SİNGÜLER DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN SPEKTRAL TEORİSİNDE AÇILIM PROBLEMLERİ ÜZERİNE

Ümit ALEMDAR

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Etibar PENAHLI

ELAZIĞ-2011

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİNGÜLER DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN SPEKTRAL TEORİSİNDE AÇILIM PROBLEMLERİ ÜZERİNE

Ümit ALEMDAR
03121105

Tez Yöneticisi
Prof. Dr. Etibar PENAHLI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ 2011

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİNGÜLER DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN SPEKTRAL TEORİSİNDE AÇILIM PROBLEMLERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ümit ALEMDAR
03121105

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 04 Ekim 2011
Tezin Savunulduğu Tarih : 30 Eylül 2011

Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Etibar PENAHLI (F.Ü)**
Diğer Jüri Üyeleri	**:**	**Yrd. Doç. Dr. Erdal BAŞ (F.Ü)**
		Yrd. Doç. Dr. Ünal İÇ (F.Ü)

EKİM-2011

TEŞEKKÜR

Tez konumu veren, yöneten, çalışmalarımda bana destek ve yardımcı olan sayın hocam Prof. Dr. Etibar PENAHOV' ve yardımlarını eksik etmeyen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Erdal BAŞ hocama en içten teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

ÜMİT ALEMDAR

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SİNGÜLER DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN SPEKTRAL TEORİSİNDE AÇILIM PROBLEMLERİ ÜZERİNE

Ümit ALEMDAR
03121105

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

2011

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, diferansiyel operatörlerin Spektral teorisinde sık kullanılan bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde Legendre Fonksiyonları incelenmiş, bazı fonksiyonlarla ilişkisi,açılım formülleri ve asimptotik formüller üzerinde durulmuştur.

Üçüncü bölümde ise Klasik Fourier İntegrali incelenmiş, Fourier-Bessel seri açılımları, Fourier-Hankel integral açılımı açıklanmış, ortogonal Cebysev-Hermite fonksiyonlarına değinilmiş ve Cebysev-Laguerre polinomlarının açılımları verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Sturm-Liouville Problemi, özdeğer, özfonksiyon, Legendre fonsiyonları, Bessel fonksiyonları

SUMMARY

Master Thesis

OVER THE OPENNING PROBLEMS OF SINGULER DIFFERANTIAL OPERATORS IN SPEKTRAL THEORY

Ümit ALEMDAR
03121105

Fırat Universty
Institute of Science and Technology
Department of Mathematics
2011

This study contains three parts.

At the first part, some definitions and theories, often used on the theories of differancial operators are told.

At the second part, Legendre Functions are studied, the relation with some functions, openning formules and asymptotic formules are dwelled on.

At the third part, classical Fourier Integral is studied, Fourier-Bessel serial opennings, Fourier-Hankel Integral openning are told, orthogonal Hermite Functions are touched and Cebysev-Laguerre polinom opennings are studied.

Key words: Sturm-Liouville Problem, eigenvalue, eigenvalue function, Legendre functions, Bessel functions

SİMGELER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

$W(f,g)$ **:** Wronskian Determinantı

$L^2[a,b]$ **:** Karesi İntegrallenebilen fonksiyonlar

$C_b : x=b$ noktasına karşılık gelen çember

φ_n **:** Öz fonksiyon

λ **:** Öz değer

$\Gamma(p)$ **:** Gamma fonksiyonu

$q(x)$ **:** Potansiyel fonksiyon

$\rho(\lambda)$ **:** Spektral fonksiyon

GİRİŞ

Operatörlerin spektral teorisi matematik, fizik ve mekaniğin çeşitli alanlarında geniş bir şekilde kullanılmaktadır.

Lineer operatörlerin spektral teorisinin esas kaynakları bir yandan lineer cebir olmak üzere diğer yandan titreşim teorisinin problemleridir.(telin titreşimi v.b.) Lineer cebir problemleri ve titreşim teorisi problemleri arasındaki benzerliklerin farkına varılması çok eskilere dayanır. İntegral denklemler teorisinde yapılan çalışmalarda bu benzerliklerden sürekli olarak faydalanan bilim adamı ilk olarak D. Hilbert olmuştur. Tüm bunların sonucu olarak önce l_2 uzayı daha sonraları ise genel Hilbert uzayı tanımlanmıştır. Matematikte $l_2 \; ve \; H$ soyut Hilbert uzayı tanımlandıktan sonra H de lineer self-adjoint operatörler teorisinin gelişimi hızlanmıştır. XIX. ve XX. yüzyıllarda birçok matematikçi sayesinde bu teori mükemmel bir seviyeye ulaşmıştır. Özel olarak bu çalışmalarda özdeğerler, özfonksiyonlar, spektral fonksiyon, normalleştirici sayılar v.s. spektral veriler tanımlanmış ve farklı yöntemlerle bunlar için asimptotik formüller elde edilmiştir.

Regüler ve singüler olmak üzere iki tür diferansiyel operatör tanımlanmış ve bunların spektral teorileri yapılandırılmıştır. Tanım bölgesi sonlu ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferansiyel operatörlere regüler, tanım bölgesi sonsuz veya katsayıları toplanabilir olmayan diferansiyel operatörlere singülerdir, denir. İkinci mertebeden regüler operatörler için spektral teori günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinir. XIX. yüzyılın sonlarında ikinci mertebeden diferansiyel operatörler için sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekilde adi diferansiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı Birkoı tarafından incelenmiştir. Discret spektruma sahip ve uzayın tamamında tanımlı operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı özellikle Kuantum mekaniğinde çok önem taşımaktadır. Singüler operatörler için spektral teori Weyl tarafından incelenmiştir. Daha sonra Rietsz, Neumann, Friedrichs ve diğer matematikçiler tarafından simetrik ve self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi oluşturulmuştur. Simetrik operatörlerin tüm self-adjoint genişlemelerinin bulunması problemi Neumann tarafından bir süre sonra yapılmıştır.

İkinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisine yeni bir yaklaşımı 1946 yılında Titchmarsh vermiştir. Doğru ekseninde tanımlı azalan (artan) potansiyelli

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

Sturm – Liouville operatörleri için özdeğerlerin dağılımı formülü Titchmarsh tarafından bulunmuştur. Son yıllarda bu operatöre bir boyutlu $q(x)$ potansiyelli Schröndinger denklemi de denir. Aynı zamanda bu çalışmada Schrödinger operatörü için operatörü için özdeğerlerin dağılım formülü verilmiştir.

Singüler diferansiyel operatörlerin incelenmesine ilişkin ve diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli bir yere sahip olan çalışmalar 1949 yılında Levitan tarafından yapılmıştır. Levitan bu çalışmalarında spektral teoriyi şekillendirmek için kendine ait bir yöntem gelştirmiştir. Farklı singüler durumlarda diferansiyel operatörlerin spektral teorisi, özellikle özdeğerlerin, özfonksiyonların asimptotiğine ve özfonksiyonların tamlığına ilişkin konular Caurent, Carlemen, Birman, Salamyak, Maslov, Keldish v.s. matematikçiler tarafından geliştirilmiştir.

Diferansiyel operatörler teorisinde singüler operatörler için spektral teorinin düz problemlerinin incelenmesi önemli yere sahiptir.

Bessel, Legenre ve diğer singüler diferansiyel denklemlerin spektral teorisinin, yani özdeğerlerin, normlaştırıcı sayıların, özfonksiyonların ve tüm bunların özelliklerinin incelenmesi, özel olarak Fourier - Bessel, Fourier – Hankel integral açılımlarının ve Legendre polinomlarının göz önüne alınarak açılımlarının araştırılmasıyla spektral analiz, kompleks değişkenli fonksiyonlar adi ve kısmi türevli diferansiyel denklemler teorilerinde ve fonksiyonel analizde kullanılan teoremler ve onların ispat yöntemleriyle spektral açılım teoremlerinin ispatlanması sağlanmıştır.

1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 1.1. Tanım ve değer cümlesi vektör uzayı olan dönüşüme operatör denir.

Tanım 1.2. E_x ve E_y herhangi iki vektör uzayı olmak üzere

1. $x_1, x_2 \in E_x$ için $L(x_1 + x_2) = Lx_1 + Lx_2$

2. $x \in E_x ve\ \lambda \in R\, için\, L(\lambda x) = \lambda L(x)$

şartlarını sağlayan $L : E_x \to E_y$ operatörüne lineer operatör denir. $[1]$

Tanım 1.3. X ve Y birer normlu uzay ve $D(L) \subset X$ olmak üzere $L : D(L) \to Y$ bir operatör olsun.

$$\|Lx\| \le c.\|x\|$$

olacak şekilde bir c reel sayısı varsa L operatörüne sınırlıdır denir. $[2]$

Tanım 1.4. $L - \lambda I$ operatörünün sınırlı, $(L - \lambda I)^{-1}$ tersinin mevcut olmadığı λ'lar cümlesine L operatörünün spektrumu denir. $[3]$

Tanım 1.5. Herhangi λ için $L - \lambda I$ operatörünün tersi mevcut olacak biçimde $R_\lambda = (L - \lambda I)^{-1}$ operatörüne $(L - \lambda I)x = y$ denkleminin rezolvent operatörü denir. $[2]$

Tanım 1.6. L operatörü $D(L)$ tanım bölgesinde sınırlı olmak üzere

$$Ly = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y(x) \ne 0$ fonksiyonu mevcut ise λ sayısına L operatörünün özdeğeri, $y(x,\lambda)$ fonksiyonuna ise λ'ya karşılık gelen özfonksiyon denir. $[3]$

Tanım 1.7. Eğer $x \to 0 (veya\, x \to \infty)$ iken $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 0$ ise $f(x) = o(g(x))$ ve $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$ sınırlı ise $f(x) = O(g(x))$ olarak gösterilir. $[4]$

Tanım 1.8. Bir $f(z)$ kompleks fonksiyonu düzlemin keyfi bir z_0 noktasının δ komşuluğunun tüm noktalarında diferensiyellenebiliyorsa $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir. $[5]$

Tanım 1.9. $f(z)$ kompleks fonksiyonu düzlemin tüm noktalarında analitik ise $f(z)$'e tam fonksiyon denir.

Tanım 1.10. $0<|z-z_0|<R$ bölgesinde $f(z)$ analitik fonksiyon olmak üzere

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$$

ise z_0'a $f(z)$'in kutup noktası denir. [5]

Tanım 1.11. a <t <b olmak üzere $L^2[a,b]$ uzayı

$$L^2[a,b]=\left\{x(t):\int_a^b [x(t)]^2\,dt<\infty\right\}$$

şeklinde, bu uzayda iç çarpım ise <f, g>= $\int_a^b f(x).\overline{g(x)}dx$ şeklinde tanımlanır. [1]

Teorem 1.1 (Green Teoremi). Ω**,** xy düzleminde bir bölge ve Γ'da bu bölgeyi çevreleyen pozitif yönde yönlendirilmiş bir eğri olsun. P ve Q fonksiyonları Ω üzerinde sürekli türevlere sahip fonksiyonlar ise

$$\int_\Gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_\Omega\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

dir. [5]

Tanım 1.12. (Parseval Eşitliği). $[0,\pi]$ aralığında karesi integrallenebilen her fonksiyon için

$$a_n=\int_0^\pi f(x)v_n(x)dx$$

olacak şekilde

$$\int_0^\pi f^2(x)dx=\sum_{n=0}^\infty a_n^2$$

Parseval eşitliği sağlanır.

Teorem 1.2(Açılım Teoremi). $f(x),\quad 0\le x\le\infty$ aralığında sürekli ve

$$\int_{-\infty}^\infty F(\lambda)y(x,\lambda)d\rho(\lambda)$$

integrali her sonlu aralıkta x'e göre mutlak ve düzgün yakınsak olsun. Bu taktirde

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)y(x,\lambda)d\rho(\lambda)$$

dır.

Teorem 1.3(Watson Lemması). Pozitif t değişkenli $q(t)$ fonksiyonu için λ *ve* μ pozitif sayılar olacak şekilde

$$q(t)\sim\sum_{s=0}^{\infty} a_s t^{(s+\lambda-\mu)/\mu} \quad (t\to 0)$$

olsun. Bu taktirde yeteri kadar büyük x 'ler için aşağıdaki integral yakınsak olmak üzere

$$\int_0^{\infty} e^{-xt}q(t)\sim\sum_{s=0}^{\infty}\Gamma\left(\frac{s+\lambda}{\mu}\right)\frac{a_s}{x^{(s+\lambda)/\mu}} \quad (x\to\infty)$$

dir

Tanım 1.12(Cauchy İntegral Formülü). G bölgesi genelde çok irtibatlı bir bölge olmak üzere bu bölgenin içerisinde ve sınırında $f(z)$ fonksiyonu birebir analitik fonksiyon olsun. Bu taktirde G bölgesinde bulunan her z_0 noktası için

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi$$

dir.

Tanım 1.13(Rodrigues Formülü). Legendre polinomları için Rodrigues Formülü

$$P_k(x)=\frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k$$

şeklindedir.

2. LEGENDRE FONKSİYONLARI

2.1. Laplace Diferansiyel Denklemi

Laplace diferensiyel denkleminden bahsetmeden önce Legendre fonksiyonlarını Laplace'ın diferensiyel fonksiyonlarını göz önüne alarak inceleyelim. Legendre, fonksiyonlarının ilk olarak ortaya çıktığı yer, Laplace diferensiyel denklemidir. Eğer Laplace denklemini, küresel koordinatlar ile ifade edersek, bu fonksiyonlar doğal olarak meydana gelmektedir.

Şimdi aşağıdaki eşitliği göz önünde bulunduralım.

$$\Delta V = V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0 \qquad 2.1.1$$

$(V_{xx} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2})$

Eğer küresel koordinatlar;

x= r sinθ cosϕ, y=r sinθ sinϕ, z=r cosθ

2.1.1 eşitliğinde yerine konursa

$$V_{rr} + \frac{2}{r}V_r + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta V_\theta\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}V\phi\phi = 0 \qquad 2.1.2$$

denklemi elde edilir. Bu denklemi çözmenin standart yolu, değişkenlere ayırma metodunu kullanmaktır.

Çözümün üç fonksiyonun çarpımı şeklinde olduğunu farzedelim. O halde,

$$V = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

yazabiliriz. Son eşitliği 2.1.2'ye ekler ve V ile bölersek;

$$\left[\frac{R'' + \left(\dfrac{2}{r}\right)R'}{R}\right] + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\Theta'' + cot\theta\Theta'}{\Theta}\right] + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left[\frac{\Phi''}{\Phi}\right] = 0. \qquad 2.1.3$$

eşitliğini elde ederiz.

r, θ ve Φ'nin bağımsız değişkenler olması nedeniyle 2.1.3 eşitliğinden aşağıdaki sonuçları yazabiliriz:

$$r^2 R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0$$

$$\Theta'' + \cot\theta\Theta' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta = 0$$

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0$$

m^2 ve n(n+1) ayrı sabitlerdir.

Yukarıdaki sonuçlardan birinci ve üçüncünün bilinen çözümleri vardır. Bunlar

$$R = c_1 r^n + \frac{c_2}{r^{n+1}}$$

$$H = c_3 e^{im\phi} + c_4 e^{-im\phi}$$

dir. Burada c_i'ler integrasyon sabitleridir.

Θ eşitliğini ele almak için $t=\cos\theta$ ve $\Theta = T(t)$ alalım. Böylece

$$(1-t^2)\, T'' - 2tT' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-t^2}\right].T = 0. \qquad 2.1.4$$

denklemini elde ederiz. m=0 ve n'in tamsayı olması durumunda $T = P_n(t)$ olduğunu görürüz. $P_n(t)$ sembolü ile birinci tür Legendre fonksiyonlarının birleşimini ifade ediyoruz. Bunları tam anlamıyla anlayabilmek için, aşağıdaki şekilde devam edelim:

$(1-t^2)P_n'' - 2tP_n' + n(n+1)P_n = 0$ denkleminin m katlı diferansiyeli

$$(1-t^2)D^{m+2}P_n - 2t(m+1)D^{m+1}P_n + \left[n(n+1) - m(m+1)\right]D^m P_n = 0 \qquad 2.1.5$$

eşitliğine dönüşür. Burada

$$D^m P_n = (1-t^2)^{-m/2}\, T$$

alıp 2.1.5 eşitliğinde yerine koyduğumuzda, 2.1.4 eşitliğini tekrar elde ederiz. $P_n^m(t)$ ile belirtilen 2.1.4 eşitliğinin çözümü artık

$$P_n^m(t) = (-1)^m (1-t^2)^{m/2} D^m P_n(t) \qquad 2.1.6$$

ile ifade edilir. O halde 2.1.1 eşitliğinin çözümü

$$V = \left(c_1 r^n + \frac{c_2}{r^{n+1}} \right) P_n^m(\cos\theta)(c_3 e^{im\phi} + c_4 e^{-im\phi}) \qquad 2.1.7$$

olur.

2.2. Maxwell'in Kutup Teorisi

2.1.7 göz önüne alındığında n=m=0 için $V = \frac{1}{r}$, 2.1.1'i sağlar. 2.1.1'in x,y,z'ye göre diferansiyelini

$$V = \frac{\partial^{i+j+k}}{\partial x^i \partial y^i \partial z^k} \frac{1}{r} \qquad , \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

eşitliği ile gösterebiliriz. Ayrıca bu eşitlik 2.1.1'i sağlar. Özel olarak

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} = -\frac{z}{r^3} = \frac{-1}{r^2} P_1\left(\frac{z}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} P_1(\cos\theta)$$

alabiliriz. Bu ifadeyi 2.1.7 ile bir karşılaştırdığımızda m=0 ve n=1 olduğunu elde ederiz. Genel olarak

$$r^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{1}{r} = F(z, r)$$

eşitliğinin z ve r'de homojen olduğunu söyleyebiliriz.

