INDEFINITE-RIEMANN MANİFOLDLARINDA GENEL HELİSLER

Kazım İLARSLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

1996

Kâzım İLARSLAN'ın Yüksek Lisans Tezi olarak hazırladığı "Indefinite Rimann Manifoldlarında Genel Helisler" başlıklı bu çalışma jürimizce Lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

05.07.1996

ÜYE : Doç.Dr.Ömer AKIN

ÜYE : Doç.Dr.Yusuf YAYLI

ÜYE : Yrd.Doç.Dr.Nejat EKMEKÇİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 15.07.1996.... gün ve 96-6/6. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr.Ö. Faruk EMRULLAHOĞLU
Enstitü Müdürü

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

INDEFINITE-RIEMANN MANİFOLDLARINDA GENEL HELİSLER

Kazım İLARSLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Bu tez 05.07.1996 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Tarafından (95/Doksanbeş)Not Takdir Edilerek Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ İle Kabul Edilmiştir.

Yrd.Doç.Dr.Nejat EKMEKÇİ   Doç.Dr.Ömer AKIN   Doç.Dr.Yusuf YAYLI

Danışman

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

INDEFINITE-RIEMANN MANİFOLDLARINDA GENEL HELİSLER

Kazım İLARSLAN

Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd.Doç.Dr.Nejat EKMEKÇİ

1996, sayfa:.49

Jüri: Doç.Dr.Ömer AKIN

Doç.Dr.Yusuf YAYLI

Yrd.Doç.Dr.Nejat EKMEKÇİ

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.İlk bölümde çalışmamız için gerekli olan Bilineer Form'lar, Skalar Çarpmalı Uzaylar ve Lorentz Uzayı ile ilgili tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde E^n, n-boyutlu Öklid uzayında genel helisler (eğilim çizgileri) tanıtılmış ve bunlara ait iyi bilinen karakterizasyonlar verilmiştir.Daha sonra bu tanımların ve karakterizasyonların L^n,Lorentz uzayındaki karşılıkları verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise;T.IKAWA'nın Tsukaba J.Math.(1985) de yayınladığı çalışmasında verdiği M_1 bir indefinit-Riemann manifoldu $\overline{M_i}$ nin irtibatlı bir Lorentz altmanifoldunun total geodezik altmanifoldu olması için M_1 deki k_1 ve k_2 sabit eğrilikli her time-like helisin $\overline{M_i}$ de bir time-like helis olmasıdır;şeklindeki teoremini genel helislere genelleştirdik.Bu teoremin k_1 ve k_2 sabit

değil fakat $\frac{k_1}{k_2}$ sabit olması durumunda genel helislerdeki karşılığını aradık. "$M_1(boyM_1 \geq 3)$ bir $\overline{M}_i$ indefinite-Riemann manifoldunun ,irtibatlı Lorentz altmanifoldu olsun.Eğer M_1 deki $k_1, k_2(k_1'' \neq k_1^3)$ eğrilikli her time-like genel helis $\overline{M}_i$ de bir time-like genel helis ise M_1, $\overline{M}_i$ nin total geodezik altmanifoldudur." şeklinde elde ettik.

Eğer burada k_1 ve k_2 sabit alınması özel halinde T.Ikawa'nın verdiği teoremin elde edildiğini gösterdik.

ANAHTAR KELİMELER: Bilineer Form,Skalar Çarpım,İndeks,Time-like vektör, Time-like eğri,Eğilim Çizgisi,Harmonik Eğrilik, Lorentz Manifoldu,Total Geodezik Altmanifold.

ABSTRACT

Masters Thesis

General Helices of an Indefinite-Riemannian Manifolds

Kazım İLARSLAN

Kocatepe Üniversity

Graduate School of Natural and Applied Sciences Department of Mathematics

Supervisor: Asst.Prof.Dr.Nejat EKMEKÇİ

1996, Page: 49

Jury: Assoc.Prof.Dr.Ömer AKIN

Assoc.Prof.Dr.Yusuf YAYLI

Asst.Prof.Dr.Nejat EKMEKÇİ

This thesis consist of three parts.In the first part,some fundamental definitions and theorems related to Bilinear forms,Scalar product and Lorentzian space are given which are necessary for our main study.

In the second part,inclined curves in E^n ,n-dimensional Euclidean space, are introduced and their wellknown characterizations are given orderly.After that the correspondings of these definitions and characterizations in L^n ,n-dimensional Lorentzian space,are given.

In the third part,we generalize the following theorem by T.Ikawa which was published in the Tsukaba J.Math.(1985) to the case of a general helix.

Theorem: Let M_1 ($dim M_1 \geq 3$) be a connected Lorentzian manifold of a indefinite-Riemannian manifold $\overline{M_i}$.If for some $k_1, k_2 > 0$,every time-like helix with curvatures k_1 and k_2 in M_1 is a time-like helix in $\overline{M_i}$,then M_1 is a totaly geodesic submanifold in $\overline{M_i}$.

KEY WORDS : Bilinear form,Scalar product,Index,Time-like vector, Time-like curve Inclined curve,Harmonic curvature,Lorentzian manifold ,totaly geodesic submanifold.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana vererek çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın Yrd.Doç.Dr. Nejat EKMEKÇİ'ye teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

$\mathbf{L^n}$	: n-boyutlu Lorentz Uzayı
$\langle , \rangle\vert_{\mathbf{L}}$	: Lorentz anlamında iç çarpım
$*$	: Lorentz anlamında vektörel çarpım
$\mathbf{k_i}$	: i-yinci eğrilik fonksiyonu
$\mathbf{H_i}$	: i-yinci Harmonik eğrilik
$\mathbf{H}$	: Ortalama Eğrilik Vektör Alanı
$\mathbf{B}$	: İkinci Temel Form
$\mathbf{A}_\xi$	: Şekil Operatörü
$\chi(\mathbf{L^n})$	: Vektör Alanı
$\mathrm{T_M(P)}$	: Tanjant Uzay
$\mathbf{M}$	: Lorentz Manifoldu
$\overline{\mathbf{M}}$	: Lorentz altmanifoldu
$\mathbf{D}$	: Konneksiyon
$\mathbf{X}$	: Teğet Vektör Alanı
$\mathcal{M}$	: Riemann Manifoldu

Giriş

Öklid Uzayında eğrilerin en ilginç olanlarından biri eğilim çizgileri veya diğer adıyla helislerdir.Helisler ile ilgili çalışmalarda ilk olarak bir dik dairesel silindir üzerine çizilmiş helisler ele alınmıştır. Bunlara dairesel helisler adı verilmiştir.Bunların, k_1 ve k_2 eğriliklerinin ayrı ayrı birer sabit oldukları ilk tesbit edilebilen bir karakterizasyonu olmuştur.Daha sonra genel helis adı verilen daha genel bir helis eğrisinin var olduğu keşfedilmiştir.Bu cins eğriler için k_1 ve k_2 sabit olmadığı halde $\frac{k_1}{k_2}$ oranının sabit olduğu tesbit edilmiştir.Bu cins helislerin artık bir dik dairesel silindir üzerine çizilmiş olmak zorunluluğunun olmadığı görüldü.

Bir koni yüzeyi hatta bir küre yüzeyi üzerine de çizilebilen helislerin olup olmadığı fikri helislerin tanımını daha da genelleştirmek gerektiğine sevketmiş ve Alman Matematikçi **E. MÜLLER** helisleri "Her noktasında sabit bir doğrultu ile sabit açı yapan eğriler" olarak tanımlamış ve bunlara eğilim çizgileri (böschungslinien) adını vermiştir.

E. ÖZDAMAR (1975) 'ın çalışması ile silindirden farklı yüzeyler üzerindeki eğilim çizgileri ve **R. ÖZTÜRK** (1980) 'ün doktora tez çalışması ile $n > 3$ için E^n de eğilim çizgileri için en genel karakterizasyonlar verilmiştir.Daha sonra **N. EKMEKÇİ** (1991) doktora tez çalışmasında $n > 3$ için E^n de verilen karakterizasyonları L^n ,n-Lorentz Uzayında yaparak eğilim çizgilerini Öklid uzayı dışına taşımıştır.Yine aynı çalışmada Lorentz manifoldu üzerinde bir time-like α eğrisi için genel helis karakterizasyonu ile Riemann manifoldu üzerinde bir α eğrisi için helis olma karakterizasyonu verilmiştir.

Ayrıca Japon Matematikçi **T. IKAWA** (1985) tarafından Lorentz uzayında eğilim çizgilerinin en ilkel hali olan k_1 =sabit ve k_2 =sabit olması haliyle ilgili bir karakterizasyon verilmiştir.Lorentz 2-manifoldu üzerindeki bir eğrinin hız vektörü X,manifoldun konneksiyonu D olmak üzere bu karakterizasyon:

$D_X D_X D_X X - K D_X X = 0 \Leftrightarrow$ eğri bir helistir.

biçimindedir.Burada $K = k_1^2 - k_2^2$ dir.Ikawa tarafından verilen bu karakterizasyon **N. EKMEKÇİ** ve **H.H.HACISALİHOĞLU** tarafından (1996) k_1 ve k_2 değişken fakat $\frac{k_1}{k_2}$ =sabit olması halinde;

α eğrisi bir genel helistir $\Leftrightarrow D_X D_X D_X X - \mathcal{K} D_X X = 3k_1' D_X Y$

şeklinde genelleştirilmiştir. Burada $\mathcal{K} = \frac{k_1''}{k_1} + k_1^2 - k_2^2$dir.

Yine Ikawa tarafından verilen bir Lorentz altmanifoldunun bir Indefinite-Riemann manifoldunun total-geodezik altmanifoldu olması için Lorentz altmanifoldundaki bir time-like helisin Indefinite-Riemann manifoldunda da bir time-like helis olmasıdır şeklindeki teoremin genel helislere genelleştirilmesi düşüncesi bu çalışmaya temel olmuştur.

BÖLÜM 1

1 Temel Kavramlar

1.1 Simetrik Bilineer Formlar

Tanım 1.1.1: V bir reel vektör uzayı olsun.

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathcal{R}$$

dönüşümü $\forall a, b \in \mathcal{R}$ ve $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$ için;

(i) $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle$

(ii) $\langle a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = a\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle + b\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle$

$\langle \overrightarrow{u}, a\overrightarrow{v} + b\overrightarrow{w} \rangle = a\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + b\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle$

özelliklerine sahip ise $\langle , \rangle$ dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde Bilineer Form denir (O'Neill B.,1983).

Tanım 1.1.2:

V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form $\langle , \rangle$ olsun.

