ZAMAN SKALASINDA
DİNAMİK DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİNİN ASİMPTOTİK DAVRANIŞI

DOKTORA TEZİ

Başak KARPUZ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Özkan ÖCALAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ocak 2012

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

ZAMAN SKALASINDA DİNAMİK DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN ASİMPTOTİK DAVRANIŞI

Başak KARPUZ

Danışman
Doç. Dr. Özkan ÖCALAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ocak 2012

TEZ ONAY SAYFASI

Doç. Dr. Özkan ÖCALAN'ın danışmanlığında **Başak KARPUZ** tarafından hazırlanan "**Zaman Skalasında Dinamik Denklemlerin Çözümlerinin Asimptotik Davranışı**" başlıklı bu çalışma, lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 23/01/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı, SOYADI	İmza
Başkan	Prof. Dr. Murat ADIVAR	
Üye	Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM	
Üye	Doç. Dr. Özkan ÖCALAN	
Üye	Doç. Dr. Mustafa K. YILDIZ	
Üye	Yrd. Doç. Dr. Mehmet E. KİRİŞ	

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
07/02/2012 tarih ve
2012/004 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mevlüt DOĞAN
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

23.01.2012

Başak KARPUZ

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Doktora Tezi
ZAMAN SKALASINDA DİNAMİK DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİNİN ASİMPTOTİK DAVRANIŞI
Başak KARPUZ
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Özkan ÖCALAN

Bu tezde üstten sınırsız zaman skalaları üzerinde tanımlı dinamik denklemlerin çözümlerinin asimptotik davranışları çalışılmıştır. Tez beş bölümden oluşmaktadır. Tezin ilk bölümü giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde zaman skalası kavramı üzerine gerekli bilgiler verilmiştir. Üçüncü ve dördüncü bölümlerde sırasıyla

$$\big[x(t) + A(t)x(\alpha(t))\big]^{\Delta} + B(t)x(\beta(t)) - C(t)x(\gamma(t)) = \varphi(t), \quad t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$$

ve

$$\big[x(t) + A(t)x(\alpha(t))\big]^{\Delta^2} + B(t)x(\beta(t)) - C(t)x(\gamma(t)) = \varphi(t), \quad t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$$

biçimindeki denklemlerin hem sınırlı hem de sınırsız çözümleri incelenmiştir. Son bölümde ise ilk olarak

$$\big[x(t) + A(t)x(\alpha(t))\big]^{\Delta^n} + B(t)x(\beta(t)) - C(t)x(\gamma(t)) = \varphi(t), \quad t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}},$$

biçimindeki denklemlerin sınırlı çözümleri incelenmiştir, daha sonra da

$$\big[x(t) + A(t)x(\alpha(t))\big]^{\Delta^n} + B(t)x(\beta(t)) = \varphi(t), \quad t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}.$$

biçimindeki denklemlerin sınırsız çözümleri dikkate alınmıştır.

2012, x+74 sayfa

Anahtar Kelimeler: Zaman skalası, dinamik denklem, asimptotik davranış, salınım, salınımsızlık.

ABSTRACT

PhD Thesis

ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF SOLUTIONS OF DYNAMIC EQUATIONS ON TIME SCALES Başak KARPUZ

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Özkan ÖCALAN

In this thesis, asymptotic behaviour of solutions of dynamic equations on unbounded time scales is studied. The thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to introduction. In the second chapter, necessary information concerning the time scale concept is given. In the third and fourth chapters, we study both bounded and unbounded solutions of equations of the form

$$\big[x(t)+A(t)x(\alpha(t))\big]^{\Delta}+B(t)x(\beta(t))-C(t)x(\gamma(t))=\varphi(t),\quad t\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$$

and

$$\big[x(t)+A(t)x(\alpha(t))\big]^{\Delta^2}+B(t)x(\beta(t))-C(t)x(\gamma(t))=\varphi(t),\quad t\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}},$$

respectively. In the last chapter, we first study bounded solutions of equations of the form

$$\big[x(t)+A(t)x(\alpha(t))\big]^{\Delta^n}+B(t)x(\beta(t))-C(t)x(\gamma(t))=\varphi(t),\quad t\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}},$$

and then we confine our attention to unbounded solutions of equations of the form

$$\big[x(t)+A(t)x(\alpha(t))\big]^{\Delta^n}+B(t)x(\beta(t))=\varphi(t),\quad t\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}.$$

2012, x+74 pages

Key Words: Time scale, dynamic equation, asymptotic behaviour, oscillation, nonoscillation.

TEŞEKKÜR

Tüm eğitim ve öğretim hayatım boyunca bana destek olan ve matematik dünyasına ilk adımlarımı atmama sebep olan aileme sonsuz teşekkür ederim.

Bana, bu ilginç ve yeni konuyu tez çalışması olarak veren ve benim için çok değerli olan danışman hocam Doç. Dr. Özkan ÖCALAN'a tüm yardımlarından, öğretilerinden ve bilimsel çalışmalara başlamamda öncü olmasından dolayı ne kadar teşekkür etsem azdır.

Başak KARPUZ
AFYONKARAHİSAR, 2012

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
$\mathbb{T}$	Zaman Skalası
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}_0$	Negatif Olmayan Doğal Sayılar
$\overline{D}$	D Kümesinin Kapanışı
$.^{\Delta}$	Delta Türev

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

1 GİRİŞ

Gecikmeli diferensiyel ve fark denklemlerinin çözümlerinin asimptotik davranışlarını konu alan çalışmaların sayısı son yıllarda oldukça artmıştır. Bunun sebebi ise bu tür denklemlerin gerçek hayat problemlerinin modellemelerinde ortaya çıkmasıdır ve çok özel durumlar haricinde bu tür denklemlerin çözümlerinin açık bir şekilde ifade edilememesidir. Örneğin; fizik, biyoloji, ekoloji ve fizyoloji alanlarındaki çeşitli problemlerinin modellemesinde bu tür denklemlerle karşılaşılır (Kolmanovskii and Myshkis 1999).

Diferensiyel denklemlerin çözümlerinin kualitatif (nitel) davranışlarının incelenmesine bildiğimiz kadarıyla ilk olarak Charles François Sturm tarafından 1836 yılında başlandı (Sturm 1836). Sturm, kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin hesaplanması üzerinde çalışırken bazı şartlar altında ikinci mertebeden adi diferensiyel denklemlerin çözümleriyle kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümleri arasında ilişkiler olduğunu ispatlamıştır. Daha sonra Joseph Liouville ile birlikte çalışmalarını $A, B : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uygun fonksiyonlar olmak üzere

$$\big(A(t)x'(t)\big)' + B(t)x(t) = 0, \quad t \in [0, \infty)$$

biçimindeki ikinci mertebeden adi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin kualitatif davranışları üzerine yoğunlaştırmıştır ve böylece denklemin çözümünü elde etmeden doğrudan denklemin katsayılarına bağlı olarak çözümün özelliklerini elde etmeye çalışmışlardır. Bu çalışmalardan sonra Sturm ve Liouville'in çalışmaları yüksek mertebeden diferensiyel denklemlere genişletilmiştir (Amrein et al. 2005, Swanson 1968). Günümüzde ise birinci, ikinci ve daha yüksek mertebeden diferensiyel denklemlerin kualitatif davranışları çalışılmaktadır ve denklemlerin mertebesine göre çözümlerin davranışları ve ispat teknikleri farklılık göstermektedir. Örneğin, ikinci veya daha yüksek mertebeden gecikme terimi içermeyen diferensiyel denklemlerin çözümleri salınımlı olabilirken birinci mertebeden denklemler için gecikme teriminin yokluğunda çözümlerde salınım durumu kesinlikle söz konusu değildir. Bununla beraber, diferensiyel denklemlerin diskret (ayrık) özdeşleri olan fark denklemlerin çözümlerinin kualitatif davranışları da oldukça ilgi çeken bir alandır.

Anatoliĭ Dmitrievich Myshkis, 1972 yılında yaptığı çalışmada $A : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\alpha : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, her $t \in [0, \infty)$ için $\alpha(t) \leq t$ ve $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \infty$ olmak üzere

$$x'(t) + A(t)x(\alpha(t)) = 0, \quad t \in [0, \infty) \tag{1.0.1}$$

biçimindeki birinci mertebeden gecikmeli diferensiyel denklemin her çözümünün

$$\limsup_{t\to\infty}(t - \alpha(t)) < \infty \quad \text{ve} \quad \liminf_{t\to\infty}(t - \alpha(t)) \liminf_{t\to\infty} A(t) > \frac{1}{\mathrm{e}} \tag{1.0.2}$$

koşulları altında salındığını elde etmiştir (Myshkis 1972). (1.0.2) koşulu 1979 yılında Gerasimos Ladas tarafından daha zayıf olan

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{\alpha(t)}^{t} A(\eta)\mathrm{d}\eta > \frac{1}{\mathrm{e}} \tag{1.0.3}$$

şartı verilerek geliştirilmiştir (Ladas 1979). Daha sonra (1.0.3) koşulu da bazı yazarlar tarafından geliştirilmiştir (Li 1996, Li 1998, Tang and Shen 1998).

Bu çalışmalara paralel olarak, 1989 yılında Lynn Erbe ve Binggen Zhang, Δ ileri fark operatörü, $\{A(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ negatif terimli olmayan bir dizi ve $\alpha \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$\Delta x(n) + A(n)x(n - \alpha) = 0, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.0.4}$$

biçimindeki birinci mertebeden fark denklemini incelemişlerdir (Erbe and Zhang 1989). Erbe ve Zhang'ın elde ettiği sonuçlar Gerasimos Ladas, Christos Philos, Yiannis Sficas tarafından geliştirilmiş ve diferensiyel denklemler için Ladas'ın elde ettiği sonucun diskret özdeşi olan

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{k=n-\alpha}^{n-1} A(k) > \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1}\right)^{\alpha+1} \tag{1.0.5}$$

şartı altında (1.0.4) ile verilen denklemin her çözümün salındığı sonucu elde edilmiştir (Ladas et al. 1989). Daha sonra bir çok yazar tarafından (1.0.5) şartı da geliştirilmiştir (Tang and Yu 1999a, Tang and Yu 1999b).

Stefan Hilger, 1988 yılında yazdığı doktora tezinde, sürekli ve diskret analiz arasındaki birçok benzerliği açıkça ortaya koyarak *Zaman Skalası* teorisini geliştirdi (Hilger 1988).

Zaman skalası teorisi çatısı, diferensiyel denklemler ve fark denklemler teorilerini dinamik denklemler altında genelleştirmekte, sağladığı geniş bakış açısıyla analiz ve geometri gibi bir çok matematiksel alanda da gelişmelere olanak sağlamaktadır.

Basit bir ifadeyle, (1.0.1) ve (1.0.4) denklemleri arasındaki ilişki, bu denklemler için elde edilmiş salınımlılık şartları olan (1.0.3) ve (1.0.5) ifadelerinin sağ taraflarının

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

özelliğini sağlamasıyla belirtilebilir.

