

**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

**4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA KANAL YÜZEYLERİNİN
BAZI KARAKTERİZASYONLARI**

İLİM KİŞİ

KOCAELİ 2018

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA KANAL YÜZEYLERİNİN
BAZI KARAKTERİZASYONLARI

İLİM KİŞİ




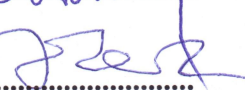
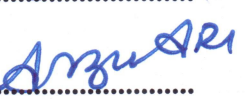
Doç. Dr. Günay ÖZTÜRK
Danışman, Kocaeli Üniversitesi

Prof. Dr. Kadri ARSLAN
Jüri Üyesi, Uludağ Üniversitesi

Prof. Dr. Murat TOSUN
Jüri Üyesi, Sakarya Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Ahmet ZOR
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Ayşe Arzu ARI
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniversitesi


.....

.....

.....

.....

.....

Tezin Savunulduğu Tarih: 11.05.2018

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Kanal yüzeyi diferensiyel geometrinin temel konularından olan yüzeyler teorisinin özel bir sınıfı olup çalışmalarda oldukça sık kullanılmaktadır. Bir parametrelili küre ailelerinin zarfı olarak tanımlanan kanal yüzeyi dönel yüzeyin bir genellemesi olarak düşünülebilir. Bu çalışmada paralel öteleme çatısı yardımıyla elde edilen kanal yüzeyi ve bu yüzeyin özel bir hali olan tüp yüzeyi ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

Doktora süresince her türlü kolaylığı sağlayan, çalışmamın her safhasında engin bilgi ve tecrübesinden yararlandığım, bu çalışma konusunu veren ve bu çalışmayı yöneten danışmanım Sayın Doç. Dr. Günay ÖZTÜRK'e, fikir ve görüşlerinden yararlandığım değerli hocam Sayın Prof. Dr. Kadri ARSLAN'a, bu tezin yazılmasına tecrübeleriyle katkıda bulunan hocalarım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ahmet ZOR'a ve Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ayşe Arzu ARI'ya, araştırma görevlisi olarak göreve başladığım andan itibaren yardım ve desteklerini esirgemeyen Matematik Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Halis AYGÜN'e, her zaman yanımda olduğunu hissettiğim sevgili arkadaşım Arş. Gör. İrem ÇAY'a teşekkür ederim.

Tüm eğitim hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, her zaman yanımda olan, sevgileriyle ayakta durmamı sağlayan sevgili aileme, ayrıca moralimi her zaman en üst düzeyde tutmamı sağlayan sevgili eşim Emre KİŞİ'ye teşekkür ederim.

2211-Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı destekten ötürü TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı birimine teşekkür ederim.

Mayıs-2018

İlim KİŞİ

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
GİRİŞ	1
1. TEMEL KAVRAMLAR.....	4
1.1. Riemann Manifoldları	4
1.2. IE^n Öklid Uzayında Eğriler.....	7
1.3. IE^n Öklid Uzayında Yüzeyleyler	10
2. ÖKLİD UZAYLARINDA KANAL YÜZEYLERİ.....	16
2.1. IE^3 Öklid Uzayında Kanal Yüzeyleyleri.....	16
2.2. IE^4 Öklid Uzayında Frenet Çatısı Yardımıyla Elde Edilen Kanal Yüzeyi	21
3. IE^4 ÖKLİD UZAYINDA PARALEL ÖTELEME ÇATISI YARDIMIYLA ELDE EDİLEN KANAL YÜZEYİ.....	25
3.1. IE^4 Öklid Uzayında Paralel Öteleme Çatısı Yardımıyla Elde Edilen Kanal Yüzeyi.....	25
3.2. IE^4 Öklid Uzayında Paralel Öteleme Çatısı Yardımıyla Elde Edilen Kanal Yüzeyinin Gauss Eğriliği.....	35
3.3. IE^4 Öklid Uzayında Paralel Öteleme Çatısı Yardımıyla Elde Edilen Kanal Yüzeyinin Ortalama Eğriliği.....	37
3.4. IE^4 Öklid Uzayında Paralel Öteleme Çatısı Yardımıyla Elde Edilen Kanal Yüzeyinin Normal Eğriliği	40
3.5. IE^4 Öklid Uzayında Paralel Öteleme Çatısı Yardımıyla Elde Edilen Kanal Yüzeyinin Weingarten Yüzeyi Olma Durumu	42
3.6. IE^4 Öklid Uzayında Paralel Öteleme Çatısı Yardımıyla Elde Edilen Kanal Yüzeyinin Eğrilik Elipsi	45
4. IE^4 ÖKLİD UZAYINDA NOKTASAL 1-TİPİNDE GAUSS DÖNÜŞÜMÜNE SAHİP PARALEL ÖTELEME ÇATISI YARDIMIYLA ELDE EDİLEN TÜP YÜZEYİ.....	50
4.1. IE^n Öklid Uzayında Gauss Dönüşümü	50
4.2. IE^4 Öklid Uzayında Noktasal 1-Tipinde Gauss Dönüşümüne Sahip Paralel Öteleme Çatısı Yardımıyla Elde Edilen Tüp Yüzeyi.....	52
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	74
KAYNAKLAR	75
EKLER.....	80
KİŞİSEL YAYINLAR VE ESERLER	83
ÖZGEÇMİŞ	86

ŞEKİLLER DİZİNİ

- Şekil 3.1. Yarıçap fonksiyonu $r(u) = u^2$ olan kanal yüzeyi..... 29
- Şekil 3.2. Yarıçap fonksiyonu $r(u) = 2u + 6$ olan kanal yüzeyi..... 30
- Şekil 3.3. Yarıçap fonksiyonu $r(u) = \cos u^2$ olan kanal yüzeyi..... 30



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

A_{N_k}	: Şekil operatörü
C^∞	: Diferensiyellenebilme
c_{ij}^k	: İkinci temel form katsayıları
Δ	: Laplace operatörü
∂	: Kısmi türev
E_i	: Frenet vektör alanı
g	: Metrik tensör
G	: Gauss dönüşümü
γ	: Birim hızlı eğri
h	: İkinci temel form
\bar{H}	: Ortalama eğrilik vektörü
\mathbb{E}^n	: n-boyutlu Öklid uzayı
\mathbb{R}	: Reel sayılar kümesi
κ_i	: Frenet çatısına göre eğrilik fonksiyonu
k_i	: Paralel öteleme çatısına göre eğrilik fonksiyonu
ξ	: Normal vektör alanı
$\chi(M)$: M manifoldunun C^∞ vektör alanları uzayı
M	: Manifold
p	: Nokta
R	: Riemann eğrilik tensörü
S	: Yüzey
$T(M)$: Tanjant uzay
$T^\perp M$: Normal uzay
$T_p M$: $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay
x	: İmersiyon
∇	: Kovaryant türev
\langle , \rangle	: İç çarpım fonksiyonu

4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA KANAL YÜZEYLERİNİN BAZI KARAKTERİZASYONLARI

ÖZET

Bu çalışmada, \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında kanal yüzeyleri ve tüp yüzeyleri ele alınmıştır. Öncelikle \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında kanal yüzeyleri paralel öteleme çatısı yardımıyla tanıtılmış, daha sonra bu yüzeyin düz ve minimal olma koşulları elde edilmiştir. \mathbb{IE}^4 uzayında paralel öteleme çatısı yardımıyla elde edilen kanal yüzeylerinin ve tüp yüzeylerinin Weingarten yüzeyi ve lineer Weingarten yüzeyi olma durumları ele alınmıştır. \mathbb{IE}^4 uzayında kanal yüzeylerinin normal vektörleri elde edilerek bu vektörler yardımıyla yüzeyin eğrilik elipsi ele alınmış ve normal uzayın orijininin sınıflandırılması verilmiştir. Son olarak \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında tüp yüzeyinin noktasal 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahip olması için gerekli ve yeterli koşullar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Eğrilik Elipsi, Gauss Dönüşümü, Kanal Yüzeyi, Paralel Öteleme Çatısı, Weingarten Yüzeyi.

SOME CHARACTERIZATIONS OF CANAL SURFACES IN THE FOUR DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE

ABSTRACT

In this thesis, canal surfaces and tubular surfaces are handled in 4-dimensional Euclidean space \mathbb{E}^4 . At first, canal surfaces are introduced by means of the parallel transport frame vectors in the 4-dimensional Euclidean space \mathbb{E}^4 . Then the conditions for these surfaces to become flat and minimal are obtained. In the 4-dimensional Euclidean space \mathbb{E}^4 , the conditions for canal surfaces and tubular surfaces to become a Weingarten surface and a linear Weingarten surface are considered. The normal vectors of canal surfaces in the 4-dimensional Euclidean space are obtained. By means of the normal vectors, the curvature ellipse of the canal surface is handled, and a characterization of the origion of the normal space is given. Lastly, the necessary and sufficient conditions for the tubular surface to have pointwise 1-type Gauss map are given in the 4-dimensional Euclidean space \mathbb{E}^4 .

Keywords: Curvature Ellipse, Gauss Map, Canal Surface, Parallel Transport Frame, Weingarten Surface.

GİRİŞ

Yüzeyle teorisi ile ilgili çalışmalar 18. yüzyıla dayanmaktadır. 1785 yılında Monge, IE^3 3-boyutlu Öklid uzayında zarflar olarak adlandırılan yüzeylelerin oluşumunu araştırmıştır. 19. yüzyılın sonlarına doğru Liouville, Ribaucour, Lie, Beltrami, Codazzi ve Darboux gibi matematikçiler IE^3 uzayında elde ettikleri önemli sonuçlar ile yüzeyle teorisine katkıda bulunmuşlardır [1].

Yüzeyle teorisinin önemli bir parçasını oluşturan minimal yüzeyleler Lagrange (1760), Meusnier (1776), Monge (1784), ve Legendre tarafından IE^3 3-boyutlu Öklid uzayında ele alınmıştır. Düz yüzeyleler (ayrılabilir yüzeyleler) ise 19. yüzyılın başlarından itibaren önemli bir çalışma alanı oluşturmuştur. Bu yüzeyleler koniler, silindirler, ve tor yüzeyleleri olmak üzere üç sınıfta incelenmektedir [2].

3-boyutlu uzayda yapılan çalışmalara benzer olarak günümüzde IE^4 4-boyutlu Öklid uzayında da yüzeyleler ile ilgili birçok çalışma yapılmaktadır. [3, 4] numaralı çalışmalarda IE^4 uzayında öteleme yüzeyleyi ve genelleştirilmiş rotasyon yüzeyleyi ele alınmış ve bu yüzeylelerin düz yüzeyle ve minimal yüzeyle olma durumları incelenmiştir. [5] numaralı çalışmada ise aynı yazarlar tarafından IE^4 uzayında normal öteleme yüzeyleyi ele alınarak bu yüzeyleyin paralel yüzeyle ve evolüt yüzeyleyi olması için yeterli koşullar ortaya konulmuştur. [6-8] numaralı çalışmalarda IE^4 uzayında süperkonformal regle yüzeyleye, küresel çarpım yüzeyleye ve Chen yüzeyleye bazı örnekler verilmiş ve bu yüzeylelerin eğrilik elipsleri yüzeylelerin normal vektörleri yardımıyla incelemiştir. [9] numaralı çalışmada IE^4 uzayında Monge yaması ile verilen yüzeylelerin eğrilik fonksiyonları elde edilerek bu yüzeylelerin bazı karakterizasyonları verilmiştir. [10] numaralı çalışmada ise 4-boyutlu Öklid uzayında karışık çarpım yüzeyleyi olarak nitelendirilen yeni bir yüzeyle kavramı tanımlanmış ve bu yüzeyleyin de bazı karakterizasyonları yüzeyleyin eğrilik fonksiyonları yardımıyla verilmiştir.

Kanal yüzeyi ise özel bir yüzey sınıfı olup dönel yüzeyin bir genellemesi olarak düşünülebilir. Kanal yüzeyi $\gamma(u)$ merkez eğrili ve $r(u)$ yarıçaplı bir parametrelili küre ailelerinin zarfı olarak tanımlanır ve $r(u)$ yarıçap fonksiyonu sabit ise kanal yüzeyi tüp yüzeyi olarak adlandırılır.

Kanal yüzeyi (tüp yüzeyi) ilk olarak Monge tarafından tanımlanmıştır ve daha sonra bu yüzey birçok geometrici tarafından farklı açılardan ele alınmıştır. [11] numaralı çalışmada tüp yüzeyinin bazı geometrik özellikleri Do Carmo tarafından incelenmiştir ve tüp yüzeyi kullanılarak diferensiyel geometride Fenchel teoremi ve Fary-Milnor teoremi olarak bilinen iki teorem ispatlanmıştır. [12, 13] numaralı çalışmalarda kanal yüzeyinin analitik ve cebirsel özellikleri incelenmiştir. [14] numaralı çalışmada 3 ve 4-boyutlu Öklid uzaylarında Róbert Óláh-Gál ve László Pál tarafından kanal yüzeyinin bir parametrizasyonu verilmiştir. [15, 16] numaralı çalışmalarda IE^3 ve IE^4 uzaylarında kanal yüzeyinin geometrik özellikleri verilerek birim çember ve doğru üzerine kurulan kanal yüzeylerinin şekilleri çizdirilmiştir. [17] numaralı çalışmada IE^3 uzayında kanal yüzeylerinin asli eğrilikleri ve eğrilik çizgileri verilmiştir. 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına alternatif olarak oluşturulan Bishop çatısı yardımıyla tanımlanan kanal ve tüp yüzeyleri ile ilgili çalışmalar da mevcuttur. Örneğin, tüp yüzeyinin Bishop çatısına göre eğrilik fonksiyonları [18] numaralı çalışmada verilmiştir. [19] numaralı çalışmada ise tüp yüzeyinin Weingarten yüzeyi olma durumu 2. tip Bishop çatısına göre incelenmiştir. Ayrıca kanal ve tüp yüzeyi ile ilgili çalışmalara Öklid uzayından başka uzaylarda da yer verilmiştir. Örneğin, Minkowski uzayındaki tüp yüzeyleri [20, 21] ve Galilean uzayındaki tüp yüzeyleri ise [22, 23] numaralı çalışmalarda incelenmiştir.

Kanal ve tüp yüzeylerinin teorik matematik haricindeki çeşitli bilimlerde de uygulamaları mevcuttur. Bu yüzeyler, özellikle yüzey modellemeleri için bilgisayar destekli geometrik tasarımda (CAGD) yoğun biçimde kullanılmaktadır [24-26]. Ayrıca bu yüzeyler, boru, direk, halat ya da canlı bağırsağı gibi uzun ve ince nesnelere görüntüleme oldukça elverişlidir [18].

3-boyutlu Öklid uzayında tanımlanan Bishop çatısına benzer olarak [27] numaralı çalışmada 4-boyutlu Öklid uzayındaki Frenet çatısına alternatif olarak yeni bir çatı tanımlanmıştır ve bu çatıya paralel öteleme çatısı adı verilmiştir. Bu tezin amacı 4-

boyutlu Öklid uzayı IE^4 deki kanal yüzeyinin paralel öteleme çatısı yardımıyla yeni bir parametrizasyonunu vererek bu yüzey için örnekler vermek ve bu yüzeyi sınıflandırmaktır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm sonraki bölümlerde kullanılan temel tanımları ve teoremleri içermektedir. İkinci bölümde IE^3 ve IE^4 uzaylarında kanal ve tüp yüzeyleri ile ilgili yapılan bazı çalışmalara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde 4-boyutlu Öklid uzayında paralel öteleme çatısı yardımıyla kanal ve tüp yüzeyleri tanıtılmıştır ve bu yüzeylerin Gauss eğriliği, ortalama eğriliği ve normal eğriliği elde edilerek düz yüzey, minimal yüzey ve Wintgen ideal yüzeyi olma durumları incelenmiştir. Ayrıca bu bölümde kanal yüzeyinin eğrilik elipsi ile ilgili bazı sonuçlar da verilmiştir. Dördüncü bölümde yüzeylerin noktasal 1-tipinde Gauss dönüşümü tanıtılmış ve IE^4 uzayında paralel öteleme çatısı yardımıyla elde edilen tüp yüzeyinin noktasal 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahip olması için gerekli ve yeterli koşullar verilmiştir. Beşinci bölümde ise elde edilen sonuçlar ortaya konularak sonraki çalışmalar için bazı önerilerde bulunulmuştur.

1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar verilmiştir.

1.1. Riemann Manifolları

Bu bölümde Riemann manifoldları ile ilgili bazı tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Tanım 1.1.1: M , n -boyutlu diferensiyellenebilir (C^∞ sınıfından) bir manifold olsun. M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M manifoldundan \mathbb{R} reel sayılar kümesine tanımlı C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere, M üzerinde,

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \quad (1.1)$$

şeklinde bir metrik tanımlı ise M manifolduna bir Riemann manifoldu denir. Burada Eşitlik (1.1) ile verilen g dönüşümüne Riemann metriği (veya metrik tensör) adı verilir [28].

Tanım 1.1.2: M diferensiyellenebilir manifold ve M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\rightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned} \quad (1.2)$$

Eşitlik (1.2) ile verilen ∇ dönüşümü her $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$\text{i) } \nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$$

$$\text{ii) } \nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z,$$

$$\text{iii) } \nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f)Y$$

lineerlik özelliklerini sağlarsa, ∇ dönüşümüne M üzerinde bir afin koneksiyon adı verilir [29]. Burada ∇_X operatörüne X vektör alanına göre kovaryant türev denir.

Tanım 1.1.3: M bir Riemann manifoldu ve ∇ dönüşümü de M üzerinde tanımlanan bir afin koneksiyon olsun. O zaman her $X, Y \in \chi(M)$ için, ∇ dönüşümü,

$$i) \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \text{ (sıfır torsiyon özelliği)}$$

$$ii) X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \text{ (koneksiyonun metrikle bağdaşma özelliği)}$$

şartlarını sağlıyorsa, ∇ dönüşümüne M üzerinde sıfır torsiyonlu Riemann koneksiyonu (veya M Riemann manifoldunun Levi-Civita koneksiyonu) adı verilir [28, 29]. Bu koneksiyon kısaca M manifoldu üzerindeki Riemann koneksiyonu olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.4: M ve \tilde{M} sırasıyla n ve $n+d$ -boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar olmak üzere $x : M \rightarrow \tilde{M}$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Her $p \in M$ için,

$$dx_p : T_p M \rightarrow T_{x(p)} \tilde{M} \quad (1.3)$$

Eşitlik (1.3) ile verilen dönüşüm birebir ise x dönüşümüne bir daldırma (imersiyon) denir. Ayrıca, $x : M \rightarrow x(M) \subset \tilde{M}$ bir homeomorfizm ise x dönüşümüne bir gömme (imbedding) denir. Eğer $M \subset \tilde{M}$ ve $x : M \rightarrow \tilde{M}$ dönüşümü bir gömme ise M manifolduna \tilde{M} manifoldunun n -boyutlu bir gömülen (immersed) altmanifoldu adı verilir. Bununla beraber x bir daldırma olmak üzere her $X, Y \in T_p M$ için,

$$\langle dx_p(X), dx_p(Y) \rangle_{x(p)} = \langle X, Y \rangle_p \quad (1.4)$$

Eşitlik (1.4) ile verilen şartı sağlıyorsa, x dönüşümüne bir izometrik daldırma adı verilir [28].

Tanım 1.1.5: $M \subset \tilde{M}$ bir altmanifold ve $\tilde{\nabla}$ dönüşümü de \tilde{M} üzerinde kovaryant türev olsun. Böylece her $X, Y \in \chi(M)$ ve her p için $(\tilde{\nabla}_X Y)_p$ iyi tanımlıdır.

Ayrıca $\nabla_X Y \in T_p M$ ve $h_p(X, Y) \in T_p^\perp M$ olmak üzere,

$$(\tilde{\nabla}_X Y)_p = (\nabla_X Y)_p + h_p(X, Y) \quad (1.5)$$

biçiminde Gauss denklemi elde edilir. Burada h , M manifoldunun ikinci temel formudur. Eğer $h = 0$ ise M manifolduna toplam (total) geodezik denir [30].

Önerme 1.1.6: $M \subset \tilde{M}$ bir altmanifold ve g ile \tilde{g} dönüşümleri de sırasıyla M ve \tilde{M} üzerinde tanımlı metrikler olsunlar. Böylece $h(X, Y)$, M üzerinde bir normal vektör alanı olup simetrik ve 2-lineerdir. Ayrıca ∇ dönüşümü de M üzerinde indirgenmiş $g = x^*(\tilde{g})$ metriğinin bir Riemann koneksiyonudur [28].

Tanım 1.1.7: $M \subset \tilde{M}$ bir altmanifold olmak üzere M manifolduna dik bir birim normal vektör alanı ξ olsun. Böylece $\tilde{\nabla}_X \xi$ vektör alanının teğet bileşeni $-A_\xi X$ ve normal bileşeni $D_X \xi$ olmak üzere,

$$(\tilde{\nabla}_X \xi)_X = -(A_\xi X)_X + (D_X \xi) \quad (1.6)$$

Weingarten denklemi elde edilir. Burada A_ξ dönüşümüne şekil operatörü, D dönüşümüne de M manifoldunun NM normal demetindeki (normal) koneksiyonu denir [28].

Önerme 1.1.8: i) $A_\xi X$, ξ ve X üzerinde 2-lineerdir.

ii) M manifoldunun her bir ξ normal vektörü ile X ve Y tanjant vektörleri için $g(A_\xi X, Y) = \tilde{g}(h(X, Y), \xi)$ dir [28].

Tanım 1.1.9: $M \subset \tilde{M}$ manifoldunun bir birim normal vektör alanı ξ olsun. Eğer A_ξ daima özdeşlik fonksiyonu ile orantılı ise yani bir ρ fonksiyonu için $A = \rho I$ oluyorsa ξ vektörüne M manifoldunun umbilik kesiti (veya, M ξ vektörüne göre umbiliktir) denir. Eğer M altmanifoldu M de ki her birim normale göre umbilik ise M manifolduna toplam (total) umbiliktir denir [28].

1.2. \mathbb{E}^n Öklid Uzayında Eğriler

Bu bölümde \mathbb{E}^n n-boyutlu Öklid uzayında eğriler ile ilgili bazı temel tanımlar verilmiştir.

Tanım 1.2.1: $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere, $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ diferansiyellenebilir dönüşümü verilsin. Bu takdirde $\gamma(I) \subset \mathbb{E}^n$ kümesine \mathbb{E}^n n-boyutlu Öklid uzayında (I, γ) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri denir. $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığına, γ eğrisinin parametre aralığı ve $u \in I$ değişkenine de $\gamma(u)$ eğrisinin parametresi denir [31].

Tanım 1.2.2: $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere \mathbb{E}^n n-boyutlu Öklid uzayında $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi verilsin. J, \mathbb{R} reel sayılar kümesinde bir açık aralık olmak üzere $h: J \rightarrow I$ difeomorfizmi varsa h dönüşümüne γ eğrisi için bir parametre dönüşümü, $\gamma \circ h$ eğrisine de γ eğrisinin h ile yeniden parametrelendirilişi denir [31].

Tanım 1.2.3: $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere \mathbb{E}^n n-boyutlu Öklid uzayında $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi; $\gamma(u) = (\gamma_1(u), \gamma_2(u), \dots, \gamma_n(u))$ şeklinde verilen bir eğri olsun. Bu takdirde,

$$\left. \frac{d\gamma}{du} \right|_u = \gamma'(u)|_u = \left(\left. \frac{d\gamma_1}{du} \right|_u, \left. \frac{d\gamma_2}{du} \right|_u, \dots, \left. \frac{d\gamma_n}{du} \right|_u \right) \quad (1.7)$$

tanjant vektörüne γ eğrisinin $\gamma(u)$ noktasındaki hız vektörü denir [31].

