \left[\frac{y_{-1,2} - 2y_{-1,1} + y_{-1,0}}{h_2^2} - 2 \frac{y_{-1,1} - 2y_{-1,0} + y_{-1,-1}}{h_2^2} + \frac{y_{-1,0} - 2y_{-1,-1} + y_{-1,-2}}{h_2^2} \right] \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Yani,

$$\left(D_2 y_{x_2 x_2}^- \right)_{x_2 x_2} = D^- y_{x_2 x_2 x_2}^- \quad (5.131)$$

(5.129) denkleminin üçüncü terimi,

$$\begin{aligned} \left(D_1 \left(\frac{v^- + v^+}{2} \right) y_{x_1 x_1}^- \right)_{x_2 x_2} &= \frac{D_1 (v^- + v^+)}{2h_1^2} \left[\frac{y_{0,1} - 2y_{-1,1} + y_{-2,1}}{h_1^2} - 2 \frac{y_{0,0} - 2y_{-1,0} + y_{-2,0}}{h_1^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{y_{0,-1} - 2y_{-1,-1} + y_{-2,-1}}{h_1^2} \right] \\ &= \frac{(v^- + v^+)}{2h_1^2} \left[D^- \frac{y_{0,1} - 2y_{-1,1} + y_{-2,1}}{h_1^2} - 2D^- \frac{y_{0,0} - 2y_{-1,0} + y_{-2,0}}{h_1^2} + D^- \frac{y_{0,-1} - 2y_{-1,-1} + y_{-2,-1}}{h_1^2} \right] \\ &= \frac{D^- (v^- + v^+)}{2} y_{x_1 x_1 x_2}^- \end{aligned}$$

şeklinde belirlenir. Yani,

$$\left(D_1 \left(\frac{v^- + v^+}{2} \right) y_{x_1 x_1}^- \right)_{x_2 x_2}^- = \frac{D^- (v^- + v^+)}{2} y_{x_1 x_1 x_2 x_2}^- \quad (5.132)$$

dir. (5.129) denkleminin dördüncü terimi,

$$\begin{aligned} \left(D_1 \left(\frac{v^- + v^+}{2} \right) y_{x_2 x_2}^- \right)_{x_1 x_1}^- &= \frac{D_1 (v^- + v^+)}{2h_1^2} \left[\frac{y_{0,1} - 2y_{0,0} + y_{0,-1}}{h_2^2} - 2 \frac{y_{-1,1} - 2y_{-1,0} + y_{-1,-1}}{h_2^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{y_{-2,1} - 2y_{-2,0} + y_{-2,-1}}{h_2^2} \right] \\ &= \frac{(v^- + v^+)}{2h_1^2} \left[2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) \frac{y_{0,1} - 2y_{0,0} + y_{0,-1}}{h_2^2} \right. \\ &\quad \left. - 2D^- \frac{y_{-1,1} - 2y_{-1,0} + y_{-1,-1}}{h_2^2} + D^- \frac{y_{-2,1} - 2y_{-2,0} + y_{-2,-1}}{h_2^2} \right. \\ &\quad \left. + D^- \frac{y_{0,1} - 2y_{0,0} + y_{0,-1}}{h_2^2} - D^- \frac{y_{0,1} - 2y_{0,0} + y_{0,-1}}{h_2^2} \right] \\ &= \frac{(v^- + v^+)}{2h_1^2} \left\{ D^- \left[\frac{y_{0,1} - 2y_{0,0} + y_{0,-1}}{h_2^2} - 2 \frac{y_{-1,1} - 2y_{-1,0} + y_{-1,-1}}{h_2^2} + \frac{y_{-2,1} - 2y_{-2,0} + y_{-2,-1}}{h_2^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) - D^- \right] \frac{y_{0,1} - 2y_{0,0} + y_{0,-1}}{h_2^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(v^- + v^+)}{2} \left\{ D^- y_{x_1 x_1 x_2 x_2}^- + \left[2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) - D^- \right] \left(\frac{1}{h_1} y_{x_1 x_2 x_2}^- + \frac{1}{h_1^2} y_{x_2 x_2}^- \right) \right\} \right\} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Yani,

$$\left(D_1 \left(\frac{v^- + v^+}{2} \right) y_{x_2 x_2}^- \right)_{x_1 x_1}^- = \frac{(v^- + v^+)}{2} \left\{ D^- y_{x_1 x_1 x_2 x_2}^- \right. \quad (5.133)$$

$$\left. + \left[2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) - D^- \right] \left(\frac{1}{h_1} y_{x_1 x_2 x_2}^- + \frac{1}{h_1^2} y_{x_2 x_2}^- \right) \right\}$$

tür. (5.129) denkleminin son terimi için (5.121) ifadesi göz önüne alınarak,

$$4D_{kp} y_{x_1 x_1 x_2 x_2}^- = 4 \frac{D^- (1 - v^-) + D^+ (1 - v^+)}{4} y_{x_1 x_1 x_2 x_2}^- = [D^- (1 - v^-) + D^+ (1 - v^+)] y_{x_1 x_1 x_2 x_2}^-$$

şeklinde bulunur. Yani,

$$4D_{kp} y_{x_1 x_1 x_2 x_2}^- = [D^- (1 - v^-) + D^+ (1 - v^+)] y_{x_1 x_1 x_2 x_2}^-. \quad (5.134)$$

(5.130)-(5.134) ifadelerinden (5.129) denkleminin $x_1 = -h_1$ için ifadesi aşağıdaki şekle dönüşür:

$$D^- \left\{ y_{x_1 x_1 x_1 x_1}^- - \frac{1}{h_1^2} y_{x_1 x_1}^- + y_{x_2 x_2 x_2 x_2}^- + \frac{(v^- + v^+)}{2} \left(2y_{x_1 x_1 x_2 x_2}^- - \frac{1}{h_1} y_{x_1 x_2 x_2}^- - \frac{1}{h_1^2} y_{x_2 x_2}^- \right) \right\} \\ + 2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) \left\{ \frac{(v^- + v^+)}{2} \left[\frac{1}{h_1^2} (y_{x_1 x_1}^- + y_{x_2 x_2}^-) \right. \right. \quad (5.135) \\ \left. \left. + \frac{1}{h_1} y_{x_1 x_2 x_2}^- \right] + \frac{1}{h_1^2} y_{x_1 x_1}^- \right\} + [D^- (1 - v^-) + D^+ (1 - v^+)] y_{x_1 x_1 x_2 x_2}^- = q(-h_1)$$

Şimdi ise, $x_1 = 0$ için incelenir. Bunun için yukarıdaki ifadelerle benzer şekilde (5.129) denkleminin terimleri ayrı ayrı hesaplanır.

(5.129) denkleminin ilk terimi,

$$\begin{aligned}
\left(D_1 y_{x_1 x_1}^- \right)_{x_1 x_1} &= \frac{D_1}{h_1^2} \left[\frac{y_{2,0} - 2y_{1,0} + y_{0,0}}{h_1^2} - 2 \frac{y_{1,0} - 2y_{0,0} + y_{-1,0}}{h_1^2} + \frac{y_{0,0} - 2y_{-1,0} + y_{-2,0}}{h_1^2} \right] \\
&= \frac{1}{h_1^2} \left\{ D^+ \frac{y_{2,0} - 2y_{1,0} + y_{0,0}}{h_1^2} - 4 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) \frac{y_{1,0} - 2y_{0,0} + y_{-1,0}}{h_1^2} \right. \\
&\quad \left. + D^- \frac{y_{0,0} - 2y_{-1,0} + y_{-2,0}}{h_1^2} \right\} \\
&= \frac{1}{h_1^2} \left\{ D^+ \frac{y_{2,0} - 2y_{1,0} + y_{0,0}}{h_1^2} + 2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) \left(-2 \frac{y_{1,0} - 2y_{0,0} + y_{-1,0}}{h_1^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{y_{2,0} - 2y_{1,0} + y_{0,0}}{h_1^2} + \frac{y_{0,0} - 2y_{-1,0} + y_{-2,0}}{h_1^2} - \frac{y_{2,0} - 2y_{1,0} + y_{0,0}}{h_1^2} - \frac{y_{0,0} - 2y_{-1,0} + y_{-2,0}}{h_1^2} \right) \right\} \\
&\quad + D^- \frac{y_{0,0} - 2y_{-1,0} + y_{-2,0}}{h_1^2} \left\{ = \frac{1}{h_1^2} \left(\left(D^+ \frac{y_{2,0} - 2y_{1,0} + y_{0,0}}{h_1^2} + D^- \frac{y_{0,0} - 2y_{-1,0} + y_{-2,0}}{h_1^2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) \left(\frac{y_{2,0} - 2y_{1,0} + y_{0,0}}{h_1^2} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2 \frac{y_{1,0} - 2y_{0,0} + y_{-1,0}}{h_1^2} + \frac{y_{0,0} - 2y_{-1,0} + y_{-2,0}}{h_1^2} \right) \right\} \\
&\quad - 2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) \left(\frac{y_{2,0} - 2y_{1,0} + y_{0,0}}{h_1^2} + \frac{y_{0,0} - 2y_{-1,0} + y_{-2,0}}{h_1^2} \right) \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) y_{\bar{x}_1 \bar{x}_1 \bar{x}_1}^- \\
&- \frac{1}{h_1^2} \left\{ \left[2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) - D^+ \right] y_{x_1 x_1} \right. \\
&\left. + \left[2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) - D^- \right] y_{\bar{x}_1 \bar{x}_1} \right\}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Yani,

$$\begin{aligned}
(D_1 y_{x_1 x_1})_{\bar{x}_1 \bar{x}_1} &= 2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) y_{\bar{x}_1 \bar{x}_1 \bar{x}_1}^- \\
&- \frac{1}{h_1^2} \left\{ \left[2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) - D^+ \right] y_{x_1 x_1} \right. \\
&\left. + \left[2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) - D^- \right] y_{\bar{x}_1 \bar{x}_1} \right\}.
\end{aligned} \tag{5.136}$$

(5.129) denkleminin ikinci terimi,

$$\begin{aligned}
\left(D_2 y_{x_2 x_2}^- \right)_{x_2 x_2}^- &= \frac{D_2}{h_2^2} \left\{ \frac{y_{0,2} - 2y_{0,1} + y_{0,0}}{h_2^2} - 2 \frac{y_{0,1} - 2y_{0,0} + y_{0,-1}}{h_2^2} + \frac{y_{0,0} - 2y_{0,-1} + y_{0,-2}}{h_2^2} \right\} \\
&= \left[\frac{B}{h_1} + \left[D^- \left(1 - (v^-)^2 \right) + D^+ \left(1 - (v^+)^2 \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{(v^+ + v^-)^2}{2} \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) \right] y_{x_2 x_2 x_2 x_2}^-
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Yani,

$$\begin{aligned}
\left(D_2 y_{x_2 x_2}^- \right)_{x_2 x_2}^- &= \left[\frac{B}{h_1} + \left[D^- \left(1 - (v^-)^2 \right) + D^+ \left(1 - (v^+)^2 \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{(v^+ + v^-)^2}{2} \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) \right] y_{x_2 x_2 x_2 x_2}^-.
\end{aligned} \tag{5.137}$$

(5.129) denkleminin üçüncü terimi,

$$\begin{aligned}
\left(D_1 \left(\frac{v^- + v^+}{2} \right) y_{x_1 x_1}^- \right)_{x_2 x_2}^- &= \frac{D_1 (v^- + v^+)}{2h_2^2} \left[\frac{y_{1,1} - 2y_{0,1} + y_{-1,1}}{h_1^2} - 2 \frac{y_{1,0} - 2y_{0,0} + y_{-1,0}}{h_1^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{y_{1,-1} - 2y_{0,-1} + y_{-1,-1}}{h_1^2} \right] \\
&= \frac{(v^- + v^+)}{2h_2^2} \left[2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) \frac{y_{1,1} - 2y_{0,1} + y_{-1,1}}{h_1^2} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) \frac{y_{1,0} - 2y_{0,0} + y_{-1,0}}{h_1^2} \\
& + 2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) \frac{y_{1,-1} - 2y_{0,-1} + y_{-1,-1}}{h_1^2} \Bigg] \\
& = 2 \frac{(v^- + v^+)}{2h_2^2} \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) \left[\frac{y_{1,1} - 2y_{0,1} + y_{-1,1}}{h_1^2} \right. \\
& \left. - 2 \frac{y_{1,0} - 2y_{0,0} + y_{-1,0}}{h_1^2} + \frac{y_{1,-1} - 2y_{0,-1} + y_{-1,-1}}{h_1^2} \right] \\
& = (v^- + v^+) \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) y_{x_1 x_1 x_2 x_2}^-
\end{aligned}$$

şeklinde belirlenir. Yani,

$$\left(D_1 \left(\frac{v^- + v^+}{2} \right) y_{x_1 x_1}^- \right)_{x_2 x_2}^- = (v^- + v^+) \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) y_{x_1 x_1 x_2 x_2}^- \quad (5.138)$$

(5.129) denkleminin dördüncü terimi,

$$\begin{aligned}
\left(D_1 \left(\frac{v^- + v^+}{2} \right) y_{x_2 x_2}^- \right)_{x_1 x_1}^- &= \frac{D_1 (v^- + v^+)}{2h_1^2} \left[\frac{y_{1,1} - 2y_{1,0} + y_{1,-1}}{h_2^2} - 2 \frac{y_{0,1} - 2y_{0,0} + y_{0,-1}}{h_2^2} \right. \\
& \left. + \frac{y_{-1,1} - 2y_{-1,0} + y_{-1,-1}}{h_2^2} \right] = \frac{(v^- + v^+)}{2h_1^2} \left[D^+ \frac{y_{1,1} - 2y_{1,0} + y_{1,-1}}{h_2^2} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) \left[\frac{y_{0,1} - 2y_{0,0} + y_{0,-1}}{h_2^2} + D^- \frac{y_{-1,1} - 2y_{-1,0} + y_{-1,-1}}{h_2^2} \right] \\
& = \frac{(v^- + v^+)}{2h_1^2} \left\{ D^+ \frac{y_{1,1} - 2y_{1,0} + y_{1,-1}}{h_2^2} \right. \\
& + 2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) \left[\frac{y_{1,1} - 2y_{1,0} + y_{1,-1}}{h_2^2} - 2 \frac{y_{0,1} - 2y_{0,0} + y_{0,-1}}{h_2^2} \right. \\
& \left. \left. + \frac{y_{-1,1} - 2y_{-1,0} + y_{-1,-1}}{h_2^2} - \frac{y_{1,1} - 2y_{1,0} + y_{1,-1}}{h_2^2} - \frac{y_{-1,1} - 2y_{-1,0} + y_{-1,-1}}{h_2^2} \right] \right. \\
& \left. + D^- \frac{y_{-1,1} - 2y_{-1,0} + y_{-1,-1}}{h_2^2} \right\} \\
& = \frac{(v^- + v^+)}{2h_1^2} \left\{ 2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) \left[\frac{y_{1,1} - 2y_{1,0} + y_{1,-1}}{h_2^2} - 2 \frac{y_{0,1} - 2y_{0,0} + y_{0,-1}}{h_2^2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{y_{-1,1} - 2y_{-1,0} + y_{-1,-1}}{h_2^2} \right] - \left[2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) - D^+ \right] \left(\frac{y_{1,1} - 2y_{1,0} + y_{1,-1}}{h_2^2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{y_{0,1} - 2y_{0,0} + y_{0,-1}}{h_2^2} + \frac{y_{0,1} - 2y_{0,0} + y_{0,-1}}{h_2^2} \right) \right. \\
& \left. - \left[2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) - D^- \right] \frac{y_{-1,1} - 2y_{-1,0} + y_{-1,-1}}{h_2^2} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. -\frac{y_{0,1} - 2y_{0,0} + y_{0,-1}}{h_2^2} + \frac{y_{0,1} - 2y_{0,0} + y_{0,-1}}{h_2^2} \right\} \\
& = \frac{(v^- + v^+)}{2} \left\{ 2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) \left[y_{x_1 x_2 x_2}^- - \frac{1}{h_1} (y_{x_1 x_2 x_2}^- - y_{x_1 x_2 x_2}^-) \right] \right. \\
& \left. + \frac{1}{h_1} (D^+ y_{x_1 x_2 x_2}^- - D^- y_{x_1 x_2 x_2}^-) + \frac{D^- + D^+}{h_1^2} y_{x_2 x_2}^- \right\}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Yani,

$$\begin{aligned}
\left(D_1 \left(\frac{v^- + v^+}{2} \right) y_{x_2 x_2}^- \right)_{x_1 x_1} & = \frac{(v^- + v^+)}{2} \left\{ 2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) \left[y_{x_1 x_1 x_2 x_2}^- \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{h_1} (y_{x_1 x_2 x_2}^- - y_{x_1 x_2 x_2}^-) \right] + \frac{1}{h_1} (D^+ y_{x_1 x_2 x_2}^- - D^- y_{x_1 x_2 x_2}^-) + \frac{D^- + D^+}{h_1^2} y_{x_2 x_2}^- \right\}.
\end{aligned} \tag{5.139}$$

(5.129) denkleminin beşinci terimi ise, (5.121) ifadesinden yararlanılarak, (5.134) ifadesine benzer şekilde,

$$4D_{kp} y_{x_1 x_1 x_2 x_2}^- = \left[D^- (1 - v^-) + D^+ (1 - v^+) \right] y_{x_1 x_1 x_2 x_2}^-. \tag{5.140}$$

bulunur. (5.129) denkleminin son terimi ise,

$$\beta \delta(x_1) y(0) = \frac{\beta}{h_1} y(0) \tag{5.141}$$

şeklinindedir. (5.136)-(5.141) ifadelerinden (5.129) denkleminin $x_1 = 0$ için uyum koşulu olan aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned}
& 2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) \left\{ y_{x_1 x_1 x_1 x_1}^- + \frac{(v^+ + v^-)^2}{4} y_{x_2 x_2 x_2 x_2}^- \right. \\
& - \frac{1}{h_1^2} (y_{x_1 x_1} + y_{x_1 x_1}^-) + (v^- + v^+) y_{x_1 x_1 x_2 x_2}^- - \frac{(v^- + v^+)}{2h_1} (y_{x_1 x_2 x_2}^- - y_{x_1 x_2 x_2}^-) \left. \right\} \\
& + \left\{ \frac{B}{h_1} + \frac{1}{2} \left[D^- (1 - (v^-)^2) + D^+ (1 - (v^+)^2) \right] \right\} y_{x_2 x_2 x_2 x_2}^- \tag{5.142} \\
& + \frac{1}{h_1^2} \left[(D^+ y_{x_1 x_1} + D^- y_{x_1 x_1}^-) + \frac{(v^- + v^+)}{2} (D^+ - D^-) y_{x_2 x_2}^- \right] \\
& + \frac{(v^- + v^+)}{2h_1} (D^+ y_{x_1 x_2 x_2}^- - D^- y_{x_1 x_2 x_2}^-) + [D^- (1 - v^-) + D^+ (1 - v^+)] y_{x_1 x_1 x_2 x_2}^- \\
& + \frac{\beta}{h_1} y(0) = q(0)
\end{aligned}$$

Son olarak, $x_1 = h_1$ için incelenir. Bunun için yine yukarıdaki ifadelerle benzer şekilde (5.129) denkleminin terimleri ayrı ayrı hesaplanır. Bu durumda tüm terimler aşağıdaki şekilde olur:

(5.129) denkleminin ilk terimi,

$$\begin{aligned}
(D_1 y_{x_1 x_1}^-)_{x_1 x_1} &= \frac{D_1}{h_1^2} \left[\frac{y_{3,0} - 2y_{2,0} + y_{1,0}}{h_1^2} - 2 \frac{y_{2,0} - 2y_{1,0} + y_{0,0}}{h_1^2} + \frac{y_{1,0} - 2y_{0,0} + y_{-1,0}}{h_1^2} \right] \\
&= \frac{1}{h_1^2} \left\{ D^+ \frac{y_{3,0} - 2y_{2,0} + y_{1,0}}{h_1^2} - 2D^+ \frac{y_{2,0} - 2y_{1,0} + y_{0,0}}{h_1^2} \right. \\
& + 2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) \frac{y_{1,0} - 2y_{0,0} + y_{-1,0}}{h_1^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h_1^2} \left\{ D^+ \left[\frac{y_{3,0} - 2y_{2,0} + y_{1,0}}{h_1^2} - 2 \frac{y_{2,0} - 2y_{1,0} + y_{0,0}}{h_1^2} + \frac{y_{1,0} - 2y_{0,0} + y_{-1,0}}{h_1^2} - \frac{y_{1,0} - 2y_{0,0} + y_{-1,0}}{h_1^2} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) - D^+ \right] \frac{y_{1,0} - 2y_{0,0} + y_{-1,0}}{h_1^2} \right\} \\
&= D^+ y_{x_1 x_1 x_1}^- + \frac{1}{h_1^2} \left[2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) - D^+ \right] y_{x_1 x_1}^-
\end{aligned}$$

şeklinde belirlenir. Yani,

$$\left(D_1 y_{x_1 x_1}^- \right)_{x_1 x_1}^- = D^+ y_{x_1 x_1 x_1}^- + \frac{1}{h_1^2} \left[2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) - D^+ \right] y_{x_1 x_1}^- \quad (5.143)$$

(5.129) denkleminin ikinci terimi,

$$\begin{aligned}
\left(D_2 y_{x_2 x_2}^- \right)_{x_2 x_2}^- &= \frac{D_2}{h_2^2} \left[\frac{y_{1,2} - 2y_{1,1} + y_{1,0}}{h_2^2} - 2 \frac{y_{1,1} - 2y_{1,0} + y_{1,-1}}{h_2^2} + \frac{y_{1,0} - 2y_{1,-1} + y_{1,-2}}{h_2^2} \right] \\
&= \frac{1}{h_2^2} \left[D^+ \frac{y_{1,2} - 2y_{1,1} + y_{1,0}}{h_2^2} - 2D^+ \frac{y_{1,1} - 2y_{1,0} + y_{1,-1}}{h_2^2} + D^+ \frac{y_{1,0} - 2y_{1,-1} + y_{1,-2}}{h_2^2} \right] \\
&= \frac{D^+}{h_2^2} \left[\frac{y_{1,2} - 2y_{1,1} + y_{1,0}}{h_2^2} - 2 \frac{y_{1,1} - 2y_{1,0} + y_{1,-1}}{h_2^2} + \frac{y_{1,0} - 2y_{1,-1} + y_{1,-2}}{h_2^2} \right]
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Yani,

$$\left(D_2 y_{x_2 x_2}^- \right)_{x_2 x_2}^- = D^+ y_{x_2 x_2 x_2}^- \quad (5.144)$$

(5.129) denkleminin üçüncü terimi,

$$\begin{aligned}
\left(D_1 \left(\frac{v^- + v^+}{2} \right) y_{x_1 x_1}^- \right)_{x_2 x_2}^- &= \frac{D_1 (v^- + v^+)}{2h_2^2} \left[\frac{y_{2,1} - 2y_{1,1} + y_{0,1}}{h_1^2} \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{y_{2,0} - 2y_{1,0} + y_{0,0}}{h_1^2} + \frac{y_{2,-1} - 2y_{1,-1} + y_{0,-1}}{h_1^2} \right] \\
&= \frac{(v^- + v^+)}{2h_2^2} \left[D^+ \frac{y_{2,1} - 2y_{1,1} + y_{0,1}}{h_1^2} - 2D^+ \frac{y_{2,0} - 2y_{1,0} + y_{0,0}}{h_1^2} + D^+ \frac{y_{2,-1} - 2y_{1,-1} + y_{0,-1}}{h_1^2} \right] \\
&= \frac{D^+ (v^- + v^+)}{2} y_{x_1 x_1 x_2 x_2}^-
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Yani,

$$\left(D_1 \left(\frac{v^- + v^+}{2} \right) y_{x_1 x_1}^- \right)_{x_2 x_2}^- = \frac{D^+ (v^- + v^+)}{2} y_{x_1 x_1 x_2 x_2}^- \quad (5.145)$$

(5.129) denkleminin dördüncü terimi,

$$\begin{aligned}
\left(D_1 \left(\frac{v^- + v^+}{2} \right) y_{x_2 x_2}^- \right)_{x_1 x_1}^- &= \frac{D_1 (v^- + v^+)}{2h_1^2} \left[\frac{y_{2,1} - 2y_{1,1} + y_{0,1}}{h_2^2} \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{y_{1,1} - 2y_{1,0} + y_{1,-1}}{h_2^2} + \frac{y_{0,1} - 2y_{0,0} + y_{0,-1}}{h_2^2} \right] \\
&= \frac{(v^- + v^+)}{2h_1^2} \left[D^+ \left(\frac{y_{2,1} - 2y_{2,0} + y_{2,-1}}{h_2^2} - 2 \frac{y_{1,1} - 2y_{1,0} + y_{1,-1}}{h_2^2} + \frac{y_{0,1} - 2y_{0,0} + y_{0,-1}}{h_2^2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{y_{0,1} - 2y_{0,0} + y_{0,-1}}{h_2^2} \right] + 2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) \frac{y_{0,1} - 2y_{0,0} + y_{0,-1}}{h_2^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(v^- + v^+)}{2h_1^2} \left\{ D^+ \left(\frac{y_{2,1} - 2y_{2,0} + y_{2,-1}}{h_2^2} - 2 \frac{y_{1,1} - 2y_{1,0} + y_{1,-1}}{h_2^2} + \frac{y_{0,1} - 2y_{0,0} + y_{0,-1}}{h_2^2} \right) \right. \\
&+ \left[2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) - D^+ \right] \left(\frac{y_{0,1} - 2y_{0,0} + y_{0,-1}}{h_2^2} \right. \\
&\left. \left. - \frac{y_{1,1} - 2y_{1,0} + y_{1,-1}}{h_2^2} + \frac{y_{1,1} - 2y_{1,0} + y_{1,-1}}{h_2^2} \right) \right\} \\
&= \frac{(v^- + v^+)}{2} \left\{ D^+ y_{x_1 x_1 x_2 x_2}^- - \left[2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) - D^+ \right] \left(\frac{1}{h_1} y_{x_1 x_2 x_2}^- - \frac{1}{h_1^2} y_{x_2 x_2}^- \right) \right\}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Yani,

$$\left(D_1 \left(\frac{v^- + v^+}{2} \right) y_{x_2 x_2}^- \right)_{x_1 x_1}^- = \frac{(v^- + v^+)}{2} \left\{ D^+ y_{x_1 x_1 x_2 x_2}^- - \left[2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) - D^+ \right] \left(\frac{1}{h_1} y_{x_1 x_2 x_2}^- - \frac{1}{h_1^2} y_{x_2 x_2}^- \right) \right\} \quad (5.146)$$

$$- \left[2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) - D^+ \right] \left(\frac{1}{h_1} y_{x_1 x_2 x_2}^- - \frac{1}{h_1^2} y_{x_2 x_2}^- \right)$$

(5.129) denkleminin son terimi yine (5.134) ifadesine benzer şekilde (5.121)'den yararlanılarak aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$4D_{kp} y_{x_1 x_1 x_2 x_2}^- = \left[D^- (1 - v^-) + D^+ (1 - v^+) \right] y_{x_1 x_1 x_2 x_2}^- . \quad (5.147)$$

(5.143)-(5.147) ifadelerinden (5.129) denklemini, $x_1 = h_1$ için,

$$\begin{aligned}
& D^+ \left\{ y_{\bar{x}_1 \bar{x}_1 \bar{x}_1}^- - \frac{1}{h_1^2} y_{\bar{x}_1 \bar{x}_1}^- + y_{\bar{x}_2 \bar{x}_2 \bar{x}_2}^- + \frac{(v^- + v^+)}{2} \left(2y_{\bar{x}_1 \bar{x}_1 \bar{x}_2}^- + \frac{1}{h_1} y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_2}^- - \frac{1}{h_1^2} y_{\bar{x}_2 \bar{x}_2}^- \right) \right\} \\
& + 2 \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right) \left\{ \frac{1}{h_1^2} y_{\bar{x}_1 \bar{x}_1}^- - \frac{(v^- + v^+)}{2} \left(\frac{1}{h_1} y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_2}^- - \frac{1}{h_1^2} y_{\bar{x}_2 \bar{x}_2}^- \right) \right\} \quad (5.148) \\
& + \left[D^- (1 - v^-) + D^+ (1 - v^+) \right] y_{\bar{x}_1 \bar{x}_1 \bar{x}_2}^- = q(h_1)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Böylece, uyum koşullarının sonlu fark yaklaşımları $x_1 = 0, \pm h_1$ için (5.135), (5.142) ve (5.148) şeklinde elde edilmiştir. Genel halde yani, eşit adımlı olmayan kafeste levhaların ortak sınırında uyum koşulları:

$$\begin{aligned}
& \left(D_1 \left(y_{\bar{x}_1 \bar{x}_1}^- + v^+ y_{\bar{x}_2 \bar{x}_2}^- \right) \right)_{\bar{x}_1 \bar{x}_1} = \frac{1}{h_i h_{i-1}^2 h_{i-2}} D_{i-1j}^1 y_{i-2j} + \frac{v^+}{h_i h_{i-1} h_2^2} D_{i-1j}^1 y_{i-1j-1} \\
& - \left[\left(\frac{1}{h_i^2 h_{i-1}^2} + \frac{1}{h_i^3 h_{i-1}} \right) D_{ij}^1 + \left(\frac{1}{h_i h_{i-1}^3} + \frac{1}{h_i h_{i-1}^2 h_{i-2}} + \frac{2v^+}{h_i h_{i-1} h_2^2} \right) D_{i-1j}^1 \right] y_{i-1j} \\
& + \frac{v^+}{h_i h_{i-1} h_2^2} D_{i-1j}^1 y_{i-1j+1} - \frac{v^+}{h_2^2} \left(\frac{1}{h_i^2} + \frac{1}{h_i h_{i-1}} \right) D_{ij}^1 y_{ij-1} \quad (5.149) \\
& + \left\{ \left[\frac{2}{h_i^3 h_{i-1}} + \frac{1}{h_i^4} + \frac{1}{h_i^2 h_{i-1}^2} + \frac{2v^+}{h_2^2} \left(\frac{1}{h_i^2} + \frac{1}{h_i h_{i-1}} \right) \right] D_{ij}^1 \frac{1}{h_i h_{i-1}^3} D_{i-1j}^1 + \frac{1}{h_{i+1} h_i^3} D_{i+1j}^1 \right\} y_{ij} \\
& - \frac{v^+}{h_2^2} \left(\frac{1}{h_i^2} + \frac{1}{h_i h_{i-1}} \right) D_{ij}^1 y_{ij+1} + \frac{v^+}{h_i^2 h_2^2} D_{i+1j}^1 y_{i+1j-1} + \frac{v^+}{h_i^2 h_2^2} D_{i+1j}^1 y_{i+1j+1} \\
& - \left[\left(\frac{1}{h_{i+1}^2 h_i^2} + \frac{1}{h_{i+1} h_i^3} + \frac{2v^+}{h_i^2 h_2^2} \right) D_{i+1j}^1 + \left(\frac{1}{h_i^3 h_{i-1}} + \frac{1}{h_i^4} \right) D_{ij}^1 \right] y_{i+1j} + \frac{1}{h_i^2 h_{i+1}^2} D_{i+1j}^1 y_{i+2j}
\end{aligned}$$

ve,

$$\begin{aligned}
& \left(D_2 \left(y_{\bar{x}_2 x_2}^- + v^- y_{\bar{x}_1 x_1}^- \right) \right)_{\bar{x}_2 x_2} = \frac{v^-}{h_i h_{i-1} h_2^2} D_{ij-1}^2 y_{i-1j-1} - \frac{2v^-}{h_i h_{i-1} h_2^2} D_{ij}^2 y_{i-1j} \\
& + \frac{v^-}{h_i h_{i-1} h_2^2} D_{ij+1}^2 y_{i-1j+1} + \frac{1}{h_2^4} D_{ij-1}^2 y_{ij-2} + \frac{v^-}{h_i^2 h_2^2} D_{ij-1}^2 y_{i+1j-1} - \frac{2v^-}{h_i^2 h_2^2} D_{ij}^2 y_{i+1j} \\
& - \left[\frac{2}{h_2^4} (D_{ij}^2 + D_{ij-1}^2) + \frac{v^-}{h_2^2} \left(\frac{1}{h_i^2} + \frac{1}{h_i h_{i-1}} \right) D_{ij-1}^1 \right] y_{ij-1} + \frac{v^-}{h_i^2 h_2^2} D_{ij+1}^2 y_{i+1j+1} \\
& + \left[\frac{1}{h_2^4} (D_{ij+1}^2 + 4D_{ij}^2 + D_{ij-1}^2) + \frac{2v^-}{h_2^2} \left(\frac{1}{h_i^2} + \frac{1}{h_i h_{i-1}} \right) D_{ij}^1 \right] y_{ij} \\
& - \left[\frac{2}{h_2^4} (D_{ij+1}^2 + D_{ij}^2) + \frac{v^-}{h_2^2} \left(\frac{1}{h_i^2} + \frac{1}{h_i h_{i-1}} \right) D_{ij+1}^1 \right] y_{ij+1} + \frac{1}{h_2^4} D_{ij+1}^2 y_{ij+2}
\end{aligned} \tag{5.150}$$