(i) $\forall \overrightarrow{v} \in V$ ve $\overrightarrow{v} \neq 0$ için $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle > 0$ ise $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formuna pozitif definit ,

(ii) $\forall \overrightarrow{v} \in V$ ve $\overrightarrow{v} \neq 0$ için $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle < 0$ ise $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formuna negatif definit ,

(iii) $\forall \overrightarrow{v} \in V$ ve $\overrightarrow{v} \neq 0$ için $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle \geq 0$ ise $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formuna pozitif semi- definit ,

(iv) $\forall \overrightarrow{v} \in V$ ve $\overrightarrow{v} \neq 0$ için $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle \leq 0$ ise $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formuna negatif semi- definit ,

(v) $\forall \overrightarrow{w} \in V$ için $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = 0$ dan $\overrightarrow{v} = 0$ olmak zorunda ise $\langle , \rangle$ ya non-dejenere,non-dejenere değilse dejeneredir denir.

(O'Neill B.,1983).

Tanım 1.1.3: V bir vektör uzayı ve

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathcal{R}$$

bir simetrik bilineer form olsun.

$$\langle , \rangle|_W : W \times W \to \mathcal{R}$$

negatif definit olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formun indeksi denir ve ν ile gösterilir(O'Neill B.,1983).

Buna göre $1 \leq \nu \leq boyV$ dir. $\nu = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\langle , \rangle$ nın pozitif semi-definit olmasıdır. V nin bir bazı$\{e_1, e_2, e_3, \ldots e_n\}$ olsun.$b_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$ olarak tanımlanan $[b_{ij}]_{n \times n}$ matrisine $\{e_1, e_2, e_3, \ldots e_n\}$ bazına göre $\langle , \rangle$ nın matrisi denir.$\langle , \rangle$ simetrik olduğundan $[b_{ij}]_{n \times n}$ matrisi de simetriktir.

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{V}, \overrightarrow{V} \rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n} v_i e_i, \sum_{j=1}^{n} w_j e_j \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} v_i w_j \end{aligned}$$

olduğundan $[b_{ij}]_{n \times n}$ matrisi $\langle , \rangle$ yi belirtir.

Tanım 1.1.4: Bir $\overrightarrow{v} \in V$ vektörü için;

$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle > 0$ veya $\overrightarrow{v} = 0$ ise bu $\overrightarrow{v}$ vektörüne space-like vektör,

$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle < 0$ ise bu $\overrightarrow{v}$ vektörüne time-like vektör,

$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$ ve $\overrightarrow{v} \neq 0$ ise bu $\overrightarrow{v}$ vektörüne null vektör denir(O'Neill B.,1983).

Teorem 1.1.5: Bir $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formunun non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $\langle , \rangle$ nın herhangi bir baza göre matrisinin tersinin olmasıdır(O'Neill B.,1983).

1.2 Skalar Çarpmalı Uzaylar

Tanım 1.2.1:

Bir V vektör uzayı üzerinde non-dejenere, simetrik bilineer forma V vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpma denir. V üzerindeki bir skalar çarpma $\langle , \rangle$ ise $(V, \langle , \rangle)$ ikilisine skalar çarpmalı vektör uzayı denir(Hacısalihoğlu H.H.,1983).

Pozitif definit skalar çarpmaya bir iç çarpma diyeceğiz. Buna örnek olarak,

$\mathcal{R}^n$ üzerinde $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$ şeklinde tanımlanan nokta çarpmasını verebiliriz.

Teorem 1.2.2: V skalar çarpmalı uzayının bir alt uzayı W olsun. Bu durumda şu özellikler vardır;

(i) $boyW + boyW^{\perp} = n = boyV$

(ii) $(W^{\perp})^{\perp} = W$

(O'Neill B.,1983).

Tanım 1.2.3: V üzerinde bir skalar çarpma $\langle , \rangle$ ve W da V nin bir alt uzayı olsun. Eğer W üzerinde $\langle , \rangle$ non-dejenere ise W ya non-dejenere alt uzay, non-dejenere değil ise W ya dejenere alt uzay denir (O'Neill B.,1983).

Eğer $\langle , \rangle$ indefinit ise V nin daima dejenere alt uzayı vardır.

Tanım 1.2.4: Bir V vektör uzayı üzerindeki skalar çarpma $\langle , \rangle$ olsun. Bir $\overrightarrow{v} \in V$ vektörünün normu,

$$\| \overrightarrow{v} \| = | \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle |^{\frac{1}{2}}$$

olarak tanımlanır. Normu 1 birim olan vektöre birim vektör ve ortogonal birim vektörlerin cümlesine ortonormal sistem denir (O'Neill B.,1983).

Teorem 1.2.5:

Bir $V \neq \{0\}$ skalar çarpmalı uzay bir ortonormal baza sahiptir.

İspat .

$\langle , \rangle$, non-dejenere olduğundan $\overrightarrow{v} \neq 0$ için $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle \neq 0$ olacak şekilde bir $\overrightarrow{v} \in V$ vektörü vardır. $\frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$ birim vektördür.Böylece $k < n$ olmak üzere ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, \ldots e_k\}$ cümlesini tümevarımla genişletmek yeterlidir.Teorem 1.1.5 gereğince bu vektörler k-boyutlu bir W non-dejenere alt uzayını gererler.Geriye yalnız $W^{\perp} \neq \{0\}$ da bir birim vektör bulmak kalır.W non-dejenere olduğundan $W^{\perp}$ de non-dejeneredir. O halde $W^{\perp}$ bir birim vektör ihtiva eder.Böylece V nin ortonormal bazı bulunabilir.

$\langle , \rangle$ ye karşılık gelen matris V nin $\{e_1, e_2, e_3, \ldots e_n\}$ ortonormal bazına göre diyagonaldir. Gerçekten;

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}\varepsilon_j$$

ve burada $\varepsilon_j = \langle e_i, e_j \rangle = \pm 1$

Teorem 1.2.6: V vektör uzayı için bir ortonormal baz $\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ olsun.$\varepsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle$ olmak üzere

$\forall \overrightarrow{v} \in V$ vektörü;

$$\overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle \overrightarrow{v}, e_i \rangle e_i$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir.

İspat . $\forall \overrightarrow{v} \in V$ vektörünün $\{e_1, e_2, e_3, \ldots e_n\}$ bazına göre tek türlü yazıldığını biliyoruz.Buna göre; $\overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ eşitliğinin her iki tarafı e_k ile iç çarparsak;

$$\langle \overrightarrow{v}, e_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle e_i, e_k \rangle$$

$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \varepsilon_j$ olduğundan,

$$\langle \overrightarrow{v}, e_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij} \varepsilon_j$$

$$\langle \overrightarrow{v}, e_k \rangle = a_k \varepsilon_k \quad , \qquad 1 \leq k \leq n$$

$$\varepsilon_k = \langle e_k, e_k \rangle = \pm 1$$

olduğundan

$$a_k = \varepsilon_k \langle \overrightarrow{v}, e_k \rangle \quad , \qquad 1 \leq k \leq n$$

olur.O halde ;

$$\overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle \overrightarrow{v}, e_i \rangle e_i$$

bulunur.

Teorem 1.2.7: V nin bir $\{e_1, e_2, e_3, \ldots e_n\}$ ortonormal bazı için $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_n)$ işaretindeki negatif terimlerin sayısı V nin ν indeksidir (Tarakçı Ö.,1993)

1.3 Lorentz Uzayı

Tanım 1.3.1: $\mathcal{R}^n$ üzerinde $X = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ ve $Y = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ olmak üzere,

$$\langle,\rangle|_L \quad : \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}$$
$$(X,Y) \longrightarrow \langle X,Y\rangle|_L = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n$$

şeklinde tanımlanan simetrik,bilineer,non-dejenere metrik tensörüne $\mathcal{R}^n$ üzerinde Lorentz Metriği denir(O'Neill B.,1983).

Bundan sonraki gösterimlerde aksi belirtilmedikçe $\langle,\rangle$ sembolü $\langle,\rangle|_L$ anlamında kullanılacaktır.

Tanım 1.3.2:

$\mathcal{R}^n$ üzerindeki Lorentz Metriğinin tanımlanmasıyla meydana gelen $(\mathcal{R}^n, \langle,\rangle)$ikilisine n-boyutlu Lorentz Uzayı veya kısaca Lorentz Uzayı denir ve L^n ile gösterilir.

(Ekmekçi N., 1991).

Tanım 1.3.3: $(V, \langle,\rangle)$ bir Lorentz uzayı olsun.$W \subset V$ altuzayını gözönüne alalım;

(i) $\langle,\rangle|_W : W \times W \rightarrow \mathcal{R}$ pozitif ise W'ya space-like altuzay denir.

(ii) $\langle,\rangle|_W$ indeksi 1 olan non-degenerate ise W'ya time-like altuzay denir.

(iii) $\langle,\rangle|_W$ dejenere ise W'ya Light-like altuzay denir

(O'Neill B.,1983).

Tanım 1.3.4: V Lorentz vektör uzayında bütün time-like vektörlerin cümlesi τ olsun. $u \in \tau$ için $\{v \in \tau : \langle u, v\rangle < 0\}$ cümlesine V nin u'yu ihtiva eden time-konisi denir

(O'Neill B.,1983) .

Teorem 1.3.5:

Lorentz Uzayında $\vec{X}, \vec{Y}$ iki time-like vektör olsun.O zaman;

(i) $|\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle| \geq \| \vec{X} \| \| \vec{Y} \|$ **(Lorentz uzayında Schwartz eşitsizliği)**

(ii) Eğer $\vec{X}, \vec{Y}$ aynı time-konide ise $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle = - \| \vec{X} \| \| \vec{Y} \| ch\varphi$

olacak şekilde $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ arasında hiperbolik açı diye adlandırılan birtek $\varphi \geq 0$ sayısı vardır. (Ekmekçi N.,1991).

Tanım 1.3.6: (L^3 de vektörel çarpım)

$\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{Y} = (y_1, y_2, y_3) \in L^3$ olmak üzere,

$$* \; : L^3 \times L^3 \longrightarrow L^3$$

$$(\vec{X}, \vec{Y}) \longrightarrow \vec{X} * \vec{Y} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, -(x_1y_2 - x_2y_1))$$

şeklinde tanımlı "$*$" operatörüne L^3 de Lorentz anlamında vektörel çarpım denir. (Ekmekçi N.,1991).

Bu çarpımı $\mathcal{R}^3$ deki vektörel çarpımın ifadesine benzer olarak;

$$\vec{X} * \vec{Y} = det \begin{bmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & -\vec{e_3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Sonuç 1.3.7: $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \in L^3$ olmak üzere ;

(i) $\langle \vec{X} * \vec{Y}, \vec{Z} \rangle = det(X, Y, Z)$

(ii) $(\vec{X} * \vec{Y}) * \vec{Z} = \langle \vec{Y}, \vec{Z} \rangle \vec{X} - \langle \vec{X}, \vec{Z} \rangle \vec{Y}$

(iii) $\langle \vec{X}, \vec{X} * \vec{Y} \rangle = 0$

(iv) $\langle \vec{Y}, \vec{X} * \vec{Y} \rangle = 0$

(Ekmekçi N.,1991).

