SIÇRAMALI GECİKMELİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIK DAVRANIŞI

DOKTORA TEZİ

Sermin ÖZTÜRK

DANIŞMAN

Doç. Dr. Özkan ÖCALAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

NİSAN 2010

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

SIÇRAMALI GECİKMELİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIK DAVRANIŞI

Sermin ÖZTÜRK

DANIŞMAN

Doç. Dr. Özkan ÖCALAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

NİSAN 2010

ONAY SAYFASI

Doç. Dr. Özkan ÖCALAN danışmanlığında Sermin ÖZTÜRK tarafından hazırlanan "Sıçramalı Gecikmeli Denklemlerin Çözümlerinin Salınımlılık Davranışı" başlıklı bu çalışma, lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 28.04.2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı, SOYADI	İmza
Başkan	Prof. Dr. Ömer AKIN	
Danışman	Doç. Dr. Özkan ÖCALAN	
Üye	Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM	
Üye	Doç. Dr. Murat ADIVAR	
Üye	Yrd. Doç. Dr. M. Kemal YILDIZ	

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
....../....../...... tarih ve
....../...... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Rıdvan ÜNAL
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

SIÇRAMALI GECİKMELİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIK DAVRANIŞI

Sermin ÖZTÜRK

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Özkan ÖCALAN

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılarak genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, gerekli temel kavramlardan söz edilmiştir. Üçüncü bölümde,

$$\begin{cases} (a(t)x'(t))' + p(t)x(t-\tau) = 0 & , t \geq t_0 \quad , \quad t \neq t_k \\ x(t_k^+) = b_k x(t_k) \quad , \quad x'(t_k^+) = c_k x'(t_k) & \quad k = 1, 2, ... \end{cases}$$

şeklinde tanımlı ikinci mertebeden sıçramalı gecikmeli lineer diferensiyel denklem için salınımlılık şartı verilmiştir. Dördüncü bölümün ilk kısmında,

$$\begin{cases} \Delta_\rho x(t) + \sum\limits_{i \in I} p_i(t) x(t-\tau_i) = 0 & , t \in [t_0, \infty) \backslash \{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}} \\ \Delta x(\theta_n) + q_n x(\theta_n) = 0 & , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

şeklindeki sürekli değişkenli sıçramalı gecikmeli fark denkleminin çözümlerinin salınımlılık davranışı, bu denkleme uygun sıçramalı olmayan gecikmeli fark denklemleri ve sıçramalı olmayan gecikmeli diferensiyel denklemler ile karşılaştırılarak incelenmiştir. Dördüncü bölümün ikinci kısmında ise,

$$\begin{cases} \Delta_\rho x(t) + p(t)x(t-\tau) + q(t)x(t+\sigma) = 0 & , t \in [t_0, \infty) \backslash \{\theta_k\}_{k \in \mathbb{N}} \\ \Delta x(\theta_k) + \lambda_k x(\theta_k) = 0 & , k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

şeklindeki sürekli değişkenli karışık tipli sıçramalı gecikmeli fark denkleminin çözümlerinin salınımılık davranışı çalışılmıştır.

2010, 65 sayfa

Anahtar Kelimeler: Sıçrama, Sıçramalı diferensiyel denklem, Sürekli değişken, Sürekli değişkenli sıçramalı gecikmeli fark denklemi, Karışık tipli fark denklemi.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

OSCILLATORY BEHAVIOUR OF SOLUTIONS OF IMPULSIVE DELAY EQUATIONS

Sermin ÖZTÜRK

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Özkan ÖCALAN

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction and provides a generel knowledge about the existing literature. In the second chapter, we give some basic definitions and preliminary results that will be used in further sections. In the third chapter, we offer a oscillatory condition for the second order impulsive delay linear differential equation given by

$$\begin{array}{ll} (a(t)x'(t))' + p(t)x(t-\tau) = 0 & ,t \geq t_0 \quad , \quad t \neq t_k \\ x(t_k^+) = b_k x(t_k) \quad , \quad x'(t_k^+) = c_k x'(t_k) & k = 1, 2, ... \end{array}$$

is given. In the fourth chapter, we investigate the oscillatory behaviour of the solutions of the following impulsive delay difference equations with continuous arguments:

$$\begin{cases} \Delta_\rho x(t) + \sum\limits_{i \in I} p_i(t)x(t-\tau_i) = 0 & , t \in [t_0, \infty) \backslash \{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}} \\ \Delta x(\theta_n) + q_n x(\theta_n) = 0 & , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

by making comparison with appropriate nonimpulsive delay difference and differential equations. Also, the oscillatory behaviour of solutions of the mixed type impulsive delay difference equation with continuous arguments

$$\begin{cases} \Delta_\rho x(t) + p(t)x(t-\tau) + q(t)x(t+\sigma) = 0 & , t \in [t_0, \infty) \backslash \{\theta_k\}_{k \in \mathbb{N}} \\ \Delta x(\theta_k) + \lambda_k x(\theta_k) = 0 & , k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

is studied.

2010, pages 65

Key Words : Impulse, Impulsive differential equation, Continuous argument, Delay impulsive difference equation with continuous argument, Mixed type difference equation.

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca titiz çalışma prensibiyle bana örnek olan ve yol gösteren, çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan, engin bilgilerinden ve tecrübelerinden faydalandığım, ufkumu genişleten danışman hocam Sayın Doç. Dr. Özkan ÖCALAN 'a, tezimin her safhasında yanımda olan ve değerli yardımlarını benden esirgemeyen arkadaşım Arş. Gör. Başak KARPUZ 'a, eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen aileme, gösterdiği sabır ve anlayışla her zaman yanımda olan sevgili eşim Hakan ÖZTÜRK 'e ve canım oğlum Efe Kağan ÖZTÜRK 'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Sermin ÖZTÜRK

SİMGELER DİZİNİ

E	Kaydırma operatörü
Δ	İleri fark operatörü
$\prod$	Çarpım sembolü
$\sum$	Toplam sembolü
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar
$\mathbb{N}$	$\{0, 1, 2, ...\}$
$\mathbb{N}_a$	$\{a, a+1, a+2, ...\}$
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar
$\mathbb{R}^-$	Negatif reel sayılar
Δ_ρ	ρ adım aralıklı ileri fark operatörü
θ_i	i. sıçrama noktası
I	Doğal sayıların sınırlı bir alt cümlesi
$\mathbb{E}_{t_0}$	t_0 başlangıç noktası için başlangıç fonksiyonu

İÇİNDEKİLER

1 GİRİŞ

Birçok fiziksel süreçte zamanın belirli anında veya anlarında impulslar; yani, sıçramalar gözlenir. Örneğin; birleşik elemanlarda veya malzemelerde sıcaklık dağılımı ve ısı geçişi bu tür süreçlerdendir. Bu tür fiziksel olayların matematiksel modeli denklem şeklinde ifade edildiğinde ortaya sıçramalı (impulsive) denklemler çıkar.

Doğada birçok değişim ve gelişim süreci belli zamanlardaki kesin durum değişiklikleriyle karakterize edilir. Adi sıçramalı denklemler teorisinin gelişmesinin asıl sebebi budur. Sıçramalı denklemler, adi denklemlerin yeni bir dalıdır. Bu denklemlerin incelenmesi, sıçramalı olmayan adi denklemlere göre çok daha yavaştır. Bunun sebebi sıçramalı denklemlerin özelliklerinde ortaya çıkan büyük güçlüklerdir. Örneğin; çözümlerin dallanması, füzyonu ve özerkliğini kaybetmesi gibi.

Zamanın belli bir anında ya da anlarında sıçramalar içeren bir fiziksel olay sıçramalı diferensiyel denklemleri içerir. Sıçramalı diferensiyel denklemler, teorisindeki yukarıda belirttiğimiz güçlüklere rağmen fizikte, nüfus dinamiğinde, biyoloji ve ekonomi gibi alanlarda önemli uygulama alanına sahiptir. Çünkü, sıçramasız diferensiyel denkleme kıyasla çok daha zengindir. Bunlarla birlikte bu denklemler bazı gerçek yaşam olgularının matematiksel modellerinin doğal çatılarını ifade eder. Dolayısıyla, sıçramalı diferensiyel denklemleri içeren problemleri incelemek teorik bakımdan olduğu kadar uygulama açısından da gereklidir. Bu yüzden yirmi yılı aşkın süredir sıçramalı denklemler inceleme konusu olmuştur.

Bir sıçramalı diferensiyel denklem sisteminin matematiksel modeli

$$\begin{cases} x'(t) & = & f(t, x(t)) & , & t \neq t_k \\ \Delta x(t_k) & = & \mathcal{I}_k(x(t_k)) & , & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{1.1}$$

şeklindedir. Burada, $f : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık bir alt cümle, $\mathcal{I}_k : \Omega \to \Omega$, $\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-)$ olup $x(t_k^+) = \lim_{t \to t_k^+} x(t)$ ve $x(t_k^-) = \lim_{t \to t_k^-} x(t)$ dir. (1.1) sisteminin $x(t)$ çözümünün $k \in \mathbb{Z}$ için $t = t_k$ noktalarında soldan sürekli yani, $x(t_k^-) = x(t_k)$ olduğu kabul edilmektedir. Ayrıca $k \in \mathbb{Z}$ için $\{t_k\}$ artan bir dizi yani her $k \in \mathbb{Z}$ için $t_k < t_{k+1}$ ve $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$ dur.

Bir gecikmeli diferensiyel denklem, $\tau(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olmak üzere $\lim\limits_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$ ve $\tau(t) < t$ koşulları sağlanmak üzere

$$x'(t) = f(t, x(t), x(\tau(t))) \tag{1.2}$$

şeklindeki denklemlerdir. Yani bu tür denklemler, bilinmeyen bir fonksiyon ve onun en yüksek mertebeden türevi hariç diğer türevlerinin bir ya da daha çok gecikme değişkenlerine bağlı olduğu bir diferensiyel denklemdir. Buradan da görüldüğü gibi $x'(t)$ nin değişim oranı yalnızca $x(t)$ değerine değil aynı zamanda $x(\tau(t))$ değerine de bağlıdır.

$$x'(t) + x(t-2) - x(t - \frac{1}{2}) = 0$$

$$x'(t) + x(t-5) - 4 = 0$$

$$x''(t) - 2x'(t) + 3x(t - \frac{3}{2}) = 1$$

$$x''(t) - 3x'(t - \sin^2 t) - x(\frac{t}{3}) + t = 1$$

şeklindeki denklemler birer gecikmeli diferensiyel denklemlerdir.

Gecikmeli denklemler ile ilgili çalışmalar literatüre ilk olarak 1770 yılından sonra girmiştir. Fakat, gecikmeli diferensiyel denklemler ile ilgili sistematik ve önemli çalışmalar daha çok son 60 yılın ürünleridir. Gecikmeli diferensiyel denklemler fizik, biyoloji ve ekonomi gibi pek çok alanda ortaya çıkan birçok problemin çözümünde rol oynarlar. Bu nedenle, bu konu hakkında son yıllarda birçok kitap yazılmıştır (Györi ve Ladas 1991, Gopalsamy 1992).

Sıçramalı denklemler teorisi son yıllarda hızla gelişmesine rağmen, sıçramalı gecikmeli denklemler teorisi alanında çok fazla çalışma yoktur. Özellikle salınım anlamında şimdiye kadar çok az sayıda çalışma yapılmıştır.

Sıçramalı gecikmeli diferensiyel denklemler, davranışları daha önceki davranışlarına dayanan gerçek dünya simülasyon süreçlerinin ifadesinde kullanılır. Bu olaylardaki davranışlar, kısa zamanda bozulmaya uğrayan yapıları ele alır. Bu tür süreçler; optimal kontrol, teorik fizik, popülasyon dinamikleri, ekoloji, biyoteknoloji ve ekonomi teorilerinde ortaya çıkar. Eğer (1.2) denklemi ile ifade edilen bir reel süreç zamanın belli anlarında sıçramalar içeriyorsa bu süreç

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(\tau(t))) \quad , \ t \in [t_0, \infty) \backslash \{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \\ \Delta x(t)|_{t=t_k} = \mathcal{I}_k\left(x(t_k)\right) \\ x(t) = \phi(t) \quad , \quad t \in \mathbb{E}_{t_0} \quad , \ x(t_0^+) = x_0 \end{cases}$$

şeklinde bir denklem ile verilebilir. Burada, $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $\mathcal{I}_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tau : [t_0, \infty) \to [t_0, \infty)$ sürekli bir fonksiyon, $\tau(t) < t$, $\mathbb{E}_{t_0} = t_0 \cup \{t : \tau(t) < t, t \geq t_0\}$, t_0 başlangıç noktası olmak üzere başlangıç kümesi ve t_k sıçrama noktalarıdır. İşte, bu tür denklemlere sıçramalı gecikmeli diferensiyel denklemler denir.

Sıçramalı gecikmeli diferensiyel denklemler ile ilgili ilk çalışma K. Gopalsamy ve B. G. Zhang tarafından 1989 yılında yapılmıştır. Bu çalışmada, b_i $(i = 1, 2, ...)$ reel sabitler, a pozitif bir sabit, $\tau \geq 0$ reel sabit ve $0 < t_1 < t_2 < ... < t_i < ...,$ $\lim\limits_{i \to \infty} t_i = \infty$ olmak üzere,

$$x'(t) + a x(t - \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x(t_i^-) \delta(t - t_i) \quad , \quad t \neq t_i$$

şeklinde birinci mertebeden sıçramalı gecikmeli diferensiyel denkleminin sıfır çözümünün asimptotik kararlılığı ve

$$\begin{cases} x'(t) + p(t) x(t - \tau) = 0 \quad , \quad t \neq t_i \\ x(t_i^+) - x(t_i^-) = b_i x(t_i^-) \quad , \quad t = t_i \end{cases} \tag{1.3}$$

sıçramalı gecikmeli diferensiyel denkleminin salınımlı ve salınımsız çözümlerin varlığı için yeter koşullar elde edilmiştir.

Daha sonra Y. Zhang, A. Zhao ve J. Yan, 1997 yılında yaptıkları çalışmalarında, K.Gopalsamy ve B. G. Zhang tarafından incelenen (1.3) denklemi için verilen salınımlılık kriterine bir ters örnek vererek doğru olmadığını göstermiş ve aynı denklem için yeni salınımlılık kriteri elde etmişlerdir. Bunun dışında, 1996 yılında J. H. Shen, aynı yıl L. Berezansky, E. Braverman, 1997 yılında A. Domoshnitsky, M. Drakhlin, ve yine aynı yıl Y. Zhang, A. Zhao, J. Yan gibi birçok matematikçi sıçramalı gecikmeli diferensiyel denklemlerin salınımlılığını çalışmışlardır.

Fark denklemleri ile zamana bağlı çeşitli doğa olaylarının incelenmesinin, doğal bir ifadesi olarak karşılaşılmaktadır. Zamana bağlı değişkenlerin kullanıldığı olayların çoğu ayrık (kesitli) olduğundan bu tür denklemler önemli matematiksel modelleri oluştururlar. Daha da önemlisi fark denklemleri, diferensiyel denklemler için ayrıklaştırma (discretization) metodlarının incelenmesinde de karşımıza çıkar. Fark denklemleri teorisinde elde edilen pek çok sonuç hemen hemen bunlara karşılık gelen diferensiyel denklemlerin ayrık benzerleridir. Bununla birlikte, fark denklemler teorisi, buna karşılık gelen diferensiyel denklemler teorisinden daha zengindir. Fark denklemleri teorisinin uygulamaları, kontrol teorisinde kararlılık durumunun incelenmesinde, biyolojide canlı populasyon sayısının araştırılmasında, ekonomide borsa hareketlerinin izlenmesinde, tıp biliminde hücre hareketlerinin incelenmesinde ve bir çok bilim dalında kullanılmaktadır.

Sürekli değişkenli fark denklemleri bilinmeyeni, sürekli değişkenli bir fonksiyon olan fark denklemleridir. Fark denklemleri terimi, genellikle ayrık değişkenli fark denklemleri için kullanılır. Uygulamada, sürekli değişkenli fark denklemlerinde bağımsız değişken zaman ifade etmek için kullanılır. Bu gerçeği gözönüne alarak, sürekli değişkenli fark denklemleri sürekli zamanlı fark denklemleri olarak adlandırılabilir. Sürekli değişkenli fark denklemleri doğal bilimlerin birçok dalında incelenen evrim sürecinin doğal tanımlamaları olarak ortaya çıkar (Sharkovsky, Maistrenko, ve Romanenko 1993, Ladas 1991). Sürekli değişkenli fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı birçok yazar tarafından çalışılmıştır (Domshlak 1993, Shen 1996, Yan ve Zhang 1999, Shen 2000, Zhang, Yan, ve Choi 1998, Ladas, Pakula ve Wang 1992, Shen 2000).

Sıçramalı gecikmeli fark denklemleri ilk kez D. D. Bainov ve arkadaşları tarafından 1994 yılında çalışılmıştır. Bu çalışmada, sıçramalı fark denklemlerinin çözümlerinin kararlılığını, 1995 yılında yaptıkları çalışmalarında bu tür denklemlerin çözümlerin asimptotik kararlılığını, 2000 yılında ise ikinci mertebeden sıçramalı diferensiyel-fark denklemlerinin sınırlı çözümlerinin salınımlılığı konusunu incelemişlerdir. G. Wei ise 1999 yılında sıçramalı gecikmeli fark denklemlerinin salınımlılığı ve salınımlı olmayan çözümlerin varlığı ile ilgili çalışmalar yapmış ve salınımlılık için kriterler elde etmiştir. 2002 yılında M. Peng ikinci mertebeden lineer olmayan sıçramalı gecikmeli neutral fark denklemlerinin salınımlılık teoremlerini ispatlamış ve daha sonra 2003 yılında ikinci mertebeden sıçramalı gecikmeli fark denklemlerinin salınımlılığı için kriterler vermiştir.

Fark denklemleri, sürekli değişkenli fark denklemleri ve sıçramalı gecikmeli fark denklemleri yukarıda da belirttiğimiz gibi birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Ancak, bildiğimiz kadarıyla sürekli değişkenli sıçramalı gecikmeli fark denklemleri ile ilgili çalışmalara literatürde 2005 yılına kadar rastlanmamıştır. Sürekli değişkenli sıçramalı gecikmeli fark denklemleri ile ilgili yapılan ilk çalışma J. Shen ve G. Wei tarafından 2005 yılında yapılan çalışmadır. Bu çalışmada, $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, b_k sabitler r pozitif bir tamsayı ve $p(t) \geq 0$, $[t_0 - \tau, \infty)$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} x(t+\tau) - x(t) + p(t)x(t - r\tau) = 0 & , t \geq t_0 - \tau \quad , \quad t \neq t_k \\ x(t_k + \tau) - x(t_k) = b_k x(t_k) & , t \in N(1) \end{cases}$$

dekleminin salınımlılığı için yeter şartlar verilmiştir. Burada, herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ için $N(a) = \{a, a+1, ...\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$ olmak üzere $0 < t_1 < t_2 < ... < t_k < ...$ ve $t, \tau \in \mathbb{R}$, $r \in N(1)$ için $N(t - r\tau, t - \tau) = \{t - r\tau, t - (r-1)\tau, ..., t - \tau\}$ ile tanımlıdır. 2005 yılından bu yana, sürekli değişkenli sıçramalı gecikmeli fark denklemleri çok az yazar tarafından çalışılmıştır.

Yukarıdaki bilgilerin ışığı altında; bu doktora tez çalışmasında sıçramalı gecikmeli fark denklemleri ve sıçramalı gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılık davranışı incelenmiştir.