şeklindedir. Karışık türevlerden birincisi,

$$\begin{aligned}
& \left(D_{kp} y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \right)_{x_1 x_2} = \frac{1}{h_i h_{i-1} h_2^2} D_{ij}^{kp} y_{i-1j-1} - \frac{1}{h_i h_{i-1} h_2^2} (D_{ij}^{kp} + D_{ij+1}^{kp}) y_{i-1j} \\
& + \frac{1}{h_i h_{i-1} h_2^2} D_{ij+1}^{kp} y_{i-1j+1} - \left(\frac{1}{h_i^2 h_2^2} D_{i+1j}^{kp} + \frac{1}{h_i h_{i-1} h_2^2} D_{ij}^{kp} \right) y_{ij-1} \\
& + \left[\frac{1}{h_i^2 h_2^2} (D_{i+1j}^{kp} + D_{i+1j+1}^{kp}) + \frac{1}{h_i h_{i-1} h_2^2} (D_{ij}^{kp} + D_{ij+1}^{kp}) \right] y_{ij} \\
& - \left(\frac{1}{h_i^2 h_2^2} D_{i+1j+1}^{kp} + \frac{1}{h_i h_{i-1} h_2^2} D_{ij+1}^{kp} \right) y_{ij+1} + \frac{1}{h_i^2 h_2^2} D_{i+1j}^{kp} y_{i+1j-1} \\
& - \left(\frac{1}{h_i^2 h_2^2} D_{i+1j}^{kp} + \frac{1}{h_i h_{i-1} h_2^2} D_{i+1j+1}^{kp} \right) y_{i+1j} + \frac{1}{h_i^2 h_2^2} D_{i+1j+1}^{kp} y_{i+1j+1}
\end{aligned} \tag{5.151}$$

ikincisi,

$$\begin{aligned}
& \left(D_{kp} y_{x_1 x_2} \right)_{x_1 x_2} = \frac{1}{h_i h_{i-1} h_2^2} D_{ij-1}^{kp} y_{i-1j-1} - \frac{1}{h_i h_{i-1} h_2^2} \left(D_{ij-1}^{kp} + D_{ij}^{kp} \right) y_{i-1j} \\
& + \frac{1}{h_i h_{i-1} h_2^2} D_{ij}^{kp} y_{i-1j+1} - \left(\frac{1}{h_i^2 h_2^2} D_{i+1j-1}^{kp} + \frac{1}{h_i h_{i-1} h_2^2} D_{ij-1}^{kp} \right) y_{ij-1} \\
& + \left[\frac{1}{h_i^2 h_2^2} \left(D_{i+1j-1}^{kp} + D_{i+1j}^{kp} \right) + \frac{1}{h_i h_{i-1} h_2^2} \left(D_{ij-1}^{kp} + D_{ij}^{kp} \right) \right] y_{ij} \\
& - \left(\frac{1}{h_i^2 h_2^2} D_{i+1j}^{kp} + \frac{1}{h_i h_{i-1} h_2^2} D_{ij}^{kp} \right) y_{ij+1} + \frac{1}{h_i^2 h_2^2} D_{i+1j-1}^{kp} y_{i+1j-1} \\
& - \left(\frac{1}{h_i^2 h_2^2} D_{i+1j-1}^{kp} + \frac{1}{h_i h_{i-1} h_2^2} D_{i+1j}^{kp} \right) y_{i+1j} + \frac{1}{h_i^2 h_2^2} D_{i+1j}^{kp} y_{i+1j+1}
\end{aligned} \tag{5.152}$$

üçüncüsü,

$$\begin{aligned}
& \left(D_{kp} y_{x_1 x_2} \right)_{x_1 x_2} = \frac{1}{h_{i-1}^2 h_2^2} D_{i-1j}^{kp} y_{i-1j-1} - \frac{1}{h_{i-1}^2 h_2^2} \left(D_{i-1j}^{kp} + D_{i-1j+1}^{kp} \right) y_{i-1j} \\
& + \frac{1}{h_{i-1}^2 h_2^2} D_{i-1j+1}^{kp} y_{i-1j+1} - \left(\frac{1}{h_{i-1}^2 h_2^2} D_{i-1j}^{kp} + \frac{1}{h_i h_{i-1} h_2^2} D_{ij}^{kp} \right) y_{ij-1} \\
& + \left[\frac{1}{h_{i-1}^2 h_2^2} \left(D_{i-1j}^{kp} + D_{i-1j+1}^{kp} \right) + \frac{1}{h_i h_{i-1} h_2^2} \left(D_{ij}^{kp} + D_{ij+1}^{kp} \right) \right] y_{ij} \\
& - \left(\frac{1}{h_{i-1}^2 h_2^2} D_{i-1j+1}^{kp} + \frac{1}{h_i h_{i-1} h_2^2} D_{ij+1}^{kp} \right) y_{ij+1} + \frac{1}{h_i h_{i-1} h_2^2} D_{ij}^{kp} y_{i+1j-1} \\
& - \frac{1}{h_i h_{i-1} h_2^2} \left(D_{ij}^{kp} + D_{ij+1}^{kp} \right) y_{i+1j} + \frac{1}{h_i h_{i-1} h_2^2} D_{ij+1}^{kp} y_{i+1j+1}
\end{aligned} \tag{5.153}$$

ve sonuncusu ise,

$$\begin{aligned}
(D_{kp}y_{x_1x_2})_{x_1x_2} &= \frac{1}{h_{i-1}^2h_2^2}D_{i-1j-1}^{kp}y_{i-1j-1} - \frac{1}{h_{i-1}^2h_2^2}(D_{i-1j-1}^{kp} + D_{i-1j}^{kp})y_{i-1j} \\
&+ \frac{1}{h_{i-1}^2h_2^2}D_{i-1j}^{kp}y_{i-1j+1} - \left(\frac{1}{h_{i-1}^2h_2^2}D_{i-1j-1}^{kp} + \frac{1}{h_ih_{i-1}h_2^2}D_{ij-1}^{kp} \right) y_{ij-1} \\
&+ \left[\frac{1}{h_{i-1}^2h_2^2}(D_{i-1j-1}^{kp} + D_{i-1j}^{kp}) + \frac{1}{h_ih_{i-1}h_2^2}(D_{ij-1}^{kp} + D_{ij}^{kp}) \right] y_{ij} \\
&- \left(\frac{1}{h_{i-1}^2h_2^2}D_{i-1j}^{kp} + \frac{1}{h_ih_{i-1}h_2^2}D_{ij}^{kp} \right) y_{ij+1} + \frac{1}{h_ih_{i-1}h_2^2}D_{ij-1}^{kp}y_{i+1j-1} \\
&- \frac{1}{h_ih_{i-1}h_2^2}(D_{ij-1}^{kp} + D_{ij}^{kp})y_{i+1j} + \frac{1}{h_ih_{i-1}h_2^2}D_{ij}^{kp}y_{i+1j+1}
\end{aligned} \tag{5.154}$$

olmak üzere, bu ifadelerin toplamı şeklinde yazılabilir.

6. LEVHALAR SİSTEMİNİN EĞİLMESİ PROBLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜNÜN TEST EDİLMESİ

Bu bölümde elastik levhaların yan yana birleştirilmesiyle oluşturulan sistemin eğilmesi probleminin analizi için hazırlanan bilgisayar programını test etmek amacıyla, sistemin sınırlarında sert kenetlenme (clamped) ve basit dayanak (simply supported) sınır koşulları verildiği durumlarda özel test fonksiyonları seçildi.

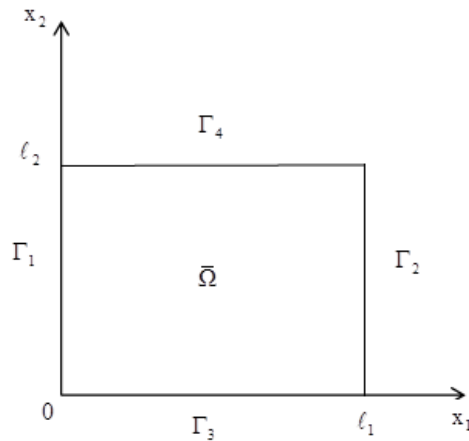
6.1. Levhalar Sistemi İçin Sınırlarında Basit Dayanak Koşulu Verildiğinde Sayısal Çözümünün Test Fonksiyonu ile İncelenmesi

$\bar{\Omega} = \{x = (x_1, x_2) \mid 0 \leq x_\varphi \leq \ell_\varphi, \varphi=1,2\}$ dikdörtgen bölgesini dolduran farklı özellikli iki levha birer kenarından birbirine bağlansın. $\bar{\Omega}$ bölgesinin sınırı,

$$\Gamma_1 = \{(0, x_2) \mid 0 \leq x_2 \leq \ell_2\}, \quad \Gamma_2 = \{(\ell_1, x_2) \mid 0 \leq x_2 \leq \ell_2\}$$

$$\Gamma_3 = \{(x_1, 0) \mid 0 \leq x_1 \leq \ell_1\}, \quad \Gamma_4 = \{(x_1, \ell_2) \mid 0 \leq x_1 \leq \ell_1\}$$

olmak üzere $\partial\bar{\Omega} = \Gamma$ ($\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$) şeklindedir (Şekil 6.1).



Şekil 6.1. $\bar{\Omega}$ dikdörtgen bölgesi

$$\omega(x_1, x_2) = -\sin\pi x_1 \sin\pi x_2 \quad (6.1)$$

fonksiyonunun, $\bar{\Omega}$ bölgesinin sınırlarında (3.71) basit dayanak (menteşe) sınır koşulunu sağladığı kolaylıkla gösterilebilir. (6.1) fonksiyonu,

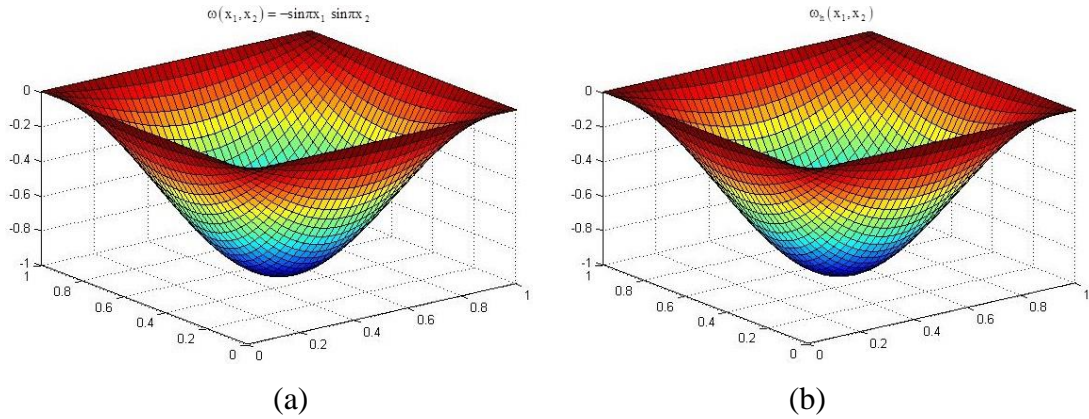
$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left[D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) \right] + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[D(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \\ & = f(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (6.2)$$

denge denkleminde yazıldığında (6.3) fonksiyonu elde edilir:

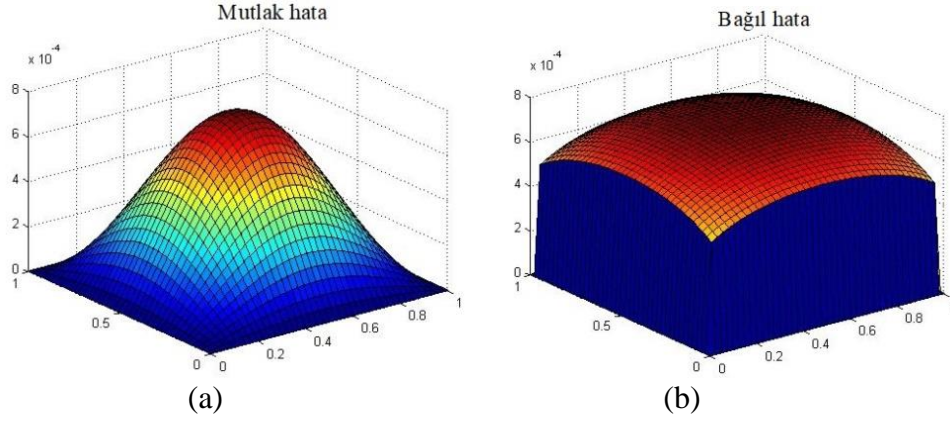
$$f(x_1, x_2) = -4\pi^4 \sin\pi x_1 \sin\pi x_2. \quad (6.3)$$

Hazırlanan bilgisayar programının doğruluğunu incelemek amacı ile (6.1) fonksiyonu ele alınarak problem çözülmüş ve hata analizi yapılmıştır. Bunun için önce, $\ell_1 = \ell_2 = 1$ birim olan kare bölgede, $N_{x_1} \times N_{x_2}$ (sırasıyla x_1 ve x_2 yönlerindeki nokta sayılarını gösteriyor) boyutlu kafeste elde edilen $\omega_h(x_1, x_2)$ yaklaşık çözümlerinin, analitik fonksiyonun ve hata fonksiyonlarının grafikleri incelendi:

1. $\alpha = \infty$ ve $\beta = 0$ durumunda, $N_{x_1} \times N_{x_2} = 41 \times 41$ boyutlu kafes için elde edilen grafikler ise Şekil 6.2 ve Şekil 6.3'te verildi.



Şekil 6.2. (a) $\omega(x_1, x_2) = -\sin\pi x_1 \sin\pi x_2$ fonksiyonunun grafiği, (b) $\omega_h(x_1, x_2)$ yaklaşık çözümün grafiği



Şekil 6.3. Test probleminin çözümünün, (a) mutlak hatası, (b) bağıl hatası

Burada, $\alpha = \infty$ koşulu sistemi oluşturan levhaların $x_1 = 0$ ortak sınırından birbirine kaynak edildiğini gösterir. Bu da levhaların birlikte hareket ettiği, yani tek bir levha gibi davrandığı ve $\beta = 0$ koşulu da birleşme sınırının altında herhangi bir dayanağın olmadığı anlamına gelir.

Sayısal çözüm bulunduğu zaman tanımlanmış kafesin boyutunun sonuca etkisini incelemek amacı ile problem farklı kafeslerde çözülmüş ve sonuçlar Tablo 6.1'de verilmiştir.

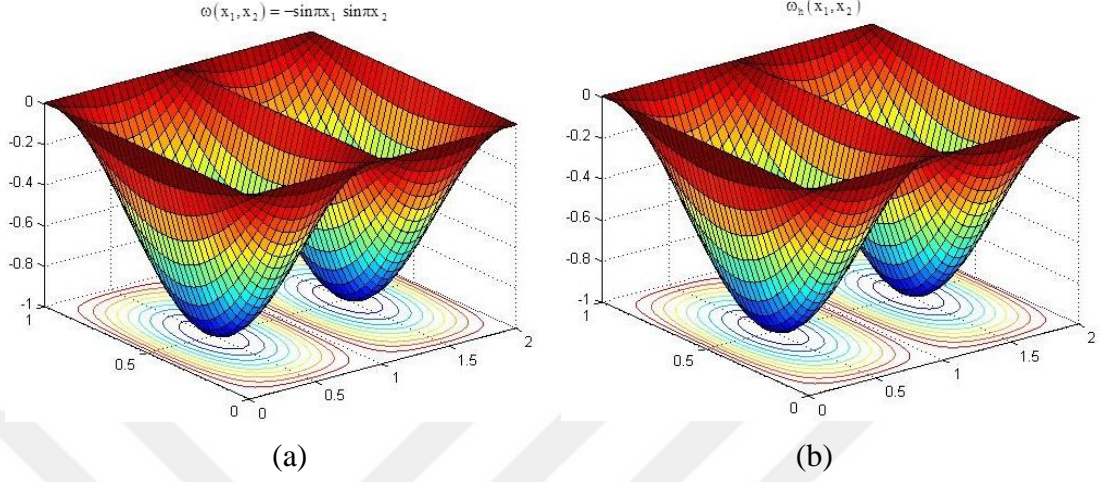
Tablo 6.1. Sınırlarında basit dayanak sınır koşulu verildiğinde farklı kafeslerde test probleminin çözümünde oluşan maksimum mutlak ve bağıl hatalar

$N_{x_1} \times N_{x_2}$	$\max \omega_h(x_1, x_2)$	Mutlak Hata	Bağıl Hata
41x41	1,0007	$7,4766 \times 10^{-4}$	$7,4766 \times 10^{-4}$
61x61	1,0004	$3,7423 \times 10^{-4}$	$3,7423 \times 10^{-4}$

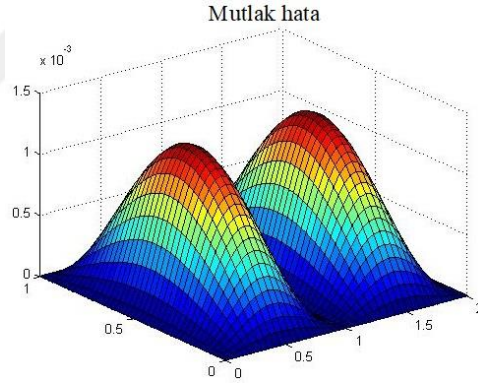
2. $\alpha = 0$ ve $\beta = \infty$ durumunda, levhalar sistemi birbirine ideal bir menteşe ile birleşmiş ($\alpha = 0$), birleşme sınırının altında sonsuz sertliğe sahip bir dayanağın olduğu ($\beta = \infty$) duruma denk olur. Bu da $\beta = \infty$ koşulundan dolayı $x_1 = 0$ sınırında eğilmenin olmaması sonucunu doğurur.

Hazırlanan bilgisayar programının doğruluğunu incelemek amacı ile (6.1) fonksiyonu ele alınarak problem çözüldü ve hata analizi yapıldı. Bunun için önce, $\ell_1 = 2$, $\ell_2 = 1$ birim olan dikdörtgen bölgede, $N_{x_1} \times N_{x_2} = 41 \times 41$ boyutlu kafeste elde

edilen $\omega_h(x_1, x_2)$ yaklaşık çözümlerinin, analitik fonksiyonun ve hata fonksiyonlarının grafikleri Şekil 6.4-Şekil 6.6'da verilmiştir.



Şekil 6.4. (a) $\omega(x_1, x_2) = -\sin\pi x_1 \sin\pi x_2$ fonksiyonunun grafiği, (b) $\omega_h(x_1, x_2)$ yaklaşık çözümün grafiği



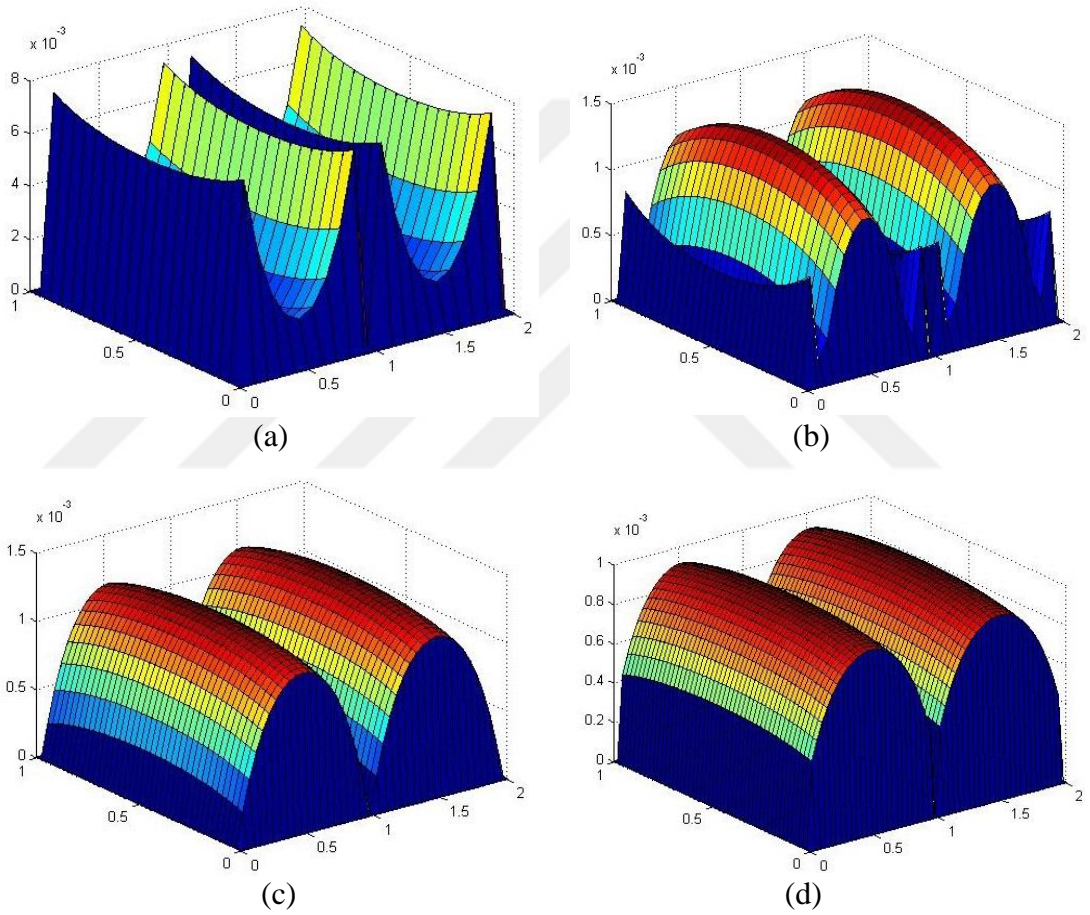
Şekil 6.5. Test probleminin çözümünün mutlak hatası

Tablo 6.2. Sınırlarında basit dayanak sınır koşulu verilen levhalar sisteminde farklı kafesler için test probleminin çözümünde oluşan maksimum eğilme, maksimum mutlak ve bağıl hatalar

$N_{x_1} \times N_{x_2}$	$\max \omega_h(x_1, x_2)$	Mutlak Hata	Bağıl Hata
21x21	0,9992	0,0023	0,0076
31x31	0,9960	0,0014	0,0014
41x41	1,0013	0,0013	0,0013
51x51	0,9990	$9,8886 \times 10^{-4}$	$9,9082 \times 10^{-4}$
61x61	1,0008	$7,6638 \times 10^{-4}$	$7,6638 \times 10^{-4}$

Kafesin boyutunun sayısal çözümün bulunmasında sonucu nasıl etkilediğini incelemek için farklı boyuttaki kafeslerde problem çözüldü ve elde edilen $\max \omega_h(x_1, x_2)$ yaklaşık çözümleri, maksimum mutlak ve bağıl hata değerleri Tablo 6.2’de verildi.

Kafeslerden sayısal çözümlerin daha uygun olanını belirlemek için hataların sayısal değerlerine ek olarak görsellik amacı ile farklı boyutlu kafeslerde elde edilen sonucun bağıl hatalarının grafikleri Şekil 6.6’da verildi.



Şekil 6.6. Test probleminin çözümünün sırasıyla, (a) 21x21 (b) 31x31, (c) 41x41, (d) 51x51 boyutlu kafeslerdeki bağıl hata grafikleri

Şekil 6.6 incelendiğinde (a) 21x21 boyutlu kafeste elde edilen maksimum bağıl hatanın sınırlarda olduğu görülüyor. Bağıl hatanın maksimum olduğu noktada (6.1) fonksiyonunun değeri $\omega = 0,0483$, yaklaşık değeri $\omega_h = 0,0480$, mutlak hata $3,6529 \times 10^{-4}$ ve bağıl hata değeri %0,76 elde ediliyor. 31x31 boyutlu kafeste maksimum bağıl hata levhaların ortalarında elde ediliyor. Yine bağıl hatanın

maksimum olduğu noktada (6.1) fonksiyonunun değeri $\omega = 0,9945$, yaklaşık değeri $\omega_h = 0,9960$, mutlak hata 0,0014 ve bağıl hata da %0,14 şeklinde elde ediliyor. Şekil 6.6'dan anlaşıldığı gibi kafesin boyutu arttıkça eğilme sonucu oluşan maksimum bağıl hatalar levhaların ortasında oluyor.

Elde edilen maksimum eğilmeler doğrultusunda hazırlanan program test edildiğinde yaklaşık çözümün hatasının 10^{-3} civarında olduğu görülür.

6.2. Biharmonik Denklem İçin Sınırlarında Sert Kenetlenme Koşulu Verildiğinde Sayısal Çözümünün Test Fonksiyonu ile İncelenmesi

$$\omega(x_1, x_2) = -(1 - \cos 2\pi x_1)(1 - \cos 2\pi x_2) \quad (6.4)$$

fonksiyonunun $\bar{\Omega}$ bölgesinin sınırlarında (3.70) sert kenetlenme sınır koşulunu sağladığı kolaylıkla gösterilebilir. (6.4) fonksiyonu, (6.2) denkleminde yazıldığında (6.5) fonksiyonu elde edilir:

$$f(x_1, x_2) = 16D\pi^4 (\cos 2\pi x_1 + \cos 2\pi x_2 - 4\cos 2\pi x_1 \cos 2\pi x_2). \quad (6.5)$$

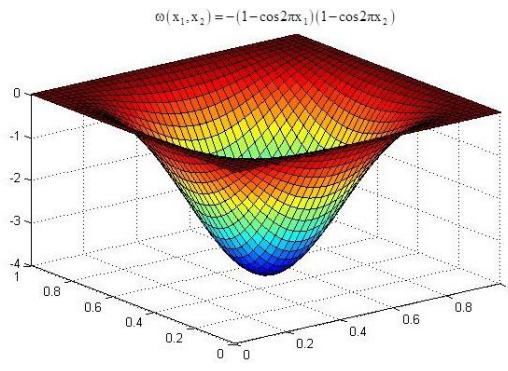
Menteşe koşulunda olduğu gibi hazırlanan bilgisayar programını incelemek amacı ile aynı veriler kullanılarak, $\alpha = \infty, \beta = 0$ ve $\alpha = \infty, \beta = \infty$ durumunda eğilmeler ve hata grafikleri incelendi:

1. $\alpha = \infty$ ve $\beta = 0$ durumunda, farklı kafeslerde elde edilen maksimum eğilme, maksimum mutlak hata ve bağıl hata analizleri Tablo 6.3'te verildi.

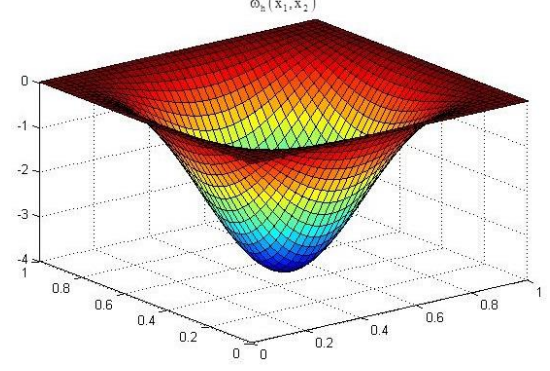
Tablo 6.3. Sınırlarında sert kenetlenme koşulu verildiğinde farklı kafeslerde test probleminin çözümünde oluşan maksimum mutlak ve bağıl hatalar

$N_{x_1} \times N_{x_2}$	$\max \omega_h(x_1, x_2)$	Mutlak Hata	Bağıl Hata
41 x 41	4,0142	0,0142	0,0203
61 x 61	4,0067	0,0067	0,0094

$N_{x_1} \times N_{x_2} = 41 \times 41$ boyutlu kafeste elde edilen $\omega_h(x_1, x_2)$ yaklaşık çözümlerinin, analitik fonksiyonun ve hata fonksiyonlarının grafikleri Şekil 6.7 ve Şekil 6.8'de verildi.



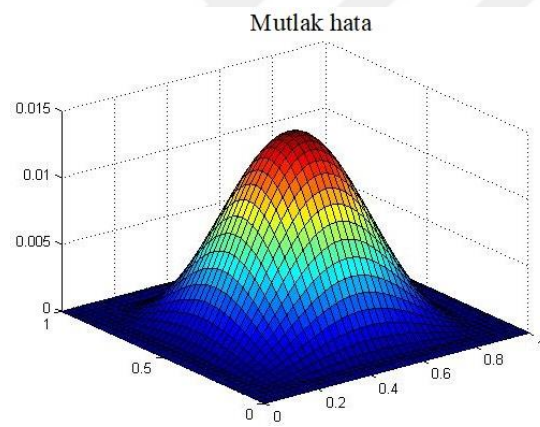
(a)



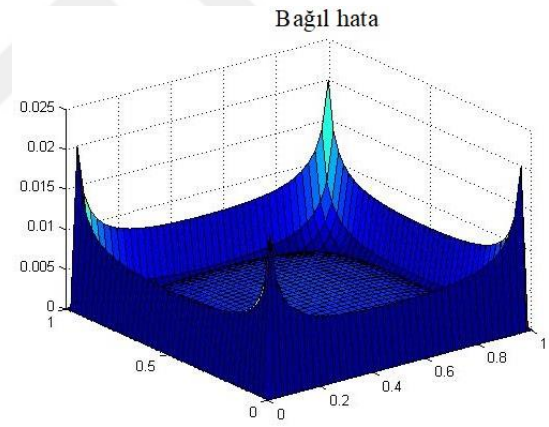
(b)

Şekil 6.7. (a) $\omega(x_1, x_2) = -(1 - \cos 2\pi x_1)(1 - \cos 2\pi x_2)$ fonksiyonunun grafiği, (b) $\omega_h(x_1, x_2)$ yaklaşık çözümün grafiği

Yukarıda yapılanlara benzer olarak Şekil 6.7 yorumlanacak olursa, $\alpha = \infty$ koşulu levhaların birbirine kaynak edildiğini, $\beta = 0$ koşulunun da birleşme sınırında herhangi bir dayanağın olmadığını gösterir.



(a)



(b)

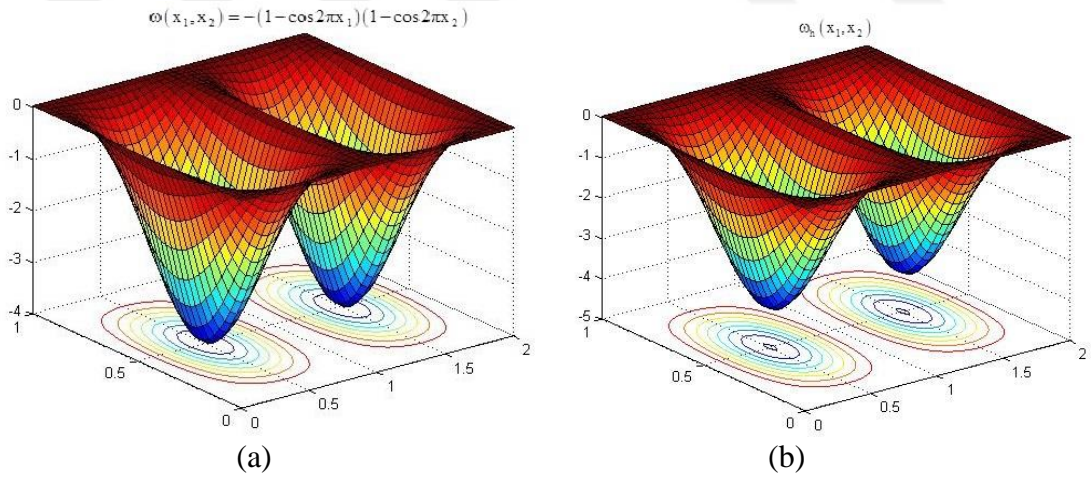
Şekil 6.8. Test probleminin çözümünün, (a) mutlak hatası, (b) bağıl hatası

Şekil 6.7 ve Tablo 6.3'de görüldüğü gibi yukarıdaki duruma benzer şekilde maksimum eğilmeler levhaların birleşme sınırında oluyor. Hazırlanan program test edildiğinde analitik fonksiyondan ve test fonksiyonundan elde edilen maksimum değerler incelendiği zaman kafesin boyutu arttıkça 10^{-3} civarında hatayla gerçek çözüme yaklaştığı görülür. Şekil 6.7 ve Şekil 6.8 (a)'ya göre maksimum eğilme ve maksimum mutlak hata levhaların birleşme sınırında, Şekil 6.8 (b)'ye göre ise maksimum bağıl hatanın sınırlarda olduğu görülüyor. $\alpha = \infty$ ve $\beta = 0$ durumu için

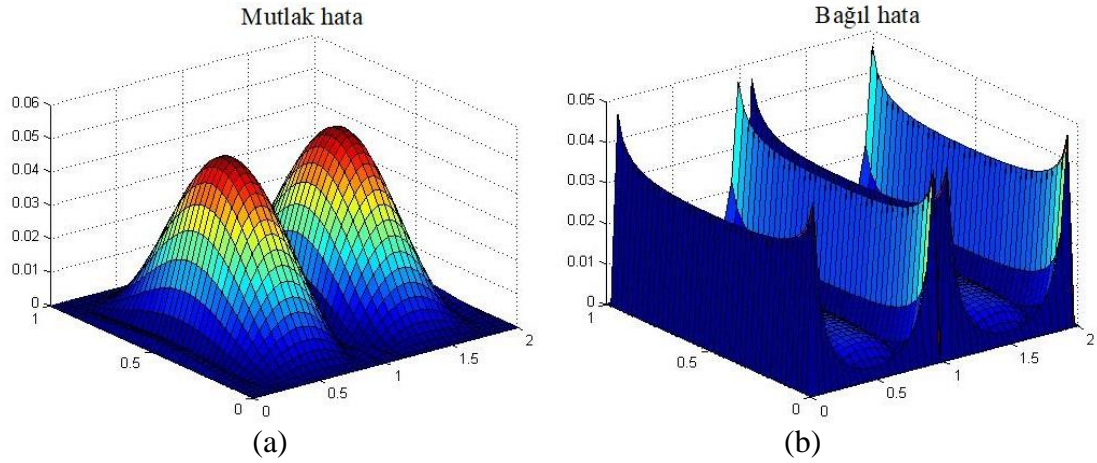
farklı kafeslerde elde edilen maksimum eğilme, maksimum mutlak hata ve bağlı hata analizleri Tablo 6.3'te verildi.