Tanım 1.3.8:

M, C^∞ manifold ve

$$\langle , \rangle : \quad \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^\infty(M, \mathcal{R})$$

$$(X, Y) \longrightarrow \langle X, Y \rangle$$

şeklinde tanımlı simetrik, bilineer, non-dejenere fonksiyonuna M üzerinde bir metrik tensör denir (O'Neill B., 1983).

Diğer bir deyişle her $T_M(P)$ tanjant uzayı üzerinde

$$\langle , \rangle|_P : T_M(P) \times T_M(P) \rightarrow \mathcal{R}$$

metrik tensörünü alabiliriz.

Tanım 1.3.9: M, C^∞ manifold ve $\langle , \rangle$ de M üzerinde sabit indeksli metrik tensör olmak üzere (M, $\langle , \rangle$) ikilisine bir Yarı-Riemann Manifoldu denir(O'Neill B., 1983).

Tanım 1.3.10: (M, $\langle , \rangle$) bir Yarı-Riemann manifoldu olsun.Eğer $M \geq 2$ ve indeks$M = 1$ ise; (M, $\langle , \rangle$) ikilisine bir Lorentz manifoldu denir (Ekmekçi N.,1991).

Lorentz manifoldunu bundan sonra M ile göstereceğiz ve $\langle , \rangle|_L = g$ gösterimini de kullanacağız.

Tanım 1.3.11: $J : \overline{M} \rightarrow M$ inclusion dönüşümü olmak üzere, $J_*(g), \overline{M}$ üzerinde metrik tensör ise $\overline{M}$ ye M nin Lorentz altmanifoldu denir (O'Neill B. 1983).

BÖLÜM 2

2 Eğilim Çizgileri

2.1 E^n, n-boyutlu Öklid Uzayında Eğilim Çizgileri ve Karakterizasyonları

Tanım 2.1.1:

$M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1, V_2, V_3, \ldots, V_r\}$ olsun. Buna göre ;

$$\begin{aligned} k_i : \ & I \longrightarrow \mathcal{R} \\ & s \longrightarrow k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i-yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M nin i-yinci eğriliği denir

(Hacısalihoğlu H.H., 1983).

Teorem 2.1.2:

$M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere $\alpha(s)$ noktasında i-yinci eğrilik $k_i(s)$ ve Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), \ldots, V_r(s)\}$ ise

$$\left.\begin{aligned} V_1'(s) &= k_1(s)V_2(s) \\ V_i'(s) &= -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s), \quad 1 < i < r \\ V_r'(s) &= -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s) \end{aligned}\right\} \tag{2.1.1}$$

dir (Hacısalihoğlu H.H.,1983).

Tanım 2.1.3:

$M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s \in I$ için $\alpha(s) \in M$ noktasında M nin 1. ve 2. eğrilikleri $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ ise,

$$H_1 : \; I \longrightarrow \mathcal{R}$$
$$s \longrightarrow H_1(s) = \frac{k_1(s)}{k_2(s)}$$

şeklinde tanımlı H_1 fonksiyonuna, M nin 1. Harmonik eğriliği denir

(Hacısalihoğlu H.H., 1983).

Tanım 2.1.4: $M \subset E^n$ eğrisinin birim teğet vektör alanı V_1 ve $X \in \chi(E^n)$ de sabit bir birim vektör alanı olsun. Eğer $P \in M$ için

$$\langle V_1, X \rangle \mid_p = cos\varphi = sabit$$

ise M eğrisine E^n de bir eğilim çizgisi, φ açısına M nin eğilim açısı ve $Sp\{X\}$ uzayına da M nin eğilim ekseni denir

(Hacısalihoğlu H.H., 1983).

Tanım 2.1.5: $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.Bu durumda ,

M bir eğilim çizgisidir $\Leftrightarrow$ $\forall s \in I$ için $H_1(s) = sabit$

(Hacısalihoğlu H.H., 1983).

Tanım 2.1.6: (Yüksek Mertebeden Harmonik Eğrilikler)

$M \subset E^n$ eğrisi $\{(I. \alpha)\}$ atlası ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi ve M nin yüksek mertebeden eğrilik fonksiyonları sırasıyla $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_{n-1}$ olsun $(k_{n-1} \neq 0)$.M nin birim teğet vektör alanı

V_1 olmak üzere; $H_i : I \longrightarrow \mathcal{R}$

$$H_i = \begin{cases} 0 & , \quad i = 0 \\ \dfrac{k_1}{k_2} & , \quad i = 1 \\ \{V_1[H_{i-1}] + H_{i-2}k_i\}\dfrac{1}{k_{i+1}} & , \quad 1 < i \leq n-2 \end{cases} \tag{2.1.2}$$

şeklinde tanımlı H_i fonksiyonuna M nin i-yinci mertebeden harmonik eğrilik fonksiyonu denir (Hacısalihoğlu H.H., 1983).

Bu tanımdaki H_i fonksiyonlarının V_1 yönündeki kovaryant türevlerini matrisel formda yazmak gerekirse;

$$\begin{bmatrix} V_1[H_1] \\ V_1[H_2] \\ V_1[H_3] \\ . \\ . \\ . \\ V_1[H_{n-4}] \\ V_1[H_{n-3}] \\ V_1[H_{n-2}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_3 & 0 & k_4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_4 & 0 & k_5 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . & . & . \\ . & . & . & . & \dots & . & . & . & . \\ . & . & . & . & \dots & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & k_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k_{n-2} & 0 & k_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -k_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ . \\ . \\ . \\ H_{n-4} \\ H_{n-3} \\ H_{n-2} \end{bmatrix}$$

Teorem 2.1.7: $M \subset E^n$ bir eğilim çizgisi ve $Sp\{X\}$ de M nin eğilim ekseni olsun. Frenet n-ayaklı alanı $\{V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n\}$ ve harmonik eğrilik fonksiyonlarıda $H_1, \ldots, H_{n-2}$ olmak üzere;

$$\langle V_{i+2}, X\rangle = H_i\langle V_1, X\rangle \qquad 1 \leq i \leq n-2$$

dir (Hacısalihoğlu H.H., 1983).

Sonuç 2.1.8: (Lancert ,1802)

Bir birim hızlı α eğrisi, $k_2 \neq 0$ olmak şartıyla bir genel helis(Eğilim çizgisi) dir ancak ve ancak $\forall t \in I$ için $k_1(t) = ck_2(t)$ olacak şekilde c sabiti vardır

(Millman R.S.,Parker G.D., 1987).

Teorem 2.1.9: $M \subset E^n$ eğrisinin Frenet n-ayaklı alanı $\{V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n\}$ ve harmonik eğrilikleri de $H_1, H_2, \ldots, H_{n-2}$ olsun. O zaman,

M E^n de bir eğilim çizgisidir $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{i=1}^{n-2} H_i^2$ =sabit

(Hacısalihoğlu H.H., 1983).

Teorem 2.1.10: E^n de bir α eğrisi , bir eğilim çizgisi olsun.α eğrisinin bir $\alpha(s)$ noktasındaki eğrilikleriyle , harmonik eğrilikleri arasında

$$k_r = \frac{(\sum\limits_{i=1}^{r-2} H_i)'}{2H_{r-1}H_{r-2}} \quad , \qquad 2 < r \leq n-2$$

bağıntısı vardır

(Hacısalihoğlu H.H., 1983).

2.2 L^n,n-boyutlu Lorentz Uzayında Eğilim Çizgileri ve Karakterizasyonları

Tanım 2.2.1: $\alpha \subset L^n$ Lorentz uzayında bir eğri olsun.α eğrisinin hız vektörü $\alpha' \neq 0$ olmak üzere

(i) $\langle \alpha', \alpha' \rangle > 0$ ise $\alpha(s)$ Space-like eğri,

(ii) $\langle \alpha', \alpha' \rangle < 0$ ise $\alpha(s)$ Time-like eğri,

(iii)$\langle \alpha', \alpha' \rangle = 0$ ise $\alpha(s)$ Null eğri

olarak adlandırılır(Ekmekçi N.,1991).

Bu tanıma göre $\| \alpha' \| = +1$ ise α eğrisi birim hızlı time-like eğri olacaktır.

Teorem 2.2.2: $M \subset L^n$ de time-like eğri olsun.$s \in I$ yay parametresi olmak üzere ,$\alpha(s)$ noktasında i-yinci eğrilik $k_i(s)$ ve Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s), \ldots, V_{r-1}(s), V_r(s)\}$ olsun.Bu durumda;

$$\left.\begin{array}{lll} (i) & V_1'(s) & = \varepsilon_0 k_1(s) V_2(s) \\ (ii) & V_i'(s) & = -\varepsilon_0 k_{i-1}(s) V_{i-1}(s) + \varepsilon_0 k_i(s) V_{i+1}(s), \\ (iii) & V_r'(s) & = -\varepsilon_0 k_{r-1}(s) V_{r-1}(s) \end{array}\right\} \quad (2.2.1)$$

dir.

burada;

$$\varepsilon_0 = \begin{cases} -1, & V_i \ Time-like \\ 1, & V_i \ Space-like \end{cases}$$

dır.

İspat .