Yeni t parametresinin rastgele seçilmiş değerleri için *F(tz, tr)=F(z, r)*'dir. Bu nedenle

$$F(z, r) = F\left(\frac{z}{r}\right) = F(\cos\theta)$$

yazabiliriz. 2.1.7'de m=0 alındığında uygun sabit bir c değeri için

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{1}{r} = \frac{F(\cos\theta)}{r^{n+1}} = \frac{cP_n(\cos\theta)}{r^{n+1}} \qquad 2.2.1$$

eşitliğini elde ederiz. Aynı zamanda, yukarıdaki eşitliği $P_n(\cos\theta)$ fonksiyonunun tanımı için de kullanabiliriz. Buradan $P_n(z/r)$ $\frac{z}{r}$ değişkeninin n. dereceden bir polinom olduğu sonucu çıkar.

$m \neq 0$ durumunu incelemek için,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{r}=-\frac{x+iy}{r^3}=\frac{-\sin\theta e^{i\phi}}{r^2}=\frac{-P_1^1\left(\cos\theta\right)e^{i\phi}}{r^2}$$

eşitliğini göz önüne alalım, matematiksel tümevarım metodu yardımıyla

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f\left(r\right)=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^m f\left(r\right)\left(x+iy\right)^m$$

şeklinde gösterilebilir. $f\left(r\right)=1/r$ alırsak;

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m\frac{1}{r}=\frac{\left(-1\right)^m(2m)!(x+iy)^m}{2^m m!r^{2m+1}}=\frac{(-1)^m(2m)!\sin^m\theta\, e^{im\phi}}{2^m m!r^{m+1}}$$

yazabiliriz. Bu iki operatörün kombinasyonu ile c uygun bir sabit olmak üzere

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-m}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m\frac{1}{r}=\frac{ce^{im\phi}P_n^m(\cos\theta)}{r^{n+1}}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-m}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)^m\frac{1}{r}=\frac{(-1)^{n-m}(n-m)!e^{im\phi}P_n^m(\cos\theta)}{r^{n+1}}$$

olur. Burada *1/r, r=0*'da bulunan, noktasal yükün potansiyelini temsil eder.

$$V=\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}=\lim_{\xi\to 0}\frac{\left[x^2+y^2+\left(z+\xi\right)^2\right]^{-1/2}-\left[x^2+y^2+\left(z-\xi\right)^2\right]^{-1/2}}{2\xi}$$

fonksiyonu birbirine yaklaşan iki noktasal yükün birleşmesinin potansiyel bir sonucu olarak yorumlanabilir.

Daha yüksek mertebeden türevler aynı şekilde farklı yönlerden birbirlerine yaklaşan çok sayıda noktasal yükün birleşmesinden dolayı oluşan potansiyeli ifade eder.

2.3. Hipergeometrik Fonksiyonlarla İlişkisi

$$\left(1-t^2\right)T''-2tT'+n\left(n+1\right)T=0 \qquad 2.3.1$$

denklemini göz önüne alalım. Bu denklem t=1, t=-1 ve t=∞'da üç tekil noktaya sahiptir. Basit bir hesaplama bu tekilliklerin

t=1 0,0

t=-1 0,0

$t=\infty$ -n, n+1

ile verildiğini gösterir. Bu nedenle eşitliği aşağıdaki sembol ile ilişkilendirebiliriz:

$$P\begin{Bmatrix} 1 & -1 & \infty & \\ 0 & 0 & -n & t \\ 0 & 0 & n+1 & \end{Bmatrix}$$

Uygun bir çift doğrusal yerdeğiştirme kullanarak tekil noktaları 0,1, ∞'a ötelersek yukarıdaki eşitlik

$$P\begin{Bmatrix} 0 & +1 & \infty & \\ 0 & 0 & -n & 1-2t \\ 0 & 0 & n+1 & \end{Bmatrix}\text{'e}$$

dönüşür. Böylece $a=-n$, $b=n+1$, $c=1$ olur ki buradan

$$P_n\left(t\right)=F\left(-n,\ n+1;\ \frac{1-t}{2}\right) \qquad 2.3.2$$

yazabiliriz. 2.3.2 eşitliği rastgele seçilmiş n değerleri için 2.3.1 denklemini sağlar fakat n bir tamsayı olmadığı sürece t=1 noktasına yakınsamaz. Bu durumda fonksiyon n. dereceden bir fonksiyona dönüşür. Gerçekten de $P_n(t)$'nin 2.3.2 eşitliği tarafından verildiğini göstermek için bir noktada birleştiklerini göstermemiz gerekir. Burada $t=1$'de

$$1=F\ (-n,\ n+1\ ;\ 1;\ 0)=P_n\ (1)$$

olduğunu Legendre polinomların üreten fonksiyonlarını kullanarak kolaylıkla gösterebiliriz.

Hipergeometrik fonksiyonunun ilk iki parametre için simetrik olduğu gerçeğinden dolayı, n yerine $n-1$ değiştirmesi yapılırsa sabit olduğu görülür. Buradan

$$P_n(t)=P_{-n-1}(t)$$

yazabiliriz 2.1.6 ifadesini kullanarak yukarıdaki eşitliği daha da genelleştirdiğimizde

$$P_n^m\left(t\right)=P_{-n-1}{}^m\left(t\right) \qquad 2.3.3$$

yazabiliriz. m yerine $m-1$ değiştirmesinin 2.1.4'ü sabitlediği gerçeğinden dolayı, $P_n^m(t)$ 2.1.4'ü sağlarsa $P_n^{-m}(t)$ nin de sağlayacağını biliyoruz. Fakat aynı çözüm olmasına gerek yoktur. Hangi çözümü belirlememiz gerektiğini saptamak için aşağıdaki şekilde devam edelim.

Keyfi olarak seçilmiş u için; $V=(z+ix\cos u+iy\sin u)^n$'in $\Delta V=0$, sağladığını kolaylıkla kontrol edebiliriz. Daha genel bir ifadeyle yeterince düzgün bir f' için bir diğer çözüm

$$V=\int_{-\pi}^{\pi} f\left(z+ix\cos u+iy\sin u,u\right)dy \qquad 2.3.4$$

yazabiliriz.

2.3.4'ün özel bir durumu açıkça görülüyor ki;

$$V=\int_{-\pi}^{\pi}\left[z+ix\cos u+iy\sin u\right]^n e^{imu}du \qquad 2.3.5$$

dir.

Eğer, 2.3.5 'te x,y,z'nin küresel koordinatlardaki karşılıklarını göz önüne alırsak

$$V=r^n.e^{im\phi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos\theta+i\sin\theta\cos u\right]^n e^{imu}du$$

olduğunu görürüz.2.1.7 ile karşılaştırırsak uygun bir sabit $c_{m,n}$ değeri için

$$P_n^m(\cos\theta)=c_{m,n}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos\theta+i\sin\theta\cos u\right]^n \cos mu\,du$$

2.3.6

elde ederiz ve n yerine $n-1$ değiştirmesini kullanarak

$$P_n^m(\cos\theta)=c'_{m,n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos mu}{\left[\cos\theta+i\sin\theta\cos u\right]^{n+1}}du \qquad 2.3.7$$

yazabiliriz. Burada Rodrigues formülünü ve 2.1.6'yı kullanarak;

$$P_n^m(t)=(-1)^m\left(1-t^2\right)^{m/2}D^mP_n(t)=\frac{(-1)^m\left(1-t^2\right)^{m/2}}{2^n n!}D^{m+n}\left(t^2-1\right)^n \qquad 2.3.8$$

elde ederiz. Eğer $f^{(n)}(z)=\dfrac{n!}{2\pi i}\int_c \dfrac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi$ 'yi 2.3.8'de kullanırsak

$$P_n^m(t)=\frac{(-1)^m(1-t^2)^{m/2}}{2^n n!\ \ 2\pi i}\int_c \frac{(\xi^2-1)^n d\xi}{(\xi-t)^{n+m-1}}$$

yazabiliriz. (Burada c için $|\xi-t|^{1/2}$ çemberini seçtik.)

$$\xi=t+i\left(1-t^2\right)^{1/2}e^{i\Psi}$$
$$\xi^2-1=2i\left(1-t^2\right)^{1/2}.e^{i\Psi}\left[t+i\left(1-t^2\right)^{1/2}\cos\Psi\right]$$

değişken değiştirmesini yaparsak

$$P_n^m(t)=\frac{i^m(n+m)!}{2\pi n!}\int_{-\pi}^{\pi}\left[t+i\left(1-t^2\right)^{1/2}\cos\psi\right]^n\cos m\psi d\psi \qquad 2.3.9$$

elde ederiz. n yerine $n-1$ yer değiştirmesi yapılırsa 2.3.9 eşitliği

$$P_n^m(t)=\frac{(-i)^m n!}{2\pi(n-m)!}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos m\psi}{\left[t+i\left(1-t^2\right)^{1/2}\cos\psi\right]^{n+1}}d\psi \qquad 2.3.10$$

2.3.10'u oluşturur. Yukarıda

$$\frac{(n+m)!}{n!}=(n+m)(n+m-1)...(n+1)\to(-1)...(n-m+1)$$
$$=\frac{(-1)^m n!}{(n-m)!}$$

eşitliği kullanılarak 2.3.9 ya da 2.3.10 eşitliklerinden

$$P_n^{-m}(t)=(-1)^m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(t) \qquad 2.3.11$$

olduğunu görürüz. Sabit m için $\left\{P_n^m(t)\right\}$ kümesi [-1, 1] aralığı boyunca ortoganaldır.

Bunu göstermek için, aşağıdaki integrali ele alırsak ve 2.3.9'u kullanırsak

$$\int_{-1}^{1}P_n^m(t).P_k^m(t)dt=\frac{(-1)^m(n+m)!}{(n-m)!}\int_{-1}^{1}P_n^{-m}(t)P_k^m(t)dt$$

$$= \frac{(-1)^m (n+m)!}{2^{n+k} n!k!(n-m)!} \int_{-1}^{1} D^{n-m} \left(t^2-1\right)^n D^{k+m} \left(t^2-1\right)^k dt$$

Son integralin bölümleri ile tanımlanan tekrarlı integrasyon

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(t) P_k^m(t) dt = \frac{(n+m)!}{2^{n+k} n!k!(n-m)!} \int_{-1}^{1} D^n \left(t^2-1\right)^n D^k \left(t^2-1\right)^k dt$$

$$= \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \int_{-1}^{1} P_n(t) P_k(t) dt$$

$$= \begin{cases} 0, & n \neq k \\ \dfrac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}, & n = k \end{cases} \qquad 2.3.12$$

olduğunu gösterir. 2.3.12'den aşağıdaki eşitlik çıkar:

$$P_{m+k}^{\ m}(t) = \left(1-t^2\right)^{m/2} \phi_k^{\ m}(t)$$

$\phi_k^{\ m}(t)$ polinomu k. dereceden bir polinomdur.

Sabit m için, $\left\{\phi_k^{\ m}(t)\right\}$ kümesi $\left(1-t^2\right)^m$ ağırlık fonksiyonuyla [-1,1] aralığı boyunca ortogonal polinomlar kümesidir. Buna bağlı olarak tamlık özellikleri, rekürans formülleri vs.lere ilişkin ortagonal polinomlar için türetilmiş tüm teoremler Legendre fonksiyonlarına da uygulanabilir.

Ayrıca Legendre fonksiyonları ile hipergeometrik fonksiyonlar arasında ilişki kurabiliriz.

$$P_n^m(t) = (-1)^m \left(1-t^2\right)^{m/2} D^m P_n(t)$$

$$= (-1)^m \left(1-t^2\right)^{m/2} D^m F\left(-n, n+1; 1; \frac{1-t}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{-1}{2}\right)^m \frac{(n+m)!}{(n-m)!m!} \left(1-t^2\right)^{m/2} F\left(m-n, m+n+1; m+1; \frac{1-t}{2}\right) \qquad 2.3.13$$

$P_n^m(t)$ için ele alınan tüm semboller $\left|(1-t)/2\right| < 1$ için yakınsak serileri bulmak için de kullanılabilir.

t düzlemine olan analitik devamlarını elde etmek için hipergeometrik fonksiyonlardan türetilmiş lineer olmayan dönüşümler gibi bazı dönüşümlerden yararlanırız.

$$(1-z)^m P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & m-n & z \\ -m & -m & m+n+1 & \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & -n & z \\ -m & -m & n+1 & \end{Bmatrix}$$

eşitliğini kullanarak $z=(1-t)/2$ ile 2.3.13'te

$$P_n^m(t) = \frac{(-1)^m (n+m)!}{(n-m)!m!}\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{m/2} F\left(-n, n+1; m+1; \frac{1-t}{2}\right) \qquad 2.3.14$$

elde edilir.

$$a = \frac{m-n}{2}$$
$$b = \frac{m+n+1}{2}$$
$$c = a+b+\frac{1}{2} = m+1$$

şeklinde seçersek

$$F\left(2a, 2b; a+b+\frac{1}{2}; \frac{1-(1-z)^{1/2}}{2}\right) = F\left(a, b; a+b+\frac{1}{2}; z\right)$$

olduğunu düşünürsek; 2.3.13 eşitliği

$$P_n^m(t) = \left(\frac{-1}{2}\right)^m \frac{(n+m)!(1-t^2)^{m/2}}{(n-m)!m!} \; xF\left(\frac{m-n}{2}, \frac{m+n+1}{2}, m+1, 1-t^2\right) \qquad 2.3.15$$

e dönüşür. Son eşitliğe aşağıdaki özdeşliği uygularsak,

$$F(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)(1-z)^a} F\left(a, c-b; a-b+1; \frac{1}{1-z}\right)$$

$$+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)(1-z)^b} F\left(b, c-a; b-a+1; \frac{1}{1-z}\right) \qquad 2.3.16$$

$$P_n^m(t)=\frac{(2n)!(-1)^m}{2^n n!(n-m)!}.(1-t^2)^{m/2}t^{n-m}F\left(\frac{m-n}{2},\frac{m-n+1}{2};\frac{1}{2}-n;\frac{1}{t^2}\right) \qquad 2.3.17$$

elde ederiz. 2.3.17 eşitliğinden

$$\Gamma(a)\Gamma(c-b)=\Gamma\left(\frac{m-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-n-1}{2}\right)$$

terimi elde edilir. Burada eğer;

$$F(a,b;c;z)=(1-z)^{-a}F\left(a,c-b;c;\frac{z}{z-1}\right) \qquad 2.3.18$$

2.3.18'i 2.3.17'ye uygularsak

$$P_n^m(t)=\frac{(-1)^{(n+m)/2}(2n)!(1-t^2)^{n/2}}{2^n n!(n-m)!}F\left(\frac{m-n}{2},-\frac{m+n}{2};\frac{1}{2}-n;\frac{1}{1-t^2}\right) \qquad 2.3.19$$

yazabiliriz. Eğer tekrar ikinci derece dönüşümü yukarıdaki eşitliğe uygularsak

$$P_n^m(t)=\frac{(-1)^{(n+m)/2}(2n)!}{2^n n!(n-m)!}(1-t^2)^{n/2}$$

$$xF\left(m-n,-m-n,\frac{1}{2}-n;\frac{(t^2-1)^{1/2}-t}{2(t^2-1)^{1/2}}\right) \qquad 2.3.20$$

buluruz. 2.3.18'i 2.3.20 'ye uyguladığımızda

$$P_n^m(t)=\frac{(-1)^m(2n)!}{2^{2n-m}n!(n-m)!}(1-t^2)^{m/2}\left[(t^2-1)^{1/2}+t\right]^{n-m}$$

$$+F\left(m-n,\frac{1}{2}+m;\frac{1}{2}-n;\frac{t-(t^2-1)^{1/2}}{t+(t^2-1)^{1/2}}\right) \qquad 2.3.21$$

elde ederiz. Yukarıdaki formüller, t düzleminin diğer bölgelerinde 2.3.13 formülünün analitik sürekliliğini sağlar.

Hipergeometrik fonksiyonların pek çok dönüşüm formüllerinin tekrarlı uygulamaları çoğaltılabilir.

2.4. Açılım Formülleri

Aşağıdaki sınır değer problemini göz önüne alalım:

$$\Delta V = 0 \qquad 2.4.1$$

$$V = f(\theta,\phi)\text{ , r =1} \qquad 2.4.2$$

durumundaki V'yi araştıralım. Burada $f(\theta,\phi);\theta$ ve ϕ' nin tanımlı fonksiyonudur. Bu fonksiyon $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \phi \le 2\pi$ küresinin yüzeyinde tanımlı olmalıdır. Burada kürenin yarıçapını genelliği bozmadan birim alabiliriz.

$f(\theta,\phi)$ için

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f^2(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi < \infty$$

olduğunu varsayalım. $f(\theta,\phi)$ açılımı

$$f(\theta,\phi) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_m(\theta)e^{im\phi}$$

şeklindedir.

$P_n^m(\cos\theta)$'nın ortogonal sistem olması bakımından $f_m(\theta)$'yı tüm Fourier katsayılarına açabiliriz. $t = \cos\theta$ yerdeğiştirmesiyle beraber 2.3.11'i (yani $P_n^{-m}(t) = (-1)^m \dfrac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(t)$) kullanırsak;

$$f_m(\theta) = \sum_{n=|m|}^{\infty} A_{n,m}P_n^m(\cos\theta)$$

elde ederiz. Burada

$$A_{n,m} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!}\int_0^{\pi} f_m(\theta)P_n^m(\cos\theta)d\theta$$

dir. $P_n^m(t)$ ve $P_n^{-m}(t)$ lineer bağımlı olduğundan, $(|m|,\infty)$ boyunca sadece toplama ihtiyacımız olduğunu söyleyebiliriz. Bunların kombinasyonu yapılarak

$$f(\theta,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} A_{n,m}P_n^m(\cos\theta)e^{im\phi}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} f\left(\theta',\phi'\right)\sin\theta' d\theta' d\phi'$$

$$x\sum_{n=0}^{\infty}\left(2n+1\right)\sum_{m=-n}^{n}\frac{\left(n-m\right)!}{\left(n+m\right)!}P_n^m\left(\cos\theta\right)P_n^m\left(\cos\theta'\right)e^{im\left(\phi-\phi'\right)}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} f\left(\theta',\phi'\right)\sin\theta' d\theta' d\phi'$$

$$x\sum_{n=0}^{\infty}\left(2n+1\right)\sum_{m=0}^{n}\varepsilon_m\frac{\left(n-m\right)!}{\left(n+m\right)!}P_n^m\left(\cos\theta\right)P_n^m\left(\cos\theta'\right)\cos m\left(\phi-\phi'\right) \qquad 2.4.3$$

$$\varepsilon_m=\begin{cases}1, & m=0\\ 2, & m>0\end{cases}$$

dır. 2.4.3'ün geçerliliği Fourier serilerinin ve $\left\{P_n^m\left(t\right)\right\}$ kümesinin tamlık özellikleri sonucu ortaya çıkmıştır.