2. $\alpha = \infty$ ve $\beta = \infty$ durumunda, levhalar sistemi birbirine kaynak edilmiş ($\alpha = \infty$), birleşme sınırının altına sonsuz sertliğe sahip bir dayanağın olması ($\beta = \infty$) durumuna denk olur.

Hazırlanan bilgisayar programının doğruluğunu incelemek amacı ile (6.4) fonksiyonu ele alınarak problem çözülmüş ve hata analizi yapılmıştır. Bunu için önce, $l_1 = 2$, $l_2 = 1$ birim olan dikdörtgen bölgede, $N_{x_1} \times N_{x_2} = 41 \times 41$ boyutlu kafeste elde edilen $\omega_h(x_1, x_2)$ yaklaşık çözümlerinin, analitik fonksiyonun ve hata fonksiyonlarının grafikleri Şekil 6.9 ve Şekil 6.10'da verilmiştir. Bu durumda, $\alpha = \infty$ koşulu levhaların $x_1 = 0$ ortak sınırında mutlak sert olarak birleştiğini, yani iki levhanın birbirine kaynak edilerek birleştiğini, $\beta = \infty$ koşulu ise, birleşme sınırında sonsuz sertlikte bir dayanağın varlığını, yani, $x_1 = 0$ sınır boyunca eğilmelerin olmadığını gösterir.



Şekil 6.9. (a) $\omega(x_1, x_2) = -(1 - \cos 2\pi x_1)(1 - \cos 2\pi x_2)$ fonksiyonunun grafiği, (b) $\omega_h(x_1, x_2)$ yaklaşık çözümünün grafiği



Şekil 6.10. Test probleminin çözümünün, (a) mutlak hatası, (b) bağıl hatası

Şekil 6.9'a göre levhalardaki maksimum eğilmeler levhaların ortalarında ve Şekil 6.10 (a)'daki mutlak hata grafiği incelendiğinde maksimum mutlak hataların da levhaların ortalarında olduğu görülür. Şekil 6.10 (b) incelendiğinde ise, farklı kafeslerde elde edilen maksimum bağıl hatanın sınırlarda olduğu görülür. Buna göre, levhalar sisteminde farklı kafesler için elde edilen maksimum eğilme, mutlak ve bağıl hata analizleri $\alpha = \infty$ ve $\beta = \infty$ durumu için Tablo 6.4'te verildi.

Tablo 6.4. Sınırlarında sert kenetlenme koşulu verilen levhalar sisteminde farklı kafesler için Test probleminin çözümünde oluşan maksimum eğilme, maksimum mutlak ve bağıl hatalar

$N_{x_1} \times N_{x_2}$	$\max \omega_h(x_1, x_2)$	Mutlak Hata	Bağıl Hata
21x21	4,0827	0,0827	0,0207
31x31	4,0049	0,0486	0,0123
41x41	4,0312	0,0312	0,0078
51x51	4,0054	0,0211	0,0053
61x61	4,0153	0,0153	0,0038

Sayısal sonuçlarda maksimal hatalar, sınıra yakın düğüm noktalarında eğilmenin çok çok küçük olduğu değerlere karşılık geldiğinden göz ardı edilebilir. Sınırlarında sert kenetlenme koşulu verilen levhalar sisteminde maksimal hatalara karşılık gelen eğilme değerleri Tablo 6.5'te verildi.

Tablo 6.5. Farklı kafesler için Test probleminin çözümünde bağıl hataların maksimum olduğu noktadaki ω fonksiyonunun değeri, ω_h yaklaşık değeri, mutlak ve bağıl hata değerleri

$N_{x_1} \times N_{x_2}$	ω	$\max \omega_h(x_1, x_2)$	Mutlak Hata	Bağıl Hata
21x21	0,0093	0,0079	0,0014	0,1518
31x31	0,0019	0,0017	$1,4593 \times 10^{-4}$	0,0772
41x41	$6,0258 \times 10^{-4}$	$5,7433 \times 10^{-4}$	$2,8246 \times 10^{-5}$	0,0469
51x51	$2,4773 \times 10^{-4}$	$2,3995 \times 10^{-4}$	$7,7856 \times 10^{-6}$	0,0314
61x61	$1,1971 \times 10^{-4}$	$1,1702 \times 10^{-4}$	$2,6926 \times 10^{-6}$	0,0225

Tablo 6.5 incelendiğinde, 21x21 boyutlu kafeste bağıl hatanın maksimum olduğu noktada, (6.4) fonksiyonunun değeri $\omega = 0,0093$, yaklaşık değeri $\omega_h = 0,0079$, mutlak hata değeri 0,0014 ve bağıl hata değeri de %15,18 olduğu görülür. 31x31 boyutlu kafeste yine bağıl hatanın maksimum olduğu noktada (6.4) fonksiyonunun değeri $\omega = 0,0019$, yaklaşık değeri $\omega_h = 0,0017$, mutlak hata değeri $1,4593 \times 10^{-4}$ ve bağıl hata değeri de %7,72 şeklindedir. Benzer şekilde 41x41, 51x51 ve 61x61 boyutlu kafeslerde bağıl hataların maksimum olduğu noktadaki (6.4) fonksiyonunun değeri, ω_h yaklaşık değeri, mutlak hata ve bağıl hata değerleri elde edildi.

7. DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN DENKLEMLER İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

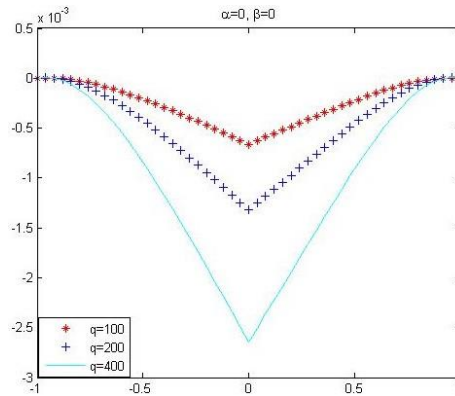
7.1. Bir Boyutlu Durumda Farklı Özellikli Millerin Oluşturduğu Sistemin Eğilmesi Probleminin Sayısal Çözümü

Genel halde miller sistemi için uyum koşulları (4.12) şeklinde verilir. Elde edilen ifadelerdeki negatif olmayan α ve β sabitlerinin aldığı değerlere göre farklı mekanik anlamları vardır. Bu bölümde α menteşenin, β dayanağın sertlik katsayısı olmak üzere (4.12) uyum koşullarının mümkün olabilen tüm özel durumları incelenmiştir.

7.1.1. Sınırlarında sert kenetlenme koşulu verildiğinde farklı uyum koşullarında miller sisteminin eğilmesi problemi

Sınırlarda sert kenetlenme koşulu verildiği durumda, eğilme sertlik katsayıları sırasıyla $B^- = 21000$ [kN/cm²], $B^+ = 11000$ [kN/cm²] olan iki milin oluşturduğu sistemin ortasındaki 3 noktadan $q_i = 100, 200, 400$ [kN] kuvvetleri uygulanarak elde edilen grafikler Şekil 7.1-7.9'da verilmiştir.

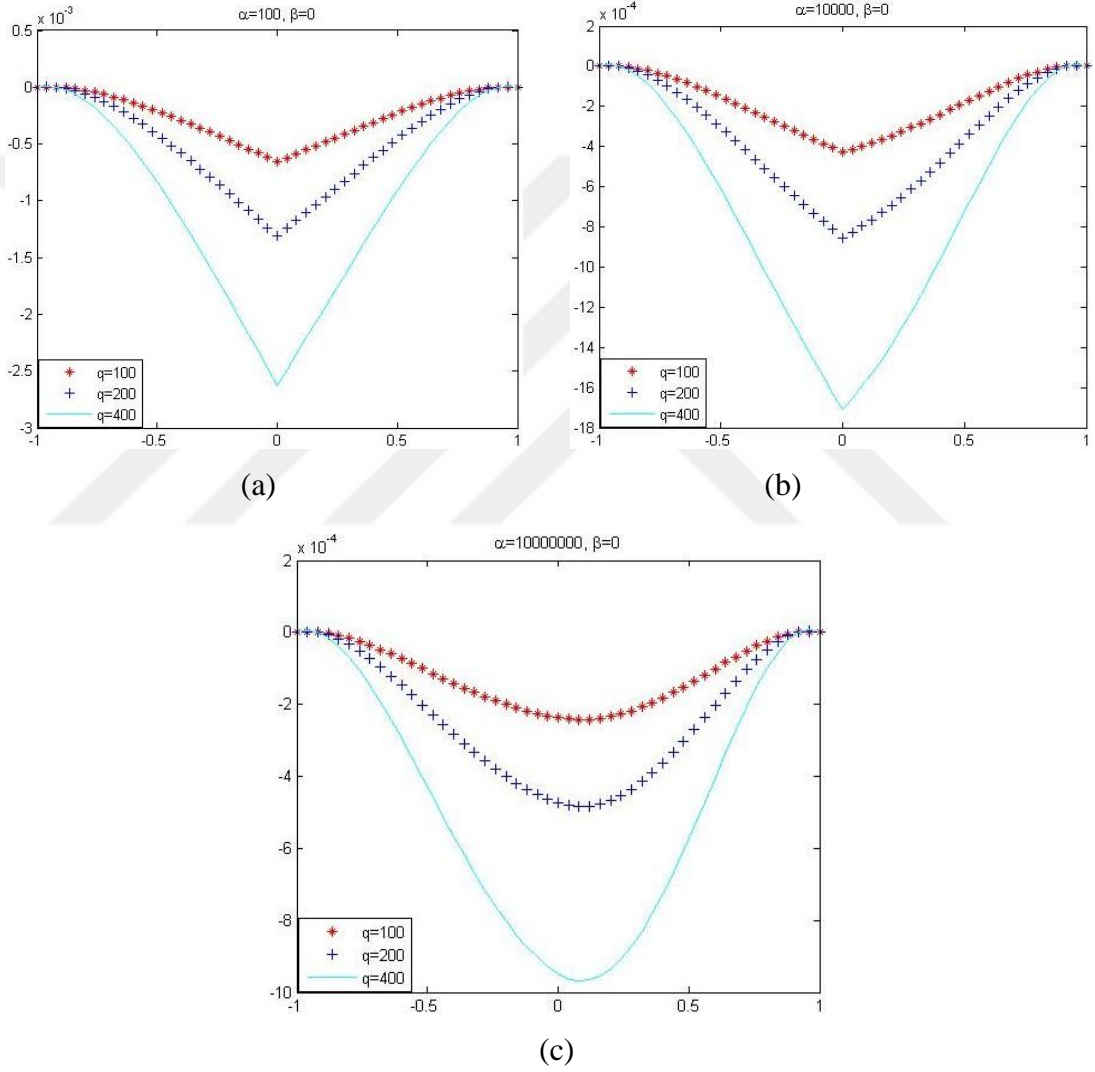
1. $\alpha = \beta = 0$ durumunda uyum koşulları (4.13) şeklindedir.



Şekil 7.1. $\alpha = \beta = 0$ durumu için eğilmeleri gösteren grafik

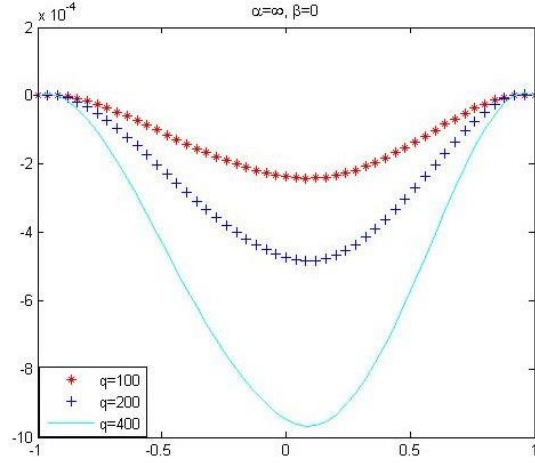
$\alpha = 0$ koşulu menteşenin ideal olması, $\beta = 0$ koşulu ise $x = 0$ birleşme noktasının altında herhangi bir dayanağın olmadığı anlamına gelir.

2. $\alpha = \text{sabit}$, $\beta = 0$ durumunda uyum koşulları (4.14) gibidir. Bu koşullar millerin $x = 0$ ortak noktalarından sonlu sertliğe sahip bir menteşe ile birbirine bağlı olması ($\alpha = \text{sabit}$) ve birleşme noktasının altında herhangi bir dayanağın olmadığı ($\beta = 0$) anlamına gelir.



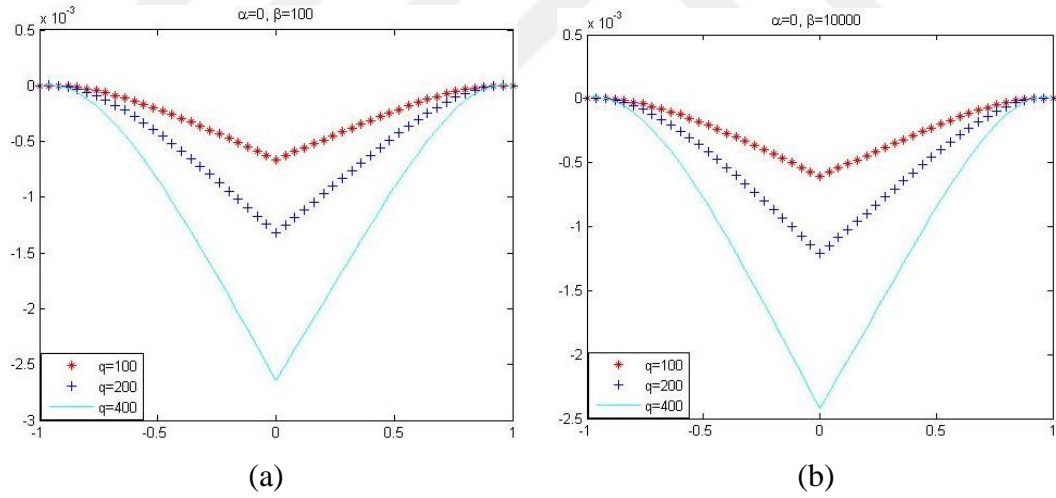
Şekil 7.2. (a)-(c) $\alpha = \text{sabit}$, $\beta = 0$ olduğunda α 'nın aldığı farklı değerlerde eğilmelerdeki değişimleri gösteren grafikler

3. $\alpha = \infty$, $\beta = 0$ durumunda uyum koşulları (4.15)'deki gibidir. Bu koşullar ise, millerin birleşme noktasında birbirine kaynak edildiği anlamına gelir, yani tek bir mil gibi davranırlar.

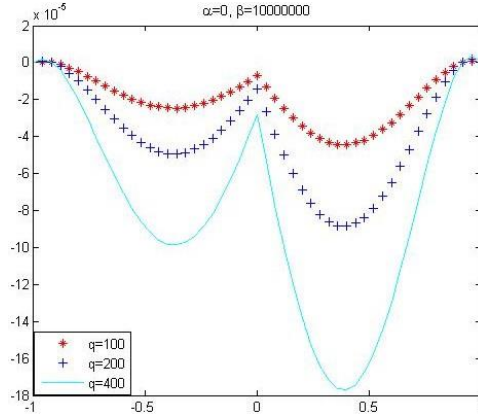


Şekil 7.3. $\alpha = \infty, \beta = 0$ durumu için eğilmeleri gösteren grafik

4. $\alpha = 0, \beta = \text{sabit}$ durumunda uyum koşulları (4.16) şeklindedir. $\alpha = 0$ koşulu sistemi oluşturan millerin birleşme noktasından yağlanmış bir menteşe ile birbirlerine bağlı olduğu, $\beta = \text{sabit}$ koşulu ise birleşme noktasının altında sonlu sertliğe sahip bir dayanağın olduğu anlamına gelir.



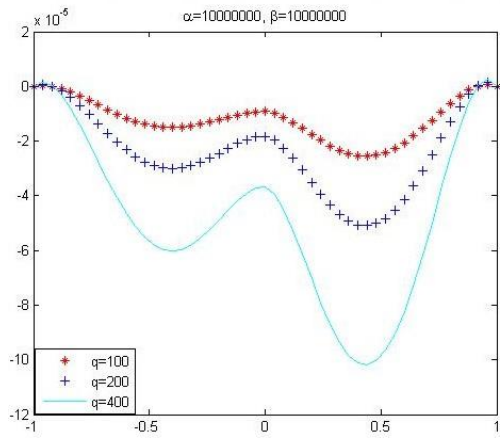
Şekil 7.4. (a)-(c) $\alpha = 0, \beta = \text{sabit}$ olduğunda β 'nin aldığı farklı değerlerde eğilmelerdeki değişimlerini gösteren grafikler



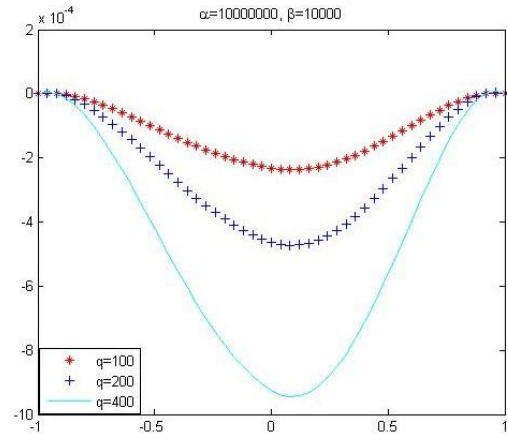
(c)

Şekil 7.4 (Devam). (a)-(c)
 $\alpha = 0$, $\beta = \text{sabit}$ olduğunda β 'nin aldığı farklı değerlerde eğilmelerdeki değişimlerini gösteren grafikler

5. $\alpha = \text{sabit}$, $\beta = \text{sabit}$ durumunda uyum koşulları (4.17) gibidir. Bu koşullar millerin $x = 0$ ortak noktalarından sonlu sertliğe sahip bir menteşe ile birbirine bağlı olduğu ($\alpha = \text{sabit}$) ve birleşme noktasının altında sonlu sertliğe sahip bir dayanağın olduğu ($\beta = \text{sabit}$) anlamına gelir.

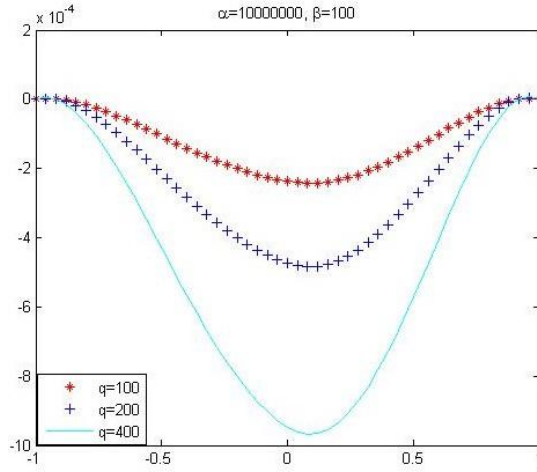


(a)

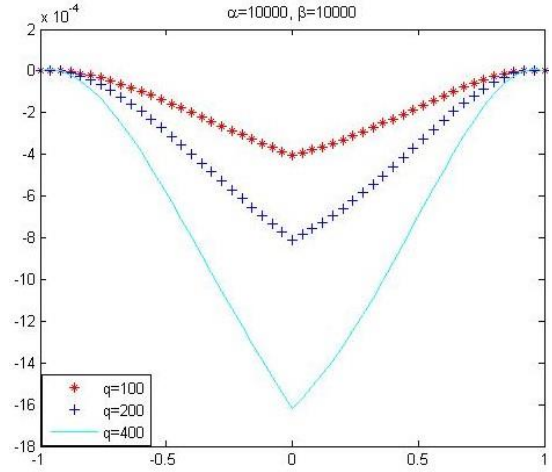


(b)

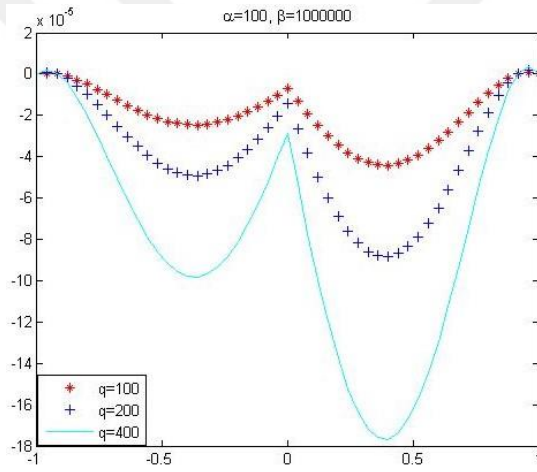
Şekil 7.5. (a)-(f) $\alpha = \text{sabit}$, $\beta = \text{sabit}$ olduğunda α ve β 'nin aldığı farklı değerlerde eğilmelerdeki değişimleri gösteren grafikler



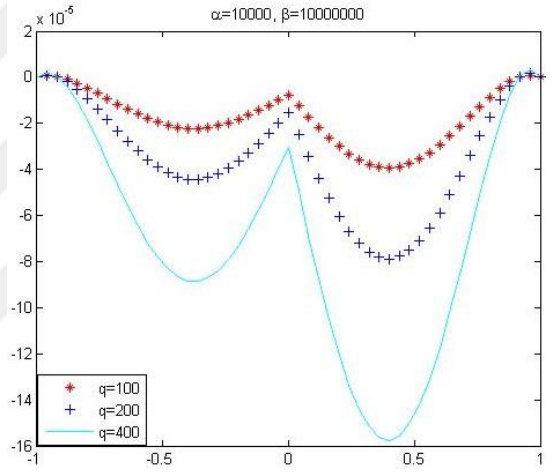
(c)



(d)



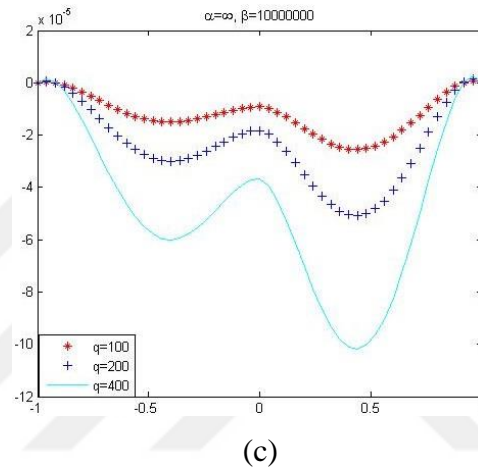
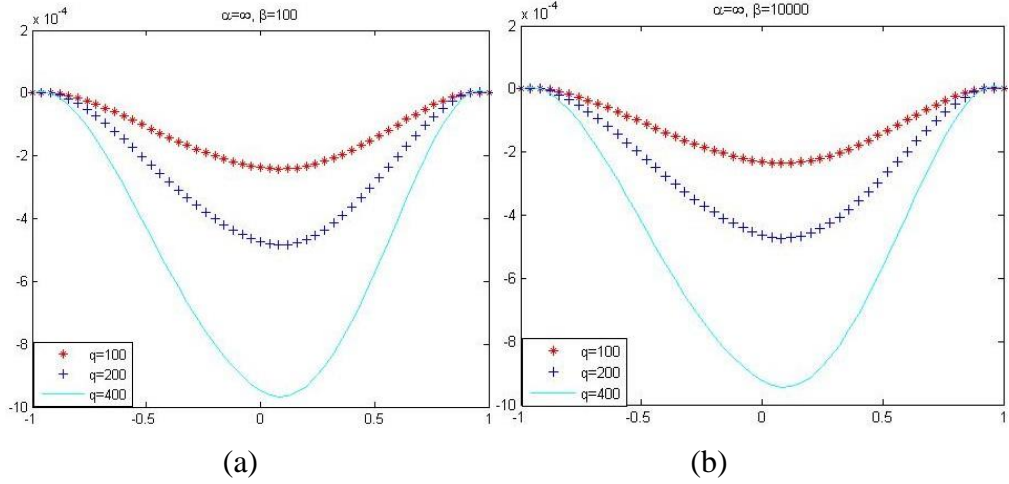
(e)



(f)

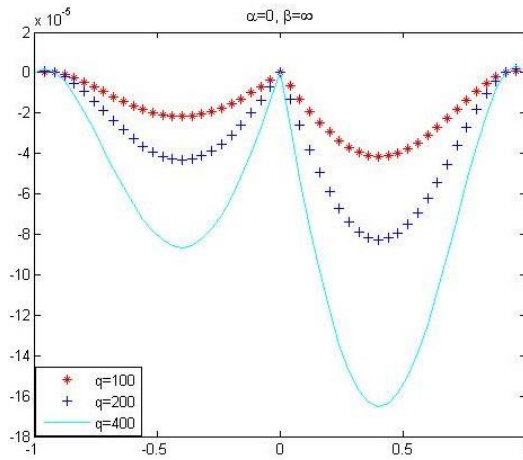
Şekil 7.5 (Devam). (a)-(f) $\alpha = \text{sabit}$, $\beta = \text{sabit}$ olduğunda α ve β 'nin aldığı farklı değerlerde eğilmelerdeki değişimleri gösteren grafikler

6. $\alpha = \infty$, $\beta = \text{sabit}$ durumunda uyum koşulları (4.18) şeklindedir. Bu ise, millerin kaynakla birbirine birleştiğini ($\alpha = \infty$), yani tek bir mil gibi davrandıklarını ve birleşme noktasının altında sonlu sertlikte sahip ($\beta = \text{sabit}$), yani esnek bir dayanağın varlığını göstermektedir.



Şekil 7.6. (a)-(c) $\alpha = \infty, \beta = \text{sabit}$ olduğunda β 'nin aldığı farklı değerlerde eğilmelerdeki değişimleri gösteren grafikler

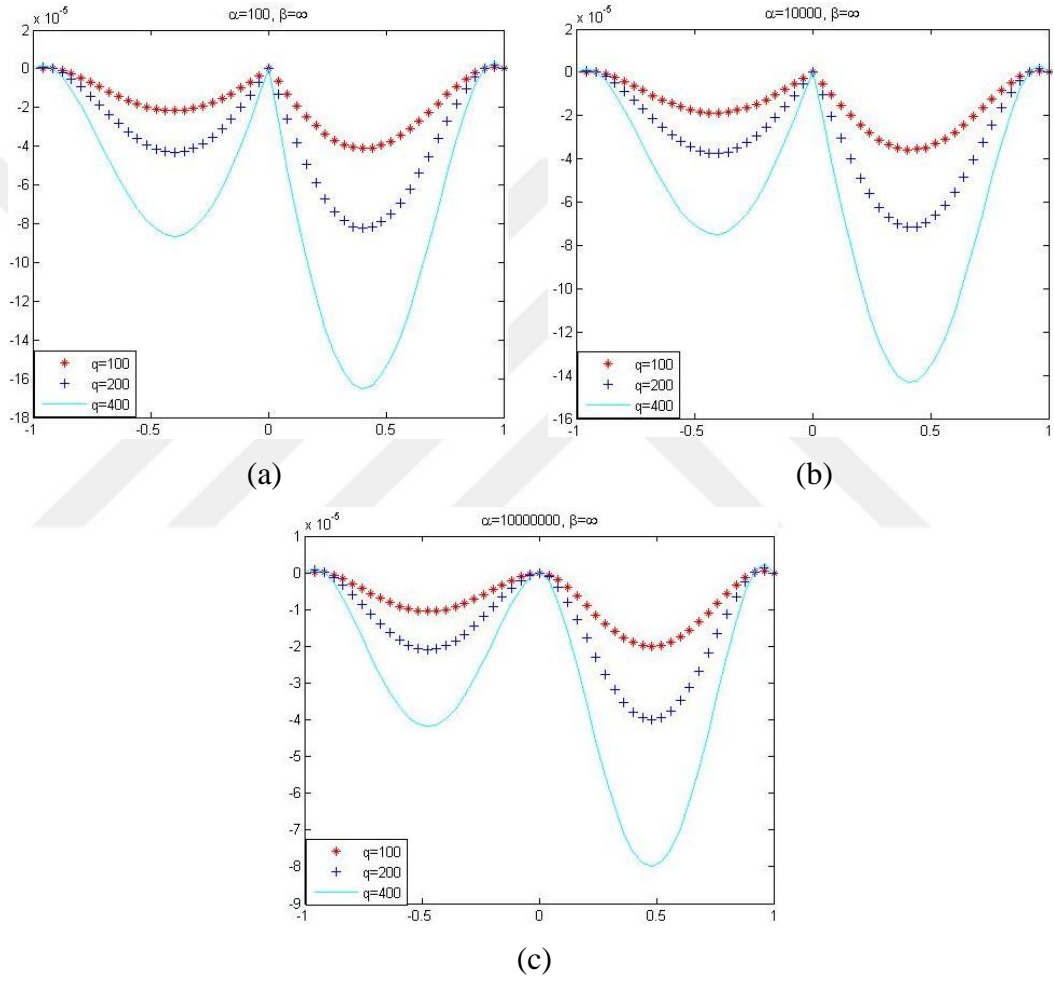
7. $\alpha = 0, \beta = \infty$ durumunda uyum koşulları (4.19) gibidir.



Şekil 7.7. $\alpha = 0, \beta = \infty$ durumu için eğilmeleri gösteren grafik

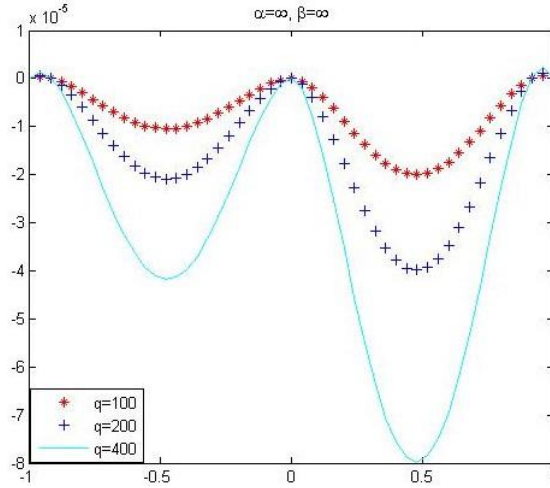
Bu durumda, sistemi oluşturan millerin birleşme noktasından yağlanmış bir menteşe ile birbirlerine bağlıdır ($\alpha = 0$) ve birleşme noktasının altında sonsuz sertlikte bir dayak vardır ($\beta = \infty$).

8. $\alpha = \text{sabit}$, $\beta = \infty$ durumunda uyum koşulları (4.20) gibidir. Bu koşullar birleşme noktasında millerin sonlu sertlikte bir menteşe ile birleştiğini ($\alpha = \text{sabit}$) ve birleşme noktasının altında sonsuz sertlikte bir dayanağın varlığını ($\beta = \infty$) gösterir.



Şekil 7.8. (a)-(c) $\alpha = \text{sabit}$, $\beta = \infty$ olduğunda α 'nın aldığı farklı değerlerde eğilmelerdeki değişimleri gösteren grafikler

9. $\alpha = \infty$, $\beta = \infty$ durumunda uyum koşulları (4.20) şeklindedir. Bu koşullar birleşme noktasında millerin kaynak ile birleştiğini ($\alpha = \infty$) ve birleşme noktasının altında sonsuz sertlikte bir dayanağın varlığını ($\beta = \infty$) gösterir.