İkinci bölümde, sıçramalı gecikmeli denklemler, sıçramalı gecikmeli diferensiyel denklemler ve sürekli değişkenli sıçramalı gecikmeli fark denklemleri ile ilgili temel tanım ve teoremler tanıtılmış ve şimdiye kadar bu konularda yapılan bazı çalışmalar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, $a(t) \in C([t_0,\infty),(0,\infty))$ ve $p(t) \in C([t_0,\infty),\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\begin{cases} (a(t)x'(t))' + p(t)x(t-\tau) = 0 & , t \geq t_0 \quad , \quad t \neq t_k \\ x(t_k^+) = b_k x(t_k) \quad , \quad x'(t_k^+) = c_k x'(t_k) & \quad k = 1,2,... \end{cases}$$

şeklinde ikinci mertebeden sıçramalı gecikmeli lineer diferensiyel denklemi için salınımlılık şartı verilmiştir. Burada, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$ olmak üzere $0 < t_1 < t_2 < ... < t_k < ...$, $\{b_k\}$ ve $\{c_k\}$ pozitif reel sayı dizileri ve

$$x'(t_k) = x'(t_k^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{x(t_k+h) - x(t_k)}{h}$$

$$x'(t_k^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{x(t_k+h) - x(t_k^+)}{h}$$

dır.

Dördüncü bölümün ilk kısmında, $t_0 \in \mathbb{R}$, I, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin sınırlı bir alt cümlesi, $p_i \in C([t_0,\infty),[0,\infty))$, her $i \in I$ için $\tau_i \in [\rho,\infty)$, $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (-\infty,1)$ ve $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [t_0,\infty)$ sıçrama noktalarının artan sınırsız bir dizisi olmak üzere,

$$\begin{cases} \Delta_\rho x(t) + \sum\limits_{i\in I} p_i(t)x(t-\tau_i) = 0 & , t \in [t_0,\infty)\backslash\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \\ \Delta x(\theta_n) + q_n x(\theta_n) = 0 & , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

şeklindeki sürekli değişkenli sıçramalı gecikmeli fark denkleminin çözümlerinin salınımlılık davranışı, bu denkleme uygun sıçramalı olmayan gecikmeli fark denklemleri ve sıçramalı olmayan gecikmeli diferensiyel denklemler ile karşılaştırılarak incelenmiştir. Burada, $\rho \in (0,\infty)$ ve her $t \in [t_0,\infty)$ için $\Delta_\rho x(t) = x(t+\rho) - x(t)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\Delta x(\theta_n) = x(\theta_n^+) - x(\theta_n^-)$ ve $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (-\infty,1)$ dir. $x(\theta_n^+)$, bazı $n \in \mathbb{N}$ için, x in θ_n sıçrama noktasındaki sağdan limitini, $x(\theta_n^-)$ ise x in, θ_n sıçrama noktasındaki soldan limitini göstermektedir.

Dördüncü bölümün ikinci kısmında ise, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{R}^+$, p, $q \in C([t_0,\infty),\mathbb{R})$, τ,

$\sigma \in [0, \infty)$, $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset (-\infty, 1)$ ve $\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [t_0, \infty)$ sıçrama noktalarının sınırsız artan bir dizisi olmak üzere,

$$\begin{cases} \Delta_\rho x(t) + p(t)x(t-\tau) + q(t)x(t+\sigma) = 0 & , t \in [t_0, \infty)\backslash\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \\ \Delta x(\theta_k) + \lambda_k x(\theta_k) = 0 & , k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

şeklindeki sürekli değişkenli karışık tipli sıçramalı gecikmeli fark denkleminin çözümlerinin salınımılık davranışı, bu denkleme uygun sıçramalı olmayan karışık tipli gecikmeli fark denklemleri ve sıçramalı olmayan karışık tipli gecikmeli diferensiyel denklemler ile karşılaştırılarak incelenmiştir. Burada, her $t \in [t_0, \infty)$ için $\Delta_\rho x(t) = x(t+\rho) - x(t)$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\Delta x(\theta_k) = x(\theta_k^+) - x(\theta_k)$ ve $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset (-\infty, 1)$ dir.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamız için gerekli olacak bilinen bazı temel kavramlar verilecektir.

2.1 Sıçramalı Gecikmeli Diferensiyel Denklemler

Tanım 2.1.1. Bir sıçramalı diferensiyel denklem sistemi

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)) \quad , \quad t \neq t_k \\ \Delta x(t_k) &= \mathcal{I}_k(x(t_k)) \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{2.1}$$

şeklindedir. Burada, $f : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık bir alt cümle, $\mathcal{I}_k : \Omega \to \Omega$, $\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-)$ olup $x(t_k^+) = \lim_{t \to t_k^+} x(t)$ ve $x(t_k^-) = \lim_{t \to t_k^-} x(t)$ dir (Lakshmikantham, Bainov ve Simeonov 1989).

Tanım 2.1.2. Bir sıçramalı diferensiyel denklemin çözümleri, sonlu ya da sonsuz sayıda noktada parçalı süreklidir ve bunların dışındaki her noktada sürekli fonksiyonlardır. İşte bu şekildeki süreksizlik noktalarına sıçrama (impulse) noktaları denir. Sıçrama noktaları literatürde genellikle $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere θ_k veya t_k ile gösterilir.

Tanım 2.1.3. (2.1) sistemi

$$x(t_0^+) = x_0 \tag{2.2}$$

başlangıç koşulu ile birlikte gözönüne alınsın. $\alpha > 0$ olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan bir $x : [t_0, t_0 + \alpha) \to \mathbb{R}^n$, fonksiyonuna (2.1)-(2.2) başlangıç değer probleminin çözümüdür denir.

i. $x(t_0^+) = x_0$ ve $t \in [t_0, t_0 + \alpha)$ için $(t, x(t)) \in \Omega$ dir.

ii. $t \in [t_0, t_0 + \alpha)$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $t \neq t_k$ noktalarında $x(t)$ sürekli ve diferensiyellenebilir olup $x'(t) = f(t, x(t))$ sağlanır,

iii. $t = t_k$ noktalarında x soldan sürekli olup $x(t_k^+) = x(t_k) + \mathcal{I}_k(x(t_k))$ dir.

Eğer $t_0 \neq t_k$ ise, bu durumda (2.2) başlangıç koşulu

$$x(t_0) = x_0$$

ile ifade edilir (Lakshmikantham, Bainov ve Simeonov 1989).

Tanım 2.1.4.

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t), x(t-\tau)) \quad , \quad t > 0 \\ x(t_0) &= \varphi_0(t) \quad , \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

başlangıç değer problemini çözmek için kullanılan metoda basamak metodu denir. Bu metodta, $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$ için $t - \tau$, $[t_0 - \tau, t_0]$ aralığında olacağından f fonksiyonunun içindeki üçüncü değişken $x(t-\tau) = \varphi_0(t-\tau)$ dur. Bu nedenle önce

$$x'(t) = f(t, x(t), \varphi_0(t-\tau)) \quad , \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \tau \quad , \quad x(t_0) = \varphi(t_0)$$

gecikmesiz denkleminden sürekli x çözümü bulunur. $[t_0, t_0 + \tau]$ aralığında (2.3) başlangıç değer probleminin çözümünün $x = \varphi_1(t)$ olduğu varsayılırsa, benzer şekilde

$$\begin{array}{lll} x'(t) = f(t, x(t), \varphi_1(t-\tau)) & , \ t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + 2\tau & , x(t_0 + \tau) = \varphi_1(t_0 + \tau) \\ \quad \ldots & \quad \ldots & \quad \ldots \\ x'(t) = f(t, x(t), \varphi_n(t-\tau)) & , \ t_0 + n\tau \leq t \leq t_0 + (n+1)\,\tau & , \ x(t_0 + n\tau) = \varphi_n(t_0 + n\tau) \end{array}$$

elde edilir. Burada, $\varphi_j(t)$, $t_0 + (j-1)\,\tau \leq t \leq t_0 + j\tau$ aralığında (2.3) başlangıç değer probleminin çözümüdür (El'sgol'ts 1966).

Örnek 2.1.1.

$$\begin{aligned} x'(t) &= 6x(t-1) \quad , \quad \tau > 0 \\ x &= t \quad , \quad 0 \leq t \leq 1 \end{aligned} \tag{2.4}$$

gecikmeli diferensiyel denkleminin $(1,3]$ aralığındaki çözümünü bulalım. Basamak metodu kullanılırsa,

$$x'(t) = 6x(t-1) \quad , \quad 1 \leq t \leq 2 \quad , \quad x(1) = 1$$

dir. Bu son eşitlik integrallenirse

$$x(t) = 3(t-1)^2 + 1 \quad , \quad 1 \leq t < 2$$

elde edilir. $2 \leq t \leq 3$ için

$$x'(t) = 6\left[3(t-2)^2 + 1\right] \quad , \quad x(2) = 4$$

olur. Bu son eşitlikte her iki tarafın integrali alınırsa

$$x(t) = 6(t-2)^3 + 6t - 8 \quad , \quad 2 \leq t \leq 3$$

elde edilir. Böylece (2.4) başlangıç değer probleminin çözümü

$$x(t) = \begin{cases} 3(t-1)^2 + 1, & t \in [1,2) \\ 6(t-2)^3 + 6t - 8, & t \in [2,3] \end{cases}$$

şeklinde olur.

Örnek 2.1.2. Birinci mertebeden skaler

$$\begin{cases} x'(t) = 1 & , \quad t \neq \theta_i \\ \Delta x(\theta_i) = x(\theta_i) & , \quad i = 1,2,3 \end{cases}$$

sıçramalı diferensiyel denklemi

$$x(0) = 0$$

başlangıç koşulu ile birlikte gözönüne alınsın. Bu denklemin $[0,4]$ aralığı üzerindeki çözümü basamak metodu ile aşağıdaki şekilde bulunabilir.

$[0,1]$ üzerinde yukarıdaki başlangıç değer probleminin çözümü

$$x(t) = t$$

dir. Verilen sıçrama koşulundan

$$x(1^+) = 2$$

olup denklemin çözümü $t \in (1,2]$ için

$$x(t) = t + 1$$

dir. Yine sıçrama koşulundan

$$x(2^+) = 6$$

olur. Dolayısıyla problemin $t \in (2,3]$ aralığındaki çözümü

$$x(t) = t + 4$$

olur. Sıçrama koşulundan

$$x(3^+) = 14$$

olur. Dolayısıyla $t \in (3,4]$ aralığındaki çözüm

$$x(t) = t + 11$$

elde edilir. Böylece problemin $t \in [0,4]$ aralığı üzerindeki çözümü

$$x(t) = \begin{cases} t & , \quad t \in [0,1] \\ t+1 & , \quad t \in (1,2] \\ t+4 & , \quad t \in (2,3] \\ t+11 & , \quad t \in (3,4] \end{cases}$$

dir.

Tanım 2.1.5. Bir diferensiyel denklemin aşikar olmayan bir çözümü x olsun. Eğer x çözümünün keyfi sayıda sıfırları varsa, yani; $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$ olacak şekilde bir $\{t_n\}$ dizisi vardır öyleki $x(t_n) = 0$ ise x çözümüne salınımlıdır denir. Aksi taktirde salınımlı değildir denir. Bir salınımlı olmayan çözüm, ya ergeç pozitif yada ergeç negatiftir. Yani; $\forall t > t_1$ için $x(t) \neq 0$ olacak şekilde bir t_1 vardır. Eğer denklemin her çözümü salınımlı ise denkleme salınımlıdır, en az bir salınımlı olmayan çözüm varsa denkleme salınımlı değildir denir (Ladde, Lakshmikantham ve Zhang 1987).

Tanım 2.1.6. Aşikar olmayan bir x çözümü T herhangi bir sayı olmak üzere (T, ∞) aralığında işaret değiştiriyorsa x e salınımlıdır denir (Ladde, Lakshmikantham ve Zhang 1987).

Eğer buradan dikkat edilirse, yukarıda verilen Tanım 2.1.5, Tanım 2.1.6 dan daha genel bir tanımdır. Örneğin, $x(t) = 1 - \sin t$ fonksiyonu Tanım 2.1.5 e göre salınımlı olmasına rağmen, Tanım 2.1.6 ya göre salınımlı değildir.

Bazı salınımlılık durumları gecikmelerle oluşur. Örnek olarak,

$$\begin{aligned} x'(t) + x(t) &= 0 \\ x''(t) - x(t) &= 0 \end{aligned}$$

diferensiyel denklemleri salınımlı olmamasına rağmen,

$$\begin{aligned} x'(t) + x(t - \frac{\pi}{2}) &= 0 \\ x''(t) - x(t - \pi) &= 0 \end{aligned}$$

gecikmeli diferensiyel denklemlerinin çözümleri sırasıyla $x = \sin t$ ve $x = \cos t$ olduğundan salınımlıdır (Ladde, Lakshmikantham ve Zhang 1987).

Teorem 2.1.1. $p, \tau \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$x'(t) + p\ x(t - \tau) = 0 \tag{2.5}$$

denklemi gözönüne alınsın. O halde aşağıdaki ifadeler denktir.

i. (2.5) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

ii. $p\tau > \dfrac{1}{e}$ dir (Györi ve Ladas 1991).

Teorem 2.1.2. $i = 1, 2, ..., n$ için $p_i \in \mathbb{R}$ ve $\tau_i \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $p_i, \tau_i \geq 0$ olsun. O halde

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i x(t - \tau_i) = 0$$

denkleminin her çözümünün salınımlı olması için yeter koşul

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \tau_i > \frac{1}{e}$$

olmasıdır (Györi ve Ladas 1991).

Teorem 2.1.3. $P \in C\left[[t_0, \infty), \mathbb{R}^+\right]$, $\tau > 0$ ve

$$\int_{t-\tau}^{t} P(s) ds \leq \frac{1}{e}, \quad t \geq t_0 \text{ için} \tag{2.6}$$

olsun. O halde

$$x'(t) + P(t)\ x(t - \tau) = 0 \quad , \quad t \geq t_0 \tag{2.7}$$

denklemi bir pozitif çözüme sahiptir. Eğer $P(t)$, p gibi bir sabit ise (2.7) denklemi

$$x'(t) + p x(t - \tau) = 0 \quad , \quad t \geq t_0 \tag{2.8}$$

şeklinde yazılabilir. O halde (2.8) denkleminin bir pozitif çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul (2.6) şartından

$$p\tau e \leq 1$$

olmasıdır (Györi ve Ladas 1991).

Teorem 2.1.4. $i = 1, 2, ..., n$ olmak üzere $p_i, \tau_i \in C\left[[t_0, \infty), \mathbb{R}^+\right]$, $t \geq 0$ için $\tau(t) = \min\limits_{1\leq i\leq n} \{\tau_i(t)\}$ ve $\lim\limits_{t\to\infty} (t - \tau(t)) = \infty$ olsun. O halde

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t)x(t - \tau_i(t)) = 0 \quad , \quad t \geq 0$$

denkleminin her çözümünün salınımlılığı için yeter koşul

$$\limsup_{t\to\infty} \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \sum_{i=1}^{n} p_i(s)ds > 1$$

olmasıdır (Györi ve Ladas 1991).

Teorem 2.1.5. $p, \tau \in C([0, \infty))$, $t \geq 0$ için $p(t) \geq 0$, $\tau(t) < t$ ve $\lim\limits_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$ olsun.

$$\limsup_{t\to\infty} \left[\int\limits_{\tau(t)}^{t} p(s)ds + \sum_{\tau(t)\leq\theta_i<t} b_i \right] > 1$$

şartı sağlanıyorsa

$$\begin{cases} x'(t) + p(t)x(\tau(t)) = 0 & , \quad t \neq \theta_i \\ \Delta x(\theta_i) + b_i x(\theta_i) = 0 \end{cases}$$

denklemi salınımlıdır (Alzabut 1999).

Bir gecikmeli diferensiyel denklemde çözümler salınımlı olmadığı halde, bu denkleme sıçrama koşulu eklenip denklem sıçramalı gecikmeli diferensiyel denkleme dönüştürüldüğünde salınımlı olabilmektedir.

Örnek 2.1.3.

$$x'(t) + x(t - \frac{1}{e}) = 0 \tag{2.9}$$

denklemi gözönüne alınsın. Burada $p = 1$, $\tau = \dfrac{1}{e}$ dir. $p\tau e = 1$ olduğundan Teorem 2.1.3 gereğince (2.9) gecikmeli diferensiyel denklemi salınımlı değildir.

(2.9) denklemi $\Delta x(i) + ex(i) = 0$ şeklinde bir sıçrama koşulu eklenerek incelenirse,

Örnek 2.1.4.

$$\begin{cases} x'(t) + x(t - \frac{1}{e}) = 0 & , \quad t \neq i \\ \Delta x(i) + ex(i) = 0 & , \quad i \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{2.10}$$

sıçramalı gecikmeli diferensiyel denklemi için

$$\begin{aligned} \limsup_{t\to\infty} \left[\int_{\tau(t)}^{t} p(s)ds + \sum_{\tau(t)\leq\theta_i<t} b_i \right] &= \frac{1}{e} + \sum_{t-\frac{1}{e}\leq i<t} e \\ &= \frac{1}{e} + e \\ &= \frac{e^2+1}{e} > 1 \end{aligned}$$

olduğundan Teorem 2.1.5 gereğince (2.10) salınımlıdır.

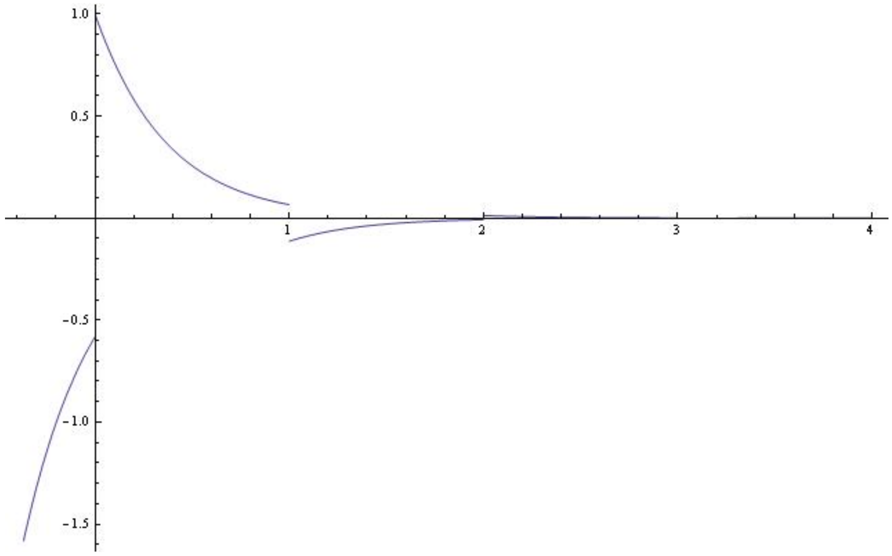
(2.10) denklemi

$$x(0) = 1$$

başlangıç koşulu ile birlikte gözönüne alındığında basamak metodu ile $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(n-1, n]$ üzerindeki çözümünün

$$x(t) = (1-e)^n \, e^{-et} \tag{2.11}$$

olduğu görülebilir. (2.11) çözümünün aşağıda verilen grafik gösteriminden de salınımlı olduğu açıktır.



Tanım 2.1.7.