Tanım 1.2.4: $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere \mathbb{E}^n n-boyutlu Öklid uzayında $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi verilsin.

$$\begin{aligned} \|\gamma'\|: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\rightarrow \|\gamma'\|(u) = \|\gamma'(u)\| \end{aligned} \quad (1.8)$$

şeklinde tanımlı $\|\gamma'\|$ fonksiyonuna γ eğrisinin skaler hız fonksiyonu, $\|\gamma'(u)\|$ reel sayısına da γ eğrisinin $\gamma(u)$ noktasındaki skaler hızı denir. Eğer her $u \in I$ için

$\|\gamma'(u)\|=1$ ise γ eğrisine birim hızlı eğri ve $u \in I$ parametresine de eğrinin yay-parametresi denir [31].

Tanım 1.2.5: $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere \mathbb{E}^n n-boyutlu Öklid uzayında $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi verilsin. Eğer her $u \in I$ için $\gamma'(u) \neq 0$ ise, γ eğrisine regüler eğri denir [31].

Tanım 1.2.6: $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere \mathbb{E}^n n-boyutlu Öklid uzayında $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ birim hızlı eğrisi verilsin. Eğer her $u \in I$ için γ eğrisinin yüksek mertebeden türevleri $\gamma'(u), \gamma''(u), \dots, \gamma^{(d)}(u)$ lineer bağımsız olup $\gamma'(u), \gamma''(u), \dots, \gamma^{(d+1)}(u)$ vektörleri lineer bağımlı ise γ eğrisine d-mertebeli Frenet eğrisi denir [29].

\mathbb{E}^n uzayının d-mertebeli her bir γ Frenet eğrisi üzerinde $\{E_1, E_2, \dots, E_d\}$ biçiminde oluşturulan d-çatısı ve $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{d-1}: I \rightarrow \mathbb{R}$ Frenet eğrilik fonksiyonları için γ eğrisinin Frenet türev denklemleri,

$$\begin{bmatrix} E'_1 \\ E'_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ E'_{d-1} \\ E'_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \kappa_{d-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\kappa_{d-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ E_{d-1} \\ E_d \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

şeklinindedir. Gram-Schmidt ortonormalleştirme yöntemi yardımıyla γ eğrisinin Frenet çatısı ve Frenet eğrilikleri,

$$v_1 = \gamma', \quad v_d = \gamma^{(k)} - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \gamma^{(k)}, v_i \rangle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \quad \kappa_{d-1} = \frac{\|v_k\|}{\|v_{k-1}\| \|v_1\|}, \quad E_d = \frac{v_k}{\|v_k\|} \quad (1.10)$$

eşitlikleri yardımıyla elde edilir. Burada $k \in \{2, 3, \dots, d\}$ ve $\kappa_d = \kappa_{d+1} = \dots = \kappa_{n-1} = 0$ dır [32].

Tanım 1.2.7: $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere \mathbb{E}^n n-boyutlu Öklid uzayında $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ d-mertebeli regüler eğrisi verilsin. Eğer γ eğrisinin Frenet eğrilikleri κ_i ler ($1 \leq i \leq d-1$) sabit ise γ eğrisine helis veya vida eğrisi denir [33]. Bu eğriler F. Klein ve S. Lie tarafından W-eğrileri olarak adlandırılmışlardır [34].

Tanım 1.2.8: $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere \mathbb{E}^n n-boyutlu Öklid uzayında $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ birim hızlı regüler eğrisi verilsin. Eğer γ eğrisinin dördüncü türevi $\gamma^{(iv)}(s)$, birinci türevi $\gamma'(s)$ vektörüne dik ise, γ eğrisine \mathbb{E}^n uzayının bir teğetsel kübik eğrisi (TC-eğrisi) denir.

Böylece bir eğrinin TC-eğrisi olma koşulu;

$$0 = \langle \gamma^{(iv)}(s), \gamma'(s) \rangle = -3\kappa_1(s)\kappa_1'(s) \quad (1.11)$$

şeklindedir. Eşitlik (1.11) göz önüne alınırsa yay parametresi ile verilen bir γ eğrisinin TC-eğrisi olması için gerek ve yeter şart eğrinin sabit κ_1 eğriliğine sahip olmasıdır [35].

\mathbb{E}^3 3-boyutlu Öklid uzayında sabit κ_1 eğrilikli eğrilerin karakterizasyonu ilk olarak E. Salkowski tarafından verilmiştir [36]. Bu yüzden literatürde bu eğriler Salkowski eğrisi olarak adlandırılır.

Tanım 1.2.9: $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere \mathbb{E}^n n-boyutlu Öklid uzayında $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ regüler eğrisi verilsin. γ eğrisinin eğrilikleri $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{n-1}$ olmak üzere tüm $\frac{\kappa_{i+1}}{\kappa_i}$ ($1 \leq i \leq n-2$) oranları sabit ise bu eğriye eğrilikleri oranları sabit eğri (ccr-eğrisi) denir [37, 38].

1.3. \mathbb{E}^n Öklid Uzayında Yüzeyler

Bu bölümde \mathbb{E}^n n-boyutlu Öklid uzayında yüzeyler ile ilgili bazı tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Tanım 1.3.1: S , \mathbb{E}^n uzayının bir alt kümesi olsun. $X : D \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{E}^n$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olmak üzere \mathbb{E}^n uzayında bir koordinat yaması oluşturur. Bu yama regülerse S kümesine \mathbb{E}^n uzayında türevlenebilir (düzgün) bir yüzey denir [30].

S , \mathbb{E}^n uzayında $X(u, v) : (u, v) \in D \subset \mathbb{E}^2$ yaması ile verilen düzgün bir yüzey olsun. S yüzeyinin keyfi bir $p = X(u, v)$ noktasındaki tanjant uzayı $T_p S$ olmak üzere $T_p S = \text{Span}\{X_u, X_v\}$ dir. Böylece S yüzeyinin birinci temel formu,

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (1.12)$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada birinci temel formun katsayıları,

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle, \quad G = \langle X_v, X_v \rangle \quad (1.13)$$

eşitlikleri ile verilir. Burada \langle , \rangle Öklid iç çarpımıdır. Eğer $W^2 = EG - F^2 \neq 0$ ise $X(u, v)$ yüzey yaması regülerdir denir.

Tanım 1.3.2: $S \subset \mathbb{E}^n$ yüzeyi $X : D \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^n$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. \mathbb{E}^n uzayında her bir $p \in S$ için $T_p \mathbb{E}^n = T_p S + T_p^\perp S$ dir. Burada $T_p^\perp S$, \mathbb{E}^n uzayında $T_p S$ uzayının ortogonal bileşenidir.

$\chi(S)$ ve $\chi^\perp(S)$, S yüzeyine sırasıyla, teğet ve dik olan düzgün vektör alanlarının uzayı, ∇ ve $\tilde{\nabla}$ ise sırasıyla S yüzeyi ve \mathbb{E}^n uzayının koneksiyonları olsunlar. $X, Y \in \chi(S)$ ve $N_k \in \chi^\perp(S)$ için,

$$h : \chi(S) \times \chi(S) \rightarrow \chi^\perp(S) \quad (1.14)$$
$$(X, Y) \rightarrow h(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$$

biçiminde tanımlanan dönüşüme S yüzeyinin ikinci temel formu denir. S yüzeyinin şekil operatörü,

$$\begin{aligned} A : \chi^\perp(S) \times \chi(S) &\rightarrow \chi(S) \\ (N_k, X_j) &\rightarrow A_{N_k} X_j = -\nabla_{X_j} N_k + D_{X_j} N_k, \end{aligned} \quad (1.15)$$

şeklindedir. Ayrıca $X_i, X_j \in \chi(S)$ vektörleri için bu operatör,

$$\langle A_{N_k} X_j, X_i \rangle = \langle h(X_i, X_j), N_k \rangle = c_{ij}^k, \quad 1 \leq k \leq n-2 \quad (1.16)$$

eşitliğini sağlar. Burada c_{ij}^k fonksiyonları S yüzeyinin ikinci temel formunun katsayılarıdır. Eşitlik (1.14) ve (1.15) sırasıyla S yüzeyinin Gauss denklemi ve Weingarten denklemi olarak adlandırılır. Buna göre Eşitlik (1.14) ile verilen Gauss denklemi yardımıyla,

$$h(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^{n-2} c_{ij}^k N_k, \quad 1 \leq i, j \leq 2 \quad (1.17)$$

yazılır.

Önerme 1.3.3: $S \subset \mathbb{I}E^n$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset \mathbb{I}E^2$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} h(X_u, X_u) &= c_{11}^1 N_1 + c_{11}^2 N_2 + \dots + c_{11}^{n-2} N_{n-2}, \\ h(X_u, X_v) &= c_{12}^1 N_1 + c_{12}^2 N_2 + \dots + c_{12}^{n-2} N_{n-2}, \\ h(X_v, X_v) &= c_{22}^1 N_1 + c_{22}^2 N_2 + \dots + c_{22}^{n-2} N_{n-2} \end{aligned} \quad (1.18)$$

dir [39].

Önerme 1.3.4: $S \subset \mathbb{I}E^n$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset \mathbb{I}E^2$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. $X(u, v)$ yamasının 2. mertebeden kısmi türevleri X_{uu}, X_{uv}, X_{vv} olmak üzere S yüzeyinin ikinci temel form katsayıları,

$$\begin{aligned}
c_{11}^k &= \langle X_{uu}, N_k \rangle, \\
c_{12}^k &= \langle X_{uv}, N_k \rangle, \quad 1 \leq k \leq n-2 \\
c_{22}^k &= \langle X_{vv}, N_k \rangle
\end{aligned} \tag{1.19}$$

şeklinde tanımlanır [40].

Tanım 1.3.5: $S \subset \mathbb{E}^n$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset \mathbb{E}^2$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. S yüzeyinin Gauss eğrilik fonksiyonu,

$$K = \frac{1}{W^2} \sum_{k=1}^{n-2} (c_{11}^k c_{22}^k - (c_{12}^k)^2) \tag{1.20}$$

şeklinde tanımlanır [41].

Tanım 1.3.6: $S \subset \mathbb{E}^n$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset \mathbb{E}^2$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. S yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü,

$$\vec{H} = \frac{1}{2W^2} \sum_{k=1}^{n-2} (Gc_{11}^k - 2Fc_{12}^k + Ec_{22}^k) N_k \tag{1.21}$$

şeklinde tanımlanır. Ortalama eğrilik vektörünün normuna, S yüzeyinin ortalama eğriliği denir ve $\|\vec{H}\| = H$ ile gösterilir [40].

Tanım 1.3.7: $S \subset \mathbb{E}^n$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset \mathbb{E}^2$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. S yüzeyinin Gauss eğriliği sıfırsa S yüzeyine düz yüzey, ortalama eğrilik vektörü sıfırsa S yüzeyine minimal yüzey denir [28].

Önerme 1.3.8: $S \subset \mathbb{E}^n$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset \mathbb{E}^2$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. $F=0$ ise;

$$\begin{aligned}
h(X_u, X_u) &= X_{uu} - \frac{1}{E} \langle X_{uu}, X_u \rangle X_u + \frac{1}{G} \langle X_{uv}, X_u \rangle X_v, \\
h(X_u, X_v) &= X_{uv} - \frac{1}{E} \langle X_{uv}, X_u \rangle X_u - \frac{1}{G} \langle X_{uv}, X_v \rangle X_v, \\
h(X_v, X_v) &= X_{vv} + \frac{1}{E} \langle X_{uv}, X_v \rangle X_u - \frac{1}{G} \langle X_{vv}, X_v \rangle X_v
\end{aligned} \tag{1.22}$$

eşitlikleri geçerlidir [39].

Önerme 1.3.9: $S \subset \mathbb{I}E^n$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset \mathbb{I}E^2$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. Bu takdirde $T_p S$ uzayının bir $\{X_1, X_2\}$ ortonormal bazı için,

$$\begin{aligned} h(X_1, X_1) &= \frac{1}{E} h(X_u, X_u), \\ h(X_1, X_2) &= \frac{1}{W} h(X_u, X_v) - \frac{F}{EW} h(X_u, X_u), \\ h(X_2, X_2) &= \frac{E}{W^2} h(X_v, X_v) - \frac{2F}{W^2} h(X_u, X_v) + \frac{F^2}{W^2 E} h(X_u, X_u) \end{aligned} \quad (1.23)$$

dir [39].

Tanım 1.3.10: $S \subset \mathbb{I}E^n$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset \mathbb{I}E^2$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. $\chi(S)$ uzayının ortonormal bir bazı $\{X_1, X_2\}$ olmak üzere S yüzeyinin ikinci temel form katsayıları,

$$h_{ij}^k = \langle h(X_i, X_j), N_k \rangle \quad (1.24)$$

ile tanımlanır [28].

Önerme 1.3.11: $S \subset \mathbb{I}E^n$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset \mathbb{I}E^2$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. Bu takdirde her $\{X_1, X_2\} \in \chi(S)$ ve $\{N_1, N_2, \dots, N_{n-2}\} \in \chi^\perp(S)$ ortonormal bazıları için ikinci temel form katsayıları $1 \leq k \leq n-2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} h_{11}^k &= \langle h(X_1, X_1), N_k \rangle = \frac{c_{11}^k}{E}, \\ h_{12}^k &= \langle h(X_1, X_2), N_k \rangle = \frac{1}{W} \left(c_{12}^k - \frac{F}{E} c_{11}^k \right), \\ h_{22}^k &= \langle h(X_2, X_2), N_k \rangle = \frac{1}{W^2} \left(E c_{22}^k - 2F c_{12}^k + \frac{F^2}{E} c_{11}^k \right) \end{aligned} \quad (1.25)$$

dir [39].

Önerme 1.3.12: $S \subset \mathbb{I}E^n$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset \mathbb{I}E^2$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. S yüzeyinin N_k normal vektörüne göre şekil operatörü matrisi,

$$A_{N_k} = \begin{bmatrix} \frac{c_{11}^k}{E} & \frac{1}{W} \left(c_{12}^k - \frac{F}{E} c_{11}^k \right) \\ \frac{1}{W} \left(c_{12}^k - \frac{F}{E} c_{11}^k \right) & \frac{1}{W^2} \left(E c_{22}^k - 2F c_{12}^k + \frac{F^2}{E} c_{11}^k \right) \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

dır [39].

Önerme 1.3.13: $S \subset \mathbb{I}E^n$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset \mathbb{I}E^2$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. S yüzeyinin Gauss eğriliği,

$$K = \det(A_{N_1}) + \det(A_{N_2}) + \dots + \det(A_{N_{n-2}}) \quad (1.27)$$

dir [28].

Önerme 1.3.14: $S \subset \mathbb{I}E^n$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset \mathbb{I}E^2$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. S yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü,

$$\vec{H} = \frac{1}{2} \left\{ iz(A_{N_1})N_1 + iz(A_{N_2})N_2 + \dots + iz(A_{N_{n-2}})N_{n-2} \right\} \quad (1.28)$$

dir [28].

Tanım 1.3.15: $S \subset \mathbb{I}E^n$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset \mathbb{I}E^2$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. S yüzeyi ile normal demeti $\chi^\perp(S)$ uzayının eğrilik tensörleri sırasıyla;

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (1.29)$$

ve

$$R^\perp(X, Y)\xi = h(X, A_\xi Y) - h(Y, A_\xi X), \quad \xi \in \chi^\perp(S) \quad (1.30)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $[,]$ Lie parantez operatörü,

$$\begin{aligned} [,] : \chi(S) \times \chi(S) &\rightarrow \chi(S) \\ (X, Y) &\rightarrow [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \end{aligned} \quad (1.31)$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer $R^\perp = 0$ ise S yüzeyi düz (flat) normal koneksiyonludur denir [28].

Tanım 1.3.16: $S \subset \mathbb{I}\mathbb{E}^n$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset \mathbb{I}\mathbb{E}^2$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. Bu takdirde $\chi(S)$ ve $\chi^\perp(S)$ uzaylarının $\{X_1, X_2\}$ ve $\{N_k\}$, $1 \leq k \leq n-2$ ortonormal bazları için S yüzeyinin normal eğriliği,

$$K_N = \left\{ \sum_{1=\alpha < \beta}^{n-2} \langle R^\perp(X_1, X_2)N_\beta, N_\alpha \rangle^2 \right\}^{1/2} \quad (1.32)$$

şeklinde tanımlanır [42].

Önerme 1.3.17: $S \subset \mathbb{I}\mathbb{E}^4$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset \mathbb{I}\mathbb{E}^2$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. S yüzeyinin normal eğrilik fonksiyonu,

$$K_N = \frac{E(c_{12}^1 c_{22}^2 - c_{12}^2 c_{22}^1) - F(c_{11}^1 c_{22}^2 - c_{11}^2 c_{22}^1) + G(c_{11}^1 c_{12}^2 - c_{11}^2 c_{12}^1)}{W^3} \quad (1.33)$$

dir [39].

Tanım 1.3.18: $S \subset \mathbb{I}\mathbb{E}^4$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset \mathbb{I}\mathbb{E}^2$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. S yüzeyinin Gauss, normal ve ortalama eğrilikleri,

$$H^2 - K - |K_N| = 0 \quad (1.34)$$

eşitliğini sağlar ise S yüzeyine Wintgen ideal yüzeyi adı verilir [43].

Tanım 1.3.19: $S \subset \mathbb{I}\mathbb{E}^n$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset \mathbb{I}\mathbb{E}^2$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. S yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri için,

$$\frac{\partial(K, H)}{\partial(u, v)} = K_u H_v - K_v H_u = 0 \quad (1.35)$$

eşitliği geçerli ise, S yüzeyine Weingarten yüzeyi adı verilir. Ayrıca $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$ için S yüzeyinin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği arasında $aK + bH = c$ bağıntısı geçerli ise, S yüzeyine lineer Weingarten yüzeyi adı verilir [44].

2. ÖKLİD UZAYLARINDA KANAL YÜZEYLERİ

Bu bölümde \mathbb{IE}^3 ve \mathbb{IE}^4 Öklid uzaylarında kanal yüzeyleri ile ilgili yapılan çalışmalarda elde edilen sonuçlar verilmiştir.

2.1. \mathbb{IE}^3 Öklid Uzayında Kanal Yüzeyleri

Bu bölümde \mathbb{IE}^3 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısı yardımıyla elde edilen kanal yüzeyleri ile ilgili yapılan çalışmalardaki sonuçlar ele alınmıştır.

$I \subseteq \mathbb{IR}$ bir açık aralık olmak üzere \mathbb{IE}^3 3-boyutlu Öklid uzayında $\gamma: I \subseteq \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IE}^3$ 3-mertebeli birim hızlı eğrisi verilsin. γ eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ ve Frenet eğrilik fonksiyonları κ_1, κ_2 olmak üzere bu eğrinin Frenet türev denklemleri,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.1: $\gamma: I \subseteq \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IE}^3$ eğrisi \mathbb{IE}^3 3-boyutlu Öklid uzayında $\gamma(u) = (f_1(u), f_2(u), 0)$ parametrelendirmesi ile verilen birim hızlı regüler bir düzlem eğrisi olsun. γ eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B = e_3\}$ ($e_3 = (0,0,1)$) ve Frenet eğrilik fonksiyonları κ_1, κ_2 olmak üzere bu eğrinin Frenet türev denklemleri,

$$\begin{aligned} \gamma'(u) &= T(u), \\ T'(u) &= \kappa_1(u)N(u), \\ N'(u) &= -\kappa_1(u)T(u), \\ B'(u) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

şeklindedir. Buna göre \mathbb{IE}^3 3-boyutlu Öklid uzayında $\gamma(u) = (f_1(u), f_2(u), 0)$ eğrisi ve bu eğrinin Frenet çatısı yardımıyla elde edilen S kanal yüzeyi,

$$S : X(u, v) = \gamma(u) + r(u)(N(u) \cos v + B(u) \sin v) \quad (2.3)$$

parametrelelendirmesiyle verilebilir [14]. Burada $r(u)$ reel değerli türevlenebilir bir fonksiyondur. Eğer $r(u) = r$ sabit bir fonksiyon ise (2.3) parametrelelendirmesiyle verilen S yüzeyi \mathbb{E}^3 3-boyutlu Öklid uzayında tüp yüzeyi olarak adlandırılır ve,

$$S : X(u, v) = \gamma(u) + r(N(u) \cos v + B(u) \sin v) \quad (2.4)$$

parametrelelendirmesiyle verilir.

(2.3) parametrelelendirmesiyle verilen S yüzeyinin keyfi bir $p = X(u, v)$ noktasındaki teğet uzayı,

$$\begin{aligned} X_u &= (1 - \kappa_1(u)r(u) \cos v)T + r'(u) \cos vN + r'(u) \sin vB, \\ X_v &= -r(u) \sin vN + r(u) \cos vB \end{aligned} \quad (2.5)$$

vektörleri tarafından gerilir. Dolayısıyla, S yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları ve birim normal vektör alanı sırasıyla;

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = (r'(u))^2 + (1 - \kappa_1(u)r(u) \cos v), \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = 0, \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = r^2(u) \end{aligned} \quad (2.6)$$

ve

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} = \frac{1}{W} (r(u)r'(u)T - r(u)(1 - \kappa_1(u)r(u) \cos v)(\cos vN + \sin vB)) \quad (2.7)$$

şeklindedir. Burada $W^2 = EG - F^2 = r^2(u)((r'(u))^2 + (1 - \kappa_1(u)r(u) \cos v))$ dir.

$X(u, v)$ yamasının ikinci mertebeden kısmi türevleri,

$$\begin{aligned} X_{uu} &= -\cos v(2r'(u)\kappa_1(u) + r(u)\kappa_1'(u))T \\ &\quad + (\kappa_1(u) - r(u)\kappa_1^2(u) \cos v + r''(u) \cos v)N + r''(u) \sin vB, \\ X_{uv} &= r(u)\kappa_1(u) \sin vT - r'(u) \sin vN + r'(u) \cos vB, \\ X_{vv} &= -r(u) \cos vN - r(u) \sin vB \end{aligned} \quad (2.8)$$

dir. Eşitlik (2.7) ve (2.8) yardımıyla S yüzeyinin ikinci temel form katsayıları,

$$\begin{aligned} c_{11} &= \langle X_{uu}, N \rangle = \frac{1}{W} \left((-2r(r')^2 \kappa_1 - r^2 r' \kappa_1' - r \kappa_1 + r^2 r'' \kappa_1 \sin^2 v) \cos v \right. \\ &\quad \left. + 2r^2 \kappa_1^2 \cos^2 v + (r^2 r'' \kappa_1 - r^3 \kappa_1^3) \cos^3 v - r r'' \right), \\ c_{12} &= \langle X_{uv}, N \rangle = \frac{r^2 r' \kappa_1 \sin v}{W}, \\ c_{22} &= \langle X_{vv}, N \rangle = \frac{r^2 - r^3 \kappa_1 \cos v}{W} \end{aligned} \quad (2.9)$$

şeklinde elde edilir [16].

Teorem 2.1.2: S , \mathbb{E}^3 3-boyutlu Öklid uzayında (2.3) parametrelendirmesiyle verilen bir kanal yüzeyi olsun. S yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla,

$$K = \frac{r^3}{W^4} \left((2r r'' \kappa_1 - r r' \kappa_1' - 2(r')^2 \kappa_1 - \kappa_1) \cos v - 3r^2 \kappa_1^3 \cos^3 v + r^3 \kappa_1^4 \cos^4 v \right. \\ \left. + (3r(r')^2 \kappa_1^2 + r^2 r' \kappa_1 \kappa_1' + 3r \kappa_1^2 - r^2 r'' \kappa_1^2) \cos^2 v - r r'' - r(r')^2 \kappa_1^2 \right) \quad (2.10)$$

ve

$$H = \frac{r^2}{2W^3} \left((r^2 r'' \kappa_1 - 3r(r')^2 \kappa_1 - r^2 r' \kappa_1' - 4r \kappa_1) \cos v + 5r^2 \kappa_1^2 \cos^2 v \right. \\ \left. - 2r^3 \kappa_1^3 \cos^3 v - r r'' + 1 + (r')^2 \right) \quad (2.11)$$

şeklindedir [16].

