TAKSİ ÇEMBERLERİYLE İLGİLİ ÖZELLİKLER

Süheyla Ekmekçi

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

2001

TAKSİ ÇEMBERLERİYLE İLGİLİ ÖZELLİKLER

Süheyla Ekmekçi

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

2001

.

THE PROPERTIES RELATED TO THE TAXICAB CIRCLES

Süheyla Ekmekçi

Ph.D Thesis

Mathematics Department

2001

TAKSİ ÇEMBERLERİYLE İLGİLİ ÖZELLİKLER

SÜHEYLA EKMEKÇİ

Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Dalında
Doktora Tezi
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman : Prof. Dr. RÜSTEM KAYA

Mayıs -2001

Süheyla Ekmekçi'nin DOKTORA tezi olarak hazırladığı "TAKSİ ÇEMBERLERİYLE İLGİLİ ÖZELLİKLER" başlıklı bu çalışma jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye: Prof. Dr. Rüstem KAYA

Üye: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

Üye: Yrd. Doç. Dr. Ziya AKÇA

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu' nun .....6.-.6.-.2001........... gün ve ....2001.-.8/1............... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. M. Selami KILIÇKAYA
Enstitü Müdürü

ÖZET

K.Menger [7] de, analitik düzlemde verilen $X = (x_1, y_1)$ ve $Y = (x_2, y_2)$ noktaları arasındaki

$$d_E(X,Y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Öklidyen uzaklık yerine, H. Minkowski [8] tarafından tanımlanan

$$d_T(X,Y) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

metriğini kullanarak taksi geometri fikrini ortaya attı ve bu fikir F. Krause [5] tarafından geliştirildi. Daha sonra bir çok matematikçi düzlem taksi geometrideki yeni konu ve kavramlar üzerinde inceleme ve araştırmalar yaptılar. Bunların bazıları referans olarak tez sonunda verilmiştir.

Beş bölümden oluşan bu çalışmada: İlk bölümde, düzlem taksi geometride bilinen bazı kavramlar özetlendi. İkinci bölümde, taksi çemberlerinde teğet ve kiriş kavramları tanımlandıktan sonra taksi çemberinde teğet ve kiriş uzunlukları, taksi çemberinin teğet doğruları, taksi çemberinin teğet doğruları ve bu teğetler ile kirişler arasındaki ilişki belirlendi. Daha sonra iki taksi çemberinin birbirine içten ve dıştan teğet olması durumları incelendi. Üçüncü bölümde düzlemde bir üçgenin teğet taksi çemberleri araştırıldı. Dördüncü bölümde, verilen üç noktadan hangi durumlarda bir taksi çemberi geçemeyeceği örneklerle gösterildi. Son bölümde de taksi daire diliminin alanı ile taksi yay uzunluğu arasındaki ilişki verildi.

SUMMARY

In [7], K. Menger has introduced the taxicab plane geometry by using the metric

$$d_T(X,Y) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

defined by H.Minkowski [8] instead of Euclidean distance function

$$d_E(X,Y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

for any two points $X = (x_1, y_1)$ and $Y = (x_2, y_2)$ in the analytical plane. This geometry has been developed by E.F.Krause [5]. Some mathematicians have studied on concepts and subject with the taxicab geometry. Some of them have been given as references at the end of this thesis.

This study consists of five chapters. In the first chapter, some known concepts have been summarized in the taxicab plane geometry. In the second chapter, we defined tangent and chord concepts. Then, the chord length and tangent lines of taxicab circle and the relationship between the tangent lines and the chords of a taxicab circle have been determined. We, also, examined internal and external tangent taxicab circles. In the third chapter, the tangent circles of a triangle have been investigated in the plane. In the fourth chapter, it has been shown with examples that a taxicab circle can not pass through given three points in some cases. And in the last chapter, the relationship between the sector area and the arc length of a taxicab circle has been given.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamı yöneten ve bu tezin hazırlanması sırasında, çalışma boyunca vakit ayırarak ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın

Prof. Dr. Rüstem KAYA′ ya

ve şekil çizimlerinde sabır ve özen gösteren eşim

Halit EKMEKÇİ′ ye

saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Eskişehir, 2001

Süheyla EKMEKÇİ

İçindekiler

Bölüm 1

Temel Kavramlar

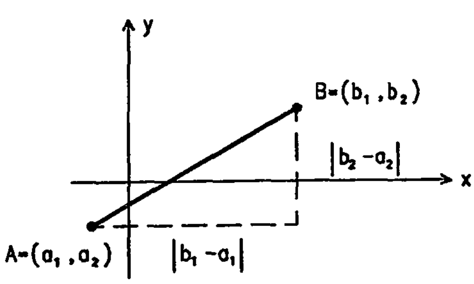
Taksi Düzlemi ve Taksi Uzaklığı: *Taksi düzleminin noktaları ve doğruları Öklid düzleminin noktaları ve doğrularının aynısıdır. Analitik düzlemde alınan* $A = (a_1, a_2)$ *ve* $B = (b_1, b_2)$ *noktaları arasındaki Öklid uzaklığı*

$$d_E(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

iken K.Menger [7] ve E. F. Krause [5] bu noktalar arasındaki uzaklık için H.Minkowski [8] tarafından tanımlanan

$$d_T(A, B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

metriğini kullanarak **düzlemsel taksi geometri***yi geliştirdiler.*



Şekil 1.1

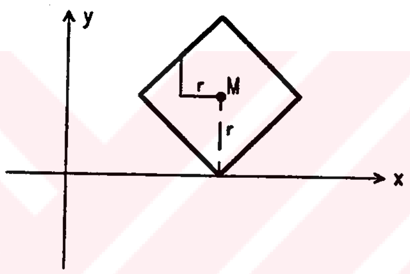
Taksi Çemberi: *Taksi düzleminde sabit bir noktadan sabit bir taksi uzaklıktaki noktaların geometrik yerine taksi çemberi denir. Sabit nokta taksi çemberinin merkezini , sabit taksi uzaklığı da çemberin yarıçapını gösterir. Analitik düzlemde* $M = (m_1, m_2)$ *noktasına* r *taksi uzaklıkta bulunan bütün noktalar*

$$C = \{X = (x,y) : d_T(M,X) = r\}$$

yani

$$C = \{(x,y) : |x - m_1| + |y - m_2| = r\}$$

kümesini oluşturur. Böylece C *kümesi* M *merkezli,* r *yarıçaplı taksi çemberidir.*



Şekil 1.2

Taksi Düzleminde Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı: *Taksi düzlemindeki herhangi bir* $P = (x_0, y_0)$ *noktasının*

$$l ... ax + by + c = 0$$

doğrusuna olan taksi uzaklığı

$$d_T(P,l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\max\{|a|, |b|\}}$$

formülü ile bellidir. (R.Kaya-Z.Akça-İ.Günaltılı-M.Özcan [4])

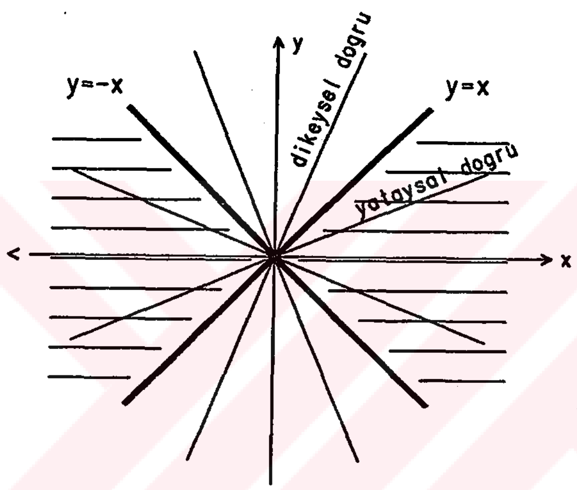
Taksi Düzlemindeki Doğruların Sınıflandırılması: *Taksi düzlemindeki*

$$l ... ax + by + c = 0$$

doğrusu verilsin. l doğrusuna

$$\begin{array}{lll} \left|-\frac{a}{b}\right| > 1 & ise & dikeysel\ doğru \\ \left|-\frac{a}{b}\right| < 1 & ise & yataysal\ doğru \\ \left|-\frac{a}{b}\right| = 1 & ise & ayıraç\ doğru \end{array}$$

denir.



Şekil 1.3

İki Noktanın Orta Kümesi: *Taksi düzlemindeki herhangi A ve B noktalarına eşit taksi uzaklığındaki noktaların geometrik yerine A ve B noktalarının taksi orta kümesi denir, yani bu taksi orta kümesi*

$$\{P = (x, y) : d_T(P, A) = d_T(P, B)\, ,\ x,\ y \in \mathbb{R}\}$$

dir.

Bir Nokta Ve Bir Doğrunun Orta Kümesi: *Taksi düzlemindeki bir F noktası ile bir l doğrusuna eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yerine F*

ve l nin taksi orta kümesi denir ve bu küme

$$\{P=(x,y):d_T(P,F)=d_T(P,l),\ x,\ y\in\mathbb{R}\}$$

dir.

İki Doğrunun Orta Kümesi: *Taksi düzlemindeki herhangi l_1 ve l_2 doğrularına eşit taksi uzaklığındaki noktaların geometrik yerine l_1 ve l_2 doğrularının taksi orta kümesi denir ve bu küme*

$$\{P=(x,y):d_T(P,l_1)=d_T(P,l_2),\ x,\ y\in\mathbb{R}\}$$

dir.

Yardımcı Teorem 1.1 : *Noktadaş olmayan ve herhangi ikisi paralel olmayan*

$$l_i.....a_ix+b_iy+c_i=0\ ,\quad i=1,2,3$$

doğruları için

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0$$

dır.

İspat: $l_1 \nparallel l_2$ olduğundan $l_1\wedge l_2=(x,y)$ olacak şekilde bir (x,y) noktası vardır. Buna göre

$$l_1.....a_1x+b_1y+c_1=0$$

doğrusunda $a_1\neq 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman

$$x=-(b_1y+c_1)a_1^{-1},a_1\neq 0$$

dir. $l_1 \nparallel l_2$ olduğundan $(b_2a_1-a_2b_1)\neq 0$ dır ve

$$y=(a_2c_1-a_1c_2)(b_2a_1-a_2b_1)^{-1}$$

olarak bulunur. Buna göre

$$x = -(b_1 y + c_1)a_1^{-1} = -(b_1(a_2c_1 - a_1c_2)(b_2a_1 - a_2b_1)^{-1} + c_1)a_1^{-1}$$

dir. l_1, l_2 ve l_3 doğrularının noktadaş olmamaları için $l_1 \wedge l_2 = (x, y)$ de bulunan noktanın l_3 doğrusu üzerinde bulunmaması gerekir. Yani

$$a_3\left[-(b_1(a_2c_1 - a_1c_2)(b_2a_1 - a_2b_1)^{-1} + c_1)a_1^{-1}\right] + b_3\left[(a_2c_1 - a_1c_2)(b_2a_1 - a_2b_1)^{-1}\right] + c_3 \neq 0$$

olmalıdır. Bu ifade

$$(a_1b_2 - a_2b_1)(a_1c_3 - a_3c_1) - (a_1c_2 - a_2c_1)(a_1b_3 - a_3b_1) \neq 0$$

olarak yazılabilir. Elde edilen bu ifade

$$a_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

biçiminde yazılabilir. $a_1 \neq 0$ olduğundan

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

dir.

Yardımcı Teorem 1.2 : *Herhangi iki doğrunun taksi orta kümesi bir yada iki doğrudan ibarettir.*

İspat: l_1, l_2 taksi düzleminde farklı iki doğru olup

$$l_1 \quad ..... \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad , \quad a_1,\, b_1,\, c_1 \in \mathbb{R}$$

$$l_2 \quad ..... \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad . \quad a_2,\, b_2,\, c_2 \in \mathbb{R}$$

olsun. Bu durumda $l_1 \| \, l_2$ veya $l_1 \nparallel l_2$ olabilir:

(i) $l_1 \| \, l_2$ olsun.

$$l_1 \| \, l_2 \;\Leftrightarrow\; a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$
$$\Leftrightarrow\; b_2 = \tfrac{a_2}{a_1}b_1 \quad , \; a_1 \neq 0$$

dır. Ayrıca

$$a_2 = \frac{a_2}{a_1}a_1 \quad , \quad a_1 \neq 0$$

biçiminde yazılabileceği için $\frac{a_2}{a_1} = k$ olarak alındığında

$$l_2 \; ..... \; a_1x + b_1y + \frac{c_2}{k} = 0 \quad , \quad k \neq 0$$

olur. Bu durumda l_1 ve l_2 doğrularına eşit taksi uzaklıktaki $X = (x, y)$ noktaları

$$d_T((x,y), l_1) = d_T((x,y), l_2)$$

şartını sağlayacağından

$$\frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\max\{|a_1| \, , \; |b_1|\}} = \frac{|a_1x + b_1y + \frac{c_2}{k}|}{\max\{|a_1| \, , \; |b_1|\}}$$

olup, buradan $l_1 \neq l_2$ olduğu gözönüne alınırsa

$$l_1' .....a_1x + b_1y + \frac{c_1 + \frac{c_2}{k}}{2} = 0$$

doğrusu elde edilir. Yani l_1' doğrusu üzerindeki bütün noktalar l_1 ve l_2 doğrularına eşit taksi uzaklıktadır. Ayrıca $l_1 \| \, l_1'$ ve $l_2 \| \, l_1'$ dir.

Bu halde $a_1 = 0$ iken $a_2 = 0$ olup, $b_1 = b_2$ dir. Buna göre l_1 ve l_2 doğrularına eşit taksi uzaklıktaki noktalar

$$l_1' .....y = -\frac{c_1 + c_2}{2b_1}$$

dir.

(ii) $l_1 \nparallel l_2$ olsun. Buna göre l_1 ve l_2 doğrularına eşit taksi uzaklıktaki $X = (x, y)$ noktaları

$$d_T((x,y), l_1) = d_T((x,y), l_2)$$

şartını sağlayacağından

$$\frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\max\{|a_1|\,,\ |b_1|\}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\max\{|a_2|\,,\ |b_2|\}} \qquad (*)$$

dir.

(a) $|a_1| \geq |b_1|$ ve $|a_2| \geq |b_2|$ iken $a_1 \neq 0$ ve $a_2 \neq 0$ olup, (*) ifadesinden

$$l_1' \ \ldots\ldots \ (b_2a_1 - b_1a_2)y - (c_2a_1 - c_1a_2) = 0$$

$$l_2' \ \ldots\ldots \ 2a_1a_2x + (b_2a_1 + b_1a_2)y + c_2a_1 + c_1a_2 = 0$$

doğruları bulunur. Bu doğrular üzerindeki bütün noktalar l_1 ve l_2 doğrularına eşit taksi uzaklıktadır.

(b) $|a_1| \geq |b_1|$ ve $|a_2| < |b_2|$ iken $a_1 \neq 0$ ve $b_2 \neq 0$ olup, (*) ifadesinden

$$l_1' \ \ldots\ldots \ a_1(b_2 + a_2)x + b_2(b_1 + a_1)y + (c_1b_2 + c_2a_1) = 0$$

$$l_2' \ \ldots\ldots \ a_1(b_2 - a_2)x + b_2(b_1 - a_1)y + (c_1b_2 - c_2a_1) = 0$$

doğruları bulunur. Bu doğrular üzerindeki bütün noktalar l_1 ve l_2 doğrularına eşit taksi uzaklıktadır.

(c) $|a_1| < |b_1|$ ve $|a_2| \geq |b_2|$ iken $b_1 \neq 0$ ve $a_2 \neq 0$ olup, (*) ifadesinden

$$l_1' \ \ldots\ldots \ a_2(a_1 + b_1)x + b_1(a_2 + b_2)y + (c_1a_2 + c_2b_1) = 0$$

$$l_2' \ \ldots\ldots \ a_2(a_1 - b_1)x + b_1(a_2 - b_2)y + (c_1a_2 - c_2b_1) = 0$$

doğruları bulunur. Bu doğrular üzerindeki bütün noktalar l_1 ve l_2 doğrularına eşit taksi uzaklıktadır.

(d) $|a_1| < |b_1|$ ve $|a_2| < |b_2|$ iken $b_1 \neq 0$ ve $b_2 \neq 0$ olup, (*) ifadesinden

$$l_1' \ \ldots\ldots \ (a_1b_2 + a_2b_1)x + (b_1b_2 + b_1b_2)y + (c_1b_2 + c_2b_1) = 0$$

$$l_2' \ \ldots\ldots \ (a_1b_2 - a_2b_1)x + (c_1b_2 - c_2b_1) = 0$$

doğruları bulunur. Bu doğrular üzerindeki bütün noktalar l_1 ve l_2 doğrularına eşit taksi uzaklıktadır.

Sonuç 1.3 : *Taksi düzleminde verilen iki doğru birbirine paralel ise bu doğrulara eşit taksi uzaklıktaki noktalar kümesi her iki doğruya paralel bir doğru oluşturur. Eğer paralel değilseler doğrulara eşit taksi uzaklıktaki noktalar kümesi , verilen doğruların arakesitinden geçen biri yataysal diğeri dikeysel olan iki doğrudan oluşur.*

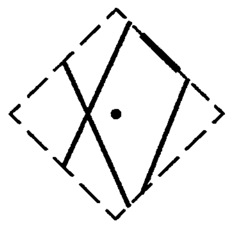
Bölüm 2

Taksi Çemberinde Kiriş ve Teğet Kavramı

2.1 Taksi Çemberinin Kirişleri

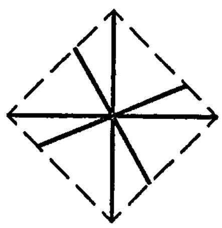
Kiriş: Taksi çemberi üzerindeki herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçasına, eğer bir kenar değilse, **kiriş** denir. (Şekil 2.1.1)

Çap: Taksi çemberinin merkezinden geçen kirişe **çap** denir.(Şekil 2.1.2)



Bazı kirişler

Şekil 2.1.1

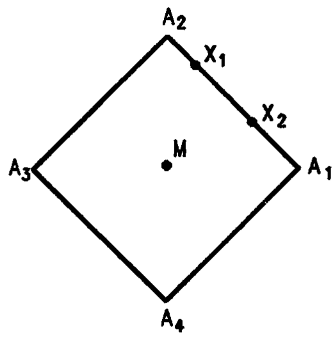


Bazı çaplar

Şekil 2.1.2

2.1.1 Taksi Kirişlerinin Uzunlukları

(a) Aynı kenar üzerinde iki noktanın belirttiği kirişin uzunluğu



Şekil 2.1.1.1

$M = (m_1, m_2)$ merkezli, r yarıçaplı C taksi çemberinin A_1A_2 kenarı üzerinde X_1 ve X_2 noktalarını alalım (şekil 2.1.1.1) .

$$A_1A_2 \; ..... \; y = -x + m_1 + m_2 + r$$

olduğundan noktaların koordinatlarını $X_1 = (x_1, -x_1 + m_1 + m_2 + r)$ ve $X_2 = (x_2, -x_2 + m_1 + m_2 + r)$ olarak alabiliriz. Kabul edelimki $x_1 < x_2$ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} d_T(X_1, X_2) &= |x_1 - x_2| + |(-x_1 + m_1 + m_2 + r) - (-x_2 + m_1 + m_2 + r)| \\ &= -x_1 + x_2 - x_1 + m_1 + m_2 + r + x_2 - m_1 - m_2 - r \\ &= -2x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

dir. Genel olarak

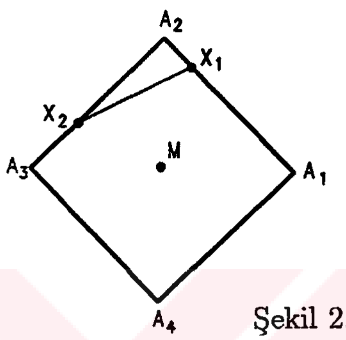
$$X_1,\, X_2 \in \text{ aynı kenar } \Rightarrow d_T(X_1, X_2) = 2\,|x_2 - x_1|$$

dir. Özel olarak $X_1 = A_1$ ve $X_2 = A_2$ alındığında **kenar** uzunluğu $d_T(X_1, X_2) = 2r$ bulunur.

C taksi çemberinin A_1A_2 kenarı üzerindeki X_1 ve X_2 noktalarının belirttiği X_1X_2 kirişinin uzunluğu aslında X_1X_2 taksi yayının uzunluğuna eşittir.

(b) Çemberin bitişik kenarları üzerinde alınan iki noktanın belirttiği kirişin uzunluğu

(i) Noktalardan birisi A_1A_2 üzerinde diğeri A_2A_3 üzerinde olsun (şekil 2.1.1.2).



Şekil 2.1.1.2

$M = (m_1, m_2)$ merkezli, r yarıçaplı C taksi çemberinin A_1A_2 kenarında X_1 noktasını A_2A_3 kenarında X_2 noktasını alalım.

$$A_1A_2 \quad ..... \quad y = -x + m_1 + m_2 + r$$
$$A_2A_3 \quad ..... \quad y = x - m_1 + m_2 + r$$

olduğuna göre $X_1 = (x_1, -x_1+m_1+m_2+r)$ ve $X_2 = (x_2, x_2-m_1+m_2+r)$ olarak alabiliriz. Bu durumda $x_2 < x_1$ dir. Eğer

* $\frac{x_1+x_2}{2} = m_1$ ise $-x_1 + m_1 + m_2 + r = x_2 - m_1 + m_2 + r$ dir.

Bu durumda $d_T(X_1, X_2) = x_1 - x_2 = 2(x_1 - m_1)$ dir.

* $\frac{x_1+x_2}{2} < m_1$ olsun.

Bu durumda $x_2 < -x_1 + 2m_1$ olduğundan

$$x_2 - m_1 + m_2 + r < -x_1 + 2m_1 - m_1 + m_2 + r = -x_1 + m_1 + m_2 + r$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned} d_T(X_1, X_2) &= |x_1 - x_2| + |(-x_1 + m_1 + m_2 + r) - (x_2 - m_1 + m_2 + r)| \\ &= -2x_2 + 2m_1 \end{aligned}$$

bulunur.

* $\frac{x_1+x_2}{2} > m_1$ olsun. Bu durumda

$$x_1 + x_2 > 2m_1 \Rightarrow x_2 - m_1 > -x_1 + m_1$$

olduğundan

$$-x_1 + m_1 + m_2 + r < x_2 - m_1 + m_2 + r$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned} d_T(X_1, X_2) &= |x_1 - x_2| + |(-x_1 + m_1 + m_2 + r) - (x_2 - m_1 + m_2 + r)| \\ &= 2x_1 - 2m_1 \end{aligned}$$

dir. Özel olarak $X_1 = A_1 = (m_1 + r, m_2)$ alındığında

$$d_T(A_1, X_2) = 2(m_1 + r) - 2m_1 = 2r$$

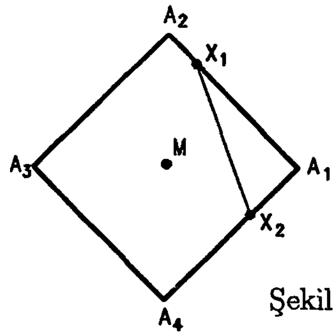
bulunur. Buna göre A_1A_2 kenarı üzerinde A_1 köşe noktasını A_2A_3 kenarı üzerinde herhangi bir noktaya birleştiren her kirişin uzunluğu $2r$ dir. Benzer şekilde $X_2 = A_3$ alındığında $d_T(X_1, A_3) = 2r$ dir.

Sonuç olarak

$$d_T(X_1, X_2) = \begin{cases} -2x_2 + 2m_1 & x_1 + x_2 < 2m_1 \\ 2x_1 - 2m_1 & x_1 + x_2 \geq 2m_1 \end{cases}$$

dir.

(ii) Noktalardan birisi A_1A_2 üzerinde diğeri A_1A_4 üzerinde olsun (şekil 2.1.1.3)



Şekil 2.1.1.3

$M = (m_1, m_2)$ merkezli, r yarıçaplı C taksi çemberinin A_1A_2 kenarı üzerinde X_1 noktasını A_1A_4 kenarında X_2 noktasını alalım.

$$A_1A_2 \quad ..... \quad y = -x + m_1 + m_2 + r$$
$$A_1A_4 \quad ..... \quad y = x - m_1 + m_2 - r$$

olduğundan $X_1 = (x_1, y_1) = (x_1, -x_1 + m_1 + m_2 + r)$ ve
$X_2 = (x_2, y_2) = (x_2, x_2 - m_1 + m_2 - r)$ olarak alabiliriz.

* $\frac{y_1+y_2}{2} = m_2$ iken $x_1 = x_2$ olacağından

$$\begin{aligned} d_T(X_1, X_2) &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ &= 2(y_1 - m_2) \end{aligned}$$

dir.

* $\frac{y_1+y_2}{2} > m_2$ iken $x_2 < x_1$ olacağından

$$\begin{aligned} d_T(X_1, X_2) &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ &= 2(y_1 - m_2) \end{aligned}$$

dir.

* $\frac{y_1+y_2}{2} < m_2$ iken $x_1 < x_2$ olacağından

$$\begin{aligned} d_T(X_1, X_2) &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ &= 2(-y_2 + m_2) \end{aligned}$$

dir. Özel olarak $X_1 = A_2 = (m_1, m_2 + r)$ alındığında

$$d_T(A_2, X_2) = 2((m_2 + r) - (m_2)) = 2r$$

dir. Buna göre A_2 köşe noktasını A_1A_4 üzerindeki hangi noktayla birleştirirsek birleştirelim, elde edilen kirişlerin uzunluğu $2r$ olacaktır. Benzer şekilde $X_2 = A_4$ alındığında A_4 noktasını A_1A_2 üzerindeki her noktayla birleştirdiğimizde uzunluğu $2r$ olan kirişler elde edilir.

Sonuç olarak

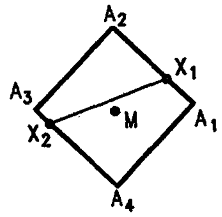
$$d_T(X_1, X_2) = \begin{cases} -2y_2 + 2m_2 & y_1 + y_2 < 2m_2 \\ 2y_1 - 2m_2 & y_1 + y_2 \geq 2m_2 \end{cases}$$

dir. Noktaların diğer bitişik kenarlar üzerinde olması benzer şekilde incelenirse aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 2.1.1.1: *r yarıçaplı bir taksi çemberinin herhagi bir köşesini, bu köşenin karşısındaki kenarlardan herhangi biri üzerindeki bir noktaya birleştiren kirişin taksi uzunluğu $2r$ dir.*

(c) Karşılıklı kenarlar üzerinde alınan farklı iki noktanın belirttiği kirişin uzunluğu

(i) Noktalardan biri A_1A_2 üzerinde diğeri A_3A_4 üzerinde olsun (şekil 2.1.1.4).



Şekil 2.1.1.4

$M = (m_1, m_2)$ merkezli, r yarıçaplı C taksi çemberinin A_1A_2 kenarı üzerinde X_1 noktasını A_3A_4 kenarında X_2 noktasını alalım.

$$A_1A_2 \quad ..... \quad y = -x + m_1 + m_2 + r$$
$$A_3A_4 \quad ..... \quad y = -x + m_1 + m_2 - r$$

olduğundan $X_1 = (x_1, -x_1 + m_1 + m_2 + r)$ ve $X_2 = (x_2, -x_2 + m_1 + m_2 - r)$ olarak alabiliriz. Bu durumda

$$x_2 < m_1 < x_1 \text{ ve } -x_2 + m_1 + m_2 - r < m_2 < -x_1 + m_1 + m_2 + r$$

olduğundan

$$\begin{aligned} d_T(X_1, X_2) &= |x_1 - x_2| + |(-x_1 + m_1 + m_2 + r) - (x_2 - m_1 + m_2 - r)| \\ &= 2r \end{aligned}$$

dir. Özel olarak $X_1 = A_1$ alındığında da

$$\begin{aligned} d_T(A_1, X_2) &= |m_1 + r - x_2| + |m_2 - (-x_2 + m_1 + m_2 - r)| \\ &= 2r \end{aligned}$$

bulunur. O halde A_1 köşe noktasını A_3A_4 kenarı üzerindeki her noktaya birleştiren kirişlerin uzunlukları $2r$ dir.

(ii) Noktalardan biri A_1A_4 üzerinde diğeri A_2A_3 üzerinde olsun.

$M = (m_1, m_2)$ merkezli, r yarıçaplı C taksi çemberinin A_1A_4 kenarı üzerinde X_1 noktasını A_2A_3 kenarında X_2 noktasını alalım.

$$A_1A_4 \quad ..... \quad y = x - m_1 + m_2 - r$$
$$A_2A_3 \quad ..... \quad y = x - m_1 + m_2 + r$$

olduğundan $X_1 = (x_1, x_1 - m_1 + m_2 - r)$ ve $X_2 = (x_2, x_2 - m_1 + m_2 + r)$ olarak alabiliriz. Bu durumda $x_2 < m_1 < x_1$ ve
$x_1 - m_1 + m_2 - r < m_2 < x_2 - m_1 + m_2 + r$ dir . Buna göre

$$\begin{aligned} d_T(X_1, X_2) &= |x_1 - x_2| + |(x_1 - m_1 + m_2 - r) - (x_2 - m_1 + m_2 + r)| \\ &= 2r \end{aligned}$$

dir. Özel olarak $X_2 = A_3$ olduğunda yine

$$\begin{aligned} d_T(X_1, A_3) &= |x_1 - (m_1 - r)| + |(x_1 - m_1 + m_2 - r) - m_2| \\ &= 2r \end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 2.1.1.2: *r yarıçaplı bir taksi çemberinde farklı iki nokta karşılıklı (paralel) iki kenar üzerinde ise bu noktaları birleştiren kirişin taksi uzunluğu $2r$ dir.*

Büyük Kiriş: Bir taksi çemberinde uzunluğu çapın uzunluğuna eşit olan kirişleri büyük kiriş olarak tanımlayalım.

Sonuç 2.1.1.3: *Bir taksi çemberinde farklı iki noktanın şu durumlarında büyük kirişler elde edilir:*

(1) *Noktalardan birisi çemberin köşe noktası iken,*

(2) *Noktaların ikiside çemberin köşe noktası iken,*

(3) *Noktalar çemberin karşılıklı iki (paralel) kenarı üzerinde iken.*

2.2 Taksi Çemberinin Teğetleri

Tanım 2.2.1 *Düzlemde bir C taksi çemberi ile bir d doğrusu verilsin.*

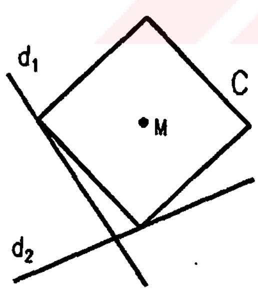
$$'' \; d\,,C \text{ ye köşesel teğettir} \Leftrightarrow d \cap C = \{A\} \ni A\,,C \text{ nin bir köşesidir.}''$$

biçiminde tanımlayalım. Yani **doğru ile taksi çemberi, çemberin bir tek köşe noktasında kesişiyorsa doğru taksi çembere köşesel teğettir** *denir .*
(Şekil 2.2.1)

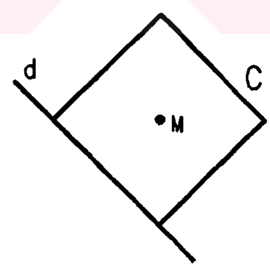
Tanım 2.2.2 *Taksi düzleminde bir C taksi çemberi ile bir d doğrusu verilsin.*

$$'' \; d\,,C \text{ ye kenarsal teğettir} \Leftrightarrow d \cap C = a : a\,,C \text{ nin bir kenarıdır.}''$$

biçiminde tanımlayalım. Yani **doğru ile taksi çemberi, çemberin bir tek kenarı boyunca kesişiyorsa doğru taksi çembere kenarsal teğettir** *denir .*
(Şekil 2.2.2)



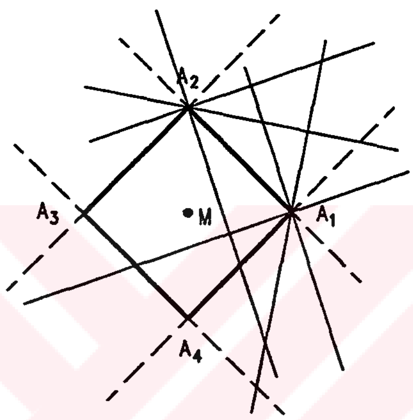
Şekil 2.2.1



Şekil 2.2.2

2.2.1 Taksi Çemberinin Üzerindeki Bir Noktadan Geçen Teğetleri

Öncelikle çemberin bir köşe noktasından çizilen köşesel teğetlerine bakalım. Biz $M = (m_1, m_2)$ merkezli, r yarıçaplı C taksi çemberinden söz ederken daima $A_1 = (m_1 + r\ ,\ m_2)$, $A_2 = (m_1\ ,\ m_2 + r)$, $A_3 = (m_1 - r\ ,\ m_2)$, $A_4 = (m_1\ ,\ m_2 - r)$ olarak vereceğiz ve aşağıdaki biçimde göstereceğiz. (Şekil 2.2.1.1)



Şekil 2.2.1.1

A_1 noktasından geçen köşesel teğet doğruları

$$\{(x,y) : y = mx + (m_2 - m(m_1 + r)),\ |m| > 1,\ m \in \mathbb{R}\ \}$$

biçimindeki **dikeysel** doğrulardır.