Şekil 7.9. $\alpha = \infty, \beta = \infty$ durumu için eğilmeleri gösteren grafik

7.2. Levhalar Sistemi İçin Farklı Sınır Koşullarında Sayısal Çözümünün İncelenmesi

7.2.1. Ortak sınırında uyum koşullarının fark denklemlerinin katsayıları

Şekil 4.1'deki gibi $\bar{\Omega}$ dikdörtgen bölgesini dolduran farklı özellikli iki levhannın $x_1 = 0$ ortak sınırlarında uyum koşulları elde edildiği zaman oluşturulan lineer cebirsel denklemler sisteminde $x_1 = 0, \pm h_1$ 'e karşılık gelen katsayılar matrisinin bileşenlerinin belirlenmesinde kolaylık sağlaması açısından uyum koşullarının ifadelerinde geçen terimler,

$$c = [D^- (1 - v^-) + D^+ (1 - v^+)], \quad t = \frac{D^- D^+}{D^- + D^+}, \quad r = \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right),$$

$$s = \frac{B}{h_1} + \frac{1}{2} [D^- (1 - (v^-)^2) + D^+ (1 - (v^+)^2)] + \frac{(v^+ + v^-)^2}{2} \frac{D^- D^+}{D^- + D^+} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha h_1}{2} \left(\frac{1}{D^-} + \frac{1}{D^+} \right)} \right)$$

şeklinde alınsın. Bu durumda, $k_1 = (i-2)m+2$, $k_2 = (i-1)m-1$ olmak üzere $(-h_1, x_2^i)$, $i = \overline{k_1 : k_2}$ düğüm noktalarına karşılık gelen denklemlerin katsayıları aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$A_{i,i-2m} = \frac{D^-}{h_1^4}$$

$$A_{i,i-m-1} = \frac{1}{h_1^2 h_2^2} [D^- (v^- + v^+) + c]$$

$$A_{i,i-m} = -\frac{4D^-}{h_1^4} - \frac{2}{h_1^2 h_2^2} [D^- (v^- + v^+) + c]$$

$$A_{i,i-m+1} = \frac{1}{h_1^2 h_2^2} [D^- (v^- + v^+) + c]$$

$$A_{i,i-2} = \frac{D^-}{h_2^4}$$

$$A_{i,i-1} = -\frac{4D^-}{h_2^4} - \frac{2}{h_1^2 h_2^2} [D^- (v^- + v^+) + c]$$

$$A_{i,i} = \frac{5D^- + 2tr}{h_1^4} + \frac{6D^-}{h_2^4} + \frac{4}{h_1^2 h_2^2} [D^- (v^- + v^+) + c]$$

$$A_{i,i+1} = -\frac{4D^-}{h_2^4} - \frac{2}{h_1^2 h_2^2} [D^- (v^- + v^+) + c]$$

$$A_{i,i+2} = \frac{D^-}{h_2^4}$$

$$A_{i,i+m-1} = \frac{1}{h_1^2 h_2^2} \left[\left(\frac{D^-}{2} + tr \right) (v^- + v^+) + c \right]$$

$$A_{i,i+m} = -\frac{2D^- + 4tr}{h_1^4} - \frac{2}{h_1^2 h_2^2} \left[\left(\frac{D^-}{2} + tr \right) (v^- + v^+) + c \right]$$

$$A_{i,i+m+1} = \frac{1}{h_1^2 h_2^2} \left[\left(\frac{D^-}{2} + \text{tr} \right) (v^- + v^+) + c \right]$$

$$A_{i,i+2m} = \frac{2\text{tr}}{h_1^4}$$

$k_1 = (i-1)m + 2$, $k_2 = im - 1$ olmak üzere, $(0, x_2^i)$, $i = \overline{k_1 : k_2}$ düğüm noktalarına karşılık katsayıları aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$A_{i,i-2m} = \frac{D^-}{h_1^4}$$

$$A_{i,i-m-1} = \frac{1}{h_1^2 h_2^2} \left[\left(\frac{D^-}{2} + \text{tr} \right) (v^- + v^+) + c \right]$$

$$A_{i,i-m} = -\frac{2D^- + 4\text{tr}}{h_1^4} - \frac{2}{h_1^2 h_2^2} \left[\left(\frac{D^-}{2} + \text{tr} \right) (v^- + v^+) + c \right]$$

$$A_{i,i-m+1} = \frac{1}{h_1^2 h_2^2} \left[\left(\frac{D^-}{2} + \text{tr} \right) (v^- + v^+) + c \right]$$

$$A_{i,i-2} = \frac{s}{h_2^4}$$

$$A_{i,i-1} = -\frac{4s}{h_2^4} - \frac{2}{h_1^2 h_2^2} \left[2\text{tr}(v^- + v^+) + c \right]$$

$$A_{i,i} = \frac{D^- + D^+ + 8\text{tr}}{h_1^4} + \frac{6s}{h_2^4} + \frac{4}{h_1^2 h_2^2} \left[2\text{tr}(v^- + v^+) + c \right] + \frac{\beta}{h_1}$$

$$A_{i,i+1} = -\frac{4s}{h_2^4} - \frac{2}{h_1^2 h_2^2} \left[2\text{tr}(v^- + v^+) + c \right]$$

$$A_{i,i+2} = \frac{s}{h_2^4}$$

$$A_{i,i+m-1} = \frac{1}{h_1^2 h_2^2} \left[\left(\frac{D^+}{2} + \text{tr} \right) (v^- + v^+) + c \right]$$

$$A_{i,i+m} = -\frac{2D^+ + 4\text{tr}}{h_1^4} - \frac{2}{h_1^2 h_2^2} \left[\left(\frac{D^+}{2} + \text{tr} \right) (v^- + v^+) + c \right]$$

$$A_{i,i+m+1} = \frac{1}{h_1^2 h_2^2} \left[\left(\frac{D^+}{2} + \text{tr} \right) (v^- + v^+) + c \right]$$

$$A_{i,i+2m} = \frac{D^+}{h_1^4}$$

Yukarıdaki ifadelere benzer şekilde $k_1 = im + 2$, $k_2 = (i+1)m - 1$ olmak üzere (h_1, x_2^i) , $i = \overline{k_1 : k_2}$ düğüm noktalarına karşılık katsayıları aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$A_{i,i-2m} = \frac{2\text{tr}}{h_1^4}$$

$$A_{i,i-m-1} = \frac{1}{h_1^2 h_2^2} \left[\left(\frac{D^+}{2} + \text{tr} \right) (v^- + v^+) + c \right]$$

$$A_{i,i-m} = -\frac{2D^+ + 4\text{tr}}{h_1^4} - \frac{2}{h_1^2 h_2^2} \left[\left(\frac{D^+}{2} + \text{tr} \right) (v^- + v^+) + c \right]$$

$$A_{i,i-m+1} = \frac{1}{h_1^2 h_2^2} \left[\left(\frac{D^+}{2} + \text{tr} \right) (v^- + v^+) + c \right]$$

$$A_{i,i-2} = \frac{D^+}{h_2^4}$$

$$A_{i,i-1} = -\frac{4D^+}{h_2^4} - \frac{2}{h_1^2 h_2^2} \left[D^+ (v^- + v^+) + c \right]$$

$$A_{i,i} = \frac{5D^+ + 2tr}{h_1^4} + \frac{6D^+}{h_2^4} + \frac{4}{h_1^2 h_2^2} [D^+ (v^- + v^+) + c]$$

$$A_{i,i+1} = -\frac{4D^+}{h_2^4} - \frac{2}{h_1^2 h_2^2} [D^+ (v^- + v^+) + c]$$

$$A_{i,i+2} = \frac{D^+}{h_2^4}$$

$$A_{i,i+m-1} = \frac{1}{h_1^2 h_2^2} [D^+ (v^- + v^+) + c]$$

$$A_{i,i+m} = -\frac{4D^+}{h_1^4} - \frac{2}{h_1^2 h_2^2} [D^+ (v^- + v^+) + c]$$

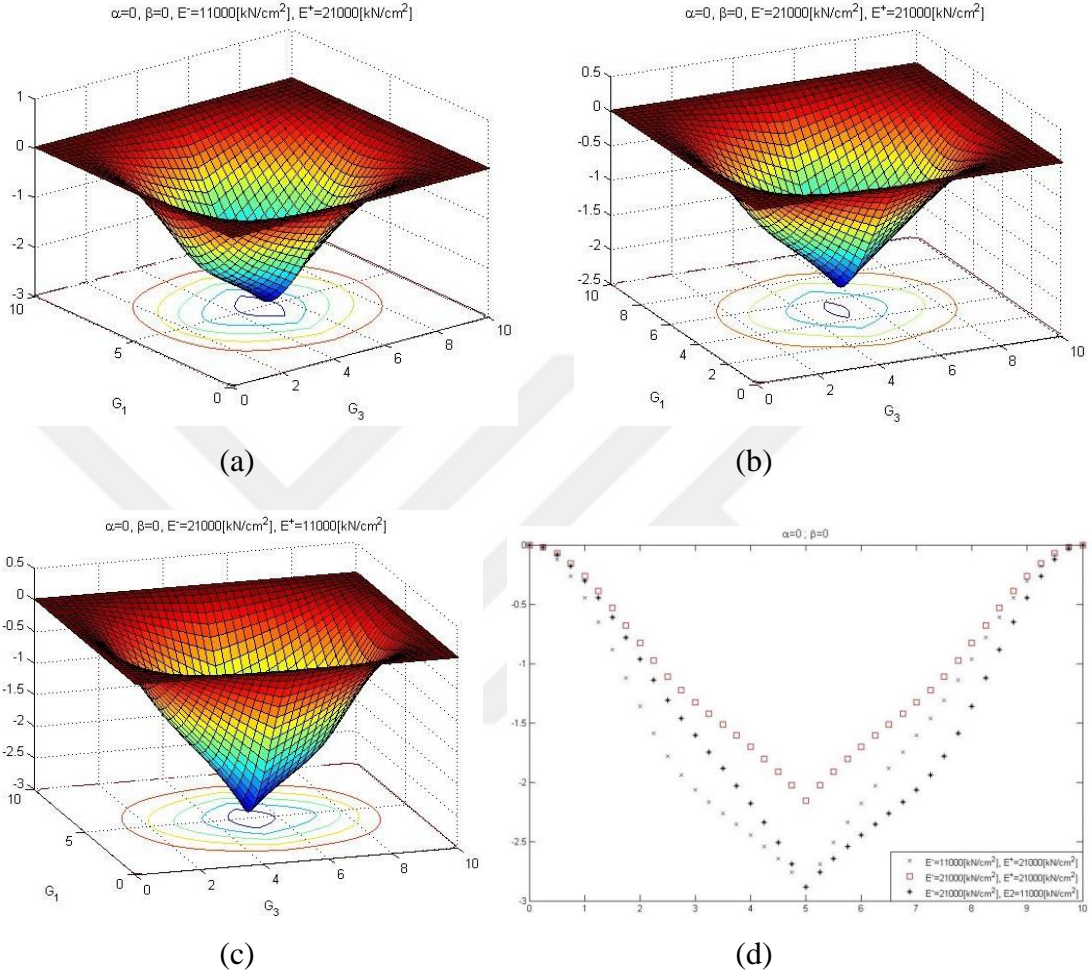
$$A_{i,i+m+1} = \frac{1}{h_1^2 h_2^2} [D^+ (v^- + v^+) + c]$$

$$A_{i,i+2m} = \frac{D^+}{h_1^4}$$

7.2.2. Sert kenetlenme ve basit dayanak sınır koşulu verildiği durumda farklı uyum koşullarında levhalar sisteminin eğilmesi problemi

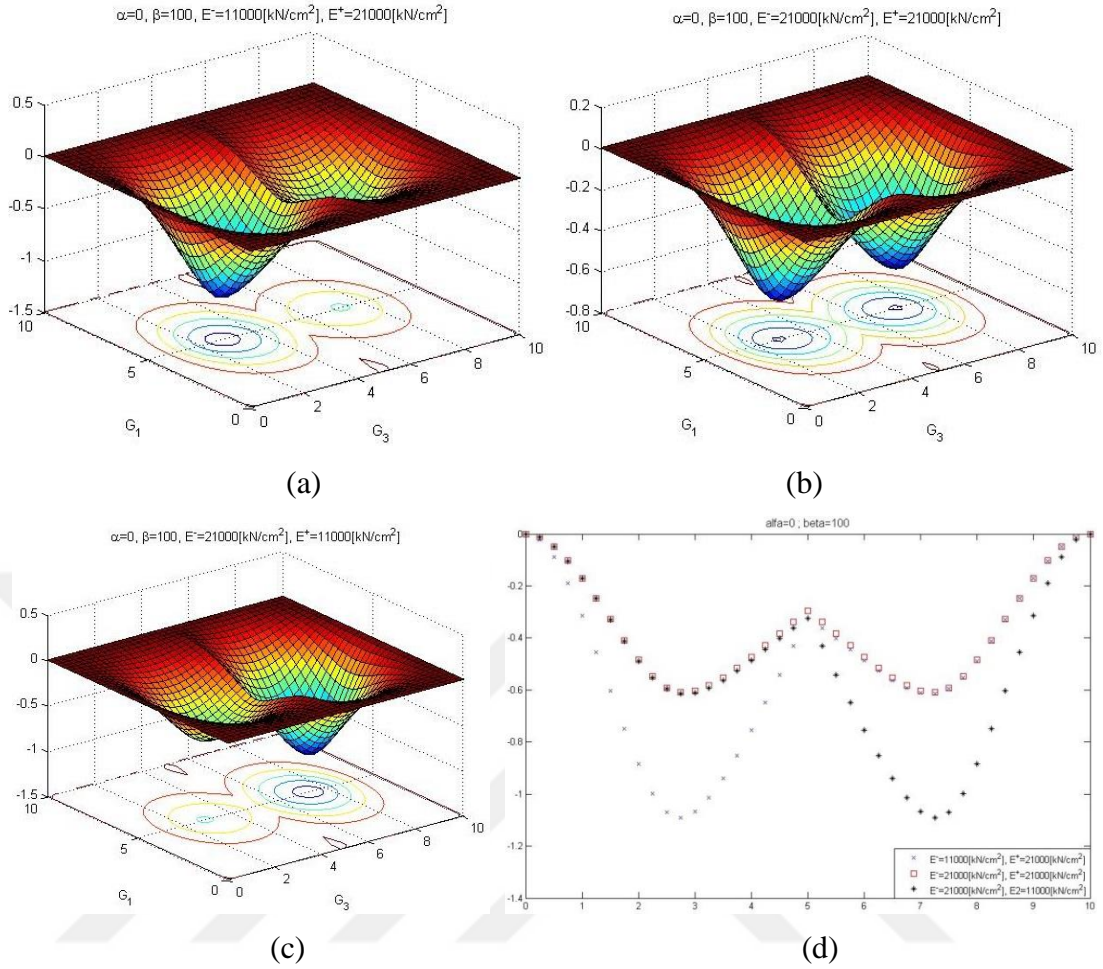
Sınırlarda sert kenetlenme koşulu verildiği durumda, Elastisite modülleri E^- , E^+ ve Poisson sabitleri de v^- , v^+ olan iki levhanın oluşturduğu sisteme soldaki ve sağdaki levhaların ortasındaki dokuzar noktadan ve levhaların ortak sınırı olan $x_1 = 0$ sınırı üzerinde de üç noktadan olmak üzere toplam 21 noktadan $q = 200$ [kN] kuvveti uygulandı. $v^- = v^+ = 0,3$ olduğu durumda Elastisite modülünün eğilmelere olan etkisini incelemek amacıyla (a) $E^- = 11000$ [kN/cm²], $E^+ = 21000$ [kN/cm²], (b) $E^- = E^+ = 21000$ [kN/cm²] ve (c) $E^- = 21000$ [kN/cm²], $E^+ = 11000$ [kN/cm²] durumları için sayısal çözüm elde edildi ve grafikler Şekil 7.10- Şekil 7.18'de verildi. α ve β 'nin farklı değerleri için problem çözüldü ve eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesitlerinin grafikleri aşağıda verildi:

1. $\alpha = \beta = 0$ durumunda, $\alpha = 0$ koşulu menteşenin ideal olması, $\beta = 0$ koşulu ise $x_1 = 0$ sınırında dayanağın olmaması anlamına gelir. Bu durumda Elastisite modülündeki değişimin sistemde oluşan eğilmelere etkisi Şekil 7.10 (d)'deki gibidir.



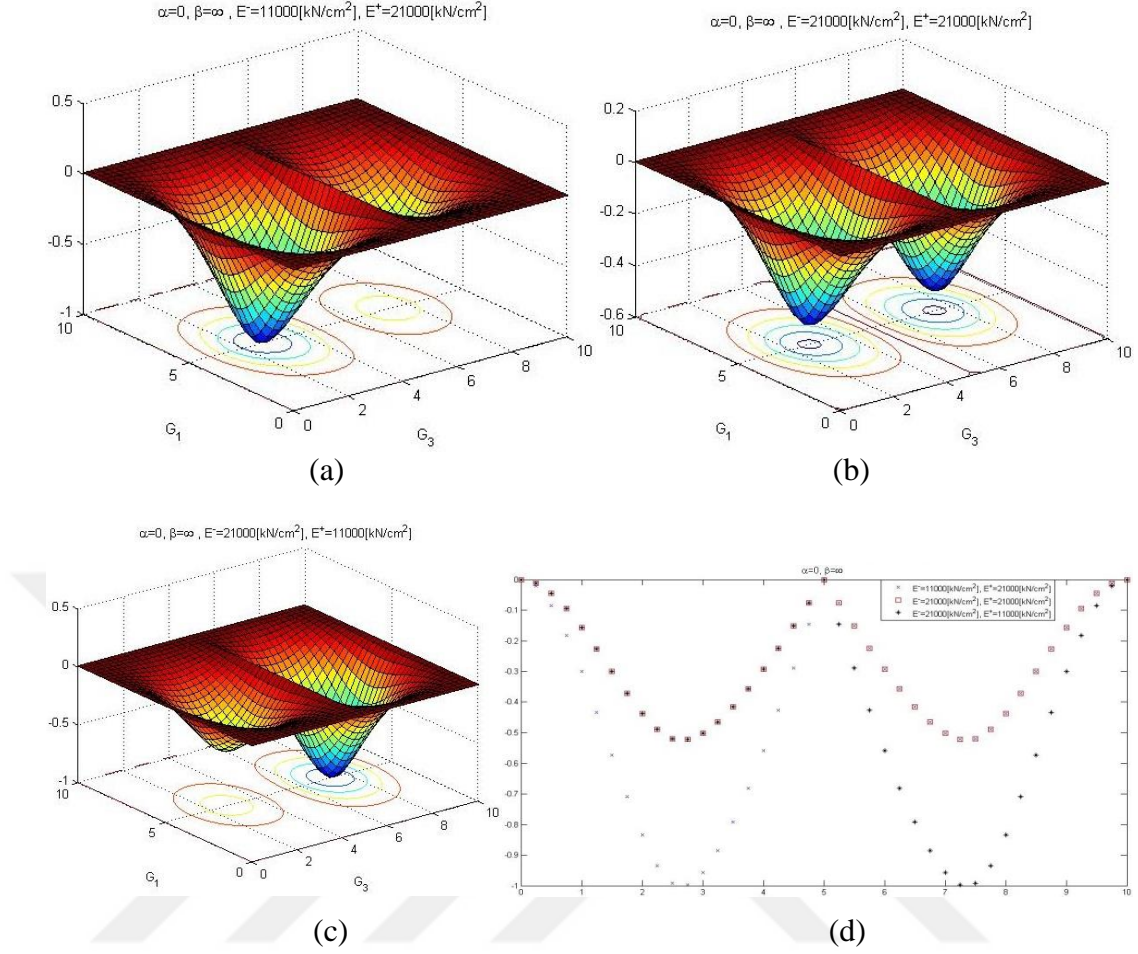
Şekil 7.10. $\alpha = \beta = 0$ durumu için, (a)-(c) eğilmeleri gösteren grafikler, (d) eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesiti

2. $\alpha = 0, \beta = \text{sabit}$ durumunda, levhaların ortak sınırındaki menteşenin yağlanmış gibi rahat hareket ettiğini (ideal menteşe), $\beta = \text{sabit}$ ise bu menteşenin altında sonlu sertlikte bir dayanağın olduğunu ifade eder (Şekil 7.11).



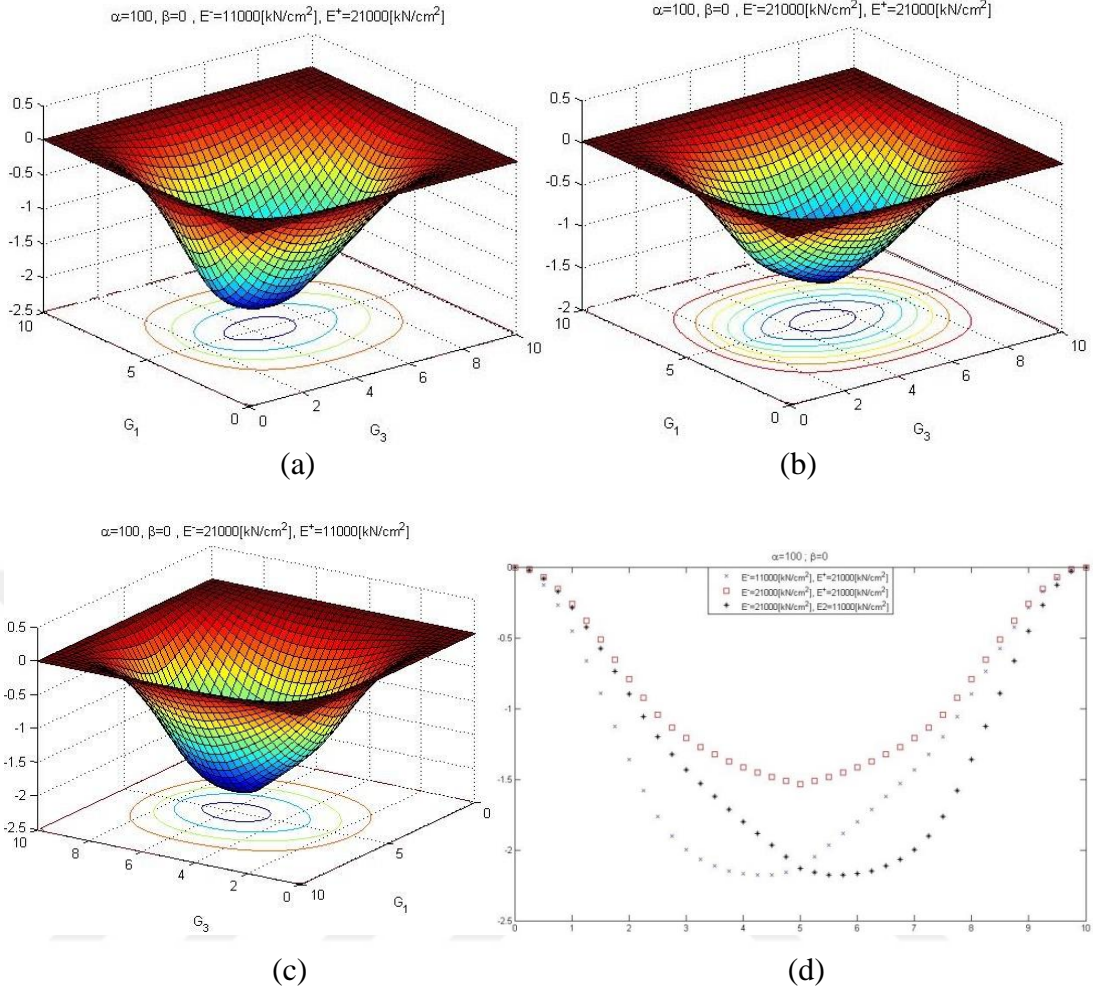
Şekil 7.11. $\alpha = 0, \beta = 100$ olduğunda, (a)-(c) eğilmeleri gösteren grafikler, (d) eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesiti

3. $\alpha = 0, \beta = \infty$ durumunda, $\alpha = 0$ koşulu menteşenin ideal olması, $\beta = \infty$ koşulu ise, ortak sınırında sonsuz sertlikte bir dayanağın olması yani, levhaların ortak sınırı $x_1 = 0$ 'da eğilmenin olmaması anlamına gelir. Farklı özellikli levhaların oluşturduğu sistemler için eğilmeler Şekil 7.12 (a)-(c)'de ve bu eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesitleri Şekil 7.12 (d)'de verildi.



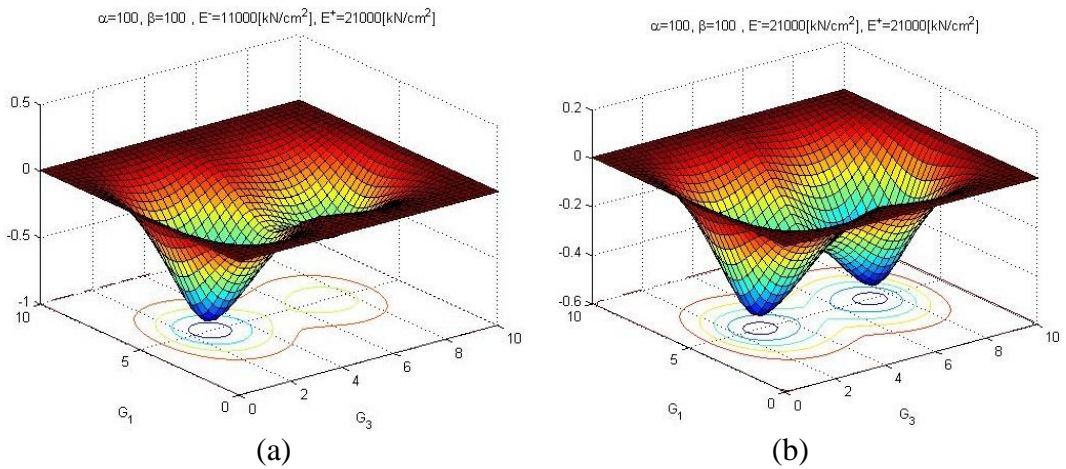
Şekil 7.12. $\alpha = 0, \beta = \infty$ olduğunda, (a)-(c) eğilmeleri gösteren grafikler, (d) eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesiti

4. $\alpha = \text{sabit}, \beta = 0$ durumunda, $\alpha = \text{sabit}$ koşulu $x_1 = 0$ sınırında menteşenin sonlu sertliğe sahip olması ve $\beta = 0$ koşulu da dayanağın olmaması anlamına gelir. Bu durumda sistemde oluşan eğilmelerin bir kesiti Şekil 7.13 (d)'de verildi.

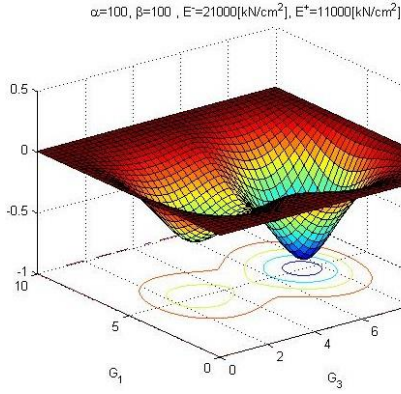


Şekil 7.13. $\alpha = \text{sabit}, \beta = 0$ durumunda, (a)-(c) eğilmeleri gösteren grafikler, (d) eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesiti

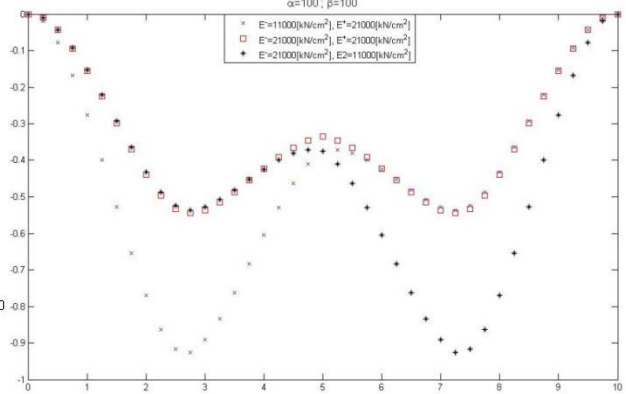
5. $\alpha = \text{sabit}, \beta = \text{sabit}$



Şekil 7.14. $\alpha = 100, \beta = 100$ olduğunda, (a)-(c) eğilmeleri gösteren grafikler, (d) eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesiti



(c)

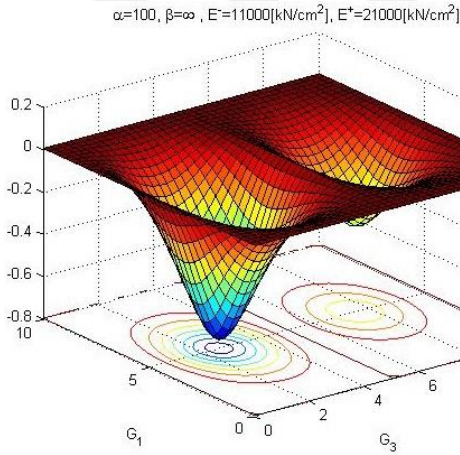


(d)

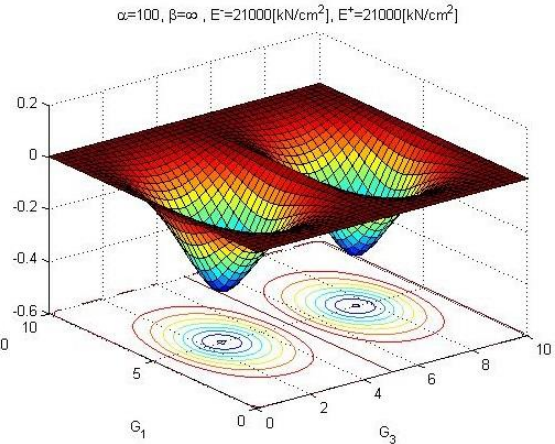
Şekil 7.14 (Devam). $\alpha = 100$, $\beta = 100$ olduğunda, (a)-(c) eğilmeleri gösteren grafikler, (d) eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesiti

Burada $\alpha = \text{sabit}$ koşulu sonlu sertliği olan menteşenin, $\beta = \text{sabit}$ koşul ise, esnek dayanağın varlığını göstermektedir. Elastisite modülünün değişiminin sistemin eğilmesine etkisi Şekil 7.14 (d) gibidir.

6. $\alpha = \text{sabit}$, $\beta = \infty$.

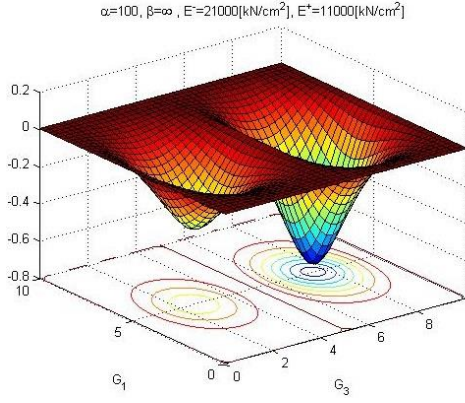


(a)

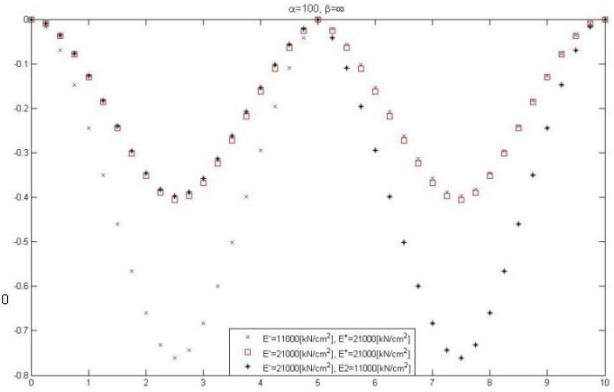


(b)

Şekil 7.15. $\alpha = 100$, $\beta = \infty$ olduğu durumda, (a)-(c) eğilmeleri gösteren grafikler, (d) eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesiti



(c)

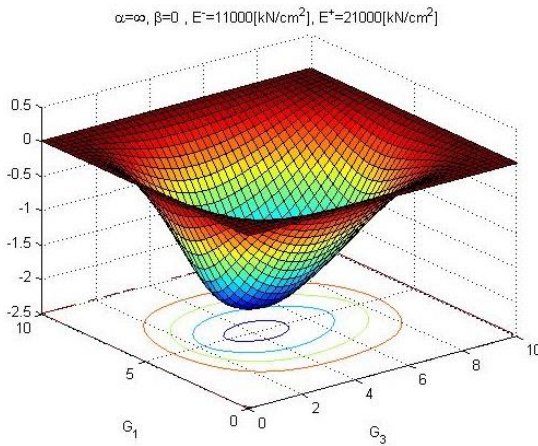


(d)

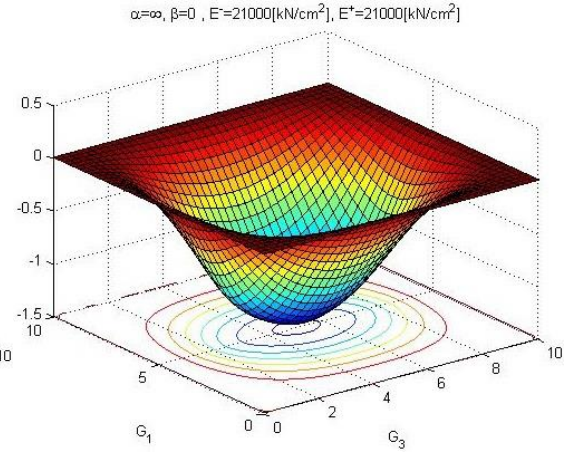
Şekil 7.15 (Devam). $\alpha = 100$, $\beta = \infty$ olduğu durumda, (a)-(c) eğilmeleri gösteren grafikler, (d) eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesiti

Burada $\alpha = \text{sabit}$ koşulu sonlu sertliği olan menteşenin, $\beta = \infty$ koşul ise, birleşme sınırında sonsuz sertlikte bir dayanağın olması ve bu sınır boyunca eğilmenin olmaması anlamına gelir. Şekil 7.15 (d)'de Elastisite modülünün değişiminin sistemde oluşan eğilmelere etkisi gösterildi.

7. $\alpha = \infty$, $\beta = 0$.



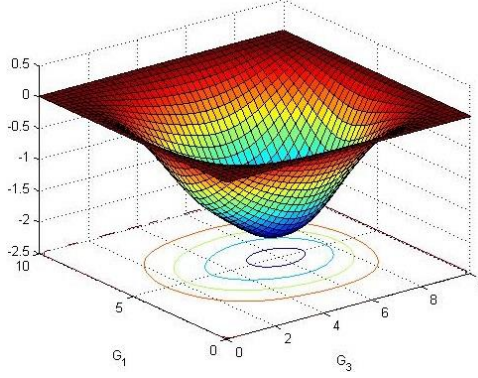
(a)



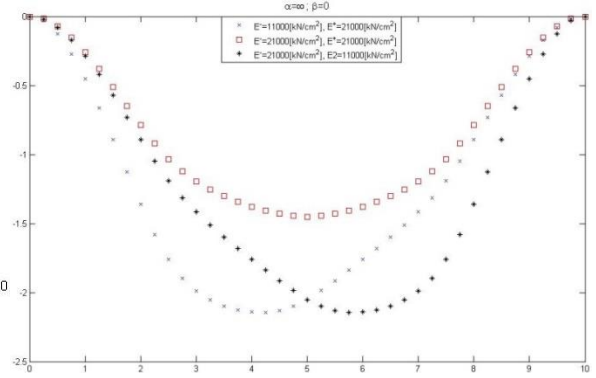
(b)

Şekil 7.16. $\alpha = \infty$, $\beta = 0$ olduğunda, (a)-(c) eğilmeleri gösteren grafikler, (d) eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesiti

$\alpha = \infty, \beta = 0, E = 21000 \text{ [kN/cm}^2], E^* = 11000 \text{ [kN/cm}^2]$



(c)



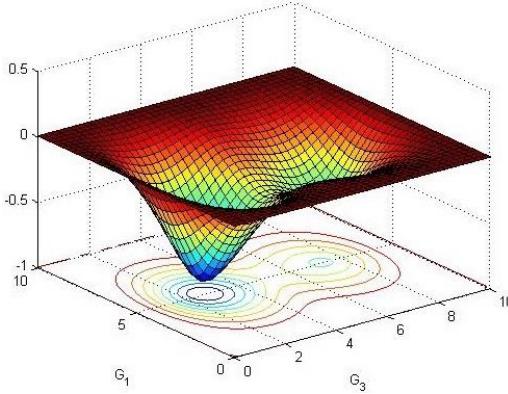
(d)

Şekil 7.16 (Devam). $\alpha = \infty, \beta = 0$ olduğunda, (a)-(c) eğilmeleri gösteren grafikler, (d) eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesiti

$\alpha = \infty$ koşulu levhaların $x_1 = 0$ sınırında mutlak sert olarak birleştiğini gösterir (Şekil 7.16). Bu da levhaların $x_1 = 0$ ortak sınırında kaynak edilmiş gibi hareket etmesi yani sistemin tek bir levha gibi davrandığını gösterir ve $\beta = 0$ koşulu da dayanağın olmaması anlamına gelir.