(i) $V_1 = \alpha' \Rightarrow V_1 \in Sp\{\alpha', \alpha''\} = Sp\{V_1, V_2\}$

dır.Buna göre;

$$V_1' = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2$$

$$\langle V_1, V_1 \rangle = -1 = \varepsilon_0$$

$$\langle V_1', V_1 \rangle = 0$$

$$\langle V_1, V_2 \rangle = 0$$

$$\langle V_1', V_2 \rangle = -\langle V_2', V_1 \rangle$$

olduğundan,

$$\lambda_1 = \langle V_1', V_1 \rangle = 0$$

$$\varepsilon_0 = \lambda_2 = \langle V_1', V_2 \rangle = k_1$$

ve $\langle V_1, V_1 \rangle = +1$ dir.Buradan $\lambda_2 = \varepsilon_0 k_1$ dir. Buna göre,

$$V_1' = \varepsilon_0 k_1 V_2 \qquad (2.2.2)$$

(ii) Tümevarım metodu uygulayacağız.Buna başlamadan önce şu yardımcı bağıntıları ispatlayalım;

(1) $\langle V_i', V_i \rangle = 0$

(2) $\langle V_i', V_j \rangle = -\langle V_j', V_i \rangle$

ispat:

(1) $\langle V_i, V_i \rangle = \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = \pm 1$

Türev alınırsa,

$$\langle V_i', V_i \rangle = 0$$

(2) $\langle V_i, V_j \rangle = 0$

türev alınırsa,

$$\langle V_i', V_j \rangle + \langle V_i, V_j' \rangle = 0$$

$$\langle V_i', V_j \rangle = -\langle V_j', V_i \rangle$$

elde edilir. Şimdi teoremin **(ii)**.kısmına bakalım,

I.ADIM:

i=2 için doğru olduğunu gösterelim;

$$V_2 = \frac{\alpha''}{\| \alpha'' \|}$$

olduğundan,

$$V_2' \in Sp\{\alpha', \alpha'', \alpha'''\} = Sp\{V_1, V_2, V_3\}$$

$$V_2' = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3$$

$$\langle V_1, V_1 \rangle = -1 = \varepsilon_0$$

$$\varepsilon_0 \lambda_1 = \langle V_2', V_1 \rangle = -\langle V_1', V_2 \rangle$$

$$\varepsilon_0 \lambda_1 = -k_1, \qquad \varepsilon_0 = \frac{1}{\varepsilon_0}$$

$$\lambda_1 = -\varepsilon_0 k_1$$

$$\lambda_2 = \langle V_2^{'} . V_2 \rangle = 0$$

ve,

$$\lambda_3 = \langle V_2^{'}, V_3 \rangle$$

$$\lambda_3 = k_2$$

dolayısıyle, $\varepsilon_0 = +1$ olmak üzere;

$$V_2^{'} = -\varepsilon_0 k_1 V_1 + \varepsilon_0 k_2 V_3 \qquad (2.2.3)$$

elde edilir.

II.ADIM:

i=m için ifade doğru olsun. i = m + 1 için de doğruluğunu gösterelim;

$$V_3^{'} = -\varepsilon_0 k_2 V_2 + \varepsilon_0 k_3 V_4$$

$$V_4^{'} = -\varepsilon_0 k_3 V_3 + \varepsilon_0 k_4 V_5$$

$$\vdots$$

$$V_{m-1}^{'} = -\varepsilon_0 k_{m-2} V_{m-2} + \varepsilon_0 k_{m-1} V_m$$

dir.O zaman $i = m + 1$ için;

$$V_{m+1}^{'} \in Sp\{V_1, V_2, V_3, \ldots, V_{m+1}, V_{m+2}\}$$

den,

$$V_{m+1}^{'} = \lambda_{m+1}^1 V_1 + \lambda_{m+1}^2 V_2 + \ldots + \lambda_{m+1}^m V_m + \lambda_{m+1}^{m+1} V_{m+1} + \lambda_{m+2}^{m+2} V_{m+2}$$

dir.Burada λ_{m+1}^{j} katsayılarını hesaplayalım;

$$\lambda_{m+1}^{1} = \langle V_{m+1}^{'}, V_1 \rangle = -\langle V_1^{'}, V_{m+1} \rangle$$

ayrıca teoremin ilk şıkkından $V_1^{'}$ nün V_{m+1} üzerinde bileşeni yoktur.

$$\lambda_{m+1}^{1} = 0$$

Benzer şekilde devam edilirse

$$\lambda_{m+1}^{m-2} = 0 \quad ve \quad \lambda_{m+1}^{m+1} = 0$$

olduğu görülür. $V_{m+1}^{'}$ nün ifadesinde sıfır olmak zorunda olmayan

$$\lambda_{m+1}^{m} \quad ve \quad \lambda_{m+1}^{m+2}$$

bileşenleri kalır.Bu bileşenlerde;

$$\varepsilon_0 \lambda_{m+1}^{m} = \langle V_{m+1}^{'}, V_m \rangle = -\langle V_m^{'}, V_{m+1} \rangle$$

$$\lambda_{m+1}^{m} = -\varepsilon_0 \langle V_m^{'}, V_{m+1} \rangle = -\varepsilon_0 k_m$$

ve,

$$\varepsilon_0 \lambda_{m+1}^{m+2} = \langle V_{m+1}^{'}, V_{m+2} \rangle = \varepsilon_0 k_{m+1}$$

dir.O halde ;

$$V_{m+1}^{'} = \varepsilon_0 k_m V_m + \varepsilon_0 k_{m+1} V_{m+2}$$

$$V_i^{'} = -\varepsilon_0 k_{i-1} V_{i-1} + \varepsilon_0 k_i V_{i+1} \tag{2.2.4}$$

elde edilir.

(iii)

α eğrisinin türev vektörleri arasında en az r-tanesi lineer bağımsız olacağından;

$$V_r' \in Sp\{\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots, \alpha^{(r)}\} = Sp\{V_1, V_2, \ldots, V_r\}$$

olduğundan;

$$V_r' \in Sp\{V_1, V_2, \ldots, V_r\}$$

ve dolayısıyla;

$$V_r' = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i V_i$$

olur. Buradan ;

$$\varepsilon_0 \lambda_i = \langle V_r', V_i \rangle = -\langle V_i', V_r \rangle \quad , \qquad 1 \leq i \leq r$$

$$V_i' = -\varepsilon_0 k_{i-1} V_{i-1} + \varepsilon_0 k_i V_{i+1}$$

$$\varepsilon_0 \lambda_i = -\varepsilon_0 k_i$$

$$\lambda_i = -\varepsilon_0 k_i \langle V_{i+1}, V_r \rangle, \qquad 1 \leq i \leq r$$

ve $i = r-1$ için λ_i den $\langle V_r, V_r \rangle = \varepsilon_0$ konumu yapılarak

$$\lambda_{r-1} = -\varepsilon_0 k_{r-1}$$

$i = r$ için $\lambda_r = 0$ ve $1 \leq i \leq r-1$ için $\lambda_i = 0$ dan,

$$V_r' = -\varepsilon_0 k_{r-1} V_{r-1} \qquad (2.2.5)$$

bulunur.

(2.2.3),(2.2.4) ve (2.2.5) ifadeleri birleştirilerek,

$$\left.\begin{array}{lll} (i) & V_1'(s) & = \varepsilon_0 k_1(s) V_2(s) \\ (ii) & V_i'(s) & = -\varepsilon_0 k_{i-1}(s) V_{i-1}(s) + \varepsilon_0 k_i(s) V_{i+1}(s), \\ (iii) & V_r'(s) & = -\varepsilon_0 k_{r-1}(s) V_{r-1}(s) \end{array}\right\} \qquad (2.2.6)$$

elde edilir.

$\{V_1, V_2, \ldots, V_r\}$ Frenet r-ayaklısının V_i Frenet vektörlerinin eğri boyunca kovaryant türevleri ile ilgili eşitlikler;

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \\ . \\ . \\ . \\ V_{r-2}' \\ V_{r-1}' \\ V_r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_0 k_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_0 k_1 & 0 & -\varepsilon_0 k_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_0 k_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \ldots & . & . & . & . \\ . & . & . & \ldots & . & . & . & . \\ . & . & . & \ldots & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \varepsilon_0 k_{r-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\varepsilon_0 k_{r-2} & 0 & \varepsilon_0 k_{r-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -\varepsilon_0 k_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ . \\ . \\ . \\ V_{r-2} \\ V_{r-1} \\ V_r \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

veya $n = 3$ özel halinde

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_0 k_1 & 0 \\ -\varepsilon_0 k_1 & 0 & \varepsilon_0 k_2 \\ 0 & -\varepsilon_0 k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.Eğer burada $V_1 = T$,$V_2 = N$ ve $V_3 = B$ alınırsa;

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_0 k_1 & 0 \\ -\varepsilon_0 k_1 & 0 & \varepsilon_0 k_2 \\ 0 & -\varepsilon_0 k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

olur.

Teorem 2.2.3: $\alpha \subset L^3$ eğrisi bir egilim çizgisidir $\Leftrightarrow$ $\forall s \in I$ için $\frac{k_1}{k_2}$ =sabittir.

(Ekmekçi N., 1991).

Teorem 2.2.4: $\alpha : I \longrightarrow L^3$ eğrisine eğilim çizgisi(Genel Helis) denir. $\Leftrightarrow$ B eğrinin binormali olmak üzere;

$$det\left(\frac{dB}{ds}, \frac{d^2B}{ds^2}, \frac{d^3B}{ds^3}\right) = 0$$

dır.

İspat . $\Rightarrow$

$$\alpha : I \longrightarrow L^3$$

eğrisi eğilim çizgisi (genel helis) olsun.

Teorem 2.2.2 den n=3 özel hali için;

$$\left.\begin{aligned} T' &= \varepsilon_0 k_1 N \\ N' &= -\varepsilon_0 k_1 T + \varepsilon_0 k_2 B \\ B' &= -\varepsilon_0 k_2 N \end{aligned}\right\} \tag{2.2.7}$$

yazabiliriz.

$B' = -\varepsilon_0 k_2 N$ den türev alınırsa

$$B'' = -\varepsilon_0 k_2' N - \varepsilon_0 k_2 N'$$

bulunur.(2.2.7) eşitliğinden N' değeri yerine yazılırsa,

$$B'' = -\varepsilon_0 k_2' N - \varepsilon_0 k_2 \left(-\varepsilon_0 k_1 T + \varepsilon_0 k_2 B\right)$$

bulunur.Bu eşitlik düzenlenirse;

$$B'' = \varepsilon_0^2 k_1 k_2 T - \varepsilon_0 k_2' N - \varepsilon_0^2 k_2^2 B \tag{2.2.8}$$

bulunur. B'' den tekrar türev alınırsa;

$$\begin{aligned} B''' &= \varepsilon_0^2 k_1' k_2 T + \varepsilon_0^2 k_1 k_2' T + \varepsilon_0^2 k_1 k_2 T' \\ &\quad -\varepsilon_0 k_2'' N - \varepsilon_0 k_2' N' \\ &\quad -2\varepsilon_0 k_2 k_2' B - \varepsilon_0 k_2^2 B' \end{aligned}$$

α eğilim çizgisi olduğundan $\dfrac{k_1}{k_2} = sabit$ dir.Bu eşitlikten türev alınırsa;

$$k_1' k_2 = k_1 k_2'$$

bulunur.Bu eşitlik ve (2.2.7) eşitliğinden T', N', B' değerleri yukarıdaki eşitlikte yazılırsa

$$B''' = 3\varepsilon_0 k_1' k_2 T + \left(\varepsilon_0 k_2'' + \varepsilon_0 k_1^2 k_2 + \varepsilon_0 k_2^3\right) N - 3\varepsilon_0^2 k_2' k_2 B \tag{2.2.9}$$

bulunur şimdi;

$det\left(\frac{dB}{ds}, \frac{d^2B}{ds^2}, \frac{d^3B}{ds^3}\right)$ hesaplayalım.

$$det\left(\frac{dB}{ds}, \frac{d^2B}{ds^2}, \frac{d^3B}{ds^3}\right) = \begin{vmatrix} 0 & -\varepsilon_0 k_2 & 0 \\ \varepsilon_0^2 k_1 k_2 & -\varepsilon_0 k_2' & -\varepsilon_0^2 k_2^2 \\ 3\varepsilon_0^2 k_1' k_2 & \left(\varepsilon_0 k_2'' + \varepsilon_0 k_1^2 k_2 + \varepsilon_0 k_2^3\right) & -3\varepsilon_0^2 k_2' k_2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\varepsilon_0^5 k_2^3 \left(k_1' k_2 - k_1 k_2'\right); \quad k_1' k_2 = k_1 k_2' \ den$$

$$= 0$$

bulunur.