2003 yılında Binggen Zhang, (Ladas 1979) ve (Ladas et al. 1989) makalelerindeki sonuçları zaman skalası teorisi altında incelemiş ve $\mathbb{T}$ üstten sınırsız bir zaman skalası, $A:[0,\infty)_{\mathbb{T}}\to[0,\infty)$, $\alpha:[0,\infty)_{\mathbb{T}}\to\mathbb{T}$, her $t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $\alpha(t)\leq t$ ve $\lim_{t\to\infty}\alpha(t)=\infty$ olmak üzere

$$x^{\Delta}(t)+A(t)x(\alpha(t))=0,\quad t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}} \tag{1.0.6}$$

biçimindeki birinci mertebe dinamik denkleminin her çözümünün salınımlılığı için

$$\liminf_{t\to\infty}\inf_{\substack{\lambda>0\\ -\lambda A\in\mathcal{R}^{+}([\alpha(t),t)_{\mathbb{T}},\mathbb{R})}}\left\{\frac{1}{\lambda\,\mathrm{e}_{-\lambda A}(t,\alpha(t))}\right\}>1 \tag{1.0.7}$$

şartının yeterli olduğunu elde etmiştir (Zhang and Deng 2002). Burada, $\mathcal{R}^{+}([a,b)_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ ile tanımlı küme $[a,b)_{\mathbb{T}}$ üzerinde tanımlı ve reel değerli pozitif regresif fonksiyonların kümesini göstermektedir (Bohner and Peterson 2001). Açıkça, $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ve $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ olması durumunda, (1.0.6) denkleminin sırasıyla (1.0.1) ve (1.0.4) denklemlerine dönüşmesinin yanı sıra (1.0.7) koşulu da sırasıyla (1.0.3) ve (1.0.5) koşullarını içermektedir (Bohner 2005, Zhang and Deng 2002). Tahmin edileceği üzere (1.0.6) dinamik denklemi için verilmiş olan (1.0.7) şartı da bazı yazarlar tarafından geliştirilmiştir (Bohner et al. 2008, Zhang et al. 2005).

Zaman skalası teorisinin sağlamış olduğu kolaylıkların ve genelleştirmelerin yanı sıra diferensiyel denklemler ve fark denklemler teorilerinde elde edilmiş olan bazı sonuçların teknik hesaplamalarında ortaya çıkan sıkıntılardan dolayı zaman skalası teorisi altında şu ana kadar genelleştirilememiş olduğunu belirtmek gerekir. İkinci mertebe diferensiyel ve fark denklemler teorilerindeki salınım sonuçlarının zaman skalası teorisi altında ikinci mertebeden dinamik denklemlere genelleştirilmelerinin birinci mertebeyle kıyaslandığında daha çok elverişli olduğunu görmek mümkündür. Ayrıca, yüksek mertebe diferensiyel ve fark denklemlerin çözümlerinin davranışları üzerine birçok sonuç elde edilmiş olmasına rağmen henüz yüksek mertebeden dinamik denklemlerin çözümlerinin davranışlarıyla ilgili bilgi veren sonuç yok denecek kadar azdır.

2 TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Zaman Skalası

Tanım 2.1.1 (Zaman skalası)**:** Reel sayıların boştan farklı ve kapalı olan alt kümelerine *zaman skalası* (time scale) denir ve $\mathbb{T}$ ile gösterilir (Bohner and Peterson 2001).

$a, b \in \mathbb{T}$ için $[a, b]_{\mathbb{T}} := [a, b] \cap \mathbb{T}$ ile tanımlansım. Daha genel olarak, bir aralığın alt indisinde $\mathbb{T}$ simgesi varsa belirtilen aralığın zaman skalası ile arakesitinin kastedildiğini anlayacağız.

Örnek 2.1.2: Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$, $[0, 1]_{\mathbb{R}}$ kapalı aralığı, Cantor kümesi, tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$, quantum sayılar kümesi $\overline{q^{\mathbb{Z}}} := \{q^n : \ n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ $(q \in (1, \infty)_{\mathbb{R}})$ ve ayrık kapalı aralıklar kümesi $\mathbb{P}_{a,b} := \cup_{\ell \in \mathbb{Z}}[(a+b)\ell, (a+b)\ell+b]_{\mathbb{R}}$ $(a, b \in (0, \infty)_{\mathbb{R}})$ en çok bilinen zaman skalalarına birer örnektir.

Tanım 2.1.3: $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere

$$\sigma(t) := \inf(t, \infty)_{\mathbb{T}} \quad \text{ve} \quad \rho(t) := \sup(-\infty, t)_{\mathbb{T}}$$

ile tanımlanan operatörlere sırasıyla *ileri sıçrama* (forward jump) ve *geri sıçrama* (backward jump) operatörleri denir. Bu tanımda uygunluk için

$$\inf \emptyset := \sup \mathbb{T} \quad \text{ve} \quad \sup \emptyset := \inf \mathbb{T}$$

ile tanımlanmıştır. İleri sıçrama operatöründen elde edilen *adım boyu fonksiyonu* (graininess)

$$\mu(t) := \sigma(t) - t \geq 0$$

ve ileride üzerinde türev tanımlanacak olan $\mathbb{T}^\kappa$ kümesi

$$\mathbb{T}^\kappa := \begin{cases} \mathbb{T} \backslash \{\sup \mathbb{T}\}, & \sup \mathbb{T} < \infty \text{ ve } \rho(\sup \mathbb{T}) < \sup \mathbb{T} \\ \mathbb{T}, & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

ile tanımlanmıştır (Bohner and Peterson 2001).

Tanım 2.1.3'de verilen ileri sıçrama, geri sıçrama ve adım boyu fonksiyonlarının bilinen bazı zaman skalaları üzerinde açık gösterimleri Çizelge 2.1.1'de verilmiştir.

Çizelge 2.1.1: Bazı zaman skalalarına ait karakteristik fonksiyonlar.

$\mathbb{T}$	$\mathbb{R}$	$h\mathbb{Z}$, $(h \in (0,\infty)_{\mathbb{R}})$	$\overline{q^{\mathbb{Z}}}$, $(q \in (1,\infty)_{\mathbb{R}})$
$\sigma(t)$	t	$t+h$	qt
$\rho(t)$	t	$t-h$	t/q
$\mu(t)$	0	h	$(q-1)t$

Tanım 2.1.4: Tanım 2.1.3'e göre zaman skalasının elemanları aşağıdaki gibi sınıflandırılır.

(i) $\sigma(t) = t$ ise $t \in \mathbb{T}$ elemanına *sağ-yoğun* (right-dense) denir.

(ii) $\sigma(t) > t$ ise $t \in \mathbb{T}$ elemanına *sağ-saçılmış* (right-scattered) denir.

(iii) $\rho(t) = t$ ise $t \in \mathbb{T}$ elemanına *sol-yoğun* (left-dense) denir.

(iv) $\rho(t) < t$ ise $t \in \mathbb{T}$ elemanına *sol-saçılmış* (left-scattered) denir (Bohner and Peterson 2001).

2.2 Delta Türev

Tanım 2.2.1 (Delta türev)**:** Kabul edelim ki $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $t \in \mathbb{T}^k$ noktası verilmiş olsun. Bir $\ell \in \mathbb{R}$ ve her $\varepsilon \in (0,\infty)_{\mathbb{R}}$ için

$$\left|[f(\sigma(t)) - f(s)] - \ell[\sigma(t) - s]\right| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s| \quad \text{her } s \in (t-\delta, t+\delta)_{\mathbb{T}}$$

sağlanacak şekilde bir $\delta \in (0,\infty)_{\mathbb{R}}$ sayısı bulunabilirse ℓ değerine f fonksiyonunun t noktasındaki Δ-*türevi* (Δ-derivative) veya *Hilger türevi* denir ve $f^{\Delta}(t)$ ile gösterilir. Her bir $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ noktası için $f^{\Delta}(t)$ varsa $f^{\Delta} : \mathbb{T}^{\kappa} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna f fonksiyonunun türev fonksiyonu denir (Bohner and Peterson 2001).

Tezde aksi belirtilmedikçe türev terimi ile Δ-türev kastedilecektir.

Teorem 2.2.2: *Kabul edelim ki $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler geçerlidir.*

(i) f *fonksiyonu* t *noktasında türeve sahipse* f *fonksiyonu* t *noktasında süreklidir.*

(ii) f *fonksiyonu* t *noktasında sürekli ve* t *sağ-saçılmış ise*

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

dir.

(iii) t *sağ-yoğun olmak üzere* f *fonksiyonu* t *noktasında türeve sahiptir ancak ve ancak*

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limiti mevcuttur. Bu durumda,

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

dir.

(iv) f *fonksiyonu* t *noktasında türeve sahip olsun. Bu durumda,*

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t)$$

eşitliği geçerlidir (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.2.2 ve Çizelge 2.1.1 kullanılarak Δ-türevin bilinen bazı zaman skalalarındaki açık gösterimleri Çizelge 2.2.1'deki gibi hesaplanabilir.

Çizelge 2.2.1: Bazı zaman skalalarında Δ-türev.

$\mathbb{T}$	$\mathbb{R}$	$h\mathbb{Z}$, $(h \in (0,\infty)_{\mathbb{R}})$	$\overline{q^{\mathbb{Z}}}$, $(q \in (1,\infty)_{\mathbb{R}})$
$f^{\Delta}(t)$	$f'(t)$	$\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$	$\lim_{s \to t} \frac{f(qs)-f(s)}{(q-1)s}$

Teorem 2.2.3: *Kabul edelim ki* $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonları* $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ *noktasında türeve sahip olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler geçerlidir.*

(i) $f + g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *toplamının* t *noktasındaki türevi*

$$(f + g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)$$

ile belirlidir.

(ii) $fg : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *çarpımının* t *noktasındaki türevi*

$$(fg)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)$$

ile verilir. Burada, $fg = gf$ *olduğuna da dikkat edilmelidir.*

(iii) $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$ *olmak üzere* $1/f$ *fonksiyonu* t *noktasında türeve sahiptir ve*

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = -\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}$$

dir (Bohner and Peterson 2001).

2.3 Delta İntegral

Tanım 2.3.1 (Düzgün fonksiyon)**:** Bir $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun tüm sağ-yoğun noktalardaki sağdan limitleri sonlu olarak var ve sol-yoğun noktalardaki soldan limitleri sonlu olarak varsa f fonksiyonuna *düzgün* (regulated) denir (Bohner and Peterson 2001).

Tanım 2.3.2 (Rd-sürekli fonksiyon)**:** Bir $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tüm sağ-yoğun noktalarda sürekli ve tüm sol-yoğun noktalarda soldan sonlu limitlere sahipse f fonksiyonuna *rd-sürekli* (right-dense continuous) denir. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ şeklindeki rd-sürekli fonksiyonların kümesi $\mathrm{C_{rd}}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ile gösterilir. Buna ek olarak, $\mathrm{C^1_{rd}}(\mathbb{T}, \mathbb{R}) := \{f \in \mathrm{C}(\mathbb{T}, \mathbb{R}) : \ f^{\Delta} \in \mathrm{C_{rd}}(\mathbb{T}, \mathbb{R})\}$ ile tanımlanır (Bohner and Peterson 2001).

Tanım 2.3.3 (Ön-türevlenebilir fonksiyon)**:** Bir $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin ve bir $D \subset \mathbb{T}^{\kappa}$ bölgesi için aşağıdaki şartlar sağlansın.

(i) f fonksiyonu D bölgesindeki tüm noktalarda türevlenebilirdir.

(ii) $\mathbb{T}^{\kappa} \backslash D$ bölgesi sağ-saçılmış nokta içermeyen sayılabilir bir kümedir.