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(\tau(t)) & , \quad t \notin [t_0, \infty) \setminus \{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \\ \Delta x(t)|_{t=t_k} = \mathcal{I}_k\left(x(t_k)\right) & , \quad k \in \mathbb{N} \\ x(t) = \phi(t) \quad , \quad t \in E_{t_0} & , \quad x(t_0^+) = x_0 \end{cases}$$

şeklindeki denklemlere sıçramalı gecikmeli diferensiyel denklem denir. Burada, $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $\mathcal{I}_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tau : [t_0, \infty) \to [t_0, \infty)$ sürekli bir fonksiyon, $\tau(t) < t$, $E_{t_0} = t_0 \cup \{t : \tau(t) < t, t \geq t_0\}$, t_0 başlangıç noktası olmak üzere başlangıç kümesi ve t_k sıçrama noktalarıdır (Lakshmikantham, Bainov, Simeonov 1989).

Tanım 2.1.8. Bir sıçramalı denklemin aşikar olmayan bir çözümü x olsun. Eğer

$$\lim_{n \to \infty} t_n = \infty \text{ ve } x(t_n)x(t_n^+) \leq 0$$

olacak şekilde bir $\{t_n\}$ dizisi varsa x e salınımlıdır denir. Aksi taktirde salınımlı değildir denir (Lakshmikantham, Bainov ve Simeonov 1989).

Sıçramalı gecikmeli diferensiyel denklemler ile ilgili ilk çalışma K. Gopalsamy ve B. G. Zhang tarafından 1989 yılında yapılmıştır. Bu çalışmada, b_i $(i = 1, 2, ...)$ reel sabitler,

a pozitif bir sabit, $\tau \geq 0$ reel sabit ve $0 < t_1 < t_2 < ... < t_i < ...$, $\lim_{i\to\infty} t_i = \infty$ olmak üzere,

$$x'(t) + ax(t-\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x(t_i^-)\delta(t-t_i) \quad , \quad t \neq t_i \tag{2.12}$$

ve

$$\begin{cases} x'(t) + p(t)x(t-\tau) = 0 & , \quad t \neq t_i \\ x(t_i^+) - x(t_i^-) = b_i x(t_i^-) & , \quad t = t_i \end{cases} \tag{2.13}$$

denklemleri ele alınmış ve bu denklemler için aşağıdaki sonuçlar ispatlanmıştır.

Teorem 2.1.6.

i. p, $[0,\infty)$ üzerinde sürekli ve $t \geq 0$ için $p(t) \geq 0$

ii. $t_{i+1} - t_i \geq T$, $i = 1, 2, ...$

iii. $\tau \geq T$ ise

$$\limsup_{i\to\infty} (1+b_i)^{-1} \int_{t_i}^{t_i+T} p(s)ds > 1 \tag{2.14}$$

$0 < \tau < T$ ise

$$\limsup_{i\to\infty} (1+b_i)^{-1} \int_{t_i}^{t_i+\tau} p(s)ds > 1$$

şartları sağlansın. O halde (2.13) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Teorem 2.1.7.

i. $t_{i+1} - t_i \geq T$, $i = 1, 2, ...$ ve $\tau < T$

ii. $0 \leq b_i \leq M$, $i = 1, 2, ...$

iii. p, $[0,\infty)$ üzerinde sürekli ve $t \geq 0$ için $p(t) \geq 0$

iv.

$$\liminf_{i\to\infty} \int_{t-\tau}^{t} p(s)ds > \frac{1+M}{e}$$

şartları sağlansın. O halde (2.13) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Teorem 2.1.8. Aşağıdaki koşullar sağlansın.

i. $a\tau e \leq 1 - c$, olacak şekilde pozitif bir c sabiti vardır.

ii. $b_i > 0$, $i = 1, 2, ...$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} b_i < \infty$ olsun.

O halde (2.13) denklemi bir salınımlı olmayan çözüme sahiptir.

Daha sonra Y. Zhang, A. Zhao ve J. Yan 1997 yılındaki çalışmalarında K. Gopalsamy ve B. G. Zhang tarafından incelenen (2.13) denklemi için elde edilen (2.14) salınımlılık kriterine aşağıdaki ters örneği vererek doğru olmadığını göstermişlerdir.

Örnek 2.1.5.

$$\begin{cases} x'(t) + p(t)x(t-3) = 0 & , \quad t \neq k \\ x(k^+) - x(k) = b_k x(k) & , \quad k = 1, 2, ... \end{cases} \tag{2.15}$$

sıçramalı gecikmeli diferensiyel denklemi gözönüne alınsın. Burada

$$p(t) = \begin{cases} 20(t - 4k + 1) & , \ t \in \left(4k - 1, 4k - \frac{1}{2}\right] \\ 20(4k - t) & , \ t \in \left(4k - \frac{1}{2}, 4k\right] \\ 0 & , \ t \notin (4k - 1, 4k] \, , \ k = 1, 2, ... \end{cases}$$

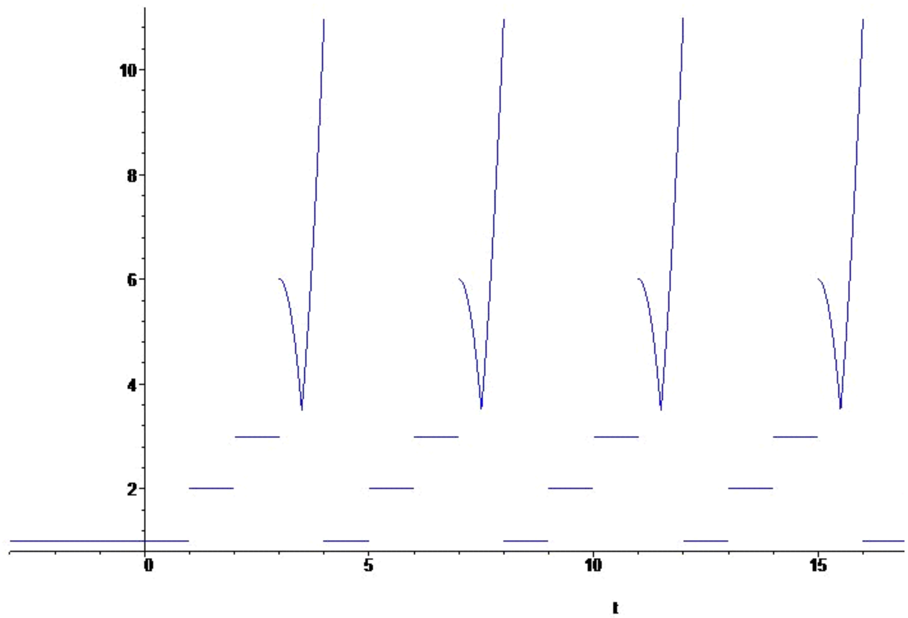
ve $l = 0, 1, 2, ...$ olmak üzere

$$b_k = \begin{cases} 1 & , \ k = 4l + 1 \\ \frac{1}{2} & , \ k = 4l + 2 \\ 1 & , \ k = 4l + 3 \\ 0 & , \ k = 4\,(l + 1)\,, \ l = 0, 1, 2, ... \end{cases}$$

olsun. Buradan görülürki, Teorem 2.1.6. daki (2.14) şartı sağlanır, ancak (2.15) denklemi

$$x(t) = \begin{cases} 1 & , \ t \in [-3, 0] \\ 1 & , \ t \in (4k, 4k + 1] \\ 2 & , \ t \in (4k, 4k + 2] \\ 3 & , \ t \in (4k, 4k + 3] \\ 6 - 10(t - 4k - 3)^2 & , \ t \in \left(4k + 3, 4k + \frac{7}{2}\right] \\ 1 + 10(t - 4k - 4)^2 & , \ t \in \left(4k + \frac{7}{2}, 4k + 4\right]\,, \ k = 1, 2, ... \end{cases}$$

şeklinde bir pozitif çözüme sahiptir.



Yukarıdaki şekilden de görüldüğü gibi (2.15) denklemi salınımlı değildir.

Yine aynı çalışmada yukarıdaki ters örnek verildikten sonra (2.13) denklemi için aşağıdaki salınımlılık kriterini vermişlerdir.

$b_{n_k} \leq 1,\ k = 1, 2, ...$ olacak şekilde $\{n\}$ dizisinin bir $\{n_k\}$ alt dizisi varsa (2.13) denkleminin salınımlı olacağı açıktır. Bu nedenle $b_{n_k} > 1,\ k = 1, 2, ...$ olsun ve aşağıdaki eşitlikler tanımlansın.

$$\begin{aligned}
\alpha(s,t) &:= \begin{cases} \prod\limits_{s<t_k\leq t} \frac{1}{1+b_k} &, \ (s,t] \cap \{t_k\} \neq \emptyset \\ 1 &, \ (s,t] \cap \{t_k\} = \emptyset \end{cases} \\
\beta(s,t) &:= \min\{\alpha(u,t) : u \in (s,t]\} \\
\gamma(t) &:= \min\{\tau, t_k - t : t_k > t\} \\
\overline{b}_k &:= \max\{0, b_k\}
\end{aligned}$$

Teorem 2.1.9. Kabul edelimki,

$$\limsup_{t\to\infty} \beta(t-\tau, t+\gamma(t)-\tau)\ \alpha(t+\gamma(t)-\tau, t) \int\limits_{t}^{t+\gamma(t)} p(s)ds > 1$$

sağlansın. O halde, (2.13) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Sonuç 2.1.1. Kabul edelimki

$i.$ $t_{k+1} - t_k \geq T$, $k = 1, 2, ...$ ve $\tau < T$

$ii.$ $\limsup\limits_{k\to\infty} \beta(t_k - \tau, t_k + T - \tau)\ \alpha(t_k + T - \tau, t_k) \int\limits_{t_k}^{t_k+T} p(s)ds > 1$

sağlansın. Bu durumda (2.13) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Sonuç 2.1.2. Kabul edelimki,

$i.$ $t_{k+1} - t_k \geq \tau$, $k = 1, 2, ...$

$ii.$ $\limsup\limits_{k\to\infty} \frac{1}{1+b_k} \int\limits_{t_k}^{t_k+\tau} p(s)ds > 1$

sağlansın. Bu durumda (2.13) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Sonuç 2.1.3. Kabul edelimki,

$i.$ $t_{k+1} - t_k \geq 2\tau$, $k = 1, 2, ...$

$ii.$ $\limsup\limits_{k\to\infty} \int\limits_{t_k+\tau}^{t_k+2\tau} p(s)ds > 1$

sağlansın. Bu durumda (2.13) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Teorem 2.1.10. Kabul edelimki,

$i.$ $\limsup\limits_{t\to\infty} \prod\limits_{t-\tau<t_k<t} (1 + \bar{b}_k) < +\infty$

$ii.$ $\liminf\limits_{t\to\infty} \int\limits_{t-\tau}^{t} p(s)ds > \dfrac{1}{e} \limsup\limits_{t\to\infty} \prod\limits_{t-\tau<t_k<t} (1 + b_k)$

sağlansın. Bu durumda (2.13) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Sonuç 2.1.4. Kabul edelimki,

$i.$ $b_{n_k} \leq 0$, $k = 1, 2, ...$

$ii.$ $\liminf\limits_{t\to\infty} \int\limits_{t-\tau}^{t} p(s)ds > \dfrac{1}{e}$

sağlansın. Bu durumda (2.13) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Bunun dışında, A. Zhao ve J. Yan 1996 yılındaki çalışmalarında

$$\begin{cases} x'(t) + \sum\limits_{i=1}^{n} p_i(t)x(t-\tau_i) = 0 & , \quad t \neq t_k \\ x(t_k^+) - x(t_k) = b_k x(t_k^-) & , \quad k = 1, 2, ... \end{cases} \tag{2.16}$$

sıçramalı gecikmeli diferensiyel denkleminin salınımlı ve salınımlı olmayan çözümlerinin davranışlarını incelemişler ve aşağıdaki sonuçlara ulaşmışlardır.

Teorem 2.1.11. Aşağıdaki koşullar sağlansın. Yeterince büyük t için

$$\begin{aligned} |p_i(t)| &\leq A \quad , \quad i = 1, 2, ..., n \\ \sum_{i=1}^{n} p_i(t-\tau_i) &\geq B \end{aligned}$$

$$\sum_{\tau_i < r} \int_{t-r}^{t-\tau_i} p_i^-(s-\tau_i)ds + \sum_{\tau_i > r} \int_{t-\tau_i}^{t-r} p_i^+(s-\tau_i)ds \leq \alpha < 1$$

olsun. Burada $b_k^+ = \max\{0, b_k\}$, $p_i^+(s) = \max\{p_i(s), 0\}$ ve $p_i^-(s) = \max\{-p_i(s), 0\}$ dır. Bununla birlikte

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^+ < \infty$$

sağlansın. O halde (2.16) denkleminin her salınımlı olmayan çözümü $t \to \infty$ için sıfıra yakınsar.

Teorem 2.1.12.

$$Q_1 + Q_2 < 1$$

olacak şekilde Q_1 ve Q_2 pozitif sabitleri mevcut olsun. Yeterince büyük t için

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} p_i(t+\tau_i) &\neq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \int_{t-\tau_i}^{t} |p(s+\tau_i)|\, ds &\leq Q_1 \end{aligned}$$

ve $r \in [0, \tau_n]$ için

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{t-r}^{t-\tau_i} \operatorname{sgn}(r-\tau_i)\, |p(s+\tau_i)|\, ds \leq Q_2.$$

sağlansın. Bununla birlikte

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^+ < \infty$$

olsun. Bu durumda (2.16) denkleminin salınımlı her çözümü $t \to \infty$ için sıfıra yakınsar.

Yine J. Yan ve A. Zhao 1998 yılındaki çalışmalarında

$$\begin{cases} y'(t) + \sum\limits_{i=1}^{n} p_i(t) y(t - \tau_i(t)) = 0 & , \quad t \neq t_k \\ y(t_k^+) - y(t_k) = b_k y(t_k^-) & , \quad k = 1, 2, ... \end{cases} \tag{2.17}$$

birinci mertebeden lineer sıçramalı gecikmeli diferensiyel denklemini aşağıdaki şartlar altında incelemişlerdir.

A_1. $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_k < ...$sabit noktalar ve $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$ dur.

A_2. $i = 1, 2, ..., n$ olmak üzere $p_i \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$ ve $\tau_i \in ([t_0, \infty), [0, \infty))$ sürekli fonksiyonlar ve $t \to \infty$ için $t - \tau_i(t) \to \infty$ dur.

A_3. $k = 1, 2, ...$ için $b_k \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ sabitlerdir.

Bu çalışmada (2.17) denkleminin çözümlerinin salınımlılığını p_i τ_i ve b_k yukarıdaki şekilde tanımlı olmak üzere,

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t) \prod_{t-\tau_i(t) \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} x(t - \tau_i(t)) = 0 \tag{2.18}$$

gecikmeli diferensiyel denklem ile karşılaştırarak vermişlerdir.

Teorem 2.1.13. Yukarıda verilen $(A_1) - (A_3)$ koşulları sağlansın. O halde,

i. $x(t, \sigma, \phi)$ (2.18) denkleminin bir çözümü ise $y(t, \sigma, \phi) = \prod\limits_{\sigma \leq t_k < t} (1 + b_k) x(t, \sigma, \phi)$ (2.17) denkleminin bir çözümüdür.

ii. $y(t, \sigma, \phi)$ (2.17) denkleminin bir çözümü ise $x(t, \sigma, \phi) = \prod\limits_{\sigma \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} y(t, \sigma, \phi)$ (2.18) denkleminin bir çözümüdür.

Teorem 2.1.14.

$$b_{k.} > -1 \quad , \quad k = 1, 2, ...$$

olmak üzere $(A_1) - (A_3)$ koşulları sağlansın. Bu durumda (2.17) denkleminin her çözümünün salınımlı olması için gerek ve yeter koşul (2.18) denkleminin her çözümünün salınımlı olmasıdır.

2.2 Sonlu Farklar ve Genel Tanımlar

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere tek değişkenli x_n fonksiyonu için öteleme (shift) operatörü

$$Ex_n = x_{n+1}$$

ve ileri fark operatörü

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$$

ile tanımlanır (Mickens 1990).

$$E^k x_n = x_{n+k}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. $\Delta^k x_n$ yi hesaplamak için I özdeşlik (birim) operatörü olmak üzere $\Delta = E - I$ ve $E = \Delta + I$ ifadelerini kullanabiliriz. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\Delta^k x_n &= (E-I)^k x_n \\
&= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} E^{k-i} x_n \\
&= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} x_{n+k-i}
\end{aligned}$$

ve benzer yolla

$$E^k x_n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^{k-i} x_n$$

olduğu görülür (Elaydi 1999).

Tanım 2.2.1. $n \in \mathbb{N}$ bağımsız değişken ve x_n, $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı reel (veya kompleks) değerli bir fonksiyon olsun.

$$f(x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+k}) = 0 \tag{2.19}$$

şeklindeki bağıntıya (denkleme) k. mertebeden bir fark denklemi denir (Agarwal 2000).

Tanım 2.2.2. Bir fark denkleminin mertebesi, denklemdeki en büyük indis ile en küçük indis arasındaki farktır (Agarwal 2000).

Bir fark denklemini, $k, \sigma \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$F\left(n, x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+k}, x_{n-1}, ..., x_{n-\sigma}\right) = 0$$

şekinde ifade edilebilir.

Tanım 2.2.3. Eğer (2.19) fark denklemi

$$\sum_{i=0}^{k} a_{in} x_{n+i} = b_n \tag{2.20}$$

şeklinde verilen fark denklemine lineerdir denir.

Eğer en az bir $n \in \mathbb{N}$ için b_n sıfırdan farklı ise, bu durumda (2.20) fark denklemine homogen olmayan lineer fark denklemi denir.

Eğer (2.19) fark denklemi

$$\sum_{i=0}^{k} a_{in} x_{n+i} = 0 \tag{2.21}$$

şeklinde verilirse (2.21) fark denklemine homogen lineer fark denklemi denir (Agarwal 2000).

Tanım 2.2.4. p_i ler sabitler ve $p_k \neq 0$ olmak üzere k. mertebeden

$$x_{n+k} + p_1 x_{n+k-1} + ... + p_k x_n = 0 \tag{2.22}$$

fark denkleminde λ^n çözüm kabul edilip denklemde yerine yazılırsa elde edilen

$$\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + ... + p_k = 0$$

denklemine (2.22) fark denkleminin karakteristik denklemi λ değerlerine ise (2.22) fark denkleminin karakteristik kökleri denir. (2.22) fark denkleminin çözümü karakteristik köklerine bağlıdır (Goldberg 1958, Elaydi 1999).

Tanım 2.2.5. Eğer her pozitif N tamsayısı ve $n \geq N$ için $x_n x_{n+1} \leq 0$ ise x_n aşikar olmayan çözümüne sıfır etrafında salınımlıdır denir. Aksi halde x_n çözümüne salınımlı olmayan çözüm denir. Başka bir şekilde ifade edersek, eğer bir x_n çözümü belli bir yerden (n değerinden itibaren) sonra sadece pozitif ya da negatif değilse sıfır etrafında salınımlıdır denir (Györi ve Ladas 1991, Elaydi 1999, Agarwal 2000).

Fark denklemleri ile ilgili yapılan ilk çalışma L. H. Erbe ve B. G. Zhang tarafından 1989 yılında yapılan çalışmadır. Bu çalışmada $n = 1, 2, ...$ ve m bir pozitif tamsayı olmak üzere

$$y_{n+1} - y_n + p_n y_{n-m} = 0 \tag{2.23}$$

şeklindeki fark denklemini incelemişler ve bu denklemin salınımlılığı ve salınımlı olmayan bir çözümün varlığı için aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.1. Kabul edelimki

$$\liminf_{n\to\infty} p_n \equiv c > 0$$

ve

$$\limsup_{n\to\infty} p_n > 1 - c$$

olsun. Ohalde

i.

$$y_{n+1} - y_n + p_n y_{n-m} \leq 0$$

denklemi ergeç pozitif çözüme sahip değildir.

ii.

$$y_{n+1} - y_n + p_n y_{n-m} \geq 0$$

denklemi ergeç negatif çözüme sahip değildir.

iii. (2.23) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Teorem 2.2.2. Kabul edelimki

$$\liminf_{n\to\infty} p_n \equiv c > \frac{m^m}{(m+1)^{m+1}}$$

olsun. O halde Teorem 2.2.1 in sonuçları sağlanır.