$\Leftarrow$

$$det\left(\frac{dB}{ds}, \frac{d^2B}{ds^2}, \frac{d^3B}{ds^3}\right) = 0$$

ve $k_2 \neq 0$ olduğundan;

$$k_1' k_2 - k_1 k_2' = 0$$

dır.Buradan

$\frac{k_1'}{k_1} = \frac{k_2'}{k_2}$ bulunur.Her iki tarafın integrali alınırsa;

$$\frac{k_1}{k_2} = sabit$$

bulunur. Bu ise α nın eğilim çizgisi(genel helis) olduğunu gösterir.

Tanım 2.2.5: $M \subset L^n$ eğrisinin birim teğet vektör alanı V_1 ve $X \in \chi(L^n)$ de sabit birim vektör alanı olsun.Eğer $P \in M$ için ;

$$\langle V_1, X \rangle = cos\varphi = sabit$$

ise M eğrisine L^n de bir eğilim çizgisi φ açısına M nin eğilim açısı ve $Sp\{X\}$ uzayına da M nin eğilim ekseni denir
(Ekmekçi N.,1991).

Tanım 2.2.6: $M \subset L^n$ eğrisi verilmiş olsun. M nin 1. ve 2. eğrilikleri, sırası ile k_1 ve k_2 ise,

$$H_1 = \frac{k_1}{k_2}$$

şeklinde tanımlı H_1 fonksiyonuna M nin Lorentz anlamında 1.inci Harmonik eğriliği denir
(Ekmekçi N.,1991).

Tanım 2.2.7: $M \subset L^n$ eğrisi verilsin. M nin yüksek mertebeden eğrilikleri $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_{n-1}$ olsun.M nin teğet vektör alanı V_1 olmak üzere;

$$H_i : I \longrightarrow \mathcal{R}$$

$$H_i = \begin{cases} 0 & , \quad i = 0 \\ \dfrac{k_1}{k_2} & , \quad i = 1 \\ \{V_1[H_{i-1}] + \varepsilon_0 H_{i-2} k_i\} \dfrac{\varepsilon_0}{k_{i+1}} & , \quad 1 < i \leq n-2 \end{cases} \tag{2.2.10}$$

şeklinde tanımlı H_i fonksiyonuna M nin i-inci mertebeden harmonik eğrilik fonksiyonu denir.Burada $\varepsilon_0 = \pm 1$ dir (Ekmekçi N.,1991).

Bu tanımdaki H_i fonksiyonlarının V_1 yönündeki kovaryant türevlerini matrisel formda yazmak gerekirse

$$\begin{bmatrix} V_1[H_1] \\ V_1[H_2] \\ V_1[H_3] \\ . \\ . \\ . \\ V_1[H_{n-4}] \\ V_1[H_{n-3}] \\ V_1[H_{n-2}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_0 k_3 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_0 k_3 & 0 & \varepsilon_0 k_4 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_0 k_4 & 0 & \varepsilon_0 k_5 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \ldots & . & . & . \\ . & . & . & . & \ldots & . & . & . \\ . & . & . & . & \ldots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \varepsilon_0 k_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -\varepsilon_0 k_{n-2} & 0 & \varepsilon_0 k_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\varepsilon_0 k_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ . \\ . \\ . \\ H_{n-4} \\ H_{n-3} \\ H_{n-2} \end{bmatrix}$$

dir.

Teorem 2.2.8: $M \subset L^n$ bir eğilim çizgisi ve $Sp\{X\}$ de M nin eğilim ekseni olsun.M nin Frenet n-ayaklı alanı

$$\{V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n\}$$

ve harmonik eğrilik fonksiyonları $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_{n-2}$ olmak üzere;

$$\langle V_{i+2}, X\rangle = -H_i \langle V_1, X\rangle$$

dir(Ekmekçi N.,1991).

Teorem 2.2.9: L^n de bir α eğrisi eğilim çizgisi olsun.α eğrisinin bir $\alpha(s)$ noktasındaki eğrilikleriyle harmonik eğrilikleri arasında

$$k_r = \frac{\varepsilon_0 \left(\sum\limits_{i=1}^{r-2} H_i^2\right)'}{2H_{r-2}H_{r-1}} \quad , \qquad 2 < r \leq n-2$$

bağıntısı vardır.

İspat . Tanım 2.2.7 den;

$$H_i = \frac{\varepsilon_0 H_{i-1}' + \varepsilon_0^2 H_{i-2} k_i}{k_{i+1}} \qquad 1 < i \leq n-2$$

$$k_{i+1} = \frac{\varepsilon_0 H_{i-1}' + \varepsilon_0^2 H_{i-2} k_i}{H_i} \tag{2.2.11}$$

Tümevarım metodunu kullanarak ispat yapacağız.

$i = 2$ için;

$$k_3 = \frac{\varepsilon_0 H_1'}{H_2} \tag{2.2.12}$$

dir.(2.2.12) eşitliğinin sağ tarafını $2H_1$ ile çarpıp bölelim

$$k_3 = \frac{2\varepsilon_0 H_1 H_1'}{2H_1 H_2}$$

veya

$$k_3 = \frac{\varepsilon_0 \left(\sum\limits_{i=1}^{1} H_i^2\right)'}{2H_1 H_2} \tag{2.2.13}$$

elde ederiz.

$i = p$ için (3) eşitliğinin

$$k_{p+1} = \frac{\varepsilon_0 \left(\sum\limits_{i=1}^{p-1} H_i^2\right)'}{2H_p H_{p-1}} \tag{2.2.14}$$

doğru olduğunu kabul edelim.

$i = p + 1$ için

$$k_{p+2} = \frac{\varepsilon_0 \left(\sum\limits_{i=1}^{p} H_i^2 \right)'}{2H_p H_{p+1}} \tag{2.2.15}$$

doğru olduğunu gösterelim.

(2.2.11) eşitliğinden $i = p + 1$ için

$$k_{p+2} = \frac{\varepsilon_0 H_p' + \varepsilon_0^2 H_{p-1} k_{p+1}}{H_{p+1}} \tag{2.2.16}$$

(2.2.14) eşitliği (2.2.16) da yerine yazılırsa ;

$$k_{p+2} = \frac{\varepsilon_0 H_p' + \varepsilon_0^2 H_{p-1} \left(\dfrac{\varepsilon_0 \left(\sum\limits_{i=1}^{p-1} H_i^2 \right)'}{2H_p H_{p-1}} \right)}{H_{p+1}}$$

eşitliği düzenlenirse

$$k_{p+2} = \frac{\varepsilon_0 H_p' + \left(\dfrac{\varepsilon_0^3 \left(\sum\limits_{i=1}^{p-1} H_i^2 \right)'}{2H_p} \right)}{H_{p+1}}$$

$$= \frac{2\varepsilon_0 H_p H_p' + \varepsilon_0^3 \left(\sum\limits_{i=1}^{p-1} H_i^2 \right)'}{2H_p H_{p+1}}$$

L^n deki α eğrisi ister time-like, ister space-like eğri olsun $\varepsilon_0^3 = \varepsilon_0$ olduğundan.

$$k_{p+2} = \frac{\varepsilon_0 \left(2H_p H_p' + \left(\sum_{i=1}^{p-1} H_i^2 \right)' \right)}{2H_p H_{p+1}}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 \left(\sum_{i=1}^{p} H_i^2 \right)'}{2H_p H_{p+1}}$$

$p = r - 2$ alınırsa

$$k_r = \frac{\varepsilon_0 \left(\sum_{i=1}^{p} H_i^2 \right)'}{2H_{r-2} H_{r-1}}$$

elde edilir.

Tanım 2.2.10: M Lorentz manifoldu, ξ M nin normal vektör alanı, D de M üzerindeki konneksiyon olmak üzere ;

$$A_\xi : \ \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

$$X \longrightarrow A_\xi(X) = -D_X \xi$$

şeklinde tanımlı A_ξ dönüşümüne M nin ξ den türetilmiş şekil operatörü denir (Ekmekçi N.,1991).

Genelleştirilmiş Gauss denkleminden;

$$\overline{D}_X \xi = D_X \xi + D_X^{\perp} \xi$$

$$\overline{D}_X \xi = -(A_\xi(X)) + D_X^{\perp} \xi$$

yazılabilir.

Sonuç 2.2.11:

(i) $A_\xi(X), \xi$ ve X e göre lineerdir.

(ii) M üzerinde ξ normal vektör alanı için

$$\langle A_\xi(X), Y\rangle = \langle B(X,Y), \xi\rangle$$

dir(Ekmekçi N.,1991).

Tanım 2.2.12: $\{E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n\}$, M nin ortonrmal bazı olmak üzere

$$H : \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} B(E_j, E_j)$$

şeklinde tanımlı H fonksiyonuna ortalama eğrilik vektör alanı adı verilir (Ekmekçi N.,1991).

Tanım 2.2.13: H ortalama eğrilik vektör alanı için

$$D_X^{\perp} H = 0$$

ise H ya paraleldir denir(Chen B.Y., 1973).

M lorentz manifoldu üzerinde bir eğri $\alpha : I \longrightarrow M$ olsun.

α eğrisinin teğeti $\alpha(s)' = X$ olmak üzere;

$$\left.\begin{aligned} \alpha(s)' &= X \\ D_X X &= k_1 Y \\ D_X Y &= k_1 X + k_2 Z \\ D_X Z &= -k_2 Y \end{aligned}\right\} \tag{2.2.17}$$

ifadesi için $k_2 \equiv 0$ ise $\alpha(s)$ çember ,k_1, k_2 pozitif sabitler ise $\alpha(s)$ Helis dir (Ikawa T.,1985).

Sonuç 2.2.14: $\alpha(s)$ M Lorentz manifoldunda time-like eğri olsun.

$\alpha(s)$ bir çemberdir $\Leftrightarrow D_X D_X X - \langle D_X X, D_X X \rangle X = 0$ dır.

(Ikawa T., 1985).

Sonuç 2.2.15: $\alpha(s)$ M Lorentz manifoldunda time-like eğri olsun.