Sonuç 2.1.3: S , \mathbb{E}^3 3-boyutlu Öklid uzayında (2.4) parametrelendirmesiyle verilen bir tüp yüzeyi olsun. S yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla,

$$K = \frac{\cos v}{r(1 - r \kappa_1 \cos v)^4} (-\kappa_1 + 3r \kappa_1^2 \cos v - 3r^2 \kappa_1^3 \cos^2 v + r^3 \kappa_1^4 \cos^3 v), \quad (2.12)$$

ve

$$H = \frac{1}{2r(1 - r \kappa_1 \cos v)^3} (1 - 4r \kappa_1 \cos v + 5r^2 \kappa_1^2 \cos^2 v - 2r^3 \kappa_1^3 \cos^3 v) \quad (2.13)$$

şeklindedir [16].

Sonuç 2.1.4: S , \mathbb{E}^3 3-boyutlu Öklid uzayında (2.3) parametrelendirmesiyle verilen bir kanal yüzeyi olsun. Eğer γ eğrisi düz bir doğru ise, γ eğrisi üzerine kurulan S kanal yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla,

$$K = \frac{-r''}{r(1+(r')^2)}, \quad (2.14)$$

ve

$$H = \frac{-rr'' + (r')^2 + 1}{2r(1+(r')^2)^{3/2}}, \quad (2.15)$$

dir [16].

Bu kısımda 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına alternatif olarak kurulan Bishop çatısı yardımıyla oluşturulan kanal yüzeyleri ile elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Tanım 2.1.5: $\gamma \subset \mathbb{E}^3$, \mathbb{E}^3 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir eğri olsun. γ eğrisinin Bishop çatısı $\{T, M_1, M_2\}$ ve Bishop çatısına göre eğrilik fonksiyonları k_1, k_2 olmak üzere, γ eğrisinin Bishop çatısına göre türev denklemleri,

$$\begin{bmatrix} T' \\ M_1' \\ M_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

şeklindedir. γ eğrisinin Frenet vektörleri ve Bishop vektörleri arasındaki bağıntı,

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

şeklindedir. γ eğrisinin Bishop çatısına göre eğrilik fonksiyonları ve Frenet eğrilikleri arasında,

$$\begin{aligned} k_1(u) &= \kappa_1(u) \cos\varphi(u), \\ k_2(u) &= \kappa_1(u) \sin\varphi(u) \end{aligned} \quad (2.18)$$

eşitlikleri geçerlidir ve $\kappa_2(u) = \varphi'(u)$ dir. Buna göre \mathbb{E}^3 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısı yardımıyla elde edilen tüp yüzeyi,

$$S: X(u, v) = \gamma(u) + r(M_1(u)\cos v + M_2(u)\sin v) \quad (2.19)$$

parametrelendirmesiyle verilebilir [18]. Burada r keyfi bir sabittir.

S yüzeyinin keyfi bir $p = X(u, v)$ noktasındaki teğet uzayı,

$$\begin{aligned} X_u &= (1 - k_1(u)r \cos v - k_2(u)r \sin v)T, \\ X_v &= -r \sin v M_1 + r \cos v M_2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

vektörleri tarafından gerilir. Dolayısıyla, S yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları ve birim normal vektör alanı, sırasıyla,

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = (1 - k_1(u)r \cos v - k_2(u)r \sin v)^2, \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = 0, \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = r^2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

ve

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} = -\cos v M_1 - \sin v M_2 \quad (2.22)$$

şeklinde dir. $X(u, v)$ yamasının ikinci mertebeden kısmi türevleri,

$$\begin{aligned} X_{uu} &= -r(k_1'(u)\cos v + k_2'(u)\sin v)T + k_1(1 - k_1(u)r \cos v - k_2(u)r \sin v)M_1 \\ &\quad + k_2(1 - k_1(u)r \cos v - k_2(u)r \sin v)M_2, \\ X_{uv} &= (k_1(u)r \sin v - k_2(u)r \cos v)T, \\ X_{vv} &= -r \cos v M_1 - r \sin v M_2 \end{aligned} \quad (2.23)$$

dir. Eşitlik (2.22) ve (2.23) yardımıyla S yüzeyinin ikinci temel form katsayıları,

$$\begin{aligned} c_{11} &= \langle X_{uu}, N \rangle = -(k_1 \cos v + k_2 \sin v)(1 - k_1 r \cos v - k_2 r \sin v), \\ c_{12} &= \langle X_{uv}, N \rangle = 0, \\ c_{22} &= \langle X_{vv}, N \rangle = r \end{aligned} \quad (2.24)$$

şeklinde elde edilir [18].

Teorem 2.1.6: S , \mathbb{E}^3 3-boyutlu Öklid uzayında (2.19) parametrelendirmesiyle verilen bir tüp yüzeyi olsun. S yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla,

$$K = \frac{k_1 \cos v + k_2 \sin v}{r(r(k_1 \cos v + k_2 \sin v) - 1)}, \quad (2.25)$$

ve

$$H = rK - \frac{K}{2(k_1 \cos v + k_2 \sin v)} \quad (2.26)$$

şeklindedir [18].

2.2. \mathbb{E}^4 Öklid Uzayında Frenet Çatısı Yardımıyla Elde Edilen Kanal Yüzeyi

Bu bölümde \mathbb{E}^4 Öklid uzayında Frenet çatısı yardımıyla elde edilen kanal yüzeyi ile ilgili sonuçlar ele alınmıştır.

$I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^4$ 4-mertebeli birim hızlı eğrisi verilsin. γ eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B_1, B_2\}$ ve Frenet eğrilik fonksiyonları $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ olmak üzere bu eğrinin Frenet türev denklemleri,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \kappa_3 \\ 0 & 0 & -\kappa_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.1: γ eğrisi \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında $\gamma(u) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u), 0)$ parametrelendirmesi ile verilen birim hızlı regüler bir uzay eğrisi olsun. γ eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B_1, B_2 = e_4\}$ ($e_4 = (0,0,0,1)$) ve Frenet eğrilik fonksiyonları $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ olmak üzere bu eğrinin Frenet türev denklemleri,

$$\begin{aligned}
\gamma'(u) &= T(u), \\
T'(u) &= \kappa_1(u)N(u), \\
N'(u) &= -\kappa_1(u)T(u) + \kappa_2(u)B_1(u), \\
B_1'(u) &= -\kappa_2(u)N(u), \\
B_2'(u) &= 0
\end{aligned} \tag{2.28}$$

şeklindedir. Buna göre \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında $\gamma(u) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u), 0)$ eğrisi ve bu eğrinin Frenet çatısı yardımıyla elde edilen kanal yüzeyi,

$$S: X(u, v) = \gamma(u) + r(u)(B_1(u)\cos v + B_2(u)\sin v) \tag{2.29}$$

parametrelendirmesiyle verilebilir [14]. Burada $r(u)$ reel değerli türevlenebilir bir fonksiyondur. Eğer $r(u) = r$ sabit bir fonksiyon ise S yüzeyi \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısı yardımıyla elde edilen tüp yüzeyi olarak adlandırılır ve,

$$S: X(u, v) = \gamma(u) + r(B_1(u)\cos v + B_2(u)\sin v) \tag{2.30}$$

parametrelendirmesiyle verilir.

S yüzeyinin keyfi bir $p = X(u, v)$ noktasındaki teğet uzayı,

$$\begin{aligned}
X_u &= T - r(u)\kappa_2(u)\cos v N + r'(u)\cos v B_1 + r'(u)\sin v B_2, \\
X_v &= -r(u)\sin v B_1 + r(u)\cos v B_2
\end{aligned} \tag{2.31}$$

vektörleri tarafından gerilir. Dolayısıyla, yüzeyin birinci temel formunun katsayıları,

$$\begin{aligned}
E &= \langle X_u, X_u \rangle = 1 + (r'(u))^2 + r^2(u)\kappa_2^2(u)\cos^2 v, \\
F &= \langle X_u, X_v \rangle = 0, \\
G &= \langle X_v, X_v \rangle = r^2(u)
\end{aligned} \tag{2.32}$$

dir.

Ayrıca $X(u, v)$ yamasının ikinci mertebeden kısmi türevleri,

$$\begin{aligned}
X_{uu} &= r(u)\kappa_1(u)\kappa_2(u)\cos vT \\
&\quad + (\kappa_1(u) - (r(u)\kappa_2(u))' \cos v - r'(u)\kappa_2(u)\cos v)N \\
&\quad + (r''(u) - r(u)\kappa_2^2(u))\cos vB_1 + r''(u)\sin vB_2, \\
X_{uv} &= r(u)\kappa_2(u)\sin vN - r'(u)\sin vB_1 + r'(u)\cos vB_2, \\
X_{vv} &= -r(u)\cos vB_1 - r(u)\sin vB_2
\end{aligned} \tag{2.33}$$

dir. Eşitlik (2.31) ve (2.33) yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\langle X_{uu}, X_u \rangle &= r\kappa_2(r\kappa_2)' \cos^2 v + r'r'', \\
\langle X_{uv}, X_u \rangle &= -r^2\kappa_2^2 \cos v \sin v, \\
\langle X_{uv}, X_v \rangle &= rr', \\
\langle X_{vv}, X_v \rangle &= 0
\end{aligned} \tag{2.34}$$

elde edilir [39].

Teorem 2.2.2: S, \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (2.29) parametrelendirmesiyle verilen bir kanal yüzeyi olsun. S yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla,

$$K = \frac{r^2 \cos^2 v}{E^2 G} \left(\begin{array}{l} 2\kappa_2^2 + 2((r')^2 \kappa_2^2 - rr''\kappa_2^2 + r'\kappa_2(r\kappa_2)') \\ + r^3\kappa_2^4 \cos^4 v - r'' - r\kappa_2^2(1 + (r')^2) \end{array} \right) \tag{2.35}$$

ve

$$H = \frac{1}{2Er} \left(\begin{array}{l} \frac{-r^2}{E} (r\kappa_2(r\kappa_2)' \cos^2 v + r'r'')^2 + 4r^4\kappa_2^4 \cos^4 v \\ + r^2 \cos^2 v \left\{ \begin{array}{l} \kappa_1^2 r^2 \kappa_2^2 + ((r\kappa_2)' + r'\kappa_2)^2 - r^2 \kappa_2^4 \\ + 4\kappa_2^2 + 3(r')^2 \kappa_2^2 - 2rr''\kappa_2^2 + 2r'\kappa_2(r\kappa_2)' \end{array} \right\} \\ - 2\kappa_1 r^2 \cos v ((r\kappa_2)' + r'\kappa_2 + \kappa_1^2 r^2 - 2rr' + 1 + (r')^2) \end{array} \right)^{1/2} \tag{2.36}$$

dir [39].

Sonuç 2.2.3: S yüzeyi (2.29) parametrelendirmesiyle verilen bir kanal yüzeyi olsun.

Eğer γ düz bir doğru ise S yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla,

$$K = \frac{-r''}{r(1+(r')^2)^2} \quad (2.37)$$

ve

$$H = \frac{r^2(r')^2(r'')^2 + (1+(r')^2)(2rr'' - 1)}{4r^2(1+(r')^2)^3} \quad (2.38)$$

eşitlikleriyle verilir [39].



3. \mathbb{IE}^4 ÖKLİD UZAYINDA PARALEL ÖTELEME ÇATISI YARDIMIYLA ELDE EDİLEN KANAL YÜZEYİ

Bu bölümde \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin paralel öteleme çatısı tanıtılmış ve bu çatı yardımıyla elde edilen kanal yüzeyinin parametrizasyonu verilmiştir. Ayrıca bu yüzeyin bazı geometrik özellikleri, Weingarten yüzeyi olma koşulu verilmiştir ve yüzeyin eğrilik elipsi incelenmiştir.

3.1. \mathbb{IE}^4 Öklid Uzayında Paralel Öteleme Çatısı Yardımıyla Elde Edilen Kanal Yüzeyi

$I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IE}^4$ 4-mertebeli birim hızlı regüler eğrisi verilsin. γ eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B_1, B_2\}$ ve Frenet eğrilik fonksiyonları $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ olmak üzere bu eğrinin Frenet türev denklemleri Eşitlik (2.27) ile verilsin.

Tanım 3.1.1: $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere \mathbb{IE}^n n-boyutlu Öklid uzayında $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IE}^n$ eğrisi verilsin. Eğer γ eğrisi boyunca alınan bir normal vektör alanının türevi daima teğet vektör alanına paralel kalıyorsa, normal vektör alanına göreceli paraleldir denir [45].

Tanım 3.1.2: $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IE}^4$ birim hızlı regüler eğrisi verilsin. $T(u)$, γ eğrisinin birim teğet vektör alanı ve $M_1(u)$, $M_2(u)$ ve $M_3(u)$ göreceli paralel ve $T(u)$ teğet vektör alanına dik birim normal vektör alanları olmak üzere $\{T, M_1, M_2, M_3\}$ kümesine γ eğrisinin paralel öteleme çatısı adı verilir [27].

Teorem 3.1.3: $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IE}^4$ birim hızlı regüler eğrisi verilsin. γ eğrisinin paralel öteleme çatısı

$\{T, M_1, M_2, M_3\}$ ve paralel öteleme çatısına göre eğrilik fonksiyonları k_1, k_2, k_3 olmak üzere γ eğrisinin paralel öteleme çatısına göre türev denklemleri,

$$\begin{bmatrix} T' \\ M_1' \\ M_2' \\ M_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 & k_3 \\ -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

şeklindedir. γ eğrisinin Frenet eğrilikleri $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ ve paralel öteleme çatısına göre eğrilikleri k_1, k_2, k_3 arasında,

$$\begin{aligned} k_1 &= \kappa_1 \cos\theta \cos\psi, \\ k_2 &= \kappa_1 (-\cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \sin\theta \cos\psi), \\ k_3 &= \kappa_1 (\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \sin\theta \cos\psi) \end{aligned} \quad (3.2)$$

bağıntısı vardır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \theta' &= \frac{\kappa_3}{\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}}, \psi' = -\kappa_2 - \kappa_3 \frac{\sqrt{\kappa_3^2 - (\theta')^2}}{\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}}, \varphi' = -\frac{\sqrt{\kappa_3^2 - (\theta')^2}}{\cos\theta}, \\ \kappa_1 &= \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2}, \kappa_2 = -\psi' + \varphi' \sin\theta, \kappa_3 = \frac{\theta'}{\sin\psi}, \varphi' \cos\theta + \theta' \cot\psi = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

eşitlikleri geçerlidir [27].

Teorem 3.1.4: $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^4$ birim hızlı regüler eğrisi verilsin. γ eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B_1, B_2\}$ ve paralel öteleme çatısı $\{T, M_1, M_2, M_3\}$ olmak üzere, γ eğrisinin Frenet vektör alanları ve paralel öteleme çatısı vektör alanları arasındaki bağıntı,

$$\begin{aligned} T &= T, \\ N &= \cos\theta(u) \cos\psi(u) M_1 + (-\cos\varphi(u) \sin\psi(u) + \sin\varphi(u) \sin\theta(u) \cos\psi(u)) M_2 \\ &\quad + (\sin\varphi(u) \sin\psi(u) + \cos\varphi(u) \sin\theta(u) \cos\psi(u)) M_3, \\ B_1 &= \cos\theta(u) \sin\psi(u) M_1 + (\cos\varphi(u) \cos\psi(u) + \sin\varphi(u) \sin\theta(u) \sin\psi(u)) M_2 \\ &\quad + (-\sin\varphi(u) \cos\psi(u) + \cos\varphi(u) \sin\theta(u) \sin\psi(u)) M_3, \\ B_2 &= -\sin\theta(u) M_1 + \sin\varphi(u) \cos\theta(u) M_2 + \cos\varphi(u) \cos\theta(u) M_3 \end{aligned} \quad (3.4)$$

eşitlikleriyle verilir. Burada θ, φ ve ψ Euler açılarıdır [27].

Sonuç 3.1.5: $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^4$ birim hızlı regüler eğrisi verilsin. γ eğrisinin paralel öteleme çatısı vektör alanları ve Frenet vektör alanları arasındaki bağıntı,

$$\begin{aligned}
T &= T, \\
M_1 &= \cos\theta(u)\cos\psi(u)N + \cos\theta(u)\sin\psi(u)B_1 - \sin\theta(u)B_2, \\
M_2 &= (-\cos\varphi(u)\sin\psi(u) + \sin\varphi(u)\sin\theta(u)\cos\psi(u))N \\
&+ (\cos\varphi(u)\cos\psi(u) + \sin\varphi(u)\sin\theta(u)\sin\psi(u))B_1 + \sin\varphi(u)\cos\theta(u)B_2, \\
M_3 &= (\sin\varphi(u)\sin\psi(u) + \cos\varphi(u)\sin\theta(u)\cos\psi(u))N \\
&+ (-\sin\varphi(u)\cos\psi(u) + \cos\varphi(u)\sin\theta(u)\sin\psi(u))B_1 + \cos\varphi(u)\cos\theta(u)B_2
\end{aligned} \tag{3.5}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 3.1.6: $\gamma \subset \mathbb{E}^4$ regüler birim hızlı bir eğri olsun ve $\gamma(u) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u), f_4(u))$ parametrelendirmesiyle verilsin. Böylece,

$$S : X(u, v) = \gamma(u) + r(u)(M_2(u)\cos v + M_3(u)\sin v) \tag{3.6}$$

parametrelendirmesiyle verilen yüzeye \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında paralel öteleme çatısı yardımıyla elde edilen kanal yüzeyi adı verilir. Burada $r(u)$ reel değerli türevlenebilir bir fonksiyondur. Eğer $r(u) = r$ sabit bir fonksiyon ise (3.6) parametrelendirmesiyle verilen S yüzeyi \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında paralel öteleme çatısı yardımıyla elde edilen tüp yüzeyi olarak adlandırılır ve,

$$S : X(u, v) = \gamma(u) + r(M_2(u)\cos v + M_3(u)\sin v) \tag{3.7}$$

parametrelendirmesiyle verilir.

Örnek 3.1.7: $0 \leq u \leq 2\pi$ olmak üzere \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında

$$\gamma(u) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos u, \frac{1}{\sqrt{3}}\sin u, \sqrt{\frac{2}{3}}\cos u, \sqrt{\frac{2}{3}}\sin u \right)$$

birim hızlı regüler eğrisi verilsin. Bu eğrinin Frenet vektörleri,

$$\begin{aligned}
T(u) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \sin u, \frac{1}{\sqrt{3}} \cos u, -\sqrt{\frac{2}{3}} \sin u, \sqrt{\frac{2}{3}} \cos u \right), \\
N(u) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \cos u, -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin u, -\sqrt{\frac{2}{3}} \cos u, -\sqrt{\frac{2}{3}} \sin u \right), \\
B_1(u) &= \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sin u, -\sqrt{\frac{2}{3}} \cos u, -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin u, \frac{1}{\sqrt{3}} \cos u \right), \\
B_2(u) &= \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \cos u, \sqrt{\frac{2}{3}} \sin u, -\frac{1}{\sqrt{3}} \cos u, -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin u \right)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

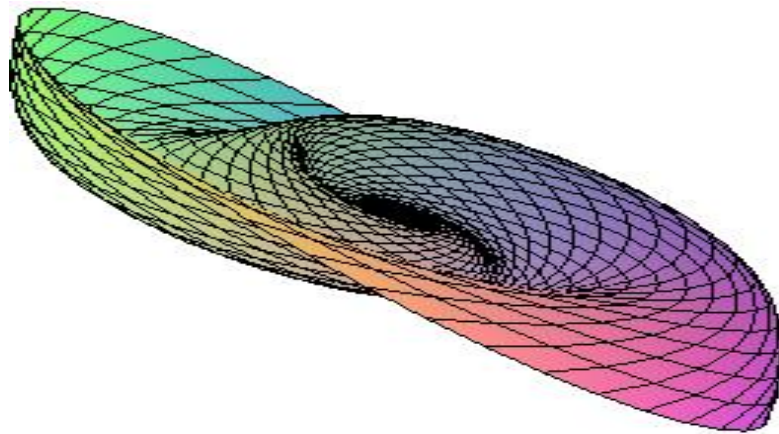
eşitlikleriyle verilir. Burada Euler açılarının $\psi = 30^\circ$, $\varphi = 60^\circ$ ve $\theta = 180^\circ$ şeklindeki özel seçimi ile γ eğrisinin paralel öteleme çatısı vektörleri,

$$\begin{aligned}
T(u) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \sin u, \frac{1}{\sqrt{3}} \cos u, -\sqrt{\frac{2}{3}} \sin u, \sqrt{\frac{2}{3}} \cos u \right), \\
M_1(u) &= \left(\begin{array}{c} \frac{1}{2} \cos u - \frac{1}{\sqrt{6}} \sin u, \frac{1}{\sqrt{6}} \cos u + \frac{1}{2} \sin u, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos u + \frac{1}{2\sqrt{3}} \sin u, -\frac{1}{2\sqrt{3}} \cos u + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin u \end{array} \right), \\
M_2(u) &= \frac{1}{4} \left(\begin{array}{c} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{2} \right) \cos u + \sqrt{2} \sin u, -\sqrt{2} \cos u + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{2} \right) \sin u, \\ \left(\sqrt{\frac{2}{3}} + 2 \right) \cos u - \sin u, \cos u + \left(\sqrt{\frac{2}{3}} + 2 \right) \sin u \end{array} \right), \\
M_3(u) &= \frac{1}{4} \left(\begin{array}{c} \left(-1 - 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right) \cos u - \sqrt{6} \sin u, \sqrt{6} \cos u + \left(-1 - 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right) \sin u, \\ \left(-\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \cos u + \sqrt{3} \sin u, -\sqrt{3} \cos u + \left(-\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \sin u \end{array} \right)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

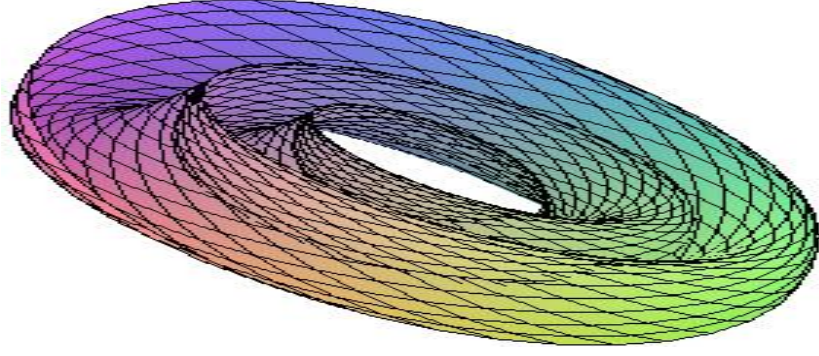
şeklinde elde edilir. Eşitlik (3.6) ve (3.9) dan γ merkez eğrili S kanal yüzeyinin parametrisasyonu,

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(u, v) = & \left(\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{3}} \cos u + \frac{r(u)}{4} \left(\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{2} \right) \cos u + \sqrt{2} \sin u \right) \cos v \right. \\ \left. + \left(\left(-1 - 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right) \cos u - \sqrt{6} \sin u \right) \sin v \right) \\ \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \sin u + \frac{r(u)}{4} \left(\left(-\sqrt{2} \cos u + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{2} \right) \sin u \right) \cos v \right. \\ \left. + \left(\sqrt{6} \cos u + \left(-1 - 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right) \sin u \right) \sin v \right) \\ \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \cos u + \frac{r(u)}{4} \left(\left(\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + 2 \right) \cos u - \sin u \right) \cos u \right. \\ \left. + \left(\left(-\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \cos u + \sqrt{3} \sin u \right) \sin v \right) \\ \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \sin u + \frac{r(u)}{4} \left(\left(\cos u + \left(\sqrt{\frac{2}{3}} + 2 \right) \sin u \right) \cos v \right. \\ \left. + \left(-\sqrt{3} \cos u + \left(-\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \sin u \right) \sin v \right) \end{array} \right) \quad (3.10)
\end{aligned}$$

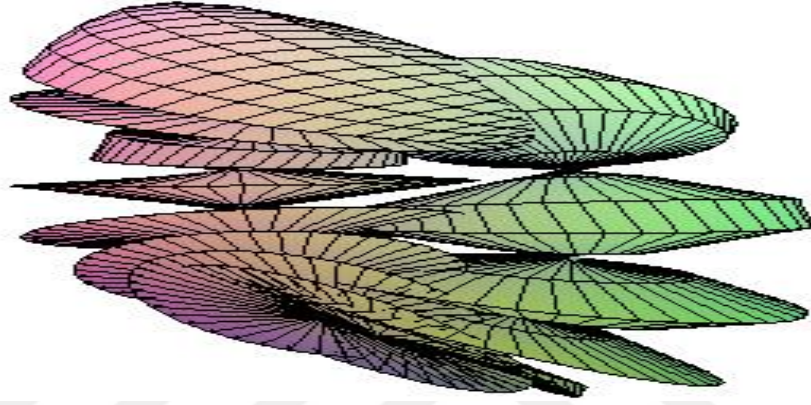
şeklinde. Bu kanal yüzeyinin $\text{plot3d}([x + y, z, w], x = a..b, y = c..d)$ mapple çizim komutu ile 3-boyutlu Öklid uzayına izdüşümlerinin grafikleri Şekil 3.1, Şekil 3.2 ve Şekil 3.3 te verilmiştir.



