LogΘ_r DÖNÜŞÜMLERİ VE $G(\sqrt{m})$ HECKE GRUPLARININ ÇARPAN DEĞERLERİ

Simten BAYRAKÇI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

1996

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$\mathbf{Log\Theta_r}$ DÖNÜŞÜMLERİ VE $G(\sqrt{m})$ HECKE GRUPLARININ ÇARPAN DEĞERLERİ

Simten BAYRAKÇI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 25/06/1996 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından ..(9.0) not takdir edilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç.Dr.Veli Kurt (Danışman)..... VKurt.....

Prof.Dr...Timur....KARAÇAY........ T.Karaçay

Doç.Dr....Sergül.....PEHLİVAN... Sergül Pehlivan

ÖZ

$\mathrm{Log}\Theta_r$ DÖNÜŞÜMLERİ VE $G(\sqrt{m})$ HECKE GRUPLARININ ÇARPAN DEĞERLERİ

Simten BAYRAKÇI

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı,

Haziran 1996, 33 Sayfa

Dedekind Eta Fonksiyonu, eliptik modular fonksiyonların sayılar teorisine uygulamalarında önemli rol oynar. Bu çalışmanın ilk kısmında Dedekind Eta fonksiyonunun tanımı ve bazı özellikleri verildi. Kendileri eliptik olmayan fakat oranları eliptik olan Theta fonksiyonları, $\Theta_r(r = 2,3,4)$ nın Modular grup üzerindeki dönüşümleri incelendi.

İkinci kısımda, Hecke grupları tanımlandı. $G(\sqrt{m})$ Hecke gruplarına karşılık gelen sıfırıncı mertebeden tam modular form için çarpan değerleri belirlendi.

ANAHTAR KELİMELER: Dedekind Eta Fonksiyonu, Hecke Grupları.

JÜRİ: Doç.Dr. Veli KURT

Prof.Dr. Timur KARAÇAY

Doç.Dr. Serpil PEHLİVAN

ABSTRACT

TRANSFORMATİONS OF LogΘ_r AND MULTIPLIER VALUES OF HECKE GROUPS $G(\sqrt{m})$

Simten BAYRAKÇI

M.S. in Mathematics

Advisor: Dç. Dr. Veli Kurt

June 1996, 33 pages

In many applications of elliptic modular functions to number theory Dedekind Eta function plays an important role. The first section, the definition of Dedekind Eta function and some properties of it given. The transformations of Theta functions, $\Theta_r(r = 2, 3, 4)$, which are not elliptic but their ratios are elliptic, on modular grup are investigated.

The second section, Hecke groups are defined and then, multiplier systems corresponding to full modular forms of dimension zero for each of Hecke groups, $G(\sqrt{m})$, $m = 2, 3$, are obtained.

KEY WORDS: Dedekind Eta Function, Hecke Groups.

COMMİTTEE: Assoc.Prof.Dr. Veli KURT

Prof.Dr. Timur KARAÇAY

Assoc.Prof.Dr. Serpil PEHLİVAN

ÖNSÖZ

Çalışmamın amacı, eliptik modular fonksiyonlar teorisinde tanımlanan Dedekind Eta fonksiyonu ve Dedekind Toplamları'nı inceleyerek, bu fonksiyon ile kendileri eliptik olmayan fakat oranları eliptik olan Theta fonksiyonları arasında bağıntıları bulmak ve $G(\sqrt{m})$, $m = 2, 3$, Hecke gruplarında tanımlanan sıfır boyutlu tam modular form için çarpımsal değerleri belirlemektir.

Bu çalışmada ilk olarak Periyodik, Eliptik fonksiyonlar ve bazı özellikleri verilerek giriş yapılmıştır. Materyal ve Metot bölümünde Möbiüs dönüşümleri yardımıyla Modular Grup ve Modular Form tanımlanmıştır. Dedekind Eta fonksiyonu, Dedekind Toplamları tanımlanıp ve ilgili teoremler ispatlanarak, Farey Kesirleri tanıtılmıştır. Bulgular bölümünde Dedekind Eta fonksiyonu ile Theta fonksiyonları ve Farey Kesirleri arasındaki bağıntılar ve Hecke Gruplarında tanımlanan modular form için çarpan değerleri bulunmuştur.

Çalışmalarım boyunca bana yol gösteren değerli danışmanım Sayın Doç. Dr. Veli KURT'a ve değerli katkılarını gördüğüm Sayın Prof. Dr. Timur KARAÇAY'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ

1.1. Periyodik Fonksiyonlar

1.1.1.Tanım Karmaşık değişkenli $f(z)$ fonksiyonu verilsin. $f(z+w) = f(z)$ olacak şekilde w karmaşık sayısı varsa, $f(z)$ fonksiyonuna w periyotlu basit periyodik fonksiyon denir.

$n \in \mathbf{Z}$ olmak üzere nw karmaşık sayısı da $f(z)$ nin bir periyodudur. Tanımdan, her sayının $f(z) = a$ sabit fonksiyonun bir periyodu olduğu görülür. Aynı periyotlu iki periyodik fonksiyonun toplamı, farkı, çarpımı, oranı ve türevi de aynı periyotlu periyodik fonksiyondur.

1.1.2.Tanım Karmaşık değişkenli $f(z)$ fonksiyonu verilsin. $f(z+w_1+w_2) = f(z)$ ve $w_2/w_1 \notin \mathbf{R}$ olacak şekilde w_1, w_2 karmaşık sayıları varsa, $f(z)$ fonksiyonuna w_1, w_2 periyotlu çifte-periyodik fonksiyon denir.

$n, m \in \mathbf{Z}$ ise $nw_1 + mw_2$ karmaşık sayısı da $f(z)$ nin bir periyodudur. $f(z)$ fonksiyonunun her periyodu, $nw_1 + mw_2$ şeklinde ise (w_1, w_2) ikilisine, temel periyot çifti denir. Her (w_1, w_2) temel periyot çifti, düzlemde $w = nw_1 + mw_2$ köşeli paralelkenar belirtir. Bu paralelkenarın köşeleri z_0, $z_0 + w_1$, $z_0 + w_2$, $z_0 + w_1 + w_2$ olarak ifade edilir ve (z_0) periyot paralelkenarı olarak adlandırılır. z_0, $z_0 + w_1$ ile z_0, $z_0 + w_2$ noktalarını birleştiren kenarlar bu paralelkenara dahil, diğer kenarlar dahil değildir.

w_1 ve w_2, $w_2/w_1 \notin \mathbf{R}$, karmaşık sayılarının, $m, n \in \mathbf{Z}$ olmak üzere $nw_1 + mw_2$ doğrusal bileşimlerinin kümesini, $\Omega(w_1, w_2)$ ile gösterelim.

1.1.3.Tanım (w_1, w_2) ve (w_1', w_2'), $w_2/w_1 \notin \mathbf{R}$, $w_2'/w_1' \notin \mathbf{R}$ karmaşık sayı ikilileri için $\Omega(w_1, w_2) = \Omega(w_1', w_2')$ ise (w_1, w_2) ile (w_1', w_2') ikililerine denk ikililer denir.

(w_1, w_2) ile (w_1', w_2') temel periyot çiftlerinin denk olmaları için gerekli ve yeterli koşul, $ad - bc = \mp 1$ olmak üzere $w_2' = aw_2 + bw_1$ ve $w_1' = cw_2 + dw_1$ koşullarını sağlayan, tamsayı girdili $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisinin olmasıdır (Depnath ve Dutta 1965, Apostol 1976).

1.2.Eliptik Fonksiyonlar

1.2.1.Tanım Karmaşık düzlemin G açık alt kümesi üzerinde kutuptan başka tekil noktası olmayan analitik fonksiyona, meromorf fonksiyon denir.

1.2.2.Tanım Sabit olmayan, çifte-periyodik ve meromorf fonksiyona, elliptik fonksiyon denir.

$\mathcal{P}(z)$ fonksiyonu, $w = nw_1 + mw_2$, $n, m \in \mathbf{Z}$ olmak üzere,

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \neq 0} \left\{ \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right\}$$

ifadesiyle tanımlanır. $\mathcal{P}(z)$ fonksiyonu, w_1, w_2 ile çifte-periyodik ve w noktasında, 2.mertebeden kutbu olan eliptik fonksiyondur.

Eliptik fonksiyonlarla ilgili temel bilgiler, Depnath ve Dutta (1965)de bulunur.

Kendileri eliptik olmayan fakat oranları eliptik olan Theta fonksiyonları, $q = e^{i\pi\tau}$ ve $\Im(\tau) > 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\theta_1(z) &= -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)iz}, \\
\theta_2(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{1}{4}(2n+1)^2} e^{(2n+1)iz}, \\
\theta_3(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+1)^2} e^{2(n+1)iz}, \\
\theta_4(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+1} q^{(n+1)^2} e^{2(n+1)iz}.
\end{aligned} \tag{1}$$

eşitlikleri ile tanımlanır.

Bu fonksiyonların sonsuz çarpım ifadeleri,

$$\begin{aligned}
\theta_2(\tau) &= 2q^{1/4} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})(1+q^{2n})^2, \\
\theta_3(\tau) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})(1+q^{2n-1})^2, \\
\theta_4(\tau) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})(1-q^{2n-1})^2.
\end{aligned} \tag{2}$$

eşitlikleri ile verilir(Depnath ve Dutta 1965).