2.4.1, 2.4.2 sınır değer problemini çözmek için $r_nP_n^m\left(\cos\theta\right)\cos m\phi$ fonksiyonunun 2.4.1'i sağlaması durumunu kullanırız. Buradan

$$V=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\theta',\phi'\right)\sin\theta' d\theta' d\phi$$

$$X\sum_{n=0}^{\infty}\left(2n+1\right)r^n\sum_{m=0}^{n}\varepsilon_m\frac{\left(n-m\right)!}{\left(n+m\right)!}P_n^m\left(\cos\theta\right)P_n^m\left(\cos\theta'\right)\cos m\left(\phi-\theta'\right) \qquad 2.4.4$$

sonucunu elde ederiz. 2.4.4, 2.4.1'i sağlar ve $f\left(\theta,\phi\right)$'yi r=1'de azaltır. Burada kutup noktası $\theta=0$ tanımıyla

$$P_n\left(1\right)=1$$
$$P_n^m\left(1\right)=0 \qquad m>0$$

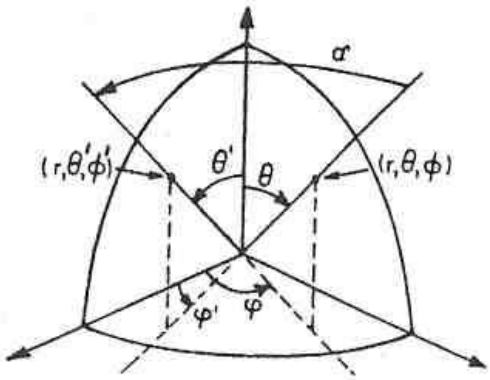
alınırsa 2.4.4'den

$$V\left(r,0,\phi\right)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\theta',\phi'\right)\sin\theta' d\theta' d\phi'\sum_{n=0}^{\infty}\left(2n+1\right)r^nP_n\left(\cos\theta'\right) \qquad 2.4.5$$

elde edilir. Başka herhangi bir nokta da kutup nokta olarak belirlenebilir. Bunu göstermek için eksen olarak $\left(\theta,\phi\right)$ yönünü seçmek uygun olacaktır. 2.4.5'te θ' tarafından belirlenen açı (θ,ϕ) ve (θ',ϕ') yönleri arasındaki sabit açıdır. (θ,ϕ) ve (θ',ϕ') yönleri arasındaki açı α olarak tanımlanabilir. Aşikardır ki

$$\cos\alpha = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\left(\phi-\phi'\right)$$

dır. Bunu aşağıdaki şekilde de görebiliriz.



Bu doğrultularla bağlantılı olarak ve 2.4.5'i kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$V\left(r,\theta,\phi\right) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} f\left(\theta',\phi'\right)\sin\theta' d\theta' d\phi' \sum_{n=0}^{\infty}\left(2n+1\right)r^n P_n\left(\cos\alpha\right) \qquad 2.4.6$$

$$\cos\alpha = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\left(\phi-\phi'\right)$$

2.4.4 ve 2.4.6 denktir ancak 2.4.6' nın 2.4.4'e göre avantajı basit toplamın çift toplama göre daha çok kullanılmasıdır.

2.5. Toplam Teoremi

Tüm $f\left(\theta',\phi'\right)$ için 2.4.4 ve 2.4.6 ifadelerinin karşılaştırılması;

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} f\left(\theta',\phi'\right)\sin\theta' d\theta' d\phi' \sum_{n=0}^{\infty}\left(2n+1\right)r^n$$

$$\times\left\{P_n\left(\cos\alpha\right) - \sum_{m=0}^{n}\varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m\left(\cos\theta\right) P_n^m\left(\cos\theta'\right)\cos m\left(\phi-\phi'\right)\right\} = 0$$

olduğunu gösterir.

$P_n^m(\cos\theta)$ terimlerinin tamlık özellikleri nedeniyle yukarıdaki ifadenin parantez içerisindeki terimi hemen hemen her yerde sıfır olması gerektiği fakat bu terimin sürekli olması nedeniyle her yerde sıfır olduğunu söyleyebiliriz. Buradan şu sonuç elde edilir:

$$P_n\left(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\left(\phi-\phi'\right)\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta) P_n^m\left(\cos\theta'\right)\cos m\left(\phi-\phi'\right) \qquad 2.5.1$$

2.5.1 ifadesi, Legendre fonksiyonları için toplam teoremi olarak adlandırılır. Bu bize, dönüştürülmüş koordinat sisteminde $P_n(\cos\theta)$ fonksiyonunun $P_n^m(\cos\theta)e^{im\phi}$ 'nin temel çözümünün terimlerinde nasıl ifade edilebileceğini gösterir.

r =1, V=f(θ) sınır şartları ile aşağıdaki denklemi göz önüne alalım.

$$\Delta V = V_{rr} + \frac{1}{r}V_r + \frac{1}{r^2}V_{\theta\theta} = 0$$

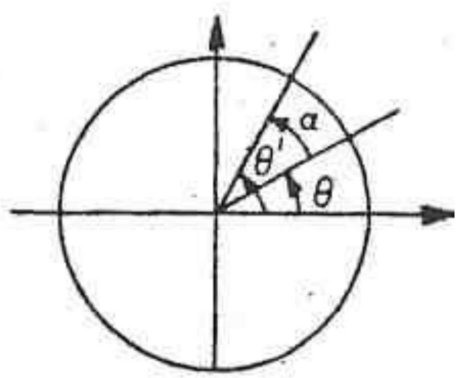
Değişkenlere ayırma metodunu kullanarak ve Fourier serisine açarak

$$V(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta')\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in\theta}e^{in\theta'}d\theta' \qquad 2.5.2$$

eşitliğini buluruz. Buradan

$$V(r,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta')\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{-in\vartheta'}d\theta'$$

yazabiliriz. Burada θ =0 doğrultusu sadece seçilmiş bir yöndür. θ seçilen yönde alınırsa bu taktirde θ' de aynı yönde olur ve burada $\theta' - \theta = \alpha$ dır.



O halde

$$V(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta')\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{-in\alpha}\,d\theta' \qquad 2.5.3$$

elde edilir.

2.5.2 ve 2.5.3'ün karşılaştırılmasıyla

$$e^{-in\alpha}=e^{-in(\theta-\theta')}=e^{in\theta}e^{-in\theta'} \qquad 2.5.4$$

bulunur. 2.5.4 ifadesi üstel fonksiyonlar için bilinen toplam teoremidir.

Bir boyutlu düzlemde Laplace denkleminin temel çözümleri dönüştürülmüş koordinat sistemindeki benzer terimler için de ifade edilebilir. Laplace diferensiyel denklemi koordinat sistemlerinin rotasyonlarında sabittir.

Koordinatların herhangi sabit dönüşümleri denklemi sabit bırakmalıdır. 2.5.1'in alternatif bir ispatını görelim. Yukarıda sözü edilen mantığı kullanarak,

$$r^nP_n\left(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\left(\phi-\phi'\right)\right)=r^n\sum_{m=-n}^{n} a_mP_n^m\left(\cos\theta\right)e^{im\phi}$$

bağıntısı elde edilir. θ ve θ' ve hatta $\phi-\phi'$'de sol tarafın simetrik olmasını kullanarak

$$a_m=b_mP_n^m\left(\cos\theta'\right)e^{-im\phi}$$

sonucunu elde ederiz. b_m ayrıca

$$\begin{aligned}&P_n\left(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\left(\phi-\phi'\right)\right)\\&=\sum_{m=0}^{n} b_mP_n^m\left(\cos\theta\right)P_n^m\left(\cos\theta'\right)\cos m\left(\phi-\phi'\right)\end{aligned} \qquad 2.5.5$$

eşitliğinde yazdığımız b_m ile ilişkilidir. b_m 'i tanımlamak için yukarıda ki ifadenin limit formunu kullanalım. $\cos\theta=x$ olsun. Bu taktirde

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\theta}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-x^2\right)^{1/2}}{x}=i$$

elde ederiz. Benzer şekilde

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\left(\phi-\phi'\right)}{xx'}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\ \frac{\cos\theta}{x}.\frac{\cos\theta'}{x'}+\frac{\sin\theta}{x}.\frac{\sin\theta'}{x'}\cos\left(\phi-\phi'\right)\ \right\}=1-\cos\left(\phi-\phi'\right)$$

dir. Ayrıca Rodrigues formülünden

$$P_n\left(x\right)=\frac{1}{2^n n!}D^n\left(x^2-1\right)^n=\frac{\left(2n\right)!}{2^n n!^2}x^n+\dots$$

elde edilir. Böylece,

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ x'\to\infty}}\frac{P_n(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi'))}{(xx')^n}$$

$$=\frac{\left(2n\right)!}{2^n n!^2}\left[1-\cos\left(\phi-\phi'\right)\right]^n=\frac{\left(2n\right)!}{n!^2}\sin^{2n}\frac{\phi-\phi'}{2}$$

$$=\frac{\left(2n\right)!\left(-1\right)^n}{2^{2n}n!^2}\left[e^{i\left(\phi-\phi'\right)/2}-e^{-i\left(\phi-\phi'\right)/2}\right]^{2n}$$

$$=\frac{\left(2n\right)!}{2^{2n}n!^2}\sum_{m=0}^{n}\varepsilon_m\left(-1\right)^m\left(\frac{2n}{n-m}\right)\cos m\left(\phi-\phi'\right)$$

olur. Benzer şekilde;

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ x'\to\infty}}\frac{P_n^m\left(\cos\theta\right)P_n^m\left(\cos\theta'\right)}{\left(xx'\right)^n}=\frac{\left(-1\right)^m\left(2n\right)!^2}{2^{2n}\left(n!\right)^2\left(n-m\right)!^2}$$

bulunur. Bu limit işlemini 2.5.5'te göz önüne alırsak;

$$\frac{\left(2n!\right)}{2^{2n}n!^2}\sum_{m=0}^{n}\varepsilon_m\left(-1\right)^m\left(\frac{2n}{n-m}\right)\cos m\left(\phi-\phi'\right)$$

$$=\sum_{m=0}^{n}b_m\left(-1\right)^m\frac{\left(2n\right)!^2\cos m\left(\phi-\phi'\right)}{2^{2n}n!^2\left(n-m\right)!^2}$$

katsayıların karşılaştırılmasıyla

$$b_m = \frac{\varepsilon_m (n-m)!}{(n+m)!}$$

sonucunun 2.5.1 ile denk olduğu görülür.

2.5.1, toplam teoreminin iki ispatı karşılaştırıldığında ikincisinin daha fazla manipulasyon gerektirdiğini görebiliriz. İlk ispatta Laplace denklemiyle temel ilişkiler kullanılmıştır. İkinci ispat integrali olmayan n indeksleri için kendini kolayca ilerlettiği için ilk ispata göre daha avantajlıdır. Ayrıca ilk ispatta n'nin tamsayı olması gerekmektedir.

2.6. Green Fonksiyonları

2.4.1 ,2.4.2 sınır değer probleminin çözümünü küre yüzeyinin belirli integrali açısından inceledik. İntegrand serilerde

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) r^n P_n(\cos\alpha)$$

dir. Bu seriler açık bir şekilde aşağıdaki gibi toplanabilir. Legendre polinomları için üretici fonksiyonları ele alalım.

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\alpha + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\cos\alpha)$$

$2r\left(\frac{d}{dr}\right)+1$ operatörü eşitliğin her iki tarafına uygularsak

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) r^n P_n(\cos\alpha) = \frac{1-r^2}{\left[1-2r\cos\alpha + r^2\right]^{3/2}}$$

elde ederiz. Böylece 2.4.5 ifadesini aşağıdaki şekilde yazarız:

$$V(r,\theta,\phi) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} f(\theta',\phi') \frac{1-r^2}{\left[1-2r\cos\alpha + r^2\right]^{3/2}} \sin\theta' d\theta' d\phi' \quad 2.6.1$$

2.6.1 ifadesi Green fonksiyonlarının fiziksel mantığını ifade eder.

Aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım. Bu fonksiyon

r =1 de G=0 olmak üzere

$$\Delta G = \delta\left(P, P_0\right) \qquad 2.6.2$$

eşitliğinin çözümüdür. Burada $\delta\left(P, P_0\right)$ delta fonksiyonudur. *P* ve P_0 uzayda $P = \left(r, \theta, \phi\right)$, $P_0 = \left(r_0, \theta_0, \phi_0\right)$ olan iki nokta olarak tanımlanır. P_0 sabit nokta olarak alınır. $\delta\left(P, P_0\right)$ fonksiyonu

$$\delta\left(P, P_0\right)=0 \;\; P \neq P_0$$

olması için oluşturulur. Burada

$$\int_D \delta\left(P, P_0\right) dv = 1$$

dir. Yukarıdaki eşitlik P_0'ı iç nokta olarak içeren basit irtibatlı D bölgesi boyunca hacim integralidir. Fiziksel olarak; G küresinin sınırını oluşturan pürüzsüz iletken yüzeyiyle kürenin içindeki P_0 noktasal yükün potansiyeli olarak yorumlanabilir.

Green Teoremini kullanarak;

$$\int_D \left[V \Delta G - G\, \Delta V\right] dV = \int_{\partial D} \left[V \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial V}{\partial n}\right] ds \qquad 2.6.3$$

elde edilir ki burada ∂D; D'nin sınırını, $\frac{\partial G}{\partial n}$; ∂D normali yönündeki ∂G'nin türevini ifade eder ve integral sembolünün sağına yazılır.

D bir küre ise

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial r}$$

dir. Eğer $\Delta V = 0$ ve G, 2.6.2'yi sağlarsa, 2.6.3'ü kullanarak;

$$\int_D V\, \delta(P, P_0) dv = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\theta', \phi') \frac{\partial G}{\partial r}\bigg|_{r=1} \sin\theta' d\theta' d\phi'$$

yazabiliriz.

V, P'nin sürekli fonksiyonu olduğundan ve $P \neq P_0$ için $\delta\left(P, P_0\right) = 0$ olduğundan soldaki integral tüm $\varepsilon > 0$ değerleri için $\left|P - P_0\right| < \varepsilon$ boyunca tek katlı integrale dönüşür.

$\delta\left(P,P_0\right)$ fonksiyonunun tanımından aşağıdaki sonuç çıkar:

$$\int_D V\delta\left(P,P_0\right)dv=\int_{|P-P_o|\le\varepsilon} V\delta\left(P,P_0\right)dv=V\left(P_0\right)\int_{|P-P_o|\le\varepsilon}\delta\left(P,P_0\right)dv$$
$$=V\left(P_0\right)$$

Böylece

$$V\left(P_0\right)=\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} f\left(\theta',\phi'\right)\frac{\partial G}{\partial r}\Big|_{r=1}\sin\theta' d\theta' d\phi' \qquad 2.6.4$$

elde ederiz.

2.6.4’ün 2.6.1’e dönüştüğünü göstermek için G ’yi açık yazmalıyız.

İlk olarak noktasal kaynağın potansiyelini ele alalım.

$$h\left(r,\theta,\phi\right)=\frac{-1}{4\pi R}=\frac{-1}{4\pi\left|P-P_0\right|}$$

$$R=\sqrt{r_0^{\,2}-2rr_0\left[\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos\left(\phi-\phi_0\right)+r^2\right]}$$

açıkca $\Delta h=0$, $P\neq P_0$ dir. Ayrıca

$$\int_D \Delta h dv=\int_{|P-P_0|\le\varepsilon}\Delta h dv=\int_{|P-P_0|\le\varepsilon}\nabla.\nabla h dv$$

$$=\int_{|P-P_0|=\varepsilon}\frac{\partial h}{\partial n}ds=-\frac{1}{4\pi}\int_{|P-P_0|}\frac{\partial}{\partial R}\frac{1}{R}\Big|_{R=\varepsilon}ds$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{\varepsilon^2}\varepsilon^2.\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$=1$$

ve

$$\Delta\left(-1/4\pi R\right)=\delta\left(P,P_0\right)$$

olduğu sonucuna ulaşırız. Buradan

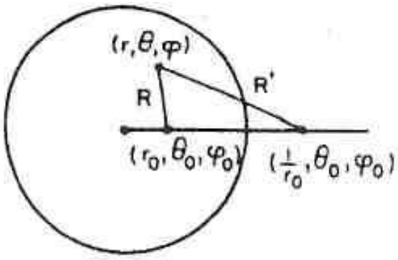
$$G=-\frac{1}{4\pi R}+g \qquad 2.6.5$$

elde ederiz ki burada *g;*

$$\Delta g = 0$$

$$g = \frac{1}{4\pi R} \quad \text{r =1 için} \qquad 2.6.6$$

olacak şekilde bir regüler fonksiyondur. Bu basit problemde *g,* şekil metodu olarak bilinen bir teknikle de bulunabilir. *r =1* olan çember ile ilgili olarak $P'_0\left(1/r_0,\theta_0,\phi_0\right)$ noktasının $P'_0\left(r_0,\theta_0,\phi_0\right)$ noktasının tersi olduğu söylenir.



$$R' = \sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 2\frac{r}{r_0}\left[\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos\left(\phi-\phi_0\right)\right] + r^2}$$

iken

$$g = \frac{1}{4\pi r_0 R'}$$

olur. Bu eşitlik $\Delta g = 0$ denklemini $r \leq 1$ için de sağlar. Basit bir hesaplamayla 2.6.6'daki tüm şartların sabit olduğunu görebiliriz.

$$G = \frac{-1}{4\pi\sqrt{r_0^2 - 2rr_0\cos\alpha + r^2}} + \frac{1}{4\pi\sqrt{1-2rr_0\cos\alpha + r_0^2 r^2}} \qquad 2.6.7$$

Burada G'nin, Green fonksiyonu olduğu ortaya çıkar. Bu durum bir noktasal yükün P_0'da ve ikinci noktasal yükün uygun bir uzaklıktaki P_0''de bulunmasıyla ortaya çıkacak potansiyel olarak yorumlanabilir. Bu etkiler yüzeyde *r=1* noktasında son bulur.