Şekil 3.1. Yarıçap fonksiyonu $r(u) = u^2$ olan kanal yüzeyi



Şekil 3.2. Yarıçap fonksiyonu $r(u) = 2u + 6$ olan kanal yüzeyi



Şekil 3.3. Yarıçap fonksiyonu $r(u) = \cos u^2$ olan kanal yüzeyi

S yüzeyinin keyfi bir $p = X(u, v)$ noktasındaki teğet uzayı,

$$\begin{aligned} X_u &= f(u, v)T + r'(u) \cos v M_2 + r'(u) \sin v M_3, \\ X_v &= -r(u) \sin v M_2 + r(u) \cos v M_3 \end{aligned} \quad (3.11)$$

vektörleri tarafından gerilir. Burada,

$$f(u, v) = 1 - k_2(u)r(u) \cos v - k_3(u)r(u) \sin v \quad (3.12)$$

dir. Buna göre Eşitlik (3.11) yardımıyla yüzeyin birinci temel formunun katsayıları,

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = f^2(u, v) + (r'(u))^2, \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = 0, \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = r^2(u) \end{aligned} \quad (3.13)$$

şeklinde elde edilir. Burada \langle , \rangle \mathbb{E}^4 uzayında Öklid iç çarpımıdır. Eşitlik (3.13) yardımıyla elde edilen $W^2 = EG - F^2 = (f^2(u, v) + (r'(u))^2)r^2(u) > 0$ olup S bir regüler yüzeydir. $X(u, v)$ yamasının ikinci mertebeden kısmi türevleri,

$$\begin{aligned} X_{uu} &= g(u, v)T + f(u, v)k_1(u)M_1 + (f(u, v)k_2(u) + r''(u)\cos v)M_2 \\ &\quad + (f(u, v)k_3(u) + r''(u)\sin v)M_3, \\ X_{uv} &= f_v(u, v)T - r'(u)\sin vM_2 + r'(u)\cos vM_3, \\ X_{vv} &= -r(u)\cos vM_2 - r(u)\sin vM_3 \end{aligned} \quad (3.14)$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$g(u, v) = f_u(u, v) - k_2(u)r'(u)\cos v - k_3(u)r'(u)\sin v \quad (3.15)$$

dir.

Şimdi de S yüzeyinin normal uzayını geren ortonormal vektör alanlarını elde edelim.

Bunun için;

$$\begin{aligned} \langle X_u, N_1 \rangle &= 0, \\ \langle X_v, N_1 \rangle &= 0, \\ \langle X_u, N_2 \rangle &= 0, \\ \langle X_v, N_2 \rangle &= 0, \\ \langle N_1, N_2 \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

iç çarpımlarını ele alalım.

$$N_1 = \frac{a_1T + a_2M_1 + a_3M_2 + a_4M_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}} \quad (3.17)$$

olmak üzere Eşitlik (3.11), (3.16) ve (3.17) yardımıyla,

$$\langle fT + r'\cos vM_2 + r'\sin vM_3, a_1T + a_2M_1 + a_3M_2 + a_4M_3 \rangle = 0 \quad (3.18)$$

ve

$$\langle -r\sin vM_2 + r\cos vM_3, a_1T + a_2M_1 + a_3M_2 + a_4M_3 \rangle = 0 \quad (3.19)$$

yazılabilir. Buradan,

$$a_1 f + a_3 r' \cos v + a_4 r' \sin v = 0 \quad (3.20)$$

ve

$$-a_3 r \sin v + a_4 r \cos v = 0 \quad (3.21)$$

eşitlikleri elde edilir. Eşitlik (3.21) den,

$$a_4 = \frac{a_3 \sin v}{\cos v} \quad (3.22)$$

dir. Son eşitlik, Eşitlik (3.20) de yerine yazılırsa,

$$a_1 f \cos v + a_3 r' = 0 \quad (3.23)$$

elde edilir. Buradan,

$$a_1 = -\frac{a_3 r'}{f \cos v} \quad (3.24)$$

dir. Burada $a_2 = \sqrt{E}$ ve $a_3 = f \cos v$ olarak alınırsa $a_1 = -r'$ ve $a_4 = f \sin v$ olarak elde edilir. O halde,

$$N_1 = \frac{-r'T + \sqrt{E}M_1 + f \cos v M_2 + f \sin v M_3}{\sqrt{2E}} \quad (3.25)$$

dir. Burada $E = f^2(u, v) + (r'(u))^2$ birinci temel formun katsayısıdır. Benzer şekilde,

$$N_2 = \frac{b_1 T + b_2 M_1 + b_3 M_2 + b_4 M_3}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2}} \quad (3.26)$$

olmak üzere Eşitlik (3.11), (3.16), (3.25) ve (3.26) yardımıyla,

$$\begin{aligned} \langle fT + r' \cos v M_2 + r' \sin v M_3, b_1 T + b_2 M_1 + b_3 M_2 + b_4 M_3 \rangle &= 0, \\ \langle -r \sin v M_2 + r \cos v M_3, b_1 T + b_2 M_1 + b_3 M_2 + b_4 M_3 \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (3.27)$$

ve

$$\langle -r'T + \sqrt{E}M_1 + f \cos v M_2 + f \sin v M_3, b_1T + b_2M_1 + b_3M_2 + b_4M_3 \rangle = 0 \quad (3.28)$$

yazılabilir. Buradan,

$$b_1f + b_3r' \cos v + b_4r' \sin v = 0, \quad (3.29)$$

$$-b_3r \sin v + b_4r \cos v = 0, \quad (3.30)$$

ve

$$-b_1r' + b_2\sqrt{E} + b_3f \cos v + b_4f \sin v = 0 \quad (3.31)$$

eşitlikleri elde edilir. Eşitlik (3.30) dan,

$$b_4 = \frac{b_3 \sin v}{\cos v} \quad (3.32)$$

dir. Son eşitlik, Eşitlik (3.29) da yerine yazılırsa,

$$b_1f \cos v + b_3r' = 0 \quad (3.33)$$

elde edilir. Buradan,

$$b_1 = -\frac{b_3r'}{f \cos v} \quad (3.34)$$

dir. Burada $b_2 = \sqrt{E}$ ve $b_3 = -f \cos v$ olarak alınırsa $b_1 = r'$ ve $b_4 = -f \sin v$ olarak elde edilir. O halde,

$$N_2 = \frac{r'T + \sqrt{E}M_1 - f \cos v M_2 - f \sin v M_3}{\sqrt{2E}} \quad (3.35)$$

dir. Böylece (3.6) parametrelendirmesi ile verilen S yüzeyinin birim normal vektör alanları,

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{-r'T + \sqrt{E}M_1 + f \cos v M_2 + f \sin v M_3}{\sqrt{2E}} \\
N_2 &= \frac{r'T + \sqrt{E}M_1 - f \cos v M_2 - f \sin v M_3}{\sqrt{2E}}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

şeklinde elde edilir.

Eşitlik (1.19), (3.14) ve (3.36) yardımıyla S yüzeyinin ikinci temel form katsayıları,

$$\begin{aligned}
c_{11}^1 &= \langle X_{uu}, N_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2E}} (-gr' + fk_1 \sqrt{E} + f^2 k_2 \cos v + f^2 k_3 \sin v + fr''), \\
c_{12}^1 &= \langle X_{uv}, N_1 \rangle = \frac{-f_v r'}{\sqrt{2E}}, \\
c_{22}^1 &= \langle X_{vv}, N_1 \rangle = \frac{-fr}{\sqrt{2E}}, \\
c_{11}^2 &= \langle X_{uu}, N_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2E}} (gr' + fk_1 \sqrt{E} - f^2 k_2 \cos v - f^2 k_3 \sin v - fr''), \\
c_{12}^2 &= \langle X_{uv}, N_2 \rangle = \frac{f_v r'}{\sqrt{2E}}, \\
c_{22}^2 &= \langle X_{vv}, N_2 \rangle = \frac{fr}{\sqrt{2E}}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

dir. Eşitlik (1.26), (3.13) ve (3.37) yardımıyla S yüzeyinin şekil operatörü matrisleri,

$$A_{N_1} = \begin{bmatrix} \frac{-gr' + fk_1 \sqrt{E} + f^2 k_2 \cos v + f^2 k_3 \sin v + fr''}{\sqrt{2E}^{3/2}} & \frac{-f_v r'}{\sqrt{2rE}} \\ \frac{-f_v r'}{\sqrt{2rE}} & \frac{-f}{\sqrt{2r\sqrt{E}}} \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

ve

$$A_{N_2} = \begin{bmatrix} \frac{gr' + fk_1 \sqrt{E} - f^2 k_2 \cos v - f^2 k_3 \sin v - fr''}{\sqrt{2E}^{3/2}} & \frac{f_v r'}{\sqrt{2rE}} \\ \frac{f_v r'}{\sqrt{2rE}} & \frac{f}{\sqrt{2r\sqrt{E}}} \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

şeklinde hesaplanır.

3.2. \mathbb{IE}^4 Öklid Uzayında Paralel Öteleme Çatısı Yardımıyla Elde Edilen Kanal Yüzeyinin Gauss Eğriliği

Bu bölümde \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında paralel öteleme çatısı yardımıyla elde edilen kanal yüzeyinin Gauss eğriliği hesaplanmıştır ve bu eğriliğe bağlı olarak yüzeyin bazı karakterizasyonları verilmiştir.

Teorem 3.2.1: S , \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.6) parametrelendirmesi ile verilen bir kanal yüzeyi olsun. Bu takdirde S yüzeyinin Gauss eğriliği,

$$K = \frac{1}{r^2 E^2} (f^4 - f^3 - fr(fr'' - gr') - f_v^2 (r')^2) \quad (3.40)$$

dir.

İspat: S , \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.6) parametrelendirmesi ile verilen bir kanal yüzeyi olsun. Eşitlik (3.38) ve (3.39), Eşitlik (1.27) de yerine yazılarak S yüzeyinin Gauss eğriliği Eşitlik (3.40) şeklinde elde edilir.

Sonuç 3.2.2: S , \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir tüp yüzeyi olsun. Bu durumda S yüzeyinin Gauss eğriliği,

$$K = \frac{f - 1}{fr^2} \quad (3.41)$$

dir.

Sonuç 3.2.3: S , \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir tüp yüzeyi olsun. S yüzeyinin düz yüzey olması için gerek ve yeter koşul,

$$\frac{k_2(u)}{k_3(u)} = c, \quad (c = \text{sabit}) \quad (3.42)$$

olmasıdır.

İspat: $K = 0$ ise $f - 1 = 0$ dır. O halde Eşitlik (3.12) den,

$$\frac{k_2(u)}{k_3(u)} = -\tan v \quad (3.43)$$

dir. Eşitlik (3.43) ün sağlanması için $\frac{k_2}{k_3}$ oranı sabit olmalıdır.

Sonuç 3.2.4: S , \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.6) parametrelendirmesi ile verilen bir kanal yüzeyi olsun. Eğer γ merkez eğrisi bir düz doğru ise, S yüzeyinin Gauss eğriliği,

$$K = -\frac{r''}{r(1+(r')^2)^2} \quad (3.44)$$

dir.

İspat: γ , \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında düz bir doğru olsun. Bu durumda γ eğrisinin paralel öteleme çatisına göre eğrilik fonksiyonları Eşitlik (3.3) ten $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ eşitliğini sağlar. Eşitlik (3.12) ve Eşitlik (3.15) te bu değerler yerine yazılırsa $f = 1$, $g = 0$ bulunur ve bu eşitlikler de Eşitlik (3.40) da yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.5: S , \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.6) parametrelendirmesi ile verilen bir kanal yüzeyi olsun. γ merkez eğrisi bir düz doğru olduğunda, S yüzeyinin düz yüzey olması için gerek ve yeter koşul r yarıçap fonksiyonunun a ve b reel sayıları için $r(u) = au + b$ şeklinde bir lineer fonksiyon olmasıdır.

Sonuç 3.2.6: S , \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir tüp yüzeyi olsun. γ merkez eğrisi bir düz doğru olduğunda $K = 0$ olup S yüzeyi düz bir yüzeydir ve \mathbb{IE}^4 uzayında silindir yüzeyi veya silindir yüzeyinin bir parçasıdır.

İspat: S , \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir tüp yüzeyi olsun. γ merkez eğrisi bir düz doğru olduğunda Eşitlik (3.3) ten $k_1 = 0$ eşitliği sağlanır. Bu durumda Eşitlik (3.1) den M_2 ve M_3 vektör alanlarının sabit oldukları görülür. Dolayısıyla $c_i, d_i, (1 \leq i \leq 4)$ reel sayıları için M_2 ve M_3 vektör

alanları $M_2 = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ ve $M_3 = (d_1, d_2, d_3, d_4)$ şeklinde seçilebilir. Böylece tüp yüzeyinin parametrizasyonu,

$$X(u, v) = (a_1 u + r c_1 \cos v + r d_1 \sin v + b_1, a_2 u + r c_2 \cos v + r d_2 \sin v + b_2, \\ a_3 u + r c_3 \cos v + r d_3 \sin v + b_3, a_4 u + r c_4 \cos v + r d_4 \sin v + b_4) \quad (3.45)$$

olur. Burada $a_i, b_i, (1 \leq i \leq 4)$ reel sayılardır. Eşitlik (3.45) ile verilen yüzey IE^4 uzayında bir silindir yüzeyi veya silindir yüzeyinin bir parçasıdır.

3.3. IE^4 Öklid Uzayında Paralel Öteleme Çatısı Yardımıyla Elde Edilen Kanal Yüzeyinin Ortalama Eğriliği

Bu bölümde IE^4 4-boyutlu Öklid uzayında paralel öteleme çatısı yardımıyla elde edilen kanal yüzeyinin ortalama eğriliği hesaplanmıştır ve bu eğriliğe bağlı olarak yüzeyin bazı karakterizasyonları verilmiştir.

Teorem 3.3.1: S , IE^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.6) parametrelendirmesi ile verilen bir kanal yüzeyi olsun. Bu takdirde S yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü,

$$\vec{H} = \frac{1}{2rE^2} \begin{pmatrix} (fr'E - rr'(fr'' - gr') - f^2 r'(1-f))T + frk_1 E M_1 \\ + (-f^2 E \cos v + f^3 (1-f) \cos v + fr(fr'' - gr') \cos v) M_2 \\ + (-f^2 E \sin v + f^3 (1-f) \sin v + fr(fr'' - gr') \sin v) M_3 \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

dir.

İspat: S , IE^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.6) parametrelendirmesi ile verilen bir kanal yüzeyi olsun. Eşitlik (3.38) ve (3.39), Eşitlik (1.28) de yerine yazılarak S yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü Eşitlik (3.46) şeklinde elde edilir.

Sonuç 3.3.2: S , IE^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.6) parametrelendirmesi ile verilen bir kanal yüzeyi olsun. Bu takdirde S yüzeyinin ortalama eğriliği,

$$H = \frac{1}{2rE^{3/2}} \left(f^2 E^2 - 2fr(r')^2 (fr'' - gr') - 2f^3 E(1-f) + r^2 (fr'' - gr')^2 \right. \\ \left. + 2f^2 r(fr'' - gr') + f^4 (1-f)^2 + f^2 r^2 k_1^2 E - 4f^3 r(fr'' - gr') \right)^{1/2} \quad (3.47)$$

dir.

Sonuç 3.3.3: S , \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir tüp yüzeyi olsun. Bu takdirde S yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü,

$$\bar{H} = \frac{1}{2fr} (rk_1M_1 + (-2f \cos v + \cos v)M_2 + (-2f \sin v + \sin v)M_3) \quad (3.48)$$

dir.

Sonuç 3.3.4: S , \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir tüp yüzeyi olsun. Bu takdirde S yüzeyinin ortalama eğriliği,

$$H = \frac{1}{2fr} (4f^2 - 4f + r^2k_1^2 + 1)^{1/2} \quad (3.49)$$

dir.

Sonuç 3.3.5: S , \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.6) parametrelendirmesi ile verilen bir kanal yüzeyi olsun. Eğer γ merkez eğrisi bir düz doğru ise, S yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü,

$$\bar{H} = \frac{1 + (r')^2 - rr''}{2r(1 + (r')^2)^2} (r'T - \cos vM_2 - \sin vM_3) \quad (3.50)$$

dir.

İspat: S , \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.6) parametrelendirmesi ile verilen bir kanal yüzeyi olsun ve γ merkez eğrisi bir düz doğru olsun. Bu durumda γ eğrisinin paralel öteleme çatısına göre eğrilik fonksiyonları Eşitlik (3.3) ten $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ eşitliğini sağlar. Eşitlik (3.12) ve Eşitlik (3.15) de bu değerler yerine yazılırsa $f = 1$, $g = 0$ bulunur ve bu eşitlikler de Eşitlik (3.46) da yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Sonuç 3.3.6: S , \mathbb{E}^4 uzayında (3.6) parametrelendirmesi ile verilen bir kanal yüzeyi olsun. γ merkez eğrisi bir düz doğru ise, S yüzeyinin ortalama eğriliği,

$$H = \frac{1 + (r')^2 - rr''}{2r(1 + (r')^2)^{3/2}} \quad (3.51)$$

dir.

Önerme 3.3.7: S , \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.6) parametrelendirmesi ile verilen bir kanal yüzeyi olsun. γ merkez eğrisi bir düz doğru ise, S yüzeyinin minimal yüzey olması için gerek ve yeter koşul,

$$2r + 2\sqrt{r^2 - c_1^2} = e^{\frac{u}{c_1} + c_2} \quad (3.52)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat: S , \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.6) parametrelendirmesi ile verilen bir kanal yüzeyi olsun ve S yüzeyi minimal olsun. Eşitlik (3.51) den,

$$1 + (r')^2 - rr'' = 0 \quad (3.53)$$

dir. $r'(u) = p(u)$ alınırsa Eşitlik (3.53),

$$\frac{dr}{r} = \frac{pdp}{p^2 + 1} \quad (3.54)$$

halini alır. Eşitlik (3.54) ün çözümü,

$$r^2 = c_1^2 (p^2 + 1) \quad (3.55)$$

dir. Tekrar $p(u) = r'(u)$ yazılırsa,

$$\frac{dr}{\sqrt{r^2 - c_1^2}} = \frac{du}{c_1} \quad (3.56)$$

elde edilir. Eşitlik (3.56) nın çözümü,

$$2r + 2\sqrt{r^2 - c_1^2} = e^{\frac{u}{c_1} + c_2} \quad (3.57)$$

dir. Tersine Eşitlik (3.57) sağlanırsa S yüzeyi minimal yüzey olur.

Önerme 3.3.8: S , \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir tüp yüzeyi olsun. γ merkez eğrisi bir düz doğru ise, S yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü,

$$\vec{H} = \frac{1}{2r} (-\cos vM_2 - \sin vM_3) \quad (3.58)$$

dir.

İspat: S , \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir tüp yüzeyi olsun ve γ merkez eğrisi bir düz doğru olsun. Eşitlik (3.51) deki $r(u) = r$ fonksiyonunun sabit bir fonksiyon olduğu göz önünde bulundurularak istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.9: S , \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir tüp yüzeyi olsun. γ merkez eğrisi bir düz doğru ise, S yüzeyinin ortalama eğriliği,

$$H = \frac{1}{2r} \quad (3.59)$$

dir, yani S yüzeyi sabit ortalama eğrilikli bir yüzey olur.

3.4. \mathbb{IE}^4 Öklid Uzayında Paralel Öteleme Çatısı Yardımıyla Elde Edilen Kanal Yüzeyinin Normal Eğriliği

Bu bölümde \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında paralel öteleme çatısı yardımıyla elde edilen kanal yüzeyinin normal eğriliği hesaplanmıştır ve bu eğriliğe bağlı olarak kanal yüzeyinin Wintgen ideal yüzeyi olma durumu incelenmiştir.

Teorem 3.4.1: S , \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.6) parametrelendirmesi ile verilen bir kanal yüzeyi olsun. Bu takdirde S yüzeyinin normal eğriliği,

$$K_N = \frac{ff_v k_1 r'}{rE^2} \quad (3.60)$$

dir.

İspat: S , \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.6) parametrelendirmesi ile verilen bir kanal yüzeyi olsun. Eşitlik (3.37) den,

$$c_{12}^1 c_{22}^2 - c_{12}^2 c_{22}^1 = \frac{1}{2E} ((-f_v r')(fr) - (f_v r')(-fr)) = 0 \quad (3.61)$$

ve

$$\begin{aligned} c_{11}^1 c_{12}^2 - c_{11}^2 c_{12}^1 &= \frac{1}{2E} \left(\begin{aligned} &f_v r'(-gr' + fk_1 \sqrt{E} + f^2 k_2 \cos v + f^2 k_3 \sin v + fr'') \\ &+ f_v r'(gr' + fk_1 \sqrt{E} - f^2 k_2 \cos v - f^2 k_3 \sin v - fr'') \end{aligned} \right) \\ &= \frac{ff_v k_1 r'}{\sqrt{E}} \end{aligned} \quad (3.62)$$

dir. Eşitlik (3.61) ve (3.62), Eşitlik (1.33) te yerine yazılırsa, S yüzeyinin normal eğriliği,

$$K_N = \frac{G(c_{11}^1 c_{12}^2 - c_{11}^2 c_{12}^1)}{W^3} = \frac{r^2}{r^3 E^{3/2}} \frac{ff_v k_1 r'}{\sqrt{E}} = \frac{ff_v k_1 r'}{r E^2} \quad (3.63)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.4.2: S, \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.6) parametrelendirmesi ile verilen bir kanal yüzeyi olsun. Bu takdirde S yüzeyinin Wintgen ideal yüzeyi olması için gerek ve yeter koşul,

$$\begin{aligned} r^2(fr'' - gr')^2 + 2fr(fr'' - gr')E + 2f^2r(1-f)(fr'' - gr') + f^2E^2 + 2f^3(1-f)E \\ + f^4(1-f)^2 + f^2r^2k_1^2E + 4f_v^2(r')^2E = \pm 4ff_v k_1 r r' E \end{aligned} \quad (3.64)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat: S yüzeyi bir Wintgen ideal yüzeyi olsun. Eşitlik (3.40), (3.47) ve (3.60), Eşitlik (1.34) te yerine yazılırsa Eşitlik (3.64) elde edilir. Tersine Eşitlik (3.64) sağlanırsa S yüzeyi bir Wintgen ideal yüzeyi olur.

Sonuç 3.4.3: S, \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir tüp yüzeyi olsun. Bu takdirde S yüzeyi bir Wintgen ideal yüzeyi olamaz.