Bu durumda, f fonksiyonuna D bölgesinde *ön-türevlenebilir* (pre-differentiable) denir (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.3.4 (Ön-antitürevlerin varlığı)**:** *Kabul edelim ki* f *fonksiyonu düzgün olsun. Bu durumda, her* $t \in D$ *için* $F^{\Delta}(t) = f(t)$ *sağlanacak şekilde bir* $D \subset \mathbb{T}$ *bölgesi ve bu bölgede ön-türevlenebilir* F *fonksiyonu vardır (Bohner and Peterson 2001).*

Tanım 2.3.5: Kabul edelim ki $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu düzgün olsun. Bu durumda, Teorem 2.3.4'te belirtilen şartları sağlayan her F fonksiyonuna f fonksiyonunun *ön-antitürevi* (pre-antiderivative) denir. c keyfi bir sabit olmak üzere

$$\int f(\eta)\Delta\eta = F(t) + c$$

ifadesine düzgün f fonksiyonunun *belirsiz integrali* (indefinite integral) denir. f fonksiyonunun *Cauchy integrali* (Cauchy integral) ise

$$\int_s^t f(\eta)\Delta\eta = F(t) - F(s), \quad s, t \in \mathbb{T}$$

ile tanımlıdır (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.3.6 (Antitürevlerin varlığı)**:** *Her rd-sürekli fonksiyonun antitürevi vardır. Özel olarak, sabit bir $a \in \mathbb{T}$ ve $t \in \mathbb{T}$ için*

$$F(t) := \int_a^t f(\eta)\Delta\eta$$

ile tanımlı fonksiyon f fonksiyonunun antitürevidir (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.3.7: *Kabul edelim ki $f \in \mathrm{C}_{\mathrm{rd}}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ve $t \in \mathbb{T}^\kappa$ olsun. Bu durumda,*

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\eta)\Delta\eta = \mu(t)f(t)$$

sağlanır (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.3.8: *Kabul edelim ki $f^\Delta \geq 0$ olsun. Bu durumda, f fonksiyonu azalmayandır (Bohner and Peterson 2001).*

Teorem 2.3.9: *Kabul edelim ki $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in \mathrm{C}_{\mathrm{rd}}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler geçerlidir.*

(i) $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(\eta)\Delta\eta = \alpha \int_s^t f(\eta)\Delta\eta + \beta \int_a^b g(\eta)\Delta\eta.$

(ii) $\int_a^b f(\eta)\Delta\eta = -\int_b^a f(\eta)\Delta\eta.$

(iii) $\int_a^b f(\eta)\Delta\eta = \int_a^c f(\eta)\Delta\eta + \int_c^b f(\eta)\Delta\eta.$

(iv) $\int_a^b f(\sigma(\eta))g^{\Delta}(\eta)\Delta\eta = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(\eta)g(\eta)\Delta\eta$ *(Bohner and Peterson 2001).*

Teorem 2.3.10: *Kabul edelim ki* $a, b \in \mathbb{T}$ *ve* $f \in \mathrm{C_{rd}}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ *olsun. Bu durumda, aşağıdaki özellikler geçerlidir.*

(i) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *ise*

$$\int_a^b f(\eta)\Delta\eta = \int_a^b f(\eta)\mathrm{d}\eta$$

dir.

(ii) $\mathbb{T}$ *sadece izole (hem sağ hem de sol saçılmış) noktalardan oluşuyorsa*

$$\int_a^b f(\eta)\Delta\eta = \sum_{\eta \in [a,b)_{\mathbb{T}}} f(\eta)\mu(\eta)$$

dir (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.3.10 ve Çizelge 2.1.1 kullanılarak Δ-integralin bilinen bazı zaman skalaları üzerindeki açık gösterimleri Çizelge 2.3.1'deki gibi hesaplanabilir.

Çizelge 2.3.1: Bazı zaman skalalarında Δ-integral.

$\mathbb{T}$	$\mathbb{R}$	$h\mathbb{Z}$, $(h \in (0,\infty)_{\mathbb{R}})$	$\overline{q^{\mathbb{Z}}}$, $(q \in (1,\infty)_{\mathbb{R}})$
$\int_a^b f(\eta)\Delta\eta$	$\int_a^b f(\eta)\mathrm{d}\eta$	$h\sum_{\eta=a/h}^{b/h-1} f(h\eta)$	$(q-1)\sum_{\eta=\log_q(a)}^{\log_q(b)-1} f(q^{\eta})q^{\eta}$

Tanım 2.3.11: Kabul edelim ki $\sup \mathbb{T} = \infty$, $a \in \mathbb{T}$ ve $f \in \mathrm{C_{rd}}([a,\infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ olsun. Bu durumda, $[a,\infty)_{\mathbb{T}}$ üzerindeki *has olmayan integral* (improper integral)

$$\int_a^{\infty} f(\eta)\Delta\eta := \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(\eta)\Delta\eta$$

ile tanımlıdır. Limit varsa has olmayan integral *yakınsaktır*. Aksi durumda da *ıraksaktır* denir (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.3.12 (Zincir kuralı)**:** *Kabul edelim ki $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ kesin artan bir fonksiyon ve $\tilde{\mathbb{T}} := f(\mathbb{T})$ bir zaman skalası olsun. $g \in \mathrm{C_{rd}}(\tilde{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ olmak üzere her $t \in \mathbb{T}^\kappa$ için $f^\Delta(t)$ ve $(g^{\tilde{\Delta}} \circ f)(t)$ varsa*

$$(g \circ f)^\Delta = (g^{\tilde{\Delta}} \circ f) f^\Delta$$

olur (Bohner and Peterson 2001).

Sonuç 2.3.13: *Özel olarak, $\tilde{\mathbb{T}} = \mathbb{T}$ ise*

$$(g \circ f)^\Delta = (g^\Delta \circ f) f^\Delta$$

olur.

Teorem 2.3.14 (Değişken değiştirme)**:** *Kabul edelim ki $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ kesin artan bir fonksiyon ve $\tilde{\mathbb{T}} := f(\mathbb{T})$ bir zaman skalası olsun. $g \in \mathrm{C_{rd}}(\tilde{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ ve $f \in \mathrm{C^1_{rd}}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ olmak üzere $a, b \in \mathbb{T}$ için*

$$\int_a^b g(f(\eta)) f^\Delta(\eta) \Delta\eta = \int_{f(a)}^{f(b)} g(\zeta) \tilde{\Delta}\zeta$$

dir (Bohner and Peterson 2001).

Sonuç 2.3.15: *Teorem 2.3.14'teki şartlar altında $\tilde{\mathbb{T}} = \mathbb{T}$ sağlanırsa*

$$\int_a^b g(f(\eta)) f^\Delta(\eta) \Delta\eta = \int_{f(a)}^{f(b)} g(\eta) \Delta\eta$$

dir.

Tanım 2.3.16 (Polinomlar)**:** $n \in \mathbb{N}_0$ ve $s, t \in \mathbb{T}$ olmak üzere $h_n : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$h_n(t, s) := \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \displaystyle\int_s^t h_{n-1}(\eta, s) \Delta\eta, & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ile tanımlanır ve n*. mertebeden genelleştirilmiş polinom* olarak adlandırılır (Bohner and Peterson 2001).

Tanım 2.3.16'da verilen genelleştirilmiş polinomların bazı zaman skalalarındaki açık gösterimleri Çizelge 2.3.2'de verilmiştir.

Çizelge 2.3.2'de $\underline{\cdot}$ ile azalan faktöriyel fonksiyonu gösterilmiştir. Yani, $n \in \mathbb{N}_0$ ve $z \in \mathbb{C}$ için $z^{\underline{n}} := z(z-1)\cdots(z-n+1)$ ile tanımlıdır.

Çizelge 2.3.2: Bazı zaman skalalarında genelleştirilmiş polinomlar.

$\mathbb{T}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$	$\overline{q^{\mathbb{Z}}}$, $(q \in (1,\infty)_{\mathbb{R}})$
$h_n(t,s)$	$\dfrac{(t-s)^n}{n!}$	$\dfrac{(t-s)^{\underline{n}}}{n!}$	$\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1} \frac{t-q^j s}{\sum_{i=0}^{j} q^i}$

Teorem 2.3.17 (Taylor formülü)**:** *Kabul edelim ki $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathrm{C}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{rd}}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ ve $a \in \mathbb{T}^{\kappa^{n-1}}$ olsun. Her $t \in \mathbb{T}$ için*

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} f^{\Delta^j}(a)h_j(t,a) + \int_a^t h_{n-1}(t,\sigma(\eta))f^{\Delta^n}(\eta)\Delta\eta$$

sağlanır (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.3.18 (Lebesgue'nin baskın yakınsaklık teoremi)**:** $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}_{\mathrm{rd}}(\mathbb{T},\mathbb{R})$, *$f \in \mathrm{C}_{\mathrm{rd}}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ ve $a,b \in \mathbb{T}$ olmak üzere her $t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$ için $\lim_{k\to\infty} f_k(t) = f(t)$ olsun. Bu durumda,*

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(\eta)\Delta\eta = \int_a^b f(\eta)\Delta\eta$$

sağlanır (Guseinov 2003, Teorem 3.11).

2.4 Zaman Skalasına İlişkin Bazı Yardımcı Sonuçlar

Bu bölümde, sonraki bölümlerin ispatlarında kullanılacak olan zaman skalasına ait bazı önemli sonuçlar verilmiştir.

Özellik 2.4.1: Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $s,t \in \mathbb{T}$ için $(\mathrm{sgn}(t-s))^n h_n(t,s) \geq 0$ sağlanır.

İspat: Açıkça, her $s,t \in \mathbb{T}$ için $h_1(t,s) = t-s$ olduğundan özellik $n=1$ için sağlanır. Kabul edelim ki bir $n \in \mathbb{N}$ için ifade doğru olsun. Tanım 2.3.16'dan her $s,t \in \mathbb{T}$ için

$$\begin{aligned}(\mathrm{sgn}(t-s))^{n+1}h_{n+1}(t,s) =& (\mathrm{sgn}(t-s))^{n+1}\int_s^t h_n(\eta,s)\Delta\eta \\ =& \,\mathrm{sgn}(t-s)\int_s^t (\mathrm{sgn}(\eta-s))^n h_n(\eta,s)\Delta\eta \geq 0\end{aligned}$$

olup eşitsizlik $(n+1)$ içinde doğrudur. Tüme varım ilkesiden ispat tamamlanır. □

Lemma 2.4.2: Kabul edelim ki $n \in \mathbb{N}$ ve $f \in \mathrm{C_{rd}}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ olsun. Bu durumda, aşağıdakiler geçerlidir.

(i) $a \in \mathbb{T}^{\kappa^{n-1}}$ ve $b \in \mathbb{T}$ olmak üzere

$$\int_a^b \int_a^{\eta_n} \cdots \int_a^{\eta_2} f(\eta_1)\Delta\eta_1\Delta\eta_2 \cdots \Delta\eta_n = \int_a^b h_{n-1}(b, \sigma(\eta)) f(\eta)\Delta\eta.$$

(ii) $a \in \mathbb{T}$ ve $b \in \mathbb{T}^{\kappa^{n-1}}$ olmak üzere

$$\int_a^b \int_{\eta_n}^b \cdots \int_{\eta_2}^b f(\eta_1)\Delta\eta_1\Delta\eta_2 \cdots \Delta\eta_n = (-1)^{n-1} \int_a^b h_{n-1}(a, \sigma(\eta)) f(\eta)\Delta\eta.$$

İspat: (i) $g \in \mathrm{C^n_{rd}}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ fonksiyonunu

$$g(t) := \int_a^t \int_a^{\eta_n} \cdots \int_a^{\eta_2} f(\eta_1)\Delta\eta_1\Delta\eta_2 \cdots \Delta\eta_n, \quad t \in \mathbb{T}$$

olarak tanımlarsak her $j \in [0, n)_{\mathbb{N}_0}$ için $g^{\Delta^j}(a) = 0$ ve her $t \in \mathbb{T}^{\kappa^n}$ için $g^{\Delta^n}(t) = f(t)$ olduğu görülür. Böylece Taylor formülünden

$$g(t) = \int_a^t h_{n-1}(t, \sigma(\eta)) f(\eta)\Delta\eta, \quad t \in \mathbb{T}$$

olup $g(b)$ istenilen eşitliği verir.