2. MATERYAL VE METOT

2.1. Modular Grup ve Modular Form

$a, b, c, d \in \mathbf{Z}$, $\tau \in \mathbf{C}$ olmak üzere,

$$w = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

ile tanımlı dönüşüme, Möbiüs dönüşümü ya da Kesirsel dönüşüm denir.

Her bir Möbiüs dönüşümü $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad - bc \neq 0$ olmak üzere,

$$\tau' = A\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

şeklinde de ifade edebiliriz. Bu dönüşüm, $z = -d/c$ basit kutbu hariç, genişletilmiş karmaşık düzlem $\mathbf{C}^*$ da analitiktir.

Möbiüs dönüşümleri, çemberleri ve doğruları, çemberlere ve doğrulara dönüştürür (Apostol 1976).

$\tau \in \mathbf{C}$ olmak üzere $\tau' = A\tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$, $ad - bc = 1$ şeklindeki Möbiüs dönüşümleri matris çarpımına göre değişmeli olmayan bir grup oluşturur.
Bu grup,

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad ; \quad a, b, c, d \in \mathbf{Z} \quad , \quad ad - bc = 1 \right\}$$

ile tanımlanır ve Modular Grup denir.

Γ modular grubunun üreteçleri,

$$S\tau = \tau + 1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ve

$$T\tau = -1/\tau = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dönüşümleridir.

G,Γ modular grubunun herhangi bir altgrubu olsun. $\tau' = A\tau$ olacak şekilde $A \in G$ varsa, τ ve τ' noktalarına, G ye göre denk noktalar denir.

R_G, üst-yarı düzlem H nin açık altkümesi olsun. R_G nin farklı iki noktası, G ye göre denk değil ve $\tau \in H$ için R_G nin kaplamında, G ye göre τ ya denk bir $\tau' \in H$ noktası varsa, R_G ye G nin temel bölgesi denir.

Γ modular grubu için

$$R_\Gamma = \{\tau \in H \quad ; \quad |\tau| > 1, \quad |\tau + \bar{\tau}| < 1\}$$

kümesi temel bölgedir (Knopp 1970, Apostol 1976).

$n \in \mathbf{Z}^+$ olmak üzere,

$$\Gamma(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \quad ; \quad a \equiv d \equiv 1, \quad b \equiv c \equiv 0 \quad (Mod n) \right\}$$

kümesine, Γ modular grubunun n seviyeli congruence alt grubu denir.
$n = 1$ için $\Gamma(1) = \Gamma$ dır.

$$\Gamma_0(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \quad ; \quad c \equiv 0 \quad (Mod n) \right\}$$

ve

$$\Gamma^0(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \quad ; \quad b \equiv 0 \quad (Mod n) \right\}$$

kümeleri de Γ modular grubunun altgruplarıdır. Buradan kolayca $\Gamma(n)$ nin Γ içinde sonlu indexli normal altgrup olduğu görülebilir (Knopp 1970, Apostol 1976).

2.1.1.Tanım Karmaşık değişkenli $f(\tau)$ fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyon aşağıdaki üç özelliğe sahipse, Γ ya göre $-r$ inci dereceden Modular Form denir;

a)$f(\tau)$ üst-yarı düzlem H de meromorf,

b)Her $M = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, $r \in \mathbf{R}$ için

$$f(M\tau) = \epsilon(M)(c\tau + d)^r f(\tau), \tag{3}$$

c)$f(\tau)$nun Fourier serisi,

$$f(\tau) = \sum_{n=-m}^{\infty} a(n) e^{2\pi n i \tau}.$$

(3) ifadesindeki $\epsilon(M)$, τ dan bağımsız Γ ya göre $-r$ inci dereceden çarpımsal sistemdir.

$|\epsilon(M)| = 1$ ve M_1, $M_2 \in \Gamma$ olmak üzere,

$$\epsilon(M_1 M_2) = \epsilon(M_1)\epsilon(M_2) \tag{4}$$

çarpımsal özelliği sağlanır.

Tanımdan, $m > 0$ ve $a(-m) \neq 0$ ise $f(\tau)$ fonksiyonunun $\tau = i\infty$ noktasında, m inci mertebeden kutbu vardır.

$m \leq 0$ ise $f(\tau)$ fonksiyonu H de ve $i\infty$ noktasında analitiktir. Böylece, $f(\tau)$ fonksiyonuna, $-r$ inci dereceden Tam Modular Form denir.

Her $M \in \Gamma$ için $\epsilon(M) = 1$ ve $r = 0$ ise $f(\tau)$ fonksiyonuna, Modular Fonksiyon denir.

2.2. Dedekind Eta Fonksiyonu

Elliptik modular fonksiyonların, sayılar teorisine uygulamasında Dedekind Eta fonksiyonunun önemli bir yeri vardır. Dedekind tarafından, üst-yarı düzlem H de tanımlanan $\eta(\tau)$ fonksiyonu;

$$\eta(\tau) = e^{\frac{i\pi\tau}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{2\pi i n\tau}\right)$$

ifadesiyle verilir (Rademacher ve Whiteman 1941, Apostol 1976).

$\tau = u + iv$ için $x = e^{2\pi i\tau}$ alınarak $|x| = e^{-2\pi v}$ elde edilir. $\Im(\tau) > 0$ olduğundan $|x| < 1$ bulunur. Böylece,

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)$$

sonsuz çarpımı sıfırdan farklı ve mutlak yakınsaktır.

$\eta(\tau)$, H nin kapalı ve sınırlı her altkümesi üzerinde, düzgün ve mutlak yakınsaktır. Böylece $\eta(\tau)$, H de analitiktir.

Γ modular grubunun $S\tau = \tau + 1$ üreteci için $\eta(\tau + 1) = e^{\frac{\pi i}{12}}\eta(\tau)$ ve $\eta^{24}(\tau + 1) = \eta^{24}(\tau)$ elde edilir. $\eta^{24}(\tau)$ fonksiyonu, 1 ile periyodiktir.

$T\tau = -1/\tau$ üreteci için $\eta(-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2}\eta(\tau)$ bağıntısı C.L.Siegel ve Apostol tarafından elde edilmiştir.

$a, b, c, d \in \mathbf{Z}$, $c > 0$, $ad - bc = 1$ ve $\Im(\tau) > 0$
olmak üzere,

$$\log \eta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \log \eta(\tau) + \pi i \left\{\frac{a + d}{12c} + s(-d, c)\right\} + \frac{1}{2}\log\{-i(c\tau + d)\} \quad (5)$$

dönüşümü de Apostol tarafından bulunmuştur(Apostol 1976).
Burada $s(-d,c)$ Dedekind toplamıdır.

2.3.Dedekind Toplamları ve Özellikleri

2.3.1.Tanım $h,k \in \mathbf{Z}$, $k>0$, $(h,k)=1$ olmak üzere,

$$s(h,k)=\sum_{r Modk}\left(\left(\frac{r}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{hr}{k}\right)\right)$$

eşitliği ile Dedekind toplamı tanımlanır.

$x \in \mathbf{R}$ için $((x))$ fonksiyonu,

$$((x))=\begin{cases} x-[x]-\frac{1}{2} & , \ x \notin \mathbf{Z} \\ 0 & , \ x \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

ifadesiyle verilir. $[x]$, x in tamdeğeridir.

$k \in \mathbf{Z}$ için $((x+k))=((x))$ ve $((-x))=-((x))$ olduğundan $((x))$ fonksiyonu, k ile periyodik ve tek fonksiyondur.

$$\sum_{r Modk}\left(\left(\frac{r}{k}\right)\right)=\sum_{r=1}^{k-1}\left(\frac{r}{k}-\left[\frac{r}{k}\right]-\frac{1}{2}\right)=0. \qquad (6)$$

$(h,k)=1$ olduğundan,

$$\sum_{r Modk}\left(\left(\frac{hr}{k}\right)\right)=0. \qquad (7)$$

(6) ve (7) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} s(h,k) &= \sum_{r=0}^{k-1}\left(\left(\frac{r}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{hr}{k}\right)\right) \\ &= \sum_{r=0}^{k-1}\left(\frac{r}{k}-\left[\frac{r}{k}\right]-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\frac{hr}{k}\right)\right) \\ &= \sum_{r=0}^{k-1}\left(\frac{r}{k}\right)\left(\left(\frac{hr}{k}\right)\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

2.3.1.Teorem $x \in \mathbf{R}$ için

$$\sum_{r Modk}\left(\left(\frac{r+x}{k}\right)\right)=((x)).$$

İspat:

$$D(x) = \sum_{r Mod k} \left(\left(\frac{r+x}{k}\right)\right) - ((x))$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $D(x+1) = D(x)$ olduğundan $D(x)$ fonksiyonu, 1 ile periyodiktir. Buradan, $D(x)$ fonksiyonunu $0 \leq x < 1$ aralığına sınırlayabiliriz.

$$\begin{aligned}
x = 0 \quad icin \quad D(0) &= \sum_{r Mod k} \left(\left(\frac{r}{k}\right)\right) = 0 \\
0 < x < 1 \quad icin \quad D(x) &= \sum_{r Mod k} \left(\left(\frac{r+x}{k}\right)\right) - ((x)) \\
&= \sum_{r=0}^{k-1} \left(\frac{r+x}{k} - \left[\frac{r+x}{k}\right] - \frac{1}{2}\right) - \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{k}\frac{(k-1)k}{k} + \frac{x}{k}k - \frac{k}{2} - x - \frac{1}{2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Böylece x in tüm değerleri için $D(x) = 0$ bulunur.