A_2 noktasından geçen köşesel teğet doğruları

$$\{(x,y) : y = mx + (m_2 - mm_1) + r,\ |m| < 1,\ m \in \mathbb{R}\ \}$$

biçimindeki **yataysal** doğrulardır.

A_3 noktasından geçen köşesel teğet doğruları

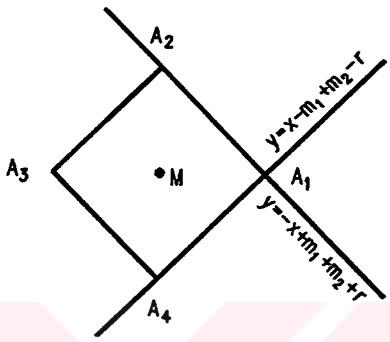
$$\{(x,y) : y = mx + (m_2 - m(m_1 - r)),\ |m| > 1,\ m \in \mathbb{R}\ \}$$

dır. Ve son olarak A_4 noktasından geçen köşesel teğet doğruları

$$\{(x,y) : y = mx + (m_2 - mm_1) - r,\ |m| < 1,\ m \in \mathbb{R}\ \}$$

dir. Böylece çemberin köşe noktalarının her birinden sonsuz sayıda köşesel teğet doğrusu geçer.

Şimdi köşe noktalarından geçen kenarsal teğetleri inceleyelim:



Şekil 2.2.1.2

A_1 noktasından geçen iki kenarsal teğet vardır ve sırasıyla

$$\{(x,y) : y = x - m_1 + m_2 - r\}$$

$$\{(x,y) : y = -x + m_1 + m_2 + r\}$$

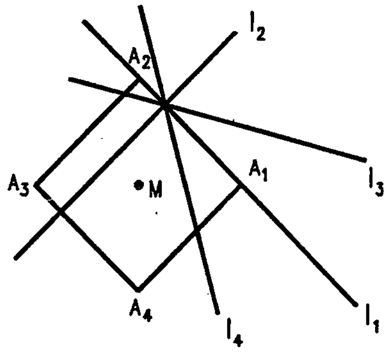
dir (Şekil 2.2.1.2). Benzer şekilde A_2 den geçen iki kenarsal teğet vardır ve bunlar

$$\{(x,y) : y = x - m_1 + m_2 + r\}$$

$$\{(x,y) : y = -x + m_1 + m_2 + r\}$$

dir. Yani bir taksi çemberinin her köşe noktasından iki kenarsal teğet geçer. Böylece, bir taksi çemberinin köşe noktalarından sonsuz sayıda teğet geçer, öyleki bunlardan ikisi kenarsal diğerleri köşesel teğetlerdir.

Şimdi taksi çemberinin köşe olmayan noktalarından geçen teğetlerine bakalım. Buna göre kabul edelimki $P \neq A_i$, $i = 1,2,3,4$ ve $P \circ C$ olsun. Ayrıca P noktasını C taksi çemberinin A_1A_2 kenarı üzerinde alalım (Şekil 2.2.1.3).



Şekil 2.2.1.3

Buna göre l_1, l_2, l_3, l_4 doğruları sırasıyla P den geçen -1 eğimli doğru , 1 eğimli doğru, herhangi bir yataysal ve herhangi bir dikeysel doğru olsun. l_1 doğrusu C yi A_1A_2 kenarı boyunca keser. Buna göre l_1, P den geçen C ye kenarsal teğet olan bir doğrudur. l_2, l_3 ve l_4 doğruları, Şekil 2.2.1.3 dan görüldüğü gibi, C yi P den başka bir noktada daha kestikleri için teğet doğruları olamazlar. Buna göre C nin A_1A_2 kenarı üzerindeki P noktasından C ye teğet olan bir tek kenarsal teğet vardır. Nokta çemberin diğer kenarları üzerinde iken benzer şekilde bir tek kenarsal teğet elde edilir.

Sonuç 2.2.3 *P taksi çemberi üzerinde alınan herhangi bir nokta olsun*

(1) *Eğer P köşe noktası ise bu noktadan çembere ikisi kenarsal diğerleri köşesel olan sonsuz sayıda teğet çizilebilir,*

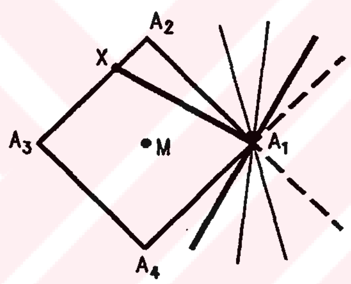
(2) *Eğer P köşe noktalarından farklı bir nokta ise bu noktadan çembere bir tek kenarsal teğet çizilebilir.*

2.2.2 Köşesel ve Kenarsal Teğetlerin Çaplarla ve Kirişlerle İlişkilendirilmesi

Bilindiği gibi Öklid düzleminde bir çembere üzerindeki bir noktadan bir tek teğet çizilebiliyor. Ve bu teğet, çemberin çapına diktir. Taksi düzleminde, çembere üzerindeki bir noktadan en az bir teğet çizilebiliyordu. Şimdi bu teğetlerin çaplarla ve kirişlerle aralarında nasıl bir ilgi olduğunu araştıralım.

Esas Köşesel Teğet: Bir taksi çemberinin çapına dik olan köşesel teğetini esas köşesel teğet olarak tanımlayalım.

Bu tanıma göre $M = (m_1, m_2)$ merkezli, r yarıçaplı bir taksi çemberinin $A_1 = (m_1 + r, m_2)$ noktasından geçen esas köşesel teğetini belirleyelim (Şekil 2.2.2.1) :



Şekil 2.2.2.1

$A_1 = (m_1 + r, m_2)$ noktasından geçen teğetler

$$\{(x, y) : y = mx + (m_2 - m(m_1 + r)),\ |m| \geq 1,\ m \in \mathbb{R}\ \}$$

dir. $|m| > 1$ iken A_1 den geçen köşesel teğetler, $|m| = 1$ iken kenarsal teğetler elde edilir. Esas köşesel teğet yukarıdaki teğetlerden, A_1 den geçen çapa dik olanıdır. Buna göre

$$y = m_2, \quad m_1 - r \leq x \leq m_1 + r$$

çapına dik olan doğru $x = m_1 + r$ dir. O halde bu dikey doğru A_1 noktasındaki esas köşesel teğettir. A_1 noktasının diğer köşesel teğetleri içinde esas köşesel teğet olup olmadığını inceleyelim:

$$y = mx + (m_2 - m(m_1 + r)),\ m > 1 \text{ ve } m \in \mathbb{R}$$

teğetine dik olan kiriş

$$y = -\frac{1}{m}x + \frac{m_2 m + m_1 + r}{m}\ ,\quad \frac{m_1 + r + m(m_1 - r)}{1+m} \leq x \leq m_1 + r\ ,\ m > 1$$

dir. $M = (m_1, m_2)$ noktası için

$$-\frac{1}{m}m_1 + \frac{m_2 m + m_1 + r}{m} = \frac{m_2 m + r}{m} \neq m_2$$

olduğundan merkez, kiriş üzerinde değil ve kiriş de çap değildir. Ancak köşesel teğete dik olan bu kiriş büyük kiriştir: Çünkü $X = (\frac{m_1+r+m(m_1-r)}{1+m}, m_2 + \frac{2r}{1+m})$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
d_T(X, A_1) &= \left|(m_1 + r) - \tfrac{m_1+r+m(m_1-r)}{1+m}\right| + \left|m_2 - (m_2 + \tfrac{2r}{1+m})\right| \\
&= m_1 + r - \tfrac{m_1+r+m(m_1-r)}{1+m} - m_2 + m_2 + \tfrac{2r}{1+m} \\
&= \tfrac{(1+m)(m_1+r)-m_1-r-m(m_1-r)+2r}{1+m} \\
&= \tfrac{2r(1+m)}{(1+m)} \\
&= 2r
\end{aligned}$$

dir. Buna göre $m > 1$ iken A_1 in köşesel teğetlerine dik olan büyük kirişler vardır. Benzer şekilde $m < -1$ iken incelendiğinde yine köşesel teğetlere dik olan büyük kirişler bulunur. $m = 1$ iken $y = x - m_1 + m_2 - r$ kenarsal teğeti

$$y = -x + m_1 + m_2\ ,\quad m_1 - \frac{r}{2} \leq x \leq m_1 + \frac{r}{2}$$

çapına diktir. $m = -1$ iken $y = -x + m_1 + m_2 + r$ kenarsal teğetine

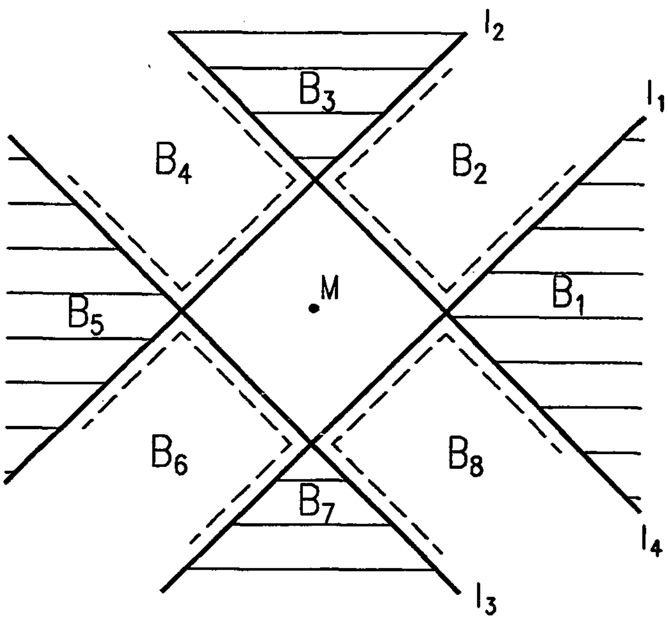
$$y = x - m_1 + m_2\ ,\ \ m_1 - \frac{r}{2} \leq x \leq\ m_1 + \frac{r}{2}$$

çapı diktir. Böylece A_1 köşe noktasından geçen köşesel teğetlerin yalnız bir tanesi çapa diktir ve bu teğet A_1 den geçen $x = m_1 + r$ dikey doğrusudur. Benzer şekilde A_2 noktasından geçen köşesel teğetlerin içinde $y = m_2 + r$ yatay doğrusu çapa diktir. A_3 ve A_4 den esas köşesel teğetler $x = m_1 - r$ ve $y = m_2 - r$ doğrularıdır. O halde çember üzerindeki noktalardan geçen köşesel teğetlerden birisi esas köşesel teğettir, öyleki bu esas köşesel teğetler ya dikey yada yatay doğrulardır.

Sonuç 2.2.4 *Taksi çemberinin her bir köşe noktasından geçen köşesel teğetlerin içinde bir tanesi (esas köşesel teğet) çapa; diğerlerinin herbiri bir büyük kirişe diktir. Aynı zamanda taksi çemberinin herbir köşe noktasından iki kenarsal teğet geçer ki bunlarda çapa diktir.*

2.2.3 Taksi Çemberine Dışındaki Noktadan Çizilen Teğetler

Bir $M = (m_1, m_2)$ merkezli r yarıçaplı taksi çemberinin dışını aşağıdaki şekilde bölgelere ayıralım:



Şekil 2.2.3.1

$$B_1 = \{(x,y) : y \leqslant x - m_1 + m_2 - r \quad \text{ve} \quad y \geqslant -x + m_1 + m_2 + r\}$$

$$B_2 = \left\{ (x,y) : \begin{array}{l} y > x - m_1 + m_2 - r \quad \text{ve } y > -x + m_1 + m_2 + r \ \text{ ve} \\ y < x - m_1 + m_2 + r \end{array} \right\}$$

$$B_3 = \{(x,y) : y \geqslant x - m_1 + m_2 + r \quad \text{ve} \quad y \geqslant -x + m_1 + m_2 + r\}$$

$$B_4 = \left\{ (x,y) : \begin{array}{l} y > x - m_1 + m_2 + r \quad \text{ve} \ \ y < -x + m_1 + m_2 + r \ \text{ ve} \\ y > -x + m_1 + m_2 - r \end{array} \right\}$$

$$B_5 = \{(x,y) : y \geqslant x - m_1 + m_2 + r \quad \text{ve} \quad y \leqslant -x + m_1 + m_2 - r\}$$

$$B_6 = \left\{ (x,y) : \begin{array}{l} y > x - m_1 + m_2 - r \quad \text{ve} \ \ y < x - m_1 + m_2 + r \ \text{ ve} \\ y < -x + m_1 + m_2 + r \end{array} \right\}$$

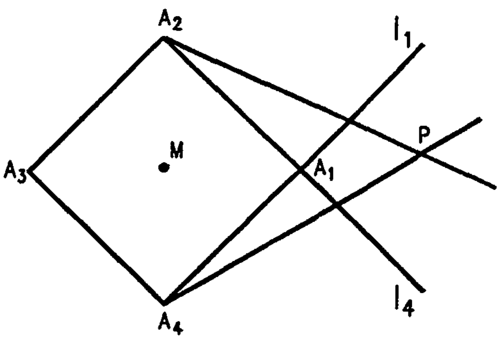
$$B_7 = \{(x,y) : y \leqslant x - m_1 + m_2 - r \quad \text{ve} \quad y \leqslant -x + m_1 + m_2 - r\}$$

$$B_8 = \left\{ (x,y) : \begin{array}{l} y < x - m_1 + m_2 - r \quad \text{ve} \ \ y > -x + m_1 + m_2 - r \ \text{ ve} \\ y < -x + m_1 + m_2 + r \end{array} \right\}$$

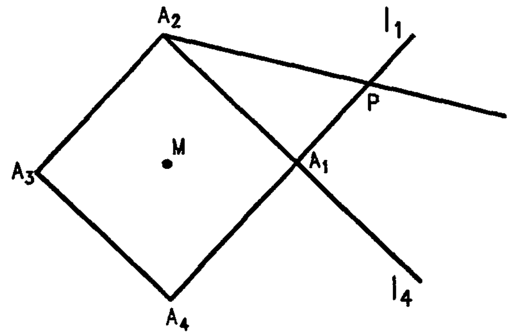
P noktası çemberin dışında bir nokta olsun.

(1) $P \in B_1$ (veya $P \in B_5$) olsun. Bu durumda

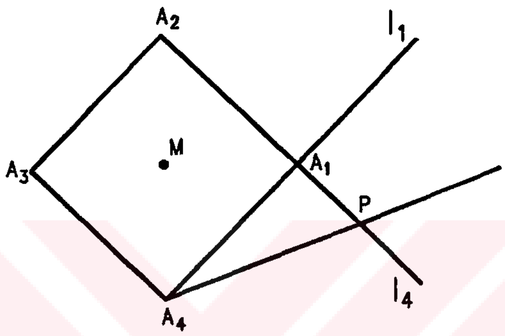
$P \not\rho\, l_1, l_4$ (veya $P \not\rho\, l_2, l_3$) $\rightarrow PA_2$ ve PA_4 köşesel teğetleri (şekil 2.2.3.2)
$P \circ l_1$ (veya $P \circ l_3$) $\rightarrow PA_2$ köşesel; PA_1(veya PA_3) kenarsal teğetleri (şekil 2.2.3.3)
$P \circ l_4$ (veya $P \circ l_2$) $\rightarrow PA_4$ köşesel; PA_1 (veya PA_3) kenarsal teğetleri (şekil 2.2.3.4)
vardır.



Şekil 2.2.3.2

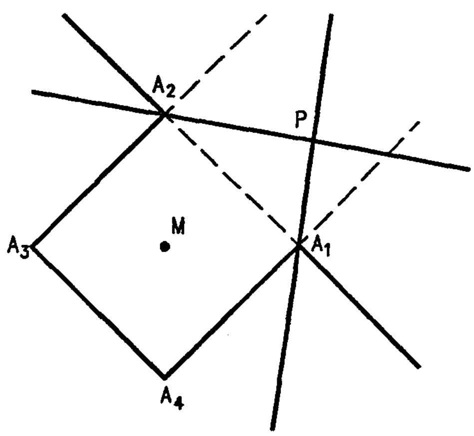


Şekil 2.2.3.3



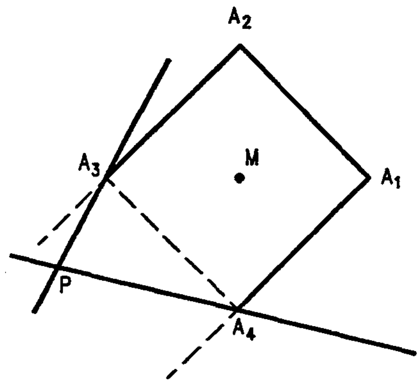
Şekil 2.2.3.4

(2) $P \in B_2$ olsun. Bu durumda PA_1 ve PA_2 doğruları köşesel teğet doğrularıdır.



Şekil 2.2.3.5

(3) $P \in B_6$ olsun. Bu durumda PA_3 ve PA_4 doğruları köşesel teğet doğrularıdır. P nin diğer bölgelerde olması benzer durumları gerektirir.



Şekil 2.2.3.6

Sonuç 2.2.5 *Bir taksi çemberine dışındaki bir noktadan iki teğet doğru çizilebilir; Bunların ya ikisi de köşesel teğet yada biri köşesel biri kenarsal teğettir.*

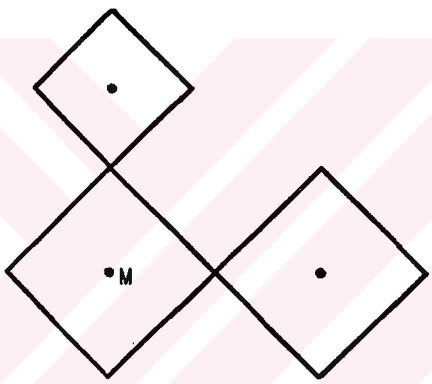
2.3 İki Taksi Çemberinin Teğet Olması

Tanım 2.3.1 *Taksi düzleminde C_1 ve C_2 taksi çemberleri verilsin.*

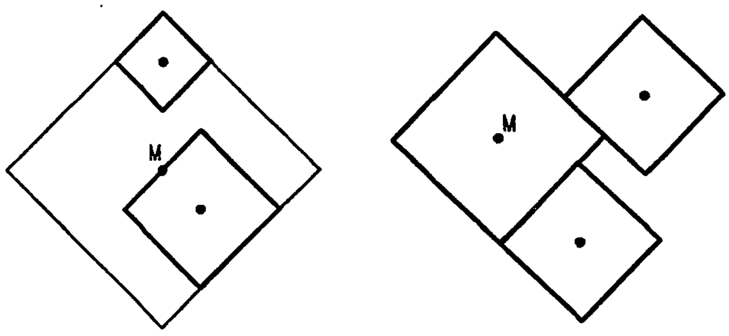
"C_1 ve C_2 köşesel teğettir$\Leftrightarrow$ $C_1 \cap C_2 = \{A\} \ni$ A hem C_1 in hemde C_2 nin köşe noktası " olarak tanımlansın. Yani **iki taksi çemberi bir tek köşe noktasında kesişirse bu iki çember köşesel teğettir** *denir.*

Tanım 2.3.2 *Taksi düzleminde C_1 ve C_2 taksi çemberleri verilsin.*

"C_1 ve C_2 kenarsal teğettir$\Leftrightarrow$ $C_1 \cap C_2 = \{d : d$ hem C_1 in hemde C_2 nin üzerinde kenar parçası$\}$" olarak tanımlansın. Yani **iki taksi çemberi bir doğru parçası boyunca kesişirse bu iki çembere kenarsal teğettir** *denir.*



Köşesel teğet çemberler



Kenarsal teğet çemberler

Şekil 2.3.1

2.3.1 İçten-Teğet Taksi Çemberleri

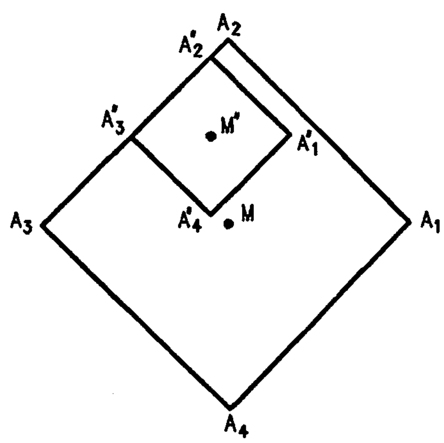
Öklid düzleminde O merkezli, r yarıçaplı Öklid çemberi ile O' merkezli, r' yarıçaplı Öklid çemberinin birbirine göre konumunda eğer $|OO'| = r - r'$ ise bu iki çembere iç-teğet çemberler denir. Taksi düzleminde de bu özellik benzer olarak korunuyor. Bunu sağladığını göstermek için $M = (m_1, m_2)$ merkezli, r yarıçaplı C_1 taksi çemberi ile $M' = (m_1', m_2')$ merkezli, r' yarıçaplı C_2 taksi çemberinin kenarsal teğet olduğunu ve M' noktasının C_1 çemberinin içinde kaldığını kabul edelim. Ohalde C_2, C_1 e ya bir kenar parçası boyunca yada iki kenar parçası boyunca teğettir.

(1) Kabul edelimki C_2, C_1 e $y = x - m_1 + m_2 + r$ kenarından teğet olsun. (Şekil 2.3.1.1)

Bu durumda $m_1' < m_1$ ve $m_2' > m_2$ olmak zorundadır. Ayrıca $A_2' = (m_1' \ , \ m_2' + r')$, $A_3' = (m_1' - r' \ , \ m_2')$ köşe noktaları $y = x - m_1 + m_2 + r$ üzerinde olacağından $m_2' = m_1' - m_1 + m_2 + r - r'$ dir. Buna göre

$$\begin{aligned} d_T(M, M') = |MM'| &= |m_1 - m_1'| + |m_2 - m_2'| \\ &= m_1 - m_1' - m_2 + m_2' \\ &= r - r' \end{aligned}$$

bulunur.



Şekil 2.3.1.1

Veya bu durum için $d_T(M,M') = |MM'| = r - r'$ olduğunu şu şekilde de gösterebiliriz: $A'_2 = (m'_1, m'_2 + r')$, $A'_3 = (m'_1 - r' \ , \ m'_2)$ köşe noktaları $M = (m_1, m_2)$ merkezli, r yarıçaplı C_1 taksi çemberi üzerinde olduğundan

$$\begin{aligned} d_T(A'_3, M) &= d_T(M,M') + d_T(M', A'_3) \\ r &= d_T(M,M') + r' \\ r - r' &= d_T(M,M') \end{aligned}$$

bulunur.

(2) Kabul edelimki C_2, C_1 e $y = -x + m_1 + m_2 + r$ kenarından teğet olsun.

Bu durumda $m'_1 > m_1$ ve $m'_2 > m_2$ olmak zorundadır. Ayrıca $A'_1 = (m'_1 + r' \ , \ m'_2)$, $A'_2 = (m'_1 \ , \ m'_2 + r')$ köşe noktaları $M = (m_1, m_2)$ merkezli, r yarıçaplı C_1 taksi çemberi üzerinde olduğundan

$$\begin{aligned} d_T(A'_1, M) &= d_T(M,M') + d_T(M', A'_1) \\ r &= d_T(M,M') + r' \\ r - r' &= d_T(M,M') \end{aligned}$$

bulunur.

(3) Kabul edelimki C_2, C_1 e $y = x - m_1 + m_2 - r$ kenarından teğet olsun.

Bu durumda $m'_1 > m_1$ ve $m'_2 < m_2$ olmak zorundadır. Ayrıca $A'_1 = (m'_1 + r' \ , \ m'_2)$, $A'_4 = (m'_1 \ , \ m'_2 - r')$ köşe noktaları $M = (m_1, m_2)$ merkezli, r yarıçaplı C_1 taksi çemberi üzerinde olduğundan

$$\begin{aligned} d_T(A'_1, M) &= d_T(M,M') + d_T(M', A'_1) \\ r &= d_T(M,M') + r' \\ r - r' &= d_T(M,M') \end{aligned}$$

bulunur.

(4) Kabul edelimki C_2, C_1 e $y = -x + m_1 + m_2 - r$ kenarından teğet olsun.

Bu durumda $m_1' < m_1$ ve $m_2' < m_2$ olmak zorundadır. Ayrıca $A_3' = (m_1' - r' \ , \ m_2')$, $A_4' = (m_1' \ , \ m_2' - r')$ köşe noktaları $M = (m_1, m_2)$ merkezli, r yarıçaplı C_1 taksi çemberi üzerinde olduğundan

$$\begin{aligned} d_T(A_3', M) &= d_T(M, M') + d_T(M', A_3') \\ r &= d_T(M, M') + r' \\ r - r' &= d_T(M, M') \end{aligned}$$

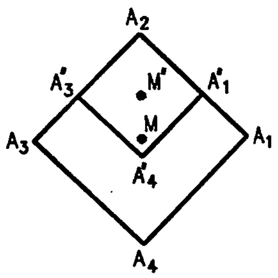
bulunur.

(5) Kabul edelimki C_2, C_1 e hem $y = x - m_1 + m_2 + r$ kenarından hemde $y = -x + m_1 + m_2 + r$ kenarından teğet olsun. (Şekil 2.3.1.2)

Bu durumda $m_1' = m_1$ ve $m_2' > m_2$ olmak zorundadır. Ayrıca $A_1' = (m_1' + r' \ , \ m_2')$, $A_2' = (m_1' \ , \ m_2' + r')$, $A_3' = (m_1' - r' \ , \ m_2')$ köşe noktaları $M = (m_1, m_2)$ merkezli, r yarıçaplı C_1 taksi çemberi üzerinde olduğundan

$$\begin{aligned} d_T(A_2', M) &= d_T(M, M') + d_T(M', A_2') \\ r &= d_T(M, M') + r' \\ r - r' &= d_T(M, M') \end{aligned}$$

bulunur.



Şekil 2.3.1.2

(6) Kabul edelimki C_2, C_1 e hem $y=-x+m_1+m_2+r$ kenarından hemde $y=x-m_1+m_2-r$ kenarından teğet olsun.

Bu durumda $m_1'>m_1$ ve $m_2'=m_2$ olmak zorundadır. Ayrıca $A_1'=(m_1'+r'\ ,\ m_2')$, $A_2'=(m_1'\ ,\ m_2'+r')$, $A_4'=(m_1'\ ,\ m_2'-r')$ köşe noktaları $M=(m_1,m_2)$ merkezli ,r yarıçaplı C_1 taksi çemberi üzerinde olduğundan

$$\begin{aligned} d_T(A_2',M) &= d_T(M,M')+d_T(M',A_2') \\ r &= d_T(M,M')+r' \\ r-r' &= d_T(M,M') \end{aligned}$$

bulunur.

(7) Kabul edelimki C_2, C_1 e hem $y=x-m_1+m_2-r$ kenarından hemde $y=-x+m_1+m_2-r$ kenarından teğet olsun.

Bu durumda $m_1'=m_1$ ve $m_2'<m_2$ olmak zorundadır. Ayrıca $A_1'=(m_1'+r'\ ,\ m_2')$, $A_3'=(m_1'-r'\ ,\ m_2')$, $A_4'=(m_1'\ ,\ m_2'-r')$ köşe noktaları $M=(m_1,m_2)$ merkezli, r yarıçaplı C_1 taksi çemberi üzerinde olduğundan

$$\begin{aligned} d_T(A_4',M) &= d_T(M,M')+d_T(M',A_4') \\ r &= d_T(M,M')+r' \\ r-r' &= d_T(M,M') \end{aligned}$$

bulunur.

(8) Kabul edelimki C_2, C_1 e hem $y=-x+m_1+m_2-r$ kenarından hemde $y=x-m_1+m_2+r$ kenarından teğet olsun.

Bu durumda $m_1'<m_1$ ve $m_2'=m_2$ olmak zorundadır. Ayrıca $A_2'=(m_1'\ ,\ m_2'+r')$, $A_3'=(m_1'-r'\ ,\ m_2')$, $A_4'=(m_1'\ ,\ m_2'-r')$ köşe noktaları $M=(m_1,m_2)$ merkezli, r yarıçaplı C_1 taksi çemberi üzerinde olduğundan

$$\begin{aligned} d_T(A'_3, M) &= d_T(M, M') + d_T(M', A'_3) \\ r &= d_T(M, M') + r' \\ r - r' &= d_T(M, M') \end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 2.3.1.1: *Taksi düzleminde kenarsal teğet olan $M = (m_1, m_2)$ merkezli, r yarıçaplı C_1 taksi çemberi ile $M' = (m'_1, m'_2)$ merkezli, r' yarıçaplı C_2 taksi çemberi için M' noktasının C_1 in iç bölgesinde kalması durumunda $d_T(M, M') = |MM'| = r - r'$ özelliği sağlanmaktadır. (Bu özelliği sağlayan C_1 ve C_2 taksi çemberlerine içten- teğet taksi çemberleri denir).*

2.3.2 Dıştan - Teğet Taksi Çemberleri

Öklid düzleminde O merkezli, r yarıçaplı Öklid çemberi ile O' merkezli, r' yarıçaplı Öklid çemberinin birbirine göre konumunda eğer $|OO'| = r+r'$ ise bu iki çember birbirine dıştan teğet oluyordu.Taksi düzleminde birbirine köşesel veya kenarsal teğet olan iki taksi çemberi verildiğinde bu özelliğin sağlandığını gösterelim. Bunun için $M = (m_1, m_2)$ merkezli, r yarıçaplı C_1 taksi çemberi ile $M' = (m'_1, m'_2)$ merkezli, r' yarıçaplı C_2 taksi çemberi verilsin.

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(x, y) : |x - m_1| + |y - m_2| < r\ \} \\ B_2 &= \{(x, y) : |x - m'_1| + |y - m'_2| < r'\ \} \end{aligned}$$

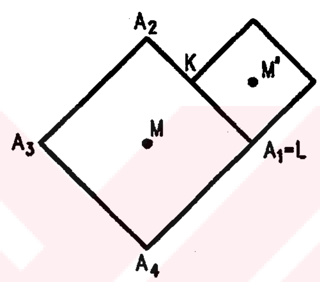
bölgelerini düşünelim. $M' \notin B_1$ ve $M \notin B_2$ olmak üzere C_1 ve C_2 nin birbirine teğet olduğunu kabul edelim.

(1) Bu durumda C_1 in $y = -x + m_1 + m_2 + r$, $m_1 \leqslant x \leqslant m_1 + r$ kenarı üzerinde çalışalım. C_2 taksi çemberi, $K \neq L$ olmak üzere $K = (d_1, e_1)$, $L = (d_2, e_2)$ köşe noktalarının belirttiği kenar üzerindeki parça boyunca C_1 e teğet olsun.

(i) $y = -x+m_1+m_2+r$, $d_1 \leq x \leq d_2 \ni d_1 < m_1+r$ ve $d_2 \geqslant m_1+r$ olsun.