(ii) $h \in \mathrm{C^n_{rd}}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ fonksiyonunu

$$h(t) := \int_t^b \int_{\eta_n}^b \cdots \int_{\eta_2}^b f(\eta_1)\Delta\eta_1\Delta\eta_2 \cdots \Delta\eta_n, \quad t \in \mathbb{T}$$

olarak tanımlayalım. Her $j \in [0, n)_{\mathbb{N}_0}$ için $h^{\Delta^j}(b) = 0$ ve her $t \in \mathbb{T}^{\kappa^n}$ için $h^{\Delta^n}(t) = (-1)^n f(t)$ olduğu görülür. Taylor formülü kullanılırsa

$$h(t) = (-1)^n \int_b^t h_{n-1}(t, \sigma(\eta)) f(\eta)\Delta\eta, \quad t \in \mathbb{T}$$

olduğu sonucuna ulaşılır. Son olarak $h(a)$ ifadesine Teorem 2.3.9 (ii) uygulanırsa istenilen eşitlik elde edilir.

$\square$

Sonuç 2.4.3: *Kabul edelim ki $n \in \mathbb{N}$ ve $f \in \mathrm{C_{rd}}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ olsun. Bu durumda, aşağıdakiler geçerlidir.*

(i) $a \in \mathbb{T}^{\kappa^n}$ *ve* $b \in \mathbb{T}$ *olmak üzere*

$$\int_a^b \int_a^\eta h_{n-1}(\eta, \sigma(\zeta)) f(\zeta) \Delta\zeta \Delta\eta = \int_a^b h_n(b, \sigma(\eta)) f(\eta) \Delta\eta.$$

(ii) $a \in \mathbb{T}$ *ve* $b \in \mathbb{T}^{\kappa^n}$ *olmak üzere*

$$\int_a^b \int_\eta^b h_{n-1}(\eta, \sigma(\zeta)) f(\zeta) \Delta\zeta \Delta\eta = -\int_a^b h_n(a, \sigma(\eta)) f(\eta) \Delta\eta.$$

Lemma 2.4.4: Kabul edelim ki $n \in \mathbb{N}_0$, $\sup \mathbb{T} = \infty$, $f \in \mathrm{C_{rd}}(\mathbb{T}, [0, \infty)_{\mathbb{R}})$ ve $a \in \mathbb{T}$ olsun. Bu durumda, aşağıdakiler geçerlidir.

(i) $(-1)^n \int_a^\infty h_n(a, \sigma(\eta)) f(\eta) \Delta\eta < \infty$ ise her $t \in \mathbb{T}$ için $(-1)^n \int_t^\infty h_n(t, \sigma(\eta)) f(\eta) \Delta\eta < \infty$ olur.

(ii) $(-1)^n \int_a^\infty h_n(a, \sigma(\eta)) f(\eta) \Delta\eta = \infty$ ise her $t \in \mathbb{T}$ için $(-1)^n \int_t^\infty h_n(t, \sigma(\eta)) f(\eta) \Delta\eta = \infty$ olur (Karpuz 2009b, Lemma 2).

İspat: (i) Verilen ifade $n = 0$ için aşikar olarak sağlanır. Kabul edelim ki bir $n \in \mathbb{N}$ için de doğru olsun. Özellik 2.4.1 dikkate alınarak $g_{n+1} \in \mathrm{C_{rd}^{n+1}}(\mathbb{T}, [0, \infty)_{\mathbb{R}})$ fonsiyonunu

$$g_{n+1}(t) := (-1)^{n+1} \int_t^\infty h_{n+1}(t, \sigma(\eta)) f(\eta) \Delta\eta, \quad t \in \mathbb{T} \tag{2.4.1}$$

ile tanımlayalım. Sonuç 2.4.3 (ii)'den

$$g_{n+1}(t) = \int_t^\infty g_n(\eta) \Delta\eta, \quad t \in \mathbb{T} \tag{2.4.2}$$

yazılabilir. Özellik 2.4.1 ve Sonuç 2.4.3 (ii)'den

$$g_{n+1}^\Delta(t) = -g_n(t) < 0, \quad t \in \mathbb{T}$$

olup g_{n+1} azalandır. Böylece g_{n+1} fonksiyonu $[a, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde iyi tanımlıdır. Yani, her $t \in [a, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $g_{n+1}(t)$ sonludur. Diğer taraftan;

$$g_{n+1}(t) = \int_t^a g_n(\eta) \Delta\eta + g_{n+1}(a), \quad t \in \mathbb{T}$$

şeklinde yazılabildiğinden her $t \in \mathbb{T}$ için $g_{n+1}(t)$ sonludur. Böylece iddia $(n+1)$ için de doğru olup tüme varım ilkesinden ispat tamamlanır.

(ii) Bu durum, (i) kısmının bir sonucudur.

$\square$

Lemma 2.4.5: Kabul edelim ki $\sup \mathbb{T} = \infty$, $n \in \mathbb{N}$ ve $f \in \mathrm{C}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{rd}}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ olsun. Bu durumda, aşağıdakiler doğrudur.

(i) $\liminf_{t\to\infty} f^{\Delta^n}(t) > 0$ ise her $j \in [0,n)_{\mathbb{Z}}$ için $\lim_{t\to\infty} f^{\Delta^j}(t) = \infty$ olur.

(ii) $\limsup_{t\to\infty} f^{\Delta^n}(t) < 0$ ise her $j \in [0,n)_{\mathbb{Z}}$ için $\lim_{t\to\infty} f^{\Delta^j}(t) = -\infty$ olur (Agarwal and Bohner 1999, Lemma 5).

Lemma 2.4.6: Kabul edelim ki $\sup \mathbb{T} = \infty$, $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in \mathrm{C}_{\mathrm{rd}}(\mathbb{T}, [0,\infty)_{\mathbb{R}})$ ve $a \in \mathbb{T}$ olsun. Bu durumda,

$$(-1)^n \int_a^\infty h_n(a, \sigma(\eta)) f(\eta) \Delta\eta < \infty$$

eşitsizliği aşağıdakileri gerektirir.

(i) Her $t \in \mathbb{T}$ ve her $j \in [0,n]_{\mathbb{Z}}$ için $(-1)^j \int_t^\infty h_j(t, \sigma(\eta)) f(\eta) \Delta\eta$ azalandır.

(ii) Her $j \in [0,n]_{\mathbb{Z}}$ için $\lim_{t\to\infty} \int_t^\infty h_j(t, \sigma(\eta)) f(\eta) \Delta\eta = 0$ olur.

(iii) Her $j \in [0,n)_{\mathbb{Z}}$ için $(-1)^j \int_a^\infty h_j(a, \sigma(\eta)) f(\eta) \Delta\eta < \infty$ sağlanır (Karpuz 2009b, Lemma 2.3).

İspat: İddia $n = 0$ için açıktır. Kabul edelim ki bir $n \in \mathbb{N}$ için de iddia doğru olsun ve $g_{n+1} \in \mathrm{C}^{\mathrm{n+1}}_{\mathrm{rd}}(\mathbb{T}, [0,\infty)_{\mathbb{R}})$ fonsiyonunu (2.4.1) ile tanımlayalım. İspatı tamamlamak için (i) ve (ii) iddialarının da $(n+1)$ için doğru olduğunu göstermek yeterlidir; çünkü $j \in [0,n]_{\mathbb{N}}$ için (i) sağlandığından (iii)'nin doğruluğu Lemma 2.4.4 (i)'den elde edilir. Yani, g_{n+1} fonksiyonunun azalan olduğunu ve $\lim_{t\to\infty} g_{n+1}(t) = 0$ sağlandığını göstermeliyiz.

(i) Lemma 2.4.4 (i)'in ispatındaki gibi g_{n+1} fonksiyonunun azalan olduğu ispatlanabilir.

(ii) Kabul edelim ki $\lim_{t\to\infty} g_{n+1}(t) \neq 0$ olsun. Özellik 2.4.1 ve (i)'den g_{n+1} fonksiyonu pozitif ve azalan olur. Bu durumda, $\lim_{t\to\infty} g_{n+1}(t) > 0$ olmalıdır; ancak Lemma 2.4.5 (i)'den $\lim_{t\to\infty} g_n(t) = \infty$ olduğunu öğreniriz. Bu ise (i) ile çelişir ve ispatı tamamlar.

□

Lemma 2.4.7 (Kiguradze'nin lemması)**:** Kabul edelim ki $\sup \mathbb{T} = \infty$, $n \in \mathbb{N}$ ve $f \in \mathrm{C}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{rd}}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ olsun. Buna ek olarak, $s \in \mathbb{T}$ olmak üzere f fonksiyonu $[s, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde pozitif ve f^{Δ^n} fonksiyonu $[s, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde negatif olmayan veya pozitif olmayan olsun. Bu durumda, aşağıdakiler sağlanacak şekilde $r \in [s, \infty)_{\mathbb{T}}$ ve $m \in \mathbb{N}_0$ vardır.

(i) $[s, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $(-1)^{n-m} f^{\Delta^n} \geq 0$ sağlanır.

(ii) $[r, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde her $j \in [0, m)_{\mathbb{Z}}$ için $f^{\Delta^j} > 0$ sağlanır.

(iii) $[r, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde her $j \in [m, n)_{\mathbb{Z}}$ için $(-1)^{j-m} f^{\Delta^j} > 0$ sağlanır (Agarwal and Bohner 1999, Teorem 5).

2.5 Bazı Analiz Kavramları

Bu bölüm, ilerideki bölümlerde kullanılacak ispatlar için gerekli fonksiyonel analiz bilgilerine ayrılmıştır.

Tanım 2.5.1 (Konveks küme)**:** X vektör uzayının bir alt kümesi A olsun. Her $x, y \in A$ ve her $\lambda \in (0, 1)_{\mathbb{R}}$ için $\lambda x + (1 - \lambda) y \in A$ oluyorsa A kümesine *konveks* denir (Şuhubi 2003, Sayfa 77).

Tanım 2.5.2 (Sınırlı küme)**:** (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun, $\sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$ ile tanımlı değer sonlu ise A kümesine *sınırlı*, aksi durumda ise *sınırsız* denir (Şuhubi 2003, Sayfa 265).

Tanım 2.5.3 (Kompakt ve göreceli kompakt küme)**:** X metrik uzayındaki her dizinin X içinde yakınsak bir alt dizisi varsa X uzayına *kompakt* (compact) denir. X metrik uzayının bir alt uzayı A olsun. A içindeki her dizi X içinde yakınsak bir altdiziye sahipse A uzayına *göreceli kompakt* (relatively compact) denir (Şuhubi 2003, Sayfa 244).