Teorem 2.2.3. $p_n \geq 0$ ve

$$\sup p_n < \frac{m^m}{(m+1)^{m+1}}$$

şartları sağlanıyorsa (2.23) denklemi salınımlı olmayan bir çözüme sahiptir.

Daha sonra 1989 yılında K. Gopalsamy, I. Györi ve G. Ladas, yine aynı yıl G. Ladas, Ch. G. Philos ve Y. G. Sficas ve 1990 yılında G. Ladas yaptıkları çalışmalarda gecikmeli fark denklemlerinin salınımlılığı için aşağıdaki salınımlılık kriterlerini elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.4. $p \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olsun. O halde

$$a_{n+1} - a_n + pa_{n-k} = 0, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

denkleminin salınımlı olması için gerek ve yeter koşul

a. $k = -1$ ve $p \leq -1$;

b. $k = 0$ ve $p \geq 1$;

c. $k \in \{..., -3, -2\} \cup \{1, 2, ...\}$ ve $p\dfrac{(k+1)^{k+1}}{k^k} > 1$

şartlarından bir tanesinin sağlanmasıdır.

Teorem 2.2.5. Kabul edelimki

$$p_i \in (0, \infty) \text{ ve } i = 1, 2, ..., m \text{ için } k_i \in \{0, 1, 2, ...\}$$

veya

$$p_i \in (-\infty, 0) \text{ ve } i = 1, 2, ..., m \text{ için } k_i \in \{..., -3, -2, -1\}$$

şartları sağlansın ve

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \frac{(k_i+1)^{k_i+1}}{k_i^{k_i}}$$

olsun. O halde

$$a_{n+1} - a_n + \sum_{i=1}^{m} p_i a_{n-k_i} = 0, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Teorem 2.2.6. $\{p_n\}$ negatif olmayan bir reel sayı dizisi ve k pozitif bir tamsayı ve

$$\liminf_{n \to \infty} \left[\frac{1}{k} \sum_{i=n-k}^{n-1} p_i \right] > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$$

olsun. O halde

$$a_{n+1} - a_n + p_n a_{n-k} = 0, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

fark denkleminin her çözümü salınımlıdır.

2.3 Sürekli Değişkenli Fark Denklemleri

Fark denklemler teorisi, fen bilimlerinin tüm dallarında oldukça zengin uygulamalara sahiptir. Ayrık ve sürekli değişkenli fark denklemleri, lineer olmayan, alışılmışın dışındaki denklemlerin anlaşılmasında önemli bir rol oynar ve bu süreç, çeşitli şekillerde fark sistemlerinde ortaya çıkar. Fark denklemlerinin çözümlerinin ve parametrelerinin değiştirilmesiyle elde edilen dallanmaların davranışlarının çalışılmasında tamamen basit hesaplamalar ve grafik gösterim araçları gerekli olmasına rağmen, karmaşık ve merak uyandıran çok çeşitli dinamik fark denklemleride karşımıza çıkmaktadır.

$n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere her terimi kendisinden önceki ile bağlantılı olan ve $k > 0$ sabiti için,

$$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_{n-k}) \tag{2.24}$$

eşitliği ile tanımlanan bir $x = x_n$ dizisi gözönüne alınsın. Burada bağımsız değişken olan n ayrık (aralıklı) olarak değişir ve (2.24) tipindeki bağıntılar bir ayrık değişken içeren fark denklemleri olarak adlandırılır.

Eğer x, sürekli bir $t \in \mathbb{R}^+$ değişkeninin bir fonksiyonu ise $k, l \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x(t) = f(t, x(t-\tau_2), ..., x(t-\tau_k), x(t+\sigma_1), ..., x(t+\sigma_l))$$

eşitliği sürekli değişkenli fark denklemi olarak adlandırılır.

Şimdiye kadar sürekli değişkenli fark denklemlerinin salınımlılığı ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. G. Ladas, L. Pakula ve Z. Wang 1992 yılındaki çalışmalarında p_1, p_2, τ_1, $\tau_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$y(t) + p_1 y(t-\tau_1) + p_2 y(t-\tau_2) = 0 \tag{2.25}$$

sürekli değişkenli fark denkleminin salınımlılığı için gerek ve yeter koşullar vermişlerdir. (2.25) denkleminde $y(t) = e^{\lambda t}$ çözüm kabul edilirse (2.25) fark denkleminin karakteristik denklemi

$$1 + p_1 e^{-\lambda\tau_1} + p_2 e^{-\lambda\tau_2} = 0 \tag{2.26}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 2.3.1. $p_1,\ p_2,\ \tau_1,\ \tau_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere, aşağıdaki ifadeler denktir.

i. (2.25) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

ii. (2.26) karakteristik denklemi reel köke sahip değildir.

Teorem 2.3.2. $p, q, \tau, \sigma \in (0, \infty)$ ve $\tau < \sigma$ olmak üzere,

$$x(t) - px(t-\tau) + qx(t-\sigma) = 0$$

fark denkleminin salınımlı olması için gerek ve yeter koşul

$$q^{\tau}\sigma^{\sigma} > p^{\sigma}\tau^{\tau}\left(\sigma-\tau\right)^{\sigma-\tau}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Teorem 2.3.3. $i = 1, 2, ..., m$ için $p, q_i, \tau, \sigma_i \in (0, \infty)$ ve $\tau < \sigma_i$ olsun. Eğer

$$\sum_{i=1}^{m} q_i \left[\frac{\sigma_i^{\sigma_i}}{p^{\sigma_i}\tau^{\tau}\left(\sigma_i-\tau\right)^{\sigma_i-\tau}}\right] > 1$$

eşitsizliği geçerli ise

$$x(t) - px(t-\tau) + \sum_{i=1}^{m} q_i x(t-\sigma_i) = 0$$

denkleminin her çözümü salınımlıdır.

1996 yılında J. H. Shen τ, σ, σ_i pozitif sabitler, $\sigma_i > \tau > 0$ ve $p_i(t) \in C\left(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+\right)$ olmak üzere,

$$y(t) - y(t-\tau) + \sum_{i=1}^{m} p_i y(t-\sigma_i) = 0 \tag{2.27}$$

şeklindeki sürekli değişkenli fark denklemlerini, gecikmeli diferensiyel denklemler ile kıyaslayarak aşağıdaki sonuçları vermişlerdir.

Teorem 2.3.4. $i = 1, 2, ..., m$ için $\overline{p}_i(t) = \min\limits_{t-\tau \le s \le t} \{p_i(s)\}$ olsun. Kabul edelimki,

$$x'(t) + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m} \overline{p}_i(t) x(t-\sigma_i+\tau) = 0$$

gecikmeli diferensiyel denklemi salınımlı olsun. O halde, (2.27) denkleminin de her çözümü salınımlıdır.

Teorem 2.3.5. $i = 1, 2, ..., m$ için $\overline{p}_i(t) = \min\limits_{t-\tau \leq s \leq t} \{p_i(s)\}$ olsun. Kabul edelimki, $p_i(t)$ lerin herbiri sürekli ve artmayan fonksiyonlar ve

$$x'(t) + \frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^{m} \left(\int_{t-\tau}^{t} \overline{p}_i(s) ds \right) x(t - \sigma_i + \tau) = 0$$

gecikmeli diferensiyel denkleminin her çözümü salınımlı olsun. O halde (2.27) denkleminin de her çözümü salınımlıdır.

Daha sonra 1998 yılında B. G. Zhang, J. Yan ve S. K. Choi $\sigma > 0$, $\tau > 0$ ve $p(t) \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ olmak üzere,

$$y(t) - y(t - \tau) + p(t)y(t - \sigma) = 0 \tag{2.28}$$

sürekli değişkenli fark denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için yeter şartlar verdikten sonra

$$y(t) - y(t - \tau) + H(y(t - \sigma)) = 0 \tag{2.29}$$

lineer olmayan fark denklemi için bazı salınımlılık kriterleri vermişler ve en sonunda

$$y(t) - y(t - \tau) + p(t)y(t - \sigma) = f(t) \tag{2.30}$$

şeklindeki fark denkleminin salınımlılığı için yeter şartlar elde etmişlerdir.

Ayrıca, $q(t) = \min\limits_{t-\tau \leq s \leq t} \{p(s)\}$ olmak üzere,

$$E = \{\lambda > 0 : 1 - \lambda q(t) > 0\}$$

şeklinde bir reel sayı kümesini tanımlayalım. Buna göre aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 2.3.6.

i. $\limsup\limits_{t\to\infty} q(t) > 0$.

ii. m pozitif bir tamsayı ve $\theta \in [0, \tau)$ olmak üzere $\sigma = m\tau + \theta$ ve

$$\sup_{\lambda \in E, t \geq T} \lambda \prod_{i=1}^{m-1} (1 - \lambda q(t - i\tau)) < 1$$

olacak şekilde bir pozitif T sabiti mevcut olsun. O halde, (2.28) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Teorem 2.3.7. $\sigma > 0$, $\tau > 0$ ve $p(t) \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ ve

$$\liminf_{t\to\infty} \int_t^{t+\sigma} q(s)ds > \frac{\tau}{e}$$

olsun. O halde,

$$y(t) - y(t-\tau) - p(t)y(t+\sigma) = 0$$

denkleminin her çözümü salınımlıdır.

G. P. Wei ve J. H. Shen 2005 yılında yaptıkları çalışmalarında, $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, b_k sabitler r pozitif bir tamsayı ve $p(t) \geq 0$, $[t_0 - \tau, \infty)$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} x(t+\tau) - x(t) + p(t)x(t-r\tau) = 0 & ,t \geq t_0 - \tau \quad , \quad t \neq t_k \\ x(t_k+\tau) - x(t_k) = b_k x(t_k) & ,t \in N(1) \end{cases} \tag{2.31}$$

deklemininin salınımlılığı için yeter şartlar verilmiştir. Burada herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ için $N(a) = \{a, a+1, ...\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$ olmak üzere, $0 < t_1 < t_2 < ... < t_k < ...$ ve $t, \tau \in \mathbb{R}$, $r \in N(1)$ için $N(t - r\tau, t-\tau) = \{t - r\tau, t - (r-1)\tau, ..., t-\tau\}$ ile tanımlıdır.

Teorem 2.3.8.

$i.$ $\limsup\limits_{t\to\infty} \prod\limits_{t_k \in N(t-r\tau, t-\tau)} (1+b_k)^{-1} < \infty$

$ii.$ $\liminf\limits_{t\to\infty} \sum\limits_{\substack{i \in N(t-r\tau, t-\tau) \\ i \notin \{t_k\}}} p(i) \prod\limits_{t_k \in N(t-r\tau, t-\tau)} (1+b_k)^{-1} > \left(\frac{r}{r+1}\right)^{r+1}$

olsun. O halde, (2.31) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Ancak burada Teorem 2.3.8 in ispatında aritmetik ve geometrik ortalama arasındaki eşitsizlik kullanılırken eleman sayısına dikkat edilmemiştir (r tane olduğu varsayılmıştır). Fakat, verilen aralıkta r taneden daha az da sıçrama noktası olabilir. Bu yüzden, yukarıda verilen teoremin ifadesi aşağıdaki şekilde olmalıdır.

Teorem 2.3.9. Kabul edelim ki,

$$i.\ \limsup_{t\to\infty} \prod_{t_k\in N(t-r\tau,t-\tau)} (1+b_k)^{-1} < \infty$$

$$ii.\ \liminf_{t\to\infty} \left(\frac{r_t}{r_t+1}\right)^{r_t+1} \sum_{\substack{i\in N(t-r\tau,t-\tau)\\ i\notin\{t_k\}}} p(i) \prod_{t_k\in N(t-r\tau,t-\tau)} (1+b_k)^{-1} > 1$$

sağlansın. Burada, r_t, $N(t-r\tau, t-\tau)$ içindeki sıçrama noktalarının sayısıdır. O halde, (2.31) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Bunların dışında, B.G. Zhang ve F. Y. Lian 2006 yılında ve G. Cai ve J. Guo 2008 yılında yaptıkları çalışmalarda sürekli değişkenli fark denklemleri için salınımlılık kriterleri vermişlerdir.

Bu çalışmaların hepsinde salınımlılık için elde edilen şartlar Teorem 2.3.8 deki şekilde toplam içeren şartlardır. Bu toplamlı şartlar ayrık değişkenli fark denklemlerinin incelenmesinde de görülmektedir. Yani, buradaki metod daha çok ayrık değişkenli fark denklemlerinde kullanılır. Sürekli değişkenli sıçrama içermeyen fark denklemlerinin incelenmesinde integral dönüşümü kullanılmaktadır ve dolayısıyla integral kriterleri elde edilmektedir. Ancak, bu denklemlere sıçrama koşulu eklendiğinde meydana gelen zorluklardan dolayı integral dönüşümü kullanılamamaktadır. Bu yüzden, sürekli değişkenli sıçramalı fark denklemleri için elde edilen sonuçlar toplam içeren sonuçlardır. Bu zorluklardan biri kısaca şöyle özetlenebilir:

Sürekli değişkenli sıçrama içermeyen fark denklemlerin salınımlılığı incelenirken genelde kullanılan metod,

$$y(t) = \int_{t-\tau}^{t} x(t)$$

şeklinde bir dönüşüm yapılarak diferensiyel denklem arasında ilişki kurulmasıdır. Fakat, denkleme sıçrama koşulu eklendiğinde integral kullanılamamaktadır. Çünkü dönüşüm sonunda, elde edilen yeni denklemin sıçrama noktalarını içerip içermediğini bilemeyiz. Bu nedenle, buradan hareketle diferensiyel denklemlerle ilişki kurmak zordur.

3 İkinci Mertebeden Sıçramalı Gecikmeli Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılığı

Salınım teorisi genellikle aşağıdaki problemler üzerinde yoğunlaşmıştır:

P1. Salınımsız çözümün varlığı için yeter şartlar.

P2. Her çözümün salınımlılığı için yeter şartlar.

Bu iki sonuç için yapılan incelemeler birbirinden farklıdır. İlk problem için bir sabit işaretli çözümün varlığını ispat etmek yeterlidir. Bu durumda çeşitli sabit nokta teoremleri uygulanabilir veya bir salınımsız çözüme yakınsak, monoton bir dizi tanımlanır. İkinci problemin incelenmesinde denklemin bazı çözümleri için karakteristik metodların kullanılması uygun değildir. Bu yüzden ispat çelişki ile verilebilir. Yani, bir salınımlı olmayan çözümün varlığı kabul edilir ve denklemin parametreleri için kabul edilen şartların sağlandığını gösterip çelişki elde edilir.

Birinci mertebeden sıçramalı diferensiyel denklemler ile ilgili birçok çalışma olmasına rağmen yüksek mertebe sıçramalı diferensiyel denklemleri içeren çok az sayıda çalışma vardır. Bunlar arasında, ikinci mertebe sıçramalı adi diferensiyel denklemler üzerine yapılan çalışmalardan birisi Z. Luo ve J. Shen tarafından 2007 yılında yapılan çalışmadır. Bu çalışmada $a \in C\left([t_0,\infty),(0,\infty)\right)$, $p \in C\left([t_0,\infty),\mathbb{R}\right)$, $0 \le t_1 < t_2 < ... < t_k < ...$sabit noktalar ve $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$, $\{b_k\}$ ve $\{c_k\}$ pozitif reel sayı dizileri ve

$$x'(t_k) = x'(t_k^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{x(t_k+h) - x(t_k)}{h}$$

ve

$$x'(t_k^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{x(t_k+h) - x(t_k^+)}{h}$$

olmak üzere,

$$\begin{cases} (a(t)x'(t))' + p(t)x(t) = 0 & , \quad t \ge t_0 \ , \quad t \ne t_k \\ x(t_k^+) = b_k x(t_k) \ , \ x'(t_k^+) = c_k x'(t_k) & , \quad k = 1,2,... \end{cases} \tag{3.1}$$

ikinci mertebeden sıçramalı adi diferensiyel denklemlerin salınımlılığı için aşağıdaki teoremleri vermişlerdir.

Teorem 3.1.1. $k = 1, 2, ...$ için $d_k = c_k / b_k$ olmak üzere

$$\left[\left(\prod_{T \le t_k < t} d_k^{-1}\right) a(t) y'(t)\right]' + \left(\prod_{T \le t_k < t} d_k^{-1}\right) p(t) y(t) = 0 \quad , \quad t > t_0$$

ikinci mertebeden sıçramalı olmayan adi diferensiyel denklemi salınımlı ise (3.1) denklemi de salınımlıdır.

Teorem 3.1.2. $k = 1, 2, ...$ için $b_k = c_k$ olsun. (3.1) denkleminin her çözümünün salınımlı olması için gerek ve yeter koşul

$$(a(t) x'(t))' + p(t) x(t) = 0$$

denkleminin salınımlı olmasıdır.

L. Berezansky ve E. Braverman 1999 yılında yaptıkları çalışmalarında

$$\begin{cases} y''(t) + \sum_{k=1}^{m} a_k(t) y(g_k(t)) \le 0 & , \quad t \ge 0, \quad g_k(t) \le t \\ y(\tau_j) = A_j y(\tau_j - 0) & , \quad j = 1, 2, ... \\ y'(\tau_j) = B_j y(\tau_j - 0) & , \quad j = 1, 2, ... \end{cases} \tag{3.2}$$

şeklinde ikinci mertebeden sıçramalı gecikmeli diferensiyel denkleminin salınımsızlığı için aşağıdaki teoremi vermişlerdir.

Teorem 3.1.3. $k = 1, 2, ..., m$ için $a_k(t) \ge 0$, $j = 1, 2, ...$ için $A_j > 0$, $B_j > 0$ olsun. O halde aşağıdaki ifadeler denktir.

1. $t > t_1$ için (3.2) denklemi bir pozitif çözüme sahip olacak şekilde bir $t_1 \ge 0$ vardır.

2.
$$\begin{aligned} u'(t) &+ \prod_{t_2 < \tau_j \le t} B_j / A_j u^2(t) + \sum_{k=1}^{m} \prod_{t_2 < \tau_j \le t} A_j / B_j \\ &\times \prod_{g_k(t) < \tau_j \le t} A_j^{-1} a_k(t) \exp\left\{ - \int_{g_k(t)}^{t} B_j / A_j u(s) ds \right\} \le 0 \end{aligned}$$

eşitsizliği bir sürekli çözüme sahip olacak şekilde bir $t_2 \ge 0$ vardır.

3. $t > s \ge t_3$ için $X(t, s) > 0$ olacak şekilde bir $t_3 \ge 0$ vardır.

4. $t > t_4$ için

$$\begin{cases} x''(t) + \sum\limits_{k=1}^{m} x(g_k(t)) = 0 & , \quad g_k(t) \leq t \\ x(\tau_j) = A_j x(\tau_j - 0) & , \quad j = 1, 2, ... \\ x'(\tau_j) = B_j x(\tau_j - 0) & , \quad j = 1, 2, ... \end{cases}$$

denklemi bir pozitif çözüme sahip olacak şekilde bir $t_4 \geq 0$ vardır.