İspat: S, \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir tüp yüzeyi olsun. Eşitlik (3.64) teki $r(u) = r$ yarıçap fonksiyonunun sabit fonksiyon olduğu göz önünde bulundurularak,

$$1 + r^2 k_1^2 = 0 \quad (3.65)$$

eşitliği elde edilir. Bu ifade bir çelişki olduğundan S yüzeyi bir Wintgen ideal yüzeyi olamaz.

Sonuç 3.3.5: S , \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.6) parametrelendirmesi ile verilen bir kanal yüzeyi olsun. Eğer γ merkez eğrisi bir düz doğru ise, S yüzeyinin normal eğriliği $K_N = 0$ dır, yani S yüzeyi düz (flat) normal koneksiyonludur.

İspat: S , \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.6) parametrelendirmesi ile verilen bir kanal yüzeyi olsun. γ merkez eğrisi bir düz doğru olduğundan paralel öteleme çatısına göre eğrilik fonksiyonları,

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0 \quad (3.66)$$

dır. Eşitlik (3.66), Eşitlik (3.63) te yerine yazılırsa $K_N = 0$ olarak elde edilir. Tanım 1.3.15 ve Tanım 1.3.16 karşılaştırıldığında $K_N = 0$ olması için gerek ve yeter koşulun $R^\perp = 0$ olması gerektiği görülür. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

3.5. \mathbb{IE}^4 Öklid Uzayında Paralel Öteleme Çatısı Yardımıyla Elde Edilen Kanal Yüzeyinin Weingarten Yüzeyi Olma Durumu

Weingarten yüzeyleri ilk olarak 1861 yılında Weingarten in “Über Eine Klasse Auf Einander Abwickelbarer Flächen” adlı çalışmasında ele alınmıştır [46]. Bu tarihten itibaren Weingarten yüzeyleri birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. [19, 20, 23, 44, 47, 48] numaralı çalışmalarda tüp yüzeyleri ve meridyen yüzeylerinin Weingarten yüzeyi olma durumları Öklid, Galile ve Minkowski uzaylarında incelenmiştir.

Teorem 3.5.1: S , \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.6) parametrelendirmesi ile verilen bir kanal yüzeyi olsun. Eğer γ merkez eğrisi bir düz doğru ise, S yüzeyi bir Weingarten yüzeyidir.

İspat: S , \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.6) parametrelendirmesi ile verilen bir kanal yüzeyi olsun. γ merkez eğrisi bir düz doğru alınır, Eşitlik (3.44) ve (3.51) den,

$$K_v = 0 = H_v \quad (3.67)$$

bulunur. Böylece Eşitlik (1.35) yardımıyla,

$$\frac{\partial(K, H)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} K_u & K_v \\ H_u & H_v \end{vmatrix} = K_u \cdot 0 - H_u \cdot 0 = 0 \quad (3.68)$$

elde edilir. Buna göre Tanım 1.3.19 yardımıyla yüzeyin Weingarten yüzeyi olduğu görülür.

Teorem 3.5.2: S , \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir tüp yüzeyi olsun. S yüzeyinin Weingarten yüzeyi olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki durumlardan en az bir tanesinin sağlanmasıdır:

- i) merkez eğrisinin paralel öteleme çatısına göre birinci eğriliği $k_1 = 0$ dır.
- ii) merkez eğrisinin paralel öteleme çatısına göre birinci eğriliği için $k'_1(u) = 0$ eşitliği sağlanır.
- iii) merkez eğrisinin paralel öteleme çatısına göre ikinci ve üçüncü eğrilikleri arasında,

$$\frac{k_3(u)}{k_2(u)} = c, \quad (c = \text{sabit}) \quad (3.69)$$

bağıntısı vardır.

İspat: S , \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir tüp yüzeyi olsun. Eşitlik (3.41) ve (3.49) dan,

$$K_u = \frac{f_u}{f^2 r^2}, \quad K_v = \frac{f_v}{f^2 r^2}, \quad (3.70)$$

ve

$$\begin{aligned}
H_u &= \frac{1}{4f^2r^2} \begin{pmatrix} fr(4f^2 - 4f + r^2k_1^2 + 1)^{-1/2} (8ff_u - 4f_u + 2r^2k_1k_1') \\ -2f_ur(4f^2 - 4f + r^2k_1^2 + 1)^{1/2} \end{pmatrix}, \\
H_v &= \frac{1}{4f^2r^2} \begin{pmatrix} fr(4f^2 - 4f + r^2k_1^2 + 1)^{-1/2} (8ff_v - 4f_v) \\ -2f_vr(4f^2 - 4f + r^2k_1^2 + 1)^{1/2} \end{pmatrix} \quad (3.71)
\end{aligned}$$

elde edilir. S yüzeyi bir Weingarten yüzeyi ise,

$$K_u H_v - K_v H_u = (4f^2 - 4f + r^2k_1^2 + 1)^{-1/2} k_1 k_1' f f_v = 0 \quad (3.72)$$

dır. Buna göre,

i) $k_1 = 0$ dır, ya da

ii) $k_1'(u) = 0$ dır, ya da

iii) $f_v = 0$ dır. Buna göre $\frac{k_3}{k_2} = c$ ($c = \text{sabit}$) bağıntısı vardır.

iv) $f = 0$ olması durumunda $W^2 = 0$ olduğundan tüp yüzeyi yaması regüler olmaz. Bu nedenle bu durum söz konusu değildir.

Tersine i), ii), iii) koşullarından en az biri sağlanırsa $K_u H_v - K_v H_u = 0$ olur. Yani S yüzeyi bir Weingarten yüzeyidir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 3.5.3: S , \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir tüp yüzeyi olsun. Eğer γ merkez eğrisi bir düz doğru ise, S yüzeyi bir lineer Weingarten yüzeyidir.

İspat: S , \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir tüp yüzeyi olsun. γ merkez eğrisi bir düz doğru ise Sonuç 3.2.6 ve Eşitlik (3.59) dan,

$$K = 0 \text{ ve } H = \frac{1}{2r} \text{ (} r = \text{sabit) dir. Buradan } a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ ve } b = 2rc \text{ için,}$$

$$a \cdot 0 + b \cdot \frac{1}{2r} = c \quad (3.73)$$

eşitliği yazılabilir. Tanım 1.3.19 yardımıyla S yüzeyinin lineer Weingarten yüzeyi olduğu görülür.

3.6. \mathbb{IE}^4 Öklid Uzayında Paralel Öteleme Çatısı Yardımıyla Elde Edilen Kanal Yüzeyinin Eğrilik Elipsi

S , \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında $X(u, v) : (u, v) \in D \subset \mathbb{IE}^2$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. Bir $p \in S$ noktasındaki $T_p S$ teğet düzleminde $\theta \in [0, 2\pi]$ açısı ile verilen bir çember alınsın. Böylece $T_p^\perp S$ normal düzlem ile $X = \cos\theta X_1 + \sin\theta X_2$ doğrultu vektörünün oluşturduğu doğrunun direkt toplamı olan $p \in S$ noktasındaki hiperdüzlemin S yüzeyi ile arakesiti bir eğri oluşturur. Bu eğriyi γ_θ ile gösterilsin. γ_θ eğrisi S yüzeyinin p noktasında ve X yönündeki normal kesit eğrisi olarak adlandırılır. γ_θ eğrisinin η_θ normal eğrilik vektörü $T_p^\perp S$ düzleminde yatan bir vektördür. θ açısı 0 dan 2π ye değiştiğinde normal eğrilik vektörü $T_p^\perp S$ düzleminde bir elips oluşturur. Bu elipse S yüzeyinin p noktasındaki eğrilik elipsi adı verilir.

$\gamma'_\theta = X = \cos\theta X_1 + \sin\theta X_2$ vektörü normal kesit eğrisinin birim teğet vektörü olmak üzere η_θ normal eğrilik vektörü $T_p^\perp S$ düzleminin N_1 ve N_2 baz vektörleri cinsinden,

$$\eta_\theta = \left(\frac{h_{11}^1 + h_{22}^1}{2} + \frac{h_{11}^1 - h_{22}^1}{2} \cos 2\theta + h_{12}^1 \sin 2\theta \right) N_1 + \left(\frac{h_{11}^2 + h_{22}^2}{2} + \frac{h_{11}^2 - h_{22}^2}{2} \cos 2\theta + h_{12}^2 \sin 2\theta \right) N_2 \quad (3.74)$$

ile verilir. Böylece S yüzeyinin p noktasındaki eğrilik elipsi,

$$E(p) = \{h(X, X) : X \in T_p S, \|X\| = 1\} \quad (3.75)$$

ile gösterilir. Burada h ifadesi $X(u, v)$ yamasının ikinci temel formudur. $X = \cos\theta X_1 + \sin\theta X_2$ doğrultu vektörü olmak üzere Eşitlik (3.75) in elips belirttiğini görmek için,

$$h(X, X) = \vec{H} + \cos 2\theta \vec{B} + \sin 2\theta \vec{C} \quad (3.76)$$

formülüne bakmak yeterlidir. Burada,

$$\vec{B} = \frac{1}{2}(h(X_1, X_1) - h(X_2, X_2)) \quad (3.77)$$

ve

$$\vec{C} = h(X_1, X_2) \quad (3.78)$$

normal vektörler ve \vec{H} ortalama eğrilik vektörüdür. Eşitlik (3.76), X vektörünün birim çember etrafında bir tur attığında $h(X, X)$ vektörünün \vec{H} merkezli elips etrafında iki tur attığını gösterir. $E(p)$ elipsi bir nokta ya da doğruya dejenere olabilir [49].

Tanım 3.6.1: $S \subset \mathbb{IE}^4$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset \mathbb{IE}^2$ regüler yaması ile verilsin. $X(u, v)$ yamasının $E(p)$ eğrilik elipsi bir çember ise, yani $\langle \vec{B}, \vec{C} \rangle = 0$ ve $\|\vec{B}\| = \|\vec{C}\|$ eşitlikleri sağlanırsa, S yüzeyine süperkonformal yüzey adı verilir [50]. Eğer sadece $\langle \vec{B}, \vec{C} \rangle = 0$ eşitliği sağlanırsa S yüzeyine zayıf süperkonformal yüzey adı verilir [15].

Teorem 3.6.2: S , \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.6) parametrelendirmesi ile verilen bir kanal yüzeyi olsun. Bu takdirde S yüzeyinin zayıf süperkonformal yüzey olması için gerek ve yeter koşul,

$$r'(k_2 r \sin v - k_3 r \cos v)(f^2 + r(fr'' - gr')) + f(r')^2 = 0 \quad (3.79)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat: S , \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.6) parametrelendirmesi ile verilen bir kanal yüzeyi olsun. Eşitlik (1.22), (1.23), ve (3.13) ten,

$$h(X_1, X_1) = \frac{1}{E} \left(\begin{array}{l} \frac{f^2 r'(f-1) - rr'(fr'' - gr')}{rE} T + fk_1 M_1 \\ + \frac{f(f^2 - f^3 + r(fr'' - gr'))}{rE} (\cos v M_2 + \sin v M_3) \end{array} \right), \quad (3.80)$$

$$h(X_2, X_2) = \frac{1}{rE} (fr'T - f^2 \cos v M_2 - f^2 \sin v M_3), \quad (3.81)$$

ve

$$\vec{C} = h(X_1, X_2) = \frac{f_v r'}{rE^{3/2}} (r'T - f \cos v M_2 - f \sin v M_3) \quad (3.82)$$

dir. Eşitlik (3.77), (3.80) ve (3.81) den,

$$\vec{B} = \frac{1}{2rE} \left(\begin{array}{l} \frac{-f^2 r' - rr'(fr'' - gr') - f(r')^3}{E} T + frk_1 M_1 \\ + \frac{f(f^2 + f(r')^2 + r(fr'' - gr'))}{E} (\cos v M_2 + \sin v M_3) \end{array} \right) \quad (3.83)$$

vektörü elde edilir. Eşitlik (3.82) ve (3.83) ten $\langle \vec{B}, \vec{C} \rangle = 0$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul,

$$-f^2 f_v r' - f_v r r'(fr'' - gr') - f f_v (r')^3 = 0 \quad (3.84)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Eşitlik (3.84) te f_v yerine $k_2 r \sin v - k_3 r \cos v$ yazılırsa Eşitlik (3.79) bulunur.

Sonuç 3.6.3: S , \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir tüp yüzeyi olsun. Bu durumda S yüzeyi zayıf süperkonformal bir yüzeydir.

Sonuç 3.6.4: S , \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.6) parametrelendirmesi ile verilen bir kanal yüzeyi olsun. Eğer γ eğrisinin eğrilik fonksiyonları arasında,

$$\frac{k_3(u)}{k_2(u)} = \tan v = c, \quad (c = \text{sabit}) \quad (3.85)$$

eşitliği geçerli ise, S yüzeyi zayıf süperkonformal bir yüzeydir.

Tanım 3.6.5: $S \subset \mathbb{IE}^4$ yüzeyi $X(u, v)$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. Bu takdirde S yüzeyinin ikinci temel form katsayıları yardımıyla $\Delta(p)$ determinantı ve $\alpha(p)$ matrisi sırasıyla,

$$\Delta(p) = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} h_{11}^1 & 2h_{12}^1 & h_{22}^1 & 0 \\ h_{11}^2 & 2h_{12}^2 & h_{22}^2 & 0 \\ 0 & h_{11}^1 & 2h_{12}^1 & h_{22}^1 \\ 0 & h_{11}^2 & 2h_{12}^2 & h_{22}^2 \end{vmatrix} (p) \quad (3.86)$$

ve

$$\alpha(p) = \begin{bmatrix} h_{11}^1 & h_{12}^1 & h_{22}^1 \\ h_{11}^2 & h_{12}^2 & h_{22}^2 \end{bmatrix} (p) \quad (3.87)$$

biçiminde tanımlanır [51]

Açıklama: $c_{ij}^k = 0, 1 \leq i, j, k \leq n-2$ ise S yüzeyi toplam (total) geodezik olarak adlandırılır. Bu durumda yüzey 2-düzlem içinde yatar. Eğer c_{ij}^k katsayılarından en az bir tanesi sıfırdan farklı ise $\text{rank} \alpha(p) = 1$ olup $h(X_u, X_u)$, $h(X_u, X_v)$ ve $h(X_v, X_v)$ kolineerdir.

$T_p^\perp S$ düzleminin orijini p noktası olarak alındığında aşağıdaki sınıflandırmalar verilebilir:

a) $\Delta(p) < 0$ ise, p noktası $E(p)$ eğrilik elipsinin dışındadır. Bu noktaya S yüzeyinin hiperbolik noktası adı verilir.

b) $\Delta(p) > 0$ ise, p noktası $E(p)$ eğrilik elipsinin içindedir. Bu noktaya S yüzeyinin eliptik noktası adı verilir.

c) $\Delta(p) = 0$ ise, p noktası $E(p)$ eğrilik elipsinin üzerindedir. Bu noktaya S yüzeyinin parabolik noktası adı verilir.

c-i) $\Delta(p) = 0$ ve $K(p) > 0$ ise p noktası sanal tipinde büküm noktasıdır.

c-ii) $\Delta(p) = 0$, $K(p) < 0$ ve

- $\text{rank}(\alpha(p)) = 2$ ise p noktası bozulmamıştır.

- $\text{rank}(\alpha(p)) = 1$ ise p noktası reel tipinde büküm noktasıdır.

c-iii) $\Delta(p) = 0$ ve $K(p) = 0$ ise p noktası düz tipinde büküm noktasıdır [51].

Teorem 3.6.6: S , \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir kanal yüzeyi olsun. Bu durumda $T_p^\perp S$ düzleminin orijini olan p noktası $E(p)$ eğrilik elipsinin dışındadır veya üzerindedir.

İspat: Eşitlik (1.25), (3.37) ve (3.86) dan $\Delta(p)$ determinanı,

$$\begin{vmatrix}
 \frac{D - gr' + fk_1\sqrt{E} + fr''}{\sqrt{2E}^{3/2}} & \frac{-\sqrt{2}f_v r'}{rE} & \frac{-f}{\sqrt{2r}\sqrt{E}} & 0 \\
 \frac{-D + gr' + fk_1\sqrt{E} - fr''}{\sqrt{2E}^{3/2}} & \frac{\sqrt{2}f_v r'}{rE} & \frac{f}{\sqrt{2r}\sqrt{E}} & 0 \\
 0 & \frac{D - gr' + fk_1\sqrt{E} + fr''}{\sqrt{2E}^{3/2}} & \frac{-\sqrt{2}f_v r'}{rE} & \frac{-f}{\sqrt{2r}\sqrt{E}} \\
 0 & \frac{-D + gr' + fk_1\sqrt{E} - fr''}{\sqrt{2}(E^{3/2})} & \frac{\sqrt{2}f_v r'}{rE} & \frac{f}{\sqrt{2r}\sqrt{E}}
 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{f^4 k_1^2}{4(r^2(r')^6 + 3f^2 r^2(r')^4 + 3f^4 r^2(r')^2 + f^6 r^2)} \quad (3.88)$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$D = f^2 k_2 \cos v + f^2 k_3 \sin v \quad (3.89)$$

dir. Eşitlik (3.88) den $\Delta(p) \leq 0$ olur. Yani p orijin noktası $E(p)$ eğrilik elipsinin dışındadır veya üzerindedir.

Sonuç 3.6.7: S , \mathbb{IE}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.6) parametrizasyonu ile verilen bir kanal yüzeyi olsun. $T_p^\perp S$ düzleminin orijini olan p noktasının $E(p)$ eğrilik elipsinin üzerinde olması için gerek ve yeter koşul $k_1 = 0$ ya da $k_2 r \cos v + k_3 r \sin v = 1$ olmasıdır.

4. \mathbb{IE}^4 ÖKLİD UZAYINDA NOKTASAL 1-TİPİNDE GAUSS DÖNÜŞÜMÜNE SAHİP PARALEL ÖTELEME ÇATISI YARDIMIYLA ELDE EDİLEN TÜP YÜZEYİ

Öklid ve yarı Öklid uzaylarında sonlu tipten altmanifoldlar kavramı 1970 li yılların sonlarına doğru Chen tarafından ele alınmıştır ve daha sonra bu kavram Chen ve Ishikawa tarafından diferensiyellenebilir dönüşümlere özellikle de alt manifoldların Gauss dönüşümlerine genişletilmiştir [52]. Böylece sonlu tipten Gauss dönüşümü yardımıyla birçok yüzey ve altmanifold sınıflandırılabilmiştir. [53-68] numaralı çalışmalarda 3 ve 4 boyutlu Öklid ve Minkowski uzaylarında farklı yüzeylerin noktasal 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahip olması incelenmiştir.

4.1. \mathbb{IE}^n Öklid Uzayında Gauss Dönüşümü

Bu bölümde \mathbb{IE}^n Öklid uzayında Gauss dönüşümü tanıtılmıştır.

Tanım 4.1.1: $S \subset \mathbb{IE}^n$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset \mathbb{IE}^2$ regular yaması ile verilen bir yüzey olsun. S yüzeyi üzerinde tanımlı herhangi bir türevlenebilir ψ fonksiyonunun Laplası (Laplasiyeni),

$$\Delta\psi = -\sum_{i=1}^2 (\tilde{\nabla}_{X_i} \tilde{\nabla}_{X_i} \psi - \tilde{\nabla}_{\nabla_{X_i} X_i} \psi) \quad (4.1)$$

şeklindedir [28].

V , \mathbb{IE}^n Öklid uzayında m -boyutlu yönlendirilmiş bir düzlem ve $\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ bu V düzleminin yönlendirilmiş bir ortonormal bazı olsun. \wedge dış çarpımı belirtmek üzere $X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_m$ vektörü normu 1 olan ayrışabilen bir m -vektördür ve V düzlemi üzerinde bir yönlendirme verir. Tersine \mathbb{IE}^n uzayında herhangi normu 1 olan ayrışabilen bir m -vektör tek bir düzlem belirler [69].

Tanım 4.1.2: $\mathbb{I}E^n$ Öklid uzayında orijinden geçen yönlendirilmiş m -boyutlu düzlemlerin oluşturduğu uzay $G(m, n)$ Grasmaniyen manifoldu olarak isimlendirilir. Dolayısıyla $\mathbb{I}E^n$ Öklid uzayındaki m -vektörlerin uzayı $\wedge^m \mathbb{I}E^n$, $G(m, n)$ Grasmaniyen manifoldu ile tanımlanır ve $\wedge^m \mathbb{I}E^n$, $N = \binom{n}{m}$ boyutlu bir Öklid uzayıdır [69].

Tanım 4.1.3: $x : M \rightarrow \mathbb{I}E^n$, M m -boyutlu Riemann manifoldundan $\mathbb{I}E^n$ n -boyutlu Öklid uzayına tanımlanan bir izometrik daldırma olsun. $\mathbb{I}E^n$ uzayının ortonormal bir çatısı $\{X_1, X_2, \dots, X_m, N_1, N_2, \dots, N_{n-m}\}$ olmak üzere X_1, X_2, \dots, X_m vektör alanları M manifolduna teğet ve N_1, N_2, \dots, N_{n-m} vektör alanları da M manifolduna dik olsunlar. Bu takdirde M manifoldunun Gauss dönüşümü,

$$G : M \rightarrow G(m, n) \subset \mathbb{I}E^N \quad (4.2)$$

$$p \rightarrow G(p) = (X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_m)(p)$$

eşitliği ile tanımlanır [70].

$S \subset \mathbb{I}E^n$ yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset \mathbb{I}E^2$ regular yaması ile verilen bir yüzey olsun. $\mathbb{I}E^n$ n -boyutlu Öklid uzayının ortonormal bir çatısı $\{X_1, X_2, N_1, N_2, \dots, N_{n-2}\}$ olmak üzere Eşitlik (4.2) yardımıyla S yüzeyinin Gauss dönüşümü her $p \in S$ için,

$$G(p) = (X_1 \wedge X_2)(p) \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanır. S yüzeyinin Gauss dönüşümü S yüzeyi üzerinde tanımlı sıfırdan farklı türevlenebilir bir λ fonksiyonu ve sabit bir \vec{C} vektörü için,

$$\Delta G = \lambda(G + \vec{C}) \quad (4.4)$$

şartını sağlarsa S yüzeyine noktasal 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahiptir denir [58, 59, 66]. Eğer λ fonksiyonu sabit değil ise S yüzeyine has 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahiptir denir. Ayrıca $\vec{C} = 0$ ($\vec{C} \neq 0$) ise S yüzeyine 1.çeşit (2. çeşit) 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahiptir denir [60, 61, 67, 68].

4.2. \mathbb{E}^4 Öklid Uzayında Noktasal 1-Tipinde Gauss Dönüşümüne Sahip Paralel Öteleme Çatısı Yardımıyla Elde Edilen Tüp Yüzeyi

Bu bölümde \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen tüp yüzeyinin noktasal 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahip olması incelenmiştir.