Uyarı 2.5.4: Kompakt uzayın kapalı her alt kümesi kompakt olduğundan kompakt kümelerin her alt kümesi göreceli kompakttır.

Tanım 2.5.5 (Büzülme dönüşümü)**:** (X, d) bir metrik uzay olsun ve $\Gamma : X \to X$ dönüşümü verilsin. Her $x, y \in X$ için $d(\Gamma x, \Gamma y) \leq \lambda d(x, y)$ olacak şekilde $\lambda \in (0, 1)_{\mathbb{R}}$ sabiti varsa Γ dönüşümüne *büzülme* denir (Şuhubi 2003, Sayfa 312).

Tanım 2.5.6 (Eşsüreklilik)**:** $(X, d), (Y, \rho)$ iki metrik uzay ve X uzayından Y uzayına tanımlı fonksiyonların bir ailesi $\mathcal{F}$ olsun. Bir $\varepsilon \in (0, \infty)_{\mathbb{R}}$ verildiğinde her $f \in \mathcal{F}$ ve her $x, y \in X$ için $d(x, y) < \delta$ olduğunda $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$ olacak şekilde (sadece ε değerine bağlı) $\delta \in (0, \infty)_{\mathbb{R}}$ varsa $\mathcal{F}$ ailesine *eşsürekli* (equicontinuous) denir (Şuhubi 2003, Sayfa 327).

Tanım 2.5.7 (Düzgün sınırlılık)**:** (Y, d) bir metrik uzay ve bir X kümesinden Y uzayına tanımlı fonksiyonların bir ailesi $\mathcal{F}$ olsun. Her $f \in \mathcal{F}$ ve her $x \in X$ için $d(f(x), y) \leq M$ olacak şekilde bir $M \in (0, \infty)_{\mathbb{R}}$ ve $y \in Y$ varsa $\mathcal{F}$ ailesine *düzgün sınırlı* (uniformly bounded) denir (Şuhubi 2003, Sayfa 329).

Tanım 2.5.8 (Kompakt dönüşüm)**:** X ve Y iki normlu uzay olsun ve $\Gamma : X \to Y$ dönüşümü verilsin. Her sınırlı $A \subset X$ için ΓA göreceli kompakt ise Γ dönüşümüne *kompakt* denir (Şuhubi 2003, Sayfa 312).

Aşağıdaki teorem, Ascoli-Arzelá teoreminin zaman skalasına genişletilmiş halidir.

Teorem 2.5.9: *$I \subset \mathbb{R}$ kapalı, alttan sınırlı ve üstten sınırsız bir küme olmak üzere I üzerinde tanımlı sürekli ve sınırlı fonksiyonların sonsuz bir kümesi $\mathcal{F}$ olsun ve aşağıdakiler sağlansın.*

(i) $\mathcal{F}$ düzgün sınırlıdır.

(ii) Her kompakt $J \subset I$ alt kümesi için bir $\varepsilon \in (0, \infty)_{\mathbb{R}}$ verildiğinde her $f \in \mathcal{F}$ ve her $s, t \in J$ için $|t - s| < \delta$ olduğunda $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta \in (0, \infty)_{\mathbb{R}}$ sayısı vardır. Yani, Ω lokal eşsüreklidir.

(iii) *Bir* $\varepsilon \in (0,\infty)_{\mathbb{R}}$ *verildiğinde her* $f \in \mathcal{F}$ *ve* $s,t \geq r$ *koşulunu sağlayan her* $s,t \in I$ *için* $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$ *sağlanacak şekilde* $r \in I$ *vardır (diskret terminolojide* Ω düzgün Cauchy*'dir).*

Bu durumda, Ω *göreceli kompakttır (Agarwal et al. 2003, Lemma 2.6).*

Teorem 2.5.10 (Krasnosel´skiĭ'nin sabit nokta teoremi)**:** *X bir Banach uzayı, A kümesi bu uzayın sınırlı, kapalı ve konveks alt uzayı olsun.* $\Gamma, \Psi : A \to X$ *dönüşümleri için aşağıdakiler sağlansın.*

(i) *Her* $x, y \in A$ *için* $\Gamma x + \Psi y \in A$.

(ii) Γ *büzülmedir.*

(iii) Ψ *sürekli ve kompakttır.*

Bu durumda, $\Gamma + \Psi$ *operatorünün* A *içinde bir sabit noktası vardır. Yani, bir* $x \in A$ *için* $\Gamma x + \Psi x = x$ *sağlanır (Smart 1974, Teorem 4.4.1).*

3 BİRİNCİ MERTEBEDEN DENKLEMLER

Bu bölümde $\mathbb{T}$ üstten sınırsız bir zaman skalası, $t_0 \in \mathbb{T}$, $A \in \mathrm{C_{rd}}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$, $B, C \in \mathrm{C_{rd}}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},[0,\infty)_{\mathbb{R}})$, $\alpha,\beta,\gamma \in \mathrm{C}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{T})$ kesin artan sınırsız fonksiyonlar, her $t \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $\alpha(t),\beta(t),\gamma(t) \le t$, $\alpha([t_0,\infty)_{\mathbb{T}}) = [\alpha(t_0),\infty)_{\mathbb{T}}$ ve $\varphi \in \mathrm{C_{rd}}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\big[x(t) + A(t)x(\alpha(t))\big]^{\Delta} + B(t)x(\beta(t)) - C(t)x(\gamma(t)) = \varphi(t), \quad t \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}} \qquad (3.0.1)$$

denkleminin çözümlerinin asimptotik davranışı incelenecektir. Şimdi, (3.0.1) denkleminin çözümünün tanımını verelim.

Tanım 3.0.11 (Çözüm)**:** $t_{-1} := \inf_{t\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}}\{\alpha(t),\beta(t),\gamma(t)\}$ ile tanımlanmak üzere $x : [t_{-1},\infty)_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $x + A \cdot x \circ \alpha \in \mathrm{C^1_{rd}}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ olmak üzere (3.0.1) denklemi $[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ ekseni üzerinde özdeş olarak sağlanıyorsa x fonksiyonuna (3.0.1) denkleminin *çözümü* denir.

Aşağıda (3.0.1) denkleminin çözümlerinin salınım özelliği tanımlanmıştır.

Tanım 3.0.12 (Salınım)**:** (3.0.1) denkleminin bir çözümü x olsun. Her $t \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $x^{\sigma}(s)x(s) \le 0$ olacak şekilde $s \in [t,\infty)_{\mathbb{T}}$ varsa x çözümü *salınır*. Aksi durumda, x çözümü *salınmaz* (Şahiner and Stavroulakis 2006, Sayfa 3).

Şimdi, (3.0.1) denkleminin çözümlerinin davranışını inceleyebiliriz.

3.1 Zincir Kuralı İçermeyen Sonuçlar

Vereceğimiz sonuçlar için $A \in \mathrm{C_{rd}}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ fonksiyonunun pozitif ve negatif kısımları olan $A^{\pm} \in \mathrm{C_{rd}}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},[0,\infty)_{\mathbb{R}})$ fonksiyonlarını

$$A^{\pm}(t) := \max\big\{\pm A(t), 0\big\}, \quad t \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}} \qquad (3.1.1)$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece her $t \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$A(t) = A^{+}(t) - A^{-}(t) \quad \text{ve} \quad -A^{-}(t) \le A(t) \le A^{+}(t)$$

olduğu görülür.

Teorem 3.1.1: *Kabul edelim ki A katsayısı için aşağıdaki koşul sağlansın.*

(C1) $\limsup_{t\to\infty} A^{+}(t) + \limsup_{t\to\infty} A^{-}(t) < 1.$

Yukarıdaki koşula ek olarak aşağıdaki koşullar da sağlansın.

(H1) $\int_{t_0}^{\infty} B(\eta)\Delta\eta = \infty.$

(H2) $\int_{t_0}^{\infty} C(\eta)\Delta\eta < \infty.$

(H3) $[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ *üzerinde* $\Phi^{\Delta} = \varphi$ *ve* $\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = 0$ *olacak şekilde* $\Phi \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{rd}}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ *fonksiyonu vardır.*

Bu durumda, (3.0.1) *denkleminin her çözümü salınır veya sonsuzda sıfıra yakınsar.*

İspat: Kabul edelim ki x fonksiyonu (3.0.1) denkleminin salınmayan bir çözümü olsun. İspatı tamamlamak için x fonksiyonunun sonsuzda sıfıra yakınsadığını göstermemiz gerekir. Genellikten ödün vermeden x çözümünün er geç pozitif olduğunu kabul edelim. Bu durumda, her $t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $x(t), x(\alpha(t)), x(\beta(t)), x(\gamma(t)) > 0$ olacak şekilde $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. (C1) ve (H2) koşullarından her $t \in [t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$-a \le -A^{-}(t) \le A(t) \le A^{+}(t) \le \tilde{a}, \quad a + \tilde{a} < 1 \tag{3.1.2}$$

ve

$$\int_{t_2}^{t} C(\eta)\Delta\eta \le \frac{1-\tilde{a}}{2} \tag{3.1.3}$$

sağlanacak şekilde $a, \tilde{a} \in [0,1)_{\mathbb{R}}$ ve $t_2 \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ bulunabilir. Şimdi, $t \in [t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$y_x(t) := x(t) + A(t)x(\alpha(t)) - \Phi(t) \tag{3.1.4}$$

ve

$$z_x(t) := y_x(t) - \int_{t_2}^{t} C(\eta)x(\gamma(\eta))\Delta\eta \tag{3.1.5}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. (H3) şartı ve (3.0.1) denklemi kullanılarak her $t \in [t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\begin{aligned} z_x^{\Delta}(t) =& y_x^{\Delta}(t) - C(t)x(\gamma(t)) \\ =& -B(t)x(\beta(t)) \le 0 \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

elde edilir. Bu, z_x fonksiyonunun $[t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde artmayan olduğunu söyler. Yani, z_x fonksiyonun sonsuzda limiti vardır. (H1) şartından z_x fonksiyonunun er geç sabit olamayacağını öğreniriz. Şimdi, x çözümünün sınırlı olduğunu ispatlayalım. Çelişki elde etmek için x çözümünün sınırsız olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\lim_{k\to\infty} x(\xi_k) = \infty \tag{3.1.7}$$

ve

$$x(\xi_k) = \max\{x(\eta):\ \eta \in [t_0,\xi_k]_{\mathbb{T}}\}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{3.1.8}$$

sağlanacak şekilde artan ve ıraksak bir $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ dizisi bulunabilir. (3.1.2)–(3.1.5) kullanılarak her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} z_x(\xi_k) =& y_x(\xi_k) - \int_{t_2}^{\xi_k} C(\eta)x(\gamma(\eta))\Delta\eta \\ \geq& \left[1 - \tilde{a} - \int_{t_2}^{\xi_k} C(\eta)\Delta\eta\right] x(\xi_k) - \Phi(\xi_k) \\ \geq& \left[1 - \tilde{a} - \frac{1-\tilde{a}}{2}\right] x(\xi_k) - \Phi(\xi_k) \\ =& \frac{1-\tilde{a}}{2} x(\xi_k) - \Phi(\xi_k) \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

elde edilir. (H3) şartı kullanılarak (3.1.9) ifadesinde $k \to \infty$ için limit alırsak z_x fonksiyonunun üstten sınırsız olduğunu görürüz. Bu, z_x fonksiyonunun artmayan olmasıyla çelişir. O halde, x sınırlı olmalıdır. Yani,

$$\tilde{\ell}_x := \limsup_{t\to\infty} x(t) \tag{3.1.10}$$

ile tanımlı değer sonludur. Bu durumda, x fonksiyonunun sınırlılığı, (C1), (H2) ve (H3) koşullarıyla birlikte (3.1.2) ve (3.1.3) ile tanımlı y_x ve z_x fonksiyonlarının sınırlı olduğunu söyler. O halde,

$$\ell_z := \lim_{t\to\infty} z_x(t) \tag{3.1.11}$$

ile tanımlı değer sonludur. (3.1.6) ifadesinin integrali alınırsa

$$\infty > z_x(t_2) - \ell_z = \int_{t_2}^{\infty} B(\eta)x(\beta(\eta))\Delta\eta$$

elde edilir ve (H1) koşulundan

$$\liminf_{t\to\infty} x(t) = 0 \tag{3.1.12}$$

olmalıdır. Diğer taraftan; y_x fonksiyonunun sonsuzda limiti var olan iki fonksiyonun toplamı şeklinde yazıldığını (3.1.5) ifadesinden görürüz. Böylece y_x fonksiyonunun da sonsuzda limitinin var olduğunu öğreniriz. O halde,

$$\ell_y := \lim_{t\to\infty} y_x(t) \tag{3.1.13}$$

değeri sonludur. Şimdi, y_x fonksiyonu (3.1.4) ile tanımlı olmak üzere (3.1.11) ve (3.1.13) ile tanımlı değerler sonlu olduğunda ve (3.1.12) sağlandığında