Son olarak basit bir hesaplama ile

$$\frac{\partial G}{\partial r}\Big|_{r=1} = \frac{1-r_0^2}{4\pi\left[1-2r_0\cos\alpha + r_0^2\right]^{3/2}}$$

eşitliğini 2.6.4'te yerine koyduğumuzda yine 2.6.1'i sağladığını görürüz.

2.7. Legendre Diferansiyel Denkleminin Tam Çözümü

Şimdiye kadar

$$L_t y = \left(1-t^2\right) y'' - 2ty' + n\left(n+1\right) y = 0 \qquad 2.7.1$$

diferansiyel denkleminin incelemesinde sadece, $P_n\left(t\right) = F\left(-n, n+1; 1; \frac{1-t}{2}\right)$'nin çözümüyle ilgilenildi.

Burada $P_n\left(t\right)$, n integral değeri için polinomdur. 2.7.1'in ikinci lineer bağımsız çözümünü bulmak için aşağıdaki şekilde ifade edilen 2.7.2 formunun integral gösterimini inceleyeceğiz.

$$\wp_n^*\left(t\right) = \int_a^b \frac{V\left(\tau\right)}{t-\tau} d\tau \qquad 2.7.2$$

Burada tekrar 2.4.4'te ele alınan metottan faydalanacağız.

2.7.1 de ki L_t operatörü self- adjoint formda tanımlanmıştır. Böylece

$$V\left(\tau\right) L_t \frac{1}{t-\tau} - \frac{1}{t-\tau} L_\tau V\left(\tau\right) = \frac{d}{d\tau}\left[\frac{1-\tau^2}{\left(t-\tau\right)^2} V\left(\tau\right) - \frac{1-\tau^2}{t-\tau} V'\left(\tau\right)\right]$$

yazabiliriz.

$$\begin{aligned} L_t \wp_n\left(t\right) &= \int_a^b V\left(\tau\right) L_t \frac{1}{t-\tau} d\tau \\ &= \int_a^b \frac{1}{t-\tau} L_\tau V\left(\tau\right) d\tau + \frac{\left(1-t^2\right)V}{t-\tau} - \frac{1-\tau^2}{t-\tau} V' \Big|_a^b = 0 \end{aligned}$$

Yukarıdaki integral terim a=-1, b=1 olursa sıfır olur. $V\left(\tau\right)$'nın $\tau \pm 1$'de de tekil olmamasını sağlar. $V\left(\tau\right)$'yi belirlemek için

$$L_\tau V\left(\tau\right) = 0$$

alalım.

Özel olarak ikinci bir bilinen çözüm içermesi için $V\left(\tau\right) = \frac{1}{2} P_n\left(\tau\right)$ alabiliriz

$$\wp_n(t) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{P_n(\tau)}{t-\tau} d\tau \qquad 2.7.3$$

eşitliği [-1,1] aralığında bulunmayan *t'ler* için sağlanır. $V(\tau)$ bir polinom olduğundan son noktaların ektisi kaybolur.

(* $Q_n(t)$ ya da $Q_n^m(t)$ $-1 < t < 1$ için fonksiyonun değeri anlamındadır

* Genel kompleks değeri için $\wp_n(t), \wp_n^m(t)$ sembollerini kullanacağız.)

Benzer şekilde $P_n^m(t)$ ve $P_n^m(t)$'yi sağlayan t değeri [-1,1] aralığında değildir. Son noktaların etkisi $V(\tau)$ polinom olduğundan dolayı kaybolur.

$\wp_n(t)$'nin analitik olabilmesi için aşağıdaki gibi devam edelim.

$$\wp_n(t) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{P_n(t)}{t-\tau} d\tau - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{P_n(t) - P_n(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

Sağdaki ilk terimi açık bir şekilde integre edilebilir. İkinci integral terimi hem t hem de τ 'nun bir polinomdur. Öyleyse

$$\wp_n(t) = \frac{1}{2}\log\frac{t+1}{t-1} P_n(t) - W_{n-1}(t) \qquad 2.7.4$$

yazabiliriz ki; burada $W_{n-1}(t)$, *(n-1).* dereceden bir polinom olup,

$$\lim_{|t|\to\infty} \int_{-1}^{1} \frac{d\tau}{t-\tau} = \lim_{|t|\to\infty} \log\frac{t+1}{t-1} = 0$$

olur. 2.7.4 bize açıkca $\wp_n(t)$'nin $t = \pm 1$ noktalarında yığılma noktalarına sahip olduğunu gösterir. 2.7.4 gibi 2.7.3 de $\wp_n(t)$' yi kompleks düzlemden $[-1,1]$ aralığı dışında kalan kısımda tanımlar.

$W_{n-1}(t)$'yi açık bir şekilde belirlemek için Legendre polinomlarını seriye açarsak

$$W_{n-1}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k P_k(t)$$

ve 2.7.4 eşitliğini kullanırsak

$$L_t \wp(t) = 2P_n'(t) - L_t W_{n-1}(t) = 0$$

yazabiliriz.

$$L_t W_{n-1}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k L_t P_k(t) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k (n-k)(n+k+1) P_k(t) = 2P_n'(t)$$

ve ortogonallık özelliğinden

$$\begin{aligned}\frac{(n-k)(n+k+1)A_k}{2k+1} &= \int_{-1}^{1} P_n'(t) P_k(t)\,dt \\ &= P_n(t)P_k(t)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_n(t) P_k'(t)\,dt \\ &= 1-(-1)^{n+k}, \quad n>k \text{ için}\end{aligned}$$

yazarız ve son olarak

$$\wp_n(t) = \frac{1}{2}\log\frac{t+1}{t-1} P_n(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2k+1)\left[1-(-1)^{n+k}\right]}{(n-k)(n+k+1)} P_k(t) \qquad 2.7.5$$

elde ederiz.

$|t|>1$ için

$$\frac{1}{t-\tau} = \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\tau}{t}\right)^k$$

ve 2.7.3'ü kullanarak

$$\begin{aligned}\wp_n(t) &= \frac{1}{2t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{t^k}\int_{-1}^{1} P_n(\tau)\tau^k\,d\tau \\ &= \frac{1}{2t^{n+1}}\int_{-1}^{1} P_n(\tau)\tau^n\,d\tau + o\left(\frac{1}{t^{n+2}}\right)\end{aligned} \qquad 2.7.6$$

yazabiliriz ki burada k<n için terimler sıfır olur. Yukarıdaki integrali değerlendirdiğimizde

$$P_n(t) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} t^n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k P_k(t)$$

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(t)\,dt = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}\int_{-1}^{1} P_n(t) t^n\,dt = \frac{2}{2n+1}$$

olduğunu görürüz.

$$\wp_n(t) = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)! t^{n+1}} + \ldots \qquad 2.7.7$$

2.7.6 daki gerekli integrasyonlar yapıldığında 2.7.7 deki katsayılar bulunabilir.

2.3.16'dan

$$P_n(t) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} t^n F\left(\frac{-n}{2}, \frac{-n+1}{2}, \frac{1}{2} - n; \frac{1}{t^2}\right)$$

olduğunu görürüz. n yerine $n-1$ değiştirmesi yaparak ikinci bir çözüm elde edilir. Öyleyse uygun sabitler c_1 ve c_2 için

$$c_1 \wp_n(t) + c_2 P_n(t) = \frac{1}{t^{n+1}} F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}; n + \frac{3}{2}; \frac{1}{t^2}\right)$$

yazılır.

$|t|$'nin her iki yanını karşılaştırarak ve 2.7.7'yi kullanarak $c_2 = 0$ olduğunu buluruz. ve buradan,

$$\wp_n(t) = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)! t^{(n+1)}} F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}; n + \frac{3}{2}; \frac{1}{t^2}\right) \qquad 2.7.8$$

olur. 2.7.6 ve 2.7.8 in karşılaştırılması ile

$$\int_{-1}^{1} P_n(t) t^k dt = \begin{cases} 0, & n+k \ \ tek \\ \dfrac{2^{n+1}(n!)^2 \Gamma((1+k)/2)\Gamma((2+k)/2)\Gamma((n+3)/2)}{(2n+1)!\Gamma((k-n+2)/2)\Gamma^2((1+n)/2)\Gamma((n+k+3)/2}, & n+k \ \ çift \end{cases}$$

elde edilir.

Herhangi iki y_1 ve y_2 çözümünün Wronskian'ı ve 2.7.1'i kullanırsak

$$W(y_1, y_2) = y_1 . y_2' - y_1' y_2 = c \exp\left(\int \frac{2t}{1-t^2} dt\right) = \frac{c}{1+t^2}$$

yazabiliriz. $|t|$ için

$$P_n(t)\wp_n'(t) \approx \frac{-n-1}{2n+1}.\frac{1}{t^2}+\ldots$$
$$P_n'(t)\wp_n(t) \approx \frac{n}{2n+1}.\frac{1}{t^2}+\ldots$$

yazabiliriz, böylece c=1 ve

$$W\left(P_n(t),\wp_n(t)\right)=\frac{1}{1-t^2}$$

2.7.9

olur. $\wp_n(t)$, t düzleminden $[-1,1]$ aralığının çıkarılmasıyla oluşan aralıkta tanımlanmıştır.

$$\wp_n(t\pm io)=\lim_{\substack{\sigma\to 0\\ \sigma>0}}\wp_n(t\pm i\sigma)\ t\in[-1,1]$$

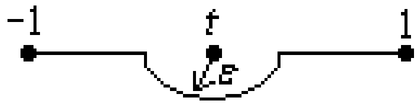
özellikle

$$\wp_n(t+io)-\wp_n(t-io)$$

tanımıyla ilgileneceğiz. Bunun için aşağıdaki integrali ele alalım.

$$I=\lim_{\substack{\sigma\to 0\\ \sigma>0}}\int_{-1}^{1}\frac{d\tau}{t+i\sigma-\tau}$$

ve integrasyonu aşağıdaki şekilde parçalayabiliriz.



Öyleyse

$$I=\lim_{\varepsilon\to\infty}\left\{\int_{-1}^{t-\varepsilon}+\int_{c_\varepsilon}+\int_{t+\varepsilon}^{1}\right\}=\int_{-1}^{1}\frac{d\tau}{t+i0-\tau}$$

olur. Burada c_ε sembolü, gösterilen yarım daire anlamına gelir.

$$\int_{-1}^{t-\varepsilon}\frac{d\tau}{t-\tau}+\int_{t+\varepsilon}^{1}\frac{d\tau}{t-\tau}=-\log(t-\tau)\Big|_{-1}^{t-\varepsilon}-\log(t-\tau)\Big|_{t+\varepsilon}^{1}=\log\frac{1+t}{1-t}$$

$$\int_{c_\varepsilon}^{d\tau}\frac{d\tau}{t-\tau}=\int_{-\pi}^{0}\frac{i\varepsilon e^{i\theta}}{-i\varepsilon e^{i\theta}}=-i\pi$$

Böylece

$$\int_{-1}^{1}\frac{dt}{t+i0-\tau}=\log\frac{1+t}{1-t}-i\pi$$

olduğu bulunur. Bu sonuçlardan aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$\wp_n(t+i0)=\frac{1}{2}P_n(t)\log\frac{1+t}{1-t}-W_{n-1}(t)-\frac{\pi i}{2}P_n(t)$$

$$\wp_n(t-i0)=\frac{1}{2}P_n(t)\log\frac{1+t}{1-t}-W_{n-1}(t)+\frac{\pi i}{2}P_n(t) \qquad 2.7.10$$

Burada

$$\wp_n(t+i0)-\wp_n(t-i0)=-\pi iP_n(t)$$

dır. [-1,1]'deki reel t için

$$\begin{aligned}Q_n(t)&=\frac{1}{2}\left[\wp_n(t+i0)+\wp_n(t-i0)\right]\\&=\frac{1}{2}P_n(t)\log\frac{1+t}{1-t}-W_{n-1}(t)\end{aligned} \qquad 2.7.11$$

yazabiliriz.

Şimdiye kadar sadece Legendre fonksiyonları ile ilgilendik fakat çok benzer bir süreçle Legendre denklemiyle ilgili bütün çözümleri de oluşturabiliriz.

$$\wp_n^m(t)=\left(t^2-1\right)^{m/2}D^m\wp_n(t) \qquad t\notin[-1,1] \qquad 2.7.12$$

tanımlayalım ve

$$\wp_n^m(t)=\frac{1}{2}\left[i^m\wp_n^m(t+i0)+(-i)^m\wp_n^m(t-i0)\right] \qquad t\in[-1,1] \qquad 2.7.13$$

yazalım.

2.7.8, 2.7.12 ve 2.2.16'yı kullanırsak;

$$\wp_n^m(t)=(-1)^m\frac{2^n n!(n+m)!\left(t^2-1\right)^{m/2}}{(2n+1)!}$$

$$\times t^{-(n+m+1)}F\left(\frac{n+m+1}{2},\frac{n+m+2}{2};n+\frac{3}{2};\frac{1}{t^2}\right) \qquad 2.7.14$$

yazabiliriz. Bütün önceki işlemlerimizde n ve m'i tamsayı olarak varsaydık. Fakat n ve m'in keyfi değerleri için geçerli olan gösterimleri kolaylıkla elde ederiz, bu durumda *v* ve μ sembollerini kullanalım

Böylece;

$$\wp_v^{\mu}(t) = \frac{\sqrt{n}}{2^{v+1}\Gamma(v+3/2)}\left(t^2-1\right)^{\mu/2}$$

$$\times t^{-(v+\mu+1)} F\left(\frac{v+\mu+1}{2}, \frac{v+\mu+2}{2}; v+\frac{3}{2}; \frac{1}{t^2}\right) \qquad 2.7.15$$

$$\wp_n^{m}(t) = e^{im\pi}\Gamma(n+m+1)\overline{\wp}_n^{m}(t) \qquad 2.7.16$$

olduğunu kolaylıkla doğrulayabiliriz. Benzer şekilde

$$\Re_v^{\mu}(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^{-\mu/2} F\left(-v, v+1; 1-\mu; \frac{1-t}{2}\right)$$

2.7.17

yazabiliriz.

μ pozitif tamsayıya dönüştüğünde uygun limit özelliğini kullanırsak 2.7.17 geçerli kalır $P_v^{\mu}(t)$ fonksiyonu [-1,1] parça düzleminde belirlenir.

$$P_v^{u}(t) = e^{i\mu\pi/2}\Re_v^{\mu}(t+i0) = e^{i\mu\pi/2}\Re_v^{\mu}(t-i0)$$

2.7.18

2.8. Asimptotik Formüller

Aşağıdaki diferensiyel denklemde

$$P_n'' + \cos\theta P_n' + n(n+1)P_n = 0$$

$$u = P_n(\cos\theta)\sqrt{\sin\theta}\ , \quad 0\langle\theta\langle\pi$$

değişken değiştirmesini yapalım. Öyleyse *u,*

$$u'' + \left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4\sin^2\theta}\right]u = 0\text{' i}$$

sağlar. $0 < \varepsilon < \theta \leq \pi - \varepsilon \leq \pi$ için ve yeterince büyük n'ler için ikinci terimin u katsayısı ilk iki terime göre ihmal edilebilir. Bu durumda

$$u(\theta) \approx A_n \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + \phi_n\right]$$

şeklindedir. Burada A_n ve ϕ_n integrasyon sabitleridir.

A_n 'i belirlemek için

$$\frac{2}{2n+1} = \int_{-1}^{1} P_n^2(t)dt = \int_{o}^{\pi} P_n^2(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} u^2(\theta)\, d\theta \approx A_n^{\,2} \int_0^{\pi} \cos^2\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + \phi_n\right] d\theta = \frac{A_n^{\,2}\pi}{2}$$

yazabiliriz. Burada $A_n \approx \sqrt{2/\pi n}$ dir.

ϕ_n 'nin tanımını n eşitliğine bağlı olan t için $P_n(t)$'nin tek ya da çift polinom olduğunu hatırlayarak tam olarak elde ederiz. Başka bir deyişle,

$$P_n(-t) = (-1)^n P_n(t)$$

ya da

$$P_n(\cos(\pi-\theta)) = (-1)^n P_n(\cos\theta)$$

dir. Öyleyse

$$\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(\pi-\theta) + \phi_n\right] = (-1)^n \cos\left[n+\frac{1}{2}\right]\theta + \phi_n$$

olur. Böylece

$$(-1)^n \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \phi_n - \frac{\pi}{2}\right] = (-1)^n \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + \phi_n\right]$$

yazabiliriz. Yukarıdaki ifadelerden

$$-\phi_n - \frac{\pi}{2} = \phi_n$$

$$\phi_n = \frac{-\pi}{4}$$

elde ederiz. Yeterince büyük n için bunu sonuçlandırırsak

$$P_n\left(\cos\theta\right) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin\theta}} \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]$$

olur.