S yüzeyinin p noktasındaki $T_p S$ teğet uzayı $\{X_1, X_2\}$ ve $T_p^\perp S$ normal uzayı $\{N_1, N_2\}$ ortonormal bazları ile gerilsin. Bu vektörler sırasıyla,

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{X_u}{\|X_u\|} = T, \\ X_2 &= \frac{X_v}{\|X_v\|} = -\sin v M_2 + \cos v M_3, \\ N_1 &= \frac{M_1 + \cos v M_2 + \sin v M_3}{\sqrt{2}}, \\ N_2 &= \frac{M_1 - \cos v M_2 - \sin v M_3}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

şeklinde verilebilir. Bu vektörlerin X_1 ve X_2 teğet vektörleri yönünde türevleri alınırsa,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{X_1} X_1 &= a_1 X_2 + a_2 N_1 + a_3 N_2, & \tilde{\nabla}_{X_2} X_1 &= 0, \\ \tilde{\nabla}_{X_1} X_2 &= -a_1 X_1, & \tilde{\nabla}_{X_2} X_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2r}} N_1 + \frac{1}{\sqrt{2r}} N_2, \\ \tilde{\nabla}_{X_1} N_1 &= -a_2 X_1, & \tilde{\nabla}_{X_2} N_1 &= \frac{1}{\sqrt{2r}} X_2, \\ \tilde{\nabla}_{X_1} N_2 &= -a_3 X_1, & \tilde{\nabla}_{X_2} N_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2r}} X_2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

vektörleri elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} a_1(u, v) &= \frac{k_3(u) \cos v - k_2(u) \sin v}{f(u, v)}, \\ a_2(u, v) &= \frac{k_1(u) + k_2(u) \cos v + k_3(u) \sin v}{\sqrt{2} f(u, v)}, \\ a_3(u, v) &= \frac{k_1(u) - k_2(u) \cos v - k_3(u) \sin v}{\sqrt{2} f(u, v)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

reel değerli fonksiyonlardır. Böylece Eşitlik (1.14) te verilen Gauss denklemi yardımıyla Eşitlik (4.6) nın teğet ve normal bileşenleri sırasıyla,

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_1} X_1 &= a_1 X_2, & \nabla_{X_2} X_1 &= 0, \\
\nabla_{X_1} X_2 &= -a_1 X_1, & \nabla_{X_2} X_2 &= 0, \\
\nabla_{X_1} N_1 &= -a_2 X_1, & \nabla_{X_2} N_1 &= \frac{1}{\sqrt{2r}} X_2 \\
\nabla_{X_1} N_2 &= -a_3 X_1, & \nabla_{X_2} N_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2r}} X_2
\end{aligned} \tag{4.8}$$

ve

$$\begin{aligned}
h(X_1, X_1) &= a_2 N_1 + a_3 N_2, & D_{X_1} N_1 &= 0, \\
h(X_1, X_2) &= 0, & D_{X_1} N_2 &= 0, \\
h(X_2, X_1) &= 0, & D_{X_2} N_1 &= 0, \\
h(X_2, X_2) &= -\frac{1}{\sqrt{2r}} N_1 + \frac{1}{\sqrt{2r}} N_2, & D_{X_2} N_2 &= 0
\end{aligned} \tag{4.9}$$

dir. Eşitlik (1.15) te verilen Weingarten denklemi yardımıyla,

$$\begin{aligned}
A_{N_1} X_1 &= a_2 X_1, & A_{N_2} X_1 &= a_3 X_1, \\
A_{N_1} X_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2r}} X_2, & A_{N_2} X_2 &= \frac{1}{\sqrt{2r}} X_2
\end{aligned} \tag{4.10}$$

eşitlikleri elde edilir. S yüzeyinin Gauss dönüşümü Eşitlik (4.3) ten $G = X_1 \wedge X_2$ dir. G Gauss dönüşümünün Laplası ise Eşitlik (4.1) den,

$$\Delta G = -\tilde{\nabla}_{X_1} \tilde{\nabla}_{X_1} G - \tilde{\nabla}_{X_2} \tilde{\nabla}_{X_2} G + \tilde{\nabla}_{\nabla_{X_1} X_1} G + \tilde{\nabla}_{\nabla_{X_2} X_2} G \tag{4.11}$$

dır. Böylece G Gauss dönüşümünün X_1 ve X_2 teğet vektörleri yönünde kovaryant türevleri hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X_1} \mathbf{G} &= \tilde{\nabla}_{X_1} (\mathbf{X}_1 \wedge \mathbf{X}_2) \\
&= (\tilde{\nabla}_{X_1} \mathbf{X}_1) \wedge \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_1 \wedge (\tilde{\nabla}_{X_1} \mathbf{X}_2) \\
&= (\mathbf{a}_1 \mathbf{X}_2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{N}_1 + \mathbf{a}_3 \mathbf{N}_2) \wedge \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_1 (-\mathbf{a}_1 \mathbf{X}_1) \\
&= -\mathbf{a}_2 (\mathbf{X}_2 \wedge \mathbf{N}_1) - \mathbf{a}_3 (\mathbf{X}_2 \wedge \mathbf{N}_2)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

ve

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X_2} \mathbf{G} &= \tilde{\nabla}_{X_2} (\mathbf{X}_1 \wedge \mathbf{X}_2) \\
&= (\tilde{\nabla}_{X_2} \mathbf{X}_1) \wedge \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_1 \wedge (\tilde{\nabla}_{X_2} \mathbf{X}_2) \\
&= \mathbf{X}_1 \wedge \left(-\frac{1}{\sqrt{2r}} \mathbf{N}_1 + \frac{1}{\sqrt{2r}} \mathbf{N}_2 \right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2r}} (\mathbf{X}_1 \wedge \mathbf{N}_1) + \frac{1}{\sqrt{2r}} (\mathbf{X}_1 \wedge \mathbf{N}_2)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

elde edilir. Eşitlik (4.12) ve (4.13) ün \mathbf{X}_1 ve \mathbf{X}_2 teğet vektörleri yönünde kovaryant türevleri alınarak,

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X_1} \tilde{\nabla}_{X_1} \mathbf{G} &= \tilde{\nabla}_{X_1} (-\mathbf{a}_2 (\mathbf{X}_2 \wedge \mathbf{N}_1) - \mathbf{a}_3 (\mathbf{X}_2 \wedge \mathbf{N}_2)) \\
&= -\mathbf{X}_1 [\mathbf{a}_2] (\mathbf{X}_2 \wedge \mathbf{N}_1) - \mathbf{X}_1 [\mathbf{a}_3] (\mathbf{X}_2 \wedge \mathbf{N}_2) \\
&\quad - \mathbf{a}_2 ((\tilde{\nabla}_{X_1} \mathbf{X}_2) \wedge \mathbf{N}_1 + \mathbf{X}_2 \wedge (\tilde{\nabla}_{X_1} \mathbf{N}_1)) \\
&\quad - \mathbf{a}_3 ((\tilde{\nabla}_{X_1} \mathbf{X}_2) \wedge \mathbf{N}_2 + \mathbf{X}_2 \wedge (\tilde{\nabla}_{X_1} \mathbf{N}_2)) \\
&= -\mathbf{X}_1 [\mathbf{a}_2] (\mathbf{X}_2 \wedge \mathbf{N}_1) - \mathbf{X}_1 [\mathbf{a}_3] (\mathbf{X}_2 \wedge \mathbf{N}_2) \\
&\quad - \mathbf{a}_2 (-\mathbf{a}_1 (\mathbf{X}_1 \wedge \mathbf{N}_1) + \mathbf{a}_2 (\mathbf{X}_1 \wedge \mathbf{X}_2)) \\
&\quad - \mathbf{a}_3 (-\mathbf{a}_1 (\mathbf{X}_1 \wedge \mathbf{N}_2) + \mathbf{a}_3 (\mathbf{X}_1 \wedge \mathbf{X}_2))
\end{aligned} \tag{4.14}$$

ve

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X_2} \tilde{\nabla}_{X_2} \mathbf{G} &= \tilde{\nabla}_{X_2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2r}} (\mathbf{X}_1 \wedge \mathbf{N}_1) + \frac{1}{\sqrt{2r}} (\mathbf{X}_1 \wedge \mathbf{N}_2) \right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2r}} \left(((\tilde{\nabla}_{X_2} \mathbf{X}_1) \wedge \mathbf{N}_1 + \mathbf{X}_1 \wedge (\tilde{\nabla}_{X_2} \mathbf{N}_1)) \right. \\
&\quad \left. - ((\tilde{\nabla}_{X_2} \mathbf{X}_1) \wedge \mathbf{N}_2 + \mathbf{X}_1 \wedge (\tilde{\nabla}_{X_2} \mathbf{N}_2)) \right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2r}} \left(\frac{1}{\sqrt{2r}} (\mathbf{X}_1 \wedge \mathbf{X}_2) \right) + \frac{1}{\sqrt{2r}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2r}} (\mathbf{X}_1 \wedge \mathbf{X}_2) \right) \\
&= -\frac{1}{r^2} (\mathbf{X}_1 \wedge \mathbf{X}_2)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\nabla_{X_1} X_1} \mathbf{G} &= \tilde{\nabla}_{a_1 X_2} \mathbf{G} \\
&= a_1 \tilde{\nabla}_{X_2} \mathbf{G} \\
&= -\frac{a_1}{\sqrt{2r}} (X_1 \wedge N_1) + \frac{a_1}{\sqrt{2r}} (X_1 \wedge N_2)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

ve

$$\tilde{\nabla}_{\nabla_{X_2} X_2} \mathbf{G} = 0 \tag{4.17}$$

dır. Böylece Eşitlik (4.14)-(4.17), Eşitlik (4.11) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{G} &= \left(a_2^2 + a_3^2 + \frac{1}{r^2} \right) X_1 \wedge X_2 \\
&+ \left(-a_1 a_2 - \frac{a_1}{\sqrt{2r}} \right) X_1 \wedge N_1 \\
&+ \left(-a_1 a_3 + \frac{a_1}{\sqrt{2r}} \right) X_1 \wedge N_2 \\
&+ (X_1[a_2]) X_2 \wedge N_1 \\
&+ (X_1[a_3]) X_2 \wedge N_2
\end{aligned} \tag{4.18}$$

elde edilir. Burada,

$$X_1[a_2(u, v)] = \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial u} a_2(u, v) \tag{4.19}$$

ve

$$X_1[a_3(u, v)] = \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial u} a_3(u, v) \tag{4.20}$$

dir.

Teorem 4.2.1: Harmonik Gauss dönüşümüne sahip tüp yüzeyi yoktur.

İspat: S , (3.7) parametrelendirmesi ile verilen tüp yüzeyi olsun. S yüzeyinin Gauss dönüşümü harmonik (yani $\Delta G = 0$) ise, Eşitlik (4.18) den $a_2^2 + a_3^2 + \frac{1}{r^2} = 0$ yani $a_2 = a_3 = \frac{1}{r^2} = 0$ olması gerekir. Bu bir çelişki olduğundan $\Delta G = 0$ olamaz. O halde harmonik Gauss dönüşümüne sahip tüp yüzeyi yoktur.

Şimdi (3.7) parametrelendirmesi ile verilen S tüp yüzeyinin noktasal 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahip (yani $\Delta G = \lambda(G + \vec{C})$) olmasını inceleyelim.

Eşitlik (4.4) ve (4.18) yardımıyla,

$$\begin{aligned}
 \lambda + \lambda \langle \vec{C}, X_1 \wedge X_2 \rangle &= a_2^2 + a_3^2 + \frac{1}{r^2}, \\
 \lambda \langle \vec{C}, X_1 \wedge N_1 \rangle &= -a_1 a_2 - \frac{a_1}{\sqrt{2}r}, \\
 \lambda \langle \vec{C}, X_1 \wedge N_2 \rangle &= -a_1 a_3 + \frac{a_1}{\sqrt{2}r}, \\
 \lambda \langle \vec{C}, X_2 \wedge N_1 \rangle &= X_1[a_2], \\
 \lambda \langle \vec{C}, X_2 \wedge N_2 \rangle &= X_1[a_3]
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

elde edilir. Burada λ sıfırdan farklı türevlenebilir bir fonksiyondur. Eşitlik (4.21) den,

$$\langle \vec{C}, N_1 \wedge N_2 \rangle = 0 \tag{4.22}$$

bulunur. Eşitlik (4.22) nin sırasıyla X_1 ve X_2 teğet vektörleri yönünde kovaryant türevleri alınarak ve Eşitlik (4.21) de bu türevlerde yerine yazılarak,

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \vec{C}, (\tilde{\nabla}_{x_1} N_1) \wedge N_2 + N_1 \wedge (\tilde{\nabla}_{x_1} N_2) \right\rangle \\
&= \left\langle \vec{C}, -a_2 (X_1 \wedge N_2) + a_3 (X_1 \wedge N_1) \right\rangle \\
&= -a_2 \left\langle \vec{C}, X_1 \wedge N_2 \right\rangle + a_3 \left\langle \vec{C}, X_1 \wedge N_1 \right\rangle \\
&= \frac{-a_2}{\lambda} \left(-a_1 a_3 + \frac{a_1}{\sqrt{2r}} \right) + \frac{a_3}{\lambda} \left(-a_1 a_2 - \frac{a_1}{\sqrt{2r}} \right) \\
&= -\frac{a_1}{\sqrt{2r}\lambda} (a_2 + a_3)
\end{aligned} \tag{4.23}$$

ve

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \vec{C}, (\tilde{\nabla}_{x_2} N_1) \wedge N_2 + N_1 \wedge (\tilde{\nabla}_{x_2} N_2) \right\rangle \\
&= \left\langle \vec{C}, \frac{1}{\sqrt{2r}} (X_2 \wedge N_2) + \frac{1}{\sqrt{2r}} (X_2 \wedge N_1) \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2r}} \left\langle \vec{C}, X_2 \wedge N_2 \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2r}} \left\langle \vec{C}, X_2 \wedge N_1 \right\rangle \\
&= \frac{X_1[a_3] + X_1[a_2]}{\lambda}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

elde edilir. Eşitlik (4.23) ve (4.24) göz önünde bulundurulursa, (3.7) parametrelendirmesi ile verilen S tüp yüzeyinin noktasal 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahip olması için aşağıdaki üç durumdan birini sağlaması gerekir:

- I) $a_3 = -a_2$ ve $a_1 \neq 0$,
- II) $a_3 = -a_2$ ve $a_1 = 0$,
- III) $X_1[a_2 + a_3] = 0$, ($a_3 \neq -a_2$) ve $a_1 = 0$.

I. Durum: $a_3 = -a_2$ ve $a_1 \neq 0$ olsun. Buna göre Eşitlik (4.18) den \vec{C} vektörü,

$$\begin{aligned}\vec{C} = & \left(\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right) X_1 \wedge X_2 \\ & + \left(-\frac{a_1 a_2}{\lambda} - \frac{a_1}{\sqrt{2r\lambda}} \right) X_1 \wedge N_1 \\ & + \left(\frac{a_1 a_2}{\lambda} + \frac{a_1}{\sqrt{2r\lambda}} \right) X_1 \wedge N_2 \\ & + \left(\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right) X_2 \wedge N_1 \\ & + \left(-\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right) X_2 \wedge N_2\end{aligned}\quad (4.25)$$

şeklinde bulunur. Ayrıca $a_3 = -a_2$ olduğundan Eşitlik (4.7) den,

$$k_1 - k_2 \cos v - k_3 \sin v = -(k_1 + k_2 \cos v + k_3 \sin v) \quad (4.26)$$

eşitliği elde edilir. Böylece $k_1 = 0$ olur.

Buna göre aşağıdaki iki durum incelenebilir:

(a) $\vec{C} = 0$ olma durumu:

S , \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir tüp yüzeyi, $a_3 = -a_2$ ve $a_1 \neq 0$ olsun. Farz edelim ki S yüzeyi 1.çeşit noktasal 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahip, yani $\vec{C} = 0$ olsun. O halde \vec{C} vektörünün tüm bileşenleri sıfırdır. Öncelikle $X_1 \wedge N_2$ vektörünün katsayısı sıfır olsun. Bu durumda,

$$\frac{a_1 a_2}{\lambda} + \frac{a_1}{\sqrt{2r\lambda}} = \frac{a_1}{\sqrt{2r\lambda}} (\sqrt{2} a_2 r + 1) = 0 \quad (4.27)$$

dır. $a_1 \neq 0$ olduğundan $a_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}r}$ olur. Eşitlik (4.26) göz önünde bulundurulursa,

Eşitlik (3.13) ün yardımıyla Eşitlik (4.7) den $a_2 = \frac{1-f}{\sqrt{2}fr}$ şeklinde yazılır. a_2 nin

verilen iki değeri eşitlenirse $1=0$ elde edilir. Bu bir çelişki olduğundan $X_1 \wedge N_2$ vektörünün katsayısı sıfır olamaz.

O halde aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.2: S , \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir tüp yüzeyi olsun. $a_3 = -a_2$ ve $a_1 \neq 0$ olduğunda S yüzeyi 1.çeşit noktasal 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahip değildir.

(b) $\vec{C} \neq 0$ olma durumu:

S , \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir tüp yüzeyi, $a_3 = -a_2$ ve $a_1 \neq 0$ olsun. Farz edelim ki S yüzeyi 2.çeşit noktasal 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahip, yani $\vec{C} \neq 0$ olsun. Buna göre \vec{C} sabit bir vektör olduğundan \vec{C} vektörünün X_1 ve X_2 teğet vektörleri yönündeki kovaryant türevleri sıfıra eşittir. Böylece Eşitlik (4.25) ve (4.6) yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X_1} \vec{C} &= X_1 \left[\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right] X_1 \wedge X_2 \\
&+ \left(\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right) (-a_2 (X_2 \wedge N_1) + a_2 (X_2 \wedge N_2)) \\
&+ X_1 \left[-\frac{a_1 a_2}{\lambda} - \frac{a_1}{\sqrt{2r\lambda}} \right] X_1 \wedge N_1 \\
&+ \left(-\frac{a_1 a_2}{\lambda} - \frac{a_1}{\sqrt{2r\lambda}} \right) (a_1 (X_2 \wedge N_1) + a_2 (N_1 \wedge N_2)) \\
&+ X_1 \left[\frac{a_1 a_2}{\lambda} + \frac{a_1}{\sqrt{2r\lambda}} \right] X_1 \wedge N_2 \\
&+ \left(\frac{a_1 a_2}{\lambda} + \frac{a_1}{\sqrt{2r\lambda}} \right) (a_1 (X_2 \wedge N_2) + a_2 (N_1 \wedge N_2)) \\
&+ X_1 \left[\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right] X_2 \wedge N_1 + \frac{X_1[a_2]}{\lambda} (-a_1 (X_1 \wedge N_1) + a_2 (X_1 \wedge X_2)) \\
&+ X_1 \left[-\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right] X_2 \wedge N_2 - \frac{X_1[a_2]}{\lambda} (-a_1 (X_1 \wedge N_2) - a_2 (X_1 \wedge X_2)) \quad (4.28)
\end{aligned}$$

bulunur. \vec{C} vektörünün sabit bir vektör olduğu göz önünde bulundurulur ve Eşitlik (4.28) düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X_1} \vec{C} &= \left(X_1 \left[\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right] + 2a_2 \frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right) X_1 \wedge X_2 \\
&+ \left(X_1 \left[-\frac{a_1 a_2}{\lambda} - \frac{a_1}{\sqrt{2r\lambda}} \right] - a_1 \frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right) X_1 \wedge N_1 \\
&+ \left(X_1 \left[\frac{a_1 a_2}{\lambda} + \frac{a_1}{\sqrt{2r\lambda}} \right] + a_1 \frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right) X_1 \wedge N_2 \\
&+ \left(X_1 \left[\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right] - a_1 \left(\frac{a_1 a_2}{\lambda} + \frac{a_1}{\sqrt{2r\lambda}} \right) - a_2 \left(\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right) \right) X_2 \wedge N_1 \\
&+ \left(-X_1 \left[\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right] + a_1 \left(\frac{a_1 a_2}{\lambda} + \frac{a_1}{\sqrt{2r\lambda}} \right) + a_2 \left(\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right) \right) X_2 \wedge N_2 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.29}$$

elde edilir.

Benzer şekilde Eşitlik (4.25) ve (4.6) yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X_2} \vec{C} &= X_2 \left[\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right] X_1 \wedge X_2 \\
&+ \left(\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2r}} (X_1 \wedge N_1) + \frac{1}{\sqrt{2r}} (X_1 \wedge N_2) \right) \\
&+ X_2 \left[-\frac{a_1 a_2}{\lambda} - \frac{a_1}{\sqrt{2r\lambda}} \right] X_1 \wedge N_1 + \left(-\frac{a_1 a_2}{\lambda} - \frac{a_1}{\sqrt{2r\lambda}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2r}} (X_1 \wedge X_2) \right) \\
&+ X_2 \left[\frac{a_1 a_2}{\lambda} + \frac{a_1}{\sqrt{2r\lambda}} \right] X_1 \wedge N_2 + \left(\frac{a_1 a_2}{\lambda} + \frac{a_1}{\sqrt{2r\lambda}} \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2r}} (X_1 \wedge X_2) \right) \\
&+ X_2 \left[\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right] X_2 \wedge N_1 + \frac{X_1[a_2]}{\lambda} \left(-\frac{1}{\sqrt{2r}} (N_1 \wedge N_2) \right) \\
&+ X_2 \left[-\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right] X_2 \wedge N_2 - \frac{X_1[a_2]}{\lambda} \left(-\frac{1}{\sqrt{2r}} (N_1 \wedge N_2) \right)
\end{aligned} \tag{4.30}$$

elde edilir. \vec{C} vektörünün sabit bir vektör olduğu göz önünde bulundurulur ve Eşitlik (4.30) düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X_2} \vec{C} &= \left(X_2 \left[\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right] - \frac{\sqrt{2}}{r} \left(\frac{a_1 a_2}{\lambda} + \frac{a_1}{\sqrt{2r\lambda}} \right) \right) X_1 \wedge X_2 \\
&+ \left(X_2 \left[-\frac{a_1 a_2}{\lambda} - \frac{a_1}{\sqrt{2r\lambda}} \right] - \frac{1}{\sqrt{2r}} \left(\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right) \right) X_1 \wedge N_1 \\
&+ \left(X_2 \left[\frac{a_1 a_2}{\lambda} + \frac{a_1}{\sqrt{2r\lambda}} \right] + \frac{1}{\sqrt{2r}} \left(\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right) \right) X_1 \wedge N_2 \\
&+ X_2 \left[\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right] X_2 \wedge N_1 \\
&+ X_2 \left[-\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right] X_2 \wedge N_2 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.31}$$

elde edilir. Eşitlik (4.31) den $X_2 \left[\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right] = 0$ dır. Yani,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{1}{\lambda f} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{1-f}{\sqrt{2fr}} \right\} \right\} = 0 \tag{4.32}$$

elde edilir. Böylece,

$$-\lambda f^3 f_{uv} + f_u (\lambda_v f^3 + 3\lambda f^2 f_v) = 0 \tag{4.33}$$

bulunur. Eşitlik (4.31) de $X_1 \wedge X_2$ ve $X_1 \wedge N_2$ vektörlerinin katsayılarının sıfır olması göz önünde bulundurulursa,

$$X_2 \left[\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right] = \frac{\sqrt{2}}{r} \left(\frac{a_1 a_2}{\lambda} + \frac{a_1}{\sqrt{2r\lambda}} \right) \tag{4.34}$$

ve

$$X_2 \left[\frac{a_1 a_2}{\lambda} + \frac{a_1}{\sqrt{2r\lambda}} \right] = -\frac{1}{\sqrt{2r}} \left(\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right) \tag{4.35}$$

elde edilir. Eşitlik (4.34) ve (4.35) ten,

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right) = \sqrt{2} \left(\frac{a_1 a_2}{\lambda} + \frac{a_1}{\sqrt{2r\lambda}} \right) \quad (4.36)$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{a_1 a_2}{\lambda} + \frac{a_1}{\sqrt{2r\lambda}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right) \quad (4.37)$$

denklemleri elde edilir. Eşitlik (4.36) ve (4.37) den,

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right) + \left(\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right) = 0 \quad (4.38)$$

ve

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{a_1 a_2}{\lambda} + \frac{a_1}{\sqrt{2r\lambda}} \right) + \left(\frac{a_1 a_2}{\lambda} + \frac{a_1}{\sqrt{2r\lambda}} \right) = 0 \quad (4.39)$$

bulunur. O halde Eşitlik (4.38) ve (4.39) dan,

$$\begin{aligned} \frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 &= m_1(u) \cos v + m_2(u) \sin v \\ \frac{a_1 a_2}{\lambda} + \frac{a_1}{\sqrt{2r\lambda}} &= m_3(u) \cos v + m_4(u) \sin v \end{aligned} \quad (4.40)$$

olup, $m_i(u)$, $1 \leq i \leq 4$ reel değerli türevlenebilir fonksiyonlardır. Benzer şekilde

$\tilde{\nabla}_{x_1} \vec{C}$ vektörünün sıfır olması göz önünde bulundurulursa Eşitlik (4.29) dan,

$$\begin{aligned} X_1 \left[\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right] &= -2a_2 \frac{X_1[a_2]}{\lambda}, \\ X_1 \left[\frac{a_1 a_2}{\lambda} + \frac{a_1}{\sqrt{2r\lambda}} \right] &= -a_1 \frac{X_1[a_2]}{\lambda} \end{aligned} \quad (4.41)$$

elde edilir. Eşitlik (4.41) deki $\frac{X_1[a_2]}{\lambda}$ ifadeleri eşitlenirse,

$$\frac{1}{2a_2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right) = \frac{1}{a_1} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{a_1 a_2}{\lambda} + \frac{a_1}{\sqrt{2r\lambda}} \right) \quad (4.42)$$

bulunur. Eşitlik (4.40), Eşitlik (4.42) de yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2a_2} (m'_1(u) \cos v + m'_2(u) \sin v) = \frac{1}{a_1} (m'_3(u) \cos v + m'_4(u) \sin v) \quad (4.43)$$

elde edilir. Eşitlik (4.43) ten,

$$m'_3(u) = \frac{a_1}{2a_2} m'_1(u) \quad (4.44)$$

$$m'_4(u) = \frac{a_1}{2a_2} m'_2(u)$$

olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} X_1 \left[\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right] &= \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{1}{\lambda f} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{1-f}{\sqrt{2fr}} \right\} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2fr}} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{1}{\lambda f} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{1-f}{f} \right\} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2fr}} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{-f_u}{\lambda f^3} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2fr}} (-\lambda f^3 f_{uu} + f_u (\lambda_u f^3 + 3\lambda f^2 f_u)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2r}} (-\lambda f^2 f_{uu} + f_u (\lambda_u f^2 + 3\lambda f f_u)) \end{aligned} \quad (4.45)$$

bulunur. $\tilde{\nabla}_{X_1} \vec{C}$ türevi sıfıra eşit olduğundan Eşitlik (4.29) da $X_2 \wedge N_1$ ve $X_2 \wedge N_2$ vektörlerinin katsayıları da sıfırdır. O halde,

$$X_1 \left[\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right] = a_1 \left(\frac{a_1 a_2}{\lambda} + \frac{a_1}{\sqrt{2r\lambda}} \right) + a_2 \left(\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right) \quad (4.46)$$

dir. Böylece Eşitlik (4.40) ve (4.45), Eşitlik (4.46) da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
-\lambda f^2 f_{uu} + f_u (\lambda_u f^2 + 3\lambda f f_u) &= \sqrt{2}r \begin{pmatrix} a_1 (m_3(u) \cos v + m_4(u) \sin v) \\ + a_2 (m_1(u) \cos v + m_2(u) \sin v) \end{pmatrix} \\
&= \sqrt{2}r \cos v (a_1 m_3(u) + a_2 m_1(u)) \\
&+ \sqrt{2}r \sin v (a_1 m_4(u) + a_2 m_2(u))
\end{aligned} \tag{4.47}$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 4.2.3: S , \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir tüp yüzeyi olsun. $a_3 = -a_2$ ve $a_1 \neq 0$ olduğunda S yüzeyinin 2.çeşit noktasal 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahip olması için gerek ve yeter koşul Eşitlik (4.33), (4.40), (4.44) ve (4.47) nin sağlanmasıdır.