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \tag{3.1.14}$$

olduğunu gösterelim. (3.1.10) ve (3.1.12) ifadeleri dikkate alınarsa $k \to \infty$ için $x(\tilde{\zeta}_k) \to \tilde{\ell}_x$ ve $x(\zeta_k) \to 0$ olacak şekilde artan ve ıraksak $\{\tilde{\zeta}_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{\zeta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ dizilerini bulabiliriz. x fonksiyonu sınırlı olduğundan $\{x(\alpha(\tilde{\zeta}_k))\}_{k\in\mathbb{N}}, \{x(\alpha(\zeta_k))\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0, \infty)_{\mathbb{R}}$ dizileri sınırlı olur. Bolzano-Weierstrass teoreminden bu dizilerin en az birer yakınsak alt dizileri vardır. Genellikten ödün vermeden seçtiğimiz dizilerin bu özelliği sağlayan alt diziler olduğunu kabul edelim. $\{x(\alpha(\tilde{\zeta}_k))\}_{k\in\mathbb{N}}, \{x(\alpha(\zeta_k))\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizilerinin limitleri, (3.1.10) ile tanımlı değerden daha büyük olamaz. O halde, (3.1.2) ve (3.1.4) kullanılarak, her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} y_x(\tilde{\zeta}_k) - y_x(\zeta_k) \geq & \big[x(\tilde{\zeta}_k) - A^-(\tilde{\zeta}_k)x(\alpha(\tilde{\zeta}_k)) - \Phi(\tilde{\zeta}_k)\big] \\ & - \big[x(\zeta_k) + A^+(\zeta_k)x(\alpha(\zeta_k)) - \Phi(\zeta_k)\big] \\ \geq & \big[x(\tilde{\zeta}_k) - a x(\alpha(\tilde{\zeta}_k)) - \Phi(\tilde{\zeta}_k)\big] \\ & - \big[x(\zeta_k) + \tilde{a} x(\alpha(\zeta_k)) - \Phi(\zeta_k)\big] \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

yazılır. (H3) dikkate alınarak (3.1.15) ifadesinde $k \to \infty$ için $0 = \ell_y - \ell_y \geq (1 - a - \tilde{a})\tilde{\ell}_x$ elde edilir. (3.1.2) ifadesinden $\tilde{\ell}_x = 0$ bulunur. Yani, (3.1.14) sağlanır. Böylece ispat tamamlanır. □

Örnek 3.1.2: $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ olmak üzere

$$\left[x(t)+\frac{1}{\mathrm{e}}x(t-1)\right]'+\frac{1}{\mathrm{e}}\left(\frac{2}{\mathrm{e}}+\frac{1}{t^2}\right)x(t-2)-\frac{1}{t^2}x(t-1)=0,\quad t\in[1,\infty)_{\mathbb{R}} \tag{3.1.16}$$

ile tanımlı diferensiyel denklemde $t\in[1,\infty)_{\mathbb{R}}$ için $A(t)\equiv 1/\mathrm{e}$, $\alpha(t)=t-1$, $B(t)=(2/\mathrm{e}+1/t^2)/\mathrm{e}$, $\beta(t)=t-2$, $C(t)=1/t^2$, $\gamma(t)=t-1$ ve $\varphi(t)\equiv 0$ şeklindedir. Bu denklemin parametreleri Teorem 3.1.1'in tüm şartlarını sağladığından her çözüm salınır veya sonsuzda sıfıra yakınsar. Gerçekten,

$$\int_1^\infty \frac{1}{\mathrm{e}}\left(\frac{2}{\mathrm{e}}+\frac{1}{\eta^2}\right)\mathrm{d}\eta=\infty \quad \text{ve} \quad \int_1^\infty \frac{1}{\eta^2}\mathrm{d}\eta=1<\infty$$

olup (H1) ve (H2) şartları sağlanır. (H3) şartı ise denklem homojen olduğundan aşikar olarak sağlanır. Açıkça, $t\in[1,\infty)_{\mathbb{R}}$ için $x(t)=\mathrm{e}^{-t}$ fonksiyonu (3.1.16) denkleminin sonsuzda sıfıra yakınsayan bir pozitif çözümüdür.

Teorem 3.1.3: *Kabul edelim ki (H1)–(H3) sağlansın ve A katsayısı için de aşağıdaki koşul sağlansın.*

(C2) $\liminf_{t\to\infty} A(t)>1$ *ve* $\limsup_{t\to\infty} A(t)<\infty$.

Bu durumda, (3.0.1) *denkleminin her çözümü salınır veya sonsuzda sıfıra yakınsar.*

İspat: Kabul edelim ki x fonksiyonu (3.0.1) denkleminin salınmayan bir çözümü olsun. İspatı tamamlamak için x fonksiyonunun sonsuzda sıfıra yakınsadığını göstermemiz gerekir. Genellikten ödün vermeden x çözümünün er geç pozitif olduğunu kabul edelim. Bu durumda, her $t\in[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $x(t),x(\alpha(t)),x(\beta(t)),x(\gamma(t))>0$ olacak şekilde $t_1\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. (C2) ve (H2) koşullarından her $t\in[t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$a\leq A(t)\leq\tilde{a} \tag{3.1.17}$$

ve

$$\int_{t_2}^t C(\eta)\Delta\eta\leq\frac{1}{2} \tag{3.1.18}$$

sağlanacak şekilde $t_2\in[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ ve $a,\tilde{a}\in(1,\infty)_{\mathbb{R}}$ bulunabilir. Şimdi, $[t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde y_x ve z_x sırasıyla (3.1.4) ve (3.1.5) ifadelerindeki gibi tanımlansın. O halde, (H3) koşulu ve (3.0.1) denklemi kullanılırsa $[t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde (3.1.6) ifadesinin geçerli olduğu görülür. Bu, z_x fonksiyonunun $[t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde artmayan olduğunu ve sonsuzda limitinin var olduğunu söyler. (H1) şartından da z_x fonksiyonunun er geç sabit olamadığını öğreniriz. Şimdi, x çözümünün sınırlı olduğunu gösterelim. Çelişki elde etmek için x çözümünün sınırsız olduğunu kabul edelim. Bu durumda, (3.1.7) ve (3.1.8) sağlanacak şekilde artan ve ıraksak bir $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset[t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ dizisi bulunabilir. (3.1.4), (3.1.5), (3.1.17) ve (3.1.18) kullanılarak her $k\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} z_x(\xi_k) =& y_x(\xi_k) - \int_{t_2}^{\xi_k} C(\eta)x(\gamma(\eta))\Delta\eta \\ \geq& \left[1-\int_{t_2}^{\xi_k} C(\eta)\Delta\eta\right]x(\xi_k)-\Phi(\xi_k) \\ \geq& \left[1-\frac{1}{2}\right]x(\xi_k)-\Phi(\xi_k) \\ =& \frac{1}{2}x(\xi_k)-\Phi(\xi_k) \end{aligned} \tag{3.1.19}$$

elde edilir. (H3) şartı kullanılırsa $k\to\infty$ için (3.1.19) ifadesinden z_x fonksiyonunun üstten sınırsız olduğunu görürüz. Bu, z_x fonksiyonunun artmayan olmasıyla çelişir. Böylece (3.1.10) ile tanımlı olan $\tilde{\ell}_x$ değerinin sonlu olduğunu öğreniriz. Teorem 3.1.1'in ispatına benzer adımlar takip edilerek (3.1.13) ile tanımlı olan ℓ_y değerinin sonlu olduğu ve (3.1.12) ifadesinin sağlandığı kolayca görülür. Şimdi, y_x fonksiyonu (3.1.4) ile tanımlı olmak üzere (3.1.11) ve (3.1.13) ile tanımlı değerler sonlu olduğunda ve (3.1.12) sağlandığında (3.1.14) ifadesinin sağlandığını göstererek ispatı bitirelim. Bu durumda, $k\to\infty$ için $x(\tilde{\zeta}_k)\to\tilde{\ell}_x$ ve $x(\zeta_k)\to 0$ olacak şekilde artan ve ıraksak $\{\tilde{\zeta}_k\}_{k\in\mathbb{N}},\{\zeta_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset[t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ dizilerini bulabiliriz. Bolzano-Weierstrass teoreminden $\{x(\alpha^{-1}(\zeta_k))\}_{k\in\mathbb{N}}\subset[0,\infty)_{\mathbb{R}}$ dizisinin $\tilde{\ell}_x$ değerinden büyük olmayan bir değere yakınsadığı kabul edilebilir. Burada, $\alpha\in\mathrm{C}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{T})$ fonksiyonu kesin artan olduğundan ve $\alpha([t_0,\infty)_{\mathbb{T}})=[\alpha(t_0),\infty)_{\mathbb{T}}$ sağlandığından tersinin var olduğunu hatırlatalım. O halde, (3.1.4) ve (3.1.17) kullanılarak her $k\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} y_x(\alpha^{-1}(\zeta_k))-y_x(\alpha^{-1}(\tilde{\zeta}_k)) \leq& \left[x(\alpha^{-1}(\zeta_k))+A(\alpha^{-1}(\zeta_k))x(\zeta_k)-\Phi(\alpha^{-1}(\zeta_k))\right] \\ &-\left[A(\alpha^{-1}(\tilde{\zeta}_k))x(\tilde{\zeta}_k)-\Phi(\alpha^{-1}(\tilde{\zeta}_k))\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leq\left[x(\alpha^{-1}(\zeta_k))+\tilde{a}x(\zeta_k)-\Phi(\alpha^{-1}(\zeta_k))\right]\\&\quad-\left[ax(\tilde{\zeta}_k)-\Phi(\alpha^{-1}(\tilde{\zeta}_k))\right]\end{aligned}\tag{3.1.20}$$

yazılır. (H3) dikkate alınarak (3.1.20) ifadesinde $k\to\infty$ için $0\leq(1-a)\tilde{\ell}_x$ elde edilir. $a\in(1,\infty)_{\mathbb{R}}$ olduğundan $\tilde{\ell}_x=0$ elde edilir. Yani, (3.1.14) ifadesi sağlanır. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 3.1.4: *Kabul edelim ki (H1)–(H3) sağlansın ve A katsayısı için de aşağıdaki koşul sağlansın.*

(C3) $\liminf_{t\to\infty}A(t)>-\infty$ *ve* $\limsup_{t\to\infty}A(t)<-1$.