Asimptotik bir seriyi elde etmenin kesin olarak gelişimi Watson Lemması'nın kullanıldığı uygun bir integral gösteriminin bulunmasıyla başarılabilinmiştir. 2.3.8'e (yani $P_n^m\left(t\right) = \left(-1\right)^m \left(1-t^2\right)^{m/2} D^m P_n\left(t\right) = \frac{\left(-1\right)^m \left(1-t^2\right)^{m/2}}{2^n.n!} D^{m+n}\left(t^2-1\right)^m$) dönersek,

$$P_n^m\left(\cos\theta\right) = \frac{i^m\left(n+m\right)!}{2\pi n!} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi\right]^n e^{m\psi} d\psi \qquad 2.8.1$$

değiştirilmiş formunu elde ederiz ve

$$W = e^{i\Psi}$$

yeni değişkeniyle 2.8.1'i aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$P_n^m\left(\cos\theta\right) = \frac{e^{im\pi/2}\left(n+m\right)!}{2\pi i n!} \int\limits_{|W|=1} \frac{e^{n\log\left[\cos\theta + \frac{1}{2}i\sin\theta(w+\frac{1}{w})\right]}}{w^{m+1}} dw . \qquad 2.8.2$$

Şimdi

$$f\left(w\right) = \log\left[\cos\theta + \frac{1}{2}i\sin\theta\left(w+\frac{1}{w}\right)\right]$$

fonksiyonunu ele alalım ve

$$f'\left(\pm 1\right) = 0$$

$$f''\left(\pm 1\right) = \pm\, i e^{\mp i\theta} \sin\theta$$

olduğunu gösterelim. W=1'e için *f(w)*'yi Taylor serisine açalım:

$$f(w) = i\theta + \frac{i}{2} e^{-i\theta} \sin\theta (w-1)^2 + \ldots$$

ve

$$-\tau(w) = \frac{-2ie^{i\theta}\left[f(w) - i\theta \right]}{\sin\theta} = (w-1)^2 + \ldots$$

alalım. *W*= -1 durumu benzer şekilde ele alınabilir Böylece τ 'nun bir fonksiyonu olarak *w*, *w*=1'e giderken bir yığılma noktasına sahiptir.

W için

$$W_{1,2} = 1 \pm i\tau^{1/2} + \ldots$$

olarak elde edilir.

Şimdi

$$I = \int_1^a \frac{e^{nf(w)}}{w^{m+1}} dw$$

2.8.3

integralini göz önüne alalım. Burada α, w- düzleminin birinci bölgesinde keyfi bir noktadır.

İntegrasyonu τ -düzleminde bir integrale dönüştürerek

$$I = \int_0^{\tau(a)} \frac{e^{n f(w_1(\tau))} dw_1(\tau)}{w_1^{m+1}(\tau) d\tau} d\tau$$

$$= e^{in\theta} \int_0^{\tau(a)} e^{-v\tau} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \tau^{k/2-1} d\tau$$

elde edilir ki burada

$$v = \frac{ine^{-i\theta}\sin\theta}{2}, \sum_{k.=0}^{\infty} \alpha_k \tau^{k/2-1} = w_1^{-m-1} \frac{dw_1}{d\tau}, \qquad a_0 = \frac{i}{2}$$

dir. $0 < \varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon < \pi$ için $\arg v$ >0 ve I yakınsak bir integraldir.

Watson Lemması'na göre

$$I \sim e^{in\theta} \sum_{0}^{\infty} a_k \int e^{-v\tau} \tau^{k/2-1} d\tau N \frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{V}} e^{in\theta} + \dots \qquad 2.8.4$$

$$= \frac{e^{i[(n+1/2)\theta + \pi/4]}}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{n \sin\theta}} + \dots$$

elde edilir.

2.8.2 integrali, 2.8.3, durumdaki dört integrale ayrıştırılabilir (iki tane w=-1 yakınlarında ve iki tane w=1 yakınlarında olmak üzere dört integral)

w=1 yakınlarında $w_{1,2}$ olmak üzere iki yığılma noktası vardır. Bunları 2.8.2'de düşünür ve

$$\frac{(n+m)!}{n!} \approx n^m \quad (m \; sabit, n \, büyük)$$

alırsak

$$P_n^m(\cos\theta) \approx n^m \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin\theta}} \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2}\right] \qquad 2.8.5$$

elde ederiz.

3. KLASİK FOURİER İNTEGRALİ

Sturm-Liouville problemi için en basit örnek $q(x)=0$'a karşılık gelen Klasik Fourier İntegrali durumudur. Eğer göz önüne alınan aralık reel düzlemde $[0,\infty)$ aralığı ve sıfır noktasındaki sınır koşulları

$$\varphi(0)=\sin\alpha,\quad \varphi'(0)=-\cos\alpha,\quad \theta(0)=\cos\alpha,\quad \theta'(0)=\sin\alpha$$

ile verilirse

$$\theta(x,\lambda)=\cos\alpha\cos\sqrt{\lambda}x+\lambda^{-1/2}\sin\alpha\sin\sqrt{\lambda}x,$$
$$\varphi(x,\lambda)=\sin\alpha\cos\sqrt{\lambda}x-\lambda^{-1/2}\cos\alpha\sin\sqrt{\lambda}x$$

olur.

$\operatorname{Im}\lambda>0$ için $e^{-i\sqrt{\lambda}x}$ $L^2(0,\infty)$'a ait olmadığından

$$\psi(x,\lambda)=\theta(x,\lambda)+m(\lambda)\varphi(x,\lambda)$$

fonksiyonu sabit bir çarpan kadar $e^{i\sqrt{\lambda}x}$'den farklıdır.

Sonuç olarak ;

$$m(\lambda)=\frac{\sin\alpha-i\sqrt{\lambda}\cos\alpha}{\cos\alpha+i\sqrt{\lambda}\sin\alpha}$$

elde edilir.

Eğer $\cot\alpha\le 0$ ise bu durumda λ<0 için bu fonksiyonun paydası sıfır olmaz. Bu nedenle

$$-\operatorname{Im}m(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{\lambda}}{\cos^2\alpha+\lambda\sin^2\alpha}, & \lambda>0,\\ 0, & \lambda<0\end{cases}\left(\cos\alpha<0\right),$$

yazabiliriz ve negatif spektrum olmadığından ters formüller aşağıdaki forma sahiptir.

$$\mathrm{F}(\lambda)=\int_0^\infty f(\lambda)\left\{\sin\alpha\cos\sqrt{\lambda}x-\lambda^{-1/2}\cos\alpha\sin\sqrt{\lambda}x\,dx\right\}$$

$$f(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty F(\lambda)\left\{\sin\alpha\cos\sqrt{\lambda}x-\lambda^{-1/2}\cos\alpha\sin\sqrt{\lambda}x\right\}\frac{\sqrt{\lambda}d\lambda}{\cos^2\alpha+\lambda\sin^2\alpha}\quad 3.1$$

Eğer $\cot\alpha=h>0$ ise bu durumda $\lambda=-h^2$ için m(λ) fonsiyonun paydası sıfır olur. Sonuç olarak bu durumda $\lambda=-h^2$ bir negatif öz değerdir ve buna karşılık gelen öz fonksiyon $e^{-hx}/\sqrt{2h}$ dır. Böylece 3.1. açılımının sağ tarafına $\frac{1}{2h}e^{-h\lambda}\int_0^\infty f(t)e^{-ht}dt$

teriminin eklenmesiyle

$$f(\lambda)=\frac{1}{2h}e^{-h\lambda}\int_0^\infty f(t)e^{-ht}dt$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty F(\lambda)\left\{\sin\alpha\cos\sqrt{\lambda}x-\lambda^{-1/2}\cos\alpha\sin\sqrt{\lambda}x\right\}\frac{\sqrt{\lambda}d\lambda}{\cos^2\alpha+\lambda\sin^2\alpha} \quad 3.2$$

elde edilir.

3.1 ve 3.2 açılımları elbette Fourier İntegralleri için genel varsayımlar altında, integralin doğrudan dikkate alınmasıyla kanıtlanabilir.

Not edelim ki 3.2 formülü aynı zamanda $q(x)=0$

için $f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)y(x,\lambda)d\rho(\lambda)$ formülünden elde edilir.Gerçekten bu durumda

$\mu(\lambda)=\sin\alpha$, $\mathrm{N}(\lambda)=-\cos\alpha/\sqrt{\lambda}$ ve

$$\eta^{'}(\lambda)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\lambda}(\mu^2(\lambda)+\mathrm{N}^2(\lambda))}=\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi(\cos^2+\lambda.\sin^2\alpha)} \qquad \text{dır.}$$

3.1. Fourier – Bessel Seri Açılımları

1. λ, x ve p reel sayılar olmak üzere

$$x\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{dz}{dx}+(\lambda x-\frac{p^2}{x})z=0 \quad 3.1.1$$

Bessel denklemini göz önüne alalım. $y=\sqrt{x}z$ değişken değiştirmesiyle 3.1.1 denklemi

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(\lambda-\frac{p^2-\frac{1}{4}}{x^2})y=0 \quad 3.1.2$$

formuna indirgenir.

Bu denklem aşağıdaki lineer bağımsız çözümlere sahiptir;

$$y_1(x,\lambda)=\sqrt{x}.J_P(sx), \quad y_2(x,\lambda)=\sqrt{z}.Y_P(sx)$$

Burada $J_P(t)$ birinci tür Bessel fonksiyonudur ve

$$Y_P(t)=\frac{J_P(t)\cos p\pi-J_{-P}(t)}{\sin p\pi}$$

de ikinci tür Bessel fonksiyonudur. Bessel fonksiyonlarının iyi bilinen kuvvet serisi açılımlarından $x \to 0$ için

$$y_1 = O(x^{p+\frac{1}{2}}) \ , \ \ y_2 = O(x^{-p+\frac{1}{2}})$$

yazabiliriz. $p \geq 1$ için bu değerlerden sadece y_1 sıfırın bir komşuluğunda karesi integrallenebilir olduğu elde edilir. Aksine eğer $0 \leq p < 1$ ise her iki çözüm karesi integrallenebilirdir.

α, β keyfi reel sayılar olmak üzere $0 < a < b$ olsun 3.1.1 denklemine

$$y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0 \qquad 3.1.3$$

$$y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0 \qquad 3.1.4$$

sınır şartlarını ekleyelim. 3.1.2 denklemi $[a,b]$ aralığında tekilliğe sahip olmadığından 3.1.3 ve 3.1.4 sınır koşullarıyla birlikte bir regüler Sturm-Liouville problemi oluşturur.

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ile öz değerleri ifade edelim; bu öz değerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \ldots$ olsun. Kökleri λ_n sayıları olan bir transsandal denklemi elde etmek için 3.1.2 denkleminin 3.1.4 sınır şartları altında çözümünü bulacağız. Kolaylıkla gösterilebilir ki bu çözüm

$$c = -\frac{y_2(b,\lambda)\cot\beta + y_2'(b,\lambda)}{y_1(b,\lambda)\cot\beta + y_1'(b,\lambda)} \qquad 3.1.5$$

olmak üzere;

$$y(x,\lambda) = cy_1(x,\lambda) + y_2(x,\lambda)$$

fonksiyonudur. Bu nedenle λ_n öz değeri,

$$y\,(\mathrm{a},\lambda)\cos\alpha + y'(a,\lambda)\sin\alpha = 0$$

denkleminin kökleridir. Bu denklem, c; 3.1.5 teki şekilde tanımlanmak üzere

$$\mathrm{c}\left\{y_1(a,\lambda)\cot\alpha + y_1'(a,\lambda)\ \right\} + \left\{y_2(a,\lambda)\cot\alpha + y_2'(a,\lambda)\ \right\} = 0 \qquad 3.2.6$$

formunda yazılabilir.

$x \to 0$ iken $y_2(x;\lambda) \to \infty$ ve $y_1(x,\lambda) \to 0$ olduğundan her sabit λ için $a \to 0$ iken $[a,b]$ aralığında $y(x,\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısı sınırlıdır.

3.1.2 denklemi ve 3.1.4 sınır şartı $(0,b]$ aralığında sonsuzda bir tek limit noktasıyla öz değerin bir ayrık spektrumunu belirler. Öz fonksiyonların karesi integrallenebilir olmalıdır. Bu durumda sadece $y_1(x,\lambda)=\sqrt{x}J_p(\sqrt{x\lambda})$ karesi integrallenebilir olduğundan $p\geq 1$ için $[0,b]$ aralığındaki öz değerleri belirlemek için $\sqrt{x}J_p(\sqrt{\lambda}x)$ fonksiyonuna 3.1.4 sınır şartını eklememiz gerekir ve böylece aşağıdaki transsandantal denklemi elde ederiz:

$$J_p(sb)\left\{\sqrt{b}\cos\beta+\frac{1}{2\sqrt{b}}\sin\beta\ \right\}+\sqrt{b}J_p'(sb)\sin\beta=0 \qquad 3.1.7$$

Eğer $\sin\beta=0$ ise o zaman daha basit

$$J_p(sb)=0 \qquad 3.1.8$$

denklemini elde ederiz. İkinci durumda öz değerleri (yani (3.1.8) denkleminin köklerini) s_n ile gösterelim. İyi bilinen formül; $\left[19,\ pp.147\right]$

$$\int_0^b xJ_p^2(sx)dx=\frac{b^2}{2}\left\{\left[J_p'(sb)\right]^2+(1-\frac{p^2}{s^2b^2})\left[J_p(sb)\right]^2\right\}$$

dir. Burada s yerine s_n koyarsak;

$$\int_0^b xJ_p^2(s_nx)dx=\frac{b^2}{2}\left[J_p'(s_nb)\right]^2$$

elde ederiz. Böylece normalleştirilmiş öz fonksiyonlar $\sqrt{2x}J_p(s_nx)/bJ_p'(s_nb)$ formuna sahip olurlar ve Fourier-Bessel eşitliği;

$$f(x)=\frac{2}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x}J_p(s_nx)}{J_p'(s_nb)}\int_0^b\sqrt{t}J_p(s_nt)f(t)dt \qquad 3.1.9$$

şeklinde yazılabilir.

2. p<1 için 3.1.2 denkleminin tüm çözümlerinin karesi integrallenebilirdir. Böylece bu durumda karesi integrallenebilirliğin gerekliliği 3.1.3 sınır şartıyla yer değiştirmez. 3.1.3 koşulunda α yerine a yazılırken (a'nın sıfıra gitmesi gerekir) gerekli olan sınır şartı elde edilir..

3.1.2 denklemi ilk türevi içermediğinden $y_1(x,\lambda)$ ve $y_2(x,\lambda)$'nın Wronskian determinatı sabittir, yani;

$$W\left\{y_1,y_2\right\}=y_1(x,\lambda)y_2'(x,\lambda)-y_2(x,\lambda)y_1'(x,\lambda)$$

$$=\sqrt{x}J_p(sx)\left\{\sqrt{x}Y_p(sx)\right\}'-\sqrt{x}Y_p(sx)\left\{\sqrt{x}J_p(sx)\right\}'$$

$$= sx\left\{ J_p(sx)Y_p'(sx) - Y_p(sx)J_p'(sx) \right\}$$

= sabit

$W\{y_1, y_2\}$'yi tamamen hesaplamak için iyi bilinen Bessel fonksiyonu için asimptotik formülleri kullanacağız. $[19, pp.226]$

$$J_p(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi.t}}\left[\cos(t - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) + 0(\frac{1}{t})\right] \qquad 3.1.10$$

$$Y_p(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi.t}}\left[\sin(t - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) + 0(\frac{1}{t})\right]$$

$$J_p'(t) = -\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left[\sin(t - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) + 0(\frac{1}{t})\right] \qquad 3.1.10'$$

$$Y_p'(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left[\cos\left(t - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{t}\right)\right]$$

$W\{y_1, y_2\}$ için formülde bu ifadeler göz önüne alınırsa ve sonra $x \to \infty$ alınırsa $W\{y_1, y_2\} = 2/\pi$ elde ederiz.

Varsayalım ki, $\beta = \pi/2$ yani $y'(b) = 0$ olsun. Aynı zamanda genelliği kaybetmeksizin $y(b) = 1$ alabiliriz.

Kolayca gösterilebilir ki;

$$y(x,\lambda) = \frac{1}{W\{y_1, y_2\}}\left\{ y_1(x,\lambda)y_2'(b,\lambda) - y_1'(b,\lambda)y_2(x,\lambda) \right\}$$

$$= \frac{\pi}{2}s\sqrt{bx}\left\{ J_p(sx)Y_p'(sb) - Y_p(sx)J_p'(sb) \right\} \qquad 3.1.11$$

dir. λ_n öz değerleri $y(a,\lambda)\cot\alpha + y'(a,\lambda) = 0$ denkleminden hemen belirlenir. $0 < p < 1$ olduğunu varsayalım;

$$Y_p(t) = \left\{ J_p(t)\cos p\pi - J_{-p}(t) \right\}\cos ecp\pi$$

olduğundan 3.1.11 i aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

$$y(x,\lambda)=-\frac{\pi s\sqrt{bx}}{2\sin p\pi}\left\{J_p(sx)J_{-p}(bs)-J_{-p}(sx)J_p{}'(bs)\right\} \qquad 3.1.11'$$

s sabit ve $x\to 0$ olmak üzere;

$$J_p(sx)=\frac{(sx)^p}{2^p\Gamma(1+p)}+O(x^{p+2}),\quad J_p{}'(sx)=\frac{px^{p-1}.s^p}{2^p\Gamma(1+p)}+O(x^{p+1})$$

yazabiliriz. Böylece

$$\begin{aligned} y(a,\lambda).\cot\alpha+y'(a,\lambda)=-\frac{\pi\sqrt{bs}}{2\sin p\pi}\Bigg\{&\frac{s^pJ'_{-p}(bs)}{2^p\Gamma(1+p)}\left[a^{1/2+p}\cot\alpha+\left(\frac{1}{2}+p\right)a^{-1/2+p}\right]\\ &-\frac{s^{-p}J'_p(bs)}{2^{-p}\Gamma(1-p)}\left[a^{1/2-p}\cot\alpha+\left(\frac{1}{2}-p\right)a^{-1/2+p}\right]\\ &+O(a^{\frac{5}{2}-p}\left|\cot\alpha\right|)+O(a^{3/2-p})\Bigg\} \end{aligned} \qquad 3.1.12$$

olur. Burada c keyfi bir sabit

$$\frac{a^{\frac{1}{2}-p}\cot\alpha+(\frac{1}{2}-p)a^{-\frac{1}{2}-p}}{2^{-p}\Gamma(1-p)}=c\frac{a^{\frac{1}{2}+p}.\cot\alpha+(\frac{1}{2}+p)a^{-\frac{1}{2}+p}}{2^p.\Gamma(1+p)} \qquad 3.1.13$$

$\cot\alpha$ için çözersek;

$$\cot\alpha=\frac{2^p\Gamma(1+p)(\frac{1}{2}-p)a^{-\frac{1}{2}-p}-c2^{-p}\Gamma(1-p)(\frac{1}{2}+p)a^{-\frac{1}{2}+p}}{c2^{-p}\Gamma(1-p)a^{\frac{1}{2}+p}-2^p\Gamma(1+p)a^{\frac{1}{2}-p}}=O(\frac{1}{a})$$

olur.