II. Durum: $a_3 = -a_2$ ve $a_1 = 0$ olsun. Buna göre Eşitlik (4.18) den \vec{C} vektörü,

$$\begin{aligned}
\vec{C} &= \left(\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2 \lambda} - 1 \right) X_1 \wedge X_2 \\
&+ \left(\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right) X_2 \wedge N_1 \\
&+ \left(-\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right) X_2 \wedge N_2
\end{aligned} \tag{4.48}$$

şeklindedir. I. Durumda olduğu gibi burada da Eşitlik (4.26) gereği $k_1 = 0$ dır. $a_1 = 0$ olduğundan Eşitlik (4.7) gereği,

$$k_3(u) \cos v - k_2(u) \sin v = 0, \tag{4.49}$$

yani,

$$\frac{k_3(u)}{k_2(u)} = \tan v \tag{4.50}$$

dir. Eşitlik (4.50) nin çözümü,

$$\frac{k_3(u)}{k_2(u)} = \tan v = c, (c = \text{sabit}) \quad (4.51)$$

olduğundan II. Durum ancak v değişkeninin sabit olduğu yüzey noktalarında, yani u parametre eğrileri üzerindeki noktalarda geçerlidir.

Buna göre aşağıdaki iki durum incelenebilir:

(a) $\vec{C} = 0$ olma durumu:

S , \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir tüp yüzeyi, $a_3 = -a_2$ ve $a_1 = 0$ olsun. Farz edelim ki S yüzeyi 1.çeşit noktasal 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahip, yani $\vec{C} = 0$ olsun. O halde \vec{C} vektörünün tüm bileşenleri sıfırdır. $X_2 \wedge N_1$ ve $X_2 \wedge N_2$ vektörlerinin katsayıları sıfır olduğundan $X_1[a_2] = 0$ dır. Buna göre Eşitlik (4.7) den,

$$\frac{1}{f(u, v)} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{k_2(u) \cos v + k_3(u) \sin v}{\sqrt{2}f(u, v)} \right\} = 0 \quad (4.52)$$

bulunur. Eşitlik (4.52) yardımıyla,

$$(k'_2(u) \cos v + k'_3(u) \sin v) f(u, v) - (k_2(u) \cos v + k_3(u) \sin v) f_u(u, v) = 0 \quad (4.53)$$

yazılabilir. $f(u, v) = 1 - k_2(u)r(u) \cos v - k_3(u)r(u) \sin v$ olduğundan,

$$\begin{aligned} & (k'_2(u) \cos v + k'_3(u) \sin v)(1 - k_2(u)r \cos v - k_3(u)r \sin v) \\ & - (k_2(u) \cos v + k_3(u) \sin v)(-k'_2(u)r \cos v - k'_3(u)r \sin v) = 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

dır. Eşitlik (4.54) ten $k'_2(u) \cos v + k'_3(u) \sin v = 0$ bulunur. Yani, $k'_2(u) = k'_3(u) = 0$ olur. Böylece,

$$k_2 = \text{sabit}, k_3 = \text{sabit} \quad (4.55)$$

dir. Ayrıca Eşitlik (4.48) den,

$$\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 = 0 \quad (4.56)$$

yani,

$$\lambda = 2a_2^2 + \frac{1}{r^2} \quad (4.57)$$

dir. $k_1 = 0$, k_2, k_3 birer sabit ve $v = v_0$ sabit olduğundan a_2 bir sabit olur. O halde S yüzeyi has olmayan (non-proper) 1. çeşit noktasal 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahiptir.

Buna göre aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

Teorem 4.2.4: S , \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir tüp yüzeyi olsun. $a_3 = -a_2$ ve $a_1 = 0$ olmak üzere S yüzeyinin u parametre eğrileri üzerindeki noktalarda 1.çeşit noktasal 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahip olması için gerek ve yeter koşul γ merkez eğrisinin Frenet çatısına göre eğriliği κ nın sabit olması, yani γ merkez eğrisinin bir Salkowski eğrisi olmasıdır.

Sonuç 4.2.5: S , \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir tüp yüzeyi olsun. $a_3 = -a_2$ ve $a_1 = 0$ olmak üzere S yüzeyinin 1.çeşit noktasal 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahip olması için gerek ve yeter koşul Eşitlik (4.57) nin sağlanmasıdır. Bu takdirde S yüzeyi has olmayan (non-proper) noktasal 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahiptir.

(b) $\vec{C} \neq 0$ olma durumu:

S , \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir tüp yüzeyi, $a_3 = -a_2$ ve $a_1 = 0$ olsun. Farz edelim ki S yüzeyi 2.çeşit noktasal 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahip, yani $\vec{C} \neq 0$ olsun. Buna göre \vec{C} sabit bir vektör olduğundan \vec{C} vektörünün X_1 ve X_2 teğet vektörleri yönündeki kovaryant türevleri sıfıra eşittir. Eşitlik (4.48) ve Eşitlik (4.6) yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X_1} \vec{C} &= X_1 \left[\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right] X_1 \wedge X_2 \\
&+ \left(\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right) (-a_2(X_2 \wedge N_1) + a_2(X_2 \wedge N_2)) \\
&+ X_1 \left[\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right] X_2 \wedge N_1 + \frac{X_1[a_2]}{\lambda} (a_2(X_1 \wedge X_2)) \\
&+ X_1 \left[-\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right] X_2 \wedge N_2 - \frac{X_1[a_2]}{\lambda} (-a_2(X_1 \wedge X_2))
\end{aligned} \tag{4.58}$$

bulunur. \vec{C} vektörü sabit bir vektör olduğundan Eşitlik (4.58),

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X_1} \vec{C} &= \left(X_1 \left[\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right] + 2a_2 \frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right) X_1 \wedge X_2 \\
&+ \left(X_1 \left[\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right] - a_2 \left(\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right) \right) X_2 \wedge N_1 \\
&+ \left(-X_1 \left[\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right] + a_2 \left(\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right) \right) X_2 \wedge N_2 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.59}$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde Eşitlik (4.48) ve Eşitlik (4.6) yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X_2} \vec{C} &= X_2 \left[\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right] X_1 \wedge X_2 \\
&+ \left(\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}r} (X_1 \wedge N_1) + \frac{1}{\sqrt{2}r} (X_1 \wedge N_2) \right) \\
&+ X_2 \left[\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right] X_2 \wedge N_1 + \frac{X_1[a_2]}{\lambda} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}r} (N_1 \wedge N_2) \right) \\
&+ X_2 \left[-\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right] X_2 \wedge N_2 - \frac{X_1[a_2]}{\lambda} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}r} (N_1 \wedge N_2) \right)
\end{aligned} \tag{4.60}$$

elde edilir. \vec{C} vektörü sabit bir vektör olduğundan Eşitlik (4.60),

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{x_2} \vec{C} &= X_2 \left[\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right] X_1 \wedge X_2 \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2r}} \left(\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right) X_1 \wedge N_1 \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2r}} \left(\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right) X_1 \wedge N_2 \\
&\quad + X_2 \left[\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right] X_2 \wedge N_1 \\
&\quad + X_2 \left[-\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right] X_2 \wedge N_2 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.61}$$

şeklinde elde edilir. Eşitlik (4.61) de $X_1 \wedge N_1$ ve $X_1 \wedge N_2$ vektörlerinin katsayıları sıfırdır. Yani,

$$\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 = 0 \tag{4.62}$$

dır. Dolayısıyla,

$$X_1 \left[\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right] = X_2 \left[\frac{2a_2^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2\lambda} - 1 \right] = 0 \tag{4.63}$$

olur. Böylece $\tilde{\nabla}_{x_1} \vec{C}$ ve $\tilde{\nabla}_{x_2} \vec{C}$ vektörlerinin sıfıra eşit olmaları için,

$$X_1 \left[\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right] = X_2 \left[\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right] = a_2 \frac{X_1[a_2]}{\lambda} = 0 \tag{4.64}$$

eşitliği sağlanmalıdır. Böylece $a_2 = 0$ ya da $X_1[a_2] = 0$ dır. $a_2 = 0$ ise $k_2 = k_3 = 0$ olur. Bu durum Eşitlik (4.51) gereği mümkün değildir. Dolayısıyla $X_1[a_2] = 0$ olmalıdır. Böylece S yüzeyi 1. çeşit noktasal 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahip olur.

Buna göre aşağıdaki sonuç verilebilir:

Teorem 4.2.6: S , \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir tüp yüzeyi olsun. $a_3 = -a_2$ ve $a_1 = 0$ olmak üzere, S yüzeyi 2.çeşit noktasal 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahip değildir.

III. Durum: $X_1[a_2 + a_3] = 0$, ($a_3 \neq -a_2$) ve $a_1 = 0$ olsun. Buna göre Eşitlik (4.18) den \vec{C} vektörü,

$$\begin{aligned} \vec{C} = & \left(\frac{a_2^2 + a_3^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2 \lambda} - 1 \right) X_1 \wedge X_2 \\ & + \left(\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right) X_2 \wedge N_1 \\ & + \left(\frac{X_1[a_3]}{\lambda} \right) X_2 \wedge N_2 \end{aligned} \quad (4.65)$$

şeklinde elde edilir. $a_1 = 0$ olduğundan bu durum da yüzeyin u parametre eğrileri üzerindeki noktalarında geçerlidir. $X_1[a_2 + a_3] = 0$ olduğundan Eşitlik (4.7) yardımıyla,

$$X_1 \left[\frac{\sqrt{2}k_1}{f} \right] = 0 \Leftrightarrow k_1'(u)f(u, v) - k_1(u)f_u(u, v) = 0 \quad (4.66)$$

elde edilir. Ayrıca kovaryant türevin lineerlik özelliğinden $X_1[a_2] = -X_1[a_3]$ eşitliği geçerlidir.

Buna göre aşağıdaki iki durum incelenebilir:

(a) $\vec{C} = 0$ olma durumu:

S , \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir tüp yüzeyi, $X_1[a_2 + a_3] = 0$, ($a_3 \neq -a_2$) ve $a_1 = 0$ olsun. Farz edelim ki S yüzeyi 1.çeşit noktasal 1 tipinde Gauss dönüşümüne sahip yani $\vec{C} = 0$ olsun. Buna göre \vec{C} vektörünün tüm bileşenleri sıfırdır. $X_2 \wedge N_1$ ve $X_2 \wedge N_2$ vektörlerinin katsayıları

sıfır olduğundan ve $X_1[a_2] = -X_1[a_3]$ eşitliğinden $X_1[a_2] = 0$ bulunur. Böylece Eşitlik (4.55) yardımıyla k_2, k_3 birer sabit olur.

$$f_u(u, v) = -k'_2(u)r \cos v - k'_3(u)r \sin v \quad (4.67)$$

ve k_2, k_3 birer sabit olduğundan $f_u = 0$ dır. Eşitlik (4.66) da $f_u = 0$ yazılırsa k_1 bir sabit bulunur. $X_1 \wedge X_2$ vektörünün katsayısı sıfır olduğundan,

$$\frac{a_2^2 + a_3^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2 \lambda} - 1 = 0 \quad (4.68)$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\lambda = a_2^2 + a_3^2 + \frac{1}{r^2} \quad (4.69)$$

fonksiyonu sabittir.

O halde aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

Teorem 4.2.7: S, \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir tüp yüzeyi olsun. $X_1[a_2 + a_3] = 0$, ($a_3 \neq -a_2$) ve $a_1 = 0$ olduğunda S yüzeyinin u parametre eğrileri üzerindeki noktalarda 1.çeşit noktasal 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahip olması için gerek ve yeter koşul γ merkez eğrisinin Frenet çatısına göre eğriliği κ nın sabit olması, yani γ merkez eğrisinin bir Salkowski eğrisi olmasıdır.

Sonuç 4.2.8: S, \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir tüp yüzeyi olsun. $X_1[a_2 + a_3] = 0$, ($a_3 \neq -a_2$) ve $a_1 = 0$ olduğunda S yüzeyinin u parametre eğrileri üzerindeki noktalarda 1.çeşit noktasal 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahip olması için gerek ve yeter koşul Eşitlik (4.69) un sağlanmasıdır. Bu takdirde S yüzeyinin Gauss dönüşümü has olmayan (non-proper) bir dönüşümdür.

(b) $\vec{C} \neq 0$ olma durumu:

S , \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir tüp yüzeyi, $X_1[a_2 + a_3] = 0$, ($a_3 \neq -a_2$) ve $a_1 = 0$ olsun. Farz edelim ki S yüzeyi 2.çeşit noktasal 1 tipinde Gauss dönüşümüne sahip, yani $\vec{C} \neq 0$ olsun. Buna göre \vec{C} sabit bir vektör olduğundan \vec{C} vektörünün X_1 ve X_2 teğet vektörleri yönündeki kovaryant türevleri sıfıra eşittir. Eşitlik (4.65) ve Eşitlik (4.6) yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X_1} \vec{C} &= X_1 \left[\frac{a_2^2 + a_3^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2 \lambda} - 1 \right] X_1 \wedge X_2 \\
&+ \left(\frac{a_2^2 + a_3^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2 \lambda} - 1 \right) (-a_2 (X_2 \wedge N_1) - a_3 (X_2 \wedge N_2)) \\
&+ X_1 \left[\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right] X_2 \wedge N_1 + a_2 \frac{X_1[a_2]}{\lambda} X_1 \wedge X_2 \\
&+ X_1 \left[\frac{X_1[a_3]}{\lambda} \right] X_2 \wedge N_2 + a_3 \frac{X_1[a_3]}{\lambda} X_1 \wedge X_2
\end{aligned} \tag{4.70}$$

bulunur. \vec{C} vektörü sabit bir vektör olduğundan Eşitlik (4.70) düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X_1} \vec{C} &= \left(X_1 \left[\frac{a_2^2 + a_3^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2 \lambda} - 1 \right] + a_2 \frac{X_1[a_2]}{\lambda} + a_3 \frac{X_1[a_3]}{\lambda} \right) X_1 \wedge X_2 \\
&+ \left(X_1 \left[\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right] - a_2 \left(\frac{a_2^2 + a_3^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2 \lambda} - 1 \right) \right) X_2 \wedge N_1 \\
&+ \left(X_1 \left[\frac{X_1[a_3]}{\lambda} \right] - a_3 \left(\frac{a_2^2 + a_3^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2 \lambda} - 1 \right) \right) X_2 \wedge N_2 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.71}$$

elde edilir. Benzer şekilde Eşitlik (4.65) ve Eşitlik (4.6) yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X_2} \vec{C} &= X_2 \left[\frac{a_2^2 + a_3^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2 \lambda} - 1 \right] X_1 \wedge X_2 \\
&+ \left(\frac{a_2^2 + a_3^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2 \lambda} - 1 \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2r}} (X_1 \wedge N_1) + \frac{1}{\sqrt{2r}} (X_1 \wedge N_2) \right) \\
&+ X_2 \left[\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right] X_2 \wedge N_1 + \frac{X_1[a_2]}{\lambda} \left(-\frac{1}{\sqrt{2r}} N_1 \wedge N_2 \right) \\
&+ X_2 \left[\frac{X_1[a_3]}{\lambda} \right] X_2 \wedge N_2 + \frac{X_1[a_3]}{\lambda} \left(-\frac{1}{\sqrt{2r}} (N_1 \wedge N_2) \right)
\end{aligned} \tag{4.72}$$

elde edilir. \vec{C} vektörü sabit bir vektör olduğunda Eşitlik (4.72) düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X_2} \vec{C} &= X_2 \left[\frac{a_2^2 + a_3^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2 \lambda} - 1 \right] X_1 \wedge X_2 \\
&- \frac{1}{\sqrt{2r}} \left(\frac{a_2^2 + a_3^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2 \lambda} - 1 \right) X_1 \wedge N_1 \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2r}} \left(\frac{a_2^2 + a_3^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2 \lambda} - 1 \right) X_1 \wedge N_2 \\
&+ X_2 \left[\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right] X_2 \wedge N_1 \\
&+ X_2 \left[\frac{X_1[a_3]}{\lambda} \right] X_2 \wedge N_2 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.73}$$

bulunur. Eşitlik (4.73) te $X_1 \wedge N_1$ ve $X_1 \wedge N_2$ vektörlerinin katsayıları sıfır olduğundan,

$$\frac{a_2^2 + a_3^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2 \lambda} - 1 = 0 \tag{4.74}$$

dır. Dolayısıyla,

$$X_1 \left[\frac{a_2^2 + a_3^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2 \lambda} - 1 \right] = X_2 \left[\frac{a_2^2 + a_3^2}{\lambda} + \frac{1}{r^2 \lambda} - 1 \right] = 0 \tag{4.75}$$

elde edilir. Varsayım gereği $X_1[a_2] = -X_1[a_3]$ dür. O halde $\tilde{\nabla}_{X_1} \vec{C}$ ve $\tilde{\nabla}_{X_2} \vec{C}$ vektörlerinin sıfıra eşit olmaları için,

$$X_1 \left[\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right] = X_2 \left[\frac{X_1[a_2]}{\lambda} \right] = 0 \quad (4.76)$$

ve Eşitlik (4.71) gereği,

$$a_2 \frac{X_1[a_2]}{\lambda} + a_3 \frac{X_1[a_3]}{\lambda} = 0 \quad (4.77)$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. Buna göre,

$$a_2 X_1[a_2] + a_3 X_1[a_3] = a_2 X_1[a_2] - a_3 X_1[a_2] = (a_2 - a_3) X_1[a_2] = 0 \quad (4.78)$$

bulunur. Böylece $a_2 = a_3$ ya da $X_1[a_2] = 0$ dır. $a_2 = a_3$ ise $X_1[a_2] = -X_1[a_3]$ eşitliğinden a_2 sadece v değişkenine bağlı bir fonksiyondur. Bu durumda $X_1[a_2] = 0$ dır. Yani, S yüzeyi 1. çeşit noktasal 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahip olur.

O halde aşağıdaki sonuç verilebilir:

Teorem 4.2.9: S , \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir tüp yüzeyi olsun. $X_1[a_2 + a_3] = 0$, $(a_3 \neq -a_2)$ ve $a_1 = 0$ olmak üzere S yüzeyi 2.çeşit noktasal 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahip değildir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

IE^4 4-boyutlu Öklid uzayında paralel öteleme çatısı yardımıyla kanal yüzeyleri tanımlanarak bu yüzeylerin Gauss eğrilik fonksiyonu, ortalama eğrilik fonksiyonu ve normal eğrilik fonksiyonu elde edilmiştir. Bu eğrilikler yardımıyla yüzeyin Wintgen ideal yüzeyi ve Weingarten yüzeyi olma durumları incelenmiştir. IE^4 uzayında paralel öteleme çatısı yardımıyla tanımlanan kanal yüzeyinin eğrilik elipsi ele alınmıştır ve normal uzayın orijininin bir sınıflandırması yapılmıştır. Ayrıca IE^4 uzayında kanal yüzeyinin özel bir hali olan tüp yüzeyinin noktasal 1-tipinde Gauss dönüşümüne sahip olması için gerekli ve yeterli koşullar verilmiştir. Bu tezde paralel öteleme çatısı yardımıyla kanal yüzeyinin yeni bir parametrizasyonu IE^4 4-boyutlu Öklid uzayında verilmiştir. Bundan sonraki çalışmalarda kanal yüzeyleri 4-boyutlu Minkowski uzayı ya da 4-boyutlu Galilean uzayı gibi diğer uzaylarda da ele alınabilir. Ayrıca bu tezde IE^4 deki kanal yüzeylerinin eğrilikleri ile ilgili karakterizasyonları teorik olarak verilmiştir. İlerleyen zamanlarda bu yüzeylerin izdüşümlerinin 3D uygulamalarının mühendislik ve fizikteki çalışmalara kaynak olabileceği kanısını taşımaktayız.

KAYNAKLAR

- [1] Valiron G., *The Classical Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Math Sci Press, Brookline, 1986.
- [2] Akivis M. A., Goldberg V. V., *Differential Geometry of Varieties with Degenerate Gauss Maps*, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [3] Arslan K., Bayram B. K., Bulca B., Öztürk G., On Translation Surfaces in 4-Dimensional Euclidean Space, *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*, 2016, **20**(2), 123-133.
- [4] Arslan K., Bayram B., Bulca B., Öztürk G., Generalized Rotation Surfaces in \mathbb{E}^4 , *Results in Mathematics*, 2012, **61**(3-4), 315-327.
- [5] Arslan K., Bulca B., Bayram B. K., Öztürk G., Normal Transport Surfaces in Euclidean 4-Space \mathbb{E}^4 , *Differential Geometry-Dynamical Systems*, 2015, **17**, 13-23.
- [6] Bayram B., Bulca B., Arslan K., Öztürk G., Superconformal Ruled Surfaces in \mathbb{E}^4 , *Mathematical Communications*, 2009, **14**(2), 235-244.
- [7] Bulca B., Arslan K., Bayram B., Öztürk G., Spherical Product Surfaces in \mathbb{E}^4 , *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta*, 2012, **20**(1), 41-54.
- [8] İyigün E., Arslan K., Öztürk G., A Characterization of Chen Surfaces in \mathbb{E}^4 , *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 2008, **31**(2), 209-215.
- [9] Arslan K., Bulca B., Surfaces Given with the Monge Patch in \mathbb{E}^4 , *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*, 2013, **9**(4), 435-447.
- [10] Bulca B., Arslan K., Mixed Product Surfaces in \mathbb{E}^4 , *Beykent Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 2016, **9**(1), 1-12.
- [11] Do Carmo P. M., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [12] Farouki R. T., Neff C. A., Algebraic Properties of Plane Offset Curves, *Computer Aided Geometric Design*, 1990, **7**(1-4), 101-127.
- [13] Farouki R. T., Neff C. A., Analytic Properties of Plane Offset Curves, *Computer Aided Geometric Design*, 1990, **7**(1-4), 83-99.