$m_1 < d_1 < m_1 + r$ ve $d_2 = m_1 + r$ iken (yani $L = A_1$, şekil 2.3.2.1)

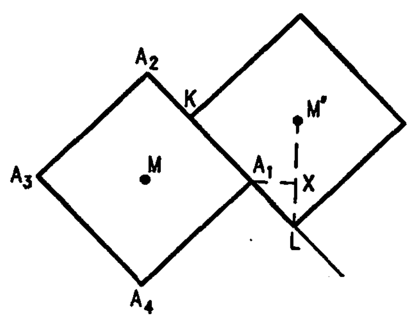
$$\begin{aligned} d_T(M, M') = |MM'| &= d_T(M, L) + d_T(L, M') \\ &= r + r' \end{aligned}$$



Şekil 2.3.2.1

dir. $m_1 < d_1 < m_1 + r$ ve $d_2 > m_1 + r$ iken (şekil 2.3.2.2)

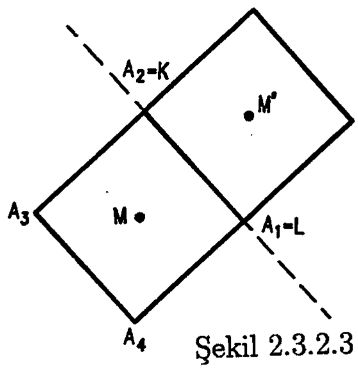
$$\begin{aligned} d_T(M, M') &= d_T(M, A_1) + d_T(A_1, X) + d_T(M', X) \\ &= r + r' \end{aligned}$$



Şekil 2.3.2.2

(yani KA_1 doğru parçası boyunca teğet)dir. $d_1 = m_1$ ve $d_2 = m_1 + r$ iken (şekil 2.3.2.3) A_1 ve A_2 noktaları M' merkezli taksi çemberininde köşe noktalarıdır. Buna göre

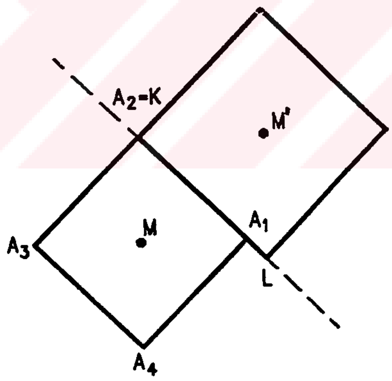
$$\begin{aligned} d_T(M, M') &= d_T(M, A_1) + d_T(A_1, M') \\ &= r + r' \end{aligned}$$



Şekil 2.3.2.3

dir. $d_1 = m_1$ ve $d_2 > m_1 + r$ iken (şekil 2.3.2.4) A_2 noktası M' merkezli taksi çemberininde köşe noktasıdır. Buna göre

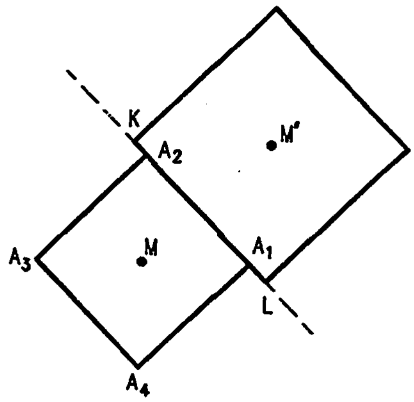
$$\begin{aligned} d_T(M, M') &= d_T(M, A_2) + d_T(A_2, M') \\ &= r + r' \end{aligned}$$



Şekil 2.3.2.4

dir. $d_1 < m_1$ ve $d_2 \geqslant m_1 + r$ iken (şekil 2.3.2.5) A_1 ve A_2 noktaları M' merkezli taksi çemberininde üzerinde olduğundan

$$\begin{aligned} d_T(M, M') &= d_T(M, A_1) + d_T(A_1, M') \\ &= r + r' \end{aligned}$$



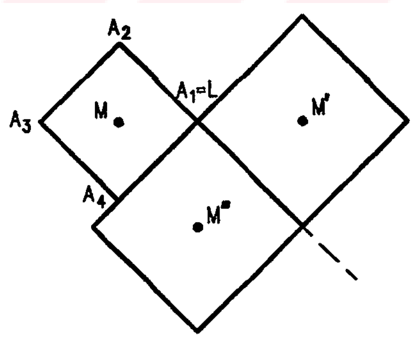
Şekil 2.3.2.5

dir.

(ii) $y=-x+m_1+m_2+r,\ d_2 \leq x \leq d_1 \ni d_1 > m_1+r$ ve $d_2 \leq m_1+r$ olsun.

$d_1 > m_1+r$ ve $d_2 = m_1+r$ iken (şekil 2.3.2.6) M' ve M'' merkezli aynı yarıçaplı iki taksi çemberi vardır, öyleki $M' \notin B_1$ ve $M'' \notin B_1$ dir. M' merkezli taksi çemberi A_1 den geçen köşesel teğet taksi çemberini, M'' merkezli taksi çemberi $y=x-m_1+m_2-r$ kenarı üzerinde kenarsal teğet taksi çemberini belirtir ve

$$\begin{aligned} d_T(M,M') = \ & |MM'| = \ d_T(M,L)+d_T(L,M') = \ r+r' \\ d_T(M,M'') = \ & |MM''| = \ d_T(M,L)+d_T(L,M'') = \ r+r' \end{aligned}$$

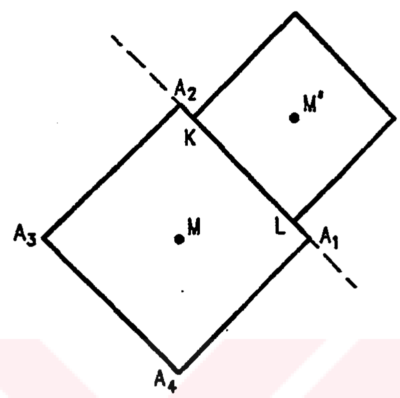


Şekil 2.3.2.6

dir. $d_1 > m_1+r$ ve $d_2 < m_1+r$ olması durumunda (i) de K ve L noktalarının rollerinin değişmesiyle sonuç aynı şekilde elde edilir.

(iii) $y = -x + m_1 + m_2 + r$, $d_1 \leq x \leq d_2 \ni m_1 \leq d_1 \leq m_1 + r$ ve $m_1 \leq d_2 \leq m_1 + r$ (şekil 2.3.2.7) olsun.

$$\begin{aligned} d_T(M, M') &= d_T(M, K) + d_T(K, M') \\ &= r + r' \end{aligned}$$



Şekil 2.3.2.7

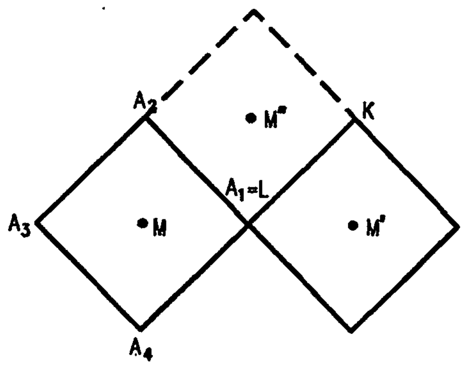
dir.

(2) Bu durumda C_1 taksi çemberinin $y = x - m_1 + m_2 - r$, $m_1 \leq x \leq m_1 + r$ kenarı üzerinde çalışalım. O halde C_2 taksi çemberi, $K \neq L$ olmak üzere $K = (d_1, e_1)$, $L = (d_2, e_2)$ köşe noktalarının belirttiği kenar üzerindeki parça boyunca C_1 e teğet olsun.

(i) $y = x - m_1 + m_2 - r$, $d_2 \leq x \leq d_1 \ni d_1 > m_1 + r$ ve $d_2 \leq m_1 + r$ olsun.

$d_1 > m_1 + r$ ve $d_2 = m_1 + r$ iken (şekil 2.3.2.8) M' ve M'' merkezli aynı yarıçaplı iki taksi çemberi vardır, öyleki $M' \notin B_1$ ve $M'' \notin B_1$ dir. M' merkezli taksi çemberi C_1 e A_1 noktasından köşesel teğet olurken, M'' merkezli taksi çemberi C_1 e $y = -x + m_1 + m_2 + r$ den kenarsal teğet taksi çemberini belirtir ve

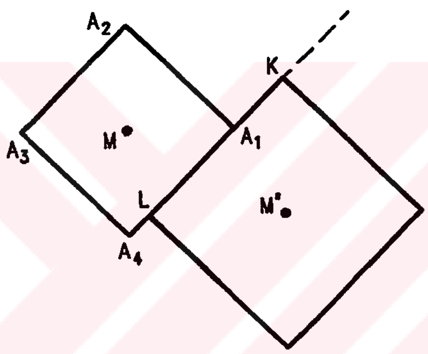
$$\begin{aligned} d_T(M, M') &= d_T(M, L) + d_T(L, M') = r + r' \\ d_T(M, M'') &= d_T(M, L) + d_T(L, M'') = r + r' \end{aligned}$$



Şekil 2.3.2.8

dir. $d_1 > m_1 + r$ ve $m_1 < d_2 < m_1 + r$ iken (şekil 2.3.2.9) A_1, M' merkezli taksi çemberi üzerinde olduğundan

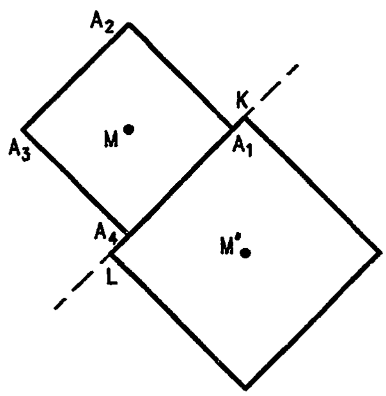
$$\begin{aligned} d_T(M, M') &= d_T(M, A_1) + d_T(A_1, M') \\ &= r + r' \end{aligned}$$



Şekil 2.3.2.9

dir. $d_1 > m_1 + r$ ve $d_2 < m_1$ iken (şekil 2.3.2.10) A_1 ve A_4 ,M' merkezli taksi çemberi üzerinde olduğundan

$$\begin{aligned} d_T(M, M') &= d_T(M, A_1) + d_T(A_1, M') \\ &= r + r' \end{aligned}$$



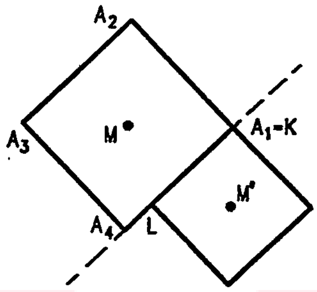
Şekil 2.3.2.10

dir.

(ii) $y = x - m_1 + m_2 - r$, $d_2 \leq x \leq d_1 \ni d_1 \leq m_1 + r$ ve $d_2 < m_1 + r$ olsun.

$d_1 = m_1 + r$ ve $m_1 < d_2 < m_1 + r$ iken (şekil 2.3.2.11)

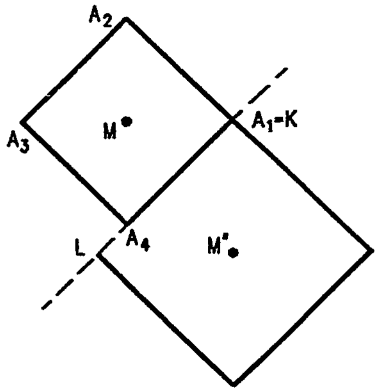
$$\begin{aligned} d_T(M, M') &= d_T(M, A_1) + d_T(A_1, M') \\ &= r + r' \end{aligned}$$



Şekil 2.3.2.11

dir. $d_1 = m_1 + r$ ve $d_2 < m_1$ iken (şekil 2.3.2.12)

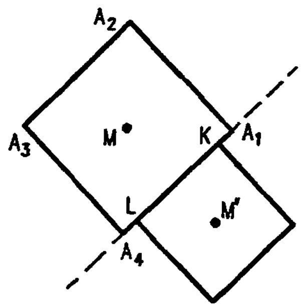
$$\begin{aligned} d_T(M, M') &= d_T(M, A_1) + d_T(A_1, M') \\ &= r + r' \end{aligned}$$



Şekil 2.3.2.12

dir. $m_1 < d_1 < m_1 + r$ ve $m_1 < d_2 < m_1 + r$ iken (şekil 2.3.2.13)

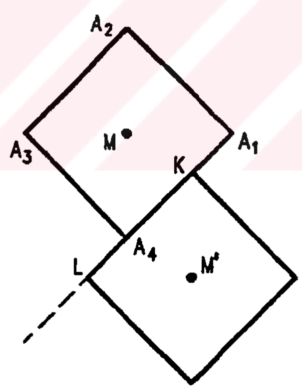
$$\begin{aligned} d_T(M, M') &= d_T(M, K) + d_T(K, M') \\ &= r + r' \end{aligned}$$



Şekil 2.3.2.13

dir. $m_1 < d_1 < m_1 + r$ ve $d_2 < m_1$ iken (şekil 2.3.2.14)

$$\begin{aligned} d_T(M, M') &= d_T(M, K) + d_T(K, M') \\ &= r + r' \end{aligned}$$

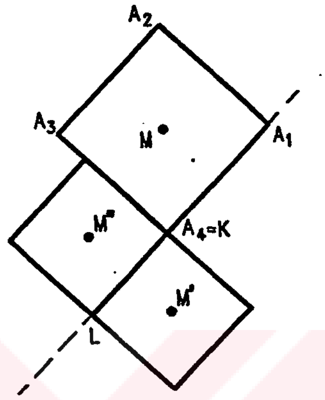


Şekil 2.3.2.14

dir.$d_1 < m_1$ ve $m_1 < d_2 < m_1 + r$ iken bir üstteki durumda K ve L noktalarının rollerinin değiştirilmesine karşılık gelir.

$d_1 \leq m_1$ ve $d_2 \leq m_1$ olması durumunda ya $d_1 = m_1$ yada $d_2 = m_1$ olmak zorundadır. $d_1 = m_1$ iken M' ve M'' merkezli aynı yarıçaplı iki taksi çemberi vardır ,öyleki $M' \notin B_1$ ve $M'' \notin B_1$ dir. M' merkezli taksi çemberi C_1 e A_4 noktasından köşesel teğet olurken, M'' merkezli taksi çemberi C_1 e kenarsal teğet olan taksi çemberini belirtir (şekil 2.3.2.15). Bununla birlikte

$$\begin{aligned} d_T(M,M') &= d_T(M,K) + d_T(K,M') = r + r' \\ d_T(M,M'') &= d_T(M,K) + d_T(K,M'') = r + r' \end{aligned}$$



Şekil 2.3.2.15

dir. $d_2 = m_1$ olması K ve L nin yer değiştirmesine karşılık gelecektir. C_1 in diğer kenarları üzerinde çalışıldığında, C_2 nin C_1 e dıştan teğet olmasında $d_T(M,M') = r + r'$ olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

Buna göre $M \notin B_2$ ve $M' \notin B_1$ olmak üzere C_2 taksi çemberi C_1 e kenarsal veya köşesel teğet iken çemberlerin merkezleri arasındaki taksi uzaklığı taksi çemberlerinin yarıçapları toplamına eşittir.

Sonuç 2.3.2.1: *Düzlemde $M = (m_1, m_2)$ merkezli, r yarıçaplı taksi çemberini C_1, $M' = (m'_1, m'_2)$ merkezli, r' yarıçaplı taksi çemberini C_2 ile gösterelim.*

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(x,y) : |x - m_1| + |y - m_2| < r\} \\ B_2 &= \{(x,y) : |x - m'_1| + |y - m'_2| < r'\} \end{aligned}$$

bölgelerinde $M \notin B_2$ ve $M' \notin B_1$ olmak üzere C_1 ve C_2 birbirlerine köşesel *veya kenarsal teğet oluyorsa $d_T(M, M') = r + r'$ dir. (Bu özelliği sağlayan C_1 ve C_2 taksi çemberlerini dıştan teğet taksi çemberleri olarak tanımlayalım.)*

2.3.3 Bir Taksi Çemberine Üzerindeki Bir Noktadan Çizilen Teğet Taksi Çemberleri:

İki taksi çemberi köşe noktalarında ve/ veya kenar parçası boyunca kesiştiklerinde teğet olabildiğini gördük. Şimdi bir taksi çemberinin köşe noktalarındaki teğet taksi çemberlerini araştıralım. Buna göre $M = (m_1, m_2)$ merkezli, r yarıçaplı C çemberinin köşeleri $A_1 = (m_1 + r, m_2), A_2 = (m_1, m_2 + r)$, $A_3 = (m_1 - r\ ,\ m_2)\,,\ A_4 = (m_1\ ,\ m_2 - r)$ dir . Şimdi C ye A_1 noktasında teğet olan taksi çemberlerini bulalım. Varsayalımki böyle bir çemberin A_1 i kapsayan kenarı KL olsun. Buna göre $K = (d_1, e_1)$, $L = (d_2, e_2)$ noktaları ya $y = -x + m_1 + m_2 + r$ üzerinde yada $y = x - m_1 + m_2 - r$ üzerindedir.

(1) $K \neq L$, $K = (d_1, e_1)$ ve $L = (d_2, e_2)$ olmak üzere $y = -x + m_1 + m_2 + r$ veya $y = x - m_1 + m_2 - r$, $d_1 \leq x \leq d_2 \ni d_1 < m_1 + r$ ve $d_2 \geq m_1 + r$ olsun. (Şekil 2.3.3.1)

$d_2 = m_1 + r$ iken $A_1 = L$ dir. Bu durumda

$$|x - d_2| + |y - e_1| = d_2 - d_1$$

taksi çemberleri C ye A_1 den kenarsal teğet olan taksi çemberleridir. Üstelik bu çemberler C ile dıştan teğettir.

$$|x - d_1| + |y - e_2| = d_2 - d_1$$

taksi çemberleri $m_1 < d_1 < m_1 + r$ iken C nin içinde kalan kenarsal teğet çemberlerdir. $d_1 < m_1$ iken C bu çemberlerin içinde kalır. Dolayısıyla bu taksi çemberleri C ile içten-teğet taksi çemberleridir.

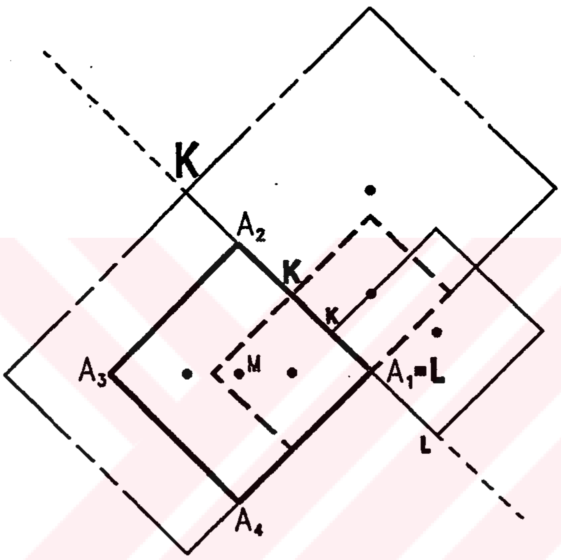
$d_2 > m_1 + r$ iken

$$|x - d_2| + |y - e_1| = d_2 - d_1$$

taksi çemberleri elde edilir, öyleki bu çemberler C ye dıştan-teğettir. $d_1 \leq m_1$ iken

$$|x - d_1| + |y - e_2| = d_2 - d_1$$

taksi çemberleri C nin içten-teğet olduğu çemberlerdir.



Şekil 2.3.3.1

(2) $K \neq L$, $K = (d_1, e_1)$ ve $L = (d_2, e_2)$ olmak üzere $y = -x + m_1 + m_2 + r$ veya $y = x - m_1 + m_2 - r$, $d_2 \leq x \leq d_1 \ni d_1 > m_1 + r$ ve $d_2 \leq m_1 + r$ olsun. (Şekil 2.3.3.2)

$d_2 = m_1 + r$ iken $A_1 = L$ dir. Bu durumda

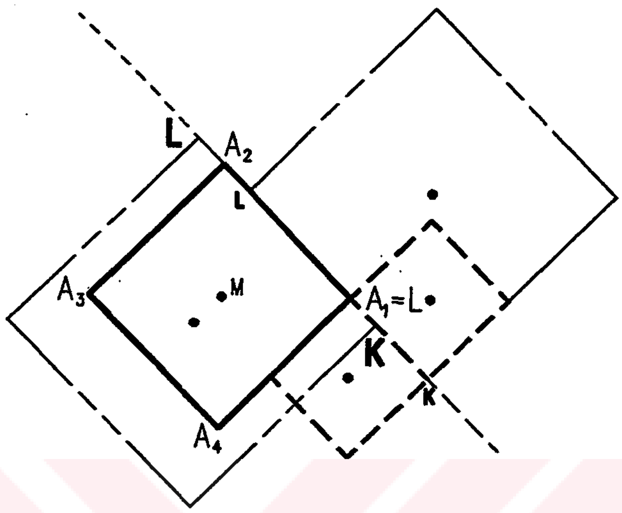
$$|x - d_1| + |y - e_2| = d_1 - d_2$$

taksi çemberleri elde edilir. Öyleki bu taksi çemberleri C ye A_1 de köşesel teğet olup, dolayısıyla dıştan teğettir.

$$|x - d_2| + |y - e_1| = d_1 - d_2$$

taksi çemberlerinin bir kenarı $y = x - m_1 + m_2 - r$ kenarı üzerinde olduğundan bunlar C ye A_1 den kenarsal, üstelikte dıştan teğettir.

$d_2 < m_1 + r$ iken (1) durumunda K ve L noktalarının yer değiştirmesine karşılık gelir.



Şekil 2.3.3.2

A_2, A_3 ve A_4 köşe noktalarından geçen C ye teğet olan köşesel ve kenarsal teğet taksi çemberleri benzer şekilde elde edilir. Şimdi C ye köşe noktası olmayan bir noktadan nasıl teğet taksi çemberi çizilebileceğini inceleyelim: (Şekil2.3.3.3)

$P = (x_0, y_0)$ noktası A_1A_2(veya A_3A_4) kenarı üzerinde köşe noktalarından farklı bir nokta olsun. $P \neq A_1$ ve $P \neq A_2$ (veya $P \neq A_3$ ve $P \neq A_4$) olduğundan P noktasından köşesel teğet taksi çemberi geçmez. O halde P den geçen kenarsal teğet taksi çemberleri incelenmelidir. Varsayalımki böyle bir çemberin P yi kapsayan kenarı KL olsun. Buna göre $K = (d_1, e_1)$, $L = (d_2, e_2)$ noktaları C nin A_1A_2(veya A_3A_4) kenarı üzerindedir. Buna göre $d_1 \leq x_0 \leq d_2$ olmak üzere

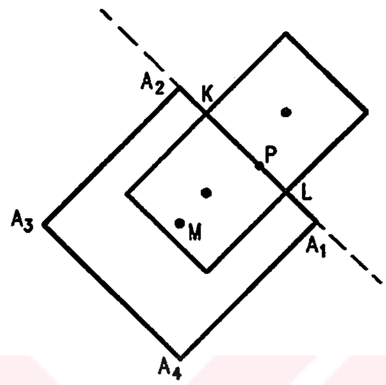
$$|x - d_2| + |y - e_1| = d_2 - d_1$$

taksi çemberleri C ye kenarsal, üstelik dıştan teğettir.

$m_1 \leq d_1 \leq x_0 \leq d_2 \leq m_1 + r$ veya $d_1 < m_1 < x_0 < m_1 + r < d_2$ iken

$$|x - d_1| + |y - e_2| = d_2 - d_1$$

taksi çemberleri C ye kenarsal, üstelik içten teğettir.



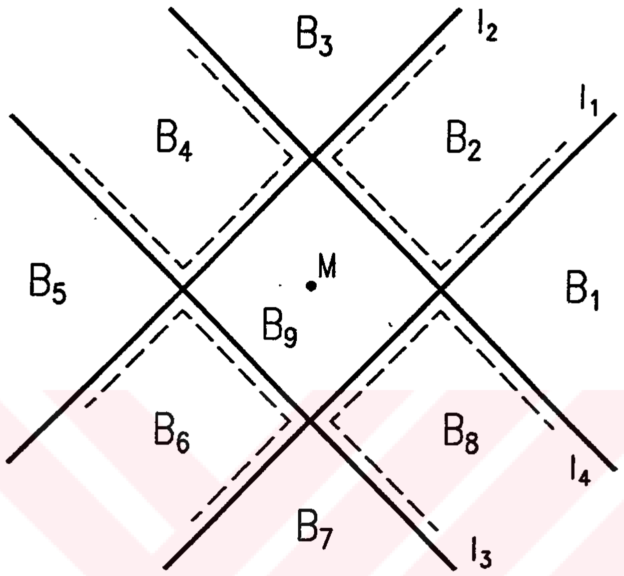
Şekil 2.3.3.3

P noktasının çemberin diğer kenarları üzerinde olması halinde benzer şekilde teğet taksi çemberleri elde edilir.

Sonuç 2.3.3.1: *C bir taksi çemberi ve A da C üzerinde bir nokta olsun. Eğer A bir köşe noktası değilse A da C ye kenarsal teğet olan sonsuz sayıda taksi çemberleri vardır. Eğer A bir köşe noktası ise A da C ye kenarsal ve köşesel teğet olan sonsuz sayıda taksi çemberleri vardır.*

2.3.4 Bir Taksi Çemberine Üzerinde Olmayan Bir Noktadan Çizilen Teğet Taksi Çemberleri

Bir $M = (m_1, m_2)$ merkezli, r yarıçaplı taksi çemberinin dışını şu şekilde bölgelere ayıralım:



Şekil 2.3.4.1

B_1, B_2, ..., B_8 daha önce bölüm 2.2.3 de belirtilen bölgeler ve B_9 bölgesini

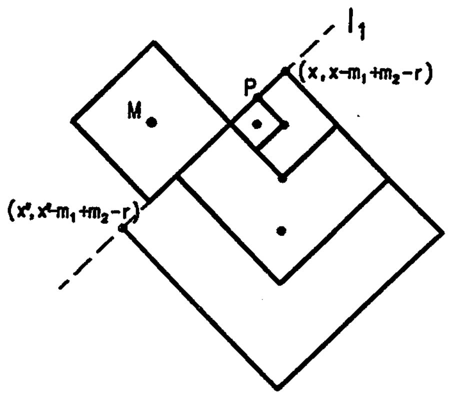
$$B_9 = \left\{ (x,y) : \begin{array}{l} y > x - m_1 + m_2 - r \text{ ve } y < x - m_1 + m_2 + r \text{ ve} \\ y > -x + m_1 + m_2 - r \text{ ve } y < -x + m_1 + m_2 + r \end{array} \right\}$$

alalım.

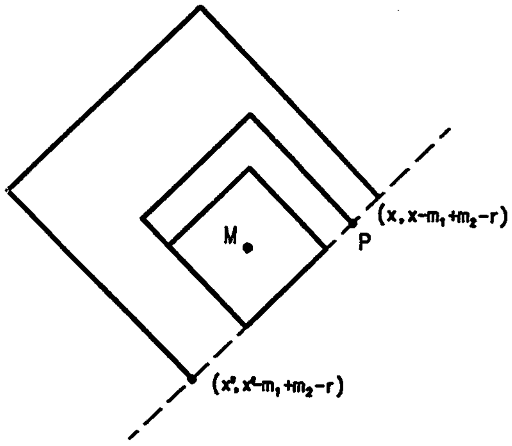
$P = (x_0, y_0)$ noktası çemberin dışında bir nokta olsun.

(1) $P \in B_1$ olsun. Bu durumda $P \circ l_1$, $P \circ l_4$ veya $P \not\!\circ\, l_1$, $P \not\!\circ\, l_4$ durumları söz konusudur.

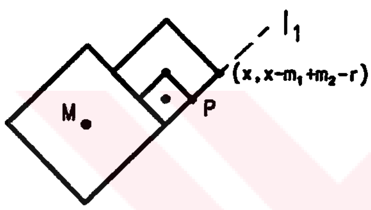
(i) $P \circ l_1$ olsun.



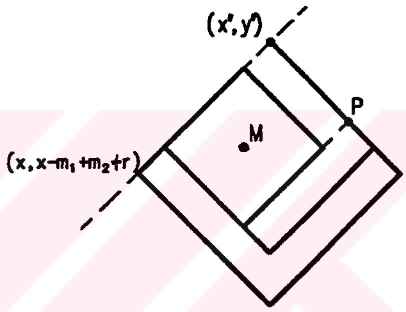
Şekil 2.3.4.2



Şekil 2.3.4.3



Şekil 2.3.4.4



Şekil 2.3.4.5

Şekil 2.3.4.2 de gösterildiği gibi P den geçen ve verilen taksi çemberine teğet olan taksi çemberlerinin merkezleri ve yarıçapları

$$M' = (x, x' - m_1 + m_2 - r) \ni \ x \geq x_0 \text{ ve } x' - m_1 + m_2 - r \leq m_2$$
$$r' = |x - x'|$$

dir. Özel olarak $x' = m_1 - r$ olduğunda

$$M' = (x, m_2) \ni \ x \geq x_0$$

merkezli taksi çemberlerinin hepsi verilen taksi çemberine köşesel teğettir. $x' \neq m_1 - r$ iken elde edilen çemberlerin hepsi verilen taksi çemberine kenarsal teğettir. Şekil 2.3.4.3 de, P den geçen

$$M' = (x', x - m_1 + m_2 - r) \ni x' \leq m_1 \text{ ve } x - m_1 + m_2 - r \geq y_0$$
$$r' = |x - x'|$$

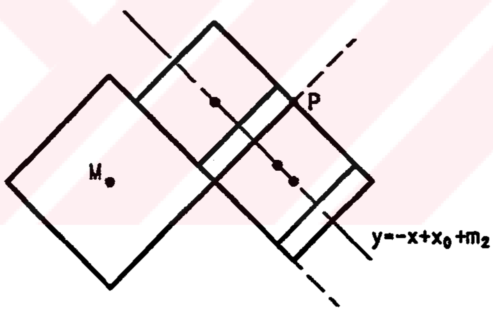
merkezli ve yarıçaplı taksi çemberleri, verilen taksi çemberine kenarsal teğettirler. Şekil 2.3.4.4 de, P den geçen

$$M' = (m_1 + r, x - m_1 + m_2 - r) \ni \ x - m_1 + m_2 - r \geq y_0$$
$$r' = |x - m_1 - r|$$

merkezli ve yarıçaplı taksi çemberleri verilen taksi çemberine kenarsal teğettirler. Şekil 2.3.4.5 de, $(x', y') = (\frac{m_1 - m_2 - r + x_0 + y_0}{2}, \frac{-m_1 + m_2 + r + x_0 + y_0}{2})$ olmak üzere P den geçen

$$M' = (x', x - m_1 + m_2 + r) \ni \ x - m_1 + m_2 + r \leq m_2$$
$$r' = |x' - x|$$

merkezli ve yarıçaplı taksi çemberleri verilen taksi çemberine kenarsal teğettir.



Şekil 2.3.4.6

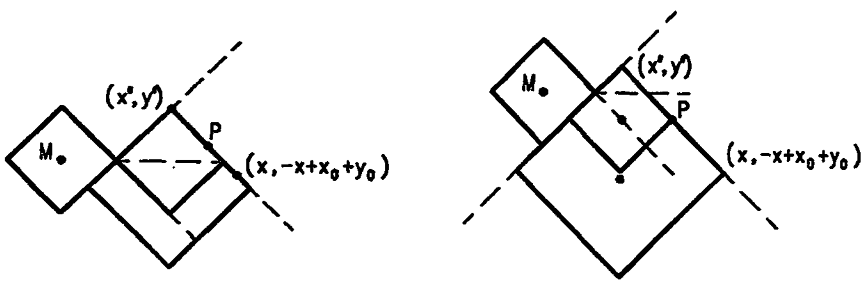
Şekil 2.3.4.6 da gösterildiği gibi P den geçen en küçük köşesel teğet taksi çemberinin merkezini $y = -x + x_0 + m_2$ doğrusu üzerinde yukarıya doğru kaydırdığımızda yine P den geçen kenarsal teğet taksi çemberleri elde edilir, öyleki bu taksi çemberlerinin merkezleri ve yarıçapları

$$M' = (m'_1, -m'_1 + x_0 + m_2) \ni m'_1 \in [m_1 + r, x_0)$$
$$r' = |x_0 - m_1 - r|$$

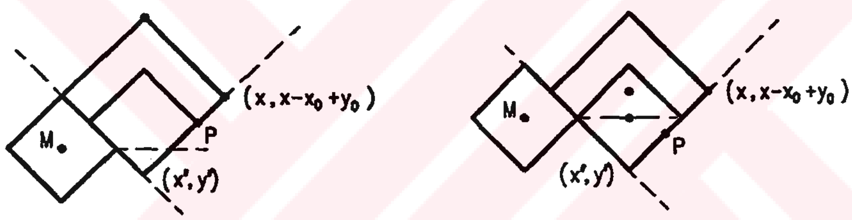
dir. Buna göre:

$P \in B_1$ ve $P \circ l_1$ veya $P \circ l_4$ iken P noktasından geçen, verilen taksi çemberine teğet olan sonsuz sayıda köşesel ve sonsuz sayıda kenarsal teğet taksi çemberleri vardır.