2.3.2.Sonuç $x \in \mathbf{R}$ için $((x)) + ((x + \frac{1}{2})) = ((2x))$ dır.

İspat: 2.3.1.Teorem de $k = 2$ ve x yerine $2x$ alınarak,

$$((x)) + ((x + \frac{1}{2})) = ((2x))$$

bulunur. Benzer olarak, $k = 2$ ve x yerine $-2x$ alınarak,

$$((x)) + ((x - \frac{1}{2})) = ((2x))$$

eşitliği elde edilir.

2.3.3.Teorem

a) $h' \equiv \mp h$ (Mod k) ise $s(h', k) = \mp s(h, k)$

b) $h\bar{h} \equiv \mp 1$ (Mod k) ise $s(\bar{h}, k) = \mp s(h, k)$

c) $h^2 + 1 \equiv 0$ (Mod k) ise $s(h, k) = 0.$

İspat:

a) $h' \equiv h$ (Mod k) ise $h' = kt + h$, $t \in \mathbf{Z}$.

$$\begin{aligned} s(h',k) &= \sum_{r=0}^{k-1}\left(\left(\frac{r}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{h'r}{k}\right)\right) \\ &= \sum_{r=0}^{k-1}\left(\left(\frac{r}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{(kt+h)r}{k}\right)\right) \\ &= \sum_{r=0}^{k-1}\left(\left(\frac{r}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{hr}{k}\right)\right) \\ &= s(h,k). \end{aligned}$$

Benzer olarak, $h' \equiv -h$ (Mod k) ise $s(h',k) = -s(h,k)$ dır.

b) $h\bar{h} \equiv 1$ (Mod k) ise $1 = h\bar{h} - kt$, $t \in \mathbf{Z}$.

$$\begin{aligned} s(h,k) &= \sum_{r=0}^{k-1}\left(\left(\frac{r}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{hr}{k}\right)\right) \\ &= \sum_{r=0}^{k-1}\left(\left(\frac{(h\bar{h}-kt)r}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{hr}{k}\right)\right) \\ &= \sum_{r=0}^{k-1}\left(\left(\frac{h\bar{h}r}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{hr}{k}\right)\right) \\ &= s(\bar{h},k). \end{aligned}$$

Benzer olarak, $h\bar{h} \equiv -1$ (Mod k) ise $s(\bar{h},k) = -s(h,k)$ dır.

c) $h^2 + 1 \equiv 0$ (Mod k) ise $1 = kt - h^2$, $t \in \mathbf{Z}$.

$$\begin{aligned} s(h,k) &= \sum_{r=0}^{k-1}\left(\left(\frac{r}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{hr}{k}\right)\right) \\ &= \sum_{r=0}^{k-1}\left(\left(\frac{(kt-h^2)r}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{hr}{k}\right)\right) \\ &= -\sum_{r=0}^{k-1}\left(\left(\frac{h^2r}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{hr}{k}\right)\right) \end{aligned}$$

$$= \quad -s(h,k).$$

Böylece, $s(h,k) = 0$ bulunur.

2.3.4.Teorem

$q \in \mathbf{Z}^+$ ise $s(qh,qk) = s(h,k)$ dır.

İspat:

$$s(qh,qk) = \sum_{\mu=1}^{qk-1} \left(\left(\frac{\mu}{qk}\right)\right)\left(\left(\frac{qh\mu}{qk}\right)\right)$$

yazabiliriz.

ν, $\rho \in \mathbf{Z}$ olmak üzere $\mu = \nu k + \rho$, $0 \leq \nu \leq q-1$ ve $1 \leq \rho \leq k-1$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} s(qh,qk) &= \sum_{\nu=0}^{q-1}\sum_{\rho=0}^{k-1}\left(\left(\frac{\nu k+\rho}{qk}\right)\right)\left(\left(\frac{h(\nu k+\rho)}{qk}\right)\right) \\ &= \sum_{\rho=1}^{k-1}\left(\left(\frac{h\rho}{k}\right)\right)\sum_{\nu=0}^{q-1}\left(\left(\frac{\rho}{qk}+\frac{\nu}{q}\right)\right) \\ &= \sum_{\rho=1}^{k-1}\left(\left(\frac{h\rho}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{\rho}{k}\right)\right) \\ &= s(h,k). \end{aligned}$$

2.3.5.Teorem (Reciprocity Teoremi)

$h, k \in \mathbf{Z}$, $k > 0$, $(h,k) = 1$ olmak üzere,

$$s(h,k) + s(k,h) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\left(\frac{h}{k} + \frac{1}{hk} + \frac{k}{h}\right)$$

dır.

İspat:

$$\begin{aligned} S &= s(h,k) + s(k,h) \\ &= \sum_{\mu=0}^{k-1}\left(\left(\frac{\mu}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{h\mu}{k}\right)\right) + \sum_{\nu=0}^{h-1}\left(\left(\frac{\nu}{h}\right)\right)\left(\left(\frac{k\nu}{h}\right)\right) \end{aligned}$$

olsun.

$x = \frac{h\mu}{k}$ ve $x = \frac{\nu k}{h}$ için 2.3.1.Teorem'i uygulayarak sırasıyla,

$$\sum_{\nu=0}^{h-1}\left(\left(\frac{\mu}{k}+\frac{\nu}{h}\right)\right) = \left(\left(\frac{h\mu}{k}\right)\right) \quad , \quad \sum_{\mu=0}^{k-1}\left(\left(\frac{\mu}{k}+\frac{\nu}{h}\right)\right) = \left(\left(\frac{k\nu}{h}\right)\right)$$

eşitliklerini elde ederiz. Böylece,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\mu=0}^{k-1}\left(\left(\frac{\mu}{k}\right)\right)\sum_{\nu=0}^{h-1}\left(\left(\frac{\mu}{k}+\frac{\nu}{h}\right)\right) + \sum_{\nu=0}^{h-1}\left(\left(\frac{\nu}{h}\right)\right)\sum_{\mu=0}^{k-1}\left(\left(\frac{\mu}{k}+\frac{\nu}{h}\right)\right) \\ &= \sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{h-1}\left(\left(\frac{\mu}{k}+\frac{\nu}{h}\right)\right)\left\{\left(\left(\frac{\mu}{k}\right)\right)+\left(\left(\frac{\nu}{h}\right)\right)\right\} \\ &= \sum_{\mu=1}^{k-1}\sum_{\nu=1}^{h-1}\left(\left(\frac{\mu}{k}+\frac{\nu}{h}\right)\right)\left\{\left(\left(\frac{\mu}{k}\right)\right)+\left(\left(\frac{\nu}{h}\right)\right)\right\} + \sum_{\nu=1}^{h-1}\left(\left(\frac{\nu}{h}\right)\right)\left(\frac{\nu}{h}-\frac{1}{2}\right) \\ &\quad + \sum_{\mu=1}^{k-1}\left(\left(\frac{\mu}{k}\right)\right)\left(\frac{\mu}{k}-\frac{1}{2}\right) \\ &= \sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{h-1}\left(\left(\frac{\mu}{k}+\frac{\nu}{h}\right)\right)\left(\frac{\mu}{k}+\frac{\nu}{h}-1\right). \end{aligned}$$

$$T = \sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{h-1}\left\{\left(\frac{\mu}{k}+\frac{\nu}{h}-1\right) - \left(\left(\frac{\mu}{k}+\frac{\nu}{h}\right)\right)\right\}^2 \tag{8}$$

eşitliğini tanımlayalım.

$$\begin{aligned} T &= \sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{h-1}\left\{\left(\frac{\mu}{k}+\frac{\nu}{h}-1\right) - \left(\left(\frac{\mu}{k}+\frac{\nu}{h}\right)\right)\right\}^2 \\ &= \sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{h-1}\left(\frac{\mu}{k}+\frac{\nu}{h}-1\right)^2 - 2\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{h-1}\left(\frac{\mu}{k}+\frac{\nu}{h}-1\right) \\ &\quad \left(\left(\frac{\mu}{k}+\frac{\nu}{h}\right)\right) + \sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{h-1}\left(\left(\frac{\mu}{k}+\frac{\nu}{h}\right)\right)^2 \end{aligned}$$

$T = S_1 - 2S_2 + S_3$ olsun. Buradan, $S_2 = S$ dir.

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{h-1}\left(\frac{\mu}{k}+\frac{\nu}{h}-1\right)^2 \\ &= \frac{h}{k^2}\sum_{\mu=0}^{k-1}\mu^2 + \frac{k}{h^2}\sum_{\nu=0}^{h-1}\nu^2 + hk + \frac{2}{hk}\sum_{\mu=0}^{k-1}\mu\sum_{\nu=0}^{h-1}\nu \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{2h}{k}\sum_{\mu=0}^{k-1}\mu-\frac{2k}{h}\sum_{\mu=0}^{h-1}\nu \\
= \quad & \frac{hk}{6}+\frac{h}{6k}+\frac{k}{6h}+\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

μ ve ν sırasıyla, Modh ve Modk a göre değişirken $\rho = h\mu + k\nu$ da Modhk a göre değişir.

$$
\begin{aligned}
S_3 &= \sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{h-1}\left(\left(\frac{\mu}{k}+\frac{\nu}{h}\right)\right)^2 \\
&= \sum_{\rho Modhk}\left(\left(\frac{\rho}{hk}\right)\right)^2 \\
&= s(1,hk) \\
&= -\frac{1}{4}+\frac{1}{6hk}+\frac{hk}{12}.
\end{aligned}
$$

$$
z-((z)) = \begin{cases} [z]+\frac{1}{2} & , \quad z \notin \mathbf{Z} \\ 0 & , \quad z \in \mathbf{Z} \end{cases}
$$

olduğundan,

$$
(z-1)-((z)) = \begin{cases} [z]-\frac{1}{2} & , \quad z \notin \mathbf{Z} \\ z-1 & , \quad z \in \mathbf{Z} \end{cases}
$$

elde edilir.