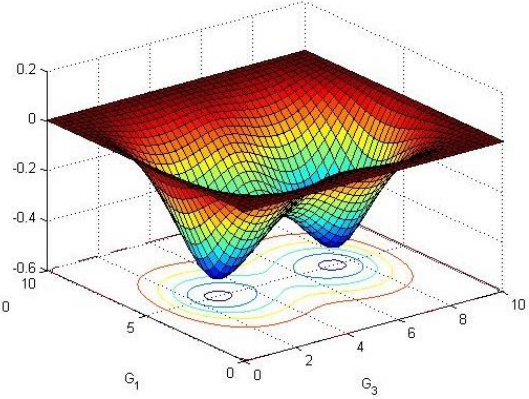
8. $\alpha = \infty, \beta = \text{sabit}$.

$\alpha = \infty, \beta = 100, E = 11000 \text{ [kN/cm}^2], E^* = 21000 \text{ [kN/cm}^2]$



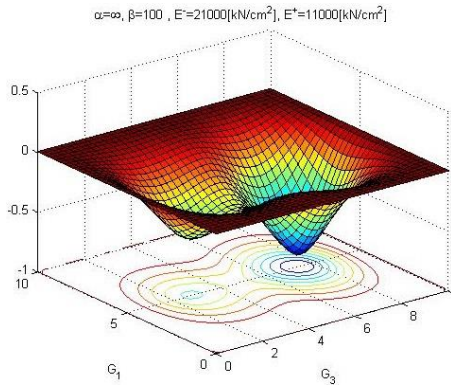
(a)

$\alpha = \infty, \beta = 100, E = 21000 \text{ [kN/cm}^2], E^* = 21000 \text{ [kN/cm}^2]$

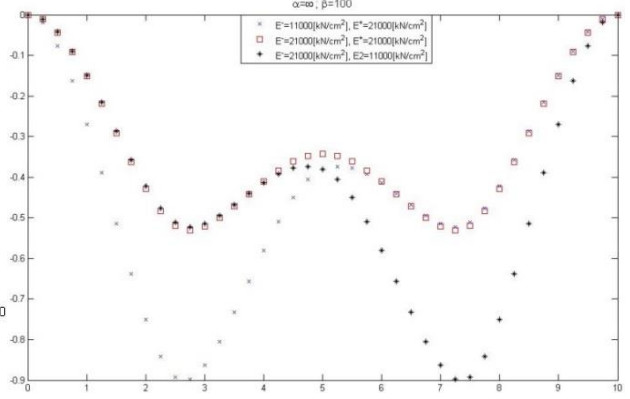


(b)

Şekil 7.17. $\alpha = \infty, \beta = 100$ olduğunda, (a)-(c) eğilmeleri gösteren grafikler, (d) eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesiti



(c)

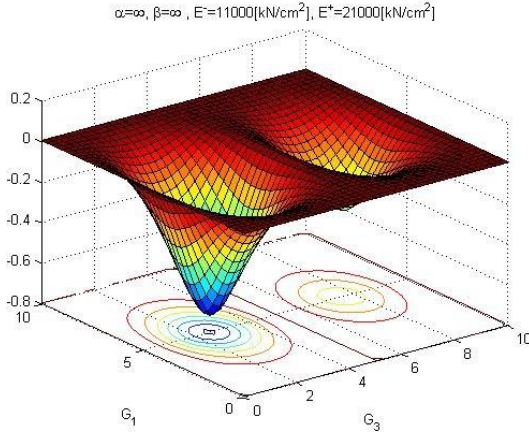


(d)

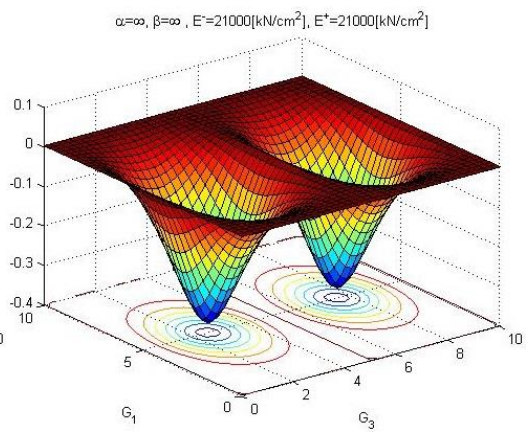
Şekil 7.17 (Devam). $\alpha = \infty$, $\beta = 100$ olduğunda, (a)-(c) eğilmeleri gösteren grafikler, (d) eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesiti

Burada ise, $\alpha = \infty$ koşulu levhaların sert birleşimini, $\beta = \text{sabit}$ koşulu ise, esnek dayanağın varlığını göstermektedir. Şekil 7.17 (a)-(c)'de Elastisite modülünün artması ve azalmasıyla ters orantılı olarak değişen levhalardaki eğilmeler 3-boyutlu olarak görülür. Şekil 7.17 (d)'de de yine yukarıdakilere benzer şekilde Elastisite modülünün eğilmelere etkisinin bir kesiti verildi.

9. $\alpha = \infty$, $\beta = \infty$

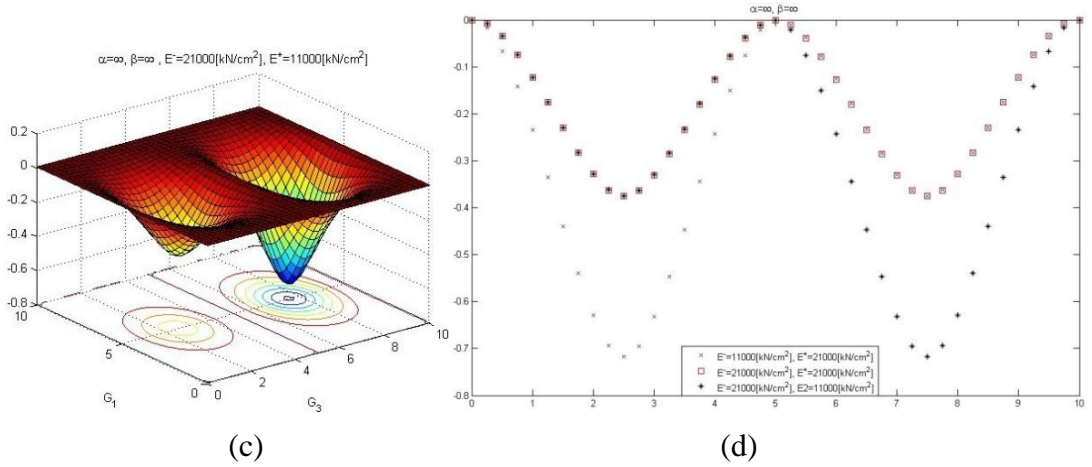


(a)



(b)

Şekil 7.18. $\alpha = \infty$, $\beta = \infty$ olduğunda, (a)-(c) eğilmeleri gösteren grafikler, (d) eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesiti



Şekil 7.18 (Devam). $\alpha = \infty$, $\beta = \infty$ olduğunda, (a)-(c) eğilmeleri gösteren grafikler, (d) eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesiti

Burada ise, $\alpha = \infty$ koşulu levhaların sert birleşimini, $\beta = \infty$ koşulu ise, birleşme sınırında sonsuz sertlikte bir dayanağın varlığını yani, $x_1 = 0$ sınırında eğilmelerin olmadığını gösterir (Şekil 7.18).

Eğilmelerin soldaki ve sağdaki levhalar için ilk ve son durumdaki Elastisite modülünün değerlerine göre çizilen grafiklerin simetrik olduğu, son olarak da Elastisite modülünün sol ve sağ levha için eşit olduğu durumda da ikinci grafiğin kendi içerisinde simetrik olduğu Şekil 7.18 (d)'den görülür. Ayrıca elde edilen grafiklerden, Elastisite modülünün değeriyle eğilmelerin ters orantılı olduğu yani, Elastisite modülünün değeri arttıkça levhanın sertleştiği ve uygulanan basma kuvvetine mukavemet gösterip eğilmesinin azaldığı izlenmektedir. Ve yine buradan, Elastisite modülünün değeri azaldıkça da levhanın daha yumuşak bir yapıya sahip olup uygulanan basma kuvvetinin etkisiyle oluşan eğilmelerin arttığı görülür.

Benzer şekilde α ve β 'nin farklı değerleri için sistemin kenarlarında farklı sınır koşulları verildiğinde eğilmeler ve bu eğilmelere bağlı grafikler elde edilebilir. Tablo 7.1, Tablo 7.2 ve Tablo 7.3'de farklı sınır koşulları için aynı özellikte ve farklı özellikte iki levhadan oluşan levhalar sistemi için α ve β 'nin aldığı farklı değerlere göre Elastisite modülündeki değişimin etkisiyle soldaki levhada, sağdaki levhada ve $x_1 = 0$ ortak sınırında oluşan ω_{\max} maksimum eğilmeler karşılaştırıldı.

Tablo 7.1. Dört kenarında sert kenetlenme koşulu verilen levhalar sisteminde α ve β 'nın değişimine göre oluşan maksimum eğilmelerde E Elastisite modülünün etkisi

		$E^- = 11000 \text{ [kN/cm}^2\text{]},$ $E^+ = 21000 \text{ [kN/cm}^2\text{]},$ $\nu^- = \nu^+ = 0,3$			$E^- = E^+ = 21000 \text{ [kN/cm}^2\text{]}$ $\nu^- = \nu^+ = 0,3$			$E^- = 21000 \text{ [kN/cm}^2\text{]},$ $E^+ = 11000 \text{ [kN/cm}^2\text{]},$ $\nu^- = \nu^+ = 0,3$		
		Soldaki levhada oluşan ω_{\max} [cm]	$x_1 = 0$ sınırında oluşan ω_{\max} [cm]	Sağdaki levhada oluşan ω_{\max} [cm]	Soldaki levhada oluşan ω_{\max} [cm]	$x_1 = 0$ sınırında oluşan ω_{\max} [cm]	Sağdaki levhada oluşan ω_{\max} [cm]	Soldaki levhada oluşan ω_{\max} [cm]	$x_1 = 0$ sınırında oluşan ω_{\max} [cm]	Sağdaki levhada oluşan ω_{\max} [cm]
$\alpha = 0$	$\beta = 0$	2,7599	2,8839	2,6897	2,0280	2,1534	2,0280	2,6897	2,8839	2,7599
	$\beta = 100$	1,0905	0,3254	0,6151	0,6088	0,2966	0,6088	0,6151	0,3254	1,0905
	$\beta = \infty$	0,9980	0	0,5229	0,5228	0	0,5228	0,5229	0	0,9980
$\alpha = 100$	$\beta = 0$	2,1777	2,1288	2,0494	1,5132	1,5354	1,5132	2,0494	2,1288	2,1777
	$\beta = 100$	0,9252	0,3744	0,5364	0,5449	0,3354	0,5449	0,5364	0,3744	0,9252
	$\beta = \infty$	0,7604	0	0,3974	0,4059	0	0,4059	0,3974	0	0,7604
$\alpha = \infty$	$\beta = 0$	2,1425	2,0529	1,9862	1,4449	1,4519	1,4449	1,9862	2,0529	2,1425
	$\beta = 100$	0,8981	0,3813	0,5235	0,5303	0,3428	0,5303	0,5235	0,3813	0,8981
	$\beta = \infty$	0,7177	0	0,3748	0,3755	0	0,3755	0,3748	0	0,7177

Tablo 7.2. İki kenarında sert kenetlenme koşulunun verildiği ve diğer iki kenarın serbest bırakıldığı durumda verilen levhalar sisteminde α ve β 'nın değişimine göre oluşan maksimum eğilmelerde E Elastisite modülünün etkisi

		$E^- = 11000 \text{ [kN/cm}^2\text{]},$ $E^+ = 21000 \text{ [kN/cm}^2\text{]},$ $\nu^- = \nu^+ = 0,3$			$E^- = E^+ = 21000 \text{ [kN/cm}^2\text{]}$ $\nu^- = \nu^+ = 0,3$			$E^- = 21000 \text{ [kN/cm}^2\text{]},$ $E^+ = 11000 \text{ [kN/cm}^2\text{]},$ $\nu^- = \nu^+ = 0,3$		
		Soldaki levhada oluşan ω_{\max} [cm]	$x_1 = 0$ sınırında oluşan ω_{\max} [cm]	Sağdaki levhada oluşan ω_{\max} [cm]	Soldaki levhada oluşan ω_{\max} [cm]	$x_1 = 0$ sınırında oluşan ω_{\max} [cm]	Sağdaki levhada oluşan ω_{\max} [cm]	Soldaki levhada oluşan ω_{\max} [cm]	$x_1 = 0$ sınırında oluşan ω_{\max} [cm]	Sağdaki levhada oluşan ω_{\max} [cm]
$\alpha = 0$	$\beta = 0$	6,1612	6,5298	6,0866	4,4780	5,0827	4,4780	6,0866	6,5298	6,1612
	$\beta = 100$	1,1192	0,3292	0,6325	0,6268	0,3020	0,6268	0,6325	0,3292	1,1192
	$\beta = \infty$	1,0201	0,0096	0,5344	0,5345	0,0066	0,5345	0,5344	0,0096	1,0201
$\alpha = 100$	$\beta = 0$	3,1628	3,1201	3,0136	2,2223	2,2543	2,2223	3,0136	3,1201	3,1628
	$\beta = 100$	0,9355	0,3802	0,5449	0,5542	0,3423	0,5542	0,5449	0,3802	0,9355
	$\beta = \infty$	0,7635	0,0017	0,3991	0,4078	0,0014	0,4078	0,3991	0,0017	0,7635
$\alpha = \infty$	$\beta = 0$	3,0431	2,9572	2,8696	2,0685	2,0789	2,0685	2,8696	2,9572	3,0431
	$\beta = 100$	0,9072	0,3873	0,5314	0,5388	0,3500	0,5388	0,5314	0,3873	0,9072
	$\beta = \infty$	0,7198	0	0,3760	0,3766	0	0,3766	0,3760	0	0,7198

Tablo 7.3. Dört kenarında menteşe koşulu verilen levhalar sisteminde α ve β 'nın değişimine göre oluşan maksimum eğilmelerde E Elastisite modülünün etkisi

		$E^- = 11000 [\text{kN} / \text{cm}^2],$ $E^+ = 21000 [\text{kN} / \text{cm}^2],$ $\nu^- = \nu^+ = 0,3$			$E^- = E^+ = 21000 [\text{kN} / \text{cm}^2]$ $\nu^- = \nu^+ = 0,3$			$E^- = 21000 [\text{kN} / \text{cm}^2],$ $E^+ = 11000 [\text{kN} / \text{cm}^2],$ $\nu^- = \nu^+ = 0,3$		
		Soldaki levhada oluşan ω_{\max} [cm]	$x_1 = 0$ sınırında oluşan ω_{\max} [cm]	Sağdaki levhada oluşan ω_{\max} [cm]	Soldaki levhada oluşan ω_{\max} [cm]	$x_1 = 0$ sınırında oluşan ω_{\max} [cm]	Sağdaki levhada oluşan ω_{\max} [cm]	Soldaki levhada oluşan ω_{\max} [cm]	$x_1 = 0$ sınırında oluşan ω_{\max} [cm]	Sağdaki levhada oluşan ω_{\max} [cm]
$\alpha = 0$	$\beta = 0$	8,4661	8,8137	8,3550	6,2564	6,5669	6,2564	8,3550	8,8137	8,4661
	$\beta = 100$	1,8143	0,3946	1,0167	1,0094	0,3643	1,0094	1,0167	0,3946	1,8143
	$\beta = \infty$	1,6764	0	0,8783	0,8782	0	0,8782	0,8783	0	1,6764
$\alpha = 100$	$\beta = 0$	5,9141	5,8201	5,6692	4,1040	4,1431	4,1040	5,6692	5,8201	5,9141
	$\beta = 100$	1,3656	0,4571	0,7930	0,8141	0,4193	0,8141	0,7930	0,4571	1,3656
	$\beta = \infty$	1,1113	0	0,5805	0,5969	0	0,5969	0,5805	0	1,1113
$\alpha = \infty$	$\beta = 0$	5,7824	5,6090	5,4816	3,9034	3,9150	3,9034	5,4816	5,6090	5,7824
	$\beta = 100$	1,3040	0,4648	0,7624	0,7759	0,4287	0,7759	0,7624	0,4648	1,3040
	$\beta = \infty$	1,0330	0	0,5392	0,5404	0	0,5404	0,5392	0	1,0330

Dört kenarında sert kenetlenme koşulu verilen levhalar sisteminde α ve β 'nın aldığı farklı değerlere göre Elastisite modülü $E^- = E^+ = 21000 [\text{kN} / \text{cm}^2]$ olan iki levhadan oluşan sistemde Tablo 7.4'de Poisson sabitlerinden $\nu^- = 0,3$ sabit tutulup ν^+ için sırasıyla 0,35, 0,40 ve 0,45 değerleri verilerek Poisson sabitindeki değişimin eğilmelere etkisi incelendi.

Tablo 7.4. Dört kenarında sert kenetlenme koşulu verilen levhalar sisteminde α ve β 'nın değişimine göre oluşan maksimum eğilmelerde ν^+ Poisson sabitindeki değişimin etkisi

		$E^- = E^+ = 21000 [\text{kN} / \text{cm}^2]$ $\nu^- = 0,30, \nu^+ = 0,35$			$E^- = E^+ = 21000 [\text{kN} / \text{cm}^2]$ $\nu^- = 0,30, \nu^+ = 0,40$			$E^- = E^+ = 21000 [\text{kN} / \text{cm}^2]$ $\nu^- = 0,30, \nu^+ = 0,45$		
		Soldaki levhada oluşan ω_{\max} [cm]	$x_1 = 0$ sınırında oluşan ω_{\max} [cm]	Sağdaki levhada oluşan ω_{\max} [cm]	Soldaki levhada oluşan ω_{\max} [cm]	$x_1 = 0$ sınırında oluşan ω_{\max} [cm]	Sağdaki levhada oluşan ω_{\max} [cm]	Soldaki levhada oluşan ω_{\max} [cm]	$x_1 = 0$ sınırında oluşan ω_{\max} [cm]	Sağdaki levhada oluşan ω_{\max} [cm]
$\alpha = 0$	$\beta = 0$	2,0258	2,1531	2,0230	2,0190	2,1478	2,0130	2,0071	2,1369	1,9975
	$\beta = 100$	0,6080	0,2959	0,5893	0,6071	0,2952	0,5669	0,6062	0,2942	0,5416
	$\beta = \infty$	0,5228	0	0,5042	0,5228	0	0,4826	0,5228	0	0,4582
$\alpha = 100$	$\beta = 0$	1,4924	1,5127	1,4880	1,4679	1,4860	1,4583	1,4397	1,4550	1,4241
	$\beta = 100$	0,5452	0,3338	0,5293	0,5457	0,3318	0,5112	0,5462	0,3294	0,4906
	$\beta = \infty$	0,4063	0	0,3918	0,4069	0	0,3755	0,4075	0	0,3570
$\alpha = \infty$	$\beta = 0$	1,4215	1,4260	1,4169	1,3944	1,3960	1,3842	1,3634	1,3617	1,3470
	$\beta = 100$	0,5307	0,3409	0,5154	0,5312	0,3387	0,4980	0,5318	0,3360	0,4783
	$\beta = \infty$	0,3755	0	0,3621	0,3756	0	0,3466	0,3756	0	0,3290

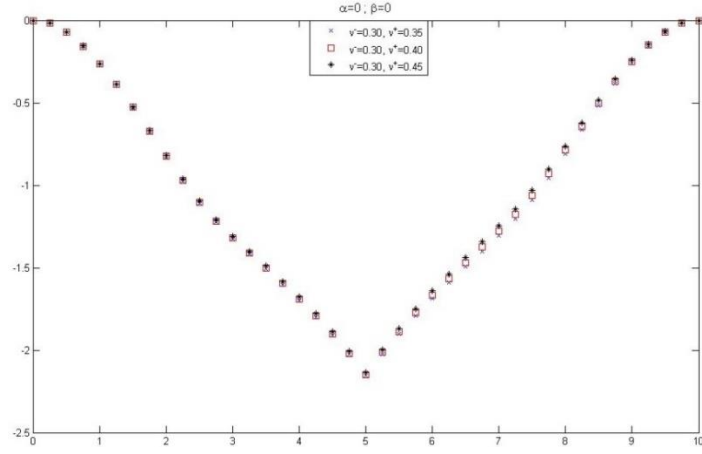
Soldaki levhada, sağdaki levhada ve $x_1 = 0$ ortak sınırında oluşan ω_{\max} değerleri verildi. Benzer şekilde Tablo 7.5'de de Poisson sabitlerinden $\nu^+ = 0,3$ sabit tutulup

ν^- için sırasıyla 0,35, 0,40 ve 0,45 değerleri verilerek Poisson sabitindeki değişimin eğilmelere etkisi incelendi ve bu değerlere göre sistemde oluşan ω_{\max} değerleri verildi.

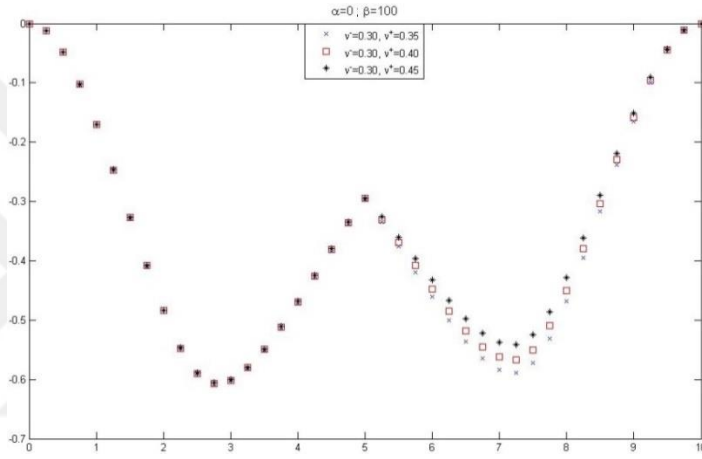
Tablo 7.5. Dört kenarında sert kenetlenme koşulu verilen levhalar sisteminde α ve β 'nın değişimine göre oluşan maksimum eğilmelerde ν^- Poisson sabitindeki değişimin etkisi

		$E^- = E^+ = 21000 \text{ [kN / cm}^2\text{]}$ $\nu^- = 0,35, \nu^+ = 0,30$			$E^- = E^+ = 21000 \text{ [kN / cm}^2\text{]}$ $\nu^- = 0,40, \nu^+ = 0,30$			$E^- = E^+ = 21000 \text{ [kN / cm}^2\text{]}$ $\nu^- = 0,45, \nu^+ = 0,30$		
		Soldaki levhada oluşan ω_{\max} [cm]	$x_1 = 0$ sınırında oluşan ω_{\max} [cm]	Sağdaki levhada oluşan ω_{\max} [cm]	Soldaki levhada oluşan ω_{\max} [cm]	$x_1 = 0$ sınırında oluşan ω_{\max} [cm]	Sağdaki levhada oluşan ω_{\max} [cm]	Soldaki levhada oluşan ω_{\max} [cm]	$x_1 = 0$ sınırında oluşan ω_{\max} [cm]	Sağdaki levhada oluşan ω_{\max} [cm]
$\alpha = 0$	$\beta = 0$	2,0230	2,1531	2,0258	2,0130	2,1478	2,0190	1,9975	2,1369	2,0071
	$\beta = 100$	0,5893	0,2959	0,6080	0,5669	0,2952	0,6071	0,5416	0,2942	0,6062
	$\beta = \infty$	0,5042	0	0,5228	0,4826	0	0,5228	0,4582	0	0,5228
$\alpha = 100$	$\beta = 0$	1,4880	1,5127	1,4924	1,4583	1,4860	1,4679	1,4241	1,4550	1,4397
	$\beta = 100$	0,5293	0,3338	0,5452	0,5112	0,3318	0,5457	0,4906	0,3294	0,5462
	$\beta = \infty$	0,3918	0	0,4063	0,3755	0	0,4069	0,3570	0	0,4075
$\alpha = \infty$	$\beta = 0$	1,4169	1,4260	1,4215	1,3842	1,3960	1,3944	1,3470	1,3617	1,3634
	$\beta = 100$	0,5154	0,3409	0,5307	0,4980	0,3387	0,5312	0,4783	0,3360	0,5318
	$\beta = \infty$	0,3621	0	0,3755	0,3466	0	0,3756	0,3290	0	0,3756

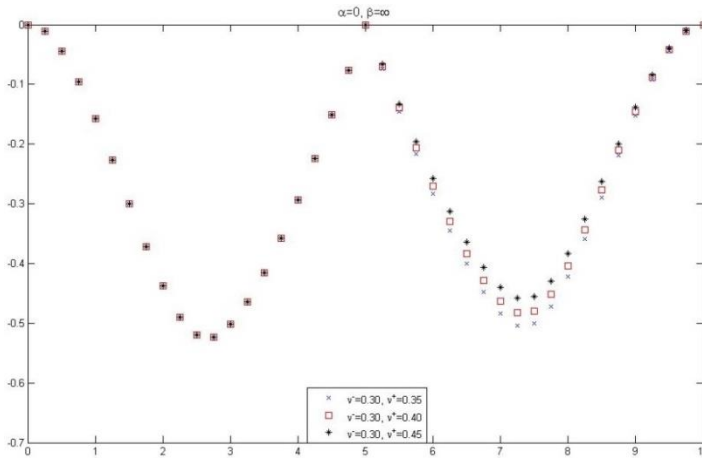
Tablo 7.4'de elde edilen verilere göre α ve β 'nın aldığı farklı değerler için Poisson sabitindeki değişimin eğilmelere etkisi Şekil 7.19-7.22'de verildi. Buna göre, Şekil 7.19-7.22'den α ve β 'nın aldığı farklı değerler için Poisson sabitinin değeri arttıkça eğilmelerin azaldığı görülür.



(a)

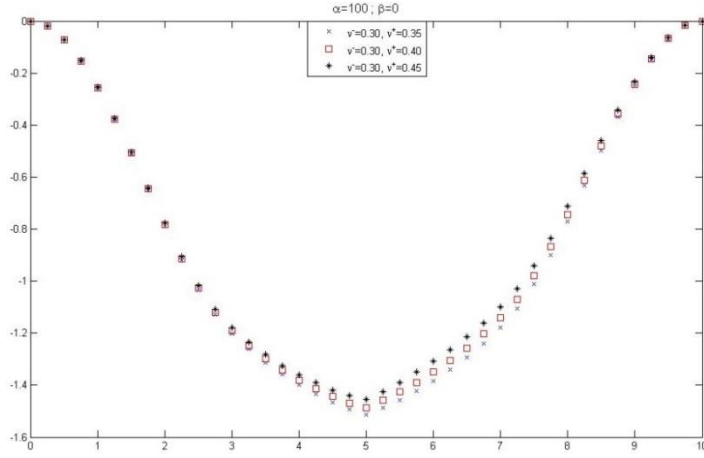


(b)

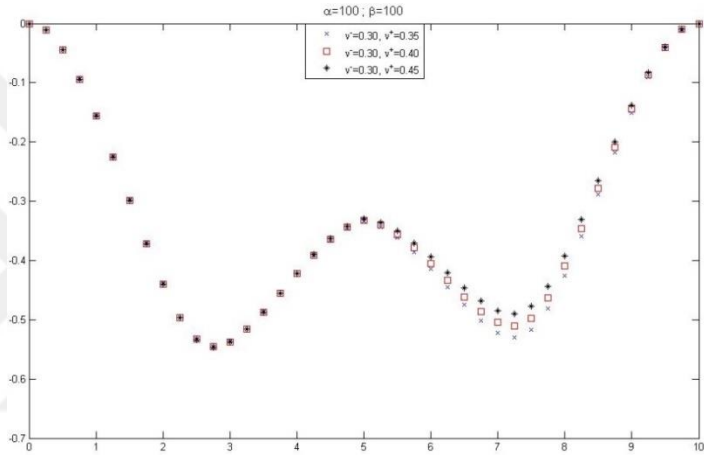


(c)

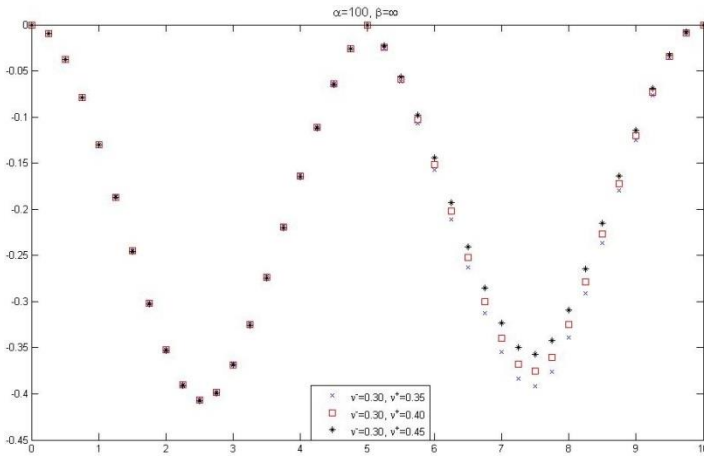
Şekil 7.19. $\alpha = 0$ durumunda, (a)-(c) β 'nin aldığı farklı değerler için Poisson sabitindeki değişimin eğilmelere etkisini gösteren grafikler



(a)

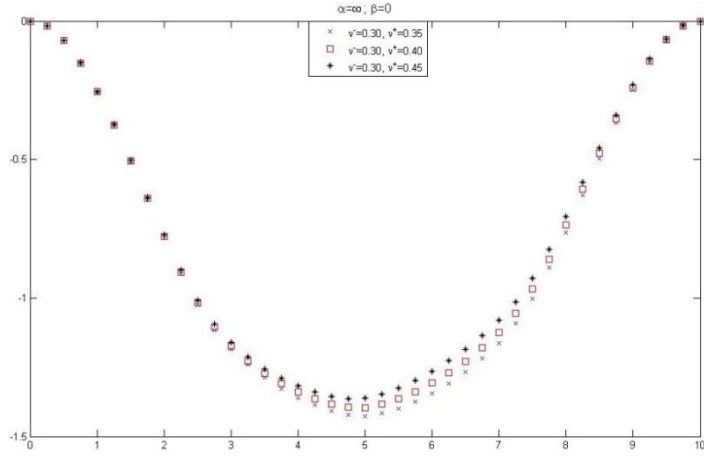


(b)

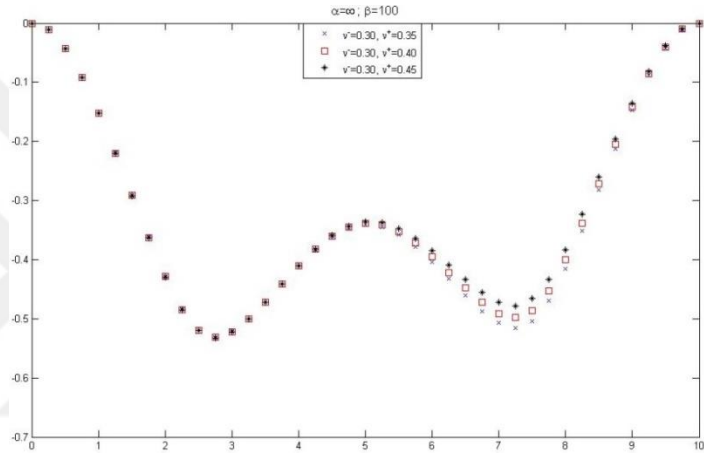


(c)

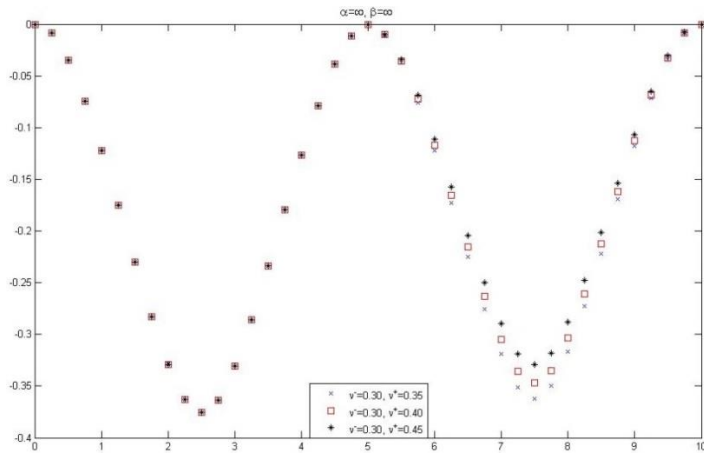
Şekil 7.20. $\alpha = 100$ durumunda, (a)-(c) β 'nin aldığı farklı değerler için Poisson sabitindeki değişimin eğilmelere etkisini gösteren grafikler



(a)



(b)

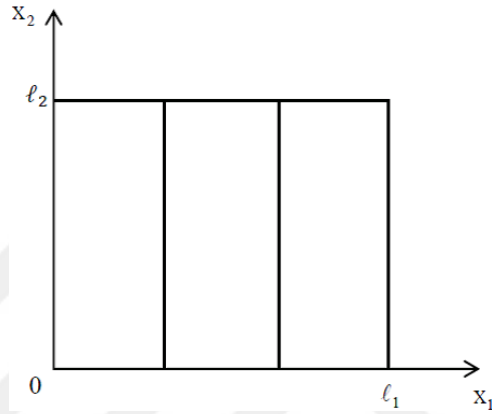


(c)

Şekil 7.21. $\alpha = \infty$ durumunda, (a)-(c) β 'nin aldığı farklı değerler için Poisson sabitindeki değişimin eğilmelere etkisini gösteren grafikler

7.3. Sınırlarında Farklı Sınır Koşulları Verilmiş Üç Levhadan Oluşan Sistemin Eğilmesi Probleminin Sayısal Çözümü

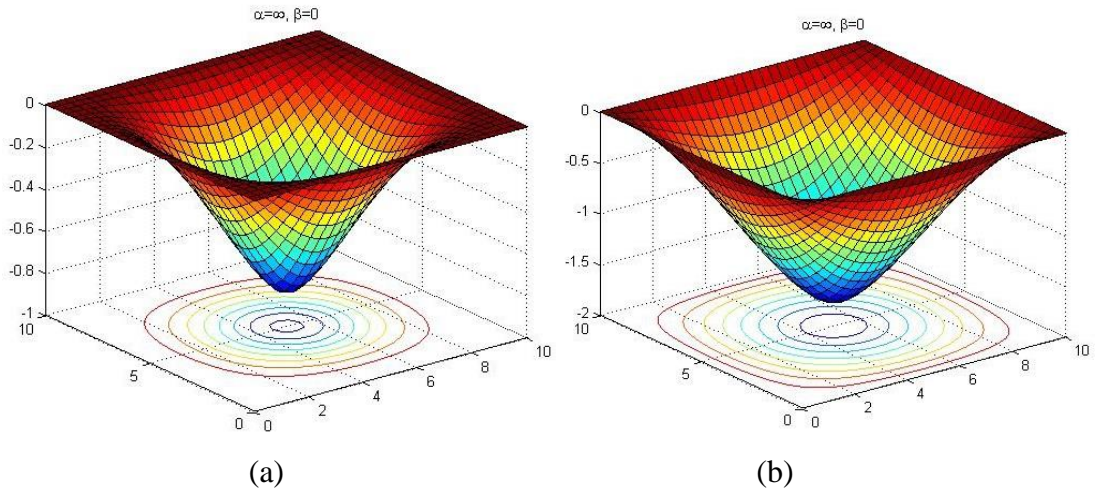
Elastik üç levhanın yan yana konulmasıyla elde edilen Şekil 7.22'deki gibi bir sistemin eğilmesi ile ilgili çeşitli sınır koşullarında sayısal çözümünün analizi için bilgisayar deneyleri yapıldı ve incelendi. Bunun için ilk olarak sınırlarda sert kenetlenme ve menteşe koşulu verildiği durumlarda, aynı özellikteki üç levhanın yan yana konulmasıyla oluşturulan levhalar sistemi ele alındı (Şekil 7.22).