Bu nedenle

$$\mathrm{a}^{\frac{1}{2}+p}\cot\alpha+(\frac{1}{2}+p)a^{-\frac{1}{2}+p}=\frac{-2^{p+1}p\Gamma(1+p)}{c2^{-p}\Gamma(1-p)a^{\frac{1}{2}+p}-2^p\Gamma(1+p)a^{\frac{1}{2}-p}}\approx a^{p-\frac{1}{2}}$$

ve sonuç olarak eğer $\frac{3}{2}-p>p-\frac{1}{2}$ yani $p<1$ ise 3.1.12 deki O- terimleri ihmal edebiliriz.

3.1.12 ve 3.1.13 den 3.1.4 sınır şartının yerine aşağıdaki transandantal denklemi yazabiliriz.

$$s^pJ'_{-p}(bs)-cs^{-p}J_p{}'(bs)=0$$

veya

$$\lambda^{p} J_{-p}{}'(bs) - cJ_{p}{}'(bs) = 0 \qquad 3.1.14$$

dır. 3.1.14 denkleminin köklerini s_n ile ifade edebiliriz. s_n sayıları 3.1.4 ($\beta = \pi/2$ ile) ve 3.1.14 sınır koşullarıyla verilen 3.1.2 denkleminin öz değerleridir. Karşılık gelen $y_n(x)$ öz fonksiyonlarını 3.1.11′ de s yerine s_n alarak

$$y_n(x) = \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{bx}\,s_n}{2\sin p\pi}\left\{J_p(s_n x)J'_{-p}(bs_n) - J_{-p}(s_n x)J'_p(bs_n)\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{bx}\,s_n J_p{}'(bs_n)}{2\sin p\pi}\left\{c\lambda_n^{-p}J_p(s_n x) - J_{-p}(s_n x)\right\} \qquad 3.1.15$$

yazabiliriz.

Eğer $c = \infty$ ise genel Fourier-Bessel serilerinin p. dereceden açılımını ve $c = 0$ ise $-p$ dereceden açılımını elde ederiz.

Şimdi $p = 0$ alalım. Bu durumda;

$$Y_0(sx) = \frac{2}{\pi}\left\{\gamma + \ln\frac{sx}{2}\right\}\left\{1 + O(x^2)\right\}$$

$$Y_o{}'(sx) = \frac{2}{\pi.x.s} + O(x\left|\ln x\right|)$$

dir ki burada γ Euler sabitidir. Bu nedenle

$$y(a,\lambda)\cot\alpha + y'(a,\lambda) = \frac{\pi\sqrt{bs}}{2}\left\{\left[Y_o'(bs) - J_o'(bs)\frac{2}{\pi}(\gamma + \ln\frac{as}{2})\right]\right.$$

$$\left.\times(a^{\frac{1}{2}}\cot\alpha + \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}) - \frac{2}{2a^{\frac{1}{2}}}J_0'(bs) + O(a^{\frac{5}{2}}\left|\ln a\right|\left|\cot\alpha\right|) + O(a^{\frac{3}{2}}\left|\ln a\right|)\right\}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{bs}}{2}\left\{\left[J_0'(bs) - \frac{2}{\pi}J_0'(bs)\ln s\right](a^{\frac{1}{2}}\cot\alpha + \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}})\right.$$

$$\left. - J_o'(bs)\left[\frac{2}{\pi}(\gamma + \ln\frac{a}{2})(a^{\frac{1}{2}}\cot\alpha + \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}) + \frac{2}{\pi a^{\frac{1}{2}}}\right]\right\}$$

$$+ O(a^{\frac{5}{2}}\left|\ln a\right|\left|\cot\alpha\right|) + O(a^{\frac{3}{2}}\left|\ln a\right|)$$

$$\frac{2}{\pi}(\gamma + \ln\frac{a}{2})(a^{\frac{1}{2}}\cot\alpha + \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}) + \frac{2}{\pi a^{\frac{1}{2}}} = c(a^{\frac{1}{2}}\cot\alpha + \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}})$$

koyarak ve önceki benzer hesaplamaları taşıyarak öz değerlerin belirlediği aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$cJ_n'(bs) - \left\{ Y_o'(bs) - \frac{2}{\pi} J_o'(bs) \ln s \right\} = 0$$

$c = \infty$ için Fourier-Bessel seri açılımını elde ederiz. $\beta = 0$ için benzer açılımı incelemek mümkündür. Bu durumda özdeğerlerin belirlenmesi için

$$c\lambda^{-p} J_p(bs) - J_{-p}(bs) = 0 \qquad (p > 0)$$

$$cJ_o(bs) - \left\{ Y_o(bs) - \frac{2}{\pi} J_0(bs) \ln s \right\} = 0$$

denklemleri elde edilir.

3. Bilinen metotlar kullanılarak farklı öz değerlere karşılık gelen öz fonksiyonların ortogonal olduğu gösterilebilir. Ayrıca $[0, b]$ aralığında karesi integrallenebilir her $f(x)$ fonksiyonu için Parseval Eşitliği sağlanır. Parseval eşitliğinden Fourier-Bessel serilerinin sürekli bir $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığı ve $x > 0$ için toplamının $f(x)$ 'e eşit olduğu gösterilebilir.

Teorem 3.1. Eğer $f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa, yani;

1. $f(x)$, $[0.b]$ aralığında ikinci mertebeden sürekli türeve sahip

2. $f(b) = 0$

3. $f(0) = f'(0) = 0$ ise

bu taktirde $f(x)$ in Fourier-Bessel serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır.

İspat: $a_n^2 = \int_0^b t J_p^2(s_n t) dt$ olmak üzere

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x} J_p(s_n x) \frac{1}{a_n^2} \int_0^b \sqrt{t} J_p(s_n t) f(t) dt \qquad 3.1.16$$

alalım. 3.1.10 asimptotik formülünden dolayı

$$a_n^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^b \cos^2(s_n t - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) dt + O(\frac{1}{\lambda_n}) = O(1)$$

olur. Daha sonra iki kez kısmi integrasyon alınırsa, 2 ve 3 koşullarından

$$a_n = \int_0^b \sqrt{t} J_p(s_n t) f(t) dt$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n} \int_0^b \left\{ \left[\sqrt{t} J_p(s_n t) \right]'' - \frac{p^2 - \frac{1}{4}}{t^2} \left[\sqrt{t} J_p(s_n t) \right] \right\} f(t) dt$$

$$= \frac{1}{\lambda_n} \int_o^b \sqrt{t} J_p(s_n t) \left\{ f''(t) - \frac{p^2 - \frac{1}{4}}{t^2} f(t) \right\} dt \qquad 3.1.17$$

elde edilir. Ayrıca $f(t)/t^2$ fonksiyonunun sınırlılığı 3 koşulundan kolaylıkla gösterilebilir. Böylece 3.1.17 den

$$a_n = O(1/\lambda_n) \qquad 3.1.18$$

yazabiliriz. 3.1.10 asimptotik formülden $n \to \infty$ iken $\lambda_n = O(n^2)$ olduğu da kolayca gösterilebilir.

Böylece 3.1.18 den 3.1.16 Fourier-Bessel serisinin mutlak ve düzgün yakınsak olduğu elde edilir ve teorem ispatlanmış olur. 3.1.10 asimptotik formüller kullanılarak tıpkı klasik Sturm-Liouville probleminde olduğu gibi Fourier-Bessel serilerinin de aynı şartlar altında yakınsak olduğu gösterilebilir.

3.2. Fourier- Hankel İntegral Açılımı

1. $(0,\infty)$ aralığında 3.1.2 denkleminin öz fonksiyonlarına göre bir açılımı göz önüne alalım. $(0,\infty)$ aralığında bir öz fonksiyon açılımı $b \to \infty$ iken, sınırlı $[0,b]$ aralığında bir açılımdan elde edilebilir. İlk olarak $p \geq 1$ halini göz önüne alalım ve 3.1.4 sınır şartında $\beta = \pi/2$ olduğunu varsayalım.

s_n, $J_p(bs) = 0$ denkleminin $J_p(x)$ ve $J_p'(x)$ Bessel Fonksiyonları için asimptotik formülleri kullanarak

$$s_{n+1} - s_n = \frac{\pi}{b} + o(\frac{1}{b})$$

olduğu gösterilebilir. Ayrıca

$$f(x)=\int_0^\infty sF(s)\sqrt{x}J_p(sx)ds$$
$$F(s)=\int_0^\infty f(x)\sqrt{x}J_p(sx)dx \qquad 3.2.1$$

formüllerini ve

$$\int_0^\infty f^2(x)dx=\int_0^\infty sF^2(s)ds \qquad 3.2.2$$

Parseval eşitliğini elde ederiz.

3.2.1 formülleri Fourier-Hankel formülleri olarak adlandırılır.

2. Varsayalım ki $0<p<1$ olsun. Önceki kısımda gösterildiği gibi bu bölümde de $[0,b]$ sınırlı bir aralık için öz değerler, c keyfi bir sabit olmak üzere

$$\lambda^p J'_{-p}(bs)-cJ'_p(bs)=0 \qquad 3.2.3$$

denkleminden elde edilir.

3.2.3 denkleminin ardışık reel köklerini λ_1 ve λ_2 ile ifade edelim. 3.1.10 ve $3.1.10'$ asimptotik formüllerinden kolayca gösterilebilir ki $b\to\infty$ iken

$$\sqrt{\lambda_2}-\sqrt{\lambda_1}=\frac{\pi}{b}+o\left(\frac{1}{b}\right) \qquad 3.2.4$$

dir.

3.2.15 ve sınır probleminin homojenliğinden

$$\phi_n(x)=cJ_p(s_nx)-\lambda_n^pJ_{-p}(s_nx)$$

fonksiyonlarının özfonksiyonlar olduğunu söyleyebiliriz. $[0,\infty)$ aralığında sınır probleminin spektrumunu belirlemek için

$$\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b}\int_0^b\phi_n^2(x)dx$$

limitini hesaplamamız gerekir. 3.1.10 asimptotik formülünden sabit $\lambda>0$ ve büyük x'ler için

$$\phi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}s_n^{\frac{1}{2}}\left\{c\cos(s_nx-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4})-\lambda_n^p\cos(s_nx+\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4})+O(\frac{1}{x})\right\}$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}s_n^{\frac{1}{2}}\left\{c\cos(s_nx-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4})-\lambda_n^p\cos(s_nx-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+p\pi)+O(\frac{1}{x})\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}s_n^{-\frac{1}{2}}\left\{(c-\lambda_n^p\cos p\pi)\cos(s_n x-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4})-\lambda_n^p\sin(s_n x-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4})\sin p\pi+O(\frac{1}{x})\right\}$$

yazabiliriz. Bu nedenle

$$\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b}\int_0^b\phi_n^2(x)dx=\frac{1}{\pi}s_n^{-1}\left\{(c-\lambda_n^p\cos p\pi)^2+\lambda_n^{2p}\sin^2 p\pi\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi.s_n}(c^2-2c\lambda_n^p.\cos p\pi+\lambda_n^{2p})$$

dir. Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonu için benzer formülü Bessel fonksiyonu için de yazabiliriz, yani

$$\Delta\rho_b(\lambda)=\sum_{S<S_p\le S+\Delta}\frac{1}{\int_0^b\phi_n^2(x)dx},$$

3.2.4 den

$$\Delta\rho_b(\lambda)=\sum_{s\langle s_n\langle s+\Delta}\frac{s_{n+1}-s_n}{\left\{\frac{\pi}{b}+o\left(\frac{1}{b}\right)\right\}\int_0^b\phi_n^2(x)dx}$$

$$\sum_{S<S_n<S+\Delta}\left\{\frac{s_n}{c^2-2c\lambda_n^p\cos p\pi+\lambda_n^{2p}}+o(1)\right\}(s_{n+1}-s_n)\to$$

$$\to\int_S^{S+\Delta}\frac{sds}{c^2-2cs^{2p}\cos p\pi+s^{4p}}$$

dir.

Sonuç olarak, $\lambda>0$ için spektrum süreklidir. Eğer negatif spektrum yoksa bu taktirde dönüşüm formülü

$$f(x)=\int_0^\infty\frac{\sqrt{x}\left\{(cJ_p(xs)-s^{2p}J_{-p}(xs)\right\}}{c^2-2cs^{2p}\cos p\pi+s^{4p}}sds\int_0^\infty\sqrt{t}\left\{cJ_p(ts)-s^{2p}J_{-p}(ts)\right\}f(t)dt \qquad 3.2.5$$

formuna sahiptir. Şimdi negatif spektrumun c'nin hangi değerleri için mevcut olduğunu inceleyelim.

$\lambda<0$, $\sqrt{\lambda}=i\sigma$ $(\sigma>0)$ olsun. 3.2.3 denkleminden

$$(-1)^p\sigma^{2p}J_{-p}{}'(bi\sigma)-cJ_p'(bi\sigma)=0 \qquad 3.2.6$$

elde edilir. Bilindiği gibi [19]

$$J_p(iz)=e^{1/2.p\pi.i}.\mathrm{I}_p(z) \qquad 3.2.7$$

dir. Burada

$$\mathrm{I}_p(z)=\sum_{k=o}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(p+k+1)}.(\frac{z}{2})^{p+2k}$$

dır. 3.2.7 eşitliğini diferansiyellersek;

$$J'_p(iz)=e^{1/2(p\pi-1)i}\mathrm{I}'_p(z)$$

elde ederiz. Böylece 3.2.6 denkleminden

$$e^{p\pi i}\sigma^{2p}e^{1/2(-p\pi-1)i}.\mathrm{I}'_{-p}(b\sigma)-ce^{1/2(p\pi-1)i}\mathrm{I}'_p(b\sigma)=0$$

veya

$$\sigma^{2p}\mathrm{I}'_{-p}(b\sigma)-c\mathrm{I}'_p(b\sigma)=0$$

bulunur, yani;

$$\mathrm{I}'_p(b\sigma)/\mathrm{I}'_{-p}(b\sigma)=\sigma^{2p}/c \qquad 3.2.8$$

dir.

Sadece imajiner argümanlı Bessel fonksiyonu için asimptotik formülleri göz önüne alırsak $b\to\infty$ iken 3.2.8 in sol tarafının 1'e yaklaştığını yazabiliriz. Bu nedenle eğer $c<0$ ise yeterince büyük b için 3.2.8 denkleminin çözümü yoktur ve sonuç olarak bu durumda negatif bir spektrum bulunmadığından açılım formülü 3.2.5 formunda yazılır.[19]

$c>0$ için sadece bir negatif özdeğer $\sigma=c^{1/2p}$ bulunur. Karşılık gelen öz fonksiyon $\sqrt{\lambda}=i.c^{1/2p}$ olduğundan 3.1.1 den;

$$\phi(x,\lambda)=\sqrt{x}\left\{cJ_p(xic^{\frac{1}{2p}})-(i)^{2p}cJ_{-p}(xic^{\frac{1}{2p}})\right\}=-\frac{2}{\pi}\sin p\pi\sqrt{x}cK_p(xc^{\frac{1}{2p}})$$

elde edilir. $-(2c/\pi)\sin p\pi$ çarpanı atılabilir ve özfonksiyonu $\sqrt{x}K_p(xc^{\frac{1}{2p}})$ şeklinde yazabiliriz. Bu fonksiyonu normalleştirmek için Bessel fonksiyonunlar teorisinden bilinen

$$\int_0^{\infty}xK_p^2(xc^{\frac{1}{2p}})dx=\frac{1}{c^p}\int_0^{\infty}tK_p^2(t)dt=\frac{p}{2c^p}\frac{\pi}{\sin p.\pi}$$

formülü kullanalım.[8, pp 316] Böylece $c>0$ hali için

$$\frac{2c^p \sin p\pi}{p\pi}\sqrt{x}K_p(xc^{\frac{1}{2p}})\int_0^\infty \sqrt{t}K_p(tc^{\frac{1}{2p}})f(t)dt$$

terimini 3.2.5 in sağ tarafına eklememiz gerekir. Benzer hesaplamalar $p=0$ hali için de düşünülebilir. Sonuç olarak

$$f(x)=\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\left\{cJ_0(xs)-Y_0(xs)+\frac{2}{\pi}J_0(xs)Ins\right\}}{\left\{c+\frac{2}{\pi}\ln s\right\}^2+1}sds$$

$$\times\int_0^\infty \sqrt{t}\left\{cJ_0(ts)-Y_0(ts)+\frac{2}{\pi}J_0(ts)\ln s\right\}f(t)dt+2\sqrt{x}K_0(xe^{-\frac{1}{2}xc})\int_0^\infty \sqrt{t}K_o(te^{-\frac{x.c}{2}})f(t)dt$$

yazabiliriz. Böylece bu durumda spektrum herhangi bir $c<+\infty$ için sadece bir negatif özdeğer içerir. $c=+\infty$ için integrale eklenen terim sıfırlanır ve sıfırıncı dereceden Bessel fonksiyonu için bir Fourier-Hankel açılımı elde edilir.

3. 3.2.2'den genelleştirilmiş Parseval Eşitliği kolaylıkla elde edilir;

$$\int_0^\infty f(x)g(x)dx=\int_0^\infty F(s)G(s)ds \qquad 3.2.9$$

Burada $f(x)$'e göre $F(s)$'nin tanımlanmasına benzer şekilde $g(x)$'e göre $G(s)$ tanımlanır.

Teorem 3.2. Eğer $f(x)$ tüm $x>0$ değerleri için sürekli ve

$$\int_0^\infty sF(s)\sqrt{x}J_p(sx)ds \qquad 3.2.10$$

integrali her sonlu aralıkta düzgün yakınsak ise

$$f(x)=\int_0^\infty F(s)\sqrt{x}J_p(sx)ds \qquad 3.2.11$$

dir

Teorem 3.3. Eğer tüm $x\geq 0$ değerleri için

1. $f(x)$ ikinci mertebeden sürekli türeve sahip,

2. $f(0)=f'(0)=0,$

3. $f(+\infty)=0\; ve\; f(x), f'(x), f''(x)\in L^2(0,\infty)$ ise bu taktirde 3.2.10 integrali tüm $x\geq 0$ değerleri için mutlak ve düzgün yakınsaktır ve böylece 3.2.11 açılımı da geçerli olur.