$\alpha(s)$ bir helisdir $\Leftrightarrow D_X D_X D_X X - K D_X X = 0$ (2.2.18)

tersine $\alpha(s)$ eğrisinin hız vektörü (2.2.18) denklemini sağlıyor ise $\alpha(s)$ bir geodezik, çember veya bir helistir,burada $K = k_1^2 - k_2^2$ dir(Ikawa T., 1985) .

Teorem 2.2.16: $\alpha(s)$ M Lorentz manifoldunda time-like eğri olsun.

$\alpha(s)' = X$ olmak üzere,

α eğrisi bir genel helistir $\Leftrightarrow D_X D_X D_X X - \mathcal{K} D_X X = 3k_1' D_X Y$ (2.2.19)

dir.

Burada $\mathcal{K} = \dfrac{k_1''}{k_1} + k_1^2 - k_2^2$dir.

İspat . Kabul edelimki α eğrisi bir genel helis olsun.

(2.2.17) den $D_X X = k_1 Y$ dir.Türev alınırsa;

$$
\begin{aligned}
D_X D_X X &= D_X(k_1 Y) \\
&= k_1' Y + k_1 D_X Y \\
&= k_1' Y + k_1 (k_1 X + k_2 Z) \\
&= k_1^2 X + k_1' Y + k_1 k_2 Z
\end{aligned} \tag{2.2.20}
$$

ve tekrar türev alınırsa

$$
\begin{aligned}
D_X D_X D_X X &= 3k_1 k_1' X \\
&+ \left(k_1' k_2 + (k_1 k_2)'\right) Z + k_1^2 D_X X
\end{aligned} \tag{2.2.21}
$$

α bir genel helis olduğundan;

$$
\frac{k_1}{k_2} = sabit
$$

bu eşitlikten türev alırsak,

$$
k_1' k_2 = k_1 k_2'
$$

bulunur.

Eğer;

$$
Y = \frac{1}{k_1(t)} D_X X \tag{2.2.22}
$$

değerini ve

$$
(k_1(t) k_2(t))' = 2k_1(t)' k_2(t)
$$

değerlerini (2.2.21) de yerine yazarsak;

$$
\begin{aligned}
D_X D_X D_X X &= \left(\frac{k_1(t)''}{k_1(t)} + k_1(t)^2 - k_2(t)^2\right) D_X X + 3k_1(t)' (k_1(t) X + k_2(t) Z) \\
&= \left(\frac{k_1(t)''}{k_1(t)} + k_1(t)^2 - k_2(t)^2\right) D_X X + 3k_1(t)' D_X Y
\end{aligned}
$$

bulunur.

$$\mathcal{K} = \frac{k_1(t)''}{k_1(t)} + k_1(t)^2 - k_2(t)^2$$

alınırsa;

$$D_X D_X D_X X = \mathcal{K} D_X X + 3k_1' D_X Y$$

bulunur. Karşıt olarak kabul edelimki

$$D_X D_X D_X X = \mathcal{K} D_X X + 3k_1' D_X Y \tag{2.2.19}$$

eşitliği sağlansın. Gösterelimki α bir genel helistir.

(2.2.22) eşitliğinden türev alınırsa

$$D_X Y = \frac{-k_1(t)'}{k_1(t)^2} D_X X + \frac{1}{k_1(t)} D_X D_X X,$$

elde edilir. Tekrar türev alınırsa ,

$$\begin{aligned} D_X D_X Y &= \left(\frac{-k_1(t)'}{k_1(t)^2}\right)' D_X X - \frac{-k_1(t)'}{k_1(t)^2} D_X D_X X \\ &- \frac{k_1(t)'}{k_1(t)^2} D_X D_X X + \frac{1}{k_1(t)} D_X D_X D_X X \end{aligned} \tag{2.2.23}$$

bulunur.

(2.2.19) eşitliği (2.2.23) de yazılırsa

$$\begin{aligned} D_X D_X Y &= \left\{ \left(\frac{-k_1(t)'}{k_1(t)^2}\right)' + \frac{\mathcal{K}}{k_1(t)} \right\} D_X X \\ & \frac{-2k_1(t)'}{k_1(t)^2} D_X D_X X + \frac{3k_1(t)}{k_1(t)} D_X Y \end{aligned}$$

buluruz.

(2.2.20) ve (2.2.17) son eşitlikte yerlerine yazılırsa,

$$D_X D_X Y = \left\{ \left(\frac{-k_1(t)'}{k_1(t)^2} \right)' + \frac{\mathcal{K}}{k_1(t)} \right\} D_X X$$

$$\frac{-2k_1(t)'^2}{k_1(t)^2} Y + k_1(t)' X + \frac{k_1(t)' k_2(t)}{k_1(t)} Z \qquad (2.2.24)$$

bulunur.

$$D_X D_X Y = k_1(t)' X - k_2(t)^2 Z + k_1(t) D_X X$$

eşitliği (2.2.24 da yazılırsa ve her iki taraf Z ile iç çarpılırsa;

$$k_2(t)' = \frac{k_1(t)' k_2(t)}{k_1(t)}$$

ve

$$\frac{k_2(t)'}{k_2(t)} = \frac{k_1(t)'}{k_1(t)}$$

bulunur.Son eşitlikte integral alınırsa;

$$\frac{k_1(t)}{k_2(t)} = sabit$$

bulunur.Böylece α bir genel helisdir.

Sonuç 2.2.17: α M lorentz manifoldu üzerinde bir time-like eğri olsun.

$$\alpha \ \textit{bir dairesel helistir} \Leftrightarrow \ D_X D_X D_X X - \left(k_1^2 - k_2^2\right) D_X X = 0$$

dır.

İspat . α ,M Lorentz manifoldu üzerinde bir time-like eğri olsun;

$$\alpha \ \textit{bir dairesel helistir} \Leftrightarrow D_X D_X D_X X - \mathcal{K} D_X X = 3k_1' D_X Y$$

dir.

Burada $\mathcal{K} = \frac{k_1''}{k_1} + k_1^2 - k_2^2$ dir.

ifadesinden

$$\alpha \ \textit{dairesel helis} \ \Leftrightarrow k_1, k_2 \ \textit{sabit}$$

olacağından

$\frac{k_1''}{k_1} = 0$ ve $k_1' = 0$ olur ve dolayısıyla

$$D_X D_X D_X X - \left(k_1^2 - k_2^2\right) D_X X = 0$$

bulunur.

sonuç 2.2.17 T.Ikawa'nın sonucundan ibarettir.

BÖLÜM 3

3 Indefinite - Riemann Manifoldlarında Genel Helisler

Riemann Manifoldunda regüler bir α eğrisinin 1. ve 2. eğrilikleri k_1 ve k_2 olmak üzere k_1 ve k_2 sabit değil iken, $\frac{k_1}{k_2}$ oranının sabit olması halinde α eğrisine genel helis adı verilmektedir.
T.IKAWA'nın " **On Curves and Submanifolds in an Indefinite-Riemannian Manifold** " adlı çalışmasında dairesel helisler için bir sonuç verilmiştir. Bu sonuç N.EKMEKÇİ ve H.H.HACISALİHOGLU 'nun " **On Helices of a Lorentzian Manifold** " adlı çalışmasında genelleştirilmiştir.

Ayrıca T.IKAWA Lorentz altmanifoldlarında dairesel helisler için aşağıdaki teoremi vermiştir.

TEOREM: $M_1(boyM_1 \geq 3)$ bir indefinite-Riemann manifoldu $\overline{M}_i$ nin irtibatlı bir Lorentz altmanifoldu olsun. M_1 deki k_1 ve k_2 eğrilikleri $(k_1, k_2 > 0)$ her time-like helis , $\overline{M}_i$ de bir time-like helisdir.Böylece M_1, $\overline{M}_i$ nin total geodezik altmanifoldudur.

Bu bölümde T.IKAWA tarafından verilen bu teoremi genel helislere taşıyacağız.

Lemma 3.1.1: V_β, indeksi β olan $\langle , \rangle$ iç çarpım ile donatılmış bir n-boyutlu reel vektör uzayı olsun. V_β dan reel vektör uzayı W ya herhangi bir T r-lineer dönüşümü için aşağıdaki şartlar denktirler $\varepsilon_0 = \pm 1 \quad (-\beta \leq \varepsilon_0 \leq n - \beta)$

a) $x \in V_\beta$ ve $\langle x, x \rangle = \varepsilon_0$ için;

$$T(x, x, x, ..., x) = 0$$

b) $\forall x \in V_\beta$ için; $\quad T(x, x, x, ..., x) = 0$ dır.

(Abe.N.,Nakanashı,Y. ve Yamaguchi,S.)

Lemma 3.1.2: V_β, indeksi β olan $\langle,\rangle$ iç çarpım ile donatılmış bir n-boyutlu reel vektör uzayı ve V_β dan reel vektör uzayı W ya herhangi bir T 2r-lineer dönüşümü için aşağıdaki şartlar denktirler. $\varepsilon_0 = \pm 1$ veya 0 $\quad (2-2\beta \leq \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \leq 2n-2\beta-2)$

a) $u, x \in V_\beta$ için $\langle x, x\rangle = \varepsilon_0$, $\langle u, u\rangle = \varepsilon_1$

$$\sum_{i=1}^{2r} T(x, x, ..., x, u_i, x, ..., x) = 0$$

b) $\forall x \in V_\beta$ için;

$$T(x, x, ..., x) = \langle x, x\rangle^r w$$

olacak şekilde $w \in W$ vardır.

(Abe,N.,Nakanashı,Y. ve Yamaguchi,S.)

Şimdi M_γ, indeksi $\gamma \quad (0 \leq \gamma \leq n)$ olan n-boyutlu indefinite-Riemann manifoldu izometrik olarak indeksi i olan m-boyutlu indefinite-Riemann manifoldu $\overline{M}_i$ içine daldırılmış olsun. Böylece M_γ ya $\overline{M}_i$ nin indefinite-Riemann altmanifoldu denir.

Özel olarak eğer $\gamma = 1$ ise M_1 e $\overline{M}_i$ 'nin Lorentz altmanifoldu denir.

M_γ ve $\overline{M}_i$ nin metriği $\langle,\rangle$ sembolüyle. M_γ 'nın kovaryant türevini D ile, $\overline{M}_i$ nin kovaryant türevini $\overline{D}$ ile gösterelim.

Gauss formülünden;

$$\overline{D}_X Y = D_X Y + B(X, Y) \tag{3.1.1}$$

yazabiliriz.Burada X,Y M_γ 'nın tanjant vektör alanları, B ise M_γ 'nın ikinci esas formudur.

Weingarten formülünden;

$$\overline{D}_\xi Y = -A_\xi X + D^{\perp}_X \xi \qquad (3.1.2)$$

yazabiliriz.Burada X M_γ 'nın tanjant vektör alanı ve ξ ise normal vektör alanıdır.