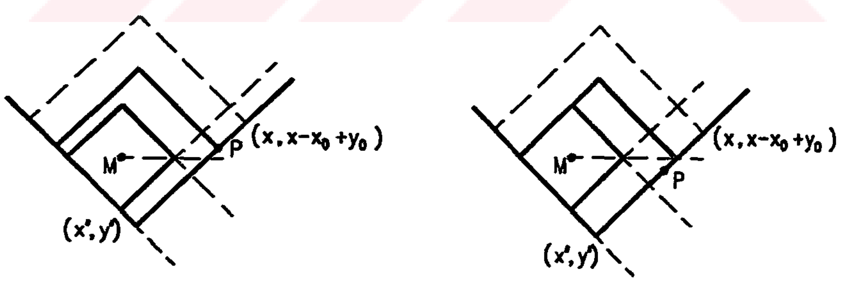
(ii) $P \not\circ l_1$ ve $P \not\circ l_4$ olsun.



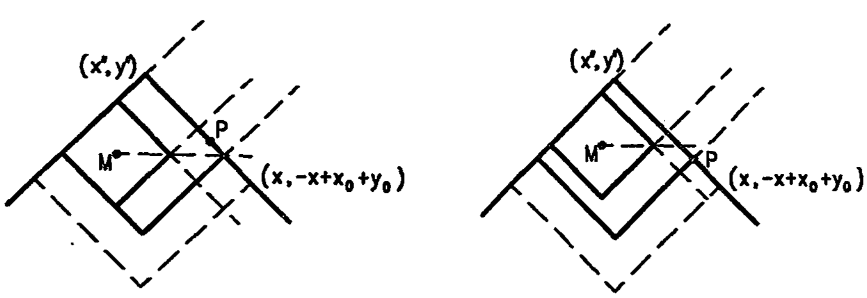
Şekil 2.3.4.7



Şekil 2.3.4.8



Şekil 2.3.4.9



Şekil 2.3.4.10

Şekil 2.3.4.7 de $(x', y') = (\frac{m_1 - m_2 + r + x_0 + y_0}{2}, \frac{-m_1 + m_2 - r + x_0 + y_0}{2})$ olmak üzere P den geçen taksi çemberlerinin merkezleri ve yarıçapları

$$M' = (x', -x + x_0 + y_0)$$
$$r' = |x - x'|$$

dir, öyleki $y_0 \geq m_2$ iken $x \leq x_0 + y_0 - m_2$ ve $y_0 < m_2$ iken $x \geq x_0$ dır. Özel olarak $y_0 \geq m_2$ ve $x = x_0 + y_0 - m_2$ olduğunda P den geçen köşesel teğet taksi çemberleri elde edilir. Bu özel durum dışındaki teğet taksi çemberlerinin hepsi kenarsaldır. Şekil 2.3.4.8 de $(x', y') = (\frac{m_1 + m_2 + r + x_0 - y_0}{2}, \frac{m_1 + m_2 + r - x_0 + y_0}{2})$ olmak üzere P den geçen teğet taksi çemberlerinin merkezleri ve yarıçapları

$$M' = (x', x - x_0 + y_0)$$
$$r' = |x - x'|$$

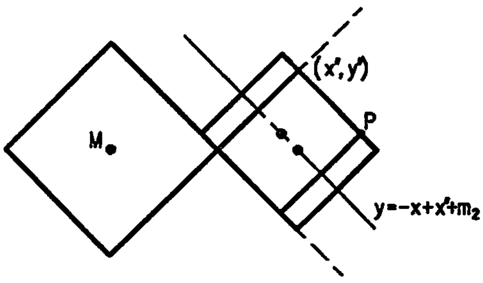
dir, öyleki $y_0 \geq m_2$ iken $x \geq x_0$ ve $y_0 < m_2$ iken $x \geq x_0 - y_0 + m_2$ dir. Özel olarak $y_0 < m_2$ iken $x = x_0 - y_0 + m_2$ olduğunda P den geçen köşesel teğet taksi çemberleri elde edilir. Bu özel durum dışındaki teğet taksi çemberlerinin hepsi kenarsaldır. Şekil 2.3.4.9 de $(x', y') = (\frac{m_1 + m_2 - r + x_0 - y_0}{2}, \frac{m_1 + m_2 - r - x_0 + y_0}{2})$ olmak üzere P den geçen teğet taksi çemberlerinin merkezleri ve yarıçapları

$$M' = (x', x - x_0 + y_0)$$
$$r' = |x - x'|$$

dir, öyleki $y_0 \geq m_2$ iken $x \geq x_0$ ve $y_0 < m_2$ iken $x \geq x_0 - y_0 + m_2$ dir. Bu taksi çemberlerinin hepsi kenarsal teğet taksi çemberleridir. Şekil 2.3.4.10 de $(x', y') = (\frac{m_1 - m_2 - r + x_0 + y_0}{2}, \frac{-m_1 + m_2 + r + x_0 + y_0}{2})$ olmak üzere P den geçen teğet taksi çemberlerinin merkezleri ve yarıçapları

$$M' = (x', -x + x_0 + y_0)$$
$$r' = |x - x'|$$

dir, öyleki $y_0 \geq m_2$ iken $x \geq x_0 + y_0 - m_2$ ve $y_0 < m_2$ iken $x \geq x_0$ dir. Bu taksi çemberlerinin hepsi kenarsal teğet taksi çemberleridir.



Şekil 2.3.4.11

Yukarıdaki şekilde $(x', y') = (\frac{m_1 - m_2 + r + x_0 - y_0}{2}, \frac{-m_1 + m_2 - r + x_0 + y_0}{2})$ olmak üzere $y_0 \geq m_2$ iken elde edilen en küçük köşesel teğet taksi çemberi, merkezi $y = -x + x' + m_2$ doğrusu üzerinde olacak biçimde kaydırıldığında elde edilen taksi çemberleri verilen taksi çemberine kenarsal teğet olan ve P den geçen çemberlerdir, öyleki bunların merkezleri

$$M' = (x, -x + x' + m_2) \ni -x + x' + m_2 \in (m_2, y_0]$$

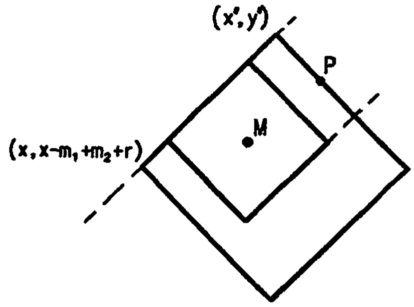
dir. Benzer şekilde $y_0 < m_2$ iken elde edilen en küçük köşesel teğet taksi çemberi, merkezi $y = x - x' + m_2$ doğrusu üzerinde olacak biçimde kaydırıldığında elde edilen taksi çemberleri verilen taksi çemberine kenarsal teğet olan ve P den geçen çemberlerdir, öyleki bunların merkezleri

$$M' = (x, x - x' + m_2) \ni x - x' + m_2 \in [y_0, m_2)$$

dir. Buna göre

$P \in B_1$ ve $P \not\in l_1$, $P \not\in l_4$ iken P noktasından bir tane köşesel teğet taksi çemberi, sonsuz sayıda kenarsal teğet taksi çemberi geçer.

(2) $P \in B_2$ olsun.

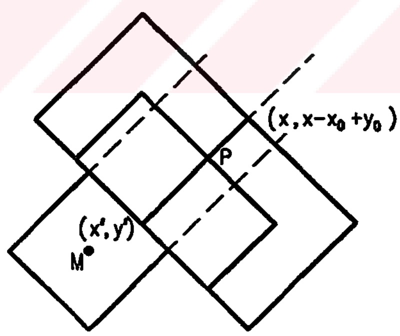


Şekil 2.3.4.12

Şekil 2.3.4.12 de $(x',y') = (\frac{m_1-m_2-r+x_0+y_0}{2}, \frac{-m_1+m_2+r+x_0+y_0}{2})$ olmak üzere P den geçen bu taksi çemberlerinin hepsi verilen taksi çemberine kenarsal teğettir, öyleki bunların merkezleri ve yarıçapları

$$M' = (x', x - m_1 + m_2 + r) \ni x \leq m_1 - r$$
$$r' = |x' - x|$$

dir.



Şekil 2.3.4.13

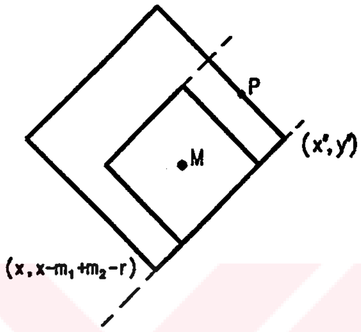
Yukarıdaki şekil 2.3.4.13 de $(x',y') = (\frac{m_1+m_2+r+x_0-y_0}{2}, \frac{m_1+m_2+r-x_0+y_0}{2})$ olmak üzere P den geçen bu taksi çemberlerinin hepsi verilen taksi çemberine kenarsal teğettir, öyleki bunların merkezleri ve yarıçapları

$$M' = (x', x - x_0 + y_0) \ni x \geq x_0$$
$$r' = |x - x'|$$

ve

$$M'' = (x, y') \ni x \geq x_0$$
$$r' = |x - x'|$$

dir.

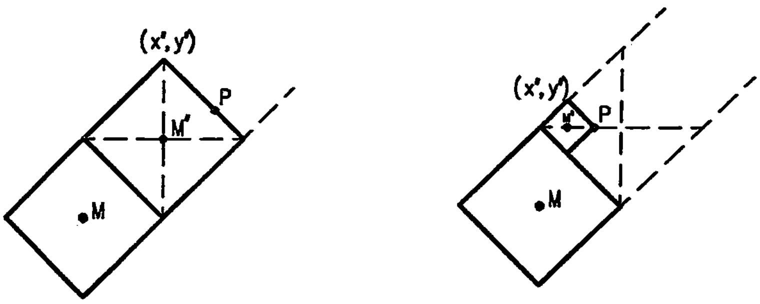


Şekil 2.3.4.14

Yukarıdaki şekil 2.3.4.14 de $(x', y') = (\frac{m_1 - m_2 + r + x_0 + y_0}{2}, \frac{-m_1 + m_2 - r + x_0 + y_0}{2})$ olmak üzere P den geçen bu taksi çemberlerinin hepsi verilen taksi çemberine kenarsal teğettir, öyleki bunların merkezleri ve yarıçapları

$$M' = (x, y') \ni x \leq m_1$$
$$r' = |x' - x|$$

dir.

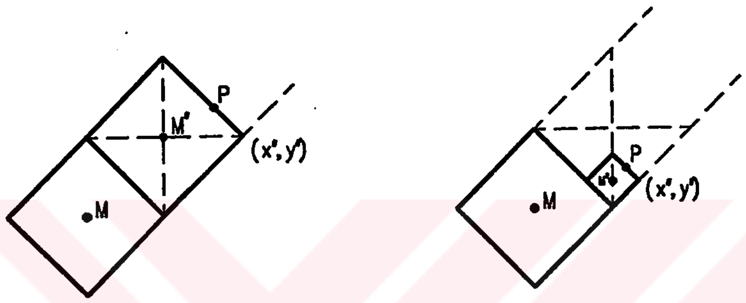


Şekil 2.3.4.15

Şekil 2.3.4.15 de gösterildiği gibi $(x', y') = (\frac{m_1 - m_2 - r + x_0 + y_0}{2}, \frac{-m_1 + m_2 + r + x_0 + y_0}{2})$ olmak üzere P noktası sırasıyla $\{(x,y) : x > m_1 + r \text{ ve } y > m_2 + r\}$ ve $\{(x,y) : m_1 < x < m_1 + r \text{ ve } y = m_2 + r\}$ bölgelerinde iken verilen taksi çemberine teğet olan taksi çemberlerinin hepsi kenarsal teğettir, öyleki bunların merkezleri ve yarıçapları

$$M' = (x', m_2 + r)$$
$$r' = |y' - m_2 - r|$$

dir.



Şekil 2.3.4.16

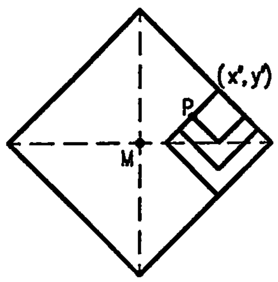
Şekil 2.3.4.16 da gösterildiği gibi $(x', y') = (\frac{m_1 - m_2 + r + x_0 + y_0}{2}, \frac{-m_1 + m_2 - r + x_0 + y_0}{2})$ olmak üzere P noktası sırasıyla $\{(x,y) : x \geq m_1 + r \text{ ve } m_2 < y < m_2 + r\}$ ve $\{(x,y) : x \geq m_1 + r \text{ ve } y > m_2 + r\}$ bölgelerinde iken verilen taksi çemberine teğet olan ve P noktasından geçen taksi çemberlerinin hepsi kenarsal teğettir, öyleki bunların merkezleri ve yarıçapları

$$M' = (m_1 + r,\ y')$$
$$r' = |x' - m_1 - r|$$

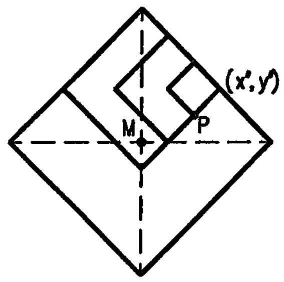
dir. Böylece :

$P \in B_2$ iken P noktasından,verilen taksi çemberine kenarsal teğet olan sonsuz sayıda taksi çemberi vardır.

(3) $P \in B_9$ olsun.



Şekil 2.3.4.17



Şekil 2.3.4.18

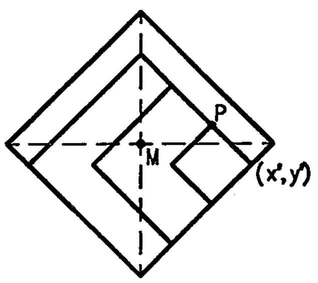
Şekil 2.3.4.17 de gösterildiği gibi $(x', y') = (\frac{m_1+m_2+r+x_0-y_0}{2}, \frac{m_1+m_2+r-x_0+y_0}{2})$ olmak üzere P noktası B_9 bölgesinin $\{(x,y) : x \geq m_1\}$ alt bölgesinde ise P den geçen taksi çemberlerinin merkezleri ve yarıçapları

$$M' = (x,\ y'),\ m_1 \leq x \leq x_0$$
$$r' = |x' - x|$$

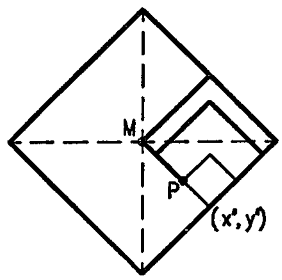
dir. Benzer şekilde şekil 2.3.4.18 de gösterildiği gibi P noktası B_9 bölgesinin $\{(x,y) : y \geq m_2\}$ alt bölgesinde ise P den geçen taksi çemberlerinin merkezleri ve yarıçapları

$$M' = (x', x + y_0 - x_0),\ m_2 \leq x - x_0 + y_0 \leq y_0$$
$$r' = |x' - x|\ ,\ \ m_1 \leq x \leq x_0$$

dir, öyleki bu çemberlerin hepsi verilen taksi çemberlerine kenarsal teğettir.



Şekil 2.3.4.19



Şekil 2.3.4.20

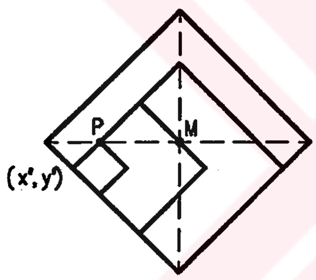
Şekil 2.3.4.19 de gösterildiği gibi $(x', y') = (\frac{m_1-m_2+r+x_0+y_0}{2}, \frac{-m_1+m_2-r+x_0+y_0}{2})$ olmak üzere P noktası B_9 bölgesinin $\{(x,y) : x \geq m_1\}$ alt bölgesinde ise P den geçen taksi çemberlerinin merkezleri ve yarıçapları

$$M' = (x,\ y'),\ m_1 \leq x \leq x_0$$
$$r' = |x' - x|$$

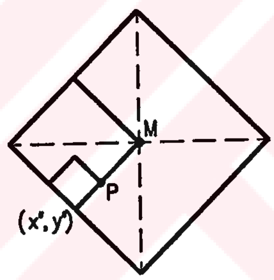
dir. Benzer şekilde şekil 2.3.4.20 de gösterildiği gibi P noktası B_9 bölgesinin $\{(x,y) : y \leq m_2\}$ alt bölgesinde ise P den geçen taksi çemberlerinin merkezleri ve yarıçapları

$$M' = (x', -x + x_0 + y_0),\ y_0 \leq -x + x_0 + y_0 \leq m_2$$
$$r' = |x' - x|$$

dir, öyleki bu çemberlerin hepsi verilen taksi çemberlerine kenarsal teğettir.



Şekil 2.3.4.21



Şekil 2.3.4.22

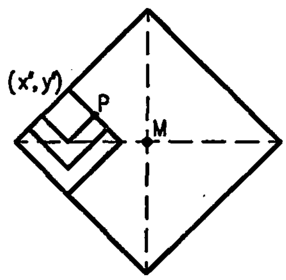
Şekil 2.3.4.21 de gösterildiği gibi $(x', y') = (\frac{m_1+m_2-r+x_0-y_0}{2}, \frac{m_1+m_2-r-x_0+y_0}{2})$ olmak üzere P noktası B_9 bölgesinin $\{(x,y) : x \leq m_1\}$ alt bölgesinde ise P den geçen taksi çemberlerinin merkezleri ve yarıçapları

$$M' = (x,\ y'),\ x_0 \leq x \leq m_1$$
$$r' = |x' - x|$$

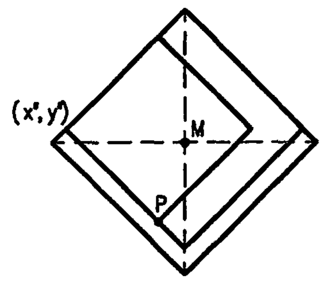
dir. Benzer şekilde şekil 2.3.4.22 de gösterildiği gibi P noktası B_9 bölgesinin $\{(x,y) : y \leq m_2\}$ alt bölgesinde ise P den geçen taksi çemberlerinin merkezleri ve yarıçapları

$$M' = (x',\ x - x_0 + y_0),\ y_0 \leq x - x_0 + y_0 \leq m_2$$
$$r' = |x' - x|$$

dir, öyleki bu çemberlerin hepsi verilen taksi çemberlerine kenarsal teğettir.



Şekil 2.3.4.23



Şekil 2.3.4.24

Şekil 2.3.4.23 de gösterildiği gibi $(x', y') = (\frac{m_1 - m_2 - r + x_0 + y_0}{2}, \frac{-m_1 + m_2 + r + x_0 + y_0}{2})$ olmak üzere P noktası B_9 bölgesinin $\{(x,y) : y \geq m_2\}$ alt bölgesinde ise P den geçen taksi çemberlerinin merkezleri ve yarıçapları

$$M' = (x', -x + x_0 + y_0),\ \ m_2 \leq -x + x_0 + y_0 \leq y_0$$
$$r' = |x' - x|$$

dir. Benzer şekilde şekil 2.3.4.24 de gösterildiği gibi P noktası B_9 bölgesinin $\{(x,y) : x \leq m_1\}$ alt bölgesinde ise P den geçen taksi çemberlerinin merkezleri ve yarıçapları

$$M' = (x,\ y'),\ \ x_0 \leq x \leq m_1$$
$$r' = |x' - x|$$

dir, öyleki bu çemberlerin hepsi verilen taksi çemberlerine kenarsal teğettir.

Yani, B_9 *bölgesindeki her noktadan, verilen taksi çemberine teğet olacak şekilde, sonsuz sayıda kenarsal teğet taksi çemberi geçer.*

Sonuç 2.3.4.1: *Verilen taksi çemberine üzerinde bulunmayan bir noktadan çizilen teğet taksi çemberleri hakkında aşağıdaki özellikler geçerlidir:*

(a) B_1, B_3, B_5 , B_7 *bölgelerinin sınırlayıcı doğruları üzerinde bulunan noktadan, verilen taksi çemberine teğet olan sonsuz sayıda kenarsal ve sonsuz sayıda köşesel teğet taksi çemberi geçer.*

(b) B_1, B_3, B_5, B_7 *bölgelerinin sınırlayıcı doğruları üzerinde bulunmayan noktadan bir köşesel teğet ve sonsuz sayıda kenarsal teğet taksi çemberi geçer.*

(c) B_2, B_4, B_6, B_8, B_9 *bölgelerindeki her noktadan, verilen çembere teğet olan sonsuz sayıda kenarsal teğet taksi çemberi geçer.*

Öklid düzleminde Ç, M merkezli, r yarıçaplı bir çember olsun. P_1 verilen çember üzerinde ve P_2 üzerinde olmayan birer nokta olsun. P_1 ve P_2 noktasından geçen Ç ye P_1 de teğet olan bir tek çember olduğu biliniyor. Taksi çemberleri için aşağıdaki sonucun geçerli olduğu daha önceki sonuçlardan elde edilir.

Sonuç 2.3.4.2: *Düzlemde* C , M *merkezli,* r *yarıçaplı taksi çemberi olsun.* P_1 *verilen çember üzerinde ve* P_2 *üzerinde olmayan birer nokta olsun.* P_1 *ve* P_2 *noktasından geçen* C *ye* P_1 *de teğet olan sonsuz sayıda taksi çemberi vardır. Bu teğet taksi çemberleri için aşağıdakiler geçerlidir :*

(a) P_1 *köşe noktası,* P_2 , P_1 *in bulunduğu bölgedeki kenar doğruları üzerinde değil ise bir köşesel teğet , sonsuz sayıda kenarsal teğet taksi çemberleri vardır.*

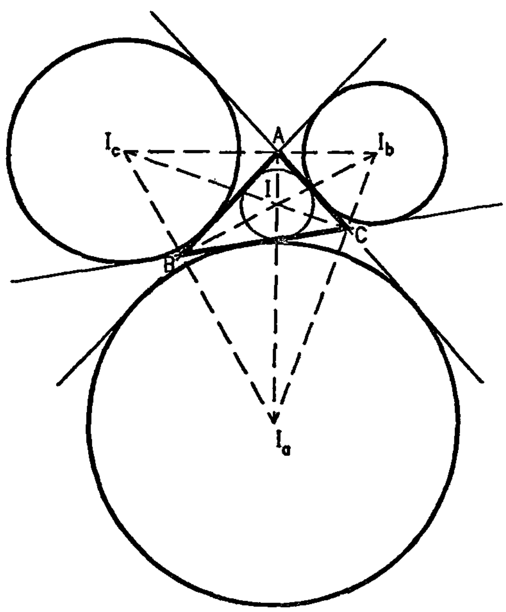
(b) P_1 *köşe noktası,* P_2 , P_1 *in bulunduğu bölgedeki kenar doğruları üzerinde ise sonsuz sayıda köşesel ve kenarsal teğet taksi çemberleri vardır.*

(c) P_1 *köşe noktası,* P_2 , P_1 *in bulunduğu bölgede değil iken veya* P_1 *köşe noktasından farklı iken sonsuz sayıda kenarsal teğet taksi çemberi vardır.*

Bölüm 3

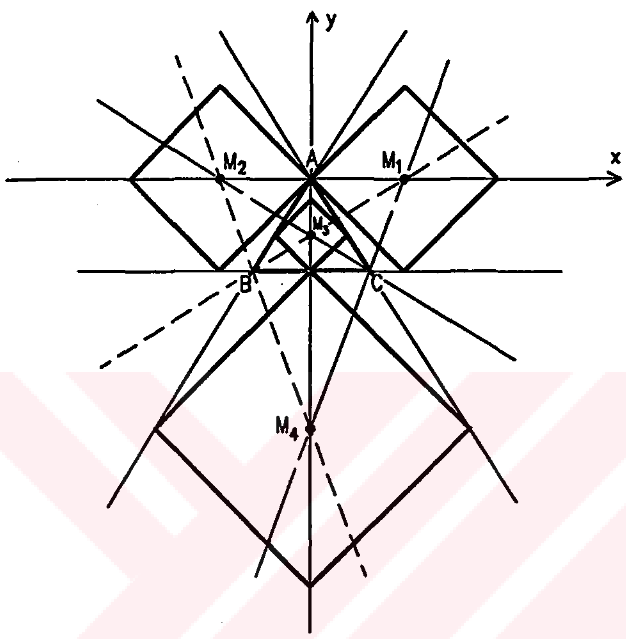
Bir Üçgenin Teğet Taksi Çemberleri

Öklid düzleminde, bir ABC üçgeninin kenarlarına teğet ve merkezi üçgenin içinde olan çembere **iç-teğet çember** denir. ABC üçgeninin kenarlarına teğet ve merkezleri üçgenin dışında olan çemberlere **dış-teğet çemberler** denir. İç-teğet çemberin merkezi, üçgenin iç açıortaylarının kesiştikleri noktadır. Dış-teğet çemberlerin merkezleri de bir iç açının iç açıortayı ile diğer iki açının dış açıortaylarının kesiştikleri noktalardır.



Şekil 3.1

Düzlemde bir ABC üçgeni verildiğinde üçgene teğet olan taksi çemberleri Öklid düzlemindekine benzer şekilde bulunabildiğini bu bölümde göreceğiz. Bu taksi çemberlerini elde edebilmek için üçgenin açıortayları yerine, üçgenin kenarlarını oluşturan doğrulara eşit uzaklıktaki noktalar kümesini kullanacağız.

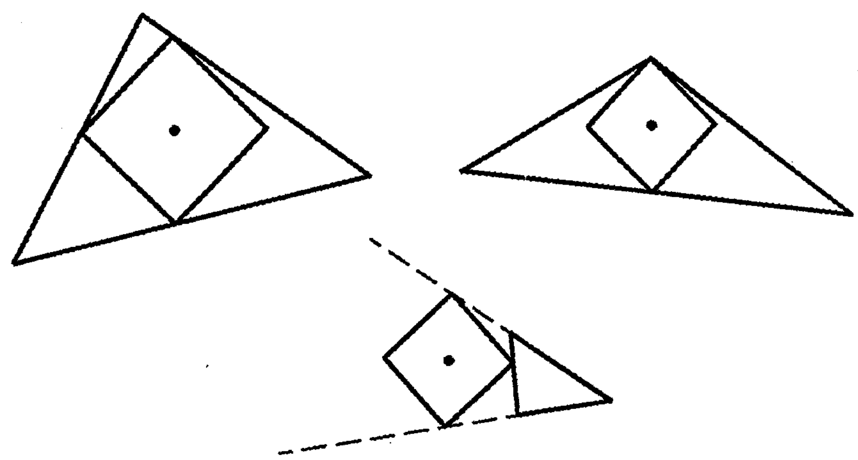


Şekil 3.2

Yukarıdaki şekil düzlemde özel bir üçgenin teğet taksi çemberlerini göstermektedir.

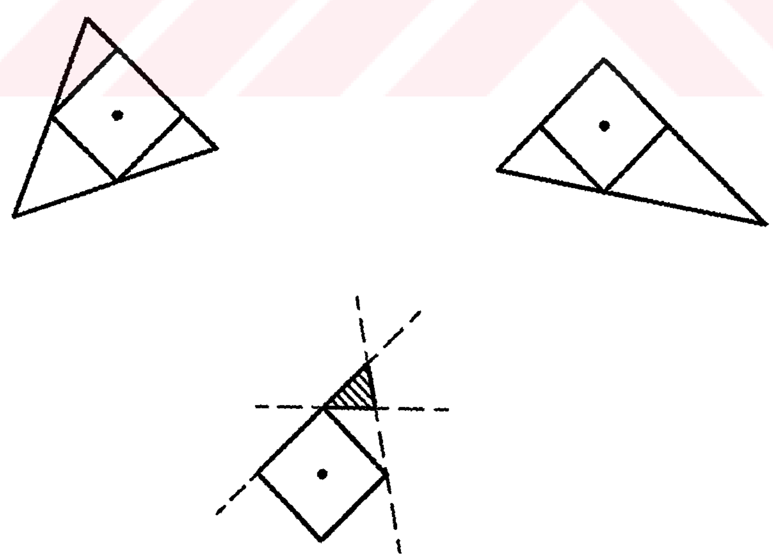
Tanım : Düzlemde bir üçgen ve taksi çemberi verilsin. Ayrıca üçgenin her bir kenar doğrusu taksi çemberine teğet olsun.

(a) Eğer üçgenin her bir kenar doğrusu üzerinde taksi çemberinin bir köşe noktası bulunuyorsa taksi çemberi üçgene **köşesel** teğettir denir.



Şekil 3.3

(b) Eğer üçgenin bir veya iki kenar doğrusu üzerinde taksi çemberinin birer kenarı bulunuyorsa ve üçgenin geri kalan kenar doğruları veya doğrusu üzerinde de taksi çemberinin iki veya bir köşe noktası bulunuyorsa taksi çemberi **kenarsal ve köşesel** teğettir denir.