(8) eşitliğinde yalnız $\mu = \nu = 0$ için $\left(\frac{\mu}{k}+\frac{\nu}{h}\right) \in \mathbf{Z}$ olur. Böylece,

$$
T = \sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{h-1}\left\{\left[\frac{\mu}{k}+\frac{\nu}{h}\right]-\frac{1}{2}\right\}^2+\frac{3}{4}
$$

yazabiliriz.

$$
\begin{aligned}
T &= \sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{h-1}\left\{\left[\frac{\mu}{k}+\frac{\nu}{h}\right]-\frac{1}{2}\right\}^2+\frac{3}{4} \\
&= \sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{h-1}\left\{\left[\frac{\mu}{k}+\frac{\nu}{h}\right]^2-\left[\frac{\mu}{k}+\frac{\nu}{h}\right]+\frac{1}{4}\right\}+\frac{3}{4} \\
&= \sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{h-1}\left[\frac{\mu}{k}+\frac{\nu}{h}\right]\left(\frac{\mu}{k}+\frac{\nu}{h}\right]-1\right)+\frac{hk}{4}+\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{hk}{4} + \frac{3}{4}$$

elde edilir.
Burada, $0 \leq \frac{\mu}{k} + \frac{\nu}{h} < 2$ olduğundan, $\left[\frac{\mu}{k} + \frac{\nu}{h}\right] = 0$ ya da 1 dir.

Böylece,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(S_1 - T + S_3) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{hk}{6} + \frac{h}{6k} + \frac{k}{6h} + \frac{1}{2} - \frac{hk}{4} - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6hk} + \frac{hk}{12}\right) \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\left(\frac{h}{k} + \frac{1}{hk} + \frac{k}{h}\right) \end{aligned}$$

bulunur.

Reciprocity Teoremi'nin farklı ispatları, Rademacher ve Whiteman (1941), Grosswald (1971), Grosswald ve Rademacher (1972), Apostol (1976) tarafından verilmiştir.

2.4. Farey Kesirleri

Farey Kesirleri, n. mertebeden, $[0,1]$ aralığında, paydası n den küçük ya da eşit olacak biçimde tanımlanan azalan kesirler kümesidir ve F_n ile gösterilir.

$$\begin{aligned} F_1 &; \quad \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \\ F_2 &; \quad \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \\ F_3 &; \quad \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \\ F_4 &; \quad \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \\ F_5 &; \quad \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \\ &, \\ &, \\ &, \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir.

$F_n \subset F_{n+1}$ ve $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ardışık Farey kesirleri ise $bc - ad = 1$ ve $\frac{a+c}{b+d}$ kesrine, bu kesirlerin mediantı denir. $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ ardışık Farey kesirleridir.

Benzer olarak, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{c-a}{d-b}$ eşitsizlikleri de ardışık Farey kesirleridir. $\frac{c-a}{d-b}$ kesrine, $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ kesirlerinin ardışık farkı denir.

1963 yılında H.Rademacher tarafından sorulan Farey kesirleri ile ilgili bir soruyu ele alalım. Bu soru, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ardışık Farey kesirleri ve bunların Dedekind toplamları $s(a,b) \geq 0$,$s(c,d) \geq 0$ ise $s(a+b, c+d)$ pozitif midir, sorusudur.

$s(a+b, c+d)$ nin negatif olduğu, önce sayısal örnekle L.Pinzur, Dedekind toplamları yardımıyla K.H.Rosen ve Dedekind toplamlarının değerlerini, tamsayı haline getirerek, T.Asai (1986) tarafından gösterilmiştir.

3.BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1.Dedekind Eta Fonksiyonu ile Theta Fonksiyonları Arasındaki Bağıntılar

Theta fonksiyonlarının, (2) eşitliği ile verilen sonsuz çarpım ifadeleri, Dedekind $\eta(\tau)$ fonksiyonu gözönüne alınarak,

$$\begin{aligned} \Theta_2(\tau) &= \frac{2\eta^2(2\tau)}{\eta(\tau)} \\ \Theta_3(\tau) &= \xi_{24}^{-1}\frac{\eta^2(\frac{\tau+1}{2})}{\eta(\tau)} \quad , \quad \xi_{24} := e^{\frac{i\pi}{12}} \\ \Theta_4(\tau) &= \frac{\eta^2(\frac{\tau}{2})}{\eta(\tau)} \end{aligned} \tag{9}$$

eşitlikleri ile verilir. Bu denklemlerin logaritmaları alınarak,

$$\log\Theta_2(\tau) = \log 2 + 2\log\eta(2\tau) - \log\eta(\tau) \tag{10}$$

$$\log\Theta_3(\tau) = \frac{\pi i}{12} + 2\log\eta\left(\frac{\tau+1}{2}\right) - \log\eta(\tau) \tag{11}$$

$$\log\Theta_4(\tau) = 2\log\eta(\frac{\tau}{2}) - \log\eta(\tau) \tag{12}$$

denklemleri bulunur (Barner 1985).

3.1.1.Teorem $h,k \in \mathbf{Z}$, $k>0$, $(h,k)=1$, $hh' \equiv -1 \quad (Modk)$ olmak üzere,

$$\log\Theta_3\left(\frac{h+iz}{k}\right) = \log\Theta_3\left(\frac{h'+i/z}{k}\right) + \pi i(s(h,k) - 2s(h,2k)) - \frac{1}{2}\log z$$

dır.

İspat: Γ modular grup, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, $c>0$, $\tau \in \mathbf{C}$ ve $\Im(\tau)>0$ olmak üzere z, h, k, h' sayılarını,

$$a = h', \quad c = k > 0, \quad d = -h-k, \quad z = -i(c\tau + d)$$

olacak şekilde seçelim. $ad - bc = 1$ olduğundan,

$$-hh' - h'k - bk = 1, \quad (h,k) = 1, \quad -hh' \equiv 1 \quad (Modk)$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{iz-d}{c} = \frac{iz+h+k}{k} = \frac{iz+h}{k} + 1 \quad , \\ \tau' &= \frac{a\tau+b}{c\tau+d} = \frac{h'+i/z}{k} \end{aligned}$$

bulunur.
Bu sonuçları (5) eşitliğinde yazarak,

$$\log\eta(\tau) = log\eta\left(\frac{h+iz}{k}\right) = log\eta\left(\frac{h'+i/z}{k}\right) - \pi\frac{h'-h}{12k} - \pi is(h,k) - \frac{1}{2}\log z \quad (13)$$

bağıntısı elde edilir. Benzer olarak,

$$a = h', \quad c = 2k > 0, \quad d = -h-2k, \quad z = -i(c\tau+d)$$

seçilerek $\log\eta\left(\frac{\tau+1}{2}\right)$ için de bir bağıntı yazabiliriz.
$ad - bc = 1$ olduğundan,

$$-hh' - 2kh' - 2kb = 1, \quad (h,2k) = 1, \quad -hh' \equiv 1 \quad (Mod 2k)$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{iz-d}{c} = \frac{iz+h}{2k} + 1 \quad , \\ \tau' &= \frac{a\tau+b}{c\tau+d} = \frac{h'+i/z}{2k} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, (5) eşitliğini kullanarak,

$$\log\eta\left(\frac{\tau+1}{2}\right) = log\eta\left(\frac{iz+h}{2k}\right) = log\eta\left(\frac{h'+i/z}{2k}\right) - \pi i\left(\frac{h'-h}{24k}\right) - \pi is(h,2k) - \frac{1}{2}\log z \quad (14)$$

bağıntısını elde ederiz.
(13) ve (14) eşitliklerinde gerekli işlemler yapılarak ve (11) de yerine yazılarak,

$$\log\Theta_3\left(\frac{h+iz}{k}\right) = \log\Theta_3\left(\frac{h'+i/z}{k}\right) + \pi i(s(h,k) - 2s(h,2k)) - \frac{1}{2}\log z$$

bulunur.

3.1.2.Teorem $h,k \in \mathbf{Z}$, $k > 0$, $(h,k) = 1$, $hh' \equiv -1 \quad (Modk)$ olmak üzere,

$$\log\Theta_4\left(\frac{h+iz}{k}\right) = \log\Theta_4\left(\frac{h'+i/z}{k}\right) + \pi i(s(h,k) - 2s(h,2k)) - \frac{1}{2}\log z$$

dır.