$D^{\perp}$ ise $N(M_\gamma)$ demetinde indirgenmiş konneksiyona karşılık gelen kovaryant türevdir ve A_ξ ise M_γ nın şekil operatörüdür.

Aşağıdaki bağıntılar mevcuttur;

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle B(X,Y), \xi\rangle \qquad (3.1.3)$$

İkinci esas form ve şekil operatörü için bunların kovaryant türevlerini şu şekilde tanımlayabiliriz.

$$\overline{D}B(X,Y,Z) = D^{\perp}_Z B(X,Y) - B(D_Z X, Y) - B(X, D_Z Y) \qquad (3.1.4)$$

$$\begin{aligned}\overline{D}^2 B(X,Y,Z,W) &= D^{\perp}_W(\overline{D}B(X,Y,Z)) - \overline{D}B(D_W X, Y, Z) \\ &\quad -\overline{D}B(X, D_W Y, Z) - \overline{D}B(X,Y,D_W Z)\end{aligned} \qquad (3.1.5)$$

$$(\overline{D}_Y A)_\xi = D_Y(A_\xi X) - A_{D^{\perp}_Y \xi} X - A_\xi D_Y X \qquad (3.1.6)$$

Burada X,Y,Z,W M_γ nın tanjant vektör alanları ve ξ ise M_γ nın normal vektör alanıdır.

M_γ nın eğrilik vektör alanı H' yı ise şu şekilde tanımlayalım.

$$H : \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle e_i, e_i\rangle B(e_i, e_i) \qquad (3.1.7)$$

Burada $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ M_γ nın ortonormal çatısıdır. Eğer $D^{\perp}H = 0$ ise H ortalama eğrilik vektör alanı paraleldir denir.

Ayrıca ikinci esas form B, $\forall X, Y \in \chi(M_\alpha)$ için

$$B(X,Y) = \langle X,Y \rangle H$$

eşitliği sağlanıyorsa M_γ ya total umbilik altmanifold denir.

Eğer ikinci esas form M_γ üzerinde özdeş olarak sıfır ise bu durumda M_γ ya total geodezik denir.

İkinci esas form B $T_P(M_\gamma)$ üzerinde bir bilineer simetrik fonksiyondur.

Lemma 3.1.3: M_γ nın her P noktası için kabul edelimki B, $B(t,s) = 0$ eşitliğini sağlasın.Burada $t \in T_P(M_1)$ bir birim time-like vektör , $s \in T_P(M_1)$ ise bir birim space-like vektör ve $\langle t,s \rangle = 0$ dır.

Bu durumda M_1 total,umbilik altmanifolddur(Ikawa T.,1985).

Lemma 3.1.4: H bir M_1 lorentz altmanifoldunun eğrilik vektör anlamında olsun.M_1 in her P noktası için kabul edelimki H, $D_s^\perp H = 0$ eşitliğini $\forall s \in T_P(M_1)$ space-like vektörü için sağlasın. Bu durumda H paraleldir(Ikawa T.,1985).

Lemma 3.1.5: Bir M_γ total umbilik altmanifold için aşağıdaki şartlar denktir.

a) $D^\perp H = 0$

b) $\forall x \in T_p(M_\gamma)$; $\overline{D}B(x,x,x) = 0$

dır(Abe,N.Nakanishi,Y. ve Yamuguchi,S.).

Teorem 3.1.1: $M_1(boyM_1 \geq 3)$ bir $\overline{M}_i$ indefinite-Riemann manifoldunun ,irtibatlı Lorentz altmanifoldu olsun.Eğer M_1 deki $k_1, k_2(k_1'' \neq k_1^3)$ eğrilikli her time-like helis $\overline{M}_i$ de bir time-like genel helis ise M_1, $\overline{M}_i$ nin total geodezik altmanifoldudur.

İspat . M_1 in her P noktası için x,y,z $T_P(M_1)$ de ortogonal vektörler olsunlar x time-like, y ve z space-like vektörlerdir.$\alpha(t)$ M_1 de genel helis olsun.Bu durumda;

$\alpha(0) = P$, $\alpha(t)' = X$, $X(P) = x$, $Y(P) = y$, $Z(P) = z$ dir.

Ayrıca;

$(D_X X)(P) = k_1 y$, $(D_X Y)(P) = k_1 x + k_2 z$, $(D_X Z)(P) = -k_2 y$ dir.

Burada Y $\alpha(t)$ nin esas vektör alanı , Z ise binormal vektör alanıdır.

α eğrisi M_1 de genel helis olduğundan;

$$D_X D_X D_X X - \mathcal{K} D_X X = 3k_1' D_X Y$$

dir.Burada

$$\mathcal{K} = \frac{k_1''}{k_1} + k_1^2 - k_2^2$$

dir.

Denklemini sağlar.Kabul edelimki α eğrisinin $\overline{M}_i$ de genel helis olsun.Bu durumda;

$$\overline{D}_X \overline{D}_X \overline{D}_X X - \overline{\mathcal{K}}\ \overline{D}_X X = 3\overline{k_1}' \overline{D}_X Y$$

dir.Burada;

$$\overline{\mathcal{K}} = \frac{\overline{k_1}''}{\overline{k_1}} + \overline{k_1}^2 - \overline{k_2}^2$$

dir.Denklemi sağlanacaktır.

Gauss denkleminden;

$$\overline{D}_X Y = D_X Y + B(X,Y)$$

ve Weingarten formülünden;

$$\overline{D}_X \xi = -A_\xi X + D^{\perp}_X \xi$$

ayrıca;

$$\begin{aligned}
\overline{D}B(X,X,X) &= D^{\perp}_X B(X,X) - 2B(X,D_X X)\\
\overline{D}^2 B(X,X,X,X) &= D^{\perp}_X(\overline{D}B(X,X,X)) - \overline{D}B(D_X X,X,X)\\
&\quad -\overline{D}B(X,D_X X,X) - \overline{D}B(X,X,D_X X)
\end{aligned}$$

eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned}
\overline{D}_X(\overline{D}_X X) &= \overline{D}_X\,(D_X X + B(X,X))\\
&= \overline{D}_X(D_X X) + \overline{D}_X\,(B(X,X))\\
&= D_X D_X X + B(X,D_X X) - A_{B(X,X)}X + D^{\perp}_X B(X,X)\\
&= D_X D_X X - A_{B(X,X)}X + 3B(X,D_X X) + \overline{D}_X B(X,X,X)
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

elde edilir.Tekrar türev alınırsa;

$$\begin{aligned}
\overline{D}_X\overline{D}_X\overline{D}_X X &= \overline{D}_X(D_X D_X X) - \overline{D}_X(A_{B(X,X)}X)\\
&\quad +3\overline{D}_X(B(X,D_X X) + \overline{D}_X(\overline{D}B(X,X,X))
\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

bulunur.Eğer (3.1.9) da

$$\overline{D}_X(D_X D_X X) = D_X D_X D_X X + B(X,D_X D_X X) \tag{3.1.10}$$

ve

$$3\overline{D}_X B(X, D_X X) = \Big(-3A_{B(X,D_X X)}X + D^{\perp}_X B(X, D_X X)\Big)$$

ayrıca;

$$D^{\perp}_X B(X, D_X X) = \overline{D}B(X, D_X X, X) + B(D_X X, D_X X) + B(X, D_X D_X X)$$

olduğundan;

$$\begin{aligned} 3\overline{D}_X(B(X, D_X X) &= -3A_{B(X,D_X X)}X + 3\overline{D}(B(X, D_X X, X) \\ &+3B(D_X X, D_X X) + 3B(X, D_X D_X X) \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

olarak bulunur.Ayrıca;

$$\overline{D}_X\left(\overline{D}B(X,X,X)\right) = -A_{\overline{D}B(X,X,X)}X + D^{\perp}_X(\overline{D}B(X,X,X))$$

ve burada

$$\begin{aligned} D^{\perp}_X(\overline{D}B(X,X,X)) &= \overline{D}^2 B(X,X,X,X) + \overline{D}B(D_X X, X, X) \\ &+\overline{D}B(X, D_X X, X) + \overline{D}B(X, X, D_X X) \end{aligned}$$

değeri yazılırsa,

$$\begin{aligned} \overline{D}_X\left(\overline{D}B(X,X,X)\right) &= -A_{\overline{D}B(X,X,X)}X + \overline{D}^2 B(X,X,X,X) \\ &+\overline{D}B(D_X X, X, X) + \overline{D}B(X, D_X X, X) \\ &+\overline{D}B(X, X, D_X X) \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

bulunur.Son olarak,

$$-\overline{D}_X(A_{B(X,X)}X) = -D_X A_{B(X,X)}X - B(X, A_{B(X,X)}X) \tag{3.1.13}$$

bulunur.Eğer (3.1.10),(3.1.11),(3.1.12),(3.1.13) değerleri (3.1.9) de yazılırsa

$$\begin{aligned}\overline{D}_X\overline{D}_X\overline{D}_X X &= D_X D_X D_X X + B(X, D_X D_X X) - 3A_{B(X,D_X X)}X \\ &+5\overline{D}B(X, D_X X, X) + 3B(D_X X, D_X X) - 3A_{\overline{D}B(X,X,X)}X \\ &+\overline{D}^2 B(X,X,X,X) + \overline{D}B(X,X,D_X X) - D_X A_{B(X,X)}X \\ &-B(X, A_{B(X,X)}X)\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

bulunur.En son eşitlikte;

$$D_X(A_{B(X,X)}X) = \overline{D}_X A_{B(X,X)}X + A_{D^{\perp}_X B(X,X)} + A_{B(X,X)}D_X X \tag{3.1.15}$$

$$D^{\perp}_X B(X,X) = \overline{D}B(X,X,X) + 2B(X, D_X X)$$

olduğundan,

$$A_{D^{\perp}_X B(X,X)} = A_{\overline{D}B(X,X,X)} + 2A_{B(X,D_X X)}$$

olurki, (3.1.15) ifadesi;

$$\begin{aligned}D_X(A_{B(X,X)}X) &= \overline{D}_X A_{B(X,X)}X + A_{\overline{D}B(X,X,X)}X \\ &+2A_{B(X,D_X X)}X + A_{B(X,X)}D_X X\end{aligned} \tag{3.1.16}$$

şeklini alır.