Şekil 3.4

Teorem 3.1: *Taksi düzlemindeki bir üçgene teğet olan ya üç tane yada dört tane taksi çemberi vardır.*

İspat: Taksi düzleminde üç doğrudaş olmayan $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ noktalarını alalım. Böyle üç doğrudaş olmayan nokta noktadaş olmayan üç doğru belirtir. Bu doğrular

$$l_1 = B \vee C \quad ..... \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$l_2 = A \vee C \quad ..... \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

$$l_3 = A \vee B \quad ..... \quad a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

biçiminde üçgenin kenarlarını oluşturur. İspatı l_i lerin konumlarını göz önüne alarak şu durumlara göre yapalım:

(i) l_1, l_2, l_3 **doğruları yataysal doğrular olsun.** Bu durumda

$$l_i \quad .... \quad a_ix + b_iy + c_i = 0, \quad \ni \left| -\tfrac{a_i}{b_i} \right| < 1, \quad i = 1, 2, 3$$

dir. Ayrıca l_i , $i = 1, 2, 3$ doğruları noktadaş ve paralel olmadıkları için

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (*)$$

olmalıdır. l_1 ve l_2 doğrularına eşit taksi uzaklıktaki $X = (x, y)$ noktaları

$$d_T((x,y), l_1) = d_T((x,y), l_2)$$

şartını sağlayacağından

$$\frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\max\{|a_1|, |b_1|\}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\max\{|a_2|, |b_2|\}}$$

$$\frac{|a_1x+b_1y+c_1|}{|b_1|}=\frac{|a_2x+b_2y+c_2|}{|b_2|}$$

ifadesinden

$$l_1' \quad ..... \quad x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_2b_1-a_1b_2}\ , \quad a_2b_1-a_1b_2\neq 0$$

$$l_2' \quad ..... \quad \tfrac{1}{2}(\tfrac{a_1}{b_1}+\tfrac{a_2}{b_2})x+y+\tfrac{1}{2}(\tfrac{c_1}{b_1}+\tfrac{c_2}{b_2})=0$$

dir. Burada $b_i\neq 0$, $i=1,2,3$ olacağından $k_i=\dfrac{c_i}{bi}$ ve $m_i=\dfrac{a_i}{bi}$ olarak aldığımızda

$$l_1'...\ x=\tfrac{k_2-k_1}{m_1-m_2}\ ; m_1x+y+k_1 \lesseqgtr 0 \quad m_2x+y+k_2\lesseqgtr 0$$

$$l_2'...\ \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)x+y+\tfrac{1}{2}(k_1+k_2)=0\ ; m_1x+y+k_1\lesseqgtr 0, \quad m_2x+y+k_2\gtreqless 0$$

olur. l_1' ve l_2' doğruları üzerindeki bütün noktalar l_1 ve l_2 doğrularına eşit taksi uzaklıktadır. l_1 ve l_3 doğrularına eşit taksi uzaklıktaki $X=(x,y)$ noktaları

$$d_T((x,y),l_1)=d_T((x,y),l_3)$$

şartını sağlayacağından

$$\frac{|a_1x+b_1y+c_1|}{\max\{|a_1|,|b_1|\}}=\frac{|a_3x+b_3y+c_3|}{\max\{|a_3|,|b_3|\}}$$

den

$$l_3'...\ x=\tfrac{k_3-k_1}{m_1-m_3}\ ; m_1x+y+k_1\lesseqgtr 0, \quad m_3x+y+k_3\lesseqgtr 0$$

$$l_4'...\ \tfrac{1}{2}(m_1+m_3)\,x+y+\tfrac{1}{2}(k_1+k_3)=0\ ; m_1x+y+k_1\lesseqgtr 0, \quad m_3x+y+k_3\gtreqless 0$$

doğruları elde edilir. l_3' ve l_4' doğruları üzerindeki bütün noktalar l_1 ve l_3 doğrularına eşit taksi uzaklıktadır. l_2 ve l_3 doğrularına eşit taksi uzaklıktaki $X=(x,y)$ noktaları

$$d_T((x,y),l_2)=d_T((x,y),l_3)$$

şartını sağlayacağından

$$\frac{|a_2x+b_2y+c_2|}{\max\{|a_2|,|b_2|\}}=\frac{|a_3x+b_3y+c_3|}{\max\{|a_3|,|b_3|\}}$$

den

$$l_5'\ldots x=\tfrac{k_3-k_2}{m_2-m_3}\ ;m_2x+y+k_2\lesseqgtr 0,\quad m_3x+y+k_3\lesseqgtr 0$$

$$l_6'\ldots\tfrac{1}{2}(m_2+m_3)x+y+\tfrac{1}{2}(k_2+k_3)=0\ ;m_2x+y+k_2\lesseqgtr 0,\quad m_3x+y+k_3\gtreqless 0$$

doğruları elde edilir. l_5' ve l_6' doğruları üzerindeki bütün noktalar l_2 ve l_3 doğrularına eşit taksi uzaklıktadır. Aynı zamanda (*) da $k_i=\dfrac{c_i}{bi}$ ve $m_i=\dfrac{a_i}{bi}$, $b_i\neq 0$, $i=1,2,3$ kullanıldığında

$$b_1b_2b_3\begin{vmatrix} m_1 & 1 & k_1\\ m_2 & 1 & k_2\\ m_3 & 1 & k_3\end{vmatrix}\neq 0$$

dır. $b_i\neq 0$, $i=1,2,3$ olduğundan

$$\Delta=\begin{vmatrix} m_1 & 1 & k_1\\ m_2 & 1 & k_2\\ m_3 & 1 & k_3\end{vmatrix}\neq 0$$

dir. Buna göre

$$\begin{cases} x=\frac{k_2-k_1}{m_1-m_2}\\ \frac{1}{2}(m_1+m_3)x+y+\frac{1}{2}(k_1+k_3)=0\\ \frac{1}{2}(m_2+m_3)x+y+\frac{1}{2}(k_2+k_3)=0\end{cases}$$

doğruları

$$M_1 = \left(\frac{k_2 - k_1}{m_1 - m_2} \;,\; \frac{k_1(m_2+m_3) + k_2(-m_1 - m_3) + k_3(-m_1 + m_2)}{2(m_1 - m_2)} \right)$$

noktasında noktadaştırlar. Üstelik M_1 noktası l_1, l_2, l_3 doğrularına eşit taksi uzaklıktadır. Yani

$$d_T(M_1, l_1) = d_T(M_1, l_2) = d_T(M_1, l_3) = r_1$$

dir, öyleki bu uzaklık

$$r_1 = \left| \frac{k_1(m_3 - m_2) + k_2(m_1 - m_3) + k_3(m_2 - m_1)}{2(m_1 - m_2)} \right|$$

dir. Yani

$$r_1 = \left| \frac{\Delta}{2(m_1 - m_2)} \right|$$

dir. Böylece M_1 noktasını merkez kabul eden r_1 yarıçaplı taksi çemberi

$$\left| x - \frac{k_2 - k_1}{m_1 - m_2} \right| + \left| y - \frac{k_1(m_2+m_3) + k_2(-m_1 - m_3) + k_3(-m_1 + m_2)}{2(m_1 - m_2)} \right| = r_1$$

dir.

$$\frac{k_1(m_3 - m_2) + k_2(m_1 - m_3) + k_3(m_2 - m_1)}{2(m_1 - m_2)} > 0$$

alarak elde edilen taksi çemberinin kenarlarını ve köşelerini aşağıdaki gibi

$$x - \frac{k_2 - k_1}{m_1 - m_2} < 0 \,,\; y - \frac{k_1(m_2+m_3)+k_2(-m_1-m_3)+k_3(-m_1+m_2)}{2(m_1-m_2)} \geq 0 \text{ iken}$$

$$y = x + \frac{(k_1 - k_2)(m_3 + 1) + k_3(m_2 - m_1)}{(m_1 - m_2)}$$

$$x - \frac{k_2 - k_1}{m_1 - m_2} < 0 \,,\; y - \frac{k_1(m_2+m_3)+k_2(-m_1-m_3)+k_3(-m_1+m_2)}{2(m_1-m_2)} < 0 \text{ iken}$$

$$y = x + \frac{k_1(-1 + m_2) + k_2(1 - m_1)}{(m_1 - m_2)}$$

$$x-\frac{k_2-k_1}{m_1-m_2}\geq 0\,,\; y-\frac{k_1(m_2+m_3)+k_2(-m_1-m_3)+k_3(-m_1+m_2)}{2(m_1-m_2)}\geq 0$$

$$y=-x+\frac{(k_2-k_1)(-m_3+1)+k_3(m_2-m_1)}{(m_1-m_2)}$$

$$x-\frac{k_2-k_1}{m_1-m_2}\geq 0\,, y-\frac{k_1(m_2+m_3)+k_2(-m_1-m_3)+k_3(-m_1+m_2)}{2(m_1-m_2)}<0 \text{ iken}$$

$$y=x+\frac{k_1(1+m_2)-k_2(1+m_1)}{(m_1-m_2)}$$

$$A_1=\left(\frac{k_1(m_3-m_2-2)+k_2(m_1-m_3+2)+k_3(m_2-m_1)}{2(m_1-m_2)},\frac{k_1(m_2+m_3)+k_2(-m_1-m_3)+k_3(-m_1+m_2)}{2(m_1-m_2)}\right)$$

$$A_2=\left(\frac{k_2-k_1}{m_1-m_2},\, m_3\frac{k_2-k_1}{m_1-m_2}-k_3\right)$$

$$A_3=\left(\frac{k_1(-m_3+m_2-2)+k_2(-m_1+m_3+2)+k_3(-m_2+m_1)}{2(m_1-m_2)},\frac{k_1(m_2+m_3)+k_2(-m_1-m_3)+k_3(-m_1+m_2)}{2(m_1-m_2)}\right)$$

$$A_4=\left(\frac{k_2-k_1}{m_1-m_2},\frac{k_1m_2-k_2m_1}{m_1-m_2}\right)$$

doğru parçaları ve noktaları oluşturmaktadır, öyleki A_4 hem l_1 in üzerinde hemde l_2 nin üzerinde ve A_2 noktası l_3 ün üzerindedir. Dolayısıyla elde edilen taksi çemberi, üçgene köşesel teğet taksi çemberidir.

$$\begin{cases} x=\dfrac{k_3-k_1}{m_1-m_3} \\ \frac{1}{2}(m_1+m_2)x+y+\frac{1}{2}(k_1+k_2)=0 \\ \frac{1}{2}\left(m_2+m_3\right)x+y+\frac{1}{2}\left(k_2+k_3\right)=0 \end{cases}$$

doğrularını

$$M_2=\left(\frac{k_3-k_1}{m_1-m_3}\,,\,\frac{k_1(m_2+m_3)+k_2(m_3-m_1)+k_3(-m_1-m_2)}{2(m_1-m_3)}\right)$$

noktasında kesişirler, üstelik M_2 noktası l_1, l_2, l_3 doğrularına eşit taksi uzaklıkta olup, bu uzaklık

$$r_2 = \left|\frac{k_1(m_3 - m_2) + k_2(m_1 - m_3) + k_3(m_2 - m_1)}{2(m_1 - m_3)}\right|$$

dir. Yani

$$r_2 = \left|\frac{\Delta}{2(m_1 - m_3)}\right|$$

dir. Buna göre M_2 merkezli, r_2 yarıçaplı taksi çemberi

$$\left|x - \frac{k_3 - k_1}{m_1 - m_3}\right| + \left|y - \frac{k_1(m_2 + m_3) + k_2(m_3 - m_1) + k_3(-m_1 - m_2)}{2(m_1 - m_3)}\right| = r_2$$

dir.

$$\frac{k_1(m_3 - m_2) + k_2(m_1 - m_3) + k_3(m_2 - m_1)}{2(m_1 - m_3)} > 0$$

alarak elde edilen taksi çemberinin köşelerini aşağıdaki gibi:

$$A_1 = \left(\frac{k_1(m_3-m_2-2)+k_2(m_1-m_3)+k_3(m_2-m_1+2)}{2(m_1-m_3)}, \frac{k_1(m_2+m_3)+k_2(m_3-m_1)+k_3(-m_1-m_2)}{2(m_1-m_3)}\right)$$

$$A_2 = \left(\frac{k_3 - k_1}{m_1 - m_3}, \frac{k_1 m_3 - k_3 m_1}{m_1 - m_3}\right)$$

$$A_3 = \left(\frac{k_1(-m_3+m_2-2)+k_2(-m_1+m_3)+k_3(-m_2+m_1+2)}{2(m_1-m_3)}, \frac{k_1(m_2+m_3)+k_2(m_3-m_1)+k_3(-m_1-m_2)}{2(m_1-m_3)}\right)$$

$$A_4 = \left(\frac{k_3 - k_1}{m_1 - m_3}, m_2\frac{k_3 - k_1}{m_1 - m_3} - k_2\right)$$

noktaları oluşturmaktadır, öyleki A_2 noktası hem l_1 in hemde l_3 ün üzerinde ve A_4 noktası l_2 nin üzerindedir. Böylece elde edilen taksi çemberi verilen üçgenin köşesel teğet çemberidir. Benzer şekilde

$$\begin{cases} x = \frac{k_3-k_2}{m_2-m_3} \\ \frac{1}{2}(m_1 + m_2)x + y + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0 \\ \frac{1}{2}(m_1 + m_3)x + y + \frac{1}{2}(k_1 + k_3) = 0 \end{cases}$$

doğruları

$$M_3=\left(\frac{k_3-k_2}{m_2-m_3}\ ,\ \frac{k_1(m_3-m_2)+k_2(m_1+m_3)+k_3(-m_1-m_2)}{2(m_2-m_3)}\right)$$

noktasında kesişirler, ayrıca M_3 noktası l_1, l_2, l_3 doğrularına eşit taksi uzaklıkta olup, bu uzaklık

$$r_3=\left|\frac{k_1(m_3-m_2)+k_2(m_1-m_3)+k_3(m_2-m_1)}{2(m_2-m_3)}\right|$$

dir. Yani

$$r_3=\left|\frac{\Delta}{2(m_2-m_3)}\right|$$

dir. Buna göre M_3 merkezli, r_3 yarıçaplı taksi çemberi

$$\left|x-\frac{k_3-k_2}{m_2-m_3}\right|+\left|y-\frac{k_1(m_3-m_2)+k_2(m_1+m_3)+k_3(-m_1-m_2)}{2(m_2-m_3)}\right|=r_3$$

dir. Bu taksi çemberinin köşelerini

$$A_1=\left(\frac{k_1(m_3-m_2)+k_2(-2+m_1-m_3)+k_3(m_2-m_1+2)}{2(m_2-m_3)},\ \frac{k_1(m_3-m_2)+k_2(m_1+m_3)+k_3(-m_1-m_2)}{2(m_2-m_3)}\right)$$

$$A_2=\left(\frac{k_3-k_2}{m_2-m_3},\ m_1\frac{k_3-k_2}{m_2-m_3}-k_1\right)$$

$$A_3=\left(\frac{k_1(-m_3+m_2)+k_2(-m_1+m_3-2)+k_3(-m_2+m_1+2)}{2(m_2-m_3)}\ ,\ \frac{k_1(m_3-m_2)+k_2(m_1+m_3)+k_3(-m_1-m_2)}{2(m_2-m_3)}\right)$$

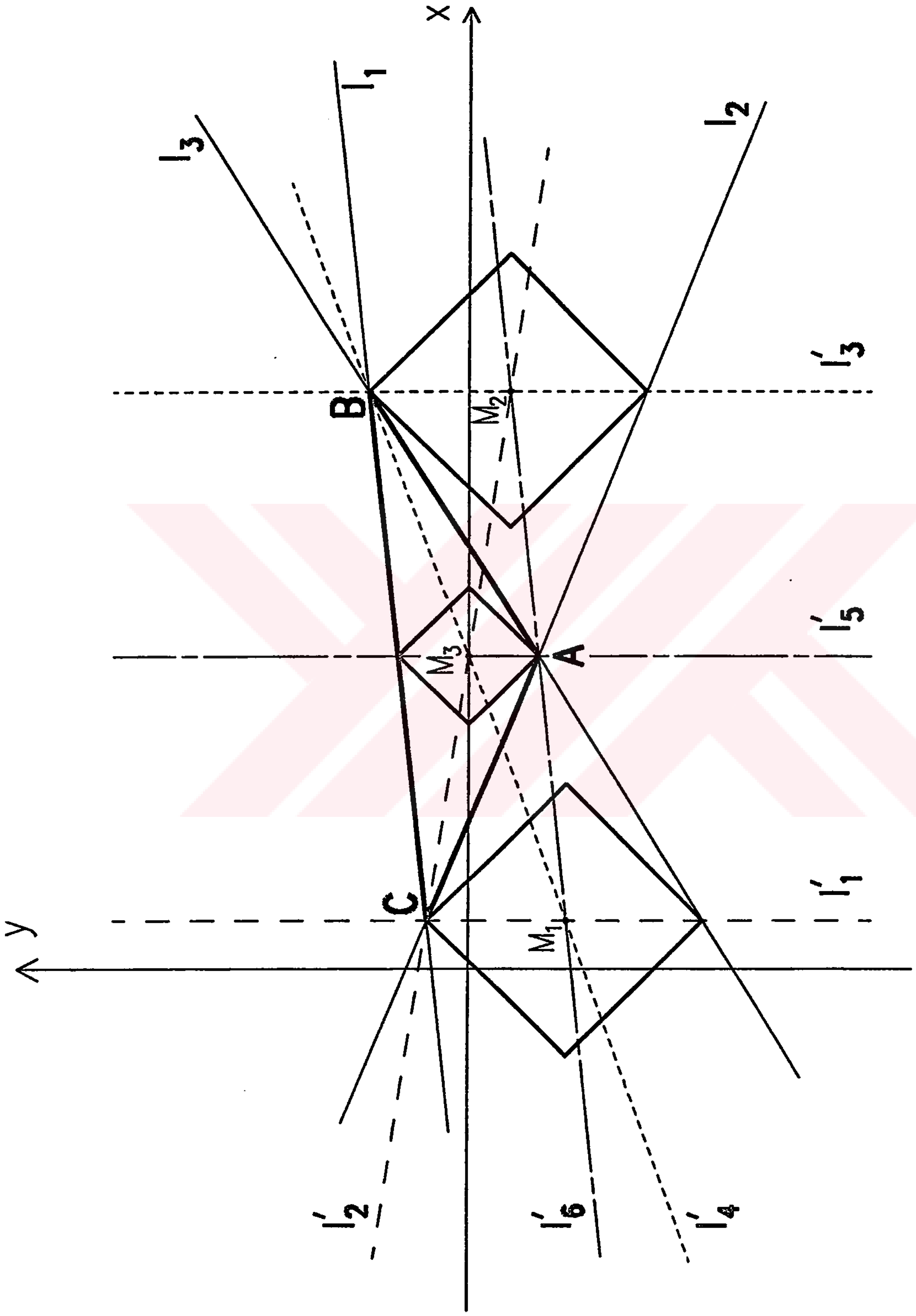
$$A_4=\left(\frac{k_3-k_2}{m_2-m_3}\ ,\ \frac{k_2m_3-k_3m_2}{m_2-m_3}\right)$$

noktaları oluşturur, öyleki A_2 noktası l_1 in üzerinde, A_4 noktası hem l_2 nin hemde l_3 ün üzerindedir. Böylece elde edilen bu taksi çemberi verilen üçgene köşesel teğet taksi çemberidir. Ve son olarak

$$\begin{cases} x = \dfrac{k_2 - k_1}{m_1 - m_2} \\ \\ x = \dfrac{k_3 - k_1}{m_1 - m_3} \\ \\ x = \dfrac{k_3 - k_2}{m_2 - m_3} \end{cases}$$

doğruları paralel olduklarından bir noktada kesişmezler. Dolayısıyla ilgili bölgede üçgene teğet olan bir taksi çemberi elde edilemez. Ohalde:

Üçgenin kenarlarını oluşturan doğruların üçüde yataysal konumda ise köşesel üç teğet taksi çemberi vardır, öyleki bunlardan birisi köşesel iç-teğet diğerleri köşesel dış-teğet taksi çemberleridir.



Şekil 3.5

(ii) l_1, l_2, l_3 doğruları dikeysel doğrular olsun. Bu durumda

$$l_i \quad .... \quad a_i x + b_i y + c_i = 0, \quad \ni \left|-\frac{a_i}{b_i}\right| > 1, \quad i = 1,2,3$$

dir. Ayrıca l_i , $i = 1,2,3$ doğruları noktadaş ve paralel olmadıkları için

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (*)$$

olmalıdır. l_1 ve l_2 doğrularına eşit taksi uzaklıktaki, $X = (x, y)$ noktaları

$$d_T((x,y), l_1) = d_T((x,y), l_2)$$

şartını sağlayacağından

$$\frac{|a_1 x + b_1 y + c_1|}{\max\{|a_1|, |b_1|\}} = \frac{|a_2 x + b_2 y + c_2|}{\max\{|a_2|, |b_2|\}}$$

$$\frac{|a_1 x + b_1 y + c_1|}{|a_1|} = \frac{|a_2 x + b_2 y + c_2|}{|a_2|}$$

ifadesinden $\frac{b_i}{a_i} = m_i$ ve $\frac{c_i}{a_i} = k_i$, $a_i \neq 0$ $i = 1,2,3$ alınmak üzere

$$l_1' \ldots y = \frac{k_2 - k_1}{m_1 - m_2} \ ; x + m_1 y + k_1 \lesseqgtr 0, \quad x + m_2 y + k_2 \lesseqgtr 0$$

$$l_2' \ldots x + \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) y + \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0 \ ; x + m_1 y + k_1 \lesseqgtr 0, \quad x + m_2 y + k_2 \gtreqless 0$$

doğruları elde edilir. l_1' ve l_2' doğruları üzerindeki bütün noktalar l_1 ve l_2 doğrularına eşit taksi uzaklıktadır. l_1 ve l_3 doğrularına eşit taksi uzaklıktaki $X = (x, y)$ noktaları

$$d_T((x,y), l_1) = d_T((x,y), l_3)$$

şartını sağlayacağından, bu noktalar

$$\frac{|a_1 x + b_1 y + c_1|}{\max\{|a_1|, |b_1|\}} = \frac{|a_3 x + b_3 y + c_3|}{\max\{|a_3|, |b_3|\}}$$

den

$$l_3' \ldots y = \frac{k_3-k_1}{m_1-m_3} \;; x+m_1y+k_1 \underset{\geq}{\leq} 0,\; x+m_3y+k_3 \underset{\geq}{\leq} 0$$

$$l_4' \ldots x+\tfrac{1}{2}(m_1+m_3)\,y+\tfrac{1}{2}(k_1+k_3)=0 \;; x+m_1y+k_1 \underset{\geq}{\leq} 0,\; x+m_3y+k_3 \underset{<}{\geq} 0$$

doğruları üzerindedir. Yani l_3' ve l_4' doğruları üzerindeki bütün noktalar l_1 ve l_3 doğrularına eşit taksi uzaklıktadır. l_2 ve l_3 doğrularına eşit taksi uzaklıktaki $X=(x,y)$ noktaları

$$d_T((x,y),l_2)=d_T((x,y),l_3)$$

şartını sağlayacağından, bu noktalar

$$\frac{|a_2x+b_2y+c_2|}{\max\{|a_2|,|b_2|\}}=\frac{|a_3x+b_3y+c_3|}{\max\{|a_3|,|b_3|\}}$$

den

$$l_5' \ldots y = \frac{k_3-k_2}{m_2-m_3} \;; x+m_2y+k_2 \underset{\geq}{\leq} 0,\; x+m_3y+k_3 \underset{\geq}{\leq} 0$$

$$l_6' \ldots x+\tfrac{1}{2}(m_2+m_3)\,y+\tfrac{1}{2}(k_2+k_3)=0 \;; x+m_2y+k_2 \underset{\geq}{\leq} 0,\; x+m_3y+k_3 \underset{<}{\geq} 0$$

doğruları üzerindedir. Aynı zamanda (*) da $\frac{b_i}{a_i}=m_i$ ve $\frac{c_i}{a_i}=k_i$, $a_i\neq 0$, $i=1,2,3$ kullanıldığında

$$a_1a_2a_3\begin{vmatrix}1 & m_1 & k_1\\ 1 & m_2 & k_2\\ 1 & m_3 & k_3\end{vmatrix}\neq 0$$

dır. $a_i\neq 0$, $i=1,2,3$ olduğundan

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & m_1 & k_1\\ 1 & m_2 & k_2\\ 1 & m_3 & k_3\end{vmatrix}\neq 0$$

dir. Böylece

$$\begin{cases} y = \frac{k_2-k_1}{m_1-m_2} \\ \\ x + \frac{1}{2}\left(m_1+m_3\right)y + \frac{1}{2}\left(k_1+k_3\right) = 0 \\ \\ x + \frac{1}{2}\left(m_2+m_3\right)y + \frac{1}{2}\left(k_2+k_3\right) = 0 \end{cases}$$

doğruları

$$M_1 = \left(\frac{k_1(-m_2-m_3)+k_2(m_1+m_3)+k_3(m_1-m_2)}{2(m_2-m_1)}, \frac{k_2-k_1}{m_1-m_2}\right)$$

noktasında kesişirler, öyleki M_1 noktası l_1, l_2, l_3 doğrularına eşit taksi uzaklıktadır ki bu uzaklık

$$r_1 = \left|\frac{k_1(m_2-m_3)+k_2(m_3-m_1)+k_3(m_1-m_2)}{2(m_2-m_1)}\right|$$

dir. Yani

$$r_1 = \left|\frac{\Delta}{2(m_2-m_1)}\right|$$

dir. Böylece M_1 merkezli, r_1 yarıçaplı taksi çemberi

$$\left|x - \frac{k_1(-m_2-m_3)+k_2(m_1+m_3)+k_3(m_1-m_2)}{2(m_2-m_1)}\right| + \left|y - \frac{k_2-k_1}{m_1-m_2}\right| = r_1$$

dir. Bu çemberin köşeleri ve kenarları incelendiğinde l_1, l_2, l_3 doğruları üzerinde çemberin birer köşe noktası bulunduğundan, çember verilen üçgene köşesel teğet taksi çemberidir.

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}(m_1+m_2)y + \frac{1}{2}(k_1+k_2) = 0 \\ \\ x + \frac{1}{2}\left(m_2+m_3\right)y + \frac{1}{2}\left(k_2+k_3\right) = 0 \\ \\ y = \frac{k_3-k_1}{m_1-m_3} \end{cases}$$

doğruları

$$M_2 = \left(\frac{k_1(-m_2 - m_3) + k_2(m_1 - m_3) + k_3(m_1 + m_2)}{2(m_3 - m_1)}, \frac{k_3 - k_1}{m_1 - m_3} \right)$$

noktasında kesişirler, öyleki bu nokta l_1, l_2, l_3 doğrularına eşit taksi uzaklıktadır ki bu uzaklık

$$r_2 = \left| \frac{k_1(m_3 - m_2) + k_2(m_1 - m_3) + k_3(m_2 - m_1)}{2(m_3 - m_1)} \right|$$

dir. Yani

$$r_2 = \left| \frac{\Delta}{2(m_3 - m_1)} \right|$$

dir. Böylece M_2 merkezli, r_2 yarıçaplı

$$\left| x - \tfrac{k_1(-m_2-m_3)+k_2(m_1-m_3)+k_3(m_1+m_2)}{2(m_3-m_1)} \right| + \left| y - \tfrac{k_3-k_1}{m_1-m_3} \right| = r_2$$

taksi çemberinin kenarları ve köşeleri incelendiğinde l_1, l_2, l_3 doğruları üzerinde birer köşesi bulunduğundan, çember verilen üçgene köşesel teğettir.

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)y + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0 \\ \\ x + \frac{1}{2}(m_1 + m_3)y + \frac{1}{2}(k_1 + k_3) = 0 \\ \\ y = \frac{k_3 - k_2}{m_2 - m_3} \end{cases}$$

doğruları

$$M_3 = \left(\frac{k_1(m_2 - m_3) + k_2(-m_1 - m_3) + k_3(m_1 + m_2)}{2(m_3 - m_2)}, \frac{k_3 - k_2}{m_2 - m_3} \right)$$

noktasında kesişirler, öyleki bu nokta l_1, l_2, l_3 doğrularına eşit taksi uzaklıktadır ki bu uzaklık

$$r_3 = \left| \frac{k_1(m_3 - m_2) + k_2(m_1 - m_3) + k_3(m_2 - m_1)}{2(m_3 - m_2)} \right|$$

dir. Yani

$$r_3 = \left| \frac{\Delta}{2(m_3 - m_2)} \right|$$

dir. Böylece M_3 merkezli, r_3 yarıçaplı

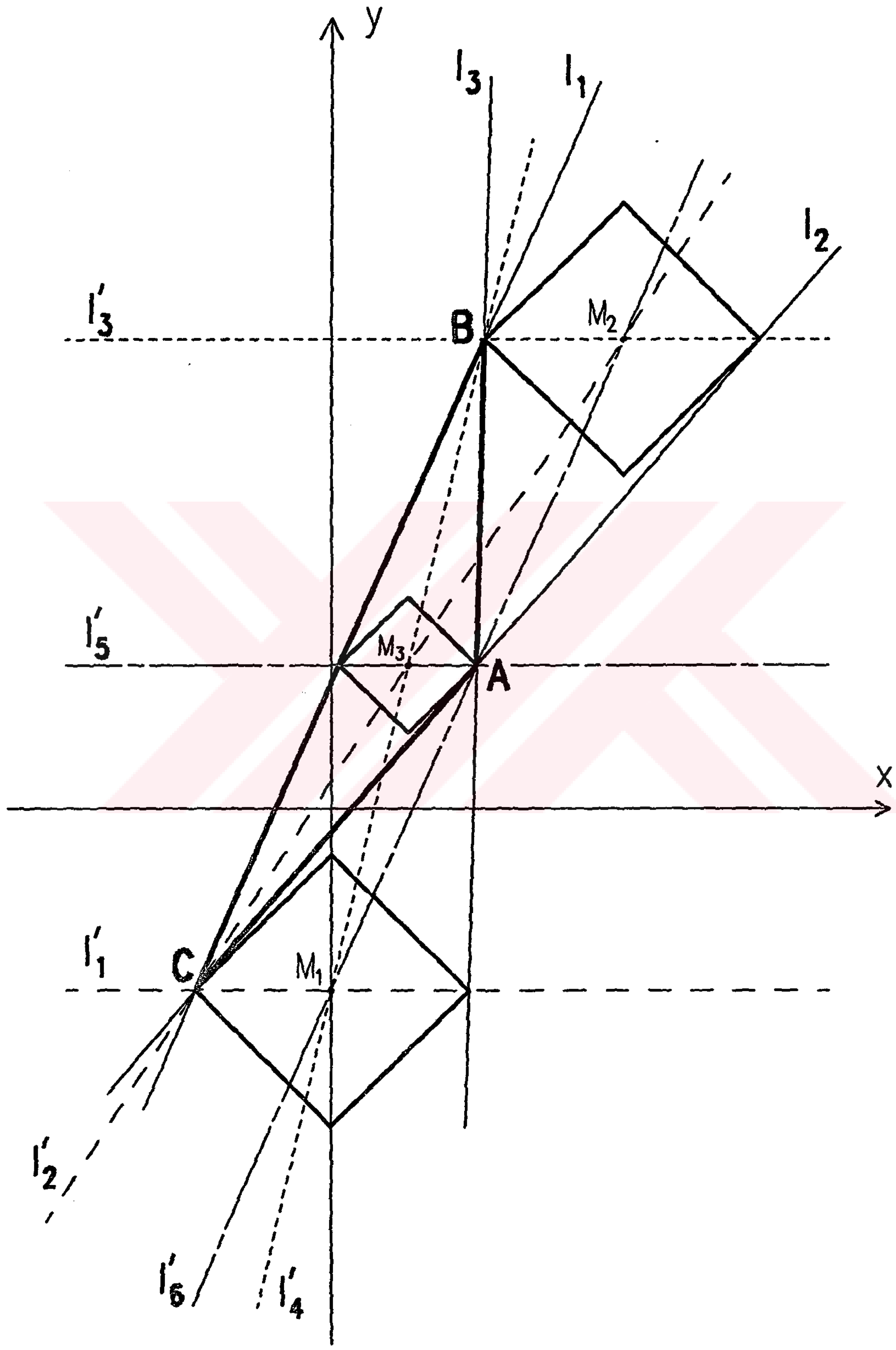
$$\left| x - \frac{k_1(m_2-m_3)+k_2(-m_1-m_3)+k_3(m_1+m_2)}{2(m_3-m_2)} \right| + \left| y - \frac{k_3-k_2}{m_2-m_3} \right| = r_3$$

taksi çemberinin kenarları ve köşeleri incelendiğinde l_1, l_2, l_3 doğrularının üzerinde çemberin bir köşesi bulunduğundan, çember verilen üçgene köşesel teğettir.

$$\begin{cases} y = \frac{k_2-k_1}{m_1-m_2} \\ \\ y = \frac{k_3-k_1}{m_1-m_3} \\ \\ y = \frac{k_3-k_2}{m_2-m_3} \end{cases}$$

doğruları paralel olduklarından bir noktada kesişmezler. Dolayısıyla ilgili bölgede üçgene teğet olan bir taksi çemberi elde edilemez. Yani:

Üçgenin kenarlarını oluşturan doğruların üçüde dikeysel konumda ise köşesel üç teğet taksi çemberi vardır, öyleki bunlardan birisi köşesel iç-teğet diğerleri köşesel dış-teğettir.



Şekil 3.6

(iii) l_1, l_2, l_3 doğrularının ikisi yataysal diğeri dikeysel olsun.