İspat: Γ modular grup, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, $c > 0$, $\tau \in \mathbf{C}$ ve $\Im(\tau) > 0$ olmak üzere z, h, k, h' sayılarını,

$$a = h', \quad c = k > 0, \quad d = -h, \quad z = -i(c\tau+d)$$

olacak şekilde seçelim. $ad - bc = 1$ olduğundan,

$$-hh^{'} - bk = 1, \quad (h,k) = 1, \quad -hh^{'} \equiv 1 \quad (Modk)$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{iz-d}{c} = \frac{iz+h}{k} \quad , \\ \tau^{'} &= \frac{a\tau+b}{c\tau+d} = \frac{h^{'}+i/z}{k} \end{aligned}$$

bulunur.
Bu sonuçları (5) eşitliğinde yazarak,

$$\log\eta(\tau) = log\eta\left(\frac{iz+h}{k}\right) = log\eta\left(\frac{h^{'}+i/z}{k}\right) - \pi i\left(\frac{h^{'}-h}{12k}\right) - \pi is(h,k) - \frac{1}{2}\log z \tag{15}$$

bağıntısı elde edilir. Benzer olarak,

$$a = h^{'}, \quad c = 2k > 0, \quad d = -h, \quad z = -i(c\tau + d)$$

seçilerek $\log\eta\left(\frac{\tau}{2}\right)$ için de bir bağıntı yazabiliriz.

$$\tau = \frac{iz+h}{2k}$$

ve

$$\tau^{'} = \frac{h^{'}+i/z}{2k}$$

olduğundan,

$$\log\eta\left(\frac{\tau}{2}\right) = log\eta\left(\frac{iz+h}{2k}\right) = log\eta\left(\frac{h^{'}+i/z}{2k}\right) - \pi i\left(\frac{h^{'}-h}{24k}\right) - \pi is(h,2k) - \frac{1}{2}\log z \tag{16}$$

elde edilir.
(15) ve (16) eşitliklerinde gerekli işlemler yapılarak ve (12) de yerine yazılarak,

$$\log\Theta_4\left(\frac{h+iz}{k}\right) = \log\Theta_4\left(\frac{h^{'}+i/z}{k}\right) + \pi i(s(h,k) - 2s(h,2k)) - \frac{1}{2}\log z$$

bulunur.

Benzer yöntemle,

$$\log\Theta_2\left(\frac{h+iz}{k}\right)=\log\Theta_2\left(\frac{h'+i/z}{k}\right)-\pi i\left(\frac{h'-h}{4k}\right)+\pi i(s(h,k)-2s(h,k/2))-\frac{1}{2}\log z$$

bağıntısı bulunur.

3.2. Theta Fonksiyonlarının Farey Kesirlerine Uygulaması

3.2.1.Teorem $\frac{h}{k}<\frac{H}{K}$ ardışık Farey kesirleri ise

$$\log\Theta_3\left(\frac{iz-K}{k}\right)=\log\Theta_3\left(\frac{-h+i/z}{k}\right)+\pi i(s(h,k)-2s(h,2k))-\frac{1}{2}\log z$$

dır.

İspat: $\frac{h}{k}<\frac{H}{K}$ ardışık Farey kesirleri ise $kH-hK=1$ dir.
Γ modular grup, $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma$, $c>0$, $\tau\in\mathbf{C}$ ve $\Im(\tau)>0$ olmak üzere z,h,k,K sayılarını,

$$a=-h,\quad c=k>0,\quad d=K+k,\quad z=-i(c\tau+d)$$

olacak şekilde seçelim. $ad-bc=1$ olduğundan,

$$-hK-hk-bk=1,\quad (K,k)=1,\quad -hK\equiv 1\quad (Modk),$$

$$s(K,k)=-s(h,k),$$

$$\tau=\frac{iz-K}{k}-1,\quad \tau'=\frac{-h+i/z}{k}$$

bağıntıları bulunur.
Bu sonuçları (5) eşitliğinde yazarak,

$$\log\eta(\tau)=log\eta\left(\frac{iz-K}{k}\right)=log\eta\left(\frac{-h+i/z}{k}\right)-\pi i\left(\frac{K-h}{12k}\right)-\pi is(h,k)-\frac{1}{2}\log z \tag{17}$$

bağıntısı elde edilir. Benzer olarak,

$$a=-h,\quad c=2k>0,\quad d=K,\quad z=-i(c\tau+d)$$

seçilerek $\log\eta\left(\frac{\tau+1}{2}\right)$ için de bir bağıntı yazabiliriz.
$ad-bc=1$ olduğundan,

$$-hK-2kb=1,\quad (K,2k)=1,\quad -hK\equiv 1\quad (Mod2k)$$

$$s(K,2k)=-s(h,2k),$$

$$\tau = \frac{iz - K}{2k}, \quad \tau' = \frac{-h + i/z}{2k}$$

bağıntıları bulunur.

Böylece (5) eşitliğini kullanarak,

$$\log \eta \left(\frac{\tau + 1}{2}\right) = log\eta \left(\frac{iz - K}{2k}\right) = log\eta \left(\frac{-h + i/z}{2k}\right) - \pi i \left(\frac{K - h}{24k}\right) - \pi is(h, 2k) - \frac{1}{2}\log z \tag{18}$$

bağıntısı elde edilir.
(17) ve (18) eşitliklerinde gerekli işlemler yapılarak ve (11) eşitliğinde yerine yazılarak,

$$\log \Theta_3 \left(\frac{iz - K}{k}\right) = \log \Theta_3 \left(\frac{-h + i/z}{k}\right) + \pi i(s(h, k) - 2s(h, 2k)) - \frac{1}{2}\log z$$

bulunur.

3.2.2.Teorem $\frac{h}{k} < \frac{h+H}{k+K}$ ardışık Farey kesirleri ise

$$\log \Theta_3 \left(\frac{iz + K}{k}\right) = \log \Theta_3 \left(\frac{h + i/z}{k}\right) + \pi i(2s(h, 2k) - s(h, k)) - \frac{1}{2}\log z$$

dır.

İspat: Γ modular grup, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, $c > 0$, $\tau \in \mathbf{C}$ ve $\Im(\tau) > 0$ olmak üzere h, k, K, z sayılarını,

$$a = h, \quad c = k > 0, \quad d = -(K + k), \quad z = -i(c\tau + d)$$

olacak şekilde seçelim. $ad - bc = 1$ olduğundan,

$$-hK - hk - bk = 1, \quad (K, k) = 1, \quad -hK \equiv 1 \quad (Modk),$$

$$s(K, k) = -s(h, k),$$

$$\tau = \frac{iz + K + k}{k} = \frac{iz + K}{k} + 1 \quad , \quad \tau' = \frac{h + i/z}{k}$$

bağıntıları bulunur.Buradan,

$$\log \eta(\tau) = log\eta \left(\frac{iz + K}{k}\right) = log\eta \left(\frac{h + i/z}{k}\right) - \pi i \left(\frac{K - h}{12k}\right) + \pi is(h, k) - \frac{1}{2}\log z \tag{19}$$

elde edilir. Benzer olarak,

$$a = h, \quad c = 2k > 0, \quad d = -(K + 2k), \quad z = -i(c\tau + d)$$

seçilerek $\log\eta\left(\frac{\tau+1}{2}\right)$ için de bir bağıntı yazabiliriz. Böylece,

$$-hK - h2k - b2k = 1, \quad (K,2k) = 1, \quad -hK \equiv 1 \quad (Mod 2k),$$

$$s(K,2k) = -s(h,2k),$$

$$\tau = \frac{iz + K + 2k}{2k} = \frac{iz+K}{2k} + 1, \quad \tau' = \frac{h+i/z}{2k}$$

bulunur. Buradan,

$$\log\eta\left(\frac{\tau+1}{2}\right) = log\eta\left(\frac{iz+K}{2k}\right) = log\eta\left(\frac{h+i/z}{2k}\right) - \pi i\left(\frac{K-h}{24k}\right) + \pi is(h,2k) - \frac{1}{2}\log z \tag{20}$$

elde edilir.
(19) ve (20) eşitliklerinde gerekli işlemler yapılarak ve (11) de yerine yazılarak,

$$\log\Theta_3\left(\frac{iz+K}{k}\right) = \log\Theta_3\left(\frac{h+i/z}{k}\right) + \pi i(2s(h,2k) - s(h,k)) - \frac{1}{2}\log z$$

bulunur.

3.2.3.Sonuç $n \in \mathbf{Z}$ olmak üzere, $\frac{h}{k} < \frac{nh+H}{nk+K}$ ardışık Farey kesirleri için

$$\log\Theta_3\left(\frac{iz+K}{nk}\right) = \log\Theta_3\left(\frac{h+i/z}{nk}\right) + \pi i(2s(h,2nk) - s(h,nk)) - \frac{1}{2}\log z$$

bağıntısı vardır.

Benzer yöntemle ispatlanabilen, Farey kesirlerinin ardışık farkı için de aşağıdaki teoremi verebiliriz.

3.2.4.Teorem $\frac{H}{K} < \frac{H-h}{K-k}$ ardışık Farey kesirleri ise

$$\log\Theta_3\left(\frac{iz-k}{K}\right) = \log\Theta_3\left(\frac{H+i/z}{K}\right) + \pi i(2s(H,2K) - s(H,K)) - \frac{1}{2}\log z$$

dır.

Bu bölümde, $\log\Theta_3(\tau)$ fonksiyonunun Farey kesirlerine bir uygulaması verilmiş ve aralarındaki bağıntılar bulunmuştur. Benzer olarak, $\log\Theta_2(\tau)$ ve $\log\Theta_4(\tau)$ dönüşümlerine ait ifadeler de elde edilir.

3.3. $G(\sqrt{2})$ ve $G(\sqrt{3})$ Hecke Grupları için Çarpımsal Sistemler

Modular, Süreksiz, $G\left(\sqrt{\lambda_q}\right)$ Hecke grupları, $S\tau = \tau + \lambda_q$, $\lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, $q \in \mathbf{Z}$, $q \geq 3$ ve $T\tau = -1/\tau$ dönüşümleri ile üretilmektedir.

$q = 3$ için $S\tau = \tau + 1$ ve $T\tau = -1/\tau$ ile Γ modular grubunu elde ederiz.