Daha sonra, 2004 yılında J. Yan, $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_k < ...$sabit noktalar ve $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$ olmak üzere

$$\begin{cases} y''(t) + a(t)y'(t) + \sum\limits_{i=1}^{n} p_i(t)y(g_i(t)) = 0 & , \quad t \geq 0 \\ y(t_k) - y(t_k^-) = b_k y(t_k^-) \ , \ \ y'(t_k) - y'(t_k^-) = b_k y(t_k^-) & , \quad k = 1, 2, ... \end{cases} \tag{3.3}$$

ikinci mertebeden sıçramalı gecikmeli diferensiyel denklemini aşağıdaki şartlar altında incelemiştir.

A_1. $i = 1, 2, ..., n$ için $a, p_i \in ([0, \infty), \mathbb{R})$ sürekli fonksiyonlardır.

A_2. $i = 1, 2, ..., n$ olmak üzere $g_i \in ([0, \infty), \mathbb{R})$, $g_i(t) \leq t$ sürekli fonksiyonlar ve $\lim\limits_{t\to\infty} g_i(t) = \infty$ dur.

A_3. $k = 1, 2, ...$ için $b_k > -1$ sabitlerdir.

Bu çalışmada (3.3) denkleminin çözümlerinin salınımlılığını p_i g_i ve b_k yukarıdaki şekilde tanımlı olmak üzere

$$x''(t) + a(t)x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t) \prod_{g_i(t) \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} x(g_i(t)) = 0 \tag{3.4}$$

ikinci mertebe sıçramalı olmayan gecikmeli diferensiyel denklem ile karşılaştırarak vermiştir.

Teorem 3.1.4. $(A_1) - (A_3)$ sağlansın.

i. x, (3.4) denkleminin bir çözümü ise $y(t) = \prod\limits_{\sigma \leq t_k < t} (1 + b_k)x(t)$, $[r_\sigma \infty)$ üzerinde (3.3) denkleminin bir çözümüdür.

ii. y, (3.3) denkleminin bir çözümü ise $x(t) = \prod\limits_{\sigma \leq t_k < t} (1 + b_k)^{-1} y(t)$, $[r_\sigma \infty)$ üzerinde (3.4) denkleminin bir çözümüdür.

Teorem 3.1.5. $(A_1) - (A_3)$ sağlansın. Bu durumda (3.3) denkleminin her çözümünün salınımlı olması için gerek ve yeter koşul (3.4) denkleminin her çözümünün salınımlı olmasıdır.

3.1 İkinci Mertebeden Sıçramalı Gecikmeli Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılığı için Elde Edilen Yeni Kriterler

Bu bölümde $a \in C([t_0, \infty), (0, \infty))$, $p \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$ olmak üzere $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_k < ...$ sabit noktalar, $\{b_k\}$ ve $\{c_k\}$ pozitif reel sayı dizileri,

$$y'(t_k) = y'(t_k^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{y(t_k + h) - y(t_k)}{h}$$

ve

$$y'(t_k^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{y(t_k + h) - y(t_k^+)}{h}$$

olmak üzere

$$\begin{cases} (a(t)y'(t))' + p(t)y(t-\tau) = 0 & , \quad t \geq t_0 \ , \quad t \neq t_k \\ y(t_k^+) = b_k y(t_k) \ , \ y'(t_k^+) = c_k y'(t_k) & , \quad k = 1, 2, ... \end{cases} \tag{3.5}$$

ikinci mertebeden sıçramalı gecikmeli diferensiyel denkleminin salınımlılık davranışı incelenecektir. (3.5) denkleminin çözümlerinin salınımlılığı denk dönüşümler yardımıyla verilecektir.

Tanım 3.1.1. $y \in C'([t_0, \infty), \mathbb{R})$ ve $ry' \in C'([t_0, \infty), \mathbb{R})$ olmak üzere (3.5) denklemini $[t_0, \infty)$ üzerinde özdeş olarak sağlayan $y : [t_0 - \tau, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna (3.5) denkleminin bir çözümü denir.

Teorem 3.1.6. $k = 1, 2, ...$ için $d_k = c_k / b_k$ olmak üzere

$$\left[\left(\prod_{T\leq t_k<t} d_k^{-1}\right) a(t)x'(t)\right]' + \left(\prod_{T\leq t_k<t} d_k^{-1}\right) p(t) \left(\prod_{t-\tau\leq t_k<t} d_k^{-1}\right) x(t-\tau) = 0 \ , \ t > T \tag{3.6}$$

ikinci mertebeden sıçramalı olmayan gecikmeli diferensiyel denklemi salınımlı ise (3.5) denklemi de salınımlıdır.

İspat. Aksine kabul edelimki, (3.5) denklemi bir ergeç pozitif y çözümüne sahip olsun. O halde $t \geq T$ için $y(t) > 0$ olacak şekilde bir $T \geq t_0$ vardır. $t \geq T$ için

$$w(t) = a(t)\frac{d}{dt}\ln\left\{y(t)\prod_{T\leq t_k<t} d_k^{-1}\right\} = a(t)\frac{y'(t)}{y(t)} \tag{3.7}$$

dönüşümü yapılırsa (3.5) denkleminin ilk kısmından

$$\begin{aligned}
0 &= (w(t)y(t))' + p(t)\frac{a(t-\tau)y'(t-\tau)}{y(t-\tau)} \\
0 &= w'(t)y(t) + y'(t)w(t) + p(t)\frac{a(t-\tau)y'(t-\tau)}{y(t-\tau)} \\
0 &= w'(t)y(t) + \frac{w(t)y(t)}{a(t)}w(t) + p(t)\frac{a(t-\tau)y(t-\tau)w(t-\tau)}{a(t-\tau)w(t-\tau)} \\
0 &= w'(t) + \frac{w^2(t)}{a(t)} + p(t)\frac{y(t-\tau)}{y(t)} \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.7) den

$$y(t) = \left(\prod_{T\leq t_k<t} d_k^{-1}\right)\exp\left\{\int_T^t \frac{w(s)}{a(s)}ds\right\}$$

olduğundan (3.8) denklemi

$$w'(t) + \frac{w^2(t)}{a(t)} + p(t)\left(\prod_{t-\tau\leq t_k<t} d_k^{-1}\right)\exp\left\{-\int_{t-\tau}^t \frac{w(s)}{a(s)}ds\right\} = 0$$

halini alır. (3.5) denkleminin ikinci kısmındaki iki eşitlik birbirlerine bölünürse (3.7) den

$$w(t_k^+) = \frac{y'(t_k^+)}{y(t_k^+)} = \frac{c_k}{b_k}\frac{y'(t_k)}{y(t_k)} = \frac{c_k}{b_k}w(t_k)$$

olup $d_k = c_k/b_k$ ile tanımlandığından (3.5) denkleminin ikinci kısmı

$$w(t_k^+) = d_k w(t_k)$$

şekline dönüşür. O halde (3.5) denklemi

$$\begin{cases} w'(t) + \frac{w^2(t)}{a(t)} + p(t)\left(\prod\limits_{t-\tau\leq t_k<t} d_k^{-1}\right)\exp\left\{-\int\limits_{t-\tau}^t \frac{w(s)}{a(s)}ds\right\} = 0 & ,\ t \geq T,\ t \neq t_k \\ w(t_k^+) = d_k w(t_k) & ,\ t_k \geq T,\ k = 1, 2, ... \end{cases} \tag{3.9}$$

şeklinde birinci mertebeden diferensiyel denkleme dönüşür. Şimdi bu denkleme

$$z(t) = \left(\prod_{T \le t_k < t} d_k^{-1} \right) w(t)$$

dönüşümünü uygulayalım. O halde $t_n > T$ için

$$z(t_n^+) = \left(\prod_{T \le t_k \le t_n} d_k^{-1} \right) w(t_n^+) = \left(\prod_{T \le t_k \le t_n} d_k^{-1} \right) d_n w(t_n) = z(t_n)$$

dir. Böylece z, (T, ∞) da süreklidir. Diğer taraftan $t > T$ ve $t \neq t_n$ için (3.9) dan

$$\begin{aligned}
z'(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{w(t+h) \prod\limits_{T \le t_k < t+h} d_k^{-1} - w(t) \prod\limits_{T \le t_k < t} d_k^{-1}}{h} \\
&= \left(\prod_{T \le t_k < t} d_k^{-1} \right) \lim_{h \to 0} \frac{w(t+h) - w(t)}{h} \\
&= \left(\prod_{T \le t_k < t} d_k^{-1} \right) w'(t) \\
&= \left(\prod_{T \le t_k < t} d_k^{-1} \right) \left[-\frac{w^2(t)}{a(t)} - p(t) \left(\prod_{t-\tau \le t_k < t} d_k^{-1} \right) \exp \left\{ - \int_{t-\tau}^{t} \frac{w(s)}{a(s)} ds \right\} \right] \\
&= \left(\prod_{T \le t_k < t} d_k^{-1} \right) \left[- \left(\prod_{T \le t_k < t} d_k^2 \right) \frac{z^2(t)}{a(t)} \right. \\
&\quad \left. - p(t) \left(\prod_{t-\tau \le t_k < t} d_k^{-1} \right) \exp \left\{ - \int_{t-\tau}^{t} \left(\prod_{T \le t_k < s} d_k \right) \frac{z(s)}{a(s)} ds \right\} \right] \\
&= - \left(\prod_{T \le t_k < t} d_k \right) \frac{z^2(t)}{a(t)} \\
&\quad - \left(\prod_{T \le t_k < t} d_k^{-1} \right) p(t) \left(\prod_{t-\tau \le t_k < t} d_k^{-1} \right) \exp \left\{ - \int_{t-\tau}^{t} \left(\prod_{T \le t_k < s} d_k \right) \frac{z(s)}{a(s)} ds \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. $t = t_n$ noktasında $z'(t)$ nin soldan ve sağdan limitleri sırasıyla

$$z'(t_n^-) = \left(\prod_{T \le t_k < t_n} d_k^{-1} \right) w'(t_n^-) = \left(\prod_{T \le t_k < t_n} d_k^{-1} \right) w'(t_n)$$

ve

$$z'(t_n^+) = \left(\prod_{T \le t_k \le t_n} d_k^{-1} \right) w'(t_n^+) = \left(\prod_{T \le t_k \le t_n} d_k^{-1} \right) d_n w'(t_n) = \left(\prod_{T \le t_k < t_n} d_k^{-1} \right) w'(t_n)$$

dir. Böylece $t = t_n$ için

$$\begin{aligned}
z'(t_n) &= \left(\prod_{T\le t_k<t_n} d_k^{-1}\right) w'(t_n) = \left(\prod_{T\le t_k<t_n} d_k^{-1}\right) \lim_{t\to t_n^-} w'(t) \\
&= \left(\prod_{T\le t_k<t_n} d_k^{-1}\right) \lim_{t\to t_n^-} \left[-\frac{w^2(t)}{a(t)} - p(t)\left(\prod_{t-\tau\le t_k<t} d_k^{-1}\right) \exp\left\{-\int_{t-\tau}^{t} \frac{w(s)}{a(s)} ds\right\}\right] \\
&= \left(\prod_{T\le t_k<t_n} d_k^{-1}\right) \left[-\frac{w^2(t_n)}{a(t_n)} - p(t_n)\left(\prod_{t-\tau\le t_k<t_n} d_k^{-1}\right) \exp\left\{-\int_{t_n-\tau}^{t_n} \frac{w(s)}{a(s)} ds\right\}\right] \\
&= \left(\prod_{T\le t_k<t_n} d_k^{-1}\right) \left[-\left(\prod_{T\le t_k<t_n} d_k^{2}\right) \frac{z^2(t_n)}{a(t_n)}\right. \\
&\quad \left. -p(t_n)\left(\prod_{t-\tau\le t_k<t_n} d_k^{-1}\right) \exp\left\{-\int_{t_n-\tau}^{t_n} \left(\prod_{T\le t_k<s_n} d_k\right) \frac{z(s)}{a(s)} ds\right\}\right] \\
&= -\left(\prod_{T\le t_k<t_n} d_k\right) \frac{z^2(t_n)}{a(t_n)} \\
&\quad -\left(\prod_{T\le t_k<t_n} d_k^{-1}\right) p(t_n) \left(\prod_{t-\tau\le t_k<t_n} d_k^{-1}\right) \exp\left\{-\int_{t_n-\tau}^{t_n} \left(\prod_{T\le t_k<s_n} d_k\right) \frac{z(s)}{a(s)} ds\right\}
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
&z'(t) + \left(\prod_{T\le t_k<t} d_k\right) \tfrac{z^2(t)}{a(t)} \\
&+ \left(\prod_{T\le t_k<t} d_k^{-1}\right) p(t) \left(\prod_{t-\tau\le t_k<t} d_k^{-1}\right) \exp\left\{-\int_{t-\tau}^{t} \frac{\left(\prod_{T\le t_k<s} d_k\right) z(s)}{a(s)} ds\right\} = 0
\end{aligned} \tag{3.10}$$

denklemine ulaşılır. Son olarak

$$u(t) = \exp\left[\int_T^t \left(\prod_{T\le t_k<s} d_k\right) \frac{z(s)}{a(s)} ds\right] \quad , \quad t > T$$

dönüşümünü uygulayalım. O halde $t > T$ için $u(t) > 0$ ve

$$u'(t) = u(t) \left(\prod_{T\le t_k<t} d_k\right) \frac{z(t)}{a(t)}$$

olur. (3.10) dan

$$\begin{aligned}
\left[\left(\prod_{T\le t_k<t} d_k^{-1}\right)a(t)u'(t)\right]' &= u'(t)z(t)+u(t)z'(t) \\
&= u(t)\left[\left(\prod_{T\le t_k<t} d_k\right)\frac{z^2(t)}{a(t)}+z'(t)\right] \\
&= -u(t)\left(\prod_{T\le t_k<t} d_k^{-1}\right)p(t)\left(\prod_{t-\tau\le t_k<t} d_k^{-1}\right)\exp\left\{-\int_{t-\tau}^{t}\frac{u'(s)}{u(s)}ds\right\} \\
&= -\left(\prod_{T\le t_k<t} d_k^{-1}\right)p(t)\left(\prod_{t-\tau\le t_k<t} d_k^{-1}\right)u(t-\tau)
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\left[\left(\prod_{T\le t_k<t} d_k^{-1}\right)a(t)u'(t)\right]'+\left(\prod_{T\le t_k<t} d_k^{-1}\right)p(t)\left(\prod_{t-\tau\le t_k<t} d_k^{-1}\right)u(t-\tau)=0 \quad , \; t>T$$

denklemi elde edilir. Bu durumda u, (3.6) denkleminin bir ergeç pozitif çözümüdür. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.7. $k=1,2,...$ için $b_k=c_k$ olsun. (3.5) denkleminin her çözümünün salınımlı olması için gerek ve yeter koşul (3.6) denkleminin her çözümünün salınımlı olmasıdır.

İspat. Teorem 3.1.6 dan yalnızca (3.5) denkleminin her çözümü salınımlı iken (3.6) denkleminin de her çözümünün salınımlı olduğunu ispatlamak yeterlidir.

x, $t\ge T\ge t_0$ için $x(t)>0$ olacak şekilde (3.6) denkleminin bir ergeç pozitif çözümü olsun.

$$y(t)=\left(\prod_{T\le t_k<t} b_k\right)x(t)$$

olsun. O halde $t>T$ için $y(t)>0$ ve $t_n>T$ için

$$y(t_n^+)=\left(\prod_{T\le t_k\le t_n} b_k\right)x(t_n^+)=b_n\left(\prod_{T\le t_k<t_n} b_k\right)x(t_n)=b_n y(t_n)$$

olur. Diğer taraftan, $t \neq t_n > T$ için

$$y'(t) = \left(\prod_{T \leq t_k < t} b_k \right) x'(t)$$

ve

$$y'(t_n^+) = \left(\prod_{T \leq t_k \leq t_n} b_k \right) x'(t_n^+) = b_n \left(\prod_{T \leq t_k < t_n} b_k \right) x'(t_n) = b_n y'(t_n) = c_n y'(t_n)$$

elde edilir. Daha sonra $t \neq t_n$ için

$$\begin{aligned}
(a(t)y'(t))' &= \left[a(t) \left(\prod_{T \leq t_k < t} b_k \right) x'(t) \right]' \\
&= \left(\prod_{T \leq t_k < t} b_k \right) (a(t)x'(t))' \\
&= -\left(\prod_{T \leq t_k < t} b_k \right) p(t) \left(\prod_{t-\tau \leq t_k < t} b_k^{-1} \right) x(t-\tau) \\
&= -\left(\prod_{T \leq t_k < t-\tau} b_k \right) p(t) x(t-\tau) \\
&= -p(t)y(t-\tau)
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$(a(t)y'(t))' + p(t)y(t-\tau) = 0 \tag{3.11}$$

denklemi elde edilir. Bunun anlamı y, (3.5) denkleminin bir ergeç pozitif çözümüdür. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

(3.11) denkleminin salınımlılığı için 1987 yılında G. S. Ladde, V. Lakshmikantham ve B. G. Zhang tarafından aşağıdaki kriter verilmiştir.

Teorem 3.1.8. $p(t) \geq 0$ integrallenebilir bir fonksiyon, $a(t) > 0$ sürekli, $\tau(t) \leq t$, $\tau'(t) \leq 1$ ve $\lim\limits_{t \to \infty} (t - \tau(t)) = \infty$ olsun.

$$\int^{\infty} \frac{dt}{p(t)} = \infty$$

ve

$$\int^{\infty} \left(\int_{T}^{t-\tau(t)} \frac{dt}{a(t)} \right)^{1-\epsilon} p(t)dt = \infty \quad , \quad 0 < \epsilon \leq 1$$

şartları sağlanıyorsa

$$(a(t)y'(t))' + p(t)y(t-\tau(t)) = 0$$

denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Bunun dışında, (3.11) denkleminin $a(t)=1$ olması durumu yani;

$$y''(t) + p(t)y(\tau(t)) = 0 \tag{3.12}$$

ikinci mertebeden gecikmeli diferensiyel denkleminin salınımlılık sonuçları ilk olarak 1965 yılında S. Norkin tarafından verilmiştir. 1968 yılında P. Waltman ve 1970 yılında J. Bradley

$$\int^{\infty} p(s)ds = +\infty$$

ise (3.12) denkleminin salınımlı olduğunu ispatlamışlardır. Daha sonra, 1986 yılında R. Koplatadze ve 1988 de J. Wei

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} \tau(s)p(s)ds > 1$$

veya

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} \tau(s)p(s)ds > \frac{1}{e}$$

oluyorsa (3.12) denkleminin salınımlı olduğunu göstermişlerdir. Burada, $p \in C([t_0,\infty), \mathbb{R}^+)$, $\tau \in C([t_0,\infty), \mathbb{R})$, $\tau(t)$ azalmayan, $t \geq t_0$ için $\tau(t) \leq t$ ve $\lim_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$ dur.

Örnek 3.1.1.

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{t}x'(t)\right)' + \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)}}x(t-1) = 0 & , \ t \neq i \\ \Delta x(i) + \frac{1}{i}x(i) = 0 & , \ i \in \mathbb{N} \\ \Delta x'(i) + \frac{1}{i^2}x(i) = 0 & , \ i \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.13}$$

ikinci mertebeden sıçramalı gecikmeli diferensiyel denkleminin çözümlerinin salınımlılığını inceleyelim. (3.13) denkleminin çözümlerinin salınımlı olması için yeter koşul

$$\left[\left(\prod_{T\leq i<t} \frac{i}{i+1}\right) \frac{1}{t}x'(t)\right]' + \left(\prod_{T\leq i<t} \frac{i}{i+1}\right) \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)}} \left(\prod_{t-\tau\leq i<t} \frac{i}{i+1}\right) x(t-1) = 0 \tag{3.14}$$

sıçramalı olmayan ikinci mertebeden gecikmeli diferensiyel denkleminin salınımlı olmasıdır. (3.14) denklemi Teorem 3.1.8 in tüm şartlarını sağladığından tüm çözümleri salınımlıdır. O halde (3.13) denkleminin de tüm çözümleri salınımlıdır.