Kabul edelimki l_1, l_2 yataysal, l_3 dikeysel olsun. Buna göre

$$l_1 \ \ .... \ \ a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad |a_1| < |b_1|$$

$$l_2 \ \ .... \ \ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \quad |a_2| < |b_2|$$

$$l_3 \ \ .... \ \ a_3x + b_3y + c_3 = 0, \quad |a_3| > |b_3|$$

dir. Ayrıca l_i , $i = 1, 2, 3$ doğruları noktadaş ve paralel olmadıkları için

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (*)$$

olmalıdır. l_1 ve l_2 doğrularına eşit taksi uzaklıktaki $X = (x, y)$ noktaları

$$d_T((x,y), l_1) = d_T((x,y), l_2)$$

şartını sağlayacağından, bu noktalar

$$\frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\max\{|a_1|, |b_1|\}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\max\{|a_2|, |b_2|\}}$$

$$\frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{|b_1|} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{|b_2|}$$

ifadesinden, $\frac{a_i}{b_i} = m_i$ ve $\frac{c_i}{b_i} = k_i$, $i = 1, 2$, $\frac{b_i}{a_i} = m'_i$ ve $\frac{c_i}{a_i} = k'_i$, $i = 3$ alınmak üzere

$$l'_1 \ldots x = \tfrac{k_2 - k_1}{m_1 - m_2} \ ; m_1x + y + k_1 \lesseqgtr 0, \ m_2x + y + k_2 \lesseqgtr 0$$

$$l'_2 \ldots \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)x + y + \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0 \ ; m_1x + y + k_1 \lesseqgtr 0, \ m_2x + y + k_2 \gtreqless 0$$

doğruları üzerindedir. l_1 ve l_3 doğrularına eşit taksi uzaklıktaki $X=(x,y)$ noktaları

$$d_T((x,y),l_1)=d_T((x,y),l_3)$$

şartını sağlayacağından, bu noktalar

$$\frac{|a_1x+b_1y+c_1|}{\max\{|a_1|,|b_1|\}}=\frac{|a_3x+b_3y+c_3|}{\max\{|a_3|,|b_3|\}}$$

den

$$l_3' \ldots (1-m_1)x+(-1+m_3')y+(k_3'-k_1)=0\ ; m_1x+y+k_1 \underset{\geq}{\leq} 0,\ x+m_3'y+k_3' \underset{\geq}{\leq} 0$$

$$l_4' \ldots (1+m_1)x+(1+m_3')y+(k_3'+k_1)=0\ ; m_1x+y+k_1 \underset{\geq}{\leq} 0,\ x+m_3'y+k_3' \underset{<}{\geq} 0$$

doğruları üzerindedir. l_2 ve l_3 doğrularına eşit taksi uzaklıktaki $X=(x,y)$ noktaları

$$d_T((x,y),l_2)=d_T((x,y),l_3)$$

şartını sağlayacağından, bu noktalar

$$\frac{|a_2x+b_2y+c_2|}{\max\{|a_2|,|b_2|\}}=\frac{|a_3x+b_3y+c_3|}{\max\{|a_3|,|b_3|\}}$$

den

$$l_5' \ldots (1-m_2)x+(-1+m_3')y+(k_3'-k_2)=0\ ; m_2x+y+k_2 \underset{\geq}{\leq} 0,\ x+m_3'y+k_3' \underset{\geq}{\leq} 0$$

$$l_6' \ldots (1+m_2)x+(1+m_3')y+(k_3'+k_2)=0\ ; m_2x+y+k_2 \underset{\geq}{\leq} 0,\ x+m_3'y+k_3' \underset{<}{\geq} 0$$

doğruları üzerindedir. Aynı zamanda (*) da $\frac{a_i}{b_i}=m_i$ ve $\frac{c_i}{b_i}=k_i$, $b_i\neq 0$, $i=1,2$, $\frac{b_i}{a_i}=m_i'$ ve $\frac{c_i}{a_i}=k_i'$, $a_i\neq 0$, $i=3$ kullanıldığında

$$b_1b_2a_3\begin{vmatrix} m_1 & 1 & k_1 \\ m_2 & 1 & k_2 \\ 1 & m_3' & k_3' \end{vmatrix}\neq 0$$

dır. $b_i \neq 0$, $i = 1,2$ ve $a_i \neq 0$, $i = 3$ olduğundan

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_1 & 1 & k_1 \\ m_2 & 1 & k_2 \\ 1 & m_3' & k_3' \end{vmatrix} \neq 0$$

dir. Buna göre

$$\begin{cases} x = \frac{k_2-k_1}{m_1-m_2} \\ (1+m_1)x + (1+m_3')y + (k_3'+k_1) = 0 \\ (1+m_2)x + (1+m_3')y + (k_3'+k_2) = 0 \end{cases}$$

doğruları

$$M_1 = \left(\frac{k_2-k_1}{m_1-m_2}\ ,\ \frac{k_1(-1-m_2)+k_2(1+m_1)+k_3'(m_1-m_2)}{(m_2-m_1)(1+m_3')}\right)$$

noktasında kesişirler, öyleki M_1 noktası l_1, l_2, l_3 doğrularına eşit taksi uzaklıktadır ki bu uzaklık

$$r_1 = \left|\frac{k_1(1-m_2m_3')+k_2(-1+m_1m_3')+k_3'(m_2-m_1)}{(m_2-m_1)(1+m_3')}\right|$$

dir. Yani

$$r_1 = \left|\frac{\Delta}{(m_2-m_1)(1+m_3')}\right|$$

dir. Böylece M_1 merkezli, r_1 yarıçaplı taksi çemberi

$$\left|x - \frac{k_2-k_1}{m_1-m_2}\right| + \left|y - \frac{k_1(-1-m_2)+k_2(1+m_1)+k_3'(m_1-m_2)}{(m_2-m_1)(1+m_3')}\right| = r_1$$

dir ve l_1, l_2, l_3 doğrularının herbiri üzerinde, çemberin bir köşe noktasından başka nokta bulunmadığından, elde edilen taksi çemberi verilen üçgene köşesel teğettir.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(m_1+m_2)x+y+\frac{1}{2}(k_1+k_2)=0 \\ \\ (1-m_1)x+(-1+m_3')y+(k_3'-k_1)=0 \\ \\ (1+m_2)x+(1+m_3')y+(k_3'+k_2)=0 \end{cases}$$

doğruları

$$M_2=\left(\frac{k_1(1+m_3')+k_2(-1+m_3')-2k_3'}{2(1-m_1)+(m_1+m_2)(1-m_3')}\ ,\ \frac{k_1(-1-m_2)+k_2(-1+m_1)+k_3'(m_1+m_2)}{2(1-m_1)+(m_1+m_2)(1-m_3')}\right)$$

noktasında kesişirler, öyleki M_2 noktası l_1, l_2, l_3 doğrularına eşit taksi uzaklıktadır ki bu uzaklık

$$r_2=\left|\frac{k_1(1-m_2m_3')+k_2(-1+m_1m_3')+k_3'(m_2-m_1)}{2(1-m_1)+(m_1+m_2)(1-m_3')}\right|$$

dir. Yani

$$r_2=\left|\frac{\Delta}{2(1-m_1)+(m_1+m_2)(1-m_3')}\right|$$

dir. Böylece M_2 merkezli, r_2 yarıçaplı taksi çemberi

$$\left|x-\frac{k_1(1+m_3')+k_2(-1+m_3')-2k_3'}{2(1-m_1)+(m_1+m_2)(1-m_3')}\right|+\left|y-\frac{k_1(-1-m_2)+k_2(-1+m_1)+k_3'(m_1+m_2)}{2(1-m_1)+(m_1+m_2)(1-m_3')}\right|=r_2$$

dir ve l_1, l_2, l_3 doğrularının herbiri üzerinde, çemberin bir köşe noktasından başka nokta bulunmadığından, elde edilen taksi çemberi verilen üçgene köşesel teğettir.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(m_1+m_2)x+y+\frac{1}{2}(k_1+k_2)=0 \\ \\ (1+m_1)x+(1+m_3')y+(k_3'+k_1)=0 \\ \\ (1-m_2)x+(-1+m_3')y+(k_3'-k_2)=0 \end{cases}$$

doğruları

$$M_3 = \left(\frac{k_1(-1+m_3')+k_2(1+m_3')-2k_3'}{2(1+m_1)-(m_1+m_2)(1+m_3')} , \frac{k_1(-1+m_2)+k_2(-1-m_1)+k_3'(m_1+m_2)}{2(1+m_1)-(m_1+m_2)(1+m_3')} \right)$$

noktasında kesişirler, öyleki M_3 noktası l_1, l_2, l_3 doğrularına eşit taksi uzaklıktadır ki bu uzaklık

$$r_3 = \left| \frac{k_1(1-m_2m_3') + k_2(-1+m_1m_3') + k_3'(m_2 - m_1)}{2(1+m_1) - (m_1+m_2)(1+m_3')} \right|$$

dir. Yani

$$r_3 = \left| \frac{\Delta}{2(1+m_1) - (m_1+m_2)(1+m_3')} \right|$$

dir. Böylece M_3 merkezli, r_3 yarıçaplı taksi çemberi

$$\left| x - \frac{k_1(-1+m_3')+k_2(1+m_3')-2k_3'}{2(1+m_1)-(m_1+m_2)(1+m_3')} \right| + \left| y - \frac{k_1(-1-m_2)+k_2(-1+m_1)+k_3'(m_1+m_2)}{2(1-m_1)+(m_1+m_2)(1-m_3')} \right| = r_3$$

dir ve l_1, l_2, l_3 doğrularının herbiri üzerinde, çemberin bir köşe noktasından başka nokta bulunmadığından, elde edilen taksi çemberi verilen üçgene köşesel teğettir.

$$\begin{cases} x = \dfrac{k_2 - k_1}{m_1 - m_2} \\[2ex] (1-m_1)x + (-1+m_3')y + (k_3' - k_1) = 0 \\[2ex] (1-m_2)x + (-1+m_3')y + (k_3' - k_2) = 0 \end{cases}$$

doğruları

$$M_4 = \left(\frac{k_2 - k_1}{m_1 - m_2} , \frac{k_1(1-m_2) + k_2(-1+m_1) + k_3'(-m_1+m_2)}{(m_1 - m_2)(-1+m_3')} \right)$$

noktasında kesişirler, öyleki M_4 noktası l_1, l_2, l_3 doğrularına eşit taksi uzaklıktadır ki bu uzaklık

$$r_4 = \left| \frac{k_1(1-m_2m_3') + k_2(-1+m_1m_3') + k_3'(m_2 - m_1)}{(m_1 - m_2)(-1+m_3')} \right|$$

dir. Yani

$$r_4 = \left| \frac{\Delta}{(m_1 - m_2)(-1 + m_3')} \right|$$

dir. Böylece M_4 merkezli, r_4 yarıçaplı taksi çemberi

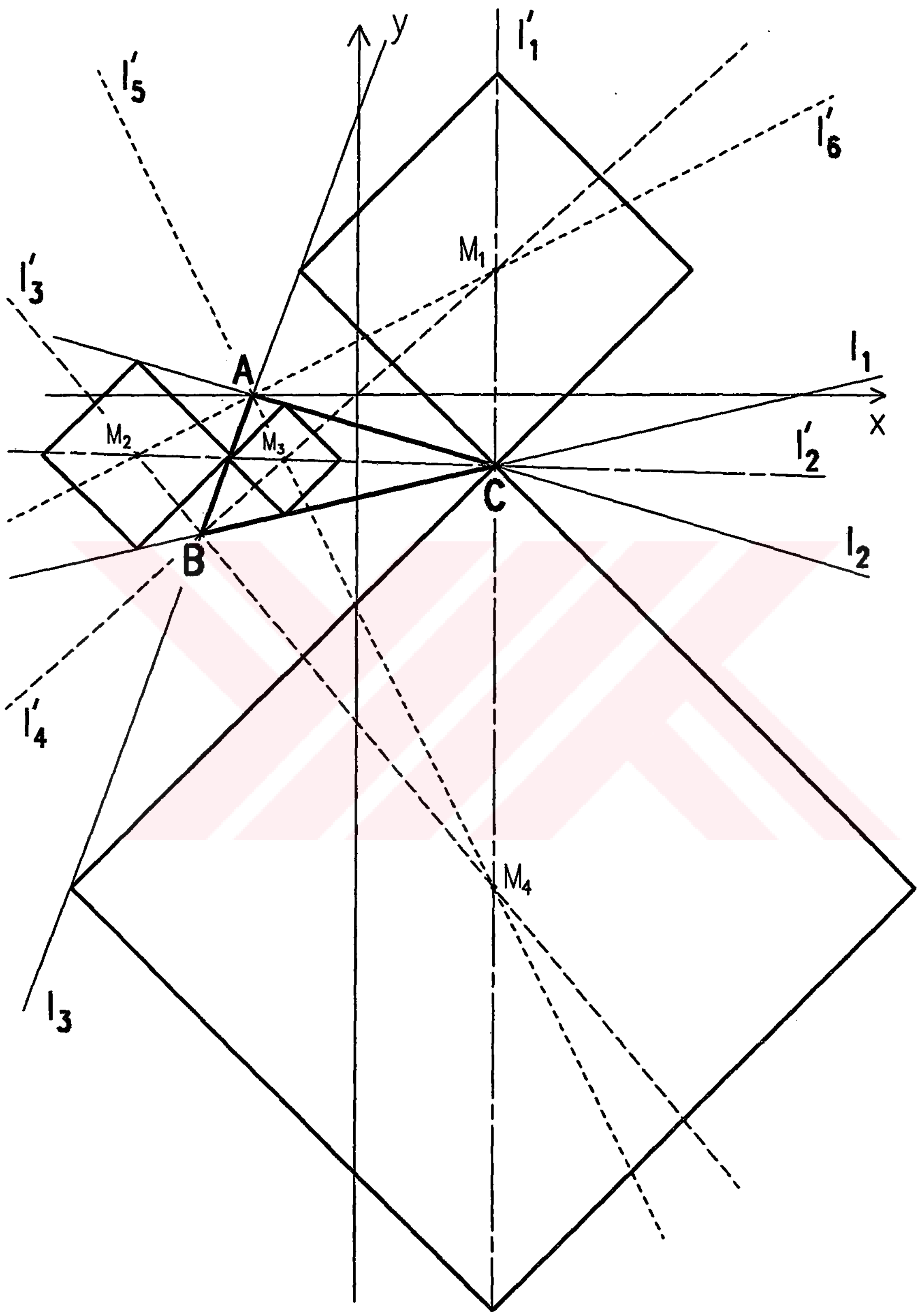
$$\left| x - \frac{k_2 - k_1}{m_1 - m_2} \right| + \left| y - \frac{k_1(1-m_2)+k_2(-1+m_1)+k_3'(-m_1+m_2)}{(m_1-m_2)(-1+m_3')} \right| = r_4$$

dir ve l_1, l_2, l_3 doğrularının herbiri üzerinde, çemberin bir köşe noktasından başka nokta bulunmadığından, elde edilen taksi çemberi verilen üçgene köşesel teğettir.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(m_1 + m_2)x + y + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0 \\ \\ (1 + m_1)x + (1 + m_3')y + (k_3' + k_1) = 0 \\ \\ (1 + m_2)x + (1 + m_3')y + (k_3' + k_2) = 0 \end{cases}$$

doğruları kesişmezler. Dolayısıyla ilgili bölgede üçgene teğet olan taksi çemberi yoktur. Ohalde:

Üçgenin kenarlarını oluşturan doğruların ikisi yataysal biri dikeysel konumda iken üçgene teğet olan köşesel dört teğet taksi çemberi vardır, öyleki bunlardan birisi köşesel iç-teğet diğerleri köşesel dış-teğettir.



Şekil 3.7

(iv) l_1, l_2, l_3 doğrularının ikisi dikeysel diğeri yataysal olsun.

Kabul edelimki l_1, l_2 dikeysel, l_3 yataysal olsun. Buna göre

$$l_1 \quad .... \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad |a_1| > |b_1|$$

$$l_2 \quad .... \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0, \quad |a_2| > |b_2|$$

$$l_3 \quad .... \quad a_3x + b_3y + c_3 = 0, \quad |a_3| < |b_3|$$

dir. Ayrıca l_i , $i = 1, 2, 3$ doğruları noktadaş ve paralel olmadıkları için

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (*)$$

olmalıdır. l_1 ve l_2 doğrularına eşit taksi uzaklıktaki $X = (x, y)$ noktaları

$$d_T((x,y), l_1) = d_T((x,y), l_2)$$

şartını sağlayacağından, bu noktalar

$$\frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\max\{|a_1|, |b_1|\}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\max\{|a_2|, |b_2|\}}$$

$$\frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{|a_1|} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{|a_2|}$$

ifadesinden, $\frac{a_i}{b_i} = m_i$ ve $\frac{c_i}{b_i} = k_i$, $b_i \neq 0$, $i = 3$, $\frac{b_i}{a_i} = m'_i$ ve $\frac{c_i}{a_i} = k'_i$, $a_i \neq 0 \quad i = 1, 2$ alınmak üzere

$$l'_1 \dots y = \frac{k'_2 - k'_1}{m'_1 - m'_2} \ ; x + m'_1y + k'_1 \lesseqgtr 0, \ x + m'_2y + k'_2 \lesseqgtr 0$$

$$l'_2 \dots x + \tfrac{1}{2}(m'_1 + m'_2)y + \tfrac{1}{2}(k'_1 + k'_2) = 0 \ ; x + m'_1y + k'_1 \lesseqgtr 0, \ x + m'_2y + k'_2 \gtreqless 0$$

doğruları üzerindedir. l_1 ve l_3 doğrularına eşit taksi uzaklıktaki
$X = (x, y)$ noktaları

$$d_T((x,y),l_1) = d_T((x,y),l_3)$$

şartını sağlayacağından, bu noktalar

$$\frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\max\{|a_1|,|b_1|\}} = \frac{|a_3x + b_3y + c_3|}{\max\{|a_3|,|b_3|\}}$$

den

$l'_3 \ldots (1 - m_3)x + (-1 + m'_1)y + (k'_1 - k_3) = 0 \;; x + m'_1y + k'_1 \underset{\geq}{\leq} 0,\; x + m_3y + k_3 \underset{\geq}{\leq} 0$

$l'_4 \ldots (1 + m_3)x + (1 + m'_1)y + (k'_1 + k_3) = 0 \;; x + m'_1y + k'_1 \underset{\geq}{\leq} 0,\; x + m_3y + k_3 \underset{<}{\geq} 0$

doğruları üzerindedir. l_2 ve l_3 doğrularına eşit taksi uzaklıktaki
$X = (x, y)$ noktaları

$$d_T((x,y),l_2) = d_T((x,y),l_3)$$

şartını sağlayacağından, bu noktalar

$$\frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\max\{|a_2|,|b_2|\}} = \frac{|a_3x + b_3y + c_3|}{\max\{|a_3|,|b_3|\}}$$

den

$l'_5 \ldots (1 - m_3)x + (-1 + m'_2)y + (k'_2 - k_3) = 0 \;; x + m'_2y + k'_2 \underset{\geq}{\leq} 0,\; x + m_3y + k_3 \underset{\geq}{\leq} 0$

$l'_6 \ldots (1 + m_3)x + (1 + m'_2)y + (k'_2 + k_3) = 0 \;; x + m'_2y + k'_2 \underset{\geq}{\leq} 0,\; x + m_3y + k_3 \underset{<}{\geq} 0$

doğruları üzerindedir. Aynı zamanda (*) da $\frac{a_i}{b_i} = m_i$ ve $\frac{c_i}{b_i} = k_i$,
$b_i \neq 0$, $i = 3$, $\frac{b_i}{a_i} = m'_i$ ve $\frac{c_i}{a_i} = k'_i, a_i \neq i = 1,2$ kullanıldığında

$$a_1a_2b_3 \begin{vmatrix} 1 & m'_1 & k'_1 \\ 1 & m'_2 & k'_2 \\ m_3 & 1 & k_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

dır. $a_i \neq 0,\ i = 1,2$ ve $b_i \neq 0,\ i = 3$ olduğundan

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & m'_1 & k'_1 \\ 1 & m'_2 & k'_2 \\ m_3 & 1 & k_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

dir. Buna göre

$$\begin{cases} y = \frac{k'_2 - k'_1}{m'_1 - m'_2} \\ (1+m_3)x + (1+m'_1)y + (k'_1 + k_3) = 0 \\ (1+m_3)x + (1+m'_2)y + (k'_2 + k_3) = 0 \end{cases}$$

doğruları

$$M_1 = \left(\frac{k'_1(1+m'_2) + k'_2(-1-m'_1) + k_3(-m'_1 + m'_2)}{(m'_1 - m'_2)(1+m'_3)} \ , \ \frac{k'_2 - k'_1}{m'_1 - m'_2} \right)$$

noktasında kesişirler, öyleki M_1 noktası l_1, l_2, l_3 doğrularına eşit taksi uzaklıktadır ki bu uzaklık

$$r_1 = \left| \frac{k'_1(1 - m'_2 m_3) + k'_2(-1 + m'_1 m_3) + k_3(m'_2 - m'_1)}{(m'_1 - m'_2)(1+m'_3)} \right|$$

dir. Yani

$$r_1 = \left| \frac{\Delta}{(m'_1 - m'_2)(1+m'_3)} \right|$$

dir. Böylece M_1 merkezli, r_1 yarıçaplı taksi çemberi

$$\left| x - \frac{k'_1(1+m'_2)+k'_2(-1-m'_1)+k_3(-m'_1+m'_2)}{(m'_1-m'_2)(1+m'_3)} \right| + \left| y - \frac{k'_2-k'_1}{m'_1-m'_2} \right| = r_1$$

dir ve l_1, l_2, l_3 doğrularının herbiri üzerinde, çemberin bir köşe noktasından başka nokta bulunmadığından, elde edilen taksi çemberi verilen üçgene köşesel teğettir.

$$\begin{cases} x+\frac{1}{2}(m_1'+m_2')y+\frac{1}{2}(k_1'+k_2')=0 \\ (1-m_3)x+(-1+m_1')y+(k_1'-k_3)=0 \\ (1+m_3)x+(1+m_2')y+(k_2'+k_3)=0 \end{cases}$$

doğruları

$$M_2=\left(\frac{k_1'(1+m_2')+k_2'(1-m_1')+k_3(m_1'+m_2')}{2(-1+m_1')-(m_1'+m_2')(1-m_3)},\frac{k_1'(-1-m_3)+k_2'(1-m_3)+2k_3'}{2(-1+m_1')-(m_1'+m_2')(1-m_3)}\right)$$

noktasında kesişirler, öyleki M_2 noktası l_1, l_2, l_3 doğrularına eşit taksi uzaklıktadır ki bu uzaklık

$$r_2=\left|\frac{k_1'(-1+m_2'm_3)+k_2'(1-m_1'm_3)+k_3(m_1'-m_2')}{2(-1+m_1')-(m_1'+m_2')(1-m_3)}\right|$$

dir. Yani

$$r_2=\left|\frac{\Delta}{2(-1+m_1')-(m_1'+m_2')(1-m_3)}\right|$$

dir. Böylece M_2 merkezli, r_2 yarıçaplı taksi çemberi

$$\left|x-\frac{k_1'(1+m_2')+k_2'(1-m_1')+k_3(m_1'+m_2')}{2(-1+m_1')-(m_1'+m_2')(1-m_3)}\right|+\left|y-\frac{k_1'(-1-m_3)+k_2'(1-m_3)+2k_3'}{2(-1+m_1')-(m_1'+m_2')(1-m_3)}\right|=r_2$$

dir ve l_1, l_2, l_3 doğrularının herbiri üzerinde, çemberin bir köşe noktasından başka nokta bulunmadığından, elde edilen taksi çemberi verilen üçgene köşesel teğettir.

$$\begin{cases} x+\frac{1}{2}(m_1'+m_2')y+\frac{1}{2}(k_1'+k_2')=0 \\ (1+m_3)x+(1+m_1')y+(k_1'+k_3)=0 \\ (1-m_3)x+(-1+m_2')y+(k_2'-k_3)=0 \end{cases}$$

doğruları

$$M_3 = \left(\frac{k_1'(-1+m_2')+k_2'(-1-m_1')+k_3(m_1'+m_2')}{2(1+m_1')-(m_1'+m_2')(1+m_3)} , \frac{k_1'(-1+m_3)+k_2'(1+m_3)-2k_3}{2(1+m_1')-(m_1'+m_2')(1+m_3)} \right)$$

noktasında kesişirler, öyleki M_3 noktası l_1, l_2, l_3 doğrularına eşit taksi uzaklıktadır ki bu uzaklık

$$r_3 = \left| \frac{k_1'(1-m_2'm_3)+k_2'(-1+m_1'm_3)+k_3(m_2'-m_1')}{2(1+m_1')-(m_1'+m_2')(1+m_3)} \right|$$

dir. Yani

$$r_3 = \left| \frac{\Delta}{2(1+m_1')-(m_1'+m_2')(1+m_3)} \right|$$

dir. Böylece M_3 merkezli, r_3 yarıçaplı taksi çemberi

$$\left| x - \frac{k_1'(-1+m_2')+k_2'(-1-m_1')+k_3(m_1'+m_2')}{2(1+m_1')-(m_1'+m_2')(1+m_3)} \right| + \left| y - \frac{k_1'(-1+m_3)+k_2'(1+m_3)-2k_3}{2(1+m_1')-(m_1'+m_2')(1+m_3)} \right| = r_3$$

dir ve l_1, l_2, l_3 doğrularının herbiri üzerinde, çemberin bir köşe noktasından başka nokta bulunmadığından, elde edilen taksi çemberi verilen üçgene köşesel teğettir.

$$\begin{cases} y = \frac{k_2'-k_1'}{m_1'-m_2'} \\ (1-m_3)x+(-1+m_1')y+(k_1'-k_3)=0 \\ (1-m_3)x+(-1+m_2')y+(k_2'-k_3)=0 \end{cases}$$

doğruları

$$M_4 = \left(\frac{k_1'(1-m_2')+k_2'(-1+m_1')+k_3(-m_1'+m_2')}{(m_2'-m_1')(1-m_3)}, \frac{k_2'-k_1'}{m_1'-m_2'} \right)$$

noktasında kesişirler, öyleki M_4 noktası l_1, l_2, l_3 doğrularına eşit taksi uzaklıktadır ki bu uzaklık

$$r_4 = \left| \frac{k_1'(1-m_2'm_3)+k_2'(-1+m_1'm_3)+k_3(m_2'-m_1')}{(m_2'-m_1')(1-m_3)} \right|$$

dir. Yani

$$r_4 = \left| \frac{\Delta}{(m'_2 - m'_1)(1 - m_3)} \right|$$

dir. Böylece M_4 merkezli, r_4 yarıçaplı taksi çemberi

$$\left| x - \frac{k'_1(1-m'_2)+k'_2(-1+m'_1)+k_3(-m'_1+m'_2)}{(m'_2-m'_1)(1-m_3)} \right| + \left| y - \frac{k'_2-k'_1}{m'_1-m'_2} \right| = r_4$$

dir ve l_1, l_2, l_3 doğrularının herbiri üzerinde, çemberin bir köşe noktasından başka nokta bulunmadığından, elde edilen taksi çemberi verilen üçgene köşesel teğettir. l'_2, l'_4, l'_6 doğruları bir noktada noktadaş olmadıklarından üçgene teğet taksi çemberi elde edilemez. Buna göre:

Üçgenin kenarlarını oluşturan doğruların ikisi dikeysel biri yataysal konumda iken üçgene teğet olan köşesel dört teğet taksi çemberi vardır, öyleki bunlardan birisi köşesel iç-teğet diğerleri köşesel dış-teğet taksi çemberleridir.

Sonuç 3.2: *Taksi düzleminde üçgenin kenarlarını oluşturan l_i doğrularından birisi $\left|-\frac{a_i}{b_i}\right| = 1$ özelliğinde ise üçgene teğet olan üç yada dört taksi çemberi vardır, öyleki bu taksi çemberleri, $\left|-\frac{a_i}{b_i}\right| = 1$ özelliğindeki l_i doğrusuna kenarsal, diğer iki doğruya köşesel teğettirler.*

İspat : l_1, l_2, l_3 üçgenin kenarlarını oluşturan doğrular olmak üzere l_1 in $\left|-\frac{a_1}{b_1}\right| = 1$ özelliğinde olduğunu kabul edelim. Bu durumda l_1, $x + y + k_1 = 0$ veya $-x + y + k_1 = 0$ formundadır. l_2 ve l_3 doğrularıda

(i) l_2 , l_3 yataysal konumlu,

(ii) l_2 , l_3 dikeysel konumlu,

(iii) l_2 yataysal, l_3 dikeysel konumlu

olabilir. Buna göre yukarıdaki teoremin ispatında $m_1 = 1$ ve $m_1 = -1$ alarak ispat tekrar edildiğinde verilen üçgene teğet olan taksi çemberleri bulunur, öyleki bu taksi çemberlerinin l_1 üzerinde bir kenarı , l_2 ve l_3 doğruları üzerinde birer köşesi bulunmaktadır. Dolayısıyla üçgene teğet olacak şekilde elde edilen taksi çemberleri l_1 e kenarsal, diğerlerine köşesel teğettirler.

Sonuç 3.3: *Taksi düzleminde üçgenin kenarlarını oluşturan l_i doğrularından ikisi $\left|-\frac{a_i}{b_i}\right| = 1$ özelliğinde ise üçgene teğet olan üç taksi çemberi vardır, öyleki bu taksi çemberleri, $\left|-\frac{a_i}{b_i}\right| = 1$ özelliğindeki l_i doğrularına kenarsal, diğer doğruya köşesel teğettirler.*

İspat : l_1, l_2, l_3 üçgenin kenarlarını oluşturan doğrular olmak üzere l_i in $\left|-\frac{a_i}{b_i}\right| = 1$, $i = 1, 2$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

l_1 ... $x + y + k_1 = 0$ (veya $-x + y + k_1 = 0$)

l_2 ... $-x + y + k_2 = 0$ (veya $x + y + k_2 = 0$)

l_3 ... $a_3x + b_3y + c_3 = 0$, $|a_3| < |b_3|$ veya $|a_3| > |b_3|$

formundadır. Buna göre yukarıdaki teoremin ispatında $m_1 = 1$ (veya

$m_1 = -1$), $m_2 = -1$ (veya $m_2 = 1$) alarak ispat tekrar edildiğinde verilen üçgene teğet olan taksi çemberleri bulunur, öyleki bu taksi çemberlerinin l_1 ve l_2 üzerinde birer kenarı, l_3 üzerinde bir köşesi bulunmaktadır.

Örnek (1) ABC, kenarları

$$\begin{cases} l_1 & \dots & y = k_1 \\ l_2 & \dots & y = x + k_2 \\ l_3 & \dots & x + k_3 = 0 \end{cases}$$

doğruları olan bir üçgen olsun. Bu üçgene teğet olan taksi çemberlerinin merkezleri M_i, yarıçapları r_i, $i = 1, 2, 3, 4$ şöyledir:

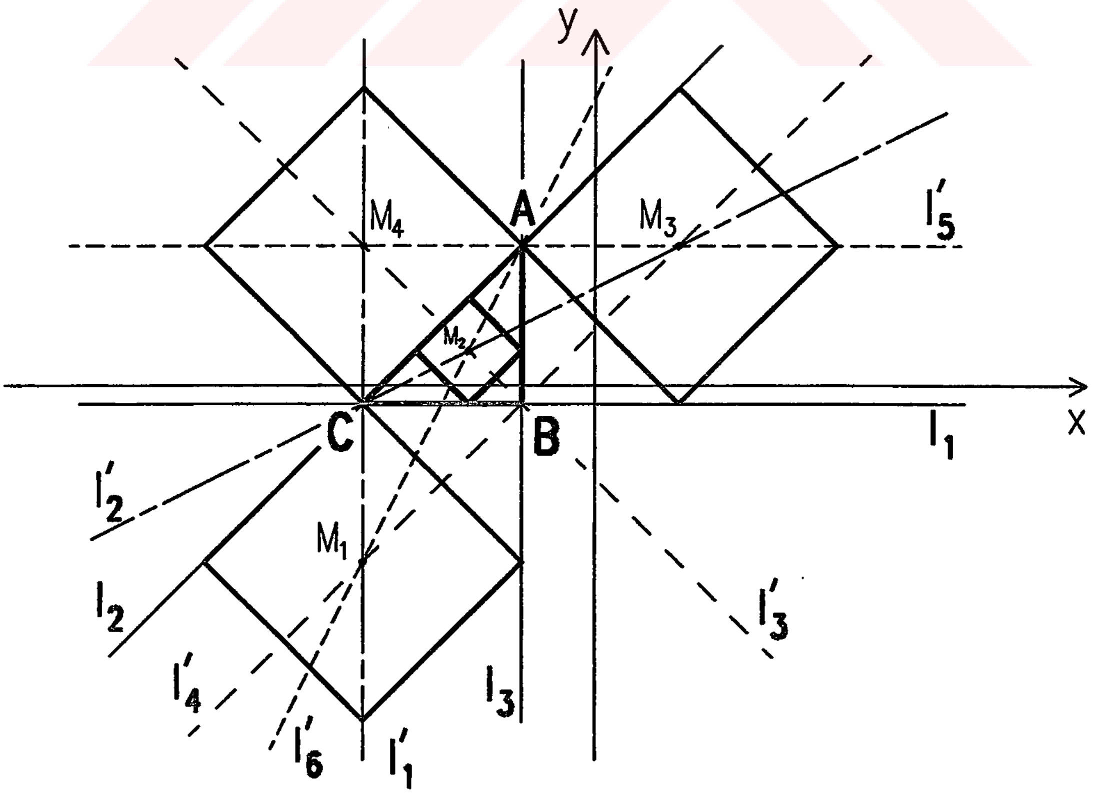
$$M_1 = (k_2 - k_1 \ , \ 2k_1 - k_2 + k_3) \quad , \quad r_1 = |-k_1 + k_2 - k_3|$$

$$M_2 = \left(\tfrac{1}{3}\ (k_1 - k_2 - 2k_3) \ , \ \tfrac{1}{3}\ (2k_1 + k_2 - k_3)\right) \quad , \quad r_2 = \left|\tfrac{1}{3}\ (k_1 - k_2 + k_3)\right|$$

$$M_3 = (-k_1 + k_2 - 2k_3 \ , \ k_2 - k_3) \quad , \quad r_3 = |k_1 - k_2 + k_3|$$

$$M_4 = (k_1 - k_2 \ , \ k_2 - k_3) \quad , \quad r_4 = |k_1 - k_2 + k_3|$$

dir. Elde edilen M_i merkezli, r_i yarıçaplı $i = 1, \dots, 4$ taksi çemberleri, şekilden de görüldüğü gibi, l_2 ye kenarsal, l_1 ve l_3 e köşesel teğettir.