Bu kesimde, $q = 4$ ve $q = 6$ değerlerine karşılık gelen $G(\sqrt{2})$ ve $G(\sqrt{3})$ Hecke gruplarında tanımlanan, Modular form için çarpımsal sistemleri belirleyeceğiz.

$m = 2, 3$ olmak üzere $G(\sqrt{m})$ Hecke grubunun elemanları,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ve \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrislerinin çarpımı olarak ifade edilir. Her ifade de T nin sayısının çift ya da tek olmasına göre $G(\sqrt{m})$ grubunun elemanları, çift ve tek olarak ayrılmışlardır.

$G(\sqrt{m})$ grubunun çift elemanları,

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b\sqrt{m} \\ c\sqrt{m} & d \end{pmatrix} \quad ; \quad a, b, c, d \in \mathbf{Z}, \quad ad - mbc = 1 \right\} \tag{21}$$

ve tek elemanları,

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a\sqrt{m} & b \\ c & d\sqrt{m} \end{pmatrix} \quad ; \quad a, b, c, d \in \mathbf{Z}, \quad adm - bc = 1 \right\} \tag{22}$$

şeklindedir.

$G(\sqrt{2})$ Hecke grubu, $S = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dönüşümleri ile üretilir ve (21), (22) de $m = 2$ alınarak çift ve tek elemanları belirlenir.

Γ, $G(\sqrt{2})$ Hecke grubunu göstermek üzere,

$$\Gamma(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b\sqrt{m} \\ c\sqrt{m} & d \end{pmatrix}; \quad a \equiv d \equiv 1, \quad b \equiv c \equiv 0 \quad (Mod 2) \right\}$$

kümesi Γ nın 8 indexli normal altgrubudur.

$\Gamma(2)$ nin Γ üzerinde belirlediği eşkümeler,

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad , \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} = (TS^{-1})^2$$
$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = S \quad , \quad R_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = TS^{-1}T$$
$$R_5 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = ST \quad , \quad R_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = TS$$
$$R_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T \quad , \quad R_8 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = STS$$

dir. Bu kümelerin ilk dördü çift, diğerleri tek elemandır.

$f(\tau)$, Γ ya göre sıfırıncı mertebeden tam modular form olsun. $f(\tau)$, H de analitik ve her $M \in \Gamma$ için

$$f(M\tau) = \epsilon(M) f(\tau)$$

dır. $\epsilon(M)$, Γ üzerinde tanımlanmış, τ dan bağımsız ve (4) özelliğini sağlayan $f(\tau)$ nun çarpımsal fonksiyonudur.

$M \in \Gamma$ için $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ olsun. Buradan, $\epsilon(M) = \epsilon(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ gösterimi ile

$$\begin{aligned} f(S\tau) &= \epsilon(1, \sqrt{2}, 0, 1) f(\tau) = e^{2\pi i \alpha} f(\tau), \quad 0 \le \alpha < 1 \\ f(T\tau) &= \epsilon(0, -1, 1, 0) f(\tau) = \epsilon_0 f(\tau) \end{aligned}$$

bağıntıları Knopp tarafından verilmiştir (Knopp 1960).

$T^2 = I$ ve $(ST)^4 = I$ olduğundan $\epsilon_0^2 = 1$ ve $(\epsilon^{2\pi i \alpha})^4 = 1$ elde edilir. $q = 4\alpha$ için

$$f(S\tau) = e^{\frac{\pi i}{2} q} f(\tau), \quad q = 0, 1, 2, 3 \tag{23}$$
$$f(T\tau) = \epsilon_0 f(\tau) \quad , \quad \epsilon_0^2 = 1 \tag{24}$$

bulunur.

$$M = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ c\sqrt{2} & d \end{pmatrix} \quad ya \quad da \quad M = \begin{pmatrix} a\sqrt{2} & b \\ c & d\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

ise

$$\epsilon(M) = e^{\frac{\pi i}{2} q E(M)} \quad veya \quad \epsilon(M) = \epsilon_0 e^{\frac{\pi i}{2} q E(M)} \tag{25}$$

olmak üzere Rosen tarafından tanımlanan

$$E(M) = abu_1 + acu_2 + adu_3 + bcu_4 + bdu_5 + cdu_6 \tag{26}$$

eşitliğini gözönüne alalım(Rosen 1993).

3.3.1. Teorem a) $\begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ c\sqrt{2} & d \end{pmatrix} \in G(\sqrt{2})$ ise

$$\begin{aligned} q &= 0,1 \quad i\varsigma in \quad E(M) \equiv ab - ac \quad (Mod4) \\ q &= 2 \quad i\varsigma in \quad E(M) \equiv 2(ab - ac) \quad (Mod4) \\ q &= 3 \quad i\varsigma in \quad E(M) \equiv -(ab - ac) \quad (Mod4). \end{aligned}$$

b) $M = \begin{pmatrix} a\sqrt{2} & b \\ c & d\sqrt{2} \end{pmatrix} \in G(\sqrt{2})$ ise

$$\begin{aligned} q &= 0,1 \quad i\varsigma in \quad E(M) \equiv cd + ac \quad (Mod4) \\ q &= 2 \quad i\varsigma in \quad E(M) \equiv -2(cd + ac) \quad (Mod4) \\ q &= 3 \quad i\varsigma in \quad E(M) \equiv -(cd + ac) \quad (Mod4). \end{aligned}$$

İspat: a) $\Gamma(2)$ nin Γ üzerinde belirlediği eşkümelerde ispatlamak yeterlidir. $1 \leq i \leq 4$ olmak üzere R_i kümeleri için (23) ve (24) bağıntıları yardımıyla,

$$\epsilon(R_1) = 1, \quad \epsilon(R_2) = e^{-\pi i q}, \quad \epsilon(R_3) = e^{\frac{\pi i}{2}q}, \quad \epsilon(R_4) = e^{-\frac{\pi i}{2}q}$$

değerleri ve (25) eşitliği kullanılarak,

$$E(R_1) = 0, \quad E(R_2) = -2, \quad E(R_3) = 1, \quad E(R_4) = -1$$

elde edilir. (26) bağıntısından,

$$\begin{aligned} E(R_1) &= 0.u_1 + 0.u_2 + 1.u_3 + 0.u_4 + 0.u_5 + 0.u_6 = 0 \\ E(R_2) &= -1.u_1 + 1.u_2 + -1.u_3 + -1.u_4 + 1.u_5 + -1.u_6 = -2 \\ E(R_3) &= 1.u_1 + 0.u_2 + 1.u_3 + 0.u_4 + 1.u_5 + 0.u_6 = 1 \\ E(R_4) &= 0.u_1 + 1.u_2 + 1.u_3 + 0.u_4 + 0.u_5 + 1.u_6 = -1 \end{aligned}$$

denklem sistemi ve

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 - u_5 \\ u_2 &= -1 - u_6 \\ u_3 &= 0 \\ u_4 &= 2u_5 - 2u_6 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$E(M) = ab - ac + u_5(bd - ab - 2bc) + u_6(cd - ac - 2bc) \qquad (27)$$

olarak u_5 ve u_6 keyfi sayılar olmak üzere $E(M)$ çarpımsal değeri bulunur.

Knopp tarafından belirlenen $q = 0, 1, 2, 3$ için

$$E(M) = 1, \quad bd - ac + 2bc, \quad 2(bd - ac), \quad (-bd + ac - 2bc)$$

değerlerinin teoremin koşullarını gerçeklediğini gösterelim.

i) bc çift sayı olsun. Buradan,

$$ad \equiv 1, \quad a \equiv d \quad (Mod4)$$

elde edilir. (27) bağıntısında u_5 ve u_6 nın katsayıları,

$$bd - ab + 2bc \equiv 0, \quad -ac - 2bc + cd \equiv 0 \quad (Mod4)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
q &= 0 \quad icin \quad E(M) \equiv ab - ac \quad (Mod4)\\
q &= 1 \quad icin \quad E(M) = bd - ac + 2bc \equiv ab - ac \quad (Mod4)\\
q &= 2 \quad icin \quad E(M) = 2(bd - ac) \equiv 2(ab - ac) \quad (Mod4)\\
q &= 3 \quad icin \quad E(M) = -bd + ac - 2bc \equiv -ab + ac \quad (Mod4)
\end{aligned}$$

bulunur.

ii) bc tek sayı olsun. Bu durumda,

$$2bc \equiv 2, \quad ad \equiv 3, \quad a \equiv d - 2 \quad (Mod4)$$

elde edilir. (27) bağıntısında u_5 ve u_6 nın katsayıları,

$$bd - ab + 2bc = b(d - a) + 2bc \equiv 2b + 2 \equiv 0 \quad (Mod4)$$

ve

$$-ac - 2bc + cd \equiv 2c(b + 1) \equiv 0 \quad (Mod4)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
q &= 0 \quad icin \quad E(M) \equiv ab - ac \quad (Mod4)\\
q &= 1 \quad icin \quad E(M) = bd - ac - +2bc \equiv ab - ac \quad (Mod4)\\
q &= 2 \quad icin \quad E(M) = 2(bd - ac) \equiv 2(ab - ac) \quad (Mod4)\\
q &= 3 \quad icin \quad E(M) = -bd + ac - 2bc \equiv -ab + ac \quad (Mod4)
\end{aligned}$$

bulunur.

b) $\Gamma(2)$ nin Γ üzerinde belirlediği tek eşkümelerde benzer yöntemle ispat yapılırsa,

$$E(M) = ac + cd + u_1(ab + ac - 2ad) + u_5(bd + cd - 2ad)$$

şeklinde u_1 ve u_5 keyfi sayıları için $E(M)$ çarpımsal değeri elde edilir.