(3.1.16) ve $D_X D_X D_X X = \mathcal{K} D_X X + 3k_1' D_X Y$

eşitlikleri (3.1.14) de yazılırsa;

$$\begin{aligned}\overline{D}_X\overline{D}_X\overline{D}_X X &= \mathcal{K} D_X X + 3k_1' D_X Y \\ &4B(X, D_X D_X X) - 5A_{B(X,D_X X)}X \\ &5\overline{D}B(X, D_X X, X) + 3B(D_X X, D_X X) - 2A_{\overline{D}B(X,X,X)}X \\ &+\overline{D}^2 B(X,X,X,X) + \overline{D}B(X,X,D_X X) \\ &-\overline{D}_X A_{B(X,X)}X - A_{B(X,X)}D_X X - B(X, A_{B(X,X)}X)\end{aligned} \tag{3.1.17}$$

ve

$$\overline{D}_X\overline{D}_X\overline{D}_X X = \overline{K}\,\overline{D}_X + 3\overline{k_1}'\overline{D}_X Y \tag{3.1.18}$$

ayrıca;

$$\begin{aligned} \overline{K}\,\overline{D}_X X &= \overline{K}(D_X X) + \overline{K}B(X,X) \\ 3\overline{k_1}'\overline{D}_X Y &= +\overline{k_1}'D_X Y 3\overline{k_1}'B(X,Y) \end{aligned}$$

dır.Eğer bu eşitlikler (3.1.18) de yazılırsa

$$\begin{aligned} \overline{D}_X\overline{D}_X\overline{D}_X X &= \overline{K}(D_X X) + \overline{K}B(X,X) \\ &+3\overline{k_1}'D_X Y + 3\overline{k_1}'B(X,Y) \end{aligned} \tag{3.1.19}$$

(3.1.19) eşitliği (3.1.17) da yerine yazılır ve düzenlenirse ;

$$\begin{aligned} 0 &= KD_X X + 3k_1'D_X Y + 4B(X, D_X D_X X) - 5A_{B(X,D_X X)}X \\ &5\overline{D}B(X, D_X X, X) + 3B(D_X X, D_X X) - 2A_{\overline{D}B(X,X,X)}X \\ &+\overline{D}^2 B(X,X,X,X) + \overline{D}B(X,X,D_X X) - \overline{D}_X A_{B(X,X)}X \\ &-A_{B(X,X)}D_X X - B(X, A_{B(X,X)}X) - \overline{K}(D_X X) - \overline{K}B(X,X) \\ &-3\overline{k_1}'D_X Y - 3\overline{k_1}'B(X,Y) \end{aligned} \tag{3.1.20}$$

son ifadenin teğet ve normal kısımlarını alalım.

Teğet kısmı:

$$\begin{aligned} 0 &= KD_X X + 3k_1'D_X Y - 2A_{\overline{D}B(X,X,X)}X - 5A_{B(X,D_X X)}X \\ &-\overline{D}_X A_{B(X,X)}X - A_{B(X,X)}D_X X - \overline{K}(D_X X) - 3\overline{k_1}'D_X Y \end{aligned} \tag{3.1.21}$$

Normal kısmı:

$$
\begin{aligned}
0 &= 4B(X, D_X D_X X) + 5\overline{D}B(X, D_X X, X) + 3B(D_X X, D_X X) \\
&+\overline{D}^2 B(X, X, X, X) + \overline{D}B(X, X, D_X X) - B(X, A_{B(X,X)}X) \\
&-\overline{K}B(X, X) - 3\overline{k_1}' B(X, Y)
\end{aligned} \tag{3.1.22}
$$

Eğer normal kısımda

$D_X X = k_1 Y$

$D_X D_X X = k_1' Y + k_1^2 X + k_1 k_2 Z$

$4B(X, D_X X, X) = 4k_1' B(X, Y) + 4k_1^2 B(X, X) + 4k_1 k_2 B(X, Z)$

$$
\begin{aligned}
5\overline{D}B(X, D_X X, X) &= 5D_X^{\perp} B(X, D_X X) - B(D_X X, D_X X) - 5B(X, D_X D_X X \\
&= 5D_X^{\perp} B(X, D_X X) - 5k_1^2 B(Y, Y) - 5k_1' B(X, Y) \\
&-5k_1^2 B(X, X) - 5k_1 k_2 B(X, Z)
\end{aligned}
$$

ve;

$$
\begin{aligned}
\overline{D}B(X, X, D_X X) &= D_X^{\perp} B(X, X) - 2B(D_{D_X X} X, X) \\
&= k_1 D_Y^{\perp} B(X, X) - 2k_1 B(D_Y X, X)
\end{aligned}
$$

eşitlikleri yazılırsa (3.1.22) ifadesinden;

$$
\begin{aligned}
\overline{K}B(X, X) + 3\overline{k_1}' B(X, Y) &= -k_1' B(X, Y) - k_1^2 B(X, X) - k_1 k_2 B(X, Z) - 2k_1^2 B(Y, Y) \\
&5D_X^{\perp} B(X, D_X X) + \overline{D}^2 B(X, X, X, X) + k_1 D_Y^{\perp} B(X, X) \\
&-2k_1 B(D_Y X, X) - B(X, A_{B(X,X)} X)
\end{aligned} \tag{3.1.23}
$$

elde edilir.

B(X,Z) ifadesini eşitliğin bir tarafında tutarsak, eşitliğin Z den bağımsız olduğunu görürüz.

Z yerine -Z alıp çıkardığımızda;

$$B(X,Z)=0$$

bulunur. Bu ise Lemma 3.1.3. den M_1 in total umbilik olmasıdır.

$B(X,Y)=0$ dır. Buna göre (3.1.23) eşitliği

$$\begin{aligned} 0 &= -k_1^2 B(X,X) - 2k_1^2 B(Y,Y) + \overline{D}^2 B(X,X,X,X) \\ & k_1 D_Y^{\perp} B(X,X) - B(X, A_{B(X,X)}X) - \overline{K} B(X,X) \end{aligned} \tag{3.1.24}$$

(3.1.24) de Y yerine -Y alınıp çıkartılırsa;

$$D_Y^{\perp} B(X,X)=0$$

yani $D_Y^{\perp} H = 0$ olurki bu da ortalama vektör alanının paralel olmasıdır. Lemma 3.1.5. den $D^{\perp} H = 0$ ise $\overline{D} B(X,X,X)=0$ dolayısıyla $\overline{D}^2 B(X,X,X,X)=0$ dır.

Böylece (3.1.24) eşitliği

$$-k_1^2 B(X,X) - 2k_1^2 B(Y,Y) - B(X, A_{B(X,X)}X) - \overline{K} B(X,X) = 0 \tag{3.1.25}$$

halini alır.

$$B(X,X) = \langle X,X\rangle H$$

$$B(Y,Y) = \langle Y,Y\rangle H$$

$$B(X, A_{B(X,X)}X) = \langle X, A_{B(X,X)}X\rangle H$$

da

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle B(X,Y), \xi\rangle$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\langle X, A_{B(X,X)}X\rangle &= \langle B(X,X), B(X,X)\rangle \\ &= \langle H, H\rangle\end{aligned}$$

olurki (3.1.25) eşitliği

$$k_1^2 H - 2k_1^2 H - \langle H, H\rangle + \overline{\mathcal{K}} H = 0$$

veya;

$$\{-k_1^2 + \overline{\mathcal{K}} - \langle H, H\rangle\} = 0 \tag{3.1.26}$$

olur. Teğet kısım (3.1.21) düzenlenirse;

$$\begin{aligned}0 &= \mathcal{K} D_X X + 3k_1' D_X Y - \overline{D}_X A_{B(X,X)}X \\ &\quad - A_{B(X,X)} D_X X - \overline{\mathcal{K}}(D_X X) - 3\overline{k_1}' D_X Y\end{aligned}$$

Burada;

$\overline{D}_X A_{B(X,X)}X = D_X A_{B(X,X)}X - A_{D_X^{\perp} B(X,X)}X - A_{B(X,X)} D_X X$

ve $A_{D_X^{\perp} B(X,X)}X = 0$ olduğundan

$$\mathcal{K} D_X X + 3k_1' D_X Y - D_X A_{B(X,X)}X - \overline{\mathcal{K}} D_X X - 3\overline{k_1}' D_X Y = 0 \tag{3.1.27}$$

(3.1.27) eşitliği Y ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}& k_1\left(\mathcal{K} - \overline{\mathcal{K}}\right) + k_1\langle H, H\rangle = 0 \\ & \mathcal{K} - \overline{\mathcal{K}} = -\langle H, H\rangle\end{aligned}$$

olur.Bu değer (3.1.26) da yazılırsa;

$$\begin{aligned}& \{-k_1^2 + \overline{\mathcal{K}} + \mathcal{K} - \overline{\mathcal{K}}\}H = 0 \\ & \{-k_1^2 + \mathcal{K}\}H = 0\end{aligned}$$

$\mathcal{K} = \frac{k_1''}{k_1} + k_1^2 - k_2^2$ olduğundan,

$$\{\frac{k_1''}{k_1} - k_2^2\}H = 0$$

ve $k_1 = ck_2$ olduğundan;

$$\left(k_1'' - c^2 k_1^3\right) H = 0$$

olurki bu da $H = 0$ demektir. Buna göre M_1 total geodezik altmanifolddur.

Sonuç 3.1.1: Eğer Teorem 3.1.1 'de k_1 ve k_2 eğrilikleri sabit alınırsa T.Ikawa tarafından verilen teorem elde edilir.

Kaynakça

[ABE,N.,NAKANISHI,Y. and YAMUGUCHI,S.] *Circles and Spheres in Pseudo-Riemannian Geometry.* to appear .

[EKMEKÇİ,N. 1991.] *Lorentz Manifoldları Üzerinde Eğilim Çizgileri.* Doktora tezi Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

[EKMEKÇİ,N.,HACISALİHOĞLU,H.H. 1996.] *On Helices of a Lorentzian Manifold.* to appear.

[HACISALİHOĞLU,H.H. 1980.] *Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş*, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.

[HACISALİHOĞLU,H.H. 1994] *Diferensiyel Geometri I,II* . Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi.

[IKAWA,T. 1985.] *On Curves and Submanifolds in an Indefinite-Riemannian Manifold*, Tsukaba J.Math. Vol.9, No:2 .

[MILLMAN,R.S.,PARKER ,G.D. 1987.] *Elements of Differential Geometry* . Prentice Hall,Englewood Cliffs,N.J.

[NAKANISHI,Y. 1988.] *On Curves in Pseudo-Riemannian Submanifolds.* Yokohama Math.Vol.36 PP 137-146.

[O'NEILL,B. 1983.] *Semi - Riemann Geometry.* Academic Press -Newyork.

[TARAKÇI,Ö. **1993.**] *Lorentz Manifoldları Üzerinde Differensiyellenebilir Yapılara Dair.* Yüksek Lisans Tezi Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

ÖZGEÇMİŞ

1968 yılında Afyon'da doğdu. İlk, orta, lise öğrenimini Afyon'da tamamladı. 1986 yılında girdiği Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1990 yılında mezun oldu. 1991-94 yılları arasında İstanbul'da Matematik Öğretmeni olarak çalıştı.1994 yılında Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Geometri Anabilim Dalı'na Araştırma Görevlisi olarak atandı.Aynı yıl Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Halen bu bölümde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.