4. Pek çok diferansiyel denklemin uygun değişken değiştirmelerle Bessel denklemine indirgenebildiği bilinmektedir. Özel olarak aşağıdaki denklemi göz önüne alalım:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2p+1}{x}\frac{dy}{dx}+\lambda y=0 \qquad 3.2.12$$

Bu denklem Euler tarafından göz önüne alınmıştır. Eğer $z=x^{p+\frac{1}{2}}y$ değişken değiştirmesini yaparsak

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\left(\lambda-\frac{p^2-1/4}{x^2}\right)z=0$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemin çözümleri $\sqrt{x}J_p(\sqrt{\lambda}x)\ ve\ \sqrt{x}Y_p(\sqrt{\lambda}x)$ fonksiyonlarıdır. Böylece 3.2.12 denklemi

$$J_p(\sqrt{\lambda}x)\Big/\left(\sqrt{\lambda}x\right)^p, Y_p(\sqrt{\lambda}x)\Big/\left(\sqrt{\lambda}x\right)^p$$

çözümlerine sahiptir.

$$j_p(\sqrt{\lambda}x)=\frac{2^p\Gamma(p+1)J_p(\sqrt{\lambda}x)}{\left(\sqrt{\lambda}x\right)^p}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{k}+1)k!}\lambda^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

olsun. Burada $j_p(\sqrt{\lambda}x)$ fonksiyonunun $j_p(0)=1\,ve\ j_p'(0)=0$ durumlarını sağladığı kolaylıkla gösterilebilir.

$j_p(\sqrt{\lambda}x)$ fonksiyonlarına göre Fourier-Hankel integral açılımı için aşağıdaki formülleri yazalım. Bu amaçla ilk olarak Fourier-Hankel dönüşüm formüllerini yani 3.2.1 formüllerini yazalım:

$$f(x)=\int_0^{\infty}sF(s)\sqrt{x}J_p(sx)dx\,,\quad F(s)=\int_0^{\infty}\sqrt{x}f(x)J_p(sx)dx$$

$f(x)=x^{p+\frac{1}{2}}g(x)$ alalım. Böylece

$$F(s)=\int_0^{\infty}\sqrt{x}f(x)J_p(sx)dx=\frac{s^p}{2^p\Gamma(p+1)}\int_0^{\infty}g(x)j_p(sx)x^{2p+1}dx=\frac{s^p}{2^p\Gamma(p+1)}\Phi(s)$$

olur. Bu nedenle

$$x^{p+\frac{1}{2}}g(x)=\frac{1}{2^p\Gamma(p+1)}\int_0^{\infty}sF(s)\sqrt{x}(sx)^p j_p(sx)ds$$

$$=\frac{1}{2^{2p}\Gamma^2(p+1)}\int_0^\infty \Phi(s)s^{2p+1}x^{p+\frac{1}{2}}j_p(sx)dx$$

$$=\frac{x^{p+\frac{1}{2}}}{2^{2p}\Gamma^2(p+1)}\int_0^\infty \Phi(s)\,j_p(sx)s^{2p+1}ds$$

yazabiliriz. Böylece $J_p(sx)$ fonksiyonlarına göre açılım aşağıdaki şekildedir;

$$\Phi(s)=\int_0^\infty g(x)\,j_p(sx)x^{2p+1}dx$$

$$g(x)=\frac{1}{2^{2p}\Gamma^2(p+1)}\int_0^\infty \Phi(s)\,j_p(sx)s^{2p+1}ds$$

3.3. Ortogonal Cebysev-Hermite Fonksiyonlarına Göre Açılım

1. Öncelikle Cebysev-Hermite polinomlarını oluşturalım. Bu amaçla

$$\psi(x,t)=e^{-t^2+2.t.x}=e^{x^2}e^{-(t-x)^2}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım.

$\psi(x,t)$ fonksiyonunu t'nin kuvvetlerine göre açarsak

$$\psi(x,t)=e^{x^2}.e^{-(t-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n$$

olur. Buradan

$$H_n(x)=\frac{\partial^n\psi(x,t)}{\partial t^n}\Big|_{t=0}=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} \qquad 3.3.1$$

elde edilir.

$H_n(x)$ fonksiyonları Cebysev-Hermite polinomları olarak adlandırılır. Biz bu polinomları sağlayan diferansiyel denklemi oluşturalım:

$\partial\psi(x,t)/\partial x=2t\psi(x,t)$ 'den;

$$H_n'(x)=2nH_{n-1}(x) \qquad (n\geq 1) \qquad 3.3.2$$

elde edilir ve

$$\partial\psi(x,t)/\partial t+2(t-x)\psi(x,t)=0$$

eşitliğinden

$$H_{n+1}(x)-2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0 \quad (n\geq 1)$$

elde edilir.

Son iki formülden aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir.

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 \qquad (n \geq 0) \qquad 3.3.3$$

İlk Cebysev-Hermite polinomları

$H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 8x^3 - 12$, $H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$

şeklindedir. $H_n(x)$ Cebysev-Hermite polinomlarının genel ifadesi

$$H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{2!}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} + \ldots$$

dır. En son terim

$$(-1)^{n/2}\frac{n!}{(n/2)!} \qquad , \quad \text{n çift ise}$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}2x \qquad , \quad \text{n tek ise}$$

şeklindedir.

$p(x) = e^{-x^2}$ ağırlık fonksiyonuna göre $(-\infty, \infty)$ aralığında Cebysev-Hermite polinomlarının ortogonal olduğunu gösterelim. Gerçekten 3.3.1 formülünü kullanarak;

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}dx$$

elde edilir. $n > m$ için son integrale kısmi integrasyon uygulayarak, 3.3.2 yi de göz önüne alarak e^{-x^2} nin tüm türevlerinin $x \to \infty$ iken sıfır olduğu bulunur.

Buradan;

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n'(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = (-1)^{n-1}2m\int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(x)\frac{d^{n-1}e^{-x^2}}{dx^{n-1}}dx = \ldots$$

$$\ldots = (-1)^{n-m}2^m m!\int_{-\infty}^{\infty} H_0(x)\frac{d^{n-m}e^{-x^2}}{dx^{n-m}} = 0$$

$n = m$ için aynı yöntemle $\int_{-\infty}^{\infty} H_n^2 e^{-x^2}dx = 2^n n!\sqrt{\pi}$ olduğunu gösterebiliriz. Bu nedenle

$$\varphi_n(x) = \frac{H_n(x)e^{\frac{-x^2}{2}}}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}} \qquad (n = 0,1,2\ldots) \qquad 3.3.4$$

fonksiyonları $(-\infty, \infty)$ doğru ekseni üzerinde ortonormal sistem oluşturur ve bu fonksiyonlara ortonormal Cebysev-Hermite fonksiyonları denir.

2. $-\infty < x < \infty$, $q(x) = x^2$ olsun. Bu durumda

$$y'' + (\lambda - x^2)y = 0 \qquad 3.3.5$$

denklemini çözmemiz gerekir. $x \to \pm\infty$ iken $q(x) = x^2 \to \infty$ olduğundan $\ell(y) \equiv -y'' + x^2 y$ operatörünün spektrumu doğru ekseninin tamamında ayrık olduğu bilinmektedir. $[11, pp\ 254]$ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ doğru ekseninin tamamında 3.3.5 denkleminin spektrumu olsun.

3.3.5 denkleminin $L^2(-\infty, \infty)$ sınıfından olan çözümlerinin 3.3.4 formülleri ile tanımlı $\varphi_n(x)$ fonksiyonlarıyla çakıştığını gösterelim. Gerçekten $y = e^{-x^2/2} z$ olsun. 3.3.5 denklemi

$$z'' - 2xz' + (\lambda - 1)z = 0 \qquad 3.3.6$$

şeklindedir. Eğer

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad 3.3.7$$

3.3.6 denkleminin bir çözümüyse; bu denklemden,sıfır olmayan katsayılar için 3.3.6 dan aşağıdaki rekürans formülünü elde ederiz:

$$\frac{a_{k+2}}{a_k} = \frac{2k + 1 - \lambda}{(k+1)(k+2)} \qquad 3.3.8$$

3.3.8 bağıntısı 3.3.6 denkleminin çift olan çözümü $z_1(x)$ ve tek olan çözümü $z_2(x)$ şeklinde iki çözüme sahip olduğunu gösterir.

3.3.8 den şu sonucu elde ederiz; 3.3.7 serisi ya sonludur (yani $\lambda = 2k + 1$: negatif olmayan bir tek sayı) ki bu durumda 3.3.6 denklemi 3.3.3 denklemiyle ve çözümüyle çakışır dolayısıyla çözüm bir Cebysev-Hermite polinomu olur ya da sıfır olmayan sonsuz sayıda katsayılara sahiptir ve tüm x değerleri için yakınsaktır.

İkinci durumda tüm a_k'lar belirli bir k'dan itibaren aynı işarete sahiptir. a_k'lar pozitif olacak şekilde, $a_{k+2} > a_k/(k+2)$ eşitsizliği söz konusudur ve büyük x'ler için;

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} a_k . x^k > c.e^{x^2/2} \quad , \quad c \neq 0$$

dir.

Dolayısıyla $y = z.e^{-x^2/2}$ reel düzlemde karesi integrallenebilir değildir. Böylece $L^2(-\infty,\infty)$ sınıfında bulunan ortogonal Cebysev-Hermite fonksiyonları problemimizin tek çözümleridir. $L^2(-\infty,\infty)$ uzayında ortogonal Cebysev – Hermite fonksiyonlarının tamlığı genel teoriden elde edilir. $\left[11, pp136\right]$

3.4. Legendre Polinomları ve Bağlayıcı Legendre Fonksiyonlarına Göre Açılım

1. Aşağıdaki formüllerle tanımlanan polinomlara Legendre polinomları denir:

$$P_0(x) = 1\ ,\ \ P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

Biz $\left[-1,1\right]$ aralığında $P_n(x)$ polinomlarının ortogonal olduğunu ispatlayalım. Gerçekten $u_n(x) = (x^2-1)^n$ olacak şekilde her negatif olmayan $m < n$ için

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) x^m dx = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} u_n^{(n)}(x) x^m dx = 0$$

elde ederiz. $u_n(x)'in\ \ (n-1)$. mertebeden türevleri, integrasyon sınırlarında sıfır olmak üzere yukarıdaki eşitliğin sağlandığını, tekrarlanan kısmi integrasyonla kontrol etmek mümkündür. Buradan

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = 0 \qquad (m < n)$$

elde edilir, yani iki farklı polinom karşılıklı ortogonaldir. Normalleştirilmiş sabitleri hesaplamak için tekrarlanan kısmi integrasyon uygularsak,

$$\int_{-1}^{1} u_n^{(n)}(x) u_n^{(n)}(x) dx = -\int_{-1}^{1} u_n^{(n-1)}(x) u_n^{(n-1)}(x) dx = \int_{-1}^{1} u_n^{(n-2)}(x) u_n^{(n-2)}(x) dx = ...$$

$$= (-1)^n \int_{-1}^{1} u_n^{(2n)}(x) dx$$

$$= (2n)! \int_{-1}^{1} (1-x)^n (1+x)^n dx$$

olur. Daha sonra

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^n (1+x)^n dx = \frac{n}{n+1}\int_{-1}^{1} (1-x)^{n-1} (1+x)^{n+1} dx = ...$$

$$\ldots = \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}\int_{-1}^{1}(1+x)^{2n}dx = \frac{(n!)^2}{(2n)!(2n+1)}2^{2n+1}$$

olduğundan

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left\{u_n^{(n)}(x)\right\}^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

yazabiliriz. Bu nedenle normalleştirilmiş polinomlar

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,.\,P_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,\frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \qquad 3.4.1$$

şeklinde ifade edilir. $P_n(x)$ Legendre polinomları, herhangi bir n için

$$P_n(1) = 1 \qquad 3.4.2$$

özelliğine sahiptirler ki bu Leibnitz kuralını uygulayarak ve $(x-1)^n.(x+1)^n$ ifadesinin $n.$ türevinde $x=1$ koyarak kolaylıkla görülebilir.

2. Legendre polinomları potansiyel teoride önemli bir rol oynar. Bağlayıcı fonksiyonun açılımında katsayılar olarak ortaya çıkarlar. Gerçekten potansiyel teoride bağlayıcı fonksiyon iki nokta arasındaki uzaklığın karşılığı olarak tanımlanır ki bu noktalardan biri orijinden birim uzaklıkta diğeri ise $u<1$ olmak üzere orijinden u birim uzaklıktadır ve onların yarıçapı vektörleri arasındaki açı $\arccos x$, yani

$$\psi(x,u) = \frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}}$$

dir. Şimdi $t = -2xu+u^2$ olmak üzere

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}} = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 - \frac{5}{16}t^3 + \ldots + (-1)^n\frac{(2n-1)!}{(2n)!}t^n + \ldots$$

açılımını yazabiliriz. Daha sonra bağlayıcı fonksiyon için

$$\psi(x,u) = \frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}} = \sum_{n=o}^{\infty}Q_n(x)u^n \qquad 3.4.3$$

fonksiyonun açılımını elde ederiz. Burada $Q_n(x)$ fonksiyonlarının daha önce tanımlanan Legendre fonksiyonlarıyla özdeş olduğunu gösterelim. Bunun için önce $Q_n(x)$ fonksiyonlarının $[-1,1]$ aralığı boyunca ortogonal bir sistem oluşturduğunu ispatlayalım. 3.4.3 den

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-2xv+v^2}}=\sum_{n,m=0}^{\infty}Q_n(x)Q_m(x)u^n u^m \qquad 3.4.4$$

yazabiliriz. 3.4.4 ün sol tarafını x'e göre -1 den 1'e integre edersek

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{\left(1-2xu+u^2\right)\left(1-2xv+v^2\right)}}=\frac{1}{\sqrt{uv}}\ln\frac{1+\sqrt{uv}}{1-\sqrt{uv}}$$

elde ederiz.

$$\ln\frac{1+t}{1-t}=2+(1+\frac{1}{3}t^2+\frac{1}{5}t^4+...+\frac{1}{2n+1}t^{2n}+...)$$

açılımı göz önüne alırsa

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{(1-2xu+u^2)(1-2xv+v^2)}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}u^n v^n \qquad 3.4.5$$

yazabiliriz. Şimdi 3.4.4'ün sağ tarafına x'e göre -1 den 1'e integre edelim ve 3.4.5 açılımıyla karşılaştıralım. Bu takdirde

$$\int_{-1}^{1}Q_n(x)Q_m(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n \text{ için}\\ \dfrac{2}{2n+1}, & m=n \text{ için}\end{cases}$$

elde ederiz ki bu durumda $Q_n(x)$ fonksiyonları $[-1,1]$ aralığında ortogonal bir sistem oluştururlar. $Q_n(x)$ fonksiyonlarının polinom olduğu elde edilir. Diğer bir deyişle tıpkı $P_n(x)$ Legendre polinomları gibi $Q_n(x)$ polinomları da, $Q_n(x)$ fonksiyonları tarafından ortogonalleştirilmiş, $1, x, x^2...$ sisteminden elde edilmiş bir sistem olarak kabul edilebilir. Ortogonalleştirme sürecinden; sabit çarpanlar göz önüne alınmadığında sadece bir tane ortogonal polinomlar sisteminin mevcut olduğunu söyleyebiliriz öyle ki bu her n için $Q_n(x)\equiv P_n(x)$ olduğunu yazabilmemiz için yeterlidir.

$P_n(x)$ polinomları gibi $Q_n(x)$ polinomları da 3.4.2 ifadesini sağlar yani $Q_n(1)=1$ dir. Gerçekten 3.4.3 te $x=1$ yazarsak

$$\psi(1,u)=\frac{1}{1-u}=1+u+u^2+...+u^n+...=\sum_{h=0}^{\infty}Q_n(1)u^n$$

olur ki bu önerimizin sağladığını gösterir.

3. Legendre polinomları için bir diferansiyel denklem be bir rekürans formülü elde edelim.

3.4.3'ü u ya göre diferansiyelleyerek ve sonra $P_n(x)$ yerine $Q_n(x)$ alarak;

$$\frac{\partial\psi(xu)}{\partial u}=\frac{x-u}{\sqrt{1-2xu+u^2}.(1-2xu+u^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)u^n$$

veya

$$(x-u)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)u^n=(1-2xu+u^2)\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)u^{n-1}$$

elde ederiz. Burada u^n'nin katsayıları eşitlenerek üç ardışık Legendre polinomları için aşağıdaki formülü elde yazabiliriz:

$$(n+1)P_{n+1}(x)-x(2n+1)P_n(x)+nP_{n-1}(x)=0$$

İlk Legendre polinomlarının görüntüsü

$P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, $P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$, $P_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x$, $P_4(x)=\frac{35}{8}x^4-\frac{15}{4}x^2+\frac{3}{8}$

şeklindedirler.

$y(x)=\frac{1}{2^n.n!}\cdot\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ Legendre polinomu ikinci mertebeden, homojen, lineer

$$(x^2-1)y''+2xy'-n(n+1)y=0 \qquad 3.4.6$$

veya

$$\left[(x^2-1)y'\right]'-n(n+1)y=0 \qquad 3.4.6'$$

diferansiyel denklemini sağlar. Bu, $(x^2-1).u'=2nx.u$ eşitliğinin $(n+1)$ kez diferansiyellenmesiyle ispatlanabilir. Burada $u^{(n)}(x)$ in yerine $2^n.n!.y$ yazmak üzere $u=(x^2-1)^n$ dir.

3.4.6 eşitliğinden $P_n(x)$ ikinci dereceden bir denklemin çözümü olduğundan $P_n(x)$ polinomunun bütün kökleri farklıdır. Ayrıca $P_n(x)$ polinomunun tanımından ve Rolle teoreminden, $P_n(x)$ in köklerinin tamamının reel ve $[-1,1]$ aralığında olduğunu yazabiliriz.