$q = 0, 1, 2, 3$ için Knopp tarafından belirlenen,

$$E(M) = 1, \quad ac - bd + 2ad, \quad 2(bd - ac), \quad (ac + bd - 2ad)$$

değerleri teoremde istenen bağıntıları gerçekler.

$G(\sqrt{3})$ Hecke grubu,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ve \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dönüşümleri ile üretilir ve (21), (22) eşitliklerinde $m = 3$ alınarak çift ve tek elemanları belirlenir.

Γ, $G(\sqrt{3})$ Hecke grubu olmak üzere,

$$\Gamma(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b\sqrt{3} \\ c\sqrt{3} & d \end{pmatrix} ; \quad a \equiv d \equiv 1, \quad b \equiv c \equiv 0 \quad (Mod 2) \right\}$$

kümesi Γ nın 12 indexli normal altgrubudur.
$\Gamma(2)$ nin Γ üzerinde belirlediği eşkümeler,

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad , \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = S$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = TS^{-1}T \quad , \quad R_4 = \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = (TS^{-1})^4$$

$$R_5 = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2 \end{pmatrix} = (TS^{-1})^2 \quad , \quad R_6 = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} = (ST)^2S$$

$$R_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T \quad , \quad R_8 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -2 \\ 2 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} = (ST)^3$$

$$R_9 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = ST \quad , \quad R_{10} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 2 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = (TS^{-1})^2T$$

$$R_{11} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = (TS^{-1})^4T \quad , \quad R_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = TS$$

dir. Bu kümelerin ilk altısı çift, diğerleri tek elemandır.

$f(\tau)$, Γ ya göre sıfırıncı mertebeden tam modular form olsun.

$$\begin{aligned} f(S\tau) &= \epsilon(1, \sqrt{3}, 0, 1) f(\tau) = e^{2\pi i \alpha} f(\tau), \quad 0 \leq \alpha < 1 \\ f(T\tau) &= \epsilon(0, -1, 1, 0) f(\tau) = \epsilon_0 f(\tau) \end{aligned}$$

eşitliklerinden,

$T^2 = I$ ve $(ST)^6 = I$ olduğundan $\epsilon_0^2 = 1$ ve $(e^{2\pi i\alpha})^6 = 1$ elde edilir.
$q = 6\alpha$ için

$$\begin{aligned} f(S\tau) &= e^{\frac{\pi i}{3}q} f(\tau), \quad q = 0,1,2,3,4,5 & (28) \\ f(T\tau) &= \epsilon_0 f(\tau) \quad , \quad \epsilon_0^2 = 1 & (29) \end{aligned}$$

bulunur.

$$M = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{3} \\ c\sqrt{3} & d \end{pmatrix} \quad ya \quad da \quad M = \begin{pmatrix} a\sqrt{3} & b \\ c & d\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

ise

$$\epsilon(M) = e^{\frac{\pi i}{3}qE(M)} \quad veya \quad \epsilon(M) = \epsilon_0 e^{\frac{\pi i}{3}qE(M)} \tag{30}$$

olmak üzere,

$$E(M) = abu_1 + acu_2 + adu_3 + bcu_4 + bdu_5 + cdu_6 \tag{31}$$

Rosen eşitliğini gözönüne alalım.

3.3.2.Teorem

a) $\begin{pmatrix} a & b\sqrt{3} \\ c\sqrt{3} & d \end{pmatrix} \in G(\sqrt{3})$ ise $E(M) = bd - ac + 3bc$ dir.

b) $\begin{pmatrix} a\sqrt{3} & b \\ c & d\sqrt{3} \end{pmatrix} \in G(\sqrt{3})$ ise $E(M) = ac - bd - 3ad$ dir.

İspat: a) $\Gamma(2)$ nin Γ üzerinde belirlediği eşkümelerde ispatlamak yeterlidir.
$1 \leq j \leq 6$ olmak üzere R_j kümeleri için (28) ve (29) bağıntıları ve (30) eşitliği kullanılarak,

$E(R_1) = 0, \quad E(R_2) = 1, \quad E(R_3) = -1, \quad E(R_4) = -4, \quad E(R_5) = -2, \quad E(R_6) = 3$

elde edilir. (31) bağıntısı yardımıyla,

$$\begin{aligned} E(R_1) &= 0.u_1 + 0.u_2 + 1.u_3 + 0.u_4 + 0.u_5 + 0.u_6 = 0 \\ E(R_2) &= 1.u_1 + 0.u_2 + 1.u_3 + 0.u_4 + 1.u_5 + 0.u_6 = 1 \\ E(R_3) &= 0.u_1 + 1.u_2 + 1.u_3 + 0.u_4 + 0.u_5 + 1.u_6 = -1 \\ E(R_4) &= -2.u_1 + 2.u_2 + -2.u_3 + -1.u_4 + 1.u_5 + -1.u_6 = -4 \\ E(R_5) &= -1.u_1 + 1.u_2 + -2.u_3 + -1.u_4 + 2.u_5 + -2.u_6 = -2 \\ E(R_6) &= 2.u_1 + 2.u_2 + 4.u_3 + -1.u_4 + 2.u_5 + 2.u_6 = 3 \end{aligned}$$

denklem sistemi ve

$$\begin{aligned} u_1 &= -u_6 \\ u_2 &= -1 - u_6 \\ u_3 &= 0 \\ u_4 &= 3 \\ u_5 &= 1 + u_6 \end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. Böylece,

$$E(M) = -ac + 3bc + bd + u_6(-ab - ac + bd + cd)$$

şeklinde, u_6 keyfi sayı olmak üzere $E(M)$ çarpımsal değeri elde edilir.
$u_6 = 0$ için $E(M) = -ac + 3bc + bd$ bulunur.

b) $\Gamma(2)$ nin Γ üzerinde belirlediği R_j, $7 \leq j \leq 12$ tek eşkümeleri için (28), (29) ve (30) bağıntıları kullanılarak,
$E(R_7) = 0, E(R_8) = 3, E(R_9) = 1, E(R_{10}) = -2, E(R_{11}) = -4, E(R_{12}) = 1$
elde edilir. (31) bağıntısından,

$$\begin{aligned} u_2 &= 1 + u_1 \\ u_3 &= -3 \\ u_4 &= 0 \\ u_5 &= -1 - u_1 \\ u_6 &= -u_1 \end{aligned}$$

değerleri bulunur. Böylece,

$$E(M) = ac - bd - 3ad + u_1(ab + ac - bd - cd)$$

şeklinde u_1 keyfi sayısı için $E(M)$ çarpımsal değeri bulunur.
$u_1 = 0$ için $E(M) = ac - bd - 3ad$ olur.

4.SONUÇ

Bu çalışmada, Theta fonksiyonları ile Dedekind Eta fonksiyonu arasında Barner (1985) tarafından verilen tanımlar kullanılarak, $Log\Theta_r (r = 2, 3, 4)$ nin modular grup üzerinde ki dönüşümleri elde edilmiştir. $Log\Theta_r$ dönüşümleri, Farey kesirlerinin mediantlarına ve ardışık farklarına uygulanarak Theta fonksiyonları ile Farey kesirleri arasında bağıntılar bulunmuştur.

Modular form tanımında ki çarpımsal sistemin değeri modular gruplarda elde edilmeye çalışılarak $G(\sqrt{2})$, $G(\sqrt{3})$ Hecke grupları üzerinde tanımlanan sıfır boyutlu tam boyutlu form için Rosen(1993) nin çalışması genişletilmiştir.

Daha sonraki çalışmalarım, otomorfik formların çarpan değerleri ve matris formunda ki ifadelerini araştırmaya yönelik olacaktır.

5.ÖZET

Çifte periyodik ve meromorf fonksiyona eliptik fonksiyon denir. Theta fonksiyonlarının sonsuz çarpım ifadeleri,

$$\begin{aligned}\theta_2(z) &= 2q^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n})^2,\\ \theta_3(z) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1})^2,\\ \theta_4(z) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})^2\end{aligned}$$

şeklindedir.

$a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ ve $ad - bc = 1$ olmak üzere

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

şeklinde ki tüm Möbiüs dönüşümleri bir grup oluşturur. Bu gruba Modular grup denir ve Γ ile gösterilir. Bu grup aynı zamanda $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det A = 1$ biçimde $2x2$ tamsayı girdili matrislerle de ifade edilebilir. Γ, $S\tau = \tau + 1$ ve $T\tau = -1/\tau$ dönüşümleri tarafından üretilmektedir.

$f(\tau)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa $-r$ inci dereceden Tam Modular Form denir:

a)$f(\tau)$ üst-yarı düzlem H de meromorf,

b)Her $\begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, $r \in \mathbf{R}$ için

$$f(M\tau) = \epsilon(M)(c\tau + d)^r f(\tau)$$

c)$f(\tau)$nun Fourier serisi,

$$f(\tau) = \sum_{n=m}^{\infty} a(n)e^{2\pi n i z}.$$

Dedekind Eta fonksiyonu, üst-yarı düzlem $\mathbf{H}$ de

$$\eta(\tau) = e^{\frac{i\pi\tau}{12}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - e^{2\pi i n\tau}\right)$$

ifadesiyle verilir. $x = e^{2\pi i \tau}$ için $\prod(1 - x^n)$ sonsuz çarpımını elde ederiz. $\tau \in H$ için $|x| < 1$ bulunur ve böylece sonsuz çarpım sıfırdan farklı ve mutlak yakınsaktır.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ ve $c > 0$ olmak üzere,

$$\log \eta \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \log \eta(\tau) + \pi i \left\{\frac{a+d}{12c} + s(-d, c)\right\} + \frac{1}{2}\log\{-i(c\tau + d)\}$$

dönüşümü Apostol tarafından gösterilmiştir.
Burada $s(-d, c)$ Dedekind toplamıdır.