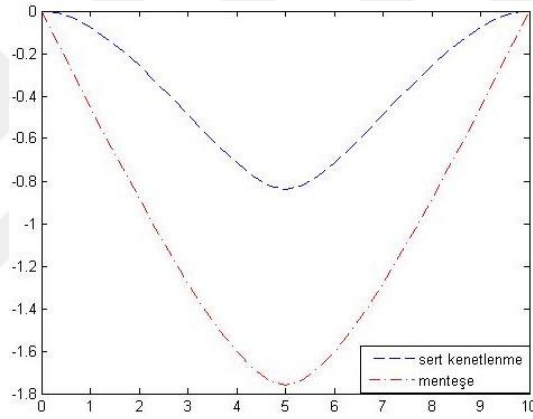
Şekil 7.22. Ω bölgesini dolduran levhalar sistemi

Bu sistemin yüzeyine uygulanan kuvvet sonucu oluşan eğilmeler incelendi. Bunun için de sistemi oluşturan levhaların demir olduğu durum göz önüne alındı. Sert bir metal olan demirin mekanik özelliği olarak sertliğini ifade eden Elastisite modülü $E_{Fe} = 30000 \text{ [kN/cm}^2\text{]}$ ve Poisson sabiti de $\nu_{Fe} = 0,27$ alındı. α ve β sabitlerinin farklı değerleri için Ω bölgesini dolduran esnek dikdörtgen levhalar sisteminin kalınlığı $h = 0,3 \text{ [cm]}$ ve bu bölgede kafesin boyutları $N_{x_1} \times N_{x_2} = 31 \times 31$ olarak ele alındı. Bu sistemin yüzeyinin ortasındaki 5 noktadan $q = 200 \text{ [kN]}$ kuvveti uygulandı ve eğilmeler incelendi.

1. $\alpha = \infty, \beta = 0$ ($l_1 = l_2 = 10 \text{ [cm]}$)



Şekil 7.23. $\alpha = \infty$, $\beta = 0$ durumunda üç demir levhadan oluşan sistemin sınırlarında, (a) Sert kenetlenme koşulu, (b) Mentese koşulu verildiğinde eğilmelerin grafikleri

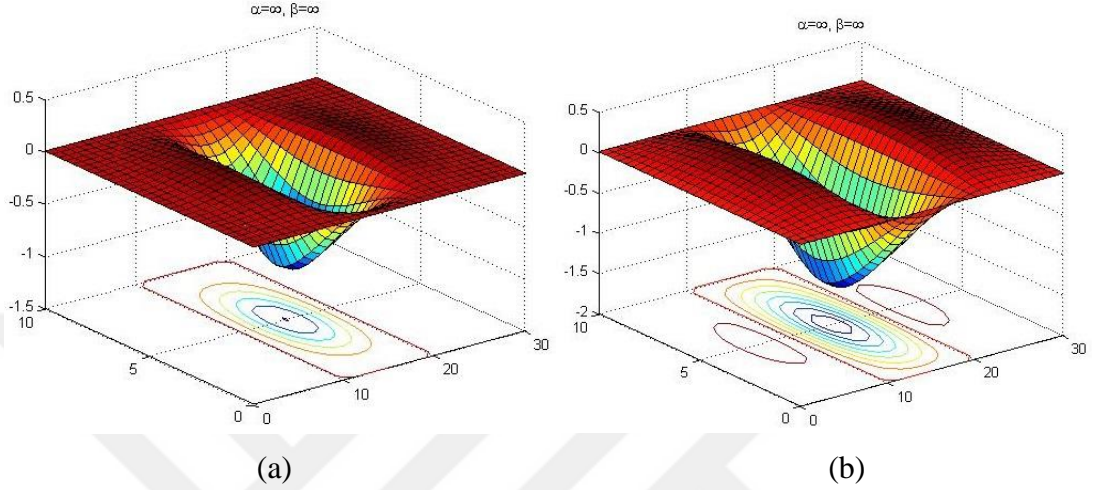


Şekil 7.24. $\alpha = \infty$, $\beta = 0$ durumunda farklı sınır koşullarında üç demir levhadan oluşan sistemde elde edilen eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesitleri

Bu durumda, mekanik açıdan $\alpha = \infty$ olması levhaların kaynak edilmiş gibi birlikte hareket ettiği ve $\beta = 0$ olması da birleşim sınırlarında herhangi bir dayanak olmadığı anlamına gelir. Aynı mekanik özelliğe sahip üç levhanın oluşturduğu sistemde sınırlarda sert kenetlenme koşulu verildiğinde maksimum eğilme $\omega_{\max} = 0,84002$ [cm] olarak elde edilirken (Şekil 7.23 (a)), menteşe koşulu verilen durumda maksimum eğilme $\omega_{\max} = 1,76099$ [cm] olarak elde edildi (Şekil 7.23 (b)). Şekil 7.23'e ve ω_{\max} maksimum eğilme değerlerine göre sınırlarında menteşe koşulu verilen durum için eğilmenin daha fazla olduğu görülür. $\alpha = \infty$, $\beta = 0$

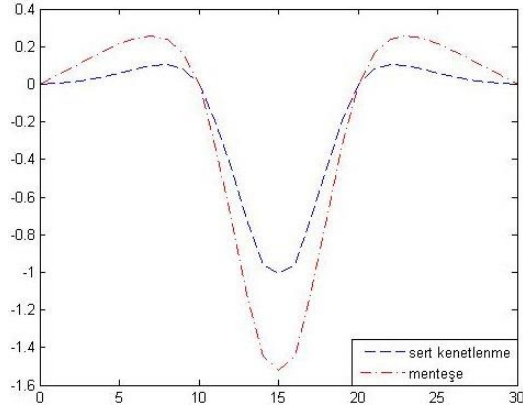
olduğunda, farklı sınır koşullarında sistemde oluşan eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesitleri Şekil 7.24'te gösterildi.

2. $\alpha = \infty, \beta = \infty$ ($\ell_1 = 30$ [cm], $\ell_2 = 10$ [cm])



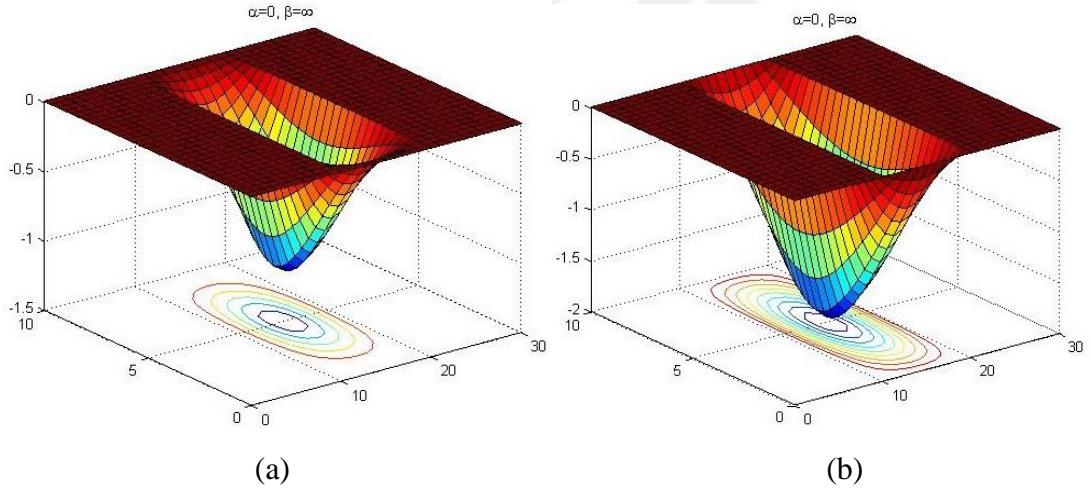
Şekil 7.25. $\alpha = \infty, \beta = \infty$ durumu için üç demir levhadan oluşan sistemin sınırlarında, (a) Sert kenetlenme koşulu, (b) Menteşe koşulu verildiğinde eğilmelerin grafikleri

Mekanik açıdan $\alpha = \infty$ olması levhaların kaynak edilmiş gibi birlikte hareket ettiği ve $\beta = \infty$ olması da levhaların birleşim sınırlarında sonsuz sertlikte bir dayanağın olduğu anlamına gelir. Aynı mekanik özelliğe sahip üç levhanın oluşturduğu sistemde sınırlarda sert kenetlenme koşulu verildiğinde maksimum eğilme $\omega_{\max} = 1,00744$ [cm] (Şekil 7.25 (a)) ve menteşe koşulu verildiğinde maksimum eğilme $\omega_{\max} = 1,52129$ [cm] (Şekil 7.25 (b)) olarak elde edildi. Şekil 7.25'e ve ω_{\max} maksimum eğilme değerlerine bakılırsa sınırlarında menteşe koşulu verilen durum için eğilmenin daha büyük olduğu görülür. $\alpha = \infty, \beta = \infty$ olduğu durum için farklı sınır koşullarında sistemde oluşan eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesitleri Şekil 7.26'da gösterildi.



Şekil 7.26. $\alpha = \infty, \beta = \infty$ durumu için farklı sınır koşullarında üç demir levhadan oluşan sistemde elde edilen eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesitleri

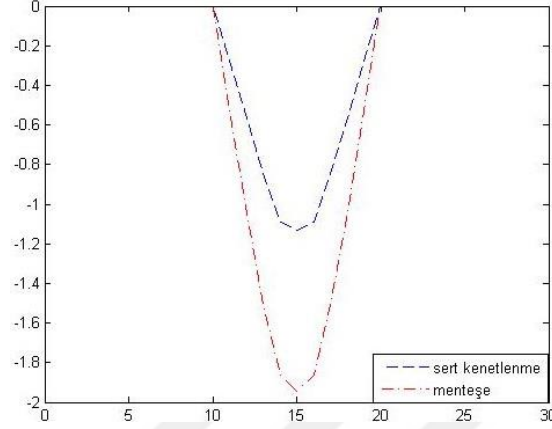
3. $\alpha = 0, \beta = \infty$ ($\ell_1 = 30$ [cm], $\ell_2 = 10$ [cm])



Şekil 7.27. $\alpha = 0, \beta = \infty$ durumunda üç demir levhadan oluşan sistemin sınırlarında, (a) Sert kenetlenme koşulu, (b) Menteşe koşulu verildiğinde eğilmelerin grafikleri

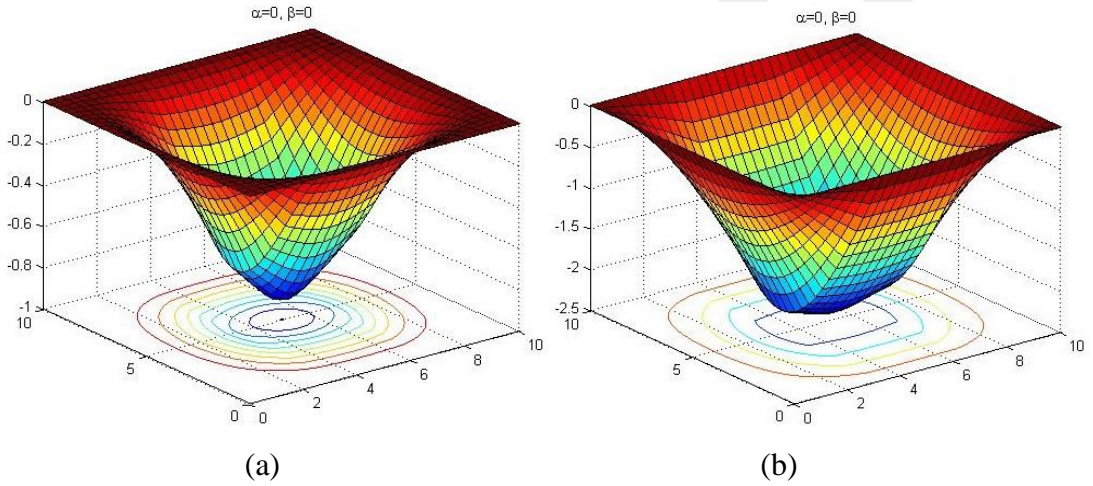
Bu durumda mekanik açıdan $\alpha = 0$ olması levhaların birbiriyle bir menteşe yardımıyla bağlanmış gibi birlikte hareket ettiği ve $\beta = \infty$ olması da levhaların birleşim sınırlarında sonsuz sertlikte bir dayanağın olduğu anlamına gelir. Aynı mekanik özelliğe sahip üç levhanın oluşturduğu sistemde sınırlarda sert kenetlenme koşulu verildiğinde maksimum eğilme verildiğinde $\omega_{\max} = 1,13225$ [cm] (Şekil 7.27 (a)) ve menteşe koşulu verildiğinde maksimum eğilme $\omega_{\max} = 1,94611$ [cm] (Şekil

7.27 (b)) elde edildi. $\alpha = 0, \beta = \infty$ olduğu durum için farklı sınır koşullarında sistemde oluşan eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesitleri Şekil 7.28'de gösterildi.



Şekil 7.28. $\alpha = 0, \beta = \infty$ durumunda farklı sınır koşullarında üç demir levhadan oluşan sistemde elde edilen eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesitleri

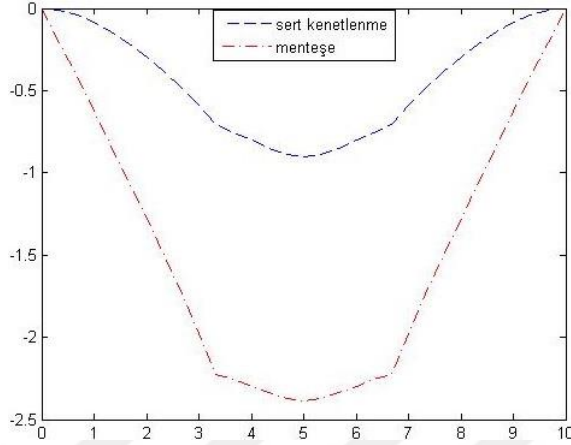
4. $\alpha = 0, \beta = 0$ ($\ell_1 = \ell_2 = 10$ [cm])



Şekil 7.29. $\alpha = 0, \beta = 0$ durumu için üç demir levhadan oluşan sistemin sınırlarında, (a) Sert kenetlenme koşulu, (b) Menteşe koşulu verildiğinde eğilmelerin grafikleri

Mekanik anlamda $\alpha = 0$ olması levhaların birbiriyle bir menteşe yardımıyla bağlanmış gibi birlikte hareket ettiği ve $\beta = 0$ olması da birleşim sınırlarında herhangi bir dayanak olmadığı anlamına gelir. Aynı mekanik özelliğe sahip üç levhanın oluşturduğu sistemde sınırlarda sert kenetlenme koşulu verildiğinde maksimum eğilme $\omega_{\max} = 0,90327$ [cm] (Şekil 7.29 (a)) ve menteşe koşulu

verildiğinde maksimum eğilme $\omega_{\max} = 2,38603$ [cm] (Şekil 7.29 (b)) olarak elde edildi. $\alpha = 0, \beta = 0$ olduğunda farklı sınır koşullarında sistemde oluşan eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesitleri Şekil 7.30'da gösterildi.

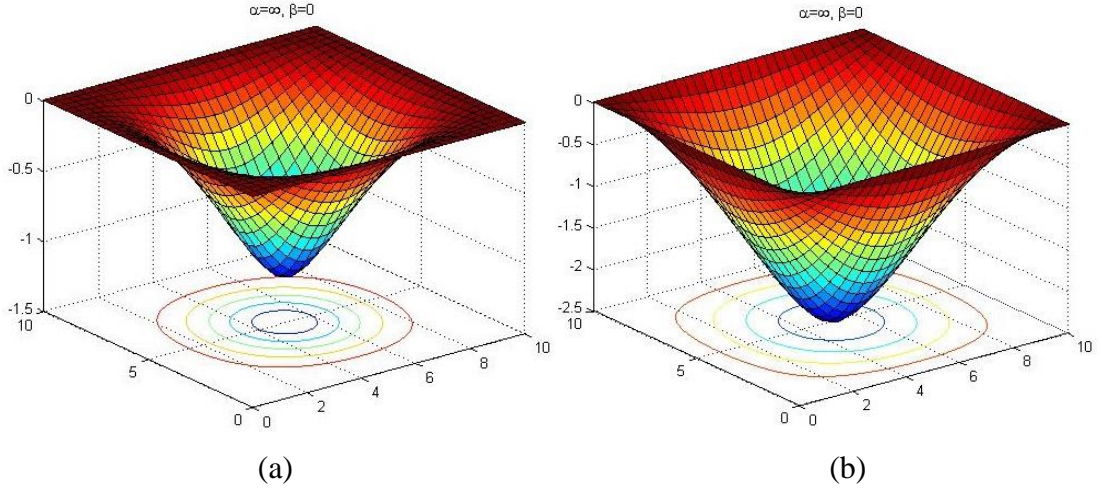


Şekil 7.30. $\alpha = 0, \beta = 0$ durumu için farklı sınır koşullarında üç demir levhadan oluşan sistemde elde edilen eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesitleri

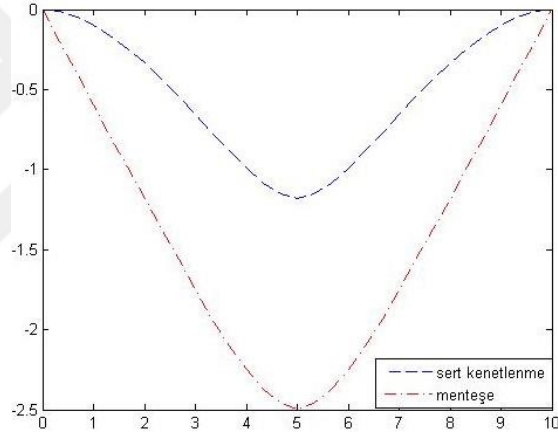
Şimdi ise, farklı özellikte levhaların yan yana konulmasıyla elde edilen sistemi ele alalım. Bunun için yine yukarıdakilere benzer şekilde sınırlarında sert kenetlenme ve menteşe koşulu verildiği durumları inceleyelim.

Kenarlarında demir ve ortasında demire göre daha yumuşak bir malzemeden üretilmiş olan bakır levhanın bulunduğu sistemin yüzeyinin ortasındaki 5 noktadan $q = 200$ [kN] kuvveti uygulandı ve eğilmeler incelendi. Burada demir ve bakır levhaların Elastisite modülleri sırasıyla $E_{Fe} = 30000$ [kN/cm²], $E_{Cu} = 18100$ [kN/cm²], Poisson sabitleri de yine sırasıyla $\nu_{Fe} = 0,27$ ve $\nu_{Cu} = 0,36$ olarak alındı. α ve β sabitlerinin farklı değerleri için Ω bölgesini dolduran esnek dikdörtgen levhalar sisteminin kalınlığı $h = 0,3$ [cm] ve bu bölgede kafesin boyutu $N_{x_1} \times N_{x_2} = 31 \times 31$ olarak ele alındı.

1. $\alpha = \infty, \beta = 0$ ($\ell_1 = \ell_2 = 10$ [cm])



Şekil 7.31. $\alpha = \infty, \beta = 0$ durumunda ortadaki levha bakır ve diğer iki levha demir olmak üzere oluşturulan sistemin sınırlarında, (a) Sert kenetlenme koşulu, (b) Mentşe koşulu verildiğinde eğilmelerin grafikleri

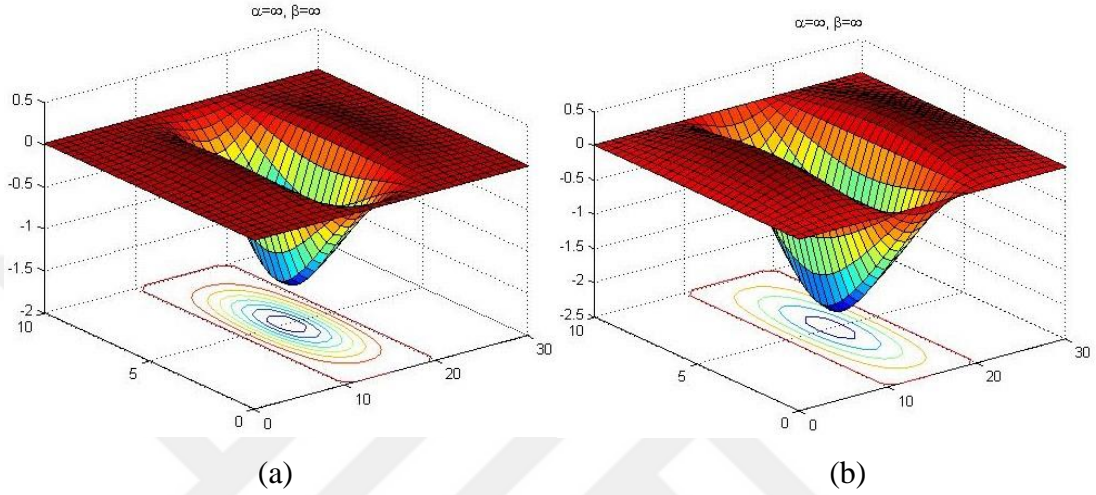


Şekil 7.32. $\alpha = \infty, \beta = 0$ durumunda farklı sınır koşullarında ortadaki levha bakır ve diğer iki levha demir olmak üzere oluşturulan sistemde elde edilen eğilmelerin $x_2 = l_2 / 2$ 'deki kesitleri

İki demir levhanın ortasına bakır bir levha konularak elde edilen sistemde $\alpha = \infty, \beta = 0$ yani, sistemi oluşturan levhaların birleşim sınırlarından kaynak edilmiş gibi birlikte hareket ettiği ve birleşim sınırlarında herhangi bir dayanağın olmadığı durumda sistemin sınırlarında sert kenetlenme koşulu verildiğinde maksimum eğilme $\omega_{\max} = 1,17962$ [cm] (Şekil 7.31 (a)) ve menteşe koşulu verilen durum için maksimum eğilme $\omega_{\max} = 2,49654$ [cm] (Şekil 7.31 (b)) elde edildi. Şekil 7.24 ve Şekil 7.31 kendi aralarında kıyaslanırsa, sistemi oluşturan levhaların üçünün de demir olması durumunda eğilmenin, kenarlarında demir ortasında bakır levhanın

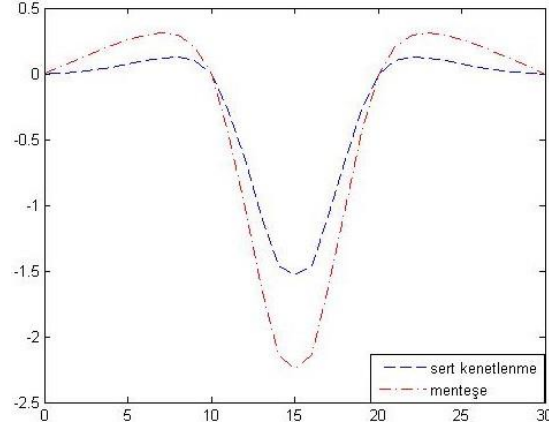
oluşturduğu sisteme göre daha az olduğu görülür. $\alpha = \infty, \beta = 0$ olduğunda, farklı sınır koşullarında sistemde oluşan eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesitleri Şekil 7.32'de gösterildi.

2. $\alpha = \infty, \beta = \infty$ ($\ell_1 = 30$ [cm], $\ell_2 = 10$ [cm])



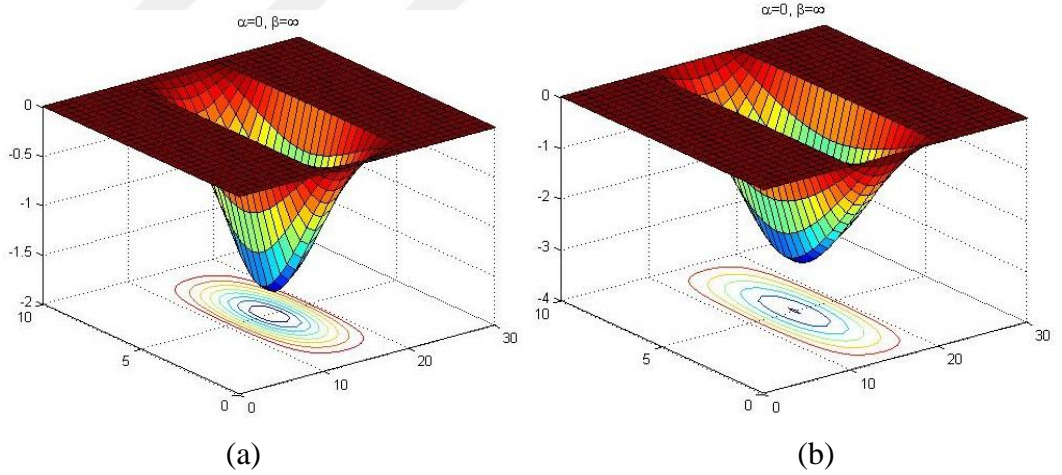
Şekil 7.33. $\alpha = \infty, \beta = \infty$ durumu için ortadaki levha bakır ve diğer iki levha demir olmak üzere oluşturulan sistemin sınırlarında, (a) Sert kenetlenme koşulu, (b) Menteşe koşulu verildiğinde eğilmelerin grafikleri

Şekil 7.31'e benzer şekilde, ikisi aynı ortadaki farklı özellikteki üç levhanın yan yana konulmasıyla oluşturulan sistemde $\alpha = \infty, \beta = \infty$ yani birbirine kaynak edilmiş gibi birlikte hareket eden üç levhanın oluşturduğu sistemde levhaların birleşme sınırlarında da sonsuz sertlikte bir dayanağın olduğu durumda sistemin sınırlarında sert kenetlenme koşulu verildiğinde maksimum eğilme $\omega_{\max} = 1,53182$ [cm] (Şekil 7.33 (a)) ve menteşe koşulu verildiğinde maksimum eğilme $\omega_{\max} = 2,24832$ [cm] (Şekil 7.33 (b)) olarak elde edildi. Şekil 7.33'e ve ω_{\max} maksimum eğilme değerlerine bakılırsa, sınırlarında menteşe koşulu verilen durum için eğilmenin, sınırlarında sert kenetlenme koşulu verildiği duruma göre daha fazla olduğu görülür. $\alpha = \infty, \beta = \infty$ olduğu durumda farklı sınır koşullarında sistemde oluşan eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesitleri Şekil 7.34'te verildi.



Şekil 7.34. $\alpha = \infty, \beta = \infty$ durumu için farklı sınır koşullarında ortadaki levha bakır ve diğer iki levha demir olmak üzere oluşturulan sistemde elde edilen eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesitleri

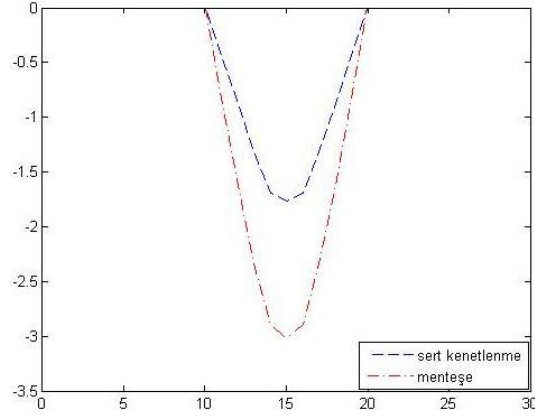
3. $\alpha = 0, \beta = \infty$ ($\ell_1 = 30$ [cm], $\ell_2 = 10$ [cm])



Şekil 7.35. $\alpha = 0, \beta = \infty$ durumunda ortadaki levha bakır ve diğer iki levha demir olmak üzere oluşturulan sistemin sınırlarında, (a) Sert kenetlenme koşulu, (b) Mentеше koşulu verildiğinde eğilmelerin grafikleri

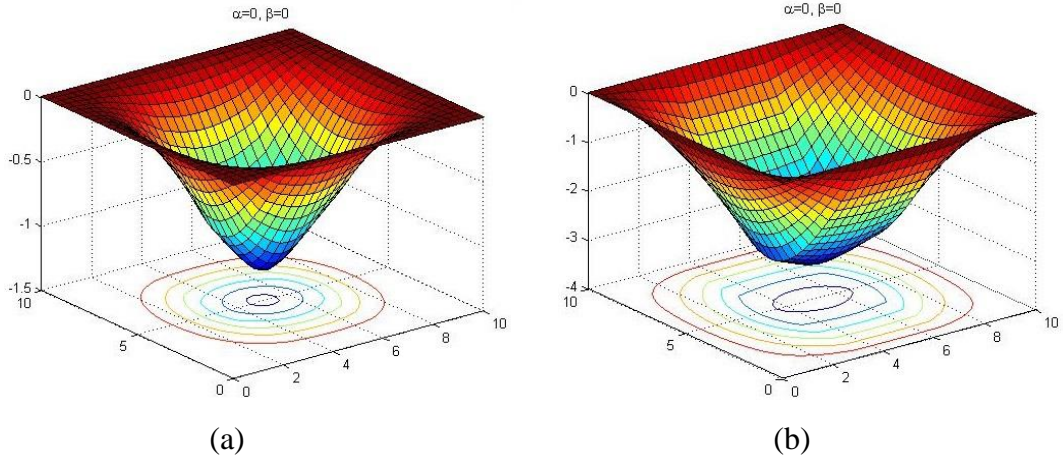
Şekil 7.35'teki gibi mekanik özelliklere sahip üç levhanın oluşturduğu sistemde, $\alpha = 0, \beta = \infty$ durumunda (yani, levhaların menteşe ile birbirine bağlanmış gibi hareket ettiği ve birleşim sınırlarında sonsuz sertlikte bir dayanak olduğunda) maksimum eğilmeler incelendi. Sistemin sınırlarında sert kenetlenme koşulu verildiğinde $\omega_{\max} = 1,76211$ [cm] (Şekil 7.35 (a)) ve menteşe koşulu verildiğinde $\omega_{\max} = 3,02390$ [cm] (Şekil 7.35 (b)) maksimum eğilmeleri elde edildi. $\alpha = 0, \beta = \infty$

olduğu, durumda farklı sınır koşullarında sistemde oluşan eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesitleri Şekil 7.36'da verildi.