4. Aşağıdaki şekilde verilen bir Sturm-Liouville problemini göz önüne alalım:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\left\{\lambda+\left(\frac{1}{4}\tan^2 t+\frac{1}{2}\right)\right\}u=0 \qquad \left(\frac{-\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$$

$$u\left(\frac{-\pi}{2}\right)=u\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \qquad 3.4.7$$

Burada $t \to \pm\frac{\pi}{2}$ için $q(t)=-\frac{1}{4}\left(\tan^2 t+\frac{1}{2}\right)\to -\infty$ olduğundan singüler bir durum söz konusudur. 3.4.7 probleminin öz değerlerini ve öz fonksiyonlarını bulalım. 3.4.7 probleminde

$$x=\sin t,\ y=u/\sqrt{\cos t} \qquad 3.4.8$$

değişken değiştirmesini yaparsak denklem;

$$(1-x^2).y''-2x.y'+\lambda.y=0 \qquad 3.4.9$$

denklemine dönüşür. Ayrıca $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ aralığı da $[-1,1]$ aralığına dönüşür ve sınır şartları, $y(x)$'in 3.4.9 denkleminin her iki tekil noktasında (yani ± 1noktalarında) sonlu kaldığı durum haline gelir. $\lambda=n.(n+1)$'in öz değerler ve $P_n(x)$ Legendre polinomlarının ise bu problemin öz fonksiyonları olduğu bilinmektedir.

Bu özdeğer probleminin bir tek çözümünün $[-1,1]$ aralığında sınırlı olan Legendre polinomları olduğunu gösterelim. Not edelim ki $u=f(x)$ 3.4.9 diferansiyel denklemini sağlarsa, $f(x)$ fonksiyonu ve sonuç olarak $f(x)+f(-x)$ ve $f(x)-f(-x)$ fonksiyonları oluşur ki bunlardan birincisi çift ve ikincisi tektir . $u=f(x)$ fonksiyonu hipotezden sıfıra eşit olmadığından bu fonksiyonlardan en az biri aynı şekilde sıfıra eşit olamaz. Böylece her tek ve her çift çözümün olduğunu göstermek yeterlidir. $-1\le x\le 1$ aralığında sürekli; 3.4.9 denklemin çözümü u bir Legendre polinomudur ve λ $n(n+1)$ formunda bir sayı olmalıdır. $u=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ olmak üzere 3.4.9 dan katsayılar için aşağıdaki rekürans formülünü yazabiliriz.

$$a_{n+2}=\frac{n.(n+1)-\lambda}{(n+1)+(n+2)}\cdot a_n \qquad \text{(n=0,1,2,...)} \qquad 3.4.10$$

Eğer $u(x)$ bir çift fonksiyonsa tek n'ler için a_n lerin tümü sıfıra eşittir. Eğer $u(x)$ bir tek fonksiyon ise n çift olmak üzere a_n katsayıları sıfıra eşit olur. $n-2h>0$ durumu için 3.4.10'dan

$$a_n = \frac{1}{n}\left[1-\frac{\lambda}{(n-1).(n-2)}\right]\left[1-\frac{1}{(n-3).(n-4)}\right]\left[1-\frac{\lambda}{(n-2h+1).(n-2h)}\right].k.a_k \qquad 3.4.11$$

elde ederiz ki burada $k = n-2h$ dır.

Eğer sadece $\lambda \quad n(n+1)$ formunda bir sayı ise $u(x)$ için seri sonludur. Bu durumda $u(x)$ $n.$ dereceden bir Legendre polinomudur. λ 'nın diğer bütün değerleri için sonsuz bir seri elde ederiz. Temel testlerden bu serinin $|x|<1$ için yakınsaklığı gösterilebilir. 3.4.11 çarpımında bütün çarpanlar, büyük k sabitinin pozitif olduğunu verir (a_k nın pozitif olduğunu varsayalım). 3.4.11 de köşeli parantezlerin çarpımı n i arttırdığından iyi bilinen teoremlere göre pozitif bir limite sahiptir. Bu taktirde c pozitif bir sabit olmak üzere $n>k$ için $a_n > c/n$ dir. Bu nedenle $\sum_{v=k}^{\infty} a_V.x^V$, $x=1$ noktasının komşuluğunda sınırlı olamaz. Buradan $\lambda \neq n.(n+1)$ sayısının öz değer olmadığı elde edilir..

3.4.1 ve 3.4.8 den; 3.4.7 probleminin öz değerlerinin $\lambda_n = n.(n+1)$ sayıları olduğunu elde ederiz, ve normalleştirmiş öz fonksiyonlar

$$u_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{n}}\,.P_n(\sin t)\sqrt{\cos t} = \sqrt{\frac{2n+1}{n}}\cdot\sqrt{\frac{\cos t}{2^n n!}}\cdot\frac{d^n(-\cos^2 t)^n}{d^n \sin t} \qquad 3.4.12$$

şeklindedir. 3.4.1 sisteminin $L^2(-1,1)$ de tamlığı Weierstrass yakınsaklık teoreminden elde edilir.

5. Legendre polinomları için 3.4.9 diferansiyel denkleminden diğer ortogonal sistemleri kolaylıkla türetebiliriz. 3.4.9'u x e göre diferensiyelleyerek u' fonksiyonu için diferensiyel denklem elde ederiz ve tıpkı daha önceki gibi sadece $\lambda = n.(n+1)$ için $[-1,1]$ aralığının her iki uç noktalarında regüler bir çözüm olduğunu ortaya çıkarır ki bu çözüm $P'(x)$ dir. $P'(x)$ için elde edilmiş denklem bu yüzden self-adjoint değildir ancak $P'(x).\sqrt{1-x^2} = z_n(x)$ fonksiyonuyla self-adjointe dönüştürülebilir. Böylece yeni denklem

$$\left\{(1-x^2).z'\right\} - \frac{z}{1-x^2} + \lambda.z = 0$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemin öz değerleri $\lambda = n.(n+1)$ $(n=1,2,...)$ dir ve öz fonksiyonları $z_n(x) = \sqrt{1-x^2}.P_n'(x)$ dir. $z_n(x) = P_{n,1}(x)$ fonksiyonları birinci mertebeden bağlayıcı Legendre fonksiyonu olarak tanımlanır. $P_{n,0}(x)$ fonksiyonuna sıfırıncı mertebeden Legendre fonksiyonu denir. $P_{n,1}(x)$ Legendre fonksiyonları $m \neq n$ için $\int_{-1}^{1} P_{n,1}(x).P_{m,1}(x).dx = 0$ ortogonallık koşulunu sağlar. Aynı yolla, 3.4.9 denklemi h kez diferensiyellenirse $\left(\sqrt{1-x^2}\right)^4 \frac{d^h}{dx^h} P_n(x) = P_{n,h}(x)$ fonksiyonu için;

$$\left\{(1-x^2)z'\right\}' - \frac{h^2 z}{1-x^2} + \lambda z = 0 \qquad 3.4.12'$$

denklemini elde ederiz. Bu denklem $\lambda_n = n.(n+1)$, $(n = h, h+1, ...)$ öz değerlerine sahiptir ve bu öz değerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar $P_{n,h}(x)$ $[-1.1]$ aralığı boyunca karşılıklı ortogonaldir ve h. mertebeden bağlayıcı Legendre fonksiyonları olarak adlandırılır.

$$\int_{-1}^{1} P_{n,h}^2(x)dx = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+h)!}{(n-h)!}$$

$3.4.12'$ diferansiyel denklemin tüm öz değer ve öz fonksiyonları sıfırıncı mertebeden Legendre fonksiyonları için kullanılan aynı yöntemle elde edilebilir.

3.5. Cebysev-Laguerre Polinomlarının Açılımı

1. $n.$ dereceden Cebysev-Laguerre Polinomu

$$\ell_n(x) = e^x d^n(x^n e^{-x}) / dx^n$$

eşitliğiyle tanımlanır. Kolayca görülebilir ki $\ell_n(x)$ polinomu $n.$ dereceden bir polinomdur. Leibnitz formülünden dolayı

$$\ell_n(x) = e^x \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} .n.(n-1)...(k+1).x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{n-k} . \binom{n}{k} .n.(n-1).....(n-k+1).x^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{n-k} \cdot \frac{[n.(n-1)...(n-k+1)]^2}{k!} \cdot x^{n-k}$$

$$= (-1)^n.(x^n - \frac{n^2}{1!} \cdot x^{n-1} + \frac{n^2.(n-1)^2}{2!} \cdot \frac{n^2.(n-1)^2}{2!} \cdot x^{n-2} - ... + (-1)^n.n!)$$

olur. İlk Cebysev-Laguerre polinomları

$$\ell_0(x)=1$$

$$\ell_1(x)=-x+1$$

$$\ell_2(x)=x^2-4x+2$$

$$\ell_3(x)=-x^3+9x^2-18x+6$$

$$\ell_4(x)=x^4-16x^3+72x^2-96x+24$$

şeklindedir.

Reküans formüllerini ve $\ell_n(x)$ fonksiyonları için bir diferensiyel denklem elde etmek için

$$\psi(x,t)=\frac{1}{1-t}e^{-\frac{xt}{1-t}}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Her bir n için

$$\ell_n(x)=\partial^n\psi(x,t)/\partial t^n\Big|_{t=0}$$

olduğunu ispatlayalım. Gerçekten $\ell_n(x)$ in tanımından

$$\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\ell_n(x)}{n!}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k!}x^k t^n$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{k!}\frac{t^k}{(1-t)^{k+1}}=\frac{1}{1-t}e^{-\frac{x.t}{1-t}}=\psi(x,t) \qquad 3.5.1$$

yazarız. $(1-t)^2.\partial\psi(x,t)/\partial t=(1-t-\lambda)\psi(x,t)$ bağıntısı ve 3.5.1 formülünden

$$(1-2t+t^2)\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\ell_n(x)}{(n-1)!}\cdot t^{n-1}=(1-t-x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ell_n(x)}{n!}t^n$$

denkliği elde edilir. t'nin kuvvetlerine göre katsayıları eşitlenerek aşağıdaki rekürans formülüne varırız:

$$\ell_{n+1}(x)-(2n+1-x)\ell_n(x)+n^2\ell_{n-1}(x)=0 \qquad (n\geq 1)$$

Bu formül ve $(1-t).\partial\psi(x,t)/\partial x=-t\psi(x,t)$ bağıntısından benzer tarzda elde edilen $\ell_n'(x)-n\ell_{n-1}'(x)=-n\ell_{n-1}(x)$ $n\geq 1$ formülünden $x\ell_n'(x)=n\ell_n(x)-n^2\ell_{n-1}(x)$ $(n\geq 1)$ formülünü ve Cebysev-Laguerre polinomları için ikinci mertebeden lineer homojen

$$xy''+(1-x)y'+ny=0 \qquad 3.5.2$$

denklemini elde ederiz.

$(0,\infty)$ aralığında e^{-x} ağırlık fonksiyonuyla ortogonal sistemden Cebysev-Laguerre polinomları için

$$\int_0^\infty e^{-x}\ell_n(x)\ell_m(x)dx = 0 \quad (m<n)$$

yazabiliriz. Ortogonallik

$$\int_0^\infty e^{-x}x^k\ell_n(x)dx = \int_0^\infty x^k \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})dx = -k\int_0^\infty x^{k-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^n e^{-x})dx$$

$$= k(k-1)\int_0^\infty x^{k-2}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^n.e^{-x})dx = ...$$

$$\ldots = (-1)^k k!\int_0^\infty \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x^n.e^{-x})dx = 0 \qquad n>k \text{ için}$$

eşitliğinden elde edilir. Normlaştırıcı katsayılar ise aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$\int_0^\infty e^{-x}\ell_n^2(x)dx = \int_0^\infty (-1)^n x^n \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})dx = n!\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = (n!)^2$$

Bu nedenle $(0,\infty)$ aralığında ortogonal normlaştırılmış sistemi ifade eden

$$\varphi_n(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}\ell_n(x)}{n!} \qquad (n=0,1,2,...)$$

fonksiyonlar ortonormal Cebysev-Laguerre fonksiyonları olarak adlandırılır.

2.

$$u'' + \left\{\lambda - \left(\frac{t^2}{16} - \frac{1}{4t^2} - \frac{1}{2}\right)\right\}.u = 0 \quad (0 \le t \le \infty) \qquad 3.5.3$$

denklemini göz önüne alalım. $x = t^2/4$, $y(x) = u(t)t^{-1/2}e^{t^2/8}$ değişken değiştirmeleriyle 3.5.3 denklemi

$$xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0 \quad (0 \le t < \infty) \qquad 3.5.4$$

formuna indirgenir.

$t \to \infty$ iken 3.5.3 denkleminde $q(t) = \frac{t^2}{16} - \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}$ monoton olarak $+\infty$ a yaklaştığından 3.5.3 ün spektrumu ayrıktır. Diğer bir ifadeyle 3.5.4 denklemi 3.5.2 denklemiyle çakışır, bunun için özdeğer λ_n'ler ve öz fonksiyonlar Cebysev-Laguerre polinomlarıdır. 3.5.4 denkleminin herhangi öz fonksiyonlara sahip olmadığı Hermite polinomları için kullanılan yöntemle ispatlanabilir.

Sonuç olarak 3.5.3'ün öz değerleri $\lambda_n = n$ ve öz fonksiyonları

$$u_n(t) = \sqrt{t}e^{-t^2/8}\ell_n(\frac{t^2}{4}) \text{ dir.}$$

3. Legendre fonksiyonları göz önüne alındığında diferensiyellenerek ve uygun bir çarpanla çarpılarak yüksek mertebeden Laguerre fonksiyonları elde edilir. Ayrıca bu fonksiyonlar benzer diferensiyel denklemleri sağlar. Öncelikle 3.5.4 denklemi m kez diferensiyellenirse

$$u = \ell_n^m(x) = \frac{d^m}{dx^m}\ell_{-n}(x)$$

fonksiyonları elde edilir ki bu fonksiyonlar

$$xu'' + (m+1-x)u' + (\lambda - m)u = 0 \qquad 3.5.5$$

diferansiyel denklemini sağlar. Bu denklemin self adjoint formu aşağıdaki gibidir:

$$(x^{m+1}e^{-x}u')' + x^m e^{-x}(\lambda - m)u = 0$$

Ortogonal fonksiyonlar $v = x^{m/2}e^{-x/2}\ell_n^m(x)$ dir ve bu fonksiyonlar

$$(xv')' + (\frac{1-m}{2} - \frac{x}{2} - \frac{m^2}{4x})v + \lambda v = 0$$

Sturm-Liouville denklem türünü sağlar. Bu fonksiyonların herhangi diğer öz değerlere ve öz fonksiyonlara sahip olmadığını göstermek için 3.5.5 denkleminde $u = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu . x^\nu$ kuvvet serilerini göz önüne alırsak katsayılar için

$$a_\nu = \frac{a_0}{\nu!} \cdot \frac{(m-\lambda)...(m-\lambda+\nu-1)}{(m+1)...(m+\nu)}$$

olarak elde ederiz.

λ nın keyfi bir değeri için a_ν katsayılarının işareti sabittir. ν nin bazı başlangıç değerleri ve x in bütün değerleri için seriler yakınsaktır. Sonuç olarak bu, $0 \le x < \infty$ için regüler olan 3.5.5 denkleminin gerçekten bir regüler çözümü olduğunu gösterir. $\lambda = n$ $(n > m)$ bir tam değeri için seriler sonludur ve bu nedenle bir polinomdur. λ nin diğer her değeri için c uygun bir sabit ve r pozitif bir tamsayı olmak üzere $|a_\nu| > c/\nu!.\nu^r$ formunda bir sınır elde edilir. Fakat buradan $x \to \infty$ iken çözümümüzün $\frac{e^x}{x^r}$ den yavaş olmayacak şekilde sonsuza yaklaştığını gösterir. Böylece bu durumun göz önüne alınan problemin bir özfonksiyonu olmadığı ispatlanmış olur.

KAYNAKLAR

[1] Kreyszing, E. ,Introductory fonctional Analysis with Applications, New York,1978

[2] Liousternik, L. A. and Sobolev, V.J. , Elements of Functional Analiysis, Frederick Ungar Publishing Company, New York, 1961

[3] Levitan, B.M. and I.S. Sargsjan, Introduction to Spectral Teory:Selfadjoint Ordinary Differantial Operators,Amer. Math. Soc. Transl. Math.

[4] Olver, F. W. J. ,Introduction to Asymptotics and Special Functions, 1974

[5] Markushevich, A. I. , Introduction to Analytic Functions Theory I, II, Moskow.1977

[6] Kolmogorov, A. N. And Fomin, S. V., Elements of Functional Analysys and Theory of Functions, Moscow, Nauka, 1972

[7] Titchmarsh, E.C. , Eigenfuction Expansions Associated With Second-Order Differential Equations I,Oxford, Clarenden Pres,1964

[8] Titchmarsh,E.C.,Eigenfuction Expansions Associated With Second-Order Differential Equations II,Oxford,Clarenden Pres,1958

[9] Hochstadt, H.,The Functions of Mathematical Physics (A Series of Pure and Applied Mathematics), Brooklyn, New-York,1978

[10] Olver, F.W.J., Introduction to Asymtotics and Spesial Functions, New-York and London, Academic Pres,1974

[11] Levitan, B. M., and Sargsjan, I. S., Intrduction to Spectral Theory:Selfadjoint Ordinary Differential Operatörs, Moscow, Nauka, 1970

[12] Levitan, B. M., Expansions in Characteristic Functions of Differential Equations of the Second Order, GITTL, Moscow,1950

[13] Coddington, E.A.,and Levinson, N., Theory of Ordinary Differential Equations, IL, Moscow,1958

[14] Ince E.L., Ordinary Differential Equations , London,New-York & Bombay,1926

[15] Naimark, M.A.,Linear Differential Operators, Ungar, New-York,1969

[16] Marcenko ,V.A., Some problems in the theory of second-order differantial operators, Dqjl. Akad. Nauk SSSR, 1950

[17] Levitan , B. M. And M. G. Gaysmov,Determination of a differantial equations by two of its spectra, Russion Math. Surveys, 1964

[18] Suzuki, T. , Inverse problems for the heat equation, (Japanese) Sugaku, 1982

[19] Watson, Theory of Bessel Functions,I.L., 1949