Bu durumda, (3.0.1) *denkleminin her sınırlı çözümü salınır veya sonsuzda sıfıra yakınsar.*

İspat: Kabul edelim ki x fonksiyonu (3.0.1) denkleminin salınmayan bir sınırlı çözümü olsun. Genellikten ödün vermeden x çözümünün er geç pozitif olduğunu kabul edelim. Bu durumda, her $t\in[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $x(t),x(\alpha(t)),x(\beta(t)),x(\gamma(t))>0$ olacak şekilde $t_1\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. (C3) şartından her $t\in[t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$-\tilde{a}\leq A(t)\leq -a\tag{3.1.21}$$

sağlanacak şekilde $t_2\in[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ ve $a,\tilde{a}\in(1,\infty)_{\mathbb{R}}$ bulunabilir. Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.3'ün ispatlarındaki adımlara benzer adımlarla (3.1.12) ifadesinin sağlandığı ve (3.1.13) ile tanımlı ℓ_y limitinin var ve sonlu olduğu elde edilir. Ayrıca, x sınırlı olduğundan (3.1.10) ile tanımlı olan $\tilde{\ell}_x$ değeri sonludur. Şimdi, y_x fonksiyonu (3.1.4) ile tanımlı olmak üzere (3.1.11) ve (3.1.13) ile tanımlı değerler sonlu olduğunda ve (3.1.12) ifadesi sağlandığında (3.1.14) ifadesinin sağlandığını göstererek ispatı tamamlayalım. Bu durumda, $k\to\infty$ için $x(\tilde{\zeta}_k)\to\tilde{\ell}_x$ ve $x(\zeta_k)\to 0$ olacak şekilde artan ve ıraksak $\{\tilde{\zeta}_k\}_{k\in\mathbb{N}},\{\zeta_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset[t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ dizilerini bulabiliriz. Bolzano-Weierstrass teoreminden $\{x(\alpha^{-1}(\tilde{\zeta}_k))\}_{k\in\mathbb{N}}\subset[0,\infty)_{\mathbb{R}}$ dizisinin $\tilde{\ell}_x$ değerinden büyük olmayan bir değere yakınsadığı kabul edilebilir. (3.1.4) ve (3.1.21) kullanılarak her $k\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}y_x(\alpha^{-1}(\tilde{\zeta}_k))-y_x(\alpha^{-1}(\zeta_k))\leq&\left[x(\alpha^{-1}(\tilde{\zeta}_k))+A(\alpha^{-1}(\tilde{\zeta}_k))x(\tilde{\zeta}_k)-\Phi(\alpha^{-1}(\tilde{\zeta}_k))\right]\\&-\left[A(\alpha^{-1}(\zeta_k))x(\zeta_k)-\Phi(\alpha^{-1}(\zeta_k))\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \big[x(\alpha^{-1}(\tilde{\zeta}_k)) - ax(\tilde{\zeta}_k) - \Phi(\alpha^{-1}(\tilde{\zeta}_k))\big] \\ &\quad - \big[- \tilde{a}x(\zeta_k) - \Phi(\alpha^{-1}(\zeta_k))\big] \end{aligned} \tag{3.1.22}$$

yazılır. Burada, (H3) ve dikkate alınarak (3.1.22) ifadesinde $k \to \infty$ için $0 \leq (1-a)\tilde{\ell}_x$ elde edilir. $a \in (1,\infty)_{\mathbb{R}}$ olduğundan $\tilde{\ell}_x = 0$ elde edilir. Yani, (3.1.14) ifadesi sağlanır. Böylece ispat tamamlanır. □

Aşağıdaki örnek, yukarıda verilen sonuçlarda (H2) şartının gerekliliğini göstermektedir.

Örnek 3.1.5: $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$ olmak üzere

$$\Delta\big[x(t)+\lambda x(t-1)\big] + \left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)x(t-3) - \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right)x(t-2) = \frac{2}{t^2}, \quad t \in [1,\infty)_{\mathbb{Z}} \tag{3.1.23}$$

fark denklemini göz önüne alalım. Burada $t \in [1,\infty)_{\mathbb{Z}}$ için $A(t) \equiv \lambda$, $\alpha(t) = t-1$, $B(t) = 1/t + 1/t^2$, $\beta(t) = t-3$, $C(t) = 1/t - 1/t^2$, $\gamma(t) = t-2$ ve $\varphi(t) = 2/t^2$ şeklindedir. $t \in [1,\infty)_{\mathbb{Z}}$ için $\Phi(t) = -\sum_{\eta=t}^{\infty} 2/\eta^2$ alınırsa $\lambda \in (-1,1)_{\mathbb{R}}$ için Teorem 3.1.1, $\lambda \in (1,\infty)_{\mathbb{R}}$ için Teorem 3.1.3 ve $\lambda \in (-\infty,-1)_{\mathbb{R}}$ için Teorem 3.1.4'ün (H2) hariç tüm koşulları sağlanmaktadır. $t \in [1,\infty)_{\mathbb{Z}}$ için $x(t) \equiv 1$ fonksiyonunun (3.1.23) denkleminin çözümü olduğunu görmek kolaydır. Açıkça, x sınırlı, salınımsız ve sonsuzda sıfır değerine yakınsamayan bir çözümdür.

Teorem 3.1.6, Teorem 3.1.8 ve Teorem 3.1.10; Bölüm 5'te verilen bazı sonuçların özel halleri olduğundan aşağıda ispatsız olarak verilmiştir.

Teorem 3.1.6: *Kabul edelim ki (C1), (H2) ve (H3) sağlansın; fakat (H1) sağlanmasın. Bu durumda,* (3.0.1) *denkleminin sonsuzda sıfıra yakınsamayan salınımsız bir sınırlı çözümü vardır.*

Sonuç 3.1.7: *Kabul edelim ki (C1), (H2) ve (H3) sağlansın. Bu durumda,* (3.0.1) *denkleminin her çözümü salınır veya sonsuzda sıfıra yakınsar ancak ve ancak (H1) sağlanır.*

Teorem 3.1.8: *Kabul edelim ki (C2), (H2) ve (H3) sağlansın; fakat (H1) sağlanmasın. Bu durumda,* (3.0.1) *denkleminin sonsuzda sıfıra yakınsamayan salınımsız bir sınırlı çözümü vardır.*

Sonuç 3.1.9: *Kabul edelim ki (C2), (H2) ve (H3) sağlansın. Bu durumda,* (3.0.1) *denkleminin her çözümü salınır veya sonsuzda sıfıra yakınsar ancak ve ancak (H1) sağlanır.*

Teorem 3.1.10: *Kabul edelim ki (C3), (H2) ve (H3) sağlansın; fakat (H1) sağlanmasın. Bu durumda,* (3.0.1) *denkleminin salınımlı olmayan ve sonsuzda sıfıra yakınsamayan bir sınırlı çözümü vardır.*

Sonuç 3.1.11: *Kabul edelim ki (C3), (H2) ve (H3) sağlansın. Bu durumda,* (3.0.1) *denkleminin her sınırlı çözümü salınır veya sonsuzda sıfıra yakınsar ancak ve ancak (H1) sağlanır.*

3.2 Zincir Kuralı İçeren Sonuçlar

Teorem 3.2.1: *Kabul edelim ki A katsayısı için (C1) sağlansın. Bu koşula ek olarak, (H3) ve aşağıdaki koşullar da sağlansın.*

(H4) $\nu := \gamma^{-1} \circ \beta \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{rd}}([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{T})$ *kesin artandır, her* $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ *için* $\nu(t) \leq t$ *ve* $\nu([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}) = [\nu(t_0), \infty)_{\mathbb{T}}$ *sağlanır.*

(H5) $D \in \mathrm{C}_{\mathrm{rd}}([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ *fonksiyonu* $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ *için* $D(t) := B(t) - \nu^{\Delta}(t)C(\nu(t))$ *ile tanımlıdır ve er geç negatif olmayandır (uygunluk için* $(-\infty, t_0)_{\mathbb{T}}$ *üzerinde* $C = 0$ *olduğu kabul edilmiştir).*

(H6) $\int_{t_0}^{\infty} D(\eta)\Delta\eta = \infty.$

(H7) $\lim_{t\to\infty} \int_{\nu(t)}^{t} C(\eta)\Delta\eta = 0.$

Bu durumda, (3.0.1) *denkleminin her çözümü salınır veya sonsuzda sıfıra yakınsar.*

İspat: Kabul edelim ki x fonksiyonu (3.0.1) denkleminin salınmayan bir çözümü olsun. Genellikten ödün vermeden x çözümünün er geç pozitif olduğunu kabul edebiliriz. O halde, her $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için (H4), (H5) ve $x(t), x(\alpha(t)), x(\beta(t)), x(\gamma(t)) > 0$ sağlanacak şekilde $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. (C1) ve (H7) şartlarından her $t \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ için (3.1.2) ve

$$\int_{\nu(t)}^{t} C(\eta)\Delta\eta \leq \frac{1 - \tilde{a}}{2} \tag{3.2.1}$$

sağlanacak şekilde $t_2 \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ ve $a, \tilde{a} \in [0,1)_{\mathbb{R}}$ vardır. $[t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde y_x fonksiyonu (3.1.4) ifadesindeki gibi ve

$$z_x(t) := y_x(t) - \int_{\nu(t)}^{t} C(\eta)x(\gamma(\eta))\Delta\eta, \quad t \in [t_2,\infty)_{\mathbb{T}} \tag{3.2.2}$$

ile tanımlansın. $t_3 := \nu^{-1}(t_2)$ ile tanımlanırsa Sonuç 2.3.15, (H4), (H5) ve (3.0.1) kullanılarak her $t \in [t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\begin{aligned}
z_x^{\Delta}(t) =& y_x^{\Delta}(t) - \left[\int_{t_2}^{t} C(\eta)x(\gamma(\eta))\Delta\eta - \int_{\nu(t_3)}^{\nu(t)} C(\eta)x(\gamma(\eta))\Delta\eta\right]^{\Delta} \\
=& y_x^{\Delta}(t) - \left[\int_{t_2}^{t} C(\eta)x(\gamma(\eta))\Delta\eta - \int_{t_3}^{t} \nu^{\Delta}(\eta)C(\nu(\eta))x(\beta(\eta))\Delta\eta\right]^{\Delta} \\
=& y_x^{\Delta}(t) - C(t)x(\gamma(t)) - \nu^{\Delta}(t)C(\nu(t))x(\beta(t)) \\
=& -D(t)x(\beta(t)) \leq 0
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

elde edilir. Yani, z_x fonksiyonu $[t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde artmayan olup (H6) şartından z_x fonksiyonunun er geç sabit olamayacağı öğrenilir. Açıkça, (3.1.11) ile tanımlı ℓ_z değeri vardır ve $\ell_z < \infty$ sağlanır. Burada, (3.2.1) ifadesi göz önüne alınarak Teorem 3.1.1'in ispatındaki adımlar takip edilirse x çözümünün sınırlı olduğu ispat edilebilir. Yani, (3.1.10) ile tanımlı $\tilde{\ell}_x$ değeri sonlu ve negatif olmayan bir değerdir. Bu durumda, (H7) ifadesinden ve x çözümünün sınırlılığından