Şekil 7.36. $\alpha = 0, \beta = \infty$ durumunda farklı sınır koşullarında ortadaki levha bakır ve diğer iki levha demir olmak üzere oluşturulan sistemde elde edilen eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesitleri

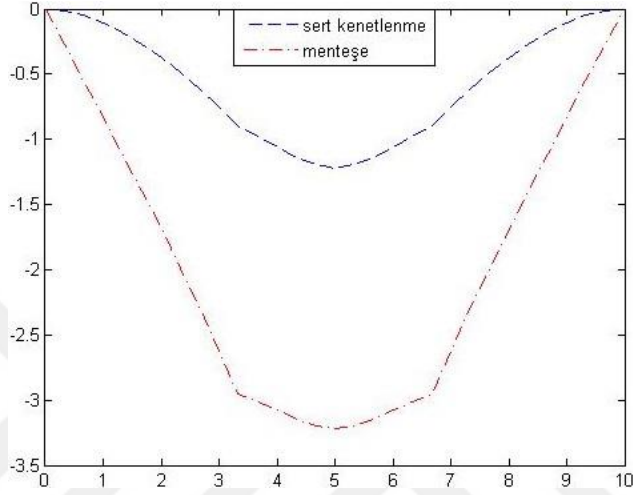
4. $\alpha = 0, \beta = 0$ $\ell_1 = \ell_2 = 10$ [cm]



Şekil 7.37. $\alpha = 0, \beta = 0$ durumu için ortadaki levha bakır ve diğer iki levha demir olmak üzere oluşturulan sistemin sınırlarında (a) Sert kenetlenme koşulu (b) Mentеше koşulu verildiğinde eğilmelerin grafikleri

$\alpha = 0, \beta = 0$ durumunda, yani levhaların menteşe ile birbirine bağlanmış gibi hareket ettiği ve birleşim sınırlarında herhangi bir dayanak olmadığı durumda maksimum eğilmeler incelendi. Sistemin sınırlarında sert kenetlenme koşulu verildiğinde maksimum eğilme $\omega_{\max} = 1,26579$ [cm] (Şekil 7.37 (a)) ve menteşe koşulu

verildiğinde maksimum eğilme $\omega_{\max} = 3,25535$ [cm] (Şekil 7.37 (b)) olarak elde edildi. Grafikler ve ω_{\max} maksimum eğilme değerleri karşılaştırılırsa, sınırlarında sert kenetlenme koşulu verilen durumda elde edilen eğilmelerin diğer duruma göre daha az olduğu görülür. $\alpha = 0, \beta = 0$ olduğu durumda farklı sınır koşullarında sistemde oluşan eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesitleri Şekil 7.38'de verildi.



Şekil 7.38. $\alpha = 0, \beta = 0$ durumu için farklı sınır koşullarında ortadaki levha bakır ve diğer iki levha demir olmak üzere oluşturulan sistemde elde edilen eğilmelerin $x_2 = \ell_2 / 2$ 'deki kesitleri

8. FARKLI SINIR KOŞULLARINDA BAŞLANGIÇ VERİLERİNDEN YARARLANILARAK LEVHALARIN ÖZELLİKLERİNİN BULUNMASI

8.1. Ek Koşulardan Yararlanarak E-Elastisite Modülünün Bulunması

Bu bölümde başlangıç verilerinden yararlanarak her bir malzemeye özgü olan E Elastisite modülünün bulunması için farklı iki algoritma verilmiş ve sayısal sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Başlangıç verisi olarak daha önceden bilinen bir q kuvvetinin etkisi ile levhalar sisteminde oluşan maksimal ω_0 eğilme değeri verildiği durumda E Elastisite modülü ikiye bölme yönteminin yardımı ile bulunabilir. Bu yöntemin algoritması aşağıdaki şekilde yazılabilir.

İlk olarak E Elastisite modülü olarak herhangi bir E_1 değeri ele alınır ($E = E_1$). q kuvvetinin etkisiyle Elastisite modülü E_1 olan levhanın yüzeyinde oluşan maksimum eğilme olan $\omega_h(E_1)$ bulunur. Daha sonra ise malzemenin mekanik özelliği (aynı kuvvetin etkisi altında olan sert malzemenin yumuşak malzemeye göre daha az eğilmesi) göz önüne alınarak, önceden belli olan ω_0 ve sayısal olarak bulunan $\omega_h(E_1)$ maksimum eğilmeleri karşılaştırılır.

I. (a) Eğer $\omega_h(E_1) > \omega_0$ ise $E_2 = E_1 + \delta_E$

(b) Eğer $\omega_h(E_1) < \omega_0$ ise $E_2 = E_1 - \delta_E$

alınarak problem çözülür ve elde edilen $\omega_h(E_2)$ ile ω_0 kıyaslanır. Burada $\delta_E > 0$ herhangi bir sabittir.

II. İlk adımdaki işlemler ω_0 eğilme değeri, ardışık olarak bulunan E_{k-1} ve E_k Elastisite modüllerine karşılık gelen $\omega_h(E_{k-1})$ ve $\omega_h(E_k)$ maksimum eğilmeleri

arasında kalana kadar devam ettirilir. Sonuçta $\omega_h(E_{k-1}) < \omega_0 < \omega_h(E_k)$ veya $\omega_h(E_k) < \omega_0 < \omega_h(E_{k-1})$ koşullarından biri sağlanacaktır.

III. Bu adımda son olarak bulunan E_{k-1} ve E_k değerlerinden yararlanarak elde edilen $\tilde{E} = (E_{k-1} + E_k) / 2$ Elastisite modülüne karşılık gelen $\omega_h(\tilde{E})$ değeri bulunur. Eğer $\max|\omega_h(\tilde{E}) - \omega_0| \leq \varepsilon$ koşulu sağlanıyorsa, E olarak \tilde{E} ele alınır.

IV. Eğer $\max|\omega_h(\tilde{E}) - \omega_0| \leq \varepsilon$ koşulu sağlanmıyorsa, o halde:

$\omega_h(\tilde{E}) > \omega_0$ olduğu durumda $E_{k-1} = E_{k-1}$ ve $E_k = \tilde{E}$;

$\omega_h(\tilde{E}) < \omega_0$ olduğu durumda $E_{k-1} = \tilde{E}$ ve $E_k = E_k$

olarak ele alınır. III. ve IV. adımdaki işlemler $\max|\omega_h(\tilde{E}) - \omega_0| < \varepsilon$ koşulu sağlanana kadar tekrarlanır.

Bu tür problemlerin çözümü ikiye bölme yöntemi uygulanarak her zaman bulunabilir. Fakat her hangi bir lineer olmayan denklemin $[a,b]$ aralığında çözümünün bulunması garanti edilse bile, uygulanan ikiye bölme yönteminin

yaklaşım hatası için $\frac{b-a}{2^{k+1}} \leq \varepsilon$ formülünün geçerli olduğu bellidir. Bu formülden

yararlanarak çözümün önceden verilen ε hatası ile bulunması için gereken yaklaşım

sayısının $k \geq \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} - 1$ eşitsizliği ile belirlenmesi mümkündür. $[a,b]$ aralığı

büyük olduğu durumda yaklaşım sayısının çok fazla olduğu bellidir. Burada ikiye

bölme yönteminin zayıf yanı göz önüne alınarak, E Elastisite modülünün değerini

bulmak için hızlandırma parametresinden yararlanarak yeni bir yaklaşım

geliştirilmiştir. Geliştirilmiş olan bu yöntemde, önce ikiye bölme yönteminde

verilmiş olan yukarıdaki I. ve II. adımlar uygulanarak E Elastisite modülünün değeri

için $E_{k-1} < E < E_k$ veya $E_k < E < E_{k-1}$ eşitsizliklerinden biri sağlatılır. E değerini

daha hızlı şekilde bulmak için bir $\gamma \in (0,1)$ hızlandırma parametresi kullanarak aşağıdaki ardışık işlemler yapılabilir:

III. $A = \omega_0 - \omega$ olarak tanımlanır, $A_{k-1} = \omega_0 - \omega_h(E_{k-1})$ ve $A_k = \omega_0 - \omega_h(E_k)$ yazılabilir.

$A_{k-1} > 0$ ve $A_k < 0$ olduğu varsayalım. Eğer, $A_{k+1} = \gamma A_{k-1} + (1-\gamma)A_k$ tanımlanır, $A_{k+1} = \omega_0 - \omega_h(E_{k+1}) = 0$ olması için $\gamma A_{k-1} + (1-\gamma)A_k = 0$ eşitliğinden, $\gamma = \frac{A_k}{A_k - A_{k-1}}$ elde edilir.

IV. Gerçek E değeri $(k-1)$ -inci ve k -yüncü yaklaşımlara karşılık gelen E_{k-1} ve E_k değerlerinin arasında olduğu için E değerinin $(k+1)$ -inci yaklaşımını, $\tilde{E} = \gamma E_{k-1} + (1-\gamma)E_k$ şeklinde hesaplanabilir.

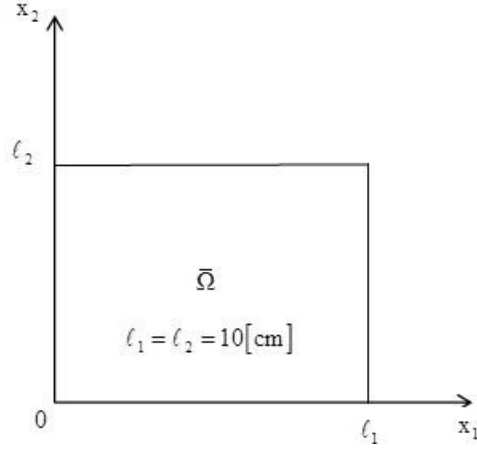
V. \tilde{E} değerinden yararlanılarak bulunan $\omega_h(\tilde{E})$ değeri önceden verilen ω_0 ile karşılaştırılabilir. Eğer $\max |\omega_h(\tilde{E}) - \omega_0| < \varepsilon$ koşulu sağlanırsa işlemler durdurulur.

VI. Eğer $\omega_h(\tilde{E}) > \omega_0$ ise, $A_k = A_{k+1}$, $A_{k-1} = A_{k-1}$ alınır.

Eğer $\omega_h(\tilde{E}) < \omega_0$ ise, $A_k = A_k$, $A_{k-1} = A_{k+1}$ olarak ele alınır.

III-VI adımları $\max |\omega_h(\tilde{E}) - \omega_0| < \varepsilon$ sağlanana kadar tekrarlanır.

Bu bölümde, sınırlarında sert kenetlenme ve menteşe sınır koşulları verildiği durumlar için başlangıç verilerinden yararlanarak E Elastisite modülünün bulunması için ikiye bölme yöntemi ve hızlandırma parametresi kullanılarak çözüme yaklaşma hızları incelendi. Bunun için Şekil 8.1'deki gibi kenarları $\ell_1 = \ell_2 = 10$ [cm] olmak üzere $\bar{\Omega} = \{x = (x_1, x_2) | 0 \leq x_1 \leq \ell_1, 0 \leq x_2 \leq \ell_2\}$ kare bölgesini dolduran, kalınlığı $h = 0,3$ [cm] olan esnek levhalar sisteminin belirlediği bölgede kafesin boyutu $N_{x_1} \times N_{x_2} = 31 \times 31$ olarak ele alındı.



Şekil 8.1. $\bar{\Omega}$ kare bölgesini dolduran levhalar sistemi

Çözüm aralığını bulmak için kullanılan adım $\delta_E = 645$, $\varepsilon = 0,0001$ kesinliği, demir ve bakır levhalar için Elastisite modülleri sırasıyla $E_{Fe} = 30000$ [kN/cm²] ve $E_{Cu} = 18100$ [kN/cm²], Poisson sabitleri ise sırasıyla, $\nu_{Fe} = 0,27$ ve $\nu_{Cu} = 0,36$ olarak ele alındı. Sistemin ortasındaki 5 noktadan $q = 200$ [kN] kuvveti uygulandı.

$\alpha = \infty$, $\beta = 0$ durumu için sınırlarında sert kenetlenme sınır koşulu verildiğinde üç demir levhanın yan yana birleştirilmesiyle oluşan sistem incelendiğinde elde edilen yaklaşık \tilde{E} Elastisite modülü değerleri $\varepsilon = 10^{-4}$ kesinliğiyle, ikiye bölme yöntemiyle Tablo 8.1’de, hızlandırma parametresi kullanılarak elde edilen değerler ise Tablo 8.2’de gösterildi. Burada başlangıç verisi olarak $\omega_0 = 0,84002$ [cm] alındı.

Tablo 8.1. Üç demir levhanın yan yana koyulmasıyla oluşan sistemin sınırlarında sert kenetlenme koşulu verildiği durumda ikiye bölme yöntemiyle elde edilen çözüme karşılık aranan \tilde{E} değerleri

Adım sayısı	\tilde{E} [kN/cm ²]	ω_h [cm]
	29645	0,84784
	30290	0,83374
1.	29968	0,84073
2.	30129	0,83722
3.	30048	0,83897
4.	30008	0,83985
5.	29988	0,84029
6.	29998	0,84007

Tablo 8.1'e göre ω_0 değeri $0,83374 < \omega_0 < 0,84784$ koşulunu sağladığından bu malzeme için E- Elastisite modülünün değerinin [29645,30290] aralığında olduğu söylenebilir. Bu durumda ikiye bölme yöntemi uygulanarak 6 yaklaşımda E=29998 değeri bulunmuştur.

Tablo 8.2. Üç demir levhanın yan yana koyulmasıyla oluşan sitemin sınırlarında sert kenetlenme koşulu verildiği durumda hızlandırma parametresi kullanılarak elde edilen ω_h çözümleri, bunlara karşılık aranan \tilde{E} değerleri

Adım sayısı	\tilde{E} [kN / cm ²]	ω_h [cm]
	29645	0,84784
	30290	0,83374
1.	30003	0,83996

Tablo 8.3. Üç demir levhanın yan yana koyulmasıyla oluşan sitemin sınırlarında sert kenetlenme koşulu verildiği durumda hızlandırma parametresi kullanılarak \tilde{E} değerleri için kullanılan iterasyonlar

				Aralık	1. iterasyon
E_{k-1}	28355	29000	29645	29645	29645
\tilde{E}					30003
E_k				30290	30290

Yukarıdaki tablolardan görüldüğü gibi, $E_1 = 28355$ [kN / cm²] ve $\delta_E = 645$ ele alınarak $E_4 = 29645$ [kN / cm²], $E_5 = 30290$ [kN / cm²] bulunduktan sonra hızlandırma parametresinden yararlanarak 1 adımda $\tilde{E} = 30003$ [kN / cm²] elde edilmiştir (Tablo 8.2-Tablo 8.3).

Şimdi de benzer inceleme, üç demir levhanın yan yana birleşmesiyle oluşan sistemde, sınırlarında menteşe koşulu verildiği durum için incelediğinde elde edilen yaklaşık \tilde{E} değerleri $\varepsilon = 10^{-4}$ kesinliğiyle, ikiye bölme yöntemi ile Tablo 8.4'de, hızlandırma parametresi kullanılarak elde edilen değerler ise Tablo 8.5'de gösterildi. Burada başlangıç verisi olarak $\omega_0 = 1,76098$ [cm] alındı.

Tablo 8.4. Üç demir levhanın yan yana koyulmasıyla oluşan sistemin sınırlarında menteşe sınır koşulu verildiği durumda ikiye bölme yöntemiyle elde edilen çözüme karşılık aranan \tilde{E} değerleri

Adım sayısı	\tilde{E} [kN/cm ²]	ω_h [cm]
	29645	1,77736
	30290	1,74788
1.	29968	1,76247
2.	30129	1,75514
3.	30048	1,75879
4.	30008	1,76063
5.	29988	1,76155
6.	29998	1,76109
7.	30003	1,76086

Tablo 8.5. Üç demir levhanın yan yana koyulmasıyla oluşan sistemin sınırlarında menteşe sınır koşulu verildiği durumda hızlandırma parametresi kullanarak elde edilen ω_h çözümleri ve bunlara karşılık aranan \tilde{E} değerleri

Adım sayısı	\tilde{E} [kN/cm ²]	ω_h [cm]
	29645	1,77736
	30290	1,74788
1.	30003	1,76084

$\delta_E = 645$ ele alınarak Elastisite modülünün bulunduğu aralık belirlendikten sonra hızlandırma parametresinden yararlanarak 1 iterasyonla $\tilde{E} = 30003$ [kN/cm²] elde edilmiştir.

Tablo 8.4 ve Tablo 8.5'ten de görüldüğü gibi $\varepsilon = 10^{-4}$ kesinliğiyle ikiye bölme yöntemiyle 7 adımda sonuca ulaşılırken, hızlandırma parametresi kullanıldığında sonuca 1 adımda ulaşılır. Buradan da her iki sınır koşulu için de başlangıç verilerinden yararlanarak \tilde{E} Elastisite modülünün bulunması için hızlandırma parametresi kullanımının daha hızlı olduğu Tablo 8.1-Tablo 8.5'den görülür.

Şimdi, sistemi oluşturan levhalardan kenardaki iki levha demir ve ortadaki levha ise bakır olarak alınsın. $\alpha = \infty, \beta = 0$ durumunda sınırlarda sert kenetlenme koşulu verildiğinde, başlangıç verisi olarak $\omega_0 = 1,17962$ [cm] ve $\varepsilon = 10^{-3}$ alınarak \tilde{E} değerleri hızlandırma parametresi yardımıyla elde edildi ve Tablo 8.6'da gösterildi.

Tablo 8.6. İki kenarında demir ve ortasında bakır levha olacak şekilde üç levhanın yan yana konulmasıyla oluşan sistemin sınırlarında sert kenetlenme koşulu verildiği durumda hızlandırma parametresi kullanılarak elde edilen ω_h çözümleri ve bunlara karşılık aranan \tilde{E} değerleri

Adım sayısı	\tilde{E} [kN / cm ²]	ω_h [cm]
	18000	1,18456
	18645	1,15347
1.	18103	1,17950

Tablo 8.7. İki kenarında demir ve ortasında bakır levha olacak şekilde üç levhanın yan yana konulmasıyla oluşan sistemin sert kenetlenme koşulu verildiği durumda hızlandırma parametresi kullanılarak \tilde{E} değerleri için kullanılan iterasyonlar

			Aralık	1. iterasyon
E_{k-1}	17355	18000	18000	18000
\tilde{E}				18103
E_k			18645	18645

$\delta_E = 645$ adımıyla \tilde{E} değerinin $E_{k-1} = 18000$ [kN / cm²] ve $E_k = 18645$ [kN / cm²] değerleri arasında olduğu belirlendikten sonra hızlandırma parametresi kullanılarak 1 adımda $\tilde{E} = 18103$ [kN / cm²] elde edilmiştir.

Benzer işlemler sınırlarında menteşe koşulu verildiği durum için de yapılabilir.

Son olarak yine $\alpha = \infty$, $\beta = 0$ durumu için sırasıyla ω_0 başlangıç verisinin %3 ve %5 hatalı olarak verildiği varsayılarak, \tilde{E} değerinin bulunmasını nasıl etkilediği incelendi ve Tablo 8.8 oluşturuldu.

Tablo 8.8. İki kenarında demir ve ortasında bakır levha olacak şekilde üç levhanın yan yana konulmasıyla oluşan sistemin sert kenetlenme koşulu verildiği durumda hızlandırma parametresi kullanılarak hatalı verilen başlangıç verisinin sonuca etkisi

	ω_0 [cm]	%3 hata ile verilen ω_0 [cm]	%5 hata ile verilen ω_0 [cm]
	1,17962	1,21501	1,2386
\tilde{E} [kN / cm ²]	18103	17407	16969

Tablo 8.8'e göre \tilde{E} değeri, ω_0 başlangıç verisi %3 hata ile verildiğinde %3,8; %5 hata ile verildiğinde ise %6,3 etkileniyor.

8.2. Sert Kenetlenme Sınır Koşulları Verilmiş Üç Levhadan Oluşan Sistemin Eğilmesi Probleminde Başlangıç Verilerinden Yararlanılarak Levhaların Boyutlarının Bulunması

Elastik üç levhanın yan yana konulmasıyla elde edilen sistemin eğilmesi ile ilgili sistemin sınırlarında sert kenetlenme sınır koşulu verildiği durumda sayısal çözümünün analizi için bilgisayar deneyleri yapıldı ve incelendi (Şekil 8.1).

Başlangıç verilerinden yararlanarak, sistemde istenilen eğilmeye karşılık ortadaki levhanın boyutlarının belirlenmesi için, ikiye bölme yöntemi ve hızlandırma parametresi kullanılmış ve yaklaşma hızları incelenmiştir.

Başlangıç verisi olarak daha önceden bilinen bir q kuvvetinin etkisi ile levhalar sisteminde oluşan maksimal ω_0 eğilme değerinden yararlanarak ortadaki levhanın uzunluğu, levhayı oluşturan malzemenin mekanik özellikleri göz önüne alınarak ikiye bölme yönteminin yardımı ile bulunabilir.

Uygulanan yöntemin algoritması aşağıdaki şekilde yazılabilir.

İlk olarak sistemi oluşturan levhalardan sağ ve soldaki levhaların uzunluklarının eşit ve ortadaki levhanın uzunluğu da $c = c_0$ olarak verildi. q kuvvetinin etkisiyle c_0 uzunluğundaki levhanın yüzeyinde oluşan maksimum eğilme olan $\omega_h(c_0)$ bulunur. Daha sonra ise aynı kuvvetin etkisi altında olan sistemin eğilmesi göz önüne alınarak, önceden belli olan ω_0 ve sayısal olarak bulunan $\omega_h(c_0)$ maksimum eğilmeleri karşılaştırılır.

I. (a) Eğer $\omega_h(c_0) > \omega_0$ ise $c_1 = c_0 + \delta_c$

(b) Eğer $\omega_h(c_0) < \omega_0$ ise $c_1 = c_0 - \delta_c$

alınarak problem çözülür ve elde edilen $\omega_h(c_1)$ ile ω_0 kıyaslanır.

II. İlk adımdaki işlemler ω_0 eğilme değeri, ardışık olarak bulunan c_{k-1} ve c_k uzunluklarına karşılık gelen $\omega_h(c_{k-1})$ ve $\omega_h(c_k)$ maksimum eğilmeleri arasında

kalana kadar devam ettirilir. Sonuçta $\omega_h(c_{k-1}) < \omega_0 < \omega_h(c_k)$ veya $\omega_h(c_k) < \omega_0 < \omega_h(c_{k-1})$ koşullarından biri sağlanacaktır.

III. Bu adımda son olarak bulunan c_{k-1} ve c_k değerlerinden yararlanarak elde edilen $\tilde{c} = (c_{k-1} + c_k) / 2$ uzunluğuna karşılık gelen $\omega_h(\tilde{c})$ değeri bulunur. Eğer $\max|\omega_h(\tilde{c}) - \omega_0| \leq \varepsilon$ koşulu sağlanıyorsa, c olarak \tilde{c} ele alınır.

IV. Eğer $\max|\omega_h(\tilde{c}) - \omega_0| \leq \varepsilon$ koşulu sağlanmıyorsa, o halde:

$\omega_h(\tilde{c}) > \omega_0$ olduğu durumda $c_{k-1} = c_{k-1}$ ve $c_k = \tilde{c}$;

$\omega_h(\tilde{c}) < \omega_0$ olduğu durumda $c_{k-1} = \tilde{c}$ ve $c_k = c_k$

olarak ele alınır. III. ve IV. adımdaki işlemler $\max|\omega_h(\tilde{c}) - \omega_0| < \varepsilon$ koşulu sağlanana kadar tekrarlanır.

Problemin çözümü için bir önceki alt bölümde geliştirilmiş olan hızlandırma parametresinden yararlanıldı. Geliştirilmiş olan bu yöntemde önce ikiye bölme yönteminde verilmiş olan yukarıdaki I. ve II. adımlar uygulanarak ortadaki levhanın uzunluğunun c değeri için $c_{k-1} < c < c_k$ veya $c_k < c < c_{k-1}$ eşitsizliklerinden biri sağlattırılır. c değerini daha hızlı şekilde bulmak için, $A_{k-1} = \omega_0 - \omega_h(c_{k-1})$ ve $A_k = \omega_0 - \omega_h(c_k)$ alınarak, yukarıdaki ardışık işlemler yapılır.

IV. Gerçek c değeri $(k-1)$ -inci ve k -yüncü yaklaşımlara karşılık gelen c_{k-1} ve c_k değerlerinin arasında olduğu için c değerinin $(k+1)$ -inci yaklaşımı, $\tilde{c} = \gamma c_{k-1} + (1-\gamma) c_k$ şeklinde hesaplanabilir.

V. \tilde{c} değerinden yararlanılarak bulunan $\omega_h(\tilde{c})$ değeri önden verilen ω_0 ile karşılaştırılabilir. Eğer $\max|\omega_h(\tilde{c}) - \omega_0| < \varepsilon$ koşulu sağlanırsa işlemler durdurulur.

VI. Eğer $\omega_h(\tilde{c}) > \omega_0$ ise, $A_k = A_{k+1}$, $A_{k-1} = A_{k-1}$ alınır.

Eğer $\omega_h(\tilde{c}) < \omega_0$ ise, $A_k = A_k$, $A_{k-1} = A_{k+1}$ olarak ele alınır.

III-VI adımları $\max|\omega_h(\tilde{c}) - \omega_0| < \varepsilon$ sağlanana kadar tekrarlanır.

Sayısal örnek olarak önce Elastisite modülleri $E_1 = E_2 = E_3 = 21000$ [kN/cm²] ve Poisson sabitleri $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0,30$ olan levhalardan oluşan sistemin ortasındaki 5 noktadan $q = 200$ [kN] kuvveti uygulandı. Uygulanan kuvvet sonucu oluşan eğilmeler incelendi. Sınırlarında sert kenetlenme koşulu verilen sistemi oluşturan levhaların birlikte hareket edebilmesi için uyum koşullarındaki negatif olmayan α ve β sabitlerinin aldığı değerlere göre ortadaki levhanın uzunluğunun bulunması incelendi. Bunun için ω_0 başlangıç verilerinden yararlanarak, $\varepsilon = 10^{-3}$ kesinliğiyle, ikiye bölme yöntemiyle elde edilen yaklaşık \tilde{c} uzunluk değerleri ve ω_h çözümleri Tablo 8.9'da gösterildi.

Tablo 8.9. Sınırlarında sert kenetlenme koşulu verilen sisteminde ikiye bölme yöntemi kullanılarak elde edilen ω_h çözümleri, bunlara karşılık aranan c uzunluk değerleri

c [cm]		ω_h [cm]			
		$\alpha = \infty, \beta = \infty$ $\omega_0 = 0.1055$ [cm]	$\alpha = \infty, \beta = 0$ $\omega_0 = 1.0211$ [cm]	$\alpha = 0, \beta = 0$ $\omega_0 = 1.1225$ [cm]	$\alpha = 0, \beta = \infty$ $\omega_0 = 0.2373$ [cm]
c_0	2,8	0,1339	1,1744	1,2653	0,2981
c_1	4	0,0760	0,8213	0,9286	0,1729
c_2	3,4	0,1022	1,0014	1,1038	0,2303
c_3	3,1	0,1774	1,0892	1,1865	0,2629
c_4	3,25	0,1096	1,0456	1,1456	0,2463
c_5	3,325	0,1059	1,0236	1,1248	0,2382
c_6	3,3625		1,0125	1,1143	
c_7	3,3438		1,0181	1,1195	
c_8	3,3344		1,0208	1,1222	

$\varepsilon = 10^{-3}$ olduğunda $\alpha = \infty, \beta = \infty$ ve $\alpha = 0, \beta = \infty$ durumları için çözüm aralığı belirlendikten sonra 4 adımda %0,25 hata ile, $\alpha = \infty, \beta = 0$ ve $\alpha = 0, \beta = 0$ durumları için ise 7 adımda %0,033 hata ile istenilen c uzunluk değeri elde edildi.

Şimdi ise, sınırlarda sert kenetlenme koşulu verilen sistemi oluşturan levhalardan kenarlardakileri aynı, ortadakinin ise farklı özellikte olduğu durumda yine α ve β 'nın farklı değerlerine karşılık bir önceki duruma benzer incelemeler yapıldı. Bunun için ilk olarak sistemi oluşturan levhalardan kenardaki levhalar demir, ortadaki levhayı ise bakır olarak ele alındı. Yine sistemin ortasındaki 5 noktadan $q = 200$ [kN] kuvveti uygulandı. İkiye bölme yöntemi kullanılarak elde edilen ω_h çözümleri ve bunlara karşılık aranan c değerleri Tablo 8.10'da gösterildi.

Tablo 8.10. α ve β 'nın farklı değerleri için $E_1 = E_3 = 30000$ [kN/cm²], $E_2 = 18100$ [kN/cm²], $v_1 = v_3 = 0,27$, $v_2 = 0,36$ verilerinden yararlanarak ikiye bölme yöntemi kullanıldığında elde edilen ω_h çözümleri ve c boyutları

c [cm]		ω_h [cm]				
		$\alpha = \infty, \beta = \infty$ $\omega_0 = 0.1640$ [cm]	$\alpha = \infty, \beta = 0$ $\omega_0 = 0.7126$ [cm]	$\alpha = 0, \beta = 0$ $\omega_0 = 0.7931$ [cm]	$\alpha = 0, \beta = \infty$ $\omega_0 = 0.2633$ [cm]	$\alpha = 0, \beta = 100$ $\omega_0 = 0.3358$ [cm]
c_0	2	0,2857	1,0224	1,0797	0,4486	0,5249
c_1	6	0,0333	0,1818	0,2277	0,0550	0,1045
c_2	4	0,1186	0,5582	0,6417	0,1918	0,2606
c_3	3	0,1905	0,7909	0,8673	0,3044	0,3783
c_4	3,5	0,1518	0,6735	0,7556	0,2441	0,3158
c_5	3,25	0,1704	0,7322	0,8118	0,2733	0,3461
c_6	3,375	0,1609	0,7028	0,7838	0,2585	0,3307
c_7	3,3125	0,1656	0,7175	0,7978	0,2658	0,3384
c_8	3,3438	0,1633	0,7101	0,7908	0,2621	0,3345
c_9	3,3282		0,7138	0,7943	0,2639	0,3365
c_{10}	3,336		0,7119	0,7925		

İlk durumda ortadaki levha kenarlardaki levhalara göre daha yumuşak alınmıştı. Şimdi ise, ortadaki levha kenarlardaki levhalara göre daha sert alındı. İki kenarında bakır ve ortasında demir levha olacak şekilde üç levhanın yan yana konulmasıyla oluşan sistemin sınırlarında sert kenetlenme koşulu verildiği durumda başlangıç koşullarından yararlanarak ve ikiye bölme yöntemi kullanılarak elde edilen ω_h çözümleri ve bunlara karşılık aranan c değerleri Tablo 8.11'de gösterildi.