Şekil 3.8

Örnek (2) ABC, kenarları

$$\begin{cases} l_1 \quad ..... \quad y = x + k_1 \\ l_2 \quad ..... \quad y = -x + k_2 \\ l_3 \quad ..... \quad y = k_3 \end{cases}$$

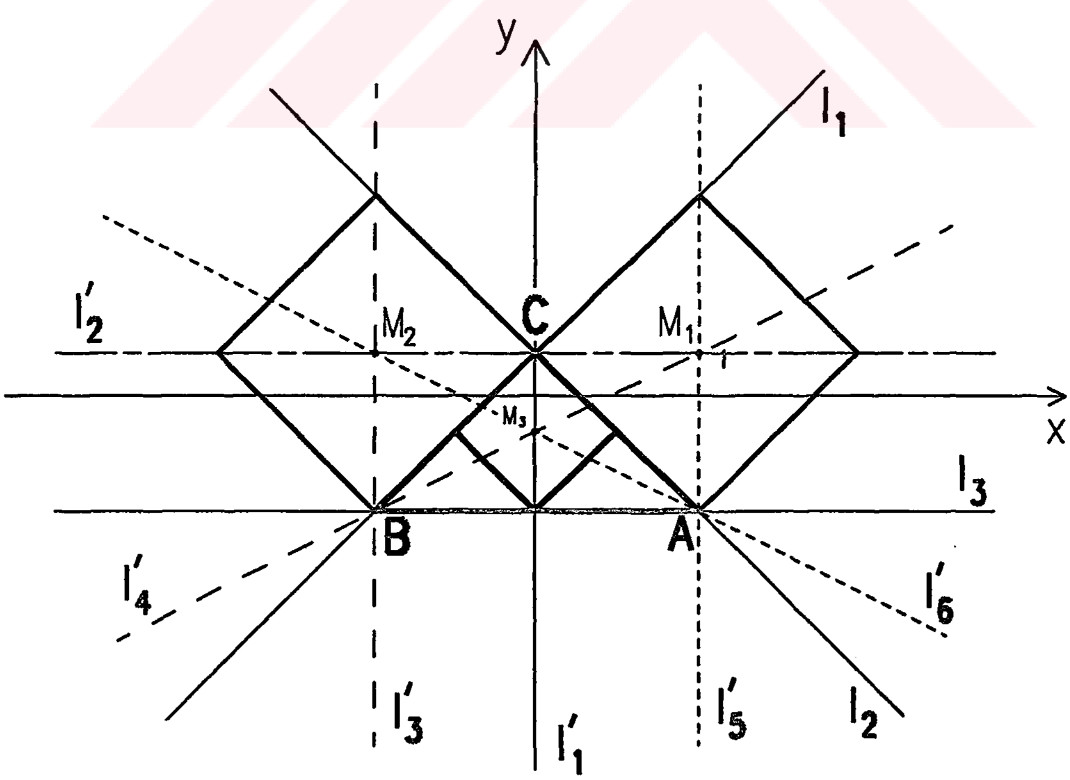
doğruları olan bir üçgen olsun. Bu üçgene teğet olan taksi çemberlerinin merkezleri M_i, yarıçapları r_i, $i = 1,2,3$ şöyledir:

$$M_1 = \left(\frac{k_2 - k_1}{2}\ ,\ \frac{k_1 + k_2 + 2k_3}{4}\right) \quad , \quad r_1 = \left|\frac{k_1 + k_2 - 2k_3}{4}\right|$$

$$M_2 = \left(k_3 - k_1\ ,\ \frac{k_1 + k_2}{2}\right) \quad , \quad r_2 = \left|\tfrac{1}{2}\ (-k_1 - k_2 + 2k_3)\right|$$

$$M_3 = \left(k_2 - k_3\ ,\ \frac{k_1 + k_2}{2}\right) \quad , \quad r_3 = \left|\tfrac{1}{2}\ (k_1 + k_2 - 2k_3)\right|$$

dir. Elde edilen M_i merkezli, r_i yarıçaplı $i = 1,2,3$ taksi çemberleri, şekilden de görüldüğü gibi, l_1 ve l_2 ye kenarsal, l_3 e köşesel teğettir.



Şekil 3.9

Örnek (3) ABC, kenarları

$$\begin{cases} l_1 \quad ..... \quad y=\sqrt{3}x+k_1 \\ l_2 \quad ..... \quad y=-\sqrt{3}x+k_2 \\ l_3 \quad ..... \quad y=k_3 \end{cases}$$

doğruları olan bir üçgen olsun. Bu üçgene teğet olan taksi çemberlerinin merkezleri M_i, yarıçapları r_i, $i=1,2,3,4$ şöyledir:

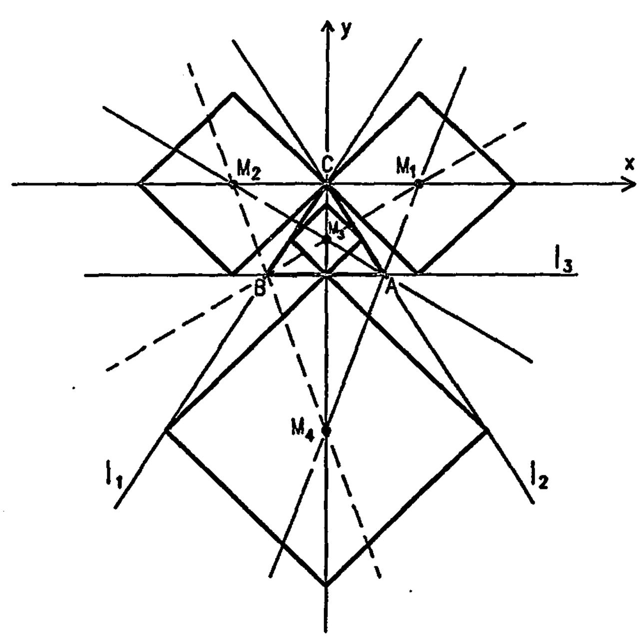
$$M_1=\left(\frac{k_2-k_1}{2\sqrt{3}}, \frac{k_1+k_2+2\sqrt{3}k_3}{2\left(1+\sqrt{3}\right)}\right) \qquad ,r_1=\left|\frac{-k_1-k_2+2k_3}{2\left(1+\sqrt{3}\right)}\right|$$

$$M_2=\left(\frac{\left(-1-\sqrt{3}\right)k_1+\left(1-\sqrt{3}\right)k_2+2\sqrt{3}k_3}{2\sqrt{3}}, \frac{k_1+k_2}{2}\right) \quad ,r_2=\left|\frac{-k_1-k_2+2k_3}{2}\right|$$

$$M_3=\left(\frac{\left(-1+\sqrt{3}\right)k_1+\left(1+\sqrt{3}\right)k_2-2\sqrt{3}k_3}{2\sqrt{3}}, \frac{k_1+k_2}{2}\right) \quad ,r_3=\left|\frac{k_1+k_2-2k_3}{2}\right|$$

$$M_4=\left(\frac{k_2-k_1}{2\sqrt{3}}, \frac{k_1+k_2-2\sqrt{3}k_3}{2\left(1-\sqrt{3}\right)}\right) \qquad ,r_4=\left|\frac{-k_1-k_2+2k_3}{2\left(1-\sqrt{3}\right)}\right|$$

dir. Elde edilen M_i merkezli, r_i yarıçaplı $i=1,...,4$ taksi çemberleri, şekilden de görüldüğü gibi, verilen üçgenin kenarları olan l_1, l_2, l_3 doğrularına köşesel teğettir.



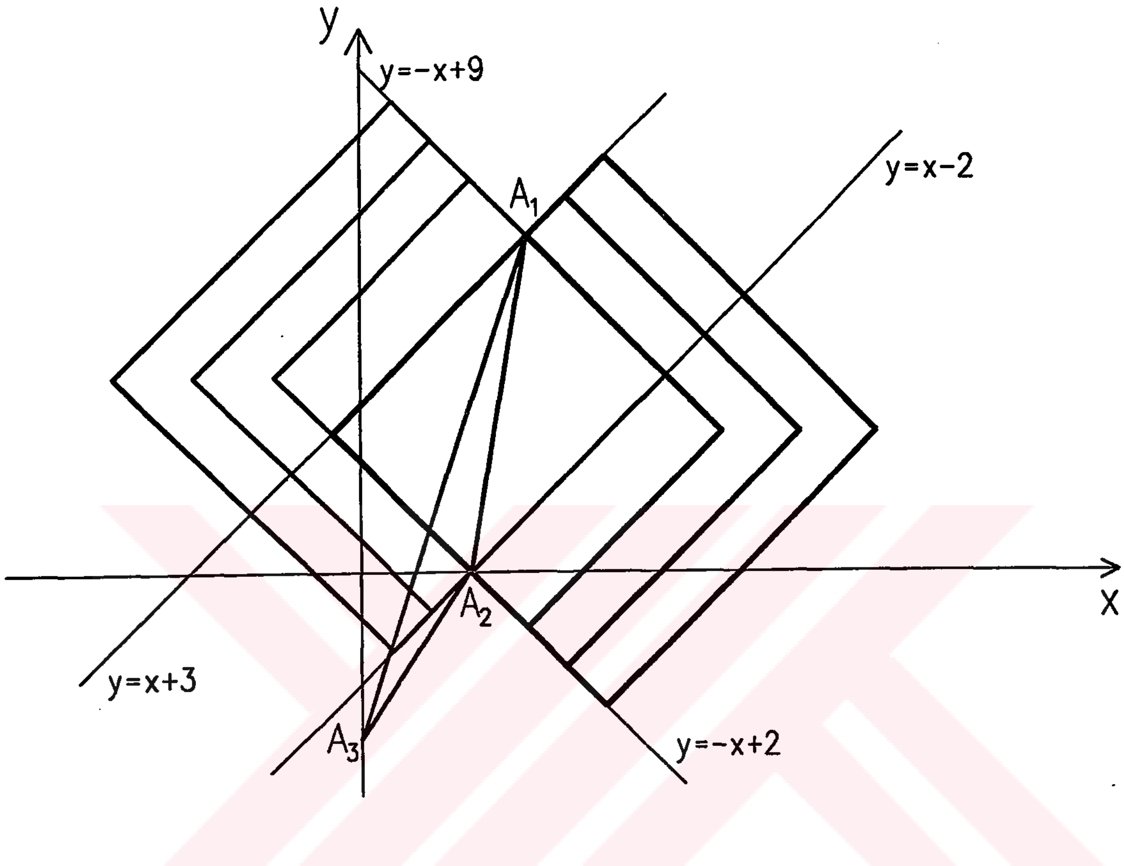
Şekil 3.10

Bölüm 4

Taksi Çemberinin Noktalarıyla Belirtilmesi

Öklid düzleminde aynı doğru üzerinde olmayan üç noktanın bir tek çember belirttiğini biliyoruz. " Aynı özellik Taksi Çemberleri için geçerli midir?" sorusu sorulabilir. Tian-Chen [16] de taksi çemberlerle ilgili bazı özellikler belirlendi. Bu kısımda yukarıda sözü edilen özelliğin genelde geçerli olmadığı üzerinde duracağız.

Örnek (1) $A_1 = (3,6)$, $A_2 = (2,0)$, $A_3 = (0,-3)$ noktalarından geçen taksi çemberi var mıdır? HAYIR.



Şekil 4.1

Çünkü şekil 4.1 de görüldüğü gibi A_1 ve A_2 noktalarından geçen taksi çemberlerini çizdiğimizde bu çemberlerin bir kenarı A_1 noktasından geçen (1) (veya (-1)) eğimli doğru üzerinde ikinci kenarı da A_2 noktasından geçen (-1) (veya (1)) eğimli doğru üzerinde olacaktır. Dolayısıyla A_3 noktası hiçbir zaman bu çemberlerin üzerinde olmaz. Bu durum ise A_1, A_2, A_3 noktalarının belirttiği üçgenin kenarlarının üçününde dikeysel olmasından kaynaklanıyor. Çünkü bir taksi çemberi üzerinde üç doğrudaş olmayan nokta alındığında, bu noktalar ikisi dikeysel biri yataysal veya ikisi yataysal biri dikeysel üç doğru oluştururlar. Gerçektende A_1, A_2, A_3 noktalarından $M = (m_1, m_2)$ merkezli, r yarıçaplı ($r > 0$, $r \in \mathbb{R}$) bir taksi çemberi geçtiği kabul edilirse

$$\{(x,y) : |x - m_1| + |y - m_2| = r\}$$

olarak ifade edilir. Ayrıca A_1, A_2, $A_3 \in \{(x,y) : |x - m_1| + |y - m_2| = r\}$ olduğundan

$$\begin{array}{lcll} |3-m_1| & + & |6-m_2| & = r \\ |2-m_1| & + & |m_2| & = r \\ |m_1| & + & |-3-m_2| & = r \end{array}$$

ifadelerini elde ederiz. Bu ifadelerden m_1, m_2 ve r nin çözülmesi için

m_1		0	2	3
$\|3-m_1\|$	$3-m_1$	$3-m_1$	$3-m_1$	$-3+m_1$
$\|2-m_1\|$	$2-m_1$	$2-m_1$	$-2+m_1$	$-2+m_1$
$\|m_1\|$	$-m_1$	m_1	m_1	m_1

m_2		-3	0	6
$\|6-m_2\|$	$6-m_2$	$6-m_2$	$6-m_2$	$-6+m_2$
$\|m_2\|$	$-m_2$	$-m_2$	m_2	m_2
$\|-3-m_2\|$	$-3-m_2$	$3+m_2$	$3+m_2$	$3+m_2$

elde edilen bu tablolardan şu alt durumlara bakıldığında

1) $m_1 < 0,\ m_2 < -3$ iken

$$\left.\begin{array}{lcl} |3-m_1| + |6-m_2| = r & \rightarrow & 9-m_1-m_2=r \\ |2-m_1| + |m_2| = r & \rightarrow & 2-m_1-m_2=r \\ |m_1| + |-3-m_2| = r & \rightarrow & -3-m_1-m_2=r \end{array}\right\}$$

elde edilen bu denklem sisteminin bu aralıkta çözümü yoktur.

2) $m_1 < 0,\ -3 \leqslant m_2 < 0$ iken

$$\left.\begin{array}{lcl} |3-m_1| + |6-m_2| = r & \rightarrow & 9-m_1-m_2=r \\ |2-m_1| + |m_2| = r & \rightarrow & 2-m_1-m_2=r \\ |m_1| + |-3-m_2| = r & \rightarrow & 3-m_1+m_2=r \end{array}\right\}$$

elde edilen bu denklem sisteminin bu aralıkta çözümü yoktur.

3) $m_1 < 0,\ 0 \leqslant m_2 < 6$ iken

$$\left.\begin{array}{lcl} |3-m_1| + |6-m_2| = r & \rightarrow & 9-m_1-m_2=r \\ |2-m_1| + |m_2| = r & \rightarrow & 2-m_1+m_2=r \\ |m_1| + |-3-m_2| = r & \rightarrow & 3-m_1+m_2=r \end{array}\right\}$$

elde edilen bu denklem sisteminin bu aralıkta çözümü yoktur.

4) $m_1 < 0,\ m_2 \geqslant 6$ iken

$$\left.\begin{array}{llllll}|3-m_1| & + & |6-m_2| & = r & \rightarrow & -3-m_1+m_2=r \\ |2-m_1| & + & |m_2| & = r & \rightarrow & 2-m_1+m_2=r \\ |m_1| & + & |-3-m_2| & = r & \rightarrow & 3-m_1+m_2=r\end{array}\right\}$$

elde edilen bu denklem sisteminin bu aralıkta çözümü yoktur.

5) $0 \leqslant m_1 < 2,\ m_2 < -3$ iken

$$\left.\begin{array}{llllll}|3-m_1| & + & |6-m_2| & = r & \rightarrow & 9-m_1-m_2=r \\ |2-m_1| & + & |m_2| & = r & \rightarrow & 2-m_1-m_2=r \\ |m_1| & + & |-3-m_2| & = r & \rightarrow & -3+m_1-m_2=r\end{array}\right\}$$

elde edilen bu denklem sisteminin bu aralıkta çözümü yoktur.

6) $0 \leqslant m_1 < 2,\ -3 \leqslant m_2 < 0$ iken

$$\left.\begin{array}{llllll}|3-m_1| & + & |6-m_2| & = r & \rightarrow & 9-m_1-m_2=r \\ |2-m_1| & + & |m_2| & = r & \rightarrow & 2-m_1-m_2=r \\ |m_1| & + & |-3-m_2| & = r & \rightarrow & 3+m_1+m_2=r\end{array}\right\}$$

elde edilen bu denklem sisteminin bu aralıkta çözümü yoktur.

7) $0 \leqslant m_1 < 2,\ 0 \leqslant m_2 < 6$ iken

$$\left.\begin{array}{lllll} |3-m_1| & + & |6-m_2| & = r & \rightarrow\ 9-m_1-m_2=r \\ \\ |2-m_1| & + & |m_2| & = r & \rightarrow\ 2-m_1+m_2=r \\ \\ |m_1| & + & |-3-m_2| & = r & \rightarrow\ 3+m_1+m_2=r \end{array}\right\}$$

elde edilen bu denklem sisteminde $r=6$, $m_1=-\frac{1}{2}$, $m_2=\frac{7}{2}$ bulunur. Ancak $m_1=-\frac{1}{2} \notin [0,2)$ olduğundan bu aralıkta çözümü yoktur.

8) $0 \leqslant m_1 < 2$, $m_2 \geqslant 6$ iken

$$\left.\begin{array}{lllll} |3-m_1| & + & |6-m_2| & = r & \rightarrow\ -3-m_1+m_2=r \\ \\ |2-m_1| & + & |m_2| & = r & \rightarrow\ 2-m_1+m_2=r \\ \\ |m_1| & + & |-3-m_2| & = r & \rightarrow\ 3+m_1+m_2=r \end{array}\right\}$$

elde edilen bu denklem sisteminin bu aralıkta çözümü yoktur.

9) $2 \leqslant m_1 < 3$, $m_2 < -3$ iken

$$\left.\begin{array}{lllll} |3-m_1| & + & |6-m_2| & = r & \rightarrow\ 9-m_1-m_2=r \\ \\ |2-m_1| & + & |m_2| & = r & \rightarrow\ -2+m_1-m_2=r \\ \\ |m_1| & + & |-3-m_2| & = r & \rightarrow\ -3+m_1-m_2=r \end{array}\right\}$$

elde edilen bu denklem sisteminin bu aralıkta çözümü yoktur.

10) $2 \leqslant m_1 < 3,\ -3 \leqslant m_2 < 0$ iken

$$\left.\begin{array}{llcllcl} |3-m_1| & + & |6-m_2| & = & r & \rightarrow & 9-m_1-m_2=r \\ |2-m_1| & + & |m_2| & = & r & \rightarrow & -2+m_1-m_2=r \\ |m_1| & + & |-3-m_2| & = & r & \rightarrow & 3+m_1+m_2=r \end{array}\right\}$$

elde edilen bu denklem sisteminde $r=6$, $m_1=\frac{11}{2}, m_2=-\frac{5}{2}$ bulunur.Ancak $m_1=\frac{11}{2} \notin [2,3)$ olduğundan bu aralıkta çözümü yoktur.

11) $2 \leqslant m_1 < 3,\ 0 \leqslant m_2 < 6$ iken

$$\left.\begin{array}{llcllcl} |3-m_1| & + & |6-m_2| & = & r & \rightarrow & 9-m_1-m_2=r \\ |2-m_1| & + & |m_2| & = & r & \rightarrow & -2+m_1+m_2=r \\ |m_1| & + & |-3-m_2| & = & r & \rightarrow & 3+m_1+m_2=r \end{array}\right\}$$

elde edilen bu denklem sisteminin bu aralıkta çözümü yoktur.

12) $2 \leqslant m_1 < 3,\ m_2 \geqslant 6$ iken

$$\left.\begin{array}{llcllcl} |3-m_1| & + & |6-m_2| & = & r & \rightarrow & -3-m_1+m_2=r \\ |2-m_1| & + & |m_2| & = & r & \rightarrow & -2+m_1+m_2=r \\ |m_1| & + & |-3-m_2| & = & r & \rightarrow & 3+m_1+m_2=r \end{array}\right\}$$

elde edilen bu denklem sisteminin bu aralıkta çözümü yoktur.

13) $m_1 \geqslant 3,\ m_2 < -3$ iken

$$\left.\begin{array}{lclcl} |3-m_1| & + & |6-m_2| & = r & \rightarrow \ 3+m_1-m_2=r \\ |2-m_1| & + & |m_2| & = r & \rightarrow \ -2+m_1-m_2=r \\ |m_1| & + & |-3-m_2| & = r & \rightarrow \ -3+m_1-m_2=r \end{array}\right\}$$

elde edilen bu denklem sisteminin bu aralıkta çözümü yoktur.

14) $m_1 \geqslant 3,\ -3 \leqslant m_2 < 0$ iken

$$\left.\begin{array}{lclcl} |3-m_1| & + & |6-m_2| & = r & \rightarrow \ 3+m_1-m_2=r \\ |2-m_1| & + & |m_2| & = r & \rightarrow \ -2+m_1-m_2=r \\ |m_1| & + & |-3-m_2| & = r & \rightarrow \ 3+m_1+m_2=r \end{array}\right\}$$

elde edilen bu denklem sisteminin bu aralıkta çözümü yoktur.

15) $m_1 \geqslant 3, 0 \leqslant m_2 < 6$ iken

$$\left.\begin{array}{lclcl} |3-m_1| & + & |6-m_2| & = r & \rightarrow \ 3+m_1-m_2=r \\ |2-m_1| & + & |m_2| & = r & \rightarrow \ -2+m_1+m_2=r \\ |m_1| & + & |-3-m_2| & = r & \rightarrow \ 3+m_1+m_2=r \end{array}\right\}$$

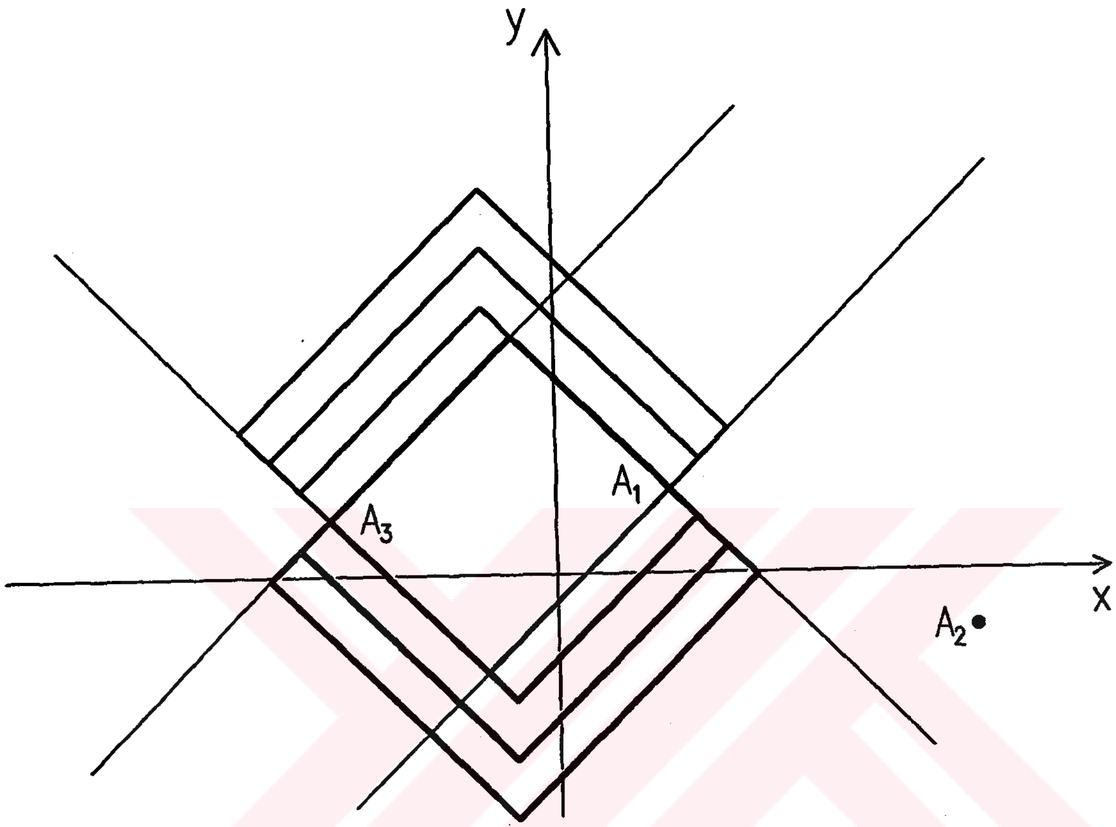
elde edilen bu denklem sisteminin bu aralıkta çözümü yoktur.

16) $m_1 \geqslant 3$, $m_2 \geqslant 6$ iken

$$\left.\begin{array}{llll} |3-m_1| & + \; |6-m_2| & = r & \rightarrow \; -9+m_1+m_2=r \\ \\ |2-m_1| & + \; |m_2| & = r & \rightarrow \; -2+m_1+m_2=r \\ \\ |m_1| & + \; |-3-m_2| & = r & \rightarrow \; 3+m_1+m_2=r \end{array}\right\}$$

elde edilen bu denklem sisteminin bu aralıkta çözümü yoktur. Buna göre verilen A_1, A_2, A_3 noktalarından geçen bir taksi çemberi bulunamaz. Dolayısıyla doğrudaş olamayan üç nokta eğer üç dikeysel doğru oluşturursa bu üç noktadan geçen bir taksi çemberi bulunamaz.

Örnek (2) $A_1 = (4,3)$, $A_2 = (15,-2)$, $A_3 = (-8,2)$ noktalarından geçen taksi çemberi var mıdır? HAYIR.



Şekil 4.2

Çünkü şekil 4.2 de görüldüğü gibi A_1 ve A_3 noktalarından geçen taksi çemberlerini çizdiğimizde bu çemberlerin bir kenarı A_1 noktasından geçen (-1) (veya (1)) eğimli doğru üzerinde ikinci kenarı da A_3 noktasından geçen (1) (veya (-1)) eğimli doğru üzerinde olacaktır. Dolayısıyla A_2 noktası hiçbir zaman bu çemberlerin üzerinde olmazlar. Bu durum ise A_1, A_2, A_3 noktalarının belirttiği üçgenin kenarlarının üçününde yataysal olmasından kaynaklanıyor. Çünkü bir taksi çemberi üzerinde üç doğrudaş olmayan nokta alındığında, bu noktalar ikisi dikeysel biri yataysal veya ikisi yataysal biri dikeysel üç doğru oluştururlar. Gerçektende A_1, A_2, A_3 noktalarından $M = (m_1, m_2)$ merkezli , r yarıçaplı ($r > 0$, $r \in \mathbb{R}$) bir taksi çemberi geçtiği kabul edilirse

$$\{(x, y) : |x - m_1| + |y - m_2| = r\}$$

olarak ifade edilir. Ayrıca A_1, A_2, $A_3 \in \{(x, y) : |x - m_1| + |y - m_2| = r\}$ olduğundan

$$\begin{aligned} |4 - m_1| &+ |3 - m_2| &= r \\ |15 - m_1| &+ |-2 - m_2| &= r \\ |-8 - m_1| &+ |2 - m_2| &= r \end{aligned}$$

ifadelerini elde ederiz. Bu ifadelerden m_1, m_2 ve r nin çözülmesi için

m_1		-8	4	15
$\|4 - m_1\|$	$4 - m_1$	$4 - m_1$	$-4 + m_1$	$-4 + m_1$
$\|15 - m_1\|$	$15 - m_1$	$15 - m_1$	$15 - m_1$	$-15 + m_1$
$\|-8 - m_1\|$	$-8 - m_1$	$8 + m_1$	$8 + m_1$	$8 + m_1$

m_2		-2	2	3
$\|3 - m_2\|$	$3 - m_2$	$3 - m_2$	$3 - m_2$	$-3 + m_2$
$\|-2 - m_2\|$	$-2 - m_2$	$2 + m_2$	$2 + m_2$	$2 + m_2$
$\|2 - m_2\|$	$2 - m_2$	$2 - m_2$	$-2 + m_2$	$-2 + m_2$

elde edilen bu tablolardan şu alt durumlara bakıldağında

1) $m_1 < -8,\ m_2 < -2$ iken

$$\left.\begin{array}{llcll} |4-m_1| & + \ |3-m_2| & = r & \rightarrow & 7-m_1-m_2=r \\ |15-m_1| & + \ |-2-m_2| & = r & \rightarrow & 13-m_1-m_2=r \\ |-8-m_1| & + \ |2-m_2| & = r & \rightarrow & -6-m_1-m_2=r \end{array}\right\}$$

elde edilen bu denklem sisteminin bu aralıkta çözümü yoktur.

2) $m_1 < -8,\ -2 \leqslant m_2 < 2$ iken

$$\left.\begin{array}{llcll} |4-m_1| & + \ |3-m_2| & = r & \rightarrow & 7-m_1-m_2=r \\ |15-m_1| & + \ |-2-m_2| & = r & \rightarrow & 17-m_1+m_2=r \\ |-8-m_1| & + \ |2-m_2| & = r & \rightarrow & -6-m_1-m_2=r \end{array}\right\}$$

elde edilen bu denklem sisteminin bu aralıkta çözümü yoktur.

3) $m_1 < -8,\ 2 \leqslant m_2 < 3$ iken

$$\left.\begin{array}{llcll} |4-m_1| & + \ |3-m_2| & = r & \rightarrow & 7-m_1-m_2=r \\ |15-m_1| & + \ |-2-m_2| & = r & \rightarrow & 17-m_1+m_2=r \\ |-8-m_1| & + \ |2-m_2| & = r & \rightarrow & -10-m_1+m_2=r \end{array}\right\}$$

elde edilen bu denklem sisteminin bu aralıkta çözümü yoktur.

4) $m_1 < -8$, $m_2 \geqslant 3$ iken

$$\left.\begin{array}{lclcl} |4-m_1| & + & |3-m_2| & = r & \rightarrow \ 1-m_1+m_2=r \\ |15-m_1| & + & |-2-m_2| & = r & \rightarrow \ 17-m_1+m_2=r \\ |-8-m_1| & + & |2-m_2| & = r & \rightarrow \ -10-m_1+m_2=r \end{array}\right\}$$

elde edilen bu denklem sisteminin bu aralıkta çözümü yoktur.

5) $-8 \leqslant m_1 < 4$, $m_2 < -2$ iken

$$\left.\begin{array}{lclcl} |4-m_1| & + & |3-m_2| & = r & \rightarrow \ 7-m_1-m_2=r \\ |15-m_1| & + & |-2-m_2| & = r & \rightarrow \ 13-m_1-m_2=r \\ |-8-m_1| & + & |2-m_2| & = r & \rightarrow \ 10+m_1-m_2=r \end{array}\right\}$$

elde edilen bu denklem sisteminin bu aralıkta çözümü yoktur.

6) $-8 \leqslant m_1 < 4$, $-2 \leqslant m_2 < 2$ iken

$$\left.\begin{array}{lclcl} |4-m_1| & + & |3-m_2| & = r & \rightarrow \ 7-m_1-m_2=r \\ |15-m_1| & + & |-2-m_2| & = r & \rightarrow \ 17-m_1+m_2=r \\ |-8-m_1| & + & |2-m_2| & = r & \rightarrow \ 10+m_1-m_2=r \end{array}\right\}$$

elde edilen bu denklem sisteminde $r = \frac{27}{2}$, $m_1 = -\frac{3}{2}$, $m_2 = 5$ bulunur. Ancak $m_2 = 5 \notin [-2, 2)$ olduğundan bu aralıkta çözümü yoktur.

7) $-8 \leqslant m_1 < 4,\ 2 \leqslant m_2 < 3$ iken

$$\left.\begin{array}{lclcl}
|4-m_1| + |3-m_2| & = & r & \rightarrow & 7-m_1-m_2=r \\
|15-m_1| + |-2-m_2| & = & r & \rightarrow & 17-m_1+m_2=r \\
|-8-m_1| + |2-m_2| & = & r & \rightarrow & 6+m_1+m_2=r
\end{array}\right\}$$

elde edilen bu denklem sisteminin bu aralıkta çözümü yoktur.