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\nu(t)}^{t} C(\eta)x(\gamma(\eta))\Delta\eta = 0 \tag{3.2.4}$$

olduğu görülür. (3.2.2) ve (3.2.4) ifadelerinden (3.1.11) ve (3.1.13) ile tanımlı limit değerleri için $\ell_y = \ell_z$ sağlandığını öğreniriz. (C1), (H3) ve (3.1.4) ifadesinden ℓ_y değerinin sonlu olduğunu öğreniriz. Tekrar Teorem 3.1.1'in ispatındaki adımlara benzer adımlarla (3.1.15) ifadesinin de sağlandığı görülür ve (3.1.14) ifadesine ulaşılır. İspat böylece tamamlanır. □

Örnek 3.2.2: $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\Delta\left[x(t) + \frac{(-1)^t}{3}x(t-3)\right] + \left(2 + \frac{2}{t}\right)x(t) - \frac{2}{t}x(t-2) = 0, \quad t \in [3,\infty)_{\mathbb{Z}} \tag{3.2.5}$$

denklemini dikkate alalım. Burada $t \in [3,\infty)_{\mathbb{Z}}$ için $A(t) = (-1)^t/3$, $\alpha(t) = t-3$, $B(t) = 2+2/t$, $\beta(t) = t$, $C(t) = 2/t$, $\gamma(t) = t-2$ ve $\varphi(t) \equiv 0$ şeklindedir. Bu durumda, $t \in [1,\infty)_{\mathbb{Z}}$ için $\nu(t) = t-2$, $D(t) = 2+2/t-2/(t-2)$ ve $\Phi(t) \equiv 0$ olur. $[3,\infty)_{\mathbb{Z}}$ üzerinde $\varphi = 0$ olduğundan, $[3,\infty)_{\mathbb{Z}}$ üzerinde $\Phi = 0$ alınırsa (H3) şartının sağlandığı görülür. Her $t \in [3,\infty)_{\mathbb{Z}}$ için $\nu([3,\infty)_{\mathbb{Z}}) = [1,\infty)_{\mathbb{Z}} = [\nu(3),\infty)_{\mathbb{Z}}$ olup (H4) sağlanır. Her $t \in [3,\infty)_{\mathbb{Z}}$ için $D(t) > 0$ olup (H5) şartı da sağlanır.

$$\limsup_{t\to\infty}\left[\frac{(-1)^t}{3}\right]^+ + \limsup_{t\to\infty}\left[\frac{(-1)^t}{3}\right]^- = \frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{2}{3} < 1$$

olup A fonksiyonu (C1) şartını sağlar. Diğer taraftan;

$$\sum_{\eta=3}^{\infty}\left(2+\frac{2}{\eta}-\frac{2}{\eta-2}\right) = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{t\to\infty}\sum_{\eta=t-2}^{t-1}\frac{2}{\eta} = \lim_{t\to\infty}\frac{4t-6}{t^2-3t+2} = 0$$

olup (H6) ve (H7) sağlanır. Teorem 3.2.1'den (3.2.5) denkleminin her çözümü salınır veya sonsuzda sıfıra yakınsar. $t \in [3,\infty)_{\mathbb{Z}}$ için salınan $x(t) = (-1)^t$ fonksiyonunun (3.2.5) denkleminin bir çözümü olduğunu görmek kolaydır.

Teorem 3.2.3: *Kabul edelim ki (C2), (H3)–(H7) sağlansın. Bu durumda,* (3.0.1) *denkleminin her çözümü salınır veya sonsuzda sıfıra yakınsar.*

İspat: Kabul edelim ki x fonksiyonu (3.0.1) denkleminin salınmayan bir çözümü olsun. Genellikten ödün vermeden x çözümünün er geç pozitif olduğunu kabul edelim. Her $t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ için (H4), (H5) ve $x(t), x(\alpha(t)), x(\beta(t)), x(\gamma(t)) > 0$ sağlanacak şekilde $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. (C1) ve (H7) koşullarından her $t \in [t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ için (3.1.17) ve

$$\int_{\nu(t)}^{t} C(\eta)\Delta\eta \leq \frac{1}{2} \tag{3.2.6}$$

sağlanacak şekilde $t_2 \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ ve $a, \tilde{a} \in (1,\infty)_{\mathbb{R}}$ vardır. $[t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde y_x ve z_x fonksiyonları sırasıyla (3.1.4) ve (3.2.2) ifadelerindeki gibi tanımlansın. O halde, her $t \in [t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ için (3.2.3) elde edilir. Yani, z_x er geç artmayandır. (H6) koşulundan da z_x er geç sabit olamayan bir fonksiyonudur. Teorem 3.1.3'ün ispatındaki adımlar takip edilerek (3.2.6) ifadesinin yardımıyla x çözümünün sınırlı olduğu ispat edilebilir. Böylece (3.1.11) ile tanımlı ℓ_z değerinin var ve sonlu olduğu görülür. Teorem 3.2.1'in ispatındaki adımlara benzer adımlarla $\ell_y = \ell_z$ olduğu elde edilir. Teorem 3.1.1'in ispatındaki adımlar takip edilirse (3.1.12) ifadesi elde edilir. Daha sonra da Teorem 3.1.3'ün ispatındaki adımlar kullanılırsa (3.1.14) ifadesinin sağlandığı görülür ve ispat tamamlanır. □

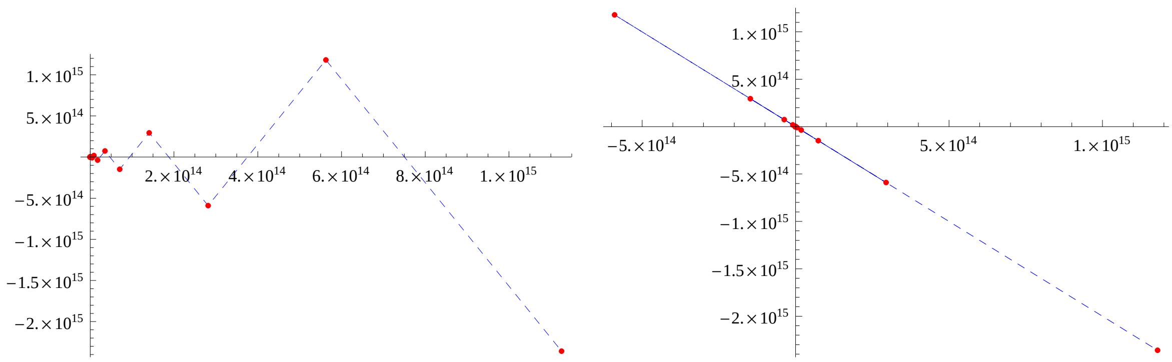
Örnek 3.2.4: $\mathbb{T} = \overline{2^{\mathbb{Z}}}$ olmak üzere

$$\mathrm{D}_2\left[x(t)+2x(t/2)\right]+\frac{9}{4t}x(t/2)-\frac{1}{t^2}x(t)=-\frac{1}{t^3},\quad t\in[1,\infty)_{\overline{2^{\mathbb{Z}}}} \tag{3.2.7}$$

denklemini göz önüne alalım. Burada $t \in [1,\infty)_{\overline{2^{\mathbb{Z}}}}$ için $A(t) \equiv 2$, $\alpha(t) = t/2$, $B(t) = 9/(4t)$, $\beta(t) = t/2$, $C(t) = 1/t^2$, $\gamma(t) = t$ ve $\varphi(t) = -1/t^3$ şeklindedir. $t \in [1,\infty)_{\overline{2^{\mathbb{Z}}}}$ için $\nu(t) = t/2$, $D(t) = 9/(4t) - 2/t^2$ ve $\Phi(t) = 2/(3t^2)$ olarak hesaplanır. Açıkça, (H3), (H4) ve (H5) sağlanır. Ayrıca,

$$\int_1^{\infty}\left(\frac{9}{4\eta}-\frac{2}{\eta^2}\right)\Delta\eta=\sum_{\eta=0}^{\infty}\left(\frac{9}{4}-\frac{2}{2^\eta}\right)=\infty \quad \text{ve} \quad \lim_{t\to\infty}\int_{t/2}^{t}\frac{1}{\eta^2}\Delta\eta=\lim_{t\to\infty}\frac{2}{t}=0$$

olup (H6) ve (H7) sağlanır. A fonksiyonu için (C2) sağlandığından Teorem 3.2.3'ten (3.2.7) denkleminin her çözümü salınır veya sonsuzda sıfıra yakınsar. Açıkça, $t \in [1,\infty)_{\overline{2^{\mathbb{Z}}}}$ için $x(t) = 1/t$ sonsuzda sıfır değerine yakınsayan bir çözümdür. (3.2.7) denklemi için $x(1/2) = x(1) = 1$ başlangıç şartı altında elde edilen çözümünün ilk 50 teriminin $(t, x(t))$ ve $(x(t), x(2t))$ koordinatlı grafikleri Şekil 3.2.1'deki gibidir. Bu çözümün sınırsız olarak salındığını tahmin edebiliriz.



Şekil 3.2.1: (3.2.7) denkleminin bir özel çözümünün grafiği.

Aşağıdaki örnek, (H7) şartının önemini göstermektedir.

Örnek 3.2.5: $\mathbb{T} = [0, \infty)_{\mathbb{R}}$ ve $\lambda \in (-1, 1)_{\mathbb{R}} \cup (1, 9)_{\mathbb{R}}$ olmak üzere

$$\big[x(t) + \lambda x(t/9)\big]' + \frac{4}{t}x(t/4) - \left(\frac{5}{2} + \frac{\lambda}{6}\right)\frac{1}{t}x(t) = 0, \quad t \in [1, \infty)_{\mathbb{R}} \tag{3.2.8}$$

denklemini inceliyelim. Bu denklemde, $t \in [1, \infty)_{\mathbb{R}}$ için $A(t) \equiv \lambda$, $\alpha(t) = t/9$, $B(t) = 4/t$, $\beta(t) = t/4$, $C(t) = (5/2 + \lambda/6)/t$, $\gamma(t) = t$ ve $\varphi(t) = \Phi(t) \equiv 0$ olur.

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t/4}^{t} \left(\frac{5}{2} + \frac{\lambda}{6}\right)\frac{1}{\eta}\mathrm{d}\eta = \left(5 + \frac{\lambda}{3}\right)\log(2) \neq 0$$

olup (H7) şartı sağlanmaz; ancak $\lambda \in (-1, 1)_{\mathbb{R}}$ için Teorem 3.2.1 ve $\lambda \in (1, 9)_{\mathbb{R}}$ için Teorem 3.2.3'ün diğer tüm şartları sağlanır. $t \in [1, \infty)_{\mathbb{R}}$ için $x(t) = \sqrt{t}$ fonksiyonu (3.2.8) denklemini sağlar. Bu çözüm için $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$ olur.

Teorem 3.2.6: *Kabul edelim ki (C3), (H3)–(H7) sağlansın. Bu durumda,* (3.0.1) *denkleminin her sınırlı çözümü salınır veya sonsuzda sıfıra yakınsar.*

İspat: Bu teorem, Teorem 3.2.1 ve Teorem 3.1.3'ün ispatındaki adımlar takip edilerek kolayca ispatlanır. □

Örnek 3.2.7: $\mathbb{T} = [0, \infty)_{\mathbb{R}}$ olmak üzere

$$