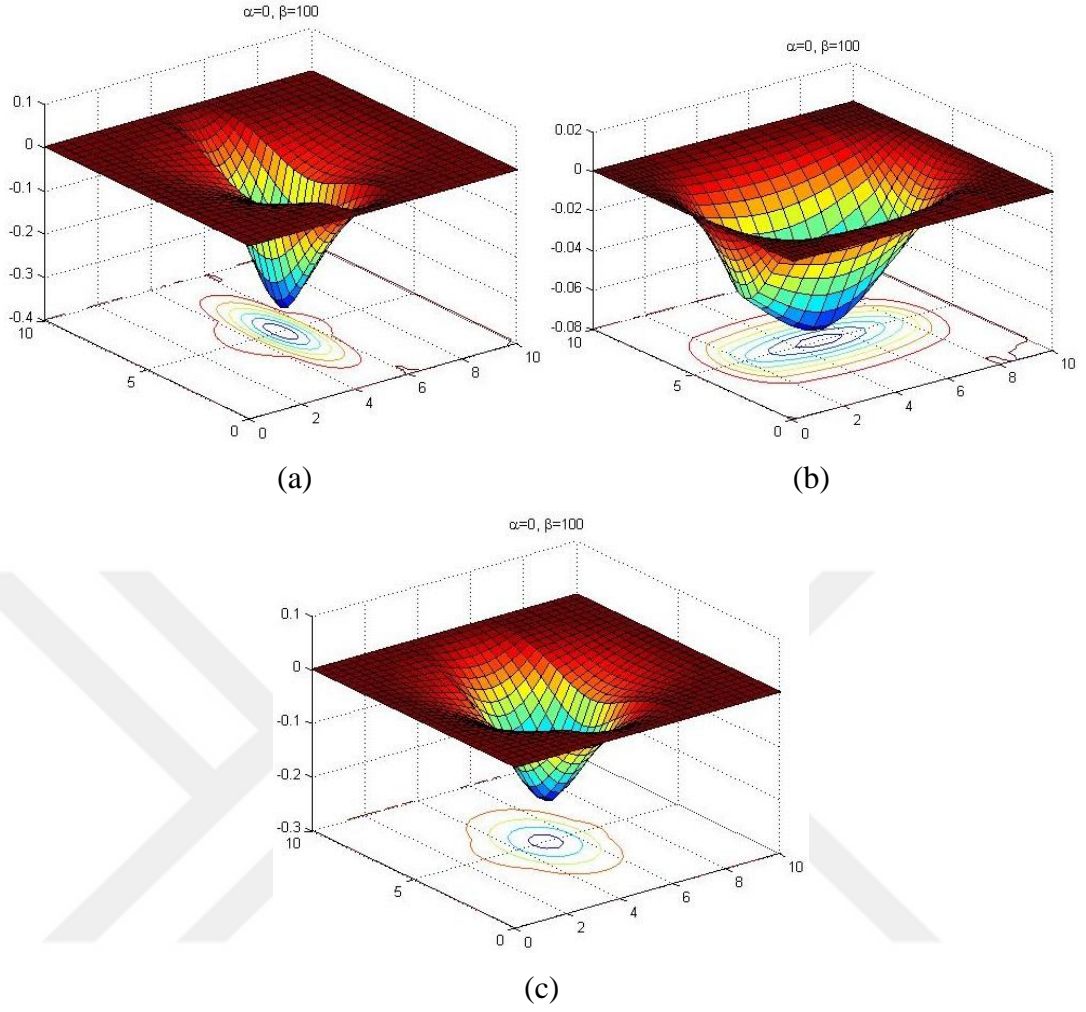
Tablo 8.11. α ve β 'nın farklı değerleri için $E_1 = E_3 = 18100$ [kN/cm²], $E_2 = 30000$ [kN/cm²], $\nu_1 = \nu_3 = 0,36$, $\nu_2 = 0,27$ verilerinden yararlanarak ikiye bölme yöntemi kullanıldığında elde edilen ω_h çözümleri ve c boyutları

c [cm]		ω_h [cm]				
		$\alpha = \infty, \beta = \infty$ $\omega_0 = 0.1155$ [cm]	$\alpha = \infty, \beta = 0$ $\omega_0 = 0.4965$ [cm]	$\alpha = 0, \beta = 0$ $\omega_0 = 0.5882$ [cm]	$\alpha = 0, \beta = \infty$ $\omega_0 = 0.1693$ [cm]	$\alpha = 0, \beta = 100$ $\omega_0 = 0.2246$ [cm]
c_0	2	0,2005	0,7001	0,7683	0,2885	0,3459
c_1	6	0,0236	0,1311	0,1872	0,0354	0,0747
c_2	4	0,0836	0,3926	0,4879	0,1233	0,1764
c_3	3	0,1341	0,5486	0,6359	0,1957	0,2520
c_4	3,5	0,1069	0,4704	0,5637	0,1570	0,2119
c_5	3,25	0,1200	0,5095	0,6003	0,1757	0,2314
c_6	3,375	0,1133	0,4900	0,5821	0,1662	0,2215
c_7	3,3125	0,1167	0,4998	0,5912	0,1709	0,2264
c_8	3,3438	0,1150	0,4949	0,5867		0,2240
c_9	3,3282		0,4973	0,5889		

$\varepsilon = 10^{-3}$ kesinliği ile, $\alpha = \infty, \beta = \infty$ ve $\alpha = 0, \beta = 100$ olduğu durumlarda çözümler aralığı belirlendikten sonra 7 adımda %0,32 hata ile, $\alpha = \infty, \beta = 0$ ve $\alpha = 0, \beta = 0$ olduğu durumlarda 8 adımda %0,15 hata ile, $\alpha = 0, \beta = \infty$ olduğu durumda ise 6 adımda %0,62 hata ile istenilen c uzunluk değeri hesaplandı.

Daha sonra levhalar sisteminde ortadaki levhanın uzunluğunun hızlandırma parametresinden yararlanarak bulunması incelenir. Bunun için $\alpha = 0, \beta = 100$ olduğu durum ele alınır.

a) Elastisite modülleri sırasıyla $E_1 = E_3 = 18100$ [kN/cm²], $E_2 = 30000$ [kN/cm²] ve Poisson sabitleri de $\nu_1 = \nu_3 = 0,36$, $\nu_2 = 0,27$ olan üç levhanın oluşturduğu sistemin eğilmesi probleminde kenarlardaki levhaların uzunlukları eşit olmak şartı ile önceden verilen $\omega_0 = 0,2246$ [cm] değerine karşılık ortadaki levhanın uzunluğunun bulunmasından elde edilen veriler Tablo 8.11'de verilmiştii. Sistemde oluşan eğilmeler Şekil 8.2'de gösterildi. Daha sonra aynı durum için hızlandırma parametresi yardımıyla $\varepsilon = 10^{-3}$ kesinliğiyle Tablo 8.12'de $\delta_c = 0,5$ adım alınarak istenilen c uzunluk değeri ve bunlara karşılık gelen ω_h eğilmeleri hesaplandı.



Şekil 8.2. $\alpha = 0, \beta = 100$ olduğunda, (a) $c_0 = 2$ [cm], (b) $c_1 = 6$ [cm], (c) $c_8 = 3,3438$ [cm] için sistemdeki eğilmeler

Tablo 8.12. (a) durumu için $\delta_c = 0,5$ adımla $\varepsilon = 10^{-3}$ kesinliğiyle hızlandırma parametresinden yararlanılarak elde edilen sonuçlar

γ	c [cm]	ω_h [cm]	$\omega_0 - \omega_h$	$\omega_k - \omega_{k-1}$
	2	0,3459	-0,1213 < 0	
	2,5	0,2967	-0,0721 < 0	
	3	0,2520	-0,0274 < 0	
	3,5	0,2119	0,0131 > 0	
0,3212	3,3394	0,2243		0,0003 < ε

Tablo 8.12’de $\delta_c = 0,5$ adımla ortadaki levhanın uzunluğunun çözüm aralığı bulunduktan sonra hızlandırma parametresi yardımıyla $\varepsilon = 10^{-3}$ kesinliğiyle tek adımda %0,18 hata ile istenilen c uzunluk değeri hesaplandı.

Tablo 8.13. (a) durumu için $\delta_c = 0,5$ adımla $\varepsilon = 10^{-4}$ kesinliğiyle hızlandırma parametresinden yararlanılarak elde edilen sonuçlar

γ	c [cm]	ω_h [cm]	$\omega_0 - \omega_h$	$\omega_k - \omega_{k-1}$
	2	0,34592	-0,12136<0	
	2,5	0,29672	-0,07216<0	
	3	0,25203	-0,02747<0	
	3,5	0,21192	0,01264>0	
0,31523	3,34239	0,22406		$ 0,0005 > \varepsilon$
0,04077	3,32843	0,22516		$ -0,0006 > \varepsilon$
0,54886	3,33473	0,22467		$ -0,00011 > \varepsilon$
0,21550	3,34074	0,22419		$ 0,00037 > \varepsilon$
0,77388	3,33608	0,224559		$ 0,000001 < \varepsilon$

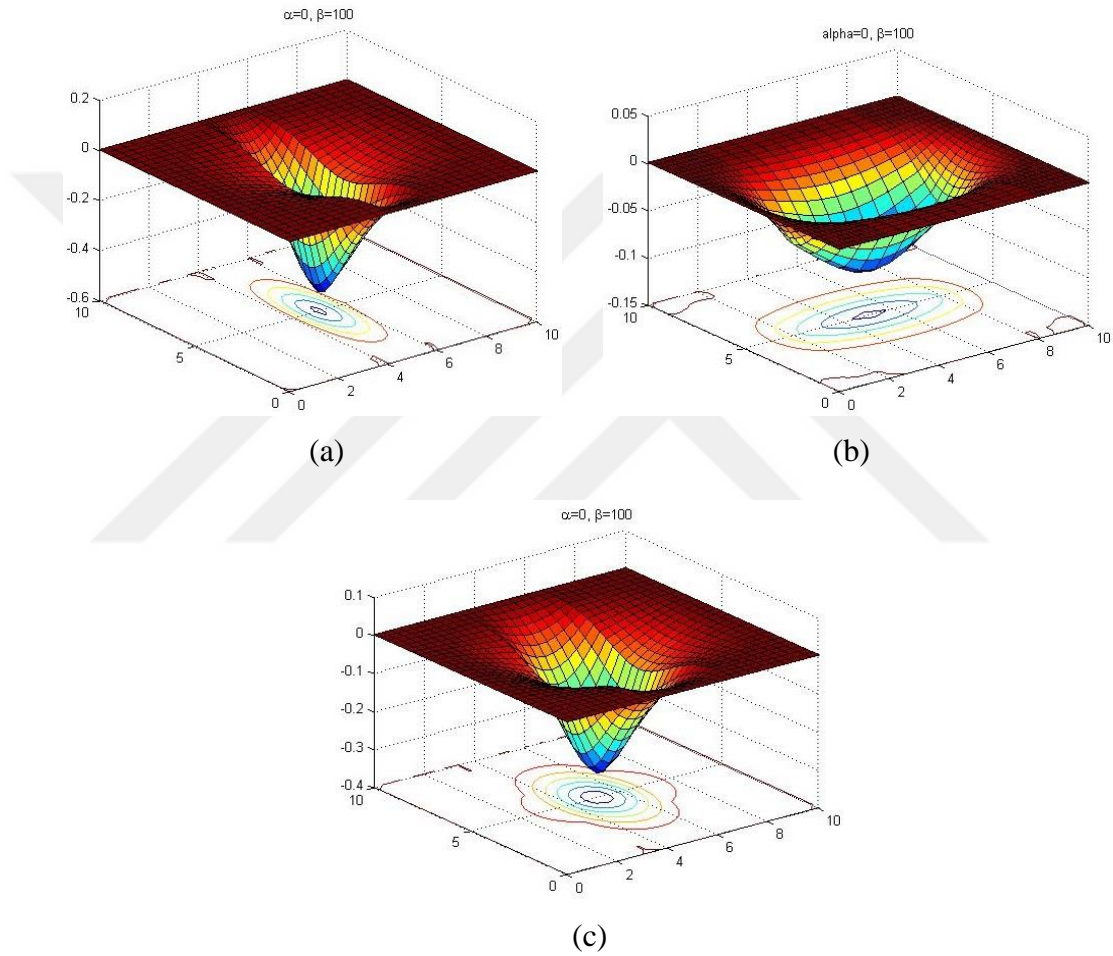
Tablo 8.13'te ise, yine aynı sistem için $\delta_c = 0,5$ adımla çözümü içeren aralık bulunduktan sonra $\varepsilon = 10^{-4}$ kesinliğiyle hızlandırma parametresinden yararlanarak ortadaki levhanın $\omega_0 = 0,22456$ [cm] eğilme değerine karşılık gelen uzunluk, 5 adımda %0,081 hata ile bulundu. İkiye bölme yöntemi kullanılarak $\varepsilon = 10^{-3}$ kesinliğiyle Tablo 8.12'de 7 adımda %0,32 hata ile bulunmuştu.

Tablo 8.14. (a) durumu için $\delta_c = 0,3$ adımla $\varepsilon = 10^{-4}$ kesinliğiyle hızlandırma parametresinden yararlanılarak elde edilen sonuçlar

γ	c [cm]	ω_h [cm]	$\omega_0 - \omega_h$	$\omega_k - \omega_{k-1}$
	2	0,34592	-0,12136<0	
	2,3	0,31587	-0,09131<0	
	2,6	0,28742	-0,06286<0	
	2,9	0,26060	-0,03604<0	
	3,2	0,23543	-0,01087<0	
	3,5	0,21192	0,01264>0	
0,53769	3,33869	0,22435		$ 0,00021 > \varepsilon$
0,01649	3,33641	0,22453		$ 0,00003 < \varepsilon$

Tablo 8.14'te ise $\delta_c = 0,3$ olarak yine $\varepsilon = 10^{-4}$ kesinliğiyle hızlandırma parametresi kullanarak 2 adımda %0,092 hata ile $\omega_0 = 0,22456$ [cm] eğilmesine karşılık gelen c uzunluk değeri hesaplandı. Tablo 8.13 ve Tablo 8.14 karşılaştırılırsa, daha küçük adımlarla çözümün bulunduğu aralık daha çok daraltıldığından, yani δ_c adımı küçüldükçe, çözüme daha hızlı yaklaşıldığı görülür.

b) Elastisite modülleri sırasıyla $E_1 = E_3 = 30000 \text{ [kN/cm}^2\text{]}$, $E_2 = 18100 \text{ [kN/cm}^2\text{]}$ ve Poisson sabitleri de $\nu_1 = \nu_3 = 0,27$, $\nu_2 = 0,36$ olan üç levhanın oluşturduğu sistemin eğilmesi probleminde kenarlardaki levhaların uzunlukları eşit olmak şartı ile önceden verilen $\omega_0 = 0,33583 \text{ [cm]}$ değerine karşılık ortadaki levhanın uzunluğunun bulunmasında ikiye bölme yöntemiyle elde edilen veriler Tablo 8.10'da verilmişti. Sistemde oluşan eğilmeler Şekil 8.3'de gösterildi.



Şekil 8.3. $\alpha = 0$, $\beta = 100$ olduğunda, (a) $c_0 = 2 \text{ [cm]}$, (b) $c_1 = 6 \text{ [cm]}$, (c) $c_9 = 3,3282 \text{ [cm]}$ için sistemdeki eğilmeler

Şimdi ise aynı durum hızlandırma parametresi yardımıyla $\varepsilon = 10^{-4}$ kesinliğiyle Tablo 8.15'te $\delta_c = 0,5$ adım ve Tablo 8.16'da $\delta_c = 0,3$ adım alınarak istenilen c uzunluk değeri ve bunlara karşılık gelen ω_h eğilmeleri hesaplandı.

Tablo 8.15. (b) durumu için $\delta_c = 0,5$ adımla $\varepsilon = 10^{-4}$ kesinliğiyle hızlandırma parametresinden yararlanılarak elde edilen sonuçlar

γ	c [cm]	ω_h [cm]	$\omega_0 - \omega_h$	$\omega_k - \omega_{k-1}$
	2	0,52485	-0,18902<0	
	2,5	0,44800	-0,11217<0	
	3	0,37827	-0,04244<0	
	3,5	0,31582	0,02001>0	
0,32042	3,33979	0,33504		$ 0,00079 > \varepsilon$
0,04127	3,32577	0,33675		$ -0,00092 > \varepsilon$
0,53826	3,33224	0,33596		$ -0,00013 > \varepsilon$
0,16465	3,33854	0,33519		$ 0,00064 > \varepsilon$
0,83065	3,33331	0,335829		$ 0,000001 < \varepsilon$

Tablo 8.15'te $\delta_c = 0,5$ adımla ortadaki levhanın uzunluğunun çözüm aralığı bulunduktan sonra hızlandırma parametresi yardımıyla $\varepsilon = 10^{-4}$ kesinliğiyle 5 adımda %0,0006 hata ile istenilen c uzunluk değeri hesaplandı.

Tablo 8.16. (b) durumu için $\delta_c = 0,3$ adımla $\varepsilon = 10^{-4}$ kesinliğiyle hızlandırma parametresinden yararlanılarak elde edilen sonuçlar

γ	c [cm]	ω_h [cm]	$\omega_0 - \omega_h$	$\omega_k - \omega_{k-1}$
	2	0,52486	-0,18903<0	
	2,3	0,47790	-0,14207<0	
	2,6	0,43347	-0,09764<0	
	2,9	0,39164	-0,05581<0	
	3,2	0,35242	-0,01659<0	
	3,5	0,31582	0,02001>0	
0,54680	3,33596	0,33551		$ 0,00032 > \varepsilon$
0,01649	3,3340	0,33578		$ 0,00005 < \varepsilon$

Tablo 8.16'da ise, $\delta_c = 0,3$ adımla $\omega_0 = 0,33583$ [cm] değerine karşılık ortadaki levhanın uzunluğunun çözüm aralığı bulunduktan sonra hızlandırma parametresi yardımıyla $\varepsilon = 10^{-4}$ kesinliğiyle 2 adımda %0,02 hata ile istenilen c uzunluk değeri hesaplandı. Yine Tablo 8.15 ve Tablo 8.16 kıyaslanırsa yukarıdakine benzer şekilde δ_c adımı küçüldükçe, çözüme daha hızlı yaklaşıldığı görülür.

9. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Tez, yapısı itibarıyla, mühendislik, malzeme ve matematik bilimlerine dayalı olup, literatürde bilinen, güncel bir bilimsel ve teknolojik problemin çözümünü hedeflemektedir. Literatürde genel olarak farklı özellikli levhaların oluşturduğu katmanlı (kompozit) levhaların eğilmesi problemi incelenmektedir. Farklı özellikli levhaların yan yana birleştirildiği durumda, problemin matematiksel modeli süresiz katsayılı biharmonik denklemler ile ifade edilmektedir. Bu tür problemlerin sayısal çözümünün klasik sonlu farklar yöntemi ile bulunması imkansızdır. Tezin temel hedefi, levhaların yan yana birleştirilmesiyle oluşturulan sistemde levhaların ortak sınırında süreklilik açısından uyum koşullarının ve bu koşullara karşılık ayrıık denklemlerin elde edilmesi için bir sayısal yaklaşımın verilmesidir. Bu amaçla iki boyutlu durum olan levhalar sistemi için uyum koşulları ve onların sonlu fark ifadelerini elde etmeden önce basitlik açısından bir boyutlu durumda miller sisteminin matematiksel modeli olan dördüncü mertebeden adi diferansiyel denklem için uyum koşulları ve onların sonlu fark ifadeleri elde edildi. Daha sonra, 4. mertebeden biharmonik denklemler için uyum koşullarının sonlu fark yaklaşımı fonksiyonelin yaklaşımı yöntemi ile elde edildi. Elde edilen enerji fonksiyonelinde türevlerin yerine onların sonlu fark yaklaşımları yazıldıktan sonra, integraller yaklaşık integralleme formüllerinin yardımı ile hesaplandı. Sırasıyla, farklı özelliklerdeki millerin ve levhaların oluşturduğu sistemlerin farklı sınır koşullarında dış kuvvetlerin etkisiyle eğilmesi probleminin sayısal çözümü için bilgisayar programı hazırlandı. İki boyutlu durum için hazırlanan programın doğruluğunu test etmek amacıyla özel test fonksiyonu seçilerek sayısal çözümün hata analizi yapıldı. Programın doğruluğu test edildikten sonra problemin sayısal sonuçları için mümkün olabilir tüm uyum koşulları için bilgisayar deneyleri yapıldı ve incelendi. Daha sonra iki boyutlu durum için hazırlanan algoritma geliştirilerek farklı özelliklerde üç levhadan oluşan sistemin eğilmesi problemi için güncellendi. Başlangıç verilerinden yararlanarak, ele alınan sistemde sistemi etkileyen kuvvet ve maksimal eğilme arasındaki ilişkiden yararlanarak sistemi oluşturan levhaların özelliklerinin bulunmasında ikiye bölme yöntemi ve geliştirilmiş olan hızlandırma parametresi

kullanımları ile elde edilen sonuçların yaklaşım hızları karşılaştırıldı. Elde edilen sayısal sonuçlar tablolar ve grafiklerle gösterildi.

Elde edilen sonuçlar, sert cisim mekaniğinde malzeme özellikleri ve yer değiştirmeler arasındaki bağıntıların karakteri incelendiği zaman, araştırmacılara yardımcı olabilir. Aynı zamanda, sunulan yöntem malzeme dijonastiği problemlerinde, yani başlangıç verilerinden yararlanılarak malzemenin elasto-plastik özelliklerinin bulunması problemlerinde uygulanabilir. Sunulan algoritma, benzer karakterli problemlerde sayısal sonuçların hızlı şekilde elde etme tekniğini vermektedir.



KAYNAKLAR

- [1] Galilei G., *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, Intorno à Due Nuoue Scienze Attenenti Alla Mecanica & I Movimenti Locali*, L. Elzevir, Leiden, 1638.
- [2] Todhunter I., Pearson K., *A History of The Theory of Elasticity and of The Strenght of Materials*, Cambridge: at The University, London, 1886.
- [3] Timoshenko S., Goodier J. N., *Theory of Elasticity*, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1951.
- [4] Denavit J., Hartenberg R.S., A Kinematic Motion for Lower Pair Mechanisms Based on Matrices, *Journal of Applied Mechanics*, 1955, **22**, 215-221.
- [5] Uicker J.J., *On the Dynamic Analysis of Spatial Linkages Using 4 by 4 Matrices*, Northwestern University, Evanston, 1965.
- [6] Hooker W.W., Margulies G., The Dynamical Attitude Equations for n -Body Satellite, *J. On Astronomical Science*, 1965, **12**, 123-128.
- [7] Vukobratovic M., Frank A.A., Juricic D., On the Stability of Biped Locomotion, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering BME*, 1970, **17**, 25-36.
- [8] Timoshenko S.P., *History of Strength of Materials*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1953.
- [9] Levy M., Memoire Sur la Theorie Des Plaques Elastiques Planes, *J. Math. Pure Appl.*, 1899, **3**, 219-306.
- [10] Krylov A.N., On Stresses Experienced by a Ship in a Sea Way, *Trans. Inst. Naval Architects*, 1898, **40**, 197–209.
- [11] Bubnov I.G., *Theory of Structures of Ships*, 2nd ed, Naval Academy Press, St. Petersburg, 1914.
- [12] Galerkin B.G., *Thin Elastic Plates*, Gostrojisdat, Moscow, 1933.
- [13] Timoshenko S.P., On Large Deflections of Circular Plates, *Mem Inst Ways Commun*, 1915, **89**,13-33.
- [14] Timoshenko S.P., Sur la Stabilite Des Systemes Elastiques, *Ann des Points et Chaussees*, 1913, **13**, 496–566; **16**, 73–132.

- [15] Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S., *Theory of Plates and Shells*, 2nd ed, McGraw-Hill, New York, 1959.
- [16] Hencky H., Über den Spannungszustand in Kreisrunden Platten mit Verschwindender Biegesteifigkeit, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 1915, **63**, 311-317.
- [17] Huber M.T., *Probleme der Static Technisch Wichtiger Orthotroper Platten*, Akademji Nauk Technicznych, Warsaw, 1929.
- [18] Von Karman T., Festigkeitsprobleme in Maschinenbau, *Encycl der Math. Wiss*, 1910, **4**, 348–351.
- [19] Von Karman T., Ef Sechler and Donnel, L.H., The Strength of Thin Plates in Compression, *Trans ASME*, 1932, **54**, 53–57.
- [20] Nadai A., *Die Elastischen Platten*, Springer-Verlag , Berlin Heidelberg, 1925.
- [21] Gehring F., *Vorlesungen über Mathematische Physik, Mechanik*, 2nd ed, B.G. Teubner, Berlin, 1877.
- [22] Boussinesq J., Complements Anne e'étude Sur la Theorie de L'équilibre et du Mouvement Des Solides Elastiques, *J de Math. Pures et Appl.*, 1879, **3(5)**, 163-194.
- [23] Lekhnitskii S.G., *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Mir, Moscow, 1981.
- [24] Volmir A.S., *Flexible Plates and Shells*, State Technics, Moscow, 1956.
- [25] Panov D.Yu., On Large Deflections of Circular Plates, *Prikl Matem Mech.*, 1941, **5**, 45–56.
- [26] Timoshenko S.P., Gere J.M., *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed, McGraw-Hill, New York, 1961.
- [27] Gerard G., Becker H., *Handbook of Structural Stability, Part I – Buckling of Flat Plates*, NACA, Washington, 1957.
- [28] Volmir A.S., *Stability of Elastic Systems*, Gos Izd-vo Fiz-Mat. Lit-ry, Moscow, 1963.
- [29] Cox H.L., *The Buckling of Plates and Shells*, Macmillan, New York, 1963.
- [30] Crouch S.L., Starfield A.M., Allen & Unwin G., *Boundary Element Methods in Solid Mechanics*, George Allen & Unwin Ltd., London, 1983.
- [31] Gallagher R.H., *Finite Element Analysis Fundamentals*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1975.

- [32] Brenner S.C., An Optimal-Order Nonconforming Multigrid Method for The Biharmonic Equation, *SIAM J. Num. Anal.*, 1989, **26**, 1124-1138.
- [33] Hasanov A., Mamedov A., An Inverse Problem Related to The Determination of Elastoplastic Properties of a Plate, *Inverse Problems*, 1994, **10**, 601-615.
- [34] Davini C., Pitacco I., An Unconstrained Mixed Method for The Biharmonic Problem, *SIAM J. Num. Anal.*, 2000, **38**, 820-836.
- [35] Voyiadjis G.Z., Deliktas B., A Coupled Anisotropic Damage Model for The Inelastic Response of Composite Materials, *Comput. Meth. Appl Mech. Eng.*, 2000, **183**, 159–199.
- [36] Zupei Y., Yao Z., A Study on Yield and Flow of Orthotropic Materials, *Appl. Math Mech.*, 1990, **11**, 247–253.
- [37] Numayr K.S., Haddad R.H., Free Vibration of Composite Plates Using The Finite Element Method, *Thin Walled Structures*, 2004, **42**, 399-414.
- [38] Belinha J., Dinis L.M.J.S., Nonlinear Analysis of Plates and Laminates Using The Element Free Galarkin Method, *Composite Structures*, 2007, **78**, 337-350.
- [39] Hasanov A., An Inverse Problem for an Elastoplastic Medium, *SIAM J. Appl. Math.*, 1995, **55**, 1736-1752.
- [40] Shi G., A New Third-Order Shear Deformation Theory of Plates, *Solids and Structures*, 2007, **44**, 4399-4417.
- [41] Ghavam K., Naghdabadi R., Hardening Materials Modeling in Finite Elastoplastic Deformation Based on The Stretch Tensor Decomposition, *Mater Design*, 2008, **29**, 161–172.
- [42] Samarskii A., Andreev V.B., *Difference Schemes for Elliptic Problems*, Nauka, Moskow, 1976.
- [43] Samarskii A., *The Theory of Difference Schemes*, CRC Press, Moscow, 2001.
- [44] Guang-yao L., Han-bin Z., A Finite Difference Method at Arbitrary Meshes for The Bending of Plates with Variable Thickness, *Applied Mathematics and Mechanics*, 1993, **14**(3), 299-304.
- [45] Hasanov A., Variational Approach to Non-Linear Boundary Value Problems for Elasto-Plastic Incompressible Bending Plate, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2007, **42**, 711-721.
- [46] Ergün A., Kumbasar, N., A New Approach of Improved Finite Difference Scheme on Plate Bending Analysis, *Scientific Research And Essays*, 2011, **6**(1), 6-17.

- [47] Reddy J.N., A Penalty Plate-Bending Element for The Analysis of Laminated Anisotropic Composite Plates, *Int J. Num. Method Eng.*, 1980, **15**, 1187-1206.
- [48] Chudinovich I., Constanda C., Boundary Integral Equations in Time-Dependent Bending of Thermoelastic Plates, *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, **339**, 1024–1043.
- [49] Cho J.R., Lee H.W., Yoo W.S., Natural Element Approximation of Reissner–Mindlin Plate for Locking Free Numerical Analysis of Plate-Like Thin Elastic Structures, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2013, **256**, 17-28.
- [50] Kvasov R., Steinberg L., Numerical Modeling of Bending of Micropolar Plates, *Thin-Walled Structures*, 2013, **69**, 67-78.
- [51] Nimbolkar V.P., Jain I.M. Cylindrical Bending of Elastic Plates, *Procedia Materials Science*, 2015, **10**, 793-802.
- [52] Shaat M., Iterative Nonlocal Elasticity for Kirchhoff Plates, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2015, **90**, 162-170.
- [53] Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N., Mathematical Simulation of Nonlinear Problem of Three-Point Composite Sample Bending Test, *Procedia Engineering*, 2016, **150**, 1056-1062.
- [54] Anssi T., Karttunen R.H., Reddy J.N., Romanoff J., Exact Elasticity-Based Finite Element for Circular Plates, *Computers and Structures*, 2017, **182**, 219-226.
- [55] Pavan G.S., Rao K.S.N., Bending Analysis of Laminated Composite Plates Using Isogeometric Collocation Method, *Composite Structures*, 2017, **176**, 715-728.
- [56] Lisbôa T.V., Marczak R.J., A Recursive Methodology for The Solution of Semi-Analytical Rectangular Anisotropic Thin Plates in Linear Bending, *Applied Mathematical Modelling*, 2017, **48**, 711-730.
- [57] Atashipour S.R., Girhammar U.A., Al-Emrani M., Exact Lévy-Type Solutions for Bending of Thick Laminated Orthotropic Plates Based on 3-D Elasticity and Shear Deformation Theories, *Composite Structures*, 2017, **163**, 129-151.
- [58] Moshaiov A.,Vorus W.S., Elasto-Plastic Plate Bending Analysis by a Roundary Element Method, *Int. J. Solids .Structures*, 1986, **22**(11), 1213-1229.
- [59] Kaliszky S., Logo J., Optimal Design of Elasto-Plastic Structures Subjected to Normal and Extreme Loads, *Computers And Structures*, 2006, **84**, 1170-1779.

- [60] Belinha J., Dinis L.M.J.S., Non-Linear Analysis of Plates and Laminates Using the Element Free Galerkin Method, *Composite Structures*, 2007, **78**, 337-350.
- [61] Ali A.H.A., Raslan K.R., Variational Iteration Method for Solving Biharmonic Equations, *Physics Letters A*, 2007, **370**, 441-448.
- [62] Thatcher R.W., A Least Square Method for Solving Biharmonic Problems, *SIAM J. Num. Anal.*, 2000, **38**, 1523-1538.
- [63] Wai-Fah C., *Structural Engineering Handbook Ed.*, CRC Press LLC, United States, 1999.
- [64] Andremeyers I.M, Chaula K.K., *Mechanical Behavior of Materials*, Prentice Hall, New Jersey, 1999.
- [65] Omurtag M.H., *Mukavemet*, 4. Baskı, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2012.
- [66] Sokolnikoff I.S., *Mathematical Theory of Elasticity*, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1956.
- [67] Tsai S.W., Mechanics of Composite Materials, part II, Theoretical Aspects, *Air Force Materials Laboratory*, AFML-TR-66-149, 1-61, 1966.
- [68] Robert M.J., *Mechanics of Composite Materials*, McGraw Hill Book Company, New York, 1975.
- [69] Hasaonoğlu A., *Varyasyonel Problemler ve Sonlu Elemanlar Yöntemi*, Literatür Yayıncılık, İstanbul, 2001.
- [70] Samarskii A., *Finite Difference Theory*, Nauka, Moscow, 1983.
- [71] Atkinson K. E., Han W., *Elementary Numerical Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., Canada, 2004.

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

- [1] **Yazıcı V.**, Muradoğlu Z., Determining the Sizes of Plates in the Plates System by Using Additional Conditions, *9 th International Conference on Image Processing, Wavelet and Applications* , Kars, Turkey, 5-8 November 2017.
- [2] **Yazıcı V.**, Muradoğlu Z., Numerical Approximation of Transmission Conditions for Biharmonic Equation with Discontinuous Coefficient on Non-Uniform Mesh, *9 th International Conference on Image Processing, Wavelet and Applications* , Kars, Turkey, 5-8 November 2017.
- [3] Muradoğlu Z., **Yazıcı V.**, Transmission Conditions for Plate System Composed of Elastic Plates with Differing Properties, *International Conference on Mathematics and Engineering* , Istanbul, Turkey, 10-12 May 2017.
- [4] **Yazıcı V.**, Muradoğlu Z., Obtaining Transmission Conditions for Fourth-Order Ordinary Differential Equations with Discontinuous Coefficients, *8 th International Conference on Image Processing, Wavelet and Applications* , Istanbul, Turkey, 22-24 September 2016.
- [5] Kodal Sevindir H., Yazici C., **Yazici V.**, Mathematics Anxiety of Secondary School Students: A Case Study for Kocaeli Area, *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 2014, **152**, 630-636.
- [6] Kodal Sevindir H., Yazici C., **Yazici V.**, Mathematics Anxiety: A Case Study for Kocaeli University, *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 2014, **152**, 637-641.
- [7] Kodal Sevindir H., Yazici C., Budak H., Meral T., **Yazici V.**, A Study on Secondary School Students' Mathematics Anxiety in Terms of Demographic Factors, *6 th International Processing and Wavelet on Real World Applications Conference*, Istanbul, Turkey, 28-29 September 2012.
- [8] **Yazıcı V.**, Muradoğlu Z., The Numerical Solution of the Problem Related to Bending of Beams System Which Is Consisted of Thin Beams with Different Properties, *Mathematical Analysis, Differential Equations And Their Applications (MADEA-2012)*, Mersin, Turkey, 04-09 September 2012.
- [9] **Yazici V.**, Biharmonik Denklem için Sınır Koşullarının Fiziksel Yorumu, *XXIII. Ulusal Matematik Sempozyumu*, Kayseri, Türkiye, 4-7 Ağustos 2010.
- [10] Muradoğlu Z., **Yazıcı V.**, The Numerical Solution of an Optimal Control Problem Related to the Transmission Bending Problem for an Elastic Plate, *5th International Conference IP:M&S*, Antalya, Turkey, 24-29 May 2010.

- [11] **Yazici V.**, Numerical Solution of the Problem Related to Elastic Bending Plate, *Proceeding of IVth International Workshop on Applications of Wavelets to Real World Problems*, Kocaeli, Turkey, 5-7 June 2009.



ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında Rize’ de doğdu. İlköğretimin ilk dört yılını Kocaeli’nde ve beşinci yılını Rize’de tamamladı. Orta ve lise öğrenimini İstanbul Küçükçekmece Fahrettin Kerim Gökay Anadolu Lisesi’nde tamamladı. 2002 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2006 yılında Matematikçi olarak mezun oldu. 2007 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı Programında başladığı Yüksek Lisans öğrenimini 2009 yılında tamamladı ve aynı yıl Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı Programında doktora öğrenimine başladı. KOÜ Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi destekli 2011/030 kodlu “Elastik Levhalar Sisteminin Eğilmesi ile İlgili Lineer Olmayan Biharmonik Denklem İçin Optimal Kontrol Probleminin Sayısal Çözümü” isimli projede 36 ay süreli yardımcı araştırmacı olarak görev aldı. Evli ve bir çocuk annesidir.