Dedekind toplamı, $h, k \in \mathbf{Z}$, $k > 0$, $(h, k) = 1$ olmak üzere,

$$s(h,k) = \sum_{r Mod k} \left(\left(\frac{r}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{hr}{k}\right)\right)$$

eşitliği ile tanımlanır.

Θ_r, $(r = 2, 3, 4)$ fonksiyonları ile $\eta(\tau)$ fonksiyonu arasındaki bağıntılar,

$$\begin{aligned} \log \Theta_2(\tau) &= \log 2 + 2\log \eta(2\tau) - \log \eta(\tau) \\ \log \Theta_3(\tau) &= \frac{\pi i}{12} + 2\log \eta\left(\frac{\tau + 1}{2}\right) - \log \eta(\tau) \\ \log \Theta_4(\tau) &= 2\log \eta(\frac{\tau}{2}) - \log \eta(\tau) \end{aligned}$$

eşitlikleri ile verilir(Barner 1985).

Modular, Süreksiz, $G\left(\sqrt{\lambda_q}\right)$ Hecke grupları, $S\tau = \tau + \lambda_q$, $\lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, $q \in \mathbf{Z}$, $q \geq 3$ ve $T\tau = -1/\tau$ dönüşümleri ile üretilmektedir.

$q = 3$ için $S\tau = \tau + 1$ ve $T\tau = -1/\tau$ ile Γ modular grubunu elde ederiz.

Bu çalışmada ilk olarak,

$$\log \Theta_3\left(\tfrac{h+iz}{k}\right) = \log \Theta_3\left(\tfrac{h'+i/z}{k}\right) + \pi i(s(h,k) - 2s(h,2k)) - \tfrac{1}{2}\log z$$

$$\log \Theta_4\left(\tfrac{h+iz}{k}\right) = \log \Theta_4\left(\tfrac{h'+i/z}{k}\right) + \pi i(s(h,k) - 2s(h,2k)) - \tfrac{1}{2}\log z$$

$$\log \Theta_2\left(\tfrac{h+iz}{k}\right) = \log \Theta_2\left(\tfrac{h'+i/z}{k}\right) - \pi i\left(\tfrac{h'-h}{4k}\right) + \pi i(s(h,k) - 2s(h,k/2)) - \tfrac{1}{2}\log z$$

bağıntıları bulundu. Daha sonra $G(\sqrt{m})$, $m = 2, 3$ Hecke gruplarına karşı gelen sıfır boyutlu modular form için çarpımsal değerleri belirlemede sistematik bir metot gösterildi.

6.SUMMARY

A doubly-periodic function, which is meromorphic in the open z-plane is called an elliptic function.

The Theta functions can be represented in infinite product as

$$\begin{aligned}
\theta_2(z) &= 2q^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n})^2, \\
\theta_3(z) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1})^2, \\
\theta_4(z) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})^2
\end{aligned}$$

The set of all Möbiüs transformations of the form

$$\tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$$

where a, b, c, d are integers with $ad-bc=1$, is called the modular group and is denoted by Γ. The group can be represented by 2×2 integer matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ with $\det A = 1$. Γ is generated by two transformations, $T\tau = \tau+1$ and $S\tau = -\frac{1}{\tau}$.

A function $f(\tau)$ is said to be a modular form of degree $-r$ If it satisfies the following three conditions: a)$f(\tau)$ is meromorphic in the upper half-plane H.

b)$f(M\tau) = \epsilon(M)(c\tau+d)^r f(\tau)$ for every $M = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, $r \in \mathbf{R}$.

c)The Fourier expansion of $f(\tau)$ has the form

$$f(\tau) = \sum_{n=m}^{\infty} a(n)e^{2\pi niz}.$$

Dedekind Eta function is defined in the half-plane H by the equation

$$\eta(\tau) = e^{\frac{i\pi\tau}{12}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2\pi in\tau}\right)$$

The infinite product has the form $\prod(1-x^n)$ where $x = e^{2\pi i\tau}$.If $\tau \in H$ then $|x| < 1$ so the product converges absolutely and is nonzero.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ and $c > 0$ we have

$$\log \eta \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \log \eta(\tau) + \pi i \left\{\frac{a+d}{12c} + s(-d,c)\right\} + \frac{1}{2}\log\{-i(c\tau + d)\}$$

This trasformation is proved by Apostol. $s(-d,c)$ is called Dedekind sum.

Dedekind sums are defined by the equation

$$s(h,k) = \sum_{r Mod k} \left(\left(\frac{r}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{hr}{k}\right)\right)$$

where $h, k \in \mathbf{Z}$, $k > 0$, $(h,k) = 1$.

The following relations between Theta functions, Θ_r, $r = 2,3,4$ and $\eta(\tau)$ are satisfied.

$$\begin{aligned}
\log \Theta_2(\tau) &= \log 2 + 2\log \eta(2\tau) - \log \eta(\tau) \\
\log \Theta_3(\tau) &= \frac{\pi i}{12} + 2\log \eta\left(\frac{\tau+1}{2}\right) - \log \eta(\tau) \\
\log \Theta_4(\tau) &= 2\log \eta(\frac{\tau}{2}) - \log \eta(\tau)
\end{aligned}$$

These relations were proved by Barner (1985).

Hecke introduced the discontinuous groups $G\left(\sqrt{\lambda_q}\right)$ generated by the transformations $T\tau = -1/\tau$ and $S\tau = \tau + \lambda_q$ where $\lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, $q \in \mathbf{Z}$ and $q \geq 3$. The case $q = 3$ give rise to the classical modular group Γ generated by $S\tau = \tau + 1$ and $T\tau = -1/\tau$.

In this work we firstly proved the relations

$\log \Theta_3\left(\frac{h+iz}{k}\right) = \log \Theta_3\left(\frac{h'+i/z}{k}\right) + \pi i(s(h,k) - 2s(h,2k)) - \frac{1}{2}\log z$

$\log \Theta_4\left(\frac{h+iz}{k}\right) = \log \Theta_4\left(\frac{h'+i/z}{k}\right) + \pi i(s(h,k) - 2s(h,2k)) - \frac{1}{2}\log z$

$\log \Theta_2\left(\frac{h+iz}{k}\right) = \log \Theta_2\left(\frac{h'+i/z}{k}\right) - \pi i\left(\frac{h'-h}{4k}\right) + \pi i(s(h,k) - 2s(h,k/2)) - \frac{1}{2}\log z$

and then constructed a systematic method for finding multiplier systems corresponding to the forms zero for each of the Hecke groups $G(\sqrt{m})$, $m = 2,3$.

7.KAYNAKLAR

APOSTOL, T.M. 1976. Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory. Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin.

ASAI, T. 1986. Some Arithmetic on Dedekind Sums. J.Math.Soc., Vol.38, No.1, pp.163-172, Japan.

BARNER, K. 1985. Überdas Transformationsverhalten der Logarithmen der Thetanullverte unter Hyperbolischen Modulsubstitutionen. Mathematische Schriften Kassel.

DEBNATH, L. and DUTTA, M. 1965. Elements of the Theory of Elliptic and Associated Functions with Applications. Worl.Pres. Calcuta, India.

GROSSWALD, E. 1971. Dedekind-Rademacher Sums. Amer.Math.Mont., 78, pp.639-644.

GROSSWALD, E. and RADEMACHER, H. 1972. Dedekind Sums. The Mathematical Assocation of America.

KNOPP, I.M. 1960. Determination of Certain Roots of Unity in the theory of Automorpfic Forms of Dimension Zero. Duke Math.J., 27, pp.497-506.

KNOPP, I.M. 1970. Modular Functions in Analitic Number Theory. Madison, Winconsin.

KURT, V. 1995. On the Transformation of the $\log \Theta_3$-Function. Jour.Inst.Math. and Comp.Sci., Vol.8, no:3, pp.213-216.

RADEMACHER, H. and WHITEMAN, A. 1941. Theorems on Dedekind Sums.Amer. Math., 63, pp.377-407.

RADEMACHER, H. 1967. Über die Transformation der Logarithmen der Theta Funktionen. Mat.Ann., 168, pp.142-148.

RADEMACHER, H. 1974. On the Transformation of $\log \eta(\tau)$. The Massachutsetts Institute of Techonology Chelsa.

ROSEN, D. 1993. Multiplier Systems for the Hecke Groups $G(\sqrt{2})$ and $G(\sqrt{3})$. Contemporary Math., Vol.143, pp.539-543.

SMART, J.R. 1964. Parametrization of Automorphic Forms for Hecke Groups $G(\sqrt{2})$ and $G(\sqrt{3})$. Duke Math.J., 31, pp.395-404.

ÖZGEÇMİŞ

Simten BAYRAKÇI, 1974 yılında Uluborlu (Isparta)'da doğdu. İlk, orta, lise öğrenimini Antalya'da tamamladı. 1990 yılında girdiği Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden 1994 yılında mezun oldu. Ekim 1994-Haziran 1996 yılları arasında, Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Öğrenimini tamamladı.

1994 yılından beri Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.