4 Sürekli Değişkenli Sıçramalı Gecikmeli Fark Denklemleri

Son yıllarda, sürekli değişkenli sıçramalı fark denklemleri de birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. G. P. Wei ve J. H. Shen 2005 yılında yaptıkları çalışmalarında

$$\begin{cases} \Delta_\rho x(t) + p(t)x(t-\tau) = 0, & t \in [t_0, \infty) \,/\, \{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \\ \Delta_\rho x(\theta_n) + q_n x(\theta_n) = 0, & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

şeklindeki sıçramalı gecikmeli fark denklemlerinin asimptotik özelliklerini ve salınımlılığını çalışmışlardır. Burada; t_0, ρ, p, τ ($\frac{\tau}{\rho} \in \mathbb{N}$ olmak üzere), $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (-\infty, 1)$ ve $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [t_0, \infty)$ sıçrama noktalarının artan sınırsız bir dizisidir.

Yine G. P. Wei ve J. H. Shen 2006 yılında yaptıkları çalışmalarında, $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, b_k sabitler r pozitif bir tamsayı ve $p(t) \geq 0$, $[t_0 - \tau, \infty)$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{cases} x(t+\tau) - x(t) + p(t)x(t - r\tau) = 0, & t \geq t_0 - \tau,\ t \neq t_k \\ x(t_k + \tau) - x(t_k) = b_k x(t_k), & k \in \mathbb{N}(1) \end{cases}$$

şeklinde sürekli değişkenli sıçramalı gecikmeli fark denkleminin çözümlerinin salınımsızlığı için bazı sonuçlar vermişlerdir.

Bu çalışmalardaki metod, genel fark denklemlerindeki uygulanan metodlara benzerdir. Bu nedenle yazarlar, şıçrama koşulunda Δ_ρ operatörünü kullanmayı tercih etmişlerdir. Ancak, bizim vereceğimiz yeni kriterde sıçrama koşulunda Δ_ρ operatörü yerine Δ operatörü kullanıldığından, uygulanılan metod, yukarıda verilen çalışmalarda uygulanılan metodtan tamamen farklıdır ve diferensiyel denklemler için uygulanan metotlara daha yakındır.

4.1 Birinci Mertebeden Sürekli Değişkenli Sıçramalı Gecikmeli Fark Denklemlerinin Salınımlılığı için Elde Edilen Yeni Kriterler

Bu kısımda, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\rho \in (0,\infty)$, I, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin sınırlı bir alt cümlesi, $p_i \in C\left([t_0,\infty),\mathbb{R}\right)$, her $i \in I$ için $\tau_i \in [\rho,\infty)$, $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (-\infty,1)$ ve $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [t_0+\rho,\infty)$ sıçrama noktalarının artan sınırsız bir dizisi olmak üzere

$$\begin{cases} \Delta_\rho x(t) + \sum\limits_{i\in I} p_i(t)x(t-\tau_i) = 0 & , t \in [t_0,\infty)\backslash\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \\ \Delta x(\theta_n) + q_n x(\theta_n) = 0 & , n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{4.1}$$

şeklindeki sürekli değişkenli sıçramalı gecikmeli fark denklemini gözönüne alınacaktır. Burada, her $t \in [t_0,\infty)$ için $\Delta_\rho x(t) = x(t+\rho) - x(t)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\Delta x(\theta_n) = x(\theta_n^+) - x(\theta_n^-)$ dir. $x(\theta_n^+)$, bazı $n \in \mathbb{N}$ için, x in θ_n sıçrama noktasındaki sağdan limitini, $x(\theta_n^-)$ ise x in, θ_n sıçrama noktasındaki soldan limitini göstermektedir. Bir $\{\theta_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ alt dizisi gözönüne alındığında sıçrama koşulundan,

$$\begin{aligned} \Delta x(\theta_{n_k}) &= -q_{n_k} x(\theta_{n_k}) \\ x(\theta_{n_k}^+) - x(\theta_{n_k}^-) &= -q_{n_k} x(\theta_{n_k}) \\ x(\theta_{n_k}^+) &= (1-q_{n_k}) x(\theta_{n_k}) \end{aligned}$$

dir. Her iki taraf $x(\theta_{n_k})$ ile çarpılırsa

$$x(\theta_{n_k})x(\theta_{n_k}^+) = (1-q_{n_k})\left[x(\theta_{n_k})\right]^2$$

elde edilir. $\left[x(\theta_{n_k})\right]^2 > 0$ olduğundan Tanım 2.1.5. den $x(\theta_{n_k})x(\theta_{n_k}^+) \leq 0$ olması ancak $\{q_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [1,\infty)$ olmasıyla mümkündür. O halde, $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [1,\infty)$ olmak üzere, bir $\{\theta_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ alt dizisinin varlığı durumunda (4.1) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olacağı açıktır. Bu nedenle, $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (-\infty,1)$ alınacaktır. Bunun dışında teoremlerin ispatlarında, uygunluk açısından boş çarpım 1 olarak alınacaktır.

Tanım 4.1.1. $\tau_{\max} := \max\{\tau_i : i \in I\}$ olsun. (4.1) denkleminin çözümü

$x : [t_0 - \tau_{\max}, \infty) \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı bir fonksiyondur. Burada her $n \in \mathbb{N}$ için x fonksiyonu (θ_n, θ_{n+1}) üzerinde sürekli, (4.1) denklemini sağlar ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x(\theta_n^+)$, $x(\theta_n^-)$ mevcut, sonlu ve $x(\theta_n^-) = x(\theta_n)$ dir.

Şimdi tutarlı çözümün tanımını yapalım:

Tanım 4.1.2. Her $i \in I$ için $t \notin \{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve dolayısıyla $t+\rho \notin \{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $t-\tau_i \notin \{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ olduğunu kabul edelim ve buna ek olarak, $[t_0 - \tau_{\max}, t_0 + \rho]$ üzerinde tanımlı φ başlangıç fonksiyonu

$$\Delta_\rho x(t_0) + \sum_{i\in I} p_i(t_0)x(t_0 - \tau_i) = 0 \tag{4.2}$$

tutarlılık şartını sağlamak üzere, (4.1) sıçramalı gecikmeli fark denklemi için

$$x = \varphi \tag{4.3}$$

başlangıç koşulunu tanımlayalım. Basamak metodu ile, (4.1) denkleminin, (4.2) tutarlılık şartını ve (4.3) başlangıç şartını sağlayan tek bir x çözümü vardır. Bu çözümü $x = x(t, t_0, \varphi)$ ile gösterelim. Bilindiği üzere, (4.1) denkleminin bir x çözümüne, ergeç pozitif ya da ergeç negatif ise salınımlı değildir, aksi durumda salınımlıdır denir.

Teorem 2.3.4 den aşağıdaki teoerem verilebilir.

Teorem 4.1.1. $\rho \in (0, \infty)$, $p_i \in C([t_0, \infty), [0, \infty))$, I, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin sınırlı bir alt cümlesi ve her $i \in I$ için $\tau_i \in [\rho, \infty)$ olsun. O halde

$$x'(t) + \frac{1}{\rho}\sum_{i\in I} \min_{t-2\rho\le\xi\le t-\rho} \{p_i(\xi)\}\, x(t - \tau_i) = 0 \quad , \quad t \in [t+\rho, \infty)$$

gecikmeli diferensiyel denkleminin her çözümü salınımlı ise

$$\Delta_\rho x(t) + \sum_{i\in I} p_i(t)x(t - \tau_i) = 0 \quad , \quad t \in [t_0, \infty)$$

sıçramalı olmayan gecikmeli fark denkleminin de her çözümü salınımlıdır.

Her $t \in [t_0 + \rho, \infty)$ için

$$\prod_{t-\rho\le\theta_k<t} (1 - q_k) \equiv \alpha$$

ve her $t \in [t_0+\tau_i, \infty)$, her $i \in I$ için

$$\prod_{t-\tau_i \le \theta_k < t} (1-q_k) \equiv \beta_i$$

olacak şekilde β_i ve α pozitif sabitlerinin olduğunu kabul edelim ve

$$\Delta_\rho y(t) + \sum_{i\in I} \frac{\alpha^{\frac{\tau_i}{\rho}}}{\beta_i} p_i(t) y(t-\tau_i) = 0 \quad , \; t \in [t_0, \infty) \tag{4.4}$$

sıçramalı olmayan gecikmeli fark denklemini gözönüne alalım. Sıçramalı olmayan (4.4) denkleminin bir çözümü, $[t_0, \infty)$ üzerinde (4.4) denklemini sağlayan bir $y \in C\left([t_0-\tau, \infty), \mathbb{R}\right)$ fonksiyonudur.

Teorem 4.1.2. $y = y\left(t, t_0, \varphi\right)$, (4.4) denkleminin bir çözümü ise

$$x(t) := \frac{1}{\alpha^{t/\rho}} \left[\prod_{t_0 \le \theta_k < t} (1-q_k)\right] y(t) \quad , \; t \in [t_0, \infty) \tag{4.5}$$

ile tanımlı $x = x\left(t, t_0, \varphi\right)$, (4.1) denkleminin bir çözümüdür.

İspat. $y = y\left(t, t_0, \varphi\right)$, (4.4) denkleminin bir çözümü olsun. (4.5) ile tanımlı x çözümünün (4.4) denklemini sağladığını gösterelim. x çözümünün her $n \in \mathbb{N}$ için herbir (θ_n, θ_{n+1}) aralığında sürekli olduğu açıktır. (4.5) den her $t \in [t_0, \infty)$ve her $i \in I$ için

$$\begin{aligned}
\Delta_\rho y(t) &= y(t+\rho) - y(t) \\
&= \frac{\alpha^{\frac{t+\rho}{\rho}}}{\prod\limits_{t_0 \le \theta_k < t+\rho} (1-q_k)} x(t+\rho) - \frac{\alpha^{\frac{t}{\rho}}}{\prod\limits_{t_0 \le \theta_k < t} (1-q_k)} x(t) \\
&= \frac{\alpha^{\frac{t}{\rho}+1}}{\prod\limits_{t_0 \le \theta_k < t+\rho} (1-q_k)} x(t+\rho) - \frac{\alpha^{\frac{t}{\rho}}}{\prod\limits_{t_0 \le \theta_k < t} (1-q_k)} x(t) \\
&= \frac{\alpha^{\frac{t}{\rho}+1}}{\prod\limits_{t_0 \le \theta_k < t} (1-q_k) \prod\limits_{t \le \theta_k < t+\rho} (1-q_k)} x(t+\rho) - \frac{\alpha^{\frac{t}{\rho}}}{\prod\limits_{t_0 \le \theta_k < t} (1-q_k)} x(t) \\
&= \frac{\alpha^{\frac{t}{\rho}}}{\prod\limits_{t_0 \le \theta_k < t} (1-q_k)} \Delta_\rho x(t) \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
y(t-\tau_i) &= \frac{\alpha^{\frac{t-\tau_i}{\rho}}}{\prod\limits_{t_0\le\theta_k<t-\tau_i}(1-q_k)}x(t-\tau_i) \\
&= \frac{\alpha^{\frac{t}{\rho}}}{\alpha^{\frac{\tau_i}{\rho}}\prod\limits_{t_0\le\theta_k<t-\tau_i}(1-q_k)}x(t-\tau_i) \\
&= \frac{\alpha^{\frac{t}{\rho}}\prod\limits_{t-\tau_i\le\theta_k<t}(1-q_k)}{\alpha^{\frac{\tau_i}{\rho}}\prod\limits_{t_0\le\theta_k<t}(1-q_k)}x(t-\tau_i) \\
&= \frac{\beta_i\,\alpha^{\frac{t}{\rho}}}{\alpha^{\frac{\tau_i}{\rho}}\prod\limits_{t_0\le\theta_k<t}(1-q_k)}x(t-\tau_i) \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

olur. (4.6) ve (4.7) eşitlikleri (4.4) de yerine yazılırsa

$$
\frac{\alpha^{\frac{t}{\rho}}}{\prod\limits_{t_0\le\theta_k<t}(1-q_k)}\left(\Delta_\rho x(t)+\sum_{i\in I}p_i(t)x(t-\tau_i)\right)=0
$$

elde edilir. $\alpha^{\frac{t}{\rho}}/\prod\limits_{t_0\le\theta_k<t}(1-q_k)$ pozitif terimi ihmal edildiğinde (4.5) ile tanımlı x çözümü (4.1) denkleminin ilk kısmını sağlar. Diğer taraftan, her $n\in\mathbb{N}$ için,

$$
\begin{aligned}
x(\theta_n^+) &= \lim_{t\to\theta_n^+}\left(\frac{1}{\alpha^{t/\rho}}\left[\prod_{t_0\le\theta_k<t}(1-q_k)\right]y(t)\right) \\
&= \frac{1}{\alpha^{\theta_n/\rho}}\left[\prod_{t_0\le\theta_k\le\theta_n}(1-q_k)\right]y(\theta_n) \\
&= (1-q_n)x(\theta_n)
\end{aligned}
$$

olduğundan x, (4.1) denkleminin ikinci kısmını da sağlar. Dolayısıyla, $x=x\,(t,t_0,\varphi)$, (4.1) denkleminin bir çözümüdür.

Teorem 4.1.3. $x=x\,(t,t_0,\varphi)$, (4.1) denkleminin bir çözümü ise

$$
y(t)=\frac{\alpha^{t/\rho}}{\prod\limits_{t_0\le\theta_k<t}(1-q_k)}x(t) \quad , \; t\in[t_0,\infty) \qquad (4.8)
$$

ile tanımlı $y=y\,(t,t_0,\varphi)$, (4.4) denkleminin bir çözümüdür.

İspat. $x=x\,(t,t_0,\varphi)$, (4.1) denkleminin bir çözümü olsun. (4.8) eşitliği ile tanımlı y, her $n \in \mathbb{N}$ için $y(\theta_n^-) = y(\theta_n)$ olmak üzere (θ_n, θ_{n+1}) aralıklarında süreklidir. her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} y(\theta_n^+) &= \lim_{t \to \theta_n^+} \left(\frac{\alpha^{t/\rho}}{\prod\limits_{t_0 \leq \theta_k < t} (1 - q_k)} x(t) \right) \\ &= \frac{\alpha^{\theta_n/\rho}}{\prod\limits_{t_0 \leq \theta_k \leq \theta_n} (1 - q_k)} x(\theta_n^+) \\ &= y(\theta_n) \end{aligned}$$

olur ki bu durum y nin $[t_0, \infty)$ aralığında sürekli olmasını gerektirir. Aynı şekilde y nin (4.4) denklemini sağladığı kolayca görülebilir. Dolayısıyla, $y = y(t, t_0, \varphi)$, (4.4) denkleminin bir çözümüdür.

Teorem 4.1.4. (4.1) denkleminin her çözümünün salınımlı olabilmesi için gerek ve yeter koşul (4.4) denkleminin her çözümünün salınımlı olmasıdır.

İspat. $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (-\infty, 1)$ olmak üzere Teorem 4.1.2. ve Teorem 4.1.3. den ispat kolayca görülebilir.

Teorem 4.1.1. ve Teorem 4.1.4. 'ü kullanarak aşağıdaki salınımlılık şartı verilebilir.

Teorem 4.1.5.

$$x'(t) + \sum_{i \in I} \frac{\alpha^{\tau_i/\rho}}{\rho \beta_i} \min_{t-2\rho \leq \zeta \leq t-\rho} \{p_i(\zeta)\} \, x(t - \tau_i) = 0 \quad , \; t \in [t_0 + 2\rho, \infty)$$

sıçramalı olmayan gecikmeli diferensiyel denklemin her çözümü salınımlı ise (4.1) sürekli değişkenli sıçramalı gecikmeli fark denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Teorem 4.1.5. in bir sonucu olarak, aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.1.1. $\tau_{\min} := \min\{\tau_i : i \in I\}$ olmak üzere

$$\liminf_{t \to \infty} \int\limits_{t-\tau_{\min}}^{t} \sum_{i \in I} \frac{\alpha^{\tau_i/\rho}}{\rho \beta_i} \min_{\eta-2\rho \leq \zeta \leq \eta-\rho} \{p_i(\zeta)\} \, d\eta > \frac{1}{e}$$

veya

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{t-\tau_{\min}}^{t}\sum_{i\in I}\frac{\alpha^{\tau_i/\rho}}{\rho\beta_i}\min_{\eta-2\rho\leq\zeta\leq\eta-\rho}\{p_i(\zeta)\}\,d\eta>1$$

olsun. O halde (4.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Örnek 4.1.1. I, $\mathbb{N}$ nin sınırlı bir alt cümlesi, $\rho\in(0,\infty)$, $q\in(-\infty,1)$, $p_i\in(0,\infty)$ ve her $i\in I$ için $\tau_i\in\mathbb{N}$ olsun.

$$\begin{cases}\Delta_\rho x(t)+\sum_{i\in I}p_i x(t-\rho\tau_i)=0 & ,\quad t\in[0,\infty)\setminus\rho\mathbb{N}\\ \Delta x(n)+qx(n)=0 & ,\quad n\in\rho\mathbb{N}\end{cases}\tag{4.9}$$

fark denklemini gözönüne alalım. Teorem 4.1.5. den ve her $i\in I$ için $\alpha=(1-q)$ ve $\beta_i=(1-q)^{\tau_i}$ olduğundan (4.9) diferensiyel denklemi

$$x'(t)+\sum_{i\in I}\frac{p_i}{\rho}x(t-\rho\tau_i)=0\quad,\quad t\in[2\rho,\infty)\tag{4.10}$$

ile benzerdir. Teorem 2.1.2. den

$$\sum_{i\in I}p_i\tau_i>\frac{1}{e}$$

olduğunda (4.10) denkleminin her çözümünün salınımlı olduğunu biliyoruz. O halde aynı şart (4.9) denklemi içinde geçerlidir.

4.2 Karışık Tipli Sürekli Değişkenli Sıçramalı Fark Denlemlerinin Salınımlılığı için Karşılaştırma Kriteri

Dördüncü bölümün ikinci kısmında ise, $t_0\in\mathbb{R}$, $\rho\in\mathbb{R}^+$, $p,\ q\in C\left([t_0,\infty),\mathbb{R}\right)$, $\tau,\ \sigma\in[0,\infty)$, $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset(-\infty,1)$ ve $\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset[t_0,\infty)$ sıçrama noktalarının sınırsız artan bir dizisi olmak üzere,

$$\begin{cases}\Delta_\rho x(t)+p(t)x(t-\tau)+q(t)x(t+\sigma)=0 & ,\ t\in[t_0,\infty)\setminus\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}}\\ \Delta x(\theta_k)+\lambda_k x(\theta_k)=0 & ,\ k\in\mathbb{N}\end{cases}\tag{4.11}$$

şeklindeki sürekli değişkenli karışık tipli sıçramalı gecikmeli fark denkleminin çözümlerinin salınımılık davranışı, bu denkleme uygun sıçramalı olmayan karışık tipli gecikmeli fark denklemleri ve sıçramalı olmayan karışık tipli gecikmeli diferensiyel denklemler ile karşılaştırılarak incelenmiştir. Burada, her $t \in [t_0, \infty)$ için $\Delta_\rho x(t) = x(t+\rho) - x(t)$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\Delta x(\theta_k) = x(\theta_k^+) - x(\theta_k^-)$ dır. $x(\theta_k^+)$, $k \in \mathbb{N}$ için x in θ_k sıçrama noktasındaki sağdan limitini ve $x(\theta_k^-)$, $k \in \mathbb{N}$ için x in θ_k sıçrama noktasındaki soldan limitini göstermektedir. $\{\lambda_{k_l}\}_{l\in\mathbb{N}} \subset [1, \infty)$ olacak şekilde bir $\{\theta_{k_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ altdizisi varsa (4.11) denkleminin her çözümü salınımlıdır. Bu nedenle $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset (-\infty, 1)$ alacağız.

(4.11) denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için gerek ve yeter koşullar sürekli değişkenli karışık tipli sıçramalı olmayan fark denklemleri ile karşılaştırılarak verilmiştir. Burada kullanılan metod sayesinde katsayılar üzerindeki işaret kısıtlaması ortadan kalkmaktadır. Bu da çok büyük kolaylık sağlayacaktır. Bununla birlikte bildiğimiz kadarıyla, literatürde katsayıları farklı işaretli veya alternatif işaretlere sahip sürekli değişkenli karışık tipli sıçramalı olmayan fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı için bir sonuç verilmemiştir. Katsayılar üzerinde işaret şartı verilmediği zaman, salınımlı olmayan çözümlerin monotonluk özellikleri kaybolur ve bundan dolayı çözümlerin salınımlılık özelliklerini kontrol etmek zorlaşır. Bu nedenle ilgimizi daha sonra sabit katsayılı ve aynı işaretli (4.11) denklemine kısıtlayacağız.

Burada kullandığımız metodta (4.11) denklemini farklı katsayılarla gözönüne alacağız. Fakat notasyon kolaylığı açısından bir tek katsayılı gecikme ve bir tek katsayılı ileri terim içeren (4.11) denklemi ile ilgileneceğiz. Burada vereceğimiz açık salınımlılık sonuçları diferensiyel denklemler üzerinde karşılaştırma kriterine bağlı olarak elde edilecektir.

Bu nedenle aşağıdaki bilgileri hatırlatalım:

$\tau > 0$ ve $p \in C\left([t_0, \infty), \mathbb{R}_0^+\right)$ olmak üzere

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t-\tau}^{t} p(\eta)d\eta > 1$$

veya

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-\tau}^{t} p(\eta)d\eta > \frac{1}{e}$$

oluyorsa

$$x'(t) + p(t)x(t-\tau) = 0 \quad , \quad t \in [t_0, \infty)$$

diferensiyel denkleminin her çözümünün salınımlıdır. Aynı şartlar altında

$$x'(t) + p(t)x(t-\tau) \leq 0 \quad , \quad t \in [t_0, \infty)$$

diferensiyel eşitsizliği bir pozitif çözüme sahip değildir ve

$$x'(t) + p(t)x(t-\tau) \geq 0 \quad , \quad t \in [t_0, \infty)$$

diferensiyel eşitsizliği bir negatif çözüme sahip değildir (Györi ve Ladas 1991).

Tanım 4.2.1. Her $k \in \mathbb{N}$ için $x(\theta_k^{\pm})$ limitli mevcut, sonlu ve $x(\theta_k) = x(\theta_k^-)$ olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için (θ_k, θ_{k+1}) üzerinde sürekli (4.11) denklemini sağlayan $x : [t_0 - \tau, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna (4.11) denkleminin çözümüdür denir. Çözüm tanımında $t \notin \{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ise $t + \rho \notin \{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ve her $t + \sigma \notin \{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ için $t - \tau \notin \{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ olduğu kabul edilecektir.

Tanım 4.2.2. (4.11) denklemi

$$x = \varphi \quad , \quad [t_0 - \tau, t_0 + \max\{\sigma, \rho\}] \tag{4.12}$$

şeklinde bir başlangıç şartı ile birlikte gözönüne alınsın. Burada, φ, $[t_0 - \tau, t_0)$ aralığında sürekli ve $[t_0 - \tau, t_0 + \max\{\sigma, \rho\}] \setminus \{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de parçalı sürekli olmak üzere $[t_0 - \tau, t_0 + \max\{\sigma, \rho\}]$ aralığında reel değerli bir fonksiyondur. Aynı zamanda φ fonksiyonu

$$\begin{cases} \Delta_\rho \varphi(t_0) + p(t_0)\varphi(t_0 - \tau) + q(t_0)\varphi(t_0 + \sigma) = 0 & , \ t_0 \neq \theta_0 \\ \Delta\varphi(\theta_0) + q_0\varphi(\theta_0) = 0 \end{cases} \tag{4.13}$$

tutarlılık şartını sağlar. Basamak metodu ile (4.11) denkleminin (4.12) başlangıç koşulunu ve (4.13) tutarlılık şartını sağlayan bir tek x çözümü olduğu kolayca görülebilir. Bu çözüm $x = (t, t_0, \varphi)$ ile gösterilsin. (4.11) denkleminin $x = (t, t_0, \varphi)$ çözümü ya ergeç pozitif ya da ergeç negatif ise salınımlı değildir. Aksi halde salınımlıdır.

Aşağıdaki şartlar sağlansın.

(A_1) Her $t \in [t_0+\rho,\infty)$ için $\prod\limits_{t-\rho\le\theta_l<t}(1-\lambda_l)\equiv\alpha$ olacak şekilde bir $\alpha>0$ sabiti varolsun.

(A_2) Her $t \in [t_0+\tau,\infty)$ için $\prod\limits_{t-\tau\le\theta_l<t}(1-\lambda_l)\equiv\beta$ olacak şekilde bir $\beta>0$ sabiti varolsun.

(A_3) Her $t \in [t_0,\infty)$ için $\prod\limits_{t\le\theta_l<t+\sigma}(1-\lambda_l)\equiv\gamma$ olacak şekilde bir $\gamma>0$ sabiti varolsun.

$$\Delta_\rho y(t)+\frac{\alpha^{\frac{\tau}{\rho}}}{\beta}p(t)y(t-\tau)+\frac{\gamma}{\alpha^{\frac{\sigma}{\rho}}}q(t)y(t+\sigma)=0 \quad , \ t\in[t_0,\infty) \tag{4.14}$$

sıçramalı olmayan birinci mertebeden karışık tipli fark denklemini gözönüne alalım. (4.14) denkleminin çözümü $[t_0,\infty)$ da (4.14) denklemini sağlayan bir $y\in C\left([t_0-\tau,\infty),\mathbb{R}\right)$ fonksiyonudur.

Teorem 4.2.1. $(A_1)-(A_3)$ sağlansın. $y=y(t,t_0,\varphi)$ fonksiyonu (4.14) denkleminin bir çözümü ise

$$\psi(t)=\begin{cases}\varphi(t) & , \quad [t_0-\tau,t_0)\\ \frac{1}{\alpha^{\frac{t}{\rho}}}\left[\prod\limits_{t_0\le\theta_l<t}(1-\lambda_l)\right]\varphi(t) & , \quad [t_0,t_0+\max\{\sigma,\rho\}]\end{cases}$$

olmak üzere

$$x(t):=\frac{1}{\alpha^{\frac{t}{\rho}}}\left[\prod\limits_{t_0\le\theta_l<t}(1-\lambda_l)\right]y(t) \quad , \quad t\in[t_0,\infty) \tag{4.15}$$

ile tanımlı $x=x(t,t_0,\psi)$ fonksiyonu (4.11) denkleminin bir çözümüdür.

İspat. $y=y(t,t_0,\varphi)$ (4.14) denkleminin bir çözümü olsun. (4.15) ile tanımlı x fonksiyonunun (4.11) denklemini sağladığını gösterelim. x fonksiyonunun her $n\in\mathbb{N}$ için herbir (θ_n,θ_{n+1}) aralığında sürekli olduğu açıktır. (4.15) den her $t\in[t_0,\infty)$ için

$$\begin{aligned}\Delta_\rho y(t) &= y(t+\rho)-y(t)\\ &= \frac{\alpha^{\frac{t+\rho}{\rho}}}{\prod\limits_{t_0\le\theta_l<t+\rho}(1-\lambda_l)}x(t+\rho)-\frac{\alpha^{\frac{t}{\rho}}}{\prod\limits_{t_0\le\theta_l<t}(1-\lambda_l)}x(t)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\alpha^{\frac{t}{\rho}+1}}{\prod\limits_{t_0\le\theta_l<t+\rho}(1-\lambda_l)}x(t+\rho) - \frac{\alpha^{\frac{t}{\rho}}}{\prod\limits_{t_0\le\theta_l<t}(1-\lambda_l)}x(t) \\
&= \frac{\alpha^{\frac{t}{\rho}+1}}{\prod\limits_{t_0\le\theta_l<t}(1-\lambda_l)\prod\limits_{t\le\theta_k<t+\rho}(1-\lambda_l)}x(t+\rho) - \frac{\alpha^{\frac{t}{\rho}}}{\prod\limits_{t_0\le\theta_l<t}(1-\lambda_l)}x(t) \\
&= \frac{\alpha^{\frac{t}{\rho}}}{\prod\limits_{t_0\le\theta_l<t}(1-q_k)}\Delta_\rho x(t) \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bundan başka her $t \in [t_0, \infty)$ için

$$
\begin{aligned}
y(t-\tau) &= \frac{\alpha^{\frac{t-\tau}{\rho}}}{\prod\limits_{t_0\le\theta_l<t-\tau}(1-\lambda_l)}x(t-\tau) \\
&= \frac{\alpha^{\frac{t}{\rho}}}{\alpha^{\frac{\tau}{\rho}}\prod\limits_{t_0\le\theta_l<t-\tau}(1-\lambda_l)}x(t-\tau) \\
&= \frac{\alpha^{\frac{t}{\rho}}\prod\limits_{t-\tau\le\theta_l<t}(1-\lambda_l)}{\alpha^{\frac{\tau}{\rho}}\prod\limits_{t_0\le\theta_l<t}(1-\lambda_l)}x(t-\tau) \\
&= \frac{\beta\alpha^{\frac{t}{\rho}}}{\alpha^{\frac{\tau}{\rho}}\prod\limits_{t_0\le\theta_l<t}(1-\lambda_l)}x(t-\tau) \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
y(t+\sigma) &= \frac{\alpha^{\frac{t+\sigma}{\rho}}}{\prod\limits_{t_0\le\theta_l<t+\rho}(1-\lambda_l)}x(t+\sigma) \\
&= \frac{\alpha^{\frac{\sigma}{\rho}}\alpha^{\frac{t}{\rho}}}{\gamma\prod\limits_{t_0\le\theta_l<t}(1-\lambda_l)}x(t+\sigma) \qquad (4.18)
\end{aligned}
$$

elde edilir.(4.16), (4.17) ve (4.18) eşitlikleri (4.14) de yerine yazılır ve

$$
\frac{\alpha^{\frac{t}{\rho}}}{\prod\limits_{t_0\le\theta_l<t}(1-\lambda_l)}
$$

pozitif terimi ihmal edilirse (4.15) ile tanımlı x fonksiyonunu (4.11) denkleminin ilk kısmını sağlar. Diğer taraftan, her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} x(\theta_n^+) &= \lim_{t \to \theta_k^+} \left(\frac{1}{\alpha^{t/\rho}} \left[\prod_{t_0 \le \theta_l < t} (1-\lambda_l) \right] y(t) \right) \\ &= \frac{1}{\alpha^{\theta_k/\rho}} \left[\prod_{t_0 \le \theta_l \le \theta_k} (1-\lambda_l) \right] y(\theta_k) \\ &= (1-\lambda_l) x(\theta_k) \end{aligned}$$

olduğundan x (4.11) denkleminin ikinci kısmı olan sıçrama koşulunu da sağlar. Aynı şekilde ψ fonksiyonunun bu çözüm için başlangıç fonksiyonu olduğuda kolayca gösterilebilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.2. $(A_1) - (A_3)$ koşulları sağlansın. $x = x(t, t_0, \psi)$ fonksiyonu (4.11) denkleminin bir çözümü ise o zaman,

$$\varphi(t) = \begin{cases} \psi(t) & , \quad [t_0 - \tau, t_0) \\ \frac{\alpha^{\frac{t}{\rho}}}{\prod\limits_{t_0 \le \theta_l < t} (1-\lambda_l)} \psi(t) & , \quad [t_0, t_0 + \max\{\sigma, \rho\}] \end{cases}$$

olmak üzere,

$$y(t) := \left[\frac{\alpha^{\frac{t}{\rho}}}{\prod\limits_{t_0 \le \theta_l < t} (1-\lambda_l)} \right] x(t) \quad , \quad t \in [t_0, \infty) \tag{4.19}$$

ile tanımlı $y = y(t, t_0, \varphi)$ fonksiyonu (4.14) denkleminin bir çözümüdür.

İspat. $x = x(t, t_0, \psi)$ (4.11) denkleminin bir çözümü olsun. y fonksiyonunun (4.15) deki şekilde tanımlı olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için herbir (θ_k, θ_{k+1}) aralıklarında süreklidir. Ayrıca, her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} y(\theta_k^+) &= \lim_{t \to \theta_k^+} \left(\frac{\alpha^{t/\rho}}{\prod\limits_{t_0 \le \theta_l < t} (1-\lambda_l)} x(t) \right) \\ &= \frac{\alpha^{\theta_k/\rho}}{\prod\limits_{t_0 \le \theta_l \le \theta_k} (1-\lambda_l)} x(\theta_k^+) \\ &= y(\theta_k) \end{aligned}$$

dir. Bundan dolayı x, $[t_0, \infty)$ da süreklidir. Bundan başka, Teorem 4.2.1. deki şekilde y fonksiyonunun (4.14) denkleminin çözümü olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.3. $(A_1)-(A_3)$ sağlansın. (4.11) denkleminin her çözümünün salınımlı olabilmesi için gerek ve yeter koşul (4.14) denkleminin her çözümünün salınımlı olmasıdır.

İspat. Teoremin ispatı, $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset (-\infty, 1)$ olmak üzere Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2 den kolayca yapılabilir.

Örnek 4.2.1. $\rho \in \mathbb{R}^+$, p, $q \in \mathbb{R}$, τ, $\sigma \in \mathbb{R}_0^+$ ve $\lambda \in (-\infty, 1)$ olmak üzere,

$$\begin{cases} \Delta_\rho x(t) + px(t-\rho\tau) + qx(t+\rho\sigma) = 0 & , \ t \in [0,\infty)\backslash\{\rho k\}_{k\in\mathbb{N}} \\ \Delta x(k) + \lambda x(k) = 0 & , \ k \in \rho\mathbb{N} \end{cases} \tag{4.20}$$

denklemi gözönüne alınsın. Bu denklem için $\alpha = (1-\lambda)$, $\beta = (1-\lambda)^\tau$ ve $\gamma = 1/(1-\lambda)^\sigma$ dir. Böylece (4.20) denklemi

$$\Delta_\rho x(t) + p(1-\lambda)^{\tau(\frac{1}{\rho}-1)} x(t-\rho\tau) + q(1-\lambda)^{\sigma(1-\frac{1}{\rho})} y(t+\rho\sigma) = 0 \quad , \ t \in [t_0, \infty) \tag{4.21}$$

sıçramalı olmayan karışık tipli fark denklemine dönüşür. Teorem 2.3.1. den (4.21) denkleminin her çözümünün salınımlı olması için gerek ve yeter koşul

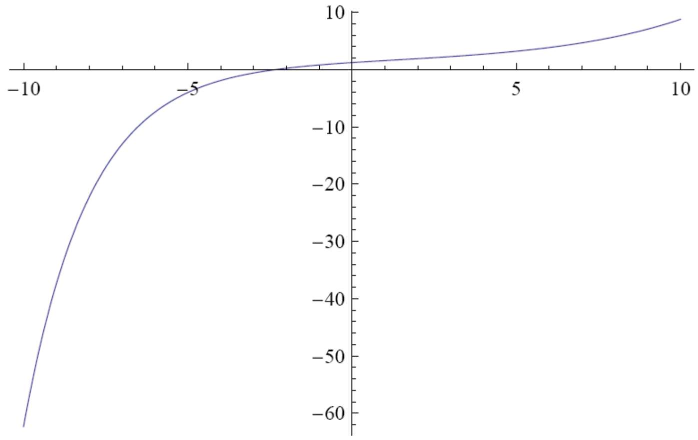
$$1 - e^{-\rho s} + p(1-\lambda)^{\tau(\frac{1}{\rho}-1)} e^{-\rho\tau s} + (1-\lambda)^{\sigma(1-\frac{1}{\rho})} e^{\rho\sigma s} = 0 \tag{4.22}$$

karakteristik denkleminin reel köke sahip olmamasıdır.

Örneğin, $\rho = 1/2$, $\lambda = 2/3$, $p = e-1$, $\tau = 1$, $q = 1/e$ ve $\sigma = 1/2$ ise (4.20) denkleminin karakteristik denklemi olan

$$1 + \frac{1}{e}\sqrt{3e^{s/4}} - \frac{1}{3}(4-2e)\, s^{-s/2} = 0$$

denklemi bir negatif köke sahip olduğundan (4.20) denklemi bir salınımsız çözüme sahiptir. Bu çözümün grafik gösterimi,



şeklindedir.

Aşağıdaki çizelgede, $\rho = 1/2$, $\tau = 1$ ve $\sigma = 1/2$ olmak üzere λ, p ve q parametrelerinin değiştirilmesiyle (4.20) denkleminin çözümlerinin salınımlılığının nasıl değiştiği görülebilir.

ρ	λ	p	q	τ	σ	Salınımlı/Salınımsız
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$e-1$	$\frac{1}{e}$	1	$\frac{1}{2}$	Salınımsız
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$e-1$	$\frac{1}{e}$	1	$\frac{1}{2}$	Salınımlı
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-(e-1)$	$\frac{1}{e}$	1	$\frac{1}{2}$	Salınımsız
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-(e-1)$	$-\frac{1}{e}$	1	$\frac{1}{2}$	Salınımlı

4.2.1 Sıçramalı Fark Denklemleri ile Diferensiyel Denklemlerin Karşılaştırma Kriterleri

Bu kısımda, $p,\ q \in C\left([t_0,\infty),\mathbb{R}^+\right)$ veya $p,\ q \in C\left([t_0,\infty),\mathbb{R}^-\right)$ olması durumlarında (4.11) denkleminin çözümleri için açık salınımlılık sonuçları verilecektir.

4.2.1.1 Pozitif Katsayılı Karışık Tipli Sıçramalı Fark Denklemleri

Teorem 4.2.4. $(A_1)-(A_3)$ koşulları sağlansın ve $p,\ q \in C\left([t_0,\infty),\mathbb{R}^+\right)$ olsun. Eğer

$$x'(t) + \frac{\alpha^{\tau/\rho}}{\rho\beta} \min_{s\in[t,t+\rho]} p(s)\ x(t-\tau) + \frac{\gamma}{\rho\alpha^{\sigma/\rho}} \min_{s\in[t,t+\rho]} q(s)\ x(t+\sigma) \leq 0 \quad ,\ t\in[t_0,\infty) \quad (4.23)$$

diferensiyel eşitsizliği ergeç pozitif çözüme sahip değil ise (4.11) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

İspat. Kabul edelimki x (4.11) denkleminin bir ergeç pozitif çözümü olsun. O halde, (4.19) ile tanımlı y fonksiyonu (4.14) denklemini sağlar. Her $t \in [t_1, \infty)$ ve bazı $t_1 \in [t_0, \infty)$ için $x(t)$, $x(t-\rho)$, $x(t-\tau) > 0$ olsun. Bundan başka,

$$z(t) := \int_{t}^{t+\rho} y(\eta) d\eta \quad , \quad t \in [t_1, \infty) \tag{4.24}$$

kümesi tanımlansın. Her $t \in [t_1, \infty)$ için $z(t) > 0$ ve $z'(t) = \Delta_\rho y(t)$ dir. (4.14) denklemi t den $t+\rho$ ya integre edilirse her $t \in [t_1, \infty)$ için

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta_\rho z(t) + \frac{\alpha^{\tau/\rho}}{\beta} \int_{t}^{t+\rho} p(\eta) y(\eta - \tau) d\eta + \frac{\gamma}{\alpha^{\sigma/\rho}} \int_{t}^{t+\rho} q(\eta) y(\eta + \sigma) d\eta \\ &\geq \Delta_\rho z(t) + \frac{\alpha^{\tau/\rho}}{\beta} \min_{s \in [t, t+\rho]} p(s)\ z(t-\tau) + \frac{\gamma}{\alpha^{\sigma/\rho}} \min_{s \in [t, t+\rho]} q(s)\ z(t+\sigma) \end{aligned} \tag{4.25}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$w(t) := \int_{t}^{t+\rho} z(\eta) d\eta \quad , \quad t \in [t_1, \infty) \tag{4.26}$$

eşitliğini gözönüne alalım. O halde, her $t \in [t_1, \infty)$ için $w(t) > 0$ ve $w'(t) = \Delta_\rho z(t)$ ve $w(t) \leq \rho z(t)$ dir. Dolayısıyla (4.25) eşitsizliği

$$w'(t) + \frac{\alpha^{\tau/\rho}}{\rho\beta} \min_{s \in [t, t+\rho]} p(s)\ w(t-\tau) + \frac{\gamma}{\rho\alpha^{\sigma/\rho}} \min_{s \in [t, t+\rho]} q(s)\ w(t+\sigma) \leq 0 \quad , t \in [t_0, \infty)$$

eşitsizliğine dönüşür. Bu durumda w (4.23) ü sağlayan bir ergeç pozitif çözümdür. Bu bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.1. $(A_1) - (A_3)$ koşulları sağlansın, p, $q \in C\left([t_0, \infty), \mathbb{R}^+\right)$ ve $\tau > \rho$ olsun. O halde, ya

$$\limsup_{t \to \infty} \int_{t-\tau}^{t} \min_{s \in [\eta, \eta+\rho]} p(s) d\eta > \frac{\rho\beta}{\alpha^{\tau/\rho}} \tag{4.27}$$

ya da

$$\liminf_{t \to \infty} \int_{t-\tau}^{t} \min_{s \in [\eta, \eta+\rho]} p(s) d\eta > \frac{\rho\beta}{\alpha^{\tau/\rho} e} \tag{4.28}$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa (4.11) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

İspat. Kabul edelimki x (4.11) denkleminin bir ergeç pozitif çözümü olsun. O halde (4.19) ile tanımlı y fonksiyonu (4.14) denklemini sağlar. Her $t \in [t_1, \infty)$ ve bazı $t_1 \in [t_0, \infty)$ için $x(t)$, $x(t-\rho)$, $x(t-\tau) > 0$ olsun. O halde,

$$x'(t) + \frac{\alpha^{\tau/\rho}}{\rho\beta} \min_{s\in[t,t+\rho]} p(s)\ x(t-\tau) \leq 0 \quad ,\ t \in [t_1, \infty)$$

eşitsizliği (4.27) ve (4.28) şartlarından herhangi biri sağlandığında ergeç pozitif çözüme sahip olmayabilir. Böylece ispat tamamlanır.

Hatırlatma 4.2.1. p ve q katsayıları artmayan ise (4.23) eşitsizliği

$$x'(t) + \frac{\alpha^{\tau/\rho}}{\rho\beta} \int_t^{t+\rho} p(\eta)d\eta\ x(t-\tau) + \frac{\gamma}{\rho\alpha^{\sigma/\rho}} \int_t^{t+\rho} q(\eta)d\eta\ x(t+\sigma) \leq 0 \quad ,\ t \in [t_0, \infty)$$

haline dönüşür. Bu durumda, ya

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t-\tau}^{t} \int_{\eta}^{\eta+\rho} p(\xi)d\xi d\eta > \frac{\rho\beta}{\alpha^{\tau/\rho}}$$

ya da

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-\tau}^{t} \int_{\eta}^{\eta+\rho} p(\xi)d\xi d\eta > \frac{\rho\beta}{\alpha^{\tau/\rho} e}$$

eşitsizlikleri geçerli ise (4.11) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

4.2.1.2 Negatif Katsayılı Karışık Tipli Sıçramalı Fark Denklemleri

Teorem 4.2.5. $(A_1) - (A_3)$ koşulları sağlansın ve p, $q \in C([t_0, \infty), \mathbb{R}^-)$ olsun. Eğer

$$x'(t) + \frac{\alpha^{\tau/\rho}}{\rho\beta} \max_{s\in[t,t+\rho]} p(s)\ x(t-\tau) + \frac{\gamma}{\rho\alpha^{\sigma/\rho}} \max_{s\in[t,t+\rho]} q(s)\ x(t+\sigma) \geq 0 \quad ,\ t \in [t_0, \infty) \quad (4.29)$$

diferensiyel eşitsizliği hiçbir ergeç pozitif çözüme sahip değil ise o zaman, (4.11) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Sonuç 4.2.2. $(A_1) - (A_3)$ sağlansın ve p, $q \in C([t_0, \infty), \mathbb{R}^-)$ olsun. O halde, ya

$$\limsup_{t\to\infty} \int_t^{t+\sigma} \left(- \max_{s\in[\eta,\eta+\rho]} q(s) \right) d\eta > \frac{\rho\alpha^{\sigma/\rho}}{\gamma}$$

ya da

$$\liminf_{t\to\infty} \int\limits_{t}^{t+\sigma} \left(-\max_{s\in[\eta,\eta+\rho]} q(s) \right) d\eta > \frac{\rho\alpha^{\sigma/\rho}}{\gamma e}$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa (4.11) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Hatırlatma 4.2.2. p ve q katsayıları artmayan ise (4.29) eşitsizliği

$$x'(t) + \frac{\alpha^{\tau/\rho}}{\rho\beta} \int\limits_{t-\rho}^{t} p(\eta)d\eta \; x(t-\tau) + \frac{\gamma}{\rho\alpha^{\sigma/\rho}} \int\limits_{t-\rho}^{t} q(\eta)d\eta \; x(t+\sigma) \leq 0 \quad , t \in [t_0, \infty)$$

haline dönüşür. Bu durumda, ya

$$\limsup_{t\to\infty} \int\limits_{t-\tau}^{t} \int\limits_{\eta}^{\eta+\rho} p(\xi)d\xi d\eta > \frac{\rho\beta}{\alpha^{\tau/\rho}}$$

ya da

$$\liminf_{t\to\infty} \int\limits_{t-\tau}^{t} \int\limits_{\eta}^{\eta+\rho} p(\xi)d\xi d\eta > \frac{\rho\beta}{\alpha^{\tau/\rho} e}$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa (4.11) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

KAYNAKLAR

Agarwal, R. P., 2000. Difference Equations and Inequalities, Marcel Dekker, New York.

Alzabut, J. 1999. Oscillation criteria for first and second order impulsive delay differential equations, The Graduate School of Natural and Applied Sciences of The Middle East Technical Universty, M. S. Thesis.

Bainov, D. D. ve Simeonov, P. S. 1995. Impulsive Differential Equations, Asymptotic Properties of the Solutions. World Scientific, 227 p., Singapore.

Bainov, D. D., Dimitrova, M. B. ve Dishliev, A. B. 2000, Oscillation of the bounded solutions of impulsive differential-difference equations of second order, Appl. Math. Comput, 114, no. 1, 61-68.

Bainov, D. D., Domshlak Y. ve Simeonov P. 1997. On the oscillation properties of first order impulsive differential equations with deviating arguments, Israel J. Math., 98, 167-187.

Berezansky, L. ve Braverman, E. 1996. Exponential boundedness of solutions for impulsive delay differential equations. Appl. Math. Letters, 9(6); 91-95.

Bradley, J. S. 1970. Oscillation theorems for a second order equation, J. Differential Equations, 8, 397-403.

Cai G. ve Guo J. 2008. Oscillation of impulsive neutral difference equations with continuous arguments, Mathematics in Practice and Theory, 38 (11), 580-584.

Domoshnitsky, A. ve Drakhlin, M. 1997. Nonoscillation of first order impulsive differential equations with delay, J. Math. Anal. Appl., 106, 254-269.

Domshlak, Y. 1993. Oscillatory properties of linear difference equations with continuous time, Differential Equations Dynam. Systems 1, no. 4, 311–324.

Elaydi, S. 1999. An introduction to difference equations, Springer-Verlag, New York.

El'sgol'ts, L. E. 1966. Introduction to the theory of differential equations with deviating arguments, Holden-Day, Inc.

Erbe, L. H. ve Zhang, B. G. 1989. Oscillation of Discrete Analogues of Delay Equations, Differential and Integral Equations, vol. 2, no. 3, pp. 300-309

Goldberg, S. 1958. Introduction to difference equations, New York.

Gopalsamy, K., Györi, I. ve Ladas, G. 1989. Oscillations of a class of delay equations with continuous and piecewise constant arguments, Funkcialaj Ekvacioj, 32, 395-406.

Gopalsamy, K. ve Zhang, B.G. 1989. On delay differential equations with impulses. J. Math. Anal. Appl., 139; 110-122.

Gopalsamy, K. 1992. Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics. Kluwer Academic, 501 p., Dordrecht.

Györi, I. ve Ladas, G. 1991. Oscillation Theory of Delay Differential Equations. Clarendon Press, 368 p., Oxford.

Karpuz, B. Öcalan, Ö. ve Öztürk, S. 2010. Oscillation of first-order impulsive difference equations with continuous arguments. J. Comput. Anal. Appl., vol. 12, no. 2, pp. 539–543.

Koplatadze, R. 1986. Oscillation criteria of solution of second order linear delay differential inequalities with a delayed argument, Trudy Inst. Prikl. Mat. I. N. Vekue, 17, 104-120.

Ladas, G., Laskhmikantham, V. ve Papadakis, J. S. 1972. Oscillations of higher-order retarded differential equations generated by the retarded argument, Delay and functional differential equations and their applications, Academic Press, New York, pp. 219–231.

Ladas, G. 1990. Explicit conditions for the oscillation of difference equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 153, 276-287.

Ladas, G., Pakula, L. ve Wang, Z. 1992. Necessary and sufficient conditions for the oscillation of difference equations. Panamer. Math. J., vol. 2, no. 1, pp. 17–29.

Ladas, G., Philos, Ch. G. ve Sficas, Y. G. 1989. Sharp conditions for the oscillation of delay difference equations, Journal of Applied Mathematics and Simulations, 2, 101-112.

Ladde, G. S., Lakshmikantham, V. ve Zhang, B. G. 1987. Oscillation Theory of Differential Equations with Deviating Arguments, Marcel Dekker, Inc., New York.

Lakshmikantham, V., Bainov, D. D. ve Simeonov, P. S. 1989. Theory of Impulsive

Differential Equations World Scientific, Singapore.

Li X, ve Zhu, D. 2003. Comparison theorems of oscillation and nonoscillation for neutral difference equations with continuous arguments, Commun. Pure Appl. Anal., vol. 2, no. 4, pp. 579–589.

Luo Z. ve Shen J. 2007. Oscillation of second order linear differential equations with impulses, Applied Mathematics Letters, 20, 75-81.

Mickens R. E. 1990. Difference Equations, Van Nostrand Reinhold, New York.

Norkin, S. B. 1965. Differential equations of the second order with retarted arguments, Nauka, Moskow, (Russian).

Peng, M. 2003. Oscillation criteria for second-order impulsive delay difference equations, Appl. Math. Comp., 146, 227-235.

Samoilenko, A.M. ve Perestyuk, N.A. 1995. Impulsive Differential Equations, World Scientific. 459 p., Singapore.

Sharkovsky, A. N., Maistrenko, Yu. L. ve Romanenko, E. Yu. 1993. Difference Equations and Their Applications,Mathematics and Its Applications, vol. 250, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Shen, J. H. 1996. Comparison theorems for the oscillation of difference equations with continuous arguments and applications, Chinese Science Bulletin, 41, 18, 1506-1510.

Shen, J. H. 2000. Comparison and oscillation results for difference equations with continuous variable, Indian J. Pure Appl. Math. 31, no. 12, 1633–1642.

Waltman, P. 1968. A note on an oscillation for an equation with a functional argument, Canad. Math. Bull., 11, 593-595.

Wei, G. P. ve Zou, Z. Z. 1999. Oscillation criteria for impulsive delay difference equations, (Chinese) Acta Sci. Natur. Univ. Norm. Hunan., 22, no. 2, 8-11.

Wei, G. P. 1999. Oscillation of solutions of impulsive neutral delay difference equations, (Chinese) Math. Theory Appl. (Changsha), 19, no. 2, 119-121.

Wei, G. P. 1999. Oscillation and nonoscillation of impulsive delay difference equations, (Chinese) Hunan Daxue Xuebao, 26, no. 6, 9-13.

Wei, G. P. ve Shen, J. H. 2005. Oscillation of solutions of impulsive difference equations with continuous variable, Math. Appl. (Wuhan), vol. 18, no. 2, pp. 293–296.

Wei, G. P. ve Shen, J. H. 2006. The persistence of nonoscillatory solutions for difference equations under impulsive perturbations, Acta Math. Sci. Ser. A Chin. Ed., vol. 26, no. 4, pp. 595–600.

Wei, J. 1988. Oscillation of second order delay differential equation, Ann. Differential Equations, 4, 473-478.

Yan, J. 2004. Oscillation Properties of a Second-Order Impulsive Delay Differential Equation, Computers and Mathematics with Applications, 47, 253-258.

Yan, J. ve Zhang, F. 1999. Oscillation for system of delay difference equations, J. Math. Anal. Appl. 230 no. 1, 223–231.

Yan, J. ve Zhao, A. 1998. Oscillation and stability of linear impulsive delay differential equations, J. Math. Anal. Appl., vol. 227, no. 1, pp. 187–194.

Yong-shao C. ve Wei-zhen F. 1997. Oscillations of second order nonlinear ODE with impulses, J. Math. Anal. Appl., 220, 719-740.

Zhang B. G. ve Lian F. Y. 2006. Oscillation criteria for certain difference equations with continuous variables, Indian J. pure appl. Math. 37 (6), 325-341.

Zhang, Y., Zhao, A. ve Yan, J. 1997. Oscillation criteria for impulsive delay differential equations, J. Math. Anal. Appl., 205 no. 2, 461-470.

Zhang, Y., Yan, J. ve Choi S. K. 1998. Oscillation for difference equations with continuous variable, Computers Math. Applic. vol. 36, no. 9, pp. 11-18.

Zhao, A. ve Yan, J. 1996. Asymptotic behavior of solutions of impulsive delay differential equations. J. Math. Anal. Appl., 201, 943-954.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Sermin ÖZTÜRK

Doğum Yeri : Gölbaşı/ADIYAMAN

DoğumTarihi: 23.07.1980

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Adana Kız Lisesi, 1996.

Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2001.

Yüksek Lisans: Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, 2004.

Çalıştığı Kurum ve Yıl

Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2001-

Yayınları (SCI ve Diğer)

Yıldırım, H., Sarıkaya, M. Z. ve Öztürk, S. 2004. On The Solutions of the n-Dimensional Bessel Diamond Operator., Proceedings Mathematical Sciences, vol.114, no. 4, pp. 375-387.

Karpuz, B., Öcalan, Ö. ve Öztürk, S. 2010. Comparison Theorems on the Oscillation and Asymptotic Behaviour of higher-order Neutral Differential Equations., Glasgow Math. J., vol. 52, no. 1, pp. 107-114.

Karpuz, B., Öcalan, Ö. ve Öztürk, S. 2010. Oscillation of first-order impulsive difference equations with continuous arguments. J. Comput. Anal. Appl., vol. 12, no. 2, pp. 539–543.

EKLER

Üçüncü bölümde, $a(t) \in C\left([t_0,\infty),(0,\infty)\right)$ ve $p(t) \in C\left([t_0,\infty),\mathbb{R}\right)$ olmak üzere

$$\begin{cases} (a(t)x'(t))' + p(t)x(t-\tau) = 0 & ,t \geq t_0 \quad , \quad t \neq t_k \\ x(t_k^+) = b_k x(t_k) \quad , \quad x'(t_k^+) = c_k x'(t_k) & k = 1,2,... \end{cases}$$

şeklinde ikinci mertebeden sıçramalı gecikmeli lineer diferensiyel denklemi için yeni salınımlılık şartı verilmiştir. Bu çalışma yayına sunulmak için hazırlanmıştır.

Dördüncü bölümün ilk kısmında, $t_0 \in \mathbb{R}$, I, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin sınırlı bir alt cümlesi, $p_i \in C\left([t_0,\infty),[0,\infty)\right)$, her $i \in I$ için $\tau_i \in [\rho,\infty)$, $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (-\infty,1)$ ve $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [t_0,\infty)$ sıçrama noktalarının artan sınırsız bir dizisi, $\rho \in (0,\infty)$, her $t \in [t_0,\infty)$ için $\Delta_\rho x(t) = x(t+\rho) - x(t)$, her $n \in \mathbb{N}$ için $\Delta x(\theta_n) = x(\theta_n^+) - x(\theta_n^-)$ ve $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (-\infty,1)$ olmak üzere

$$\begin{cases} \Delta_\rho x(t) + \sum\limits_{i\in I} p_i(t)x(t-\tau_i) = 0 & , t \in [t_0,\infty)\backslash\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \\ \Delta x(\theta_n) + q_n x(\theta_n) = 0 & , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

şeklindeki sürekli değişkenli sıçramalı gecikmeli fark denkleminin çözümlerinin salınımlılık kriteri, bu denkleme uygun sıçramalı olmayan gecikmeli fark denklemleri ve sıçramalı olmayan gecikmeli diferensiyel denklemler ile karşılaştırılarak verilmiştir. Bu çalışma Journal of Computational Analysis and Applications isimli dergide yayınlanmıştır.

Dördüncü bölümün ikinci kısmında, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{R}^+$, p, $q \in C\left([t_0,\infty),\mathbb{R}\right)$, τ, $\sigma \in [0,\infty)$, $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset (-\infty,1)$ ve $\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [t_0,\infty)$ sıçrama noktalarının sınırsız artan bir dizisi, her $t \in [t_0,\infty)$ için $\Delta_\rho x(t) = x(t+\rho) - x(t)$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\Delta x(\theta_k) = x(\theta_k^+) - x(\theta_k)$ ve $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset (-\infty,1)$ olmak üzere,

$$\begin{cases} \Delta_\rho x(t) + p(t)x(t-\tau) + q(t)x(t+\sigma) = 0 & , t \in [t_0,\infty)\backslash\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \\ \Delta x(\theta_k) + \lambda_k x(\theta_k) = 0 & , k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

şeklindeki sürekli değişkenli karışık tipli sıçramalı gecikmeli fark denkleminin çözümlerinin salınımılık davranışı, bu denkleme uygun sıçramalı olmayan karışık tipli gecikmeli fark denklemleri ve sıçramalı olmayan karışık tipli gecikmeli diferensiyel denklemler ile karşılaştırılarak incelenen bu çalışma yayına sunulmuştur.