- [14] Óláh-Gál R., Pál L., Some Notes on Drawing Twofolds in 4-Dimensional Euclidean Space, *Acta Universitatis Sapientiae. Informatica*, 2009, **2**(1), 125-134.
- [15] Bulca B., Arslan K., Bayram B., Öztürk G., Canal Surfaces in 4-Dimensional Euclidean Space, *An International Journal of Optimization and Control: Theories and Applications (IJOCTA)*, 2017, **7**(1), 83-89.
- [16] Öztürk G., Bulca B., Bayram B. K., Arslan K., On Canal Surfaces in \mathbb{IE}^3 , *Selçuk Journal of Applied Mathematics*, 2010, **11**(2), 103-108.
- [17] Garcia R., Llibre J., Sotomayor J., Lines of Principal Curvature on Canal Surfaces in \mathbb{IR}^3 , *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, 2006, **78**(3), 405-415.
- [18] Doğan F., Yaylı Y., On the Curvatures of Tubular Surface with Bishop Frame, *Communications de la Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara Séries A1*, 2011, **60**(1), 59-69.
- [19] Kızıltuğ S., Kaya S., Tarakçı Ö., Tube Surfaces with Type-2 Bishop Frame of Weingarten Types in \mathbb{IE}^3 , *International Journal of Mathematical Analysis*, 2013, **7**(1), 9-18.
- [20] Karacan M. K., Yoon D. W., Tuncer Y., Tubular Surfaces of Weingarten Types in Minkowski 3-Space, *General Mathematical Notes*, 2014, **22**(1), 44-56.
- [21] Körpınar T., Turhan E., Tubular Surfaces Around Timelike Biharmonic Curves in Lorentzian Heisenberg Group Heis^3 , *Analele Stiintifice Ale Universitatii Ovidius Constanta*, 2012, **20**(1), 431-446.
- [22] Dede M., Tubular Surfaces in Galilean Space, *Mathematical Communications*, 2013, **18**(1), 209-217.
- [23] Karacan M. K., Tuncer Y., Tubular Surfaces of Weingarten Types in Galilean and Pseudo-Galilean, *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 2013, **5**(2), 87-100.
- [24] Farouki R. T., Sverrisor R., Approximation of Rolling-Ball Blends for Free-Form Parametric Surfaces, *Computer-Aided Design*, 1996, **28**(11), 871-878.
- [25] Shani U., Ballard D. H., Splines as Embeddings for Generalized Cylinders, *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 1984, **27**(2), 129-156.
- [26] Wang L., Ming C. L., Blackmore D., Generating Sweep Solids for NC Verification Using the SEDE Method, *Proceedings of the Fourth Symposium on Solid Modeling and Applications*, Atlanta, Georgian, May 14-16, 1995.
- [27] Gökçelik F., Bozkurt Z., Gök İ., Ekmekçi F. N., Yaylı Y., Parallel Transport Frame in 4-Dimensional Euclidean Space \mathbb{IE}^4 , *Caspian Journal of Mathematical Sciences*, 2014, **3**(1), 91-103.

- [28] Chen B. Y., *Geometry of Submanifolds*, Dekker, New York, 1973.
- [29] Hacısalihođlu H. H., *Diferensiyel Geometri*, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, 1993.
- [30] O'Neill B., *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, 1966.
- [31] Hacısalihođlu H. H., *Diferensiyel Geometri 1. Cilt*, Ankara Üniversitesi, 1998.
- [32] Gluck H., Higher Curvatures of Curves in Euclidean Space, *American Mathematical Monthly*, 1966, **73**(7), 699-704.
- [33] Chen B.Y., Deprez J., Verheyen P., Immersion with Geodesics of 2-Type, *Geometry and Topology of Submanifolds*, 1992, **4**, 87-110.
- [34] Klein F., Lie S., Über Diejenigen Ebenen Kurven, Welche Durch ein Geschlossenes System Von Einfach Unendlich Vielen Vertauschbaren Linearen Transformationen in Sich Übergehen, *Math. Ann.*, 1871, **4**, 50-84.
- [35] Pottman H., Hofer M., A Variational Approach to Spline Curves on Surfaces, *Computer Aided Geometric Design*, 2005, **22**(7), 693-709.
- [36] Salkowski E., Zur Transformation Von Raumkurven, *Math. Ann.*, 1909, **66**(4), 517-557.
- [37] Monterde J., Curves with Constant Curvature Ratios, *Bull. Mexican Math. Soc.*, 2007, 13, 177-186.
- [38] Öztürk G., Arslan K., Hacısalihođlu H. H., A Characterization of Ccr- Curves in \mathbb{R}^m , *Proceedings of the Estonian Academy of Science*, 2008, **57**(4), 217-224.
- [39] Bulca B., \mathbb{E}^4 deki Yüzeylerin Bir Karakterizasyonu, Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Bursa, 2012, 329387.
- [40] Mello L. F., Mean Directionally Curved Lines on Surfaces Immersed in \mathbb{R}^4 , *Publicacions Matemàtiques*, 2003, **47**(2), 415-440.
- [41] Mello L. F., Orthogonal Asymptotic Lines on Surfaces Immersed in \mathbb{R}^4 , *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 2009, **39**(5), 1597-1612.
- [42] DeSmet P. J., Dillen F., Verstrealen L., Vrancken L., A Pointwise Inequality in Submanifold Theory, *Archivum Mathematicum (Brno)*, 1999, **35**(2), 115-128.
- [43] Wintgen P., Sur l'inégalité de Chen-Willmore, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 1979, **288**, 993-995.
- [44] Ro J. S., Yoon D. W., Tubes of Weingarten Types in a Euclidean 3-Space, *Journal of the Chungcheong Mathematical Society*, 2009, **22**(3), 359-366.

- [45] Bishop, R. L., There is More than One Way to Frame a Curve, *The American Mathematical Monthly*, 1975, **82**(3), 246-251.
- [46] Weingarten J., Über Eine Klasse Auf Einander Abwickelbarer Flächen, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 1861, **59**, 382-393.
- [47] Öztürk G., Bulca B., Bayram B. K., Arslan K., Meridian Surfaces of Weingarten Type in 4-Dimensional Euclidean Space IE^4 , *Konuralp Journal of Mathematics*, 2016, **4**(1), 239-245.
- [48] Yüksel N., Tuncer Y., Karacan M. K., Tabular Surfaces with Bishop Frame of Weingarten Types in Euclidean 3-space, *Acta Universitatis Apulensis*, 2011, **27**, 39-50.
- [49] Little J. A., On Singularities of Submanifolds of a Higher Dimensional Euclidean Space, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 1969, **83**(1), 261-235.
- [50] Dajczer M., Tojeiro R., All Superconformal Surfaces in IR^4 in terms of Minimal Surfaces, *Mathematische Zeitschrift*, 2009, **261**(4), 869-890.
- [51] Mochida D. K. H., Fuster M. D. C. R., Ruas M. A. S., The Geometry of Surfaces in a 4-Space From a Contact Viewpoint, *Geometria Dedicata*, 1995, **54**(3), 323-332.
- [52] Chen B. Y., Ishikawa S., On Classification of Some Surfaces of Revolution of Finite Type, *Tsukuba Journal of Mathematics*, 1993, **17**(1), 287-298.
- [53] Arslan K., Bayram B. K., Bulca B., Kim Y. H., Murahtan C., Öztürk G., Vranceanu Surface in IE^4 with Pointwise 1-Type Gauss Map, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2011, **42**(1), 41-51.
- [54] Arslan K., Bayram B., Bulca B., Kim Y. H., Murahtan C., Öztürk G., Rotational Embeddings in IE^4 with Pointwise 1-type Gauss Map, *Turkish Journal of Mathematics*, 2011, **35**(3), 493-499.
- [55] Arslan K., Bulca B., Bayram B., Kim Y. H., Murahtan C., Öztürk G., Tensor Product Surfaces with Pointwise 1-type Gauss Map, *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 2011, **48**(3), 601-609.
- [56] Arslan K., Bulca B., Milousheva V., Meridian Surfaces in IE^4 with Pointwise 1-Type Gauss Map, *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 2014, **51**(3), 911-922.
- [57] Arslan K., Milousheva V., Meridian Surfaces of Elliptic or Hyperbolic Type with Pointwise 1-Type Gauss Map in Minkowski 4-Space, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 2016, **20**(2), 311-332.

- [58] Baikoussis C., Chen B. Y., Verstraelen L., Ruled Surfaces and Tubes with Finite Type Gauss Map, *Tokyo Journal of Mathematics*, 1993, **16**(2), 341-349.
- [59] Baikoussis C., Verstraelen L., On the Gauss Map of Helicoidal Surfaces, *Rendiconti del Seminario Matematico di Messina. Serie II*, 1993, **16**(2), 31-42.
- [60] Chen B. Y., Choi M., Kim Y. H., Surfaces of Revolution with Pointwise 1-Type Gauss Map, *Journal of Korean Mathematical Society.*, 2005, **42**(3), 447-455.
- [61] Choi M., Kim Y. H., Characterization of the Helicoid as Ruled Surfaces with Pointwise 1-Type Gauss Map, *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 2001, **38**(4), 753-761.
- [62] Dursun U., Arsan G. G., Surfaces in the Euclidean Space IE^4 with Pointwise 1-Type Gauss Map, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 2011, **40**(5), 617-625.
- [63] Dursun U., Turgay N. C., General Rotational Surfaces in Euclidean Space with Pointwise 1-Type Gauss Map, *Mathematical Communications*, 2012, **17**(1), 71-81.
- [64] Dursun U., Turgay N. C., On Spacelike Surfaces in Minkowski 4-Space with Pointwise 1-Type Gauss Map of the Second Kind, *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, 2012, **17**(2), 34-45.
- [65] Jang C., Surfaces with 1-Type Gauss Map, *Kodai Mathematical Journal*, 1996, **19**(3), 388-394.
- [66] Kim Y. H., Yoon D. W., Ruled Surfaces with Finite Type Gauss Map in Minkowski Spaces, *Soochow Journal of Mathematics*, 2000, **26**(1), 85-96.
- [67] Kim Y. H., Yoon D. W., Ruled Surfaces with Pointwise 1-Type Gauss Map, *Journal of Geometry and Physics*, 2000, **34**(3-4), 191-205.
- [68] Kim Y. H., Yoon D. W., On the Gauss Map of Ruled Surfaces in Minkowski Space, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 2005, **35**(5), 1555-1581.
- [69] Bektaş B., Sonlu Tipten Altmanifoldlar ve Gauss Tasvirleri, Doktora Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 2017, 472820.
- [70] Chen B. Y., Piccini P., Submanifolds with Finite Type Gauss Map, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 1987, **35**(2), 161-186.



EKLER

Ek-A

Aşağıda elde edilen şekillerin çizimi için kullanılan Maple kodları verilmiştir;

Bu tez çalışmasında \mathbb{E}^4 4-boyutlu Öklid uzayında Örnek 3.1.7 de

$$\begin{aligned} X(u, v) = & \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos u + \frac{r(u)}{4} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{2} \right) \cos u + \sqrt{2} \sin u \right) \cos v + \left(\left(-1 - 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right) \cos u - \sqrt{6} \sin u \right) \sin v \right), \\ & \frac{1}{\sqrt{3}} \sin u + \frac{r(u)}{4} \left(\left(-\sqrt{2} \cos u + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{2} \right) \sin u \right) \cos v + \left(\sqrt{6} \cos u + \left(-1 - 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right) \sin u \right) \sin v \right), \\ & \sqrt{\frac{2}{3}} \cos u + \frac{r(u)}{4} \left(\left(\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + 2 \right) \cos u - \sin u \right) \cos u + \left(\left(-\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \cos u + \sqrt{3} \sin u \right) \sin v \right), \\ & \sqrt{\frac{2}{3}} \sin u + \frac{r(u)}{4} \left(\left(\cos u + \left(\sqrt{\frac{2}{3}} + 2 \right) \sin u \right) \cos v + \left(-\sqrt{3} \cos u + \left(-\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \sin u \right) \sin v \right) \end{aligned}$$

parametrizasyonu ile verilen kanal yüzeyinin 3-boyutlu Öklid uzayına izdüşümleri Maple 11 programı yardımıyla `plot3d([x+y,z,w], x=a..b,y=c..d)` komutu kullanılarak çizdirilmiştir.

1-Şekil 3.1 in Maple 11 programında çizimi

```
> plot3d([(1/sqrt(3))*cos(x)+(x^2)*((1/sqrt(3)-  
2*sqrt(2))*cos(x)+sqrt(2)*sin(x))*cos(y)+((-1-2*sqrt(2/3))*cos(x)-  
sqrt(6)*sin(x))*sin(y)),(1/sqrt(3))*sin(x)+(x^2)*((-sqrt(2)*cos(x)+(1/sqrt(3)-  
2*sqrt(2))*sin(x))*cos(y)+(sqrt(6)*cos(x)+(-1-  
2*sqrt(2/3))*sin(x))*sin(y)),sqrt(2/3)*(sin(x)+cos(x))+(x^2)*(((sqrt(2/3)+3)*cos(x)+  
(sqrt(2/3)+1)*sin(x))*cos(y)+((-sqrt(2)-sqrt(3)+2/sqrt(3))*cos(x)+(-  
sqrt(2)+sqrt(3)+2/sqrt(3))*sin(x))*sin(y))], x=0..2*Pi, y=-Pi..Pi, grid=[40,40]);
```

2-Şekil 3.2 nin Maple 11 programında çizimi

```
> plot3d([(1/sqrt(3))*cos(x)+(2*x+6)*((1/sqrt(3)-  
2*sqrt(2))*cos(x)+sqrt(2)*sin(x))*cos(y)+((-1-2*sqrt(2/3))*cos(x)-  
sqrt(6)*sin(x))*sin(y)),(1/sqrt(3))*sin(x)+(2*x+6)*((-sqrt(2)*cos(x)+(1/sqrt(3)-  
2*sqrt(2))*sin(x))*cos(y)+(sqrt(6)*cos(x)+(-1-  
2*sqrt(2/3))*sin(x))*sin(y)),sqrt(2/3)*(sin(x)+cos(x))+(2*x+6)*(((sqrt(2/3)+3)*cos(x)+  
(sqrt(2/3)+1)*sin(x))*cos(y)+((-sqrt(2)-sqrt(3)+2/sqrt(3))*cos(x)+(-  
sqrt(2)+sqrt(3)+2/sqrt(3))*sin(x))*sin(y))], x=0..2*Pi, y=-Pi..Pi, grid=[40,40]);
```

3-Şekil 3.3 ün Maple 11 programında çizimi

```
> plot3d([(1/sqrt(3))*cos(x)+cos(x^2)*((1/sqrt(3)-  
2*sqrt(2))*cos(x)+sqrt(2)*sin(x))*cos(y)+((-1-2*sqrt(2/3))*cos(x)-  
sqrt(6)*sin(x))*sin(y)),(1/sqrt(3))*sin(x)+cos(x^2)*((-sqrt(2))*cos(x)+(1/sqrt(3)-  
2*sqrt(2))*sin(x))*cos(y)+(sqrt(6)*cos(x)+(-1-  
2*sqrt(2/3))*sin(x))*sin(y)),sqrt(2/3)*(sin(x)+cos(x))+cos(x^2)*((sqrt(2/3)+3)*cos(  
x)+(sqrt(2/3)+1)*sin(x))*cos(y)+((-sqrt(2)-sqrt(3)+2/sqrt(3))*cos(x)+(-  
sqrt(2)+sqrt(3)+2/sqrt(3))*sin(x))*sin(y)], x=0..2*Pi, y=-Pi..Pi, grid=[40,40]);
```

4-(3.57) diferansiyel denklemlerinin Maple 11 programında çözümü

```
> int(1/sqrt(r^2-c1^2),r)=int(1/c1,u);
```

KİŞİSEL YAYINLAR VE ESERLER

- [1] Büyükkütük S., **Kişi İ.**, Mishra V.N., Öztürk G., Some Characterizations of Curves in Galilean 3-space G_3 , *Facta Universitatis Series: Mathematics and Informatics*, 2016, **31**, 503-512.
- [2] Büyükkütük S., **Kişi İ.**, Öztürk G., Spacelike Factorable Surfaces in Four Dimensional Minkowski Space, *International Conference on Mathematics and Engineering*, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul, 10-12 Mayıs 2017.
- [3] Büyükkütük S., **Kişi İ.**, Öztürk G., A Characterization Curves According to Parallel Transport Frame in Euclidean n-Space IE^n , *New Trends in Mathematical Sciences*, 2017, **5**(2), 61-68.
- [4] Büyükkütük S., **Kişi İ.**, Öztürk G., On Constant Ratio Curves in Galilean Spaces, *4th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications IECMSA(2015)*, Athens, Greece, 31 August-03 September 2015.
- [5] Büyükkütük S., **Kişi İ.**, Öztürk G., A Characterization Non-null Curves According to Parallel Transport Frame in Minkowski Space-Time, *International Congress on Fundamental and Applied Sciences*, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul, 22-26 Ağustos 2016.
- [6] Büyükkütük S., **Kişi İ.**, Öztürk G., A Characterization of Curves According to Parallel Transport Frame in Euclidean n-Space IE^n , *International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2016)*, Muğla, 19-23 Mayıs 2016.
- [7] Büyükkütük S., **Kişi İ.**, Öztürk G., Spacelike Translation Surfaces in Minkowski 4-Space IE_1^4 , *15th International Geometry Symposium*, Amasya Üniversitesi, Amasya, 3-6 Temmuz 2017.
- [8] **Kişi İ.**, Büyükkütük S., Deepmala, Öztürk G., AW(k)-Type Curves According to Parallel Transport Frame in Euclidean Space IE^4 , *Facta Universitatis Series: Mathematics and Informatics*, 2016, **31**, 885-905.
- [9] **Kişi İ.**, Büyükkütük S., Öztürk G., Arslan K., AW(k)-Type Curves According to Parallel Transport Frame in Euclidean Space IE^4 , *12. Ulusal Geometri Sempozyumu*, Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi, Bilecik, 23-26 Haziran 2014.
- [10] **Kişi İ.**, Büyükkütük S., Öztürk G., Zor A., A New Characterization of Curves on Dual Unit Sphere, *Journal of Abstract and Computational Mathematics*, 2017, **2**(1), 71-76.

- [11] **Kişi İ.**, Büyükkütük S., Öztürk G., Constant Ratio Quaternionic Curves in Euclidean 4-Space IE^4 , *International Congress on Fundamental and Applied Sciences (ICFAS 2016)*, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul, 22-26 Ağustos 2016.
- [12] **Kişi İ.**, Büyükkütük S., Öztürk G., Some Characterizations of Curves in Pseudo-Galilean 3-Space, *14th International Geometry Symposium*, Pamukkale Üniversitesi, Denizli, 25-28 Mayıs 2016.
- [13] **Kişi İ.**, Büyükkütük S., Öztürk G., Tubular Surface with Pointwise 1-Type Gauss Map in Euclidean 4-Space IE^4 , *15th International Geometry Symposium*, Amasya Üniversitesi, Amasya, 3-6 Temmuz 2017.
- [14] **Kişi İ.**, Büyükkütük S., Öztürk G., A New Characterization of Curves on Dual Unit Sphere, *International Conference on Mathematics and Engineering (ICOME-2017)*, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul, 10-12 Mayıs 2017.
- [15] **Kişi İ.**, Büyükkütük S., Öztürk G., Constant Ratio Timelike Curves in Pseudo-Galilean 3-Space G_3^1 , *Creative Mathematics and Informatics*, 2018, **27**, 57-62.
- [16] **Kişi İ.**, Öztürk G., A New Approach to Canal Surface with Parallel Transport Frame, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2017, **14**, 1-16.
- [17] **Kişi İ.**, Öztürk G., Constant Ratio Curves According to Bishop Frame in Minkowski 3-Space IE_1^3 , *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, 2015, **30**, 527-538.
- [18] **Kişi İ.**, Öztürk G., A New Type Tubular Surface with Pointwise 1-Type Gauss Map in Euclidean 4-space IE^4 , *International Conference on Mathematics and Engineering*, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul, 10-12 Mayıs 2017.
- [19] **Kişi İ.**, Öztürk G., A New Approach to Canal Surface with Parallel Transport Frame, *International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2016)*, Bodrum, Muğla, 19-23 Mayıs 2016.
- [20] **Kişi İ.**, Öztürk G., On Constant Ratio Curves According to Bishop Frame in Minkowski 3-Space IE_1^3 , *4th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications*, Athens, Greece, 31 August-3 September 2015.
- [21] **Kişi İ.**, Öztürk G., A New Type of Tubular Surface Having Pointwise 1-Type Gauss Map in Euclidean 4-Space *Journal of Korean Mathematical Society*, doi.org/10.4134/JKMS.j170535, 2018
- [22] **Kişi İ.**, Öztürk G., Arslan K., On Canal Surfaces According to Parallel Transport Frame in Euclidean Space IE^4 , *4th International Eurasian*

Conference on Mathematical Sciences and Applications, Athens, Greece, 31 August-3 September 2015.

- [23] **Kişi İ.**, Tosun M., Spinor Darboux Equations of Curves in Euclidean 3-Space, *Matematica Moravica*, 2015, **19**(1), 87-93.
- [24] Öztürk G., Arslan K., **Kişi İ.**, On Constant Ratio Curves in Minkowski Spaces, *13. Geometri Sempozyumu*, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul, 27-30 Temmuz 2015.
- [25] Öztürk G., Büyükkütük S., **Kişi İ.**, Arslan K., Some Characterizations of Curves in n-Dimensional Euclidean Space IE^n , *15th International Geometry Symposium*, Amasya Üniversitesi, Amasya, 3-6 Temmuz 2017.
- [26] Öztürk G., Büyükkütük S., **Kişi İ.**, A Characterization of Curves in Galilean 4-Space G_4 , *Bulletin of Iranian Mathematical Society*, 2017, **43**(3), 771-780.
- [27] Öztürk G., **Kişi İ.**, Büyükkütük S., Constant Ratio Quaternionic Curves in Euclidean Spaces, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 2017, **27**(2), 1659-1673.
- [28] Öztürk G., **Kişi İ.**, Büyükkütük S., Constant Ratio Quaternionic Curves in Euclidean Spaces, *14th International Geometry Symposium*, Pamukkale Üniversitesi, Denizli, 25-28 Mayıs 2016.
- [29] Ünal D., **Kişi İ.**, Tosun M., Spinor Bishop Equations of Curves in Euclidean 3-Space, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 2013, **23**(3), 757-765.

ÖZGEÇMİŞ

İlim KİŞİ, 1986 yılında Giresun'da doğdu. Lise eğitimini 2005 yılında Giresun Hamdi Bozbağ Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2005 yılında Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimine başladı ve 2009 yılında lisans eğitimini tamamladı. 2009-2010 eğitim öğretim yılında Kocaeli Teknik ve Endüstri Meslek Lisesi'nde matematik öğretmenliği yaptı. 2010-2013 yılları arasında Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimini tamamladı. 2013 yılında Kocaeli Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda doktora öğrenimine başladı.

2012 yılından beri Kocaeli Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü Geometri Anabilim Dalı'nda Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

2012 yılında Emre KİŞİ ile evlendi.