8) $-8 \leqslant m_1 < 4,\ m_2 \geqslant 3$ iken

$$\left.\begin{array}{lclcl}
|4-m_1| + |3-m_2| & = & r & \rightarrow & 1-m_1+m_2=r \\
|15-m_1| + |-2-m_2| & = & r & \rightarrow & 17-m_1+m_2=r \\
|-8-m_1| + |2-m_2| & = & r & \rightarrow & 6+m_1+m_2=r
\end{array}\right\}$$

elde edilen bu denklem sisteminin bu aralıkta çözümü yoktur.

9) $4 \leqslant m_1 < 15,\ m_2 < -2$ iken

$$\left.\begin{array}{lclcl}
|4-m_1| + |3-m_2| & = & r & \rightarrow & -1+m_1-m_2=r \\
|15-m_1| + |-2-m_2| & = & r & \rightarrow & 13-m_1-m_2=r \\
|-8-m_1| + |2-m_2| & = & r & \rightarrow & 10+m_1-m_2=r
\end{array}\right\}$$

elde edilen bu denklem sisteminin bu aralıkta çözümü yoktur.

10) $4 \leqslant m_1 < 15,\ -2 \leqslant m_2 < 2$ iken

$$\left.\begin{array}{lclcl} |4-m_1| & + & |3-m_2| & = r & \rightarrow\ -1+m_1-m_2=r \\ |15-m_1| & + & |-2-m_2| & = r & \rightarrow\ 17-m_1+m_2=r \\ |-8-m_1| & + & |2-m_2| & = r & \rightarrow\ 10+m_1-m_2=r \end{array}\right\}$$

elde edilen bu denklem sisteminin bu aralıkta çözümü yoktur.

11) $4 \leqslant m_1 < 15,\ 2 \leqslant m_2 < 3$ iken

$$\left.\begin{array}{lclcl} |4-m_1| & + & |3-m_2| & = r & \rightarrow\ -1+m_1-m_2=r \\ |15-m_1| & + & |-2-m_2| & = r & \rightarrow\ 17-m_1+m_2=r \\ |-8-m_1| & + & |2-m_2| & = r & \rightarrow\ 6+m_1+m_2=r \end{array}\right\}$$

elde edilen bu denklem sisteminde $r = 8$, $m_1 = \frac{11}{2}$, $m_2 = -\frac{7}{2}$ bulunur.Ancak $m_2 = -\frac{7}{2} \notin [2,3)$ olduğundan bu aralıkta çözümü yoktur.

12) $4 \leqslant m_1 < 15, m_2 \geqslant 3$ iken

$$\left.\begin{array}{lclcl} |4-m_1| & + & |3-m_2| & = r & \rightarrow\ -7+m_1+m_2=r \\ |15-m_1| & + & |-2-m_2| & = r & \rightarrow\ 17-m_1+m_2=r \\ |-8-m_1| & + & |2-m_2| & = r & \rightarrow\ 6+m_1+m_2=r \end{array}\right\}$$

elde edilen bu denklem sisteminin bu aralıkta çözümü yoktur.

13) $m_1 \geqslant 15$, $m_2 < -2$ iken

$$\left.\begin{array}{lllll} |4-m_1| & + & |3-m_2| & = r & \rightarrow & -1+m_1-m_2=r \\ |15-m_1| & + & |-2-m_2| & = r & \rightarrow & -17+m_1-m_2=r \\ |-8-m_1| & + & |2-m_2| & = r & \rightarrow & 10+m_1-m_2=r \end{array}\right\}$$

elde edilen bu denklem sisteminin bu aralıkta çözümü yoktur.

14) $m_1 \geqslant 15$, $-2 \leqslant m_2 < 2$ iken

$$\left.\begin{array}{lllll} |4-m_1| & + & |3-m_2| & = r & \rightarrow & -1+m_1-m_2=r \\ |15-m_1| & + & |-2-m_2| & = r & \rightarrow & -13+m_1+m_2=r \\ |-8-m_1| & + & |2-m_2| & = r & \rightarrow & 10+m_1-m_2=r \end{array}\right\}$$

elde edilen bu denklem sisteminin bu aralıkta çözümü yoktur.

15) $m_1 \geqslant 15, 2 \leqslant m_2 < 3$ iken

$$\left.\begin{array}{lllll} |4-m_1| & + & |3-m_2| & = r & \rightarrow & -1+m_1-m_2=r \\ |15-m_1| & + & |-2-m_2| & = r & \rightarrow & -13+m_1+m_2=r \\ |-8-m_1| & + & |2-m_2| & = r & \rightarrow & 6+m_1+m_2=r \end{array}\right\}$$

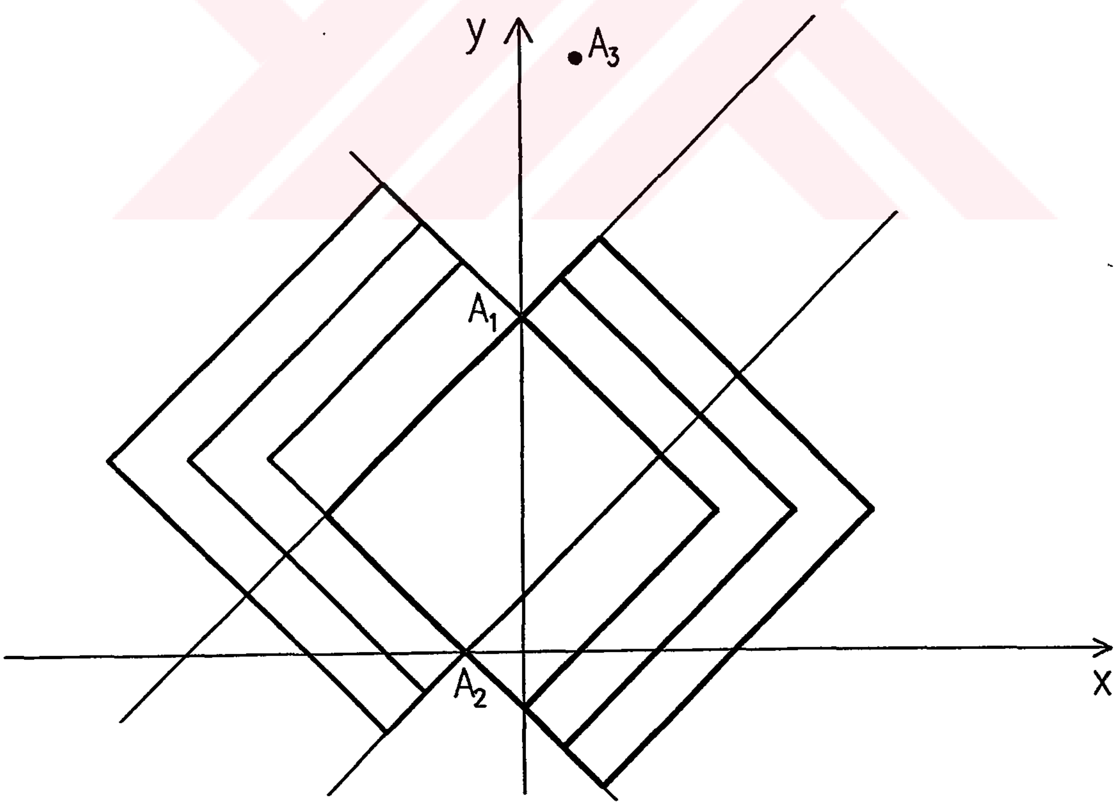
elde edilen bu denklem sisteminin bu aralıkta çözümü yoktur.

16) $m_1 \geqslant 15$, $m_2 \geqslant 3$ iken

$$\left.\begin{array}{lclcl} |4-m_1| & + & |3-m_2| & = r \rightarrow & -7+m_1+m_2=r \\ |15-m_1| & + & |-2-m_2| & = r \rightarrow & -13+m_1+m_2=r \\ |-8-m_1| & + & |2-m_2| & = r \rightarrow & 6+m_1+m_2=r \end{array}\right\}$$

elde edilen bu denklem sisteminin bu aralıkta çözümü yoktur. Buna göre verilen A_1, A_2, A_3 noktalarından geçen bir taksi çemberi bulunamaz. Dolayısıyla doğrudaş olamayan üç nokta eğer üç yataysal doğru oluşturursa bu üç noktadan geçen bir taksi çemberi bulunamaz.

Örnek (3) $A_1 = (0,2)$, $A_2 = (-1,0)$, $A_3 = (1,4)$ noktalarından geçen taksi çemberi var mıdır? HAYIR.



Şekil 4.3

Çünkü şekil 4.3 de görüldüğü gibi A_1, A_2, A_3 noktaları $y = 2x + 2$ doğrusu üzerindedir. A_1 noktasından geçen (-1) eğimli l_1 doğrusu

$$\{(x, y) : y = -x + 2\}$$

ve A_2 noktasından geçen (1) eğimli l_2 doğrusu

$$\{(x, y) : y = x + 1\}$$

olmak üzere A_1 ve A_2 noktalarından geçen taksi çemberlerinin merkezleri $y = \frac{3}{2}$ ve $y = \frac{1}{2}$ doğrusu üzerindedir. Dolayısıyla A_1 ve A_2 noktalarından geçen taksi çemberleri

$$\left\{(x, y) : |x - m_1| + \left|y - \frac{3}{2}\right| = r \ , \ m_1 \leqslant -1 \text{ ve } r \geq \frac{3}{2} \ , m_1, \ r \in \mathbb{R}\right\}$$

ve

$$\left\{(x, y) : |x - m_1| + \left|y - \frac{1}{2}\right| = r \ , \ m_1 \geq 0 \text{ ve } r \geq \frac{3}{2} \ , m_1, \ r \in \mathbb{R}\right\}$$

dir . $A_3 \in \left\{(x, y) : |x - m_1| + \left|y - \frac{3}{2}\right| = r \ , \ m_1 \leqslant -1 \text{ ve } r \geq \frac{3}{2} \ , m_1, \ r \in \mathbb{R}\right\}$ veya $A_3 \in \left\{(x, y) : |x - m_1| + \left|y - \frac{1}{2}\right| = r \ , \ m_1 \geq 0 \text{ ve } r \geq \frac{3}{2} \ , m_1, \ r \in \mathbb{R}\right\}$ olacak şekilde m_1 ve r bulunamaz. Bu yüzden A_1, A_2, A_3 noktalarından geçen bir taksi çemberi bulunamaz. Böylece doğrudaş üç nokta verildiğinde bir taksi çemberi elde edilemez.

Böylece örnek (1), örnek(2) ve örnek(3) den şu sonuç elde edilir:

Sonuç 4.1: *Düzlemde farklı üç noktadan şu durumlarda taksi çemberi geçmez:*

(i) *Doğrudaş olmayan üç noktanın belirttiği doğruların üçüde yataysal veya üçüde dikeysel doğrular olduğunda*

(ii) *Doğrudaş üç nokta eğimi 1 veya -1 den farklı bir doğru üzerinde olduğunda*

farklı üç noktadan bir taksi çemberi geçmez.

Bölüm 5

Taksi Daire Diliminin Alanı İle Taksi Yay Uzunluğu Arasındaki İlişki

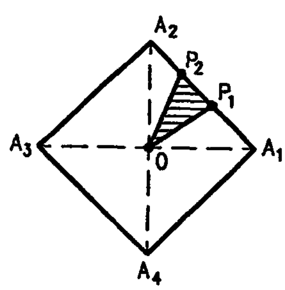
Öklid düzleminde, yarıçapı r olan bir daire diliminin alanı ona karşılık gelen yay uzunluğunun $r\,/\,2$ katıdır. r yarıçaplı bir taksi daira diliminin alanı da ona karşılık gelen taksi yay uzunluğunun $r\,/\,4$ katına eşittir. Düzlemde $O=(0,0)$ merkezli, r yarıçaplı taksi çemberi verilsin. $P_1=(x_1,\,y_1)$ ve $P_2=(x_2,\,y_2)$ verilen taksi çemberi üzerinde iki nokta olsun. Saatin dönme yönünün tersi yönde hareket edildiğinde elde edilen taksi yay uzunluğu ile karşılık gelen alanları hesaplayalım:

(1) $x_1,\,x_2,\,y_1,\,y_2\geq 0$ olsun. Bu durumda $P_1=(x_1,\,y_1)=(x_1,-x_1+r)$ ve $P_2=(x_2,\,y_2)=(x_2,-x_2+r)$ dir. Buna göre P_1P_2 taksi yay uzunluğu

$$\left|\widehat{P_1P_2}\right|_T \;=\; d_T(P_1,P_2)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$$

dir. $x_1>x_2$ iken $y_1<y_2$ olacağından

$$\left|\widehat{P_1P_2}\right|_T \;=\; 2(x_1-x_2)$$



Şekil 5.1

dir. $\overset{\frown}{P_1P_2}$ yayına kaşılık gelen OP_1P_2 taksi daire diliminin alanı:

$$\begin{aligned} A(OP_1P_2) &= A(OP_2A_1) - A(OP_1A_1) \\ &= \tfrac{r.(-x_2+r-0)}{2} - \tfrac{r.(-x_1+r-0)}{2} \\ &= \tfrac{r}{2}(x_1 - x_2) \\ &= \tfrac{r}{4}\left|\overset{\frown}{P_1P_2}\right|_T \end{aligned}$$

dir. (M.Özcan-R.Kaya [10]) $x_1 < x_2$ iken $y_1 > y_2$ olup, bu P_1 ve P_2 noktalarının yer değiştirmesine karşılık gelir. Bu durumda P_1P_2 taksi yay uzunluğu

$$\left|\overset{\frown}{P_1P_2}\right|_T = 2(x_2 - x_1)$$

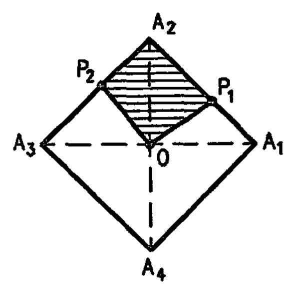
dir. $\overset{\frown}{P_1P_2}$ yayına kaşılık gelen OP_1P_2 taksi daire diliminin alanı:

$$\begin{aligned} A(OP_1P_2) &= A(OP_1A_1) - A(OP_2A_1) \\ &= \tfrac{r.(-x_1+r-0)}{2} - \tfrac{r.(-x_2+r-0)}{2} \\ &= \tfrac{r}{2}(x_2 - x_1) \\ &= \tfrac{r}{4}\left|\overset{\frown}{P_1P_2}\right|_T \end{aligned}$$

dir. $x_1 = x_2$ iken $y_1 = y_2$ olup $\left|\overset{\frown}{P_1P_2}\right|_T = 0$ ve $A(OP_1P_2) = 0$ olduğundan $A(OP_1P_2) = \frac{r}{4}\left|\overset{\frown}{P_1P_2}\right|_T$ sağlanmaktadır.

(2) $x_1, y_1, y_2 \geq 0$ ve $x_2 < 0$ olsun. Bu durumda $P_1 = (x_1, -x_1 + r)$ ve $P_2 = (x_2, x_2 + r)$ dir. Buna göre P_1P_2 taksi yay uzunluğu

$$\begin{aligned} \left|\overset{\frown}{P_1P_2}\right|_T &= d_T(P_1, A_2) + d_T(A_2, P_2) \\ &= 2(x_1 - x_2) \end{aligned}$$



dir. $\widehat{P_1P_2}$ yayına kaşılık gelen $OP_1A_2P_2$ taksi daire diliminin alanı:

$$\begin{aligned} A(OP_1A_2P_2) &= A(OP_1A_2) + A(OP_2A_2) \\ &= \tfrac{r(x_1-0)}{2} + \tfrac{r(0-x_2)}{2} \\ &= \tfrac{r}{2}(x_1 - x_2) \\ &= \tfrac{r}{4}\left|\widehat{P_1P_2}\right|_T \end{aligned}$$

dir.

(3) $x_1, y_1 \geq 0$ ve $x_2, y_2 < 0$ olsun. Bu durumda

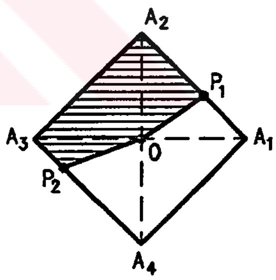
$P_1 = (x_1, -x_1 + r)$ ve $P_2 = (x_2, -x_2 - r)$ dir. Buna göre P_1P_2 taksi yay uzunluğu

$$\begin{aligned} \left|\widehat{P_1P_2}\right|_T &= d_T(P_1, A_2) + d_T(A_2, A_3) + d_T(A_3, P_2) \\ &= 2(x_1 + x_2 + 2r) \end{aligned}$$

dir. $\widehat{P_1P_2}$ yayına kaşılık gelen $OP_1A_2A_3P_2$ taksi daire diliminin alanı:

$$\begin{aligned} A(OP_1A_2A_3P_2) &= A(OP_1A_2) + A(OA_2A_3) + A(OA_3P_2) \\ &= \tfrac{r(x_1-0)}{2} + \tfrac{r.r}{2} + \tfrac{r(0-(-x_2-r))}{2} \\ &= \tfrac{r}{2}(x_1 + x_2 + 2r) \\ &= \tfrac{r}{4}\left|\widehat{P_1P_2}\right|_T \end{aligned}$$

dir.

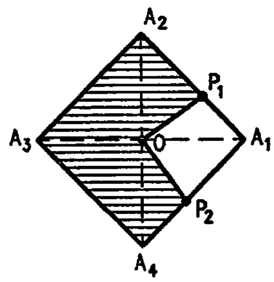


Şekil 5.3

(4) $x_1, y_1, x_2 \geq 0$ ve $y_2 < 0$ olsun. Bu durumda

$P_1 = (x_1, -x_1 + r)$ ve $P_2 = (x_2, x_2 - r)$ dir. Buna göre P_1P_2 taksi yay uzunluğu

$$\begin{aligned} \left|\widehat{P_1P_2}\right|_T &= d_T(P_1, A_2) + d_T(A_2, A_3) + d_T(A_3, A_4) + d_T(A_4, P_2) \\ &= 2(x_1 + x_2 + 2r) \end{aligned}$$



Şekil 5.4

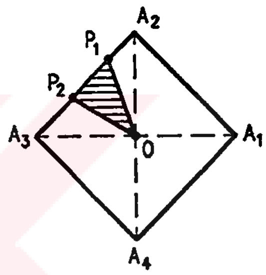
dir. $\overset{\frown}{P_1P_2}$ yayına kaşılık gelen $OP_1A_2A_3A_4P_2$ taksi daire diliminin alanı:

$$\begin{aligned} A(OP_1A_2A_3A_4P_2) &= A(OP_1A_2) + A(OA_2A_3) + A(OA_3A_4) + A(OA_4P_2) \\ &= \tfrac{r(x_1-0)}{2} + 2\tfrac{r.r}{2} + \tfrac{r(x_2-0)}{2} \\ &= \tfrac{r}{2}(x_1 + x_2 + 2r) \\ &= \tfrac{r}{4}\left|\overset{\frown}{P_1P_2}\right|_T \end{aligned}$$

dir.

(5) $x_1,\, x_2 < 0$ ve $y_1,\, y_2 \geq 0$ olsun. Bu durumda $P_1 = (x_1,\, y_1) = (x_1, x_1 + r)$ ve $P_2 = (x_2,\, y_2) = (x_2, x_2 + r)$ dir. Buna göre P_1P_2 taksi yay uzunluğu

$$\left|\overset{\frown}{P_1P_2}\right|_T = d_T(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$



Şekil 5.5

dir. $x_1 > x_2$ iken $y_1 > y_2$ olacağından

$$\left|\overset{\frown}{P_1P_2}\right|_T = 2(x_1 - x_2)$$

dir. $\overset{\frown}{P_1P_2}$ yayına kaşılık gelen OP_1P_2 taksi daire diliminin alanı:

$$\begin{aligned} A(OP_1P_2) &= A(OP_2A_2) - A(OP_1A_2) \\ &= \tfrac{r(0-x_2)}{2} - \tfrac{r(0-x_1)}{2} \\ &= \tfrac{r}{2}(x_1 - x_2) \\ &= \tfrac{r}{4}\left|\overset{\frown}{P_1P_2}\right|_T \end{aligned}$$

dir. $x_1 < x_2$ iken $y_1 < y_2$ olup, bu P_1 ve P_2 noktalarının yer değiştirmesine karşılık gelir. Bu durumda P_1P_2 taksi yay uzunluğu

$$\left|\overset{\frown}{P_1P_2}\right|_T = 2(x_2 - x_1)$$

dir. $\overset{\frown}{P_1P_2}$ yayına kaşılık gelen OP_1P_2 taksi daire diliminin alanı:

$$A(OP_1P_2) = \tfrac{r}{2}(x_2 - x_1) = \tfrac{r}{4}\left|\overset{\frown}{P_1P_2}\right|_T$$

dir. $x_1 = x_2$ iken $y_1 = y_2$ olup $\left|\widehat{P_1P_2}\right|_T = 0$ ve $A(OP_1P_2) = 0$ olduğundan $A(OP_1P_2) = \frac{r}{4}\left|\widehat{P_1P_2}\right|_T$ sağlanmaktadır.

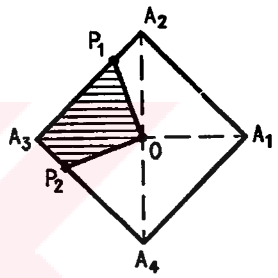
(6) $x_1,\, x_2\,,\, y_2 < 0$ ve $y_1 \geq 0$ olsun. Bu durumda $P_1 = (x_1, x_1 + r)$ ve $P_2 = (x_2, -x_2 - r)$ dir. Buna göre P_1P_2 taksi yay uzunluğu

$$\begin{aligned}\left|\widehat{P_1P_2}\right|_T &= d_T(P_1, A_3) + d_T(A_3, P_2)\\ &= 2(x_1 + x_2 + 2r)\end{aligned}$$

dir. $\widehat{P_1P_2}$ yayına kaşılık gelen $OP_1A_3P_2$ taksi daire diliminin alanı:

$$\begin{aligned}A(OP_1A_3P_2) &= A(OP_1A_3) + A(OA_3P_2)\\ &= \tfrac{r(x_1+r-0)}{2} + \tfrac{r(0-(-x_2-r))}{2}\\ &= \tfrac{r}{2}(x_1 + x_2 + 2r)\\ &= \tfrac{r}{4}\left|\widehat{P_1P_2}\right|_T\end{aligned}$$

dir.



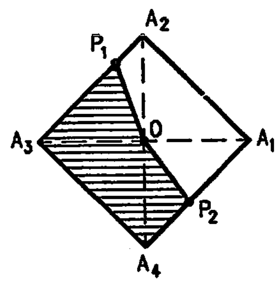
Şekil 5.6

(7) $x_1,\; y_2 < 0$ ve $x_2\,, y_1 \geq 0$ olsun. Bu durumda $P_1 = (x_1, x_1 + r)$ ve $P_2 = (x_2, x_2 - r)$ dir. Buna göre P_1P_2 taksi yay uzunluğu

$$\begin{aligned}\left|\widehat{P_1P_2}\right|_T &= d_T(P_1, A_3) + d_T(A_3, A_4) + d_T(A_4, P_2)\\ &= 2(x_1 + x_2 + 2r)\end{aligned}$$

dir. $\widehat{P_1P_2}$ yayına kaşılık gelen $OP_1A_3A_4P_2$ taksi daire diliminin alanı:

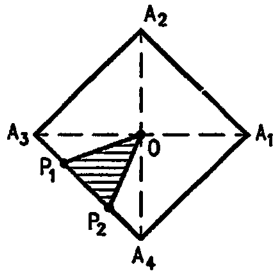
$$\begin{aligned}A(OP_1A_3A_4P_2) &= A(OP_1A_3) + A(OA_3A_4) + A(OA_4P_2)\\ &= \tfrac{r(x_1+r-0)}{2} + \tfrac{r.r}{2} + \tfrac{r(x_2-0)}{2}\\ &= \tfrac{r}{2}(x_1 + x_2 + 2r)\\ &= \tfrac{r}{4}\left|\widehat{P_1P_2}\right|_T\end{aligned}$$



Şekil 5.7

dir.

(8) $x_1, x_2, y_1, y_2 < 0$ olsun. Bu durumda $P_1 = (x_1, y_1) = (x_1, -x_1 - r)$ ve $P_2 = (x_2, y_2) = (x_2, -x_2 - r)$ dir. Buna göre P_1P_2 taksi yay uzunluğu



Şekil 5.8

$$\left|\widehat{P_1P_2}\right|_T = d_T(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

dir. $x_1 > x_2$ iken $y_1 < y_2$ olacağından

$$\left|\widehat{P_1P_2}\right|_T = 2(x_1 - x_2)$$

dir. $\widehat{P_1P_2}$ yayına kaşılık gelen OP_1P_2 taksi daire diliminin alanı:

$$\begin{aligned} A(OP_1P_2) &= A(OP_1A_3) - A(OP_2A_3) \\ &= \tfrac{r(0-y_1)}{2} - \tfrac{r(0-y_2)}{2} \\ &= \tfrac{r}{2}(x_1 - x_2) \\ &= \tfrac{r}{4}\left|\widehat{P_1P_2}\right|_T \end{aligned}$$

dir. $x_1 < x_2$ iken $y_1 > y_2$ olup, bu P_1 ve P_2 noktalarının yer değiştirmesine karşılık gelir. Bu durumda P_1P_2 taksi yay uzunluğu

$$\left|\widehat{P_1P_2}\right|_T = 2(x_2 - x_1)$$

dir. $\widehat{P_1P_2}$ yayına kaşılık gelen OP_1P_2 taksi daire diliminin alanı:

$$A(OP_1P_2) = \tfrac{r}{2}(x_2 - x_1) = \tfrac{r}{4}\left|\widehat{P_1P_2}\right|_T$$

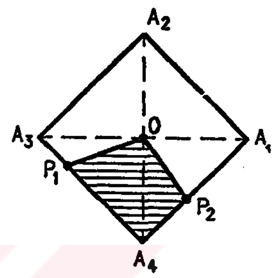
dir. $x_1 = x_2$ iken $y_1 = y_2$ olup $\left|\widehat{P_1P_2}\right|_T = 0$ ve $A(OP_1P_2) = 0$ olduğundan $A(OP_1P_2) = \frac{r}{4}\left|\widehat{P_1P_2}\right|_T$ sağlanmaktadır.

(9) x_1, y_1, $y_2 < 0$ ve $x_2 \geq 0$ olsun. Bu durumda
$P_1 = (x_1, -x_1 - r)$ ve $P_2 = (x_2, x_2 - r)$ dir. Buna göre P_1P_2 taksi yay uzunluğu

$$\left|\widehat{P_1P_2}\right|_T = d_T(P_1, A_4) + d_T(A_4, P_2) = 2(x_2 - x_1)$$

dir. $\widehat{P_1P_2}$ yayına kaşılık gelen $OP_2A_4P_1$ taksi daire diliminin alanı:

$$\begin{aligned} A(OP_2A_4P_1) &= A(OP_1A_4) + A(OA_4P_2) \\ &= \tfrac{r(0-x_1)}{2} + \tfrac{r(x_2-0)}{2} \\ &= \tfrac{r}{2}(x_2 - x_1) \\ &= \tfrac{r}{4}\left|\widehat{P_1P_2}\right|_T \end{aligned}$$



dir.

Şekil 5.9

(10) $x_1, x_2 \geq 0$ ve y_1, $y_2 < 0$ olsun. Bu durumda $P_1 = (x_1, y_1) = (x_1, x_1 - r)$ ve $P_2 = (x_2, y_2) = (x_2, x_2 - r)$ dir. Buna göre P_1P_2 taksi yay uzunluğu

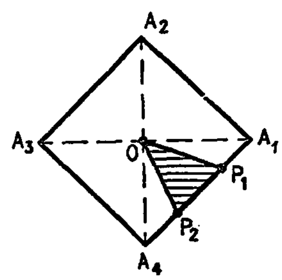
$$\left|\widehat{P_1P_2}\right|_T = d_T(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

dir. $x_1 > x_2$ iken $y_1 > y_2$ olacağından

$$\left|\widehat{P_1P_2}\right|_T = 2(x_1 - x_2)$$

dir. $\widehat{P_1P_2}$ yayına kaşılık gelen OP_1P_2 taksi daire diliminin alanı:

$$\begin{aligned} A(OP_1P_2) &= A(OP_2A_1) - A(OP_1A_1) \\ &= \tfrac{r(0-y_2)}{2} - \tfrac{r(0-y_1)}{2} \\ &= \tfrac{r}{2}(x_1 - x_2) \\ &= \tfrac{r}{4}\left|\widehat{P_1P_2}\right|_T \end{aligned}$$



Şekil 5.10

dir. $x_1 < x_2$ iken $y_1 < y_2$ olup, bu P_1 ve P_2 noktalarının yer değiştirmesine karşılık gelir. Bu durumda P_1P_2 taksi yay uzunluğu

$$\left|\overset{\frown}{P_1P_2}\right|_T = 2(x_2 - x_1)$$

dir. $\overset{\frown}{P_1P_2}$ yayına kaşılık gelen OP_1P_2 taksi daire diliminin alanı:

$$A(OP_1P_2) = \tfrac{r}{2}(x_2 - x_1) = \tfrac{r}{4}\left|\overset{\frown}{P_1P_2}\right|_T$$

dir. $x_1 = x_2$ iken $y_1 = y_2$ olup $\left|\overset{\frown}{P_1P_2}\right|_T = 0$ ve $A(OP_1P_2) = 0$ olduğundan $A(OP_1P_2) = \frac{r}{4}\left|\overset{\frown}{P_1P_2}\right|_T$ sağlanmaktadır. Böylece:

Düzlemde O merkezli, r yarıçaplı taksi çemberi üzerindeki herhangi bir taksi yay uzunluğunun r / 4 katı, aynı yaya karşı gelen taksi daire diliminin alanına eşittir. Aynı zamanda düzlemdeki ötelemeler, taksi uzunluğunu ve alanları değişmez bıraktığından herhangi bir M merkezli, r yarıçaplı taksi çemberinde de her taksi yay uzunluğunun r / 4 katı, aynı yaya karşı gelen taksi daire diliminin alanına eşittir.

Referanslar

[1] AKÇA, Z. and KAYA, R: On the Taxicab Trigonometry, Jour. of Inst. of Math. & Comp. Sci. (Math. Ser). Vol. 10, No 3, 151-159 (1997).

[2] EKİCİ, C., KOCAYUSUFOĞLU, I. and AKÇA, Z. :The Norm in Taxicab Geometry, TR. J. of Mathematics, Vol. 22, No 3, 295-307 (1998).

[3] HACISALİHOĞLU, H.Hilmi. : Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, (1986).

[4] KAYA, R., AKÇA, Z., GÜNALTILI, I. and ÖZCAN, M. : General Equation for Taxicab Conics and their Classification, Mitt. Math. Ges. Hamburg 19, 1-14 (2000).

[5] KRAUSE, E. F. : Taxicab Geometry, Addison-Wesley, Menlo Park (1975).

[6] LAATSCH, R. : Pyramidal Sections in Taxicab Geometry, Mathematics Magazine, 55, 205-212 (1982).

[7] MENGER, K. : You Will Like Geometry, Guildbook of the Illinois Institute of Technology Geometry Exhibit, Museum of Science and Industry, Chicago, III, (1952).

[8] MİNKOWSKİ, H. : Gesammelte Abhandlungen, Chelsea Publihing Co. New york, 1967.

[9] ÖZCAN, M. and KAYA, R. : On the Ratio of Directed Lengths in the Taxicab Plane and Related Properties, Missouri J. of Math. Sci. (to appears).

[10] ÖZCAN, M. and KAYA, R. : The Taxicab Version of The Heron's Formula ,OGÜ Maths Preprint, 2000,00.03.

[11] REYNOLDS, B.E.: Taxicab Geometry, Pi Mu Epsilon J., 7, 77-88 (1980).

[12] SCHATTSCHNEIDER, D.J. : The Taxicab Group, Amer. Math. Monthly 91,423-428 (1984).

[13] SMART, M. : Küresel Astronomi , İstanbul Üniversitesi , (1984).

[14] SO, S.S. and AL-MASKARI, Z. S. : Two Simple Examples in Non-Euclidean Geometry, Kansas Science Teacher (Journal of Mathematics and Science Teaching), Vol 11, 14-18 (1995).

[15] SOWELL, K. O. : Taxicab Geometry-A New Slant, Mathematics Magazine, 62, 238-248 (1989).

[16] TIAN, S. , So, S.S and CHEN, G. : Concerning Circles in Taxicab Geometry, Int. J. Math Educ. Sci. Technol., Vol.28, No.5, 727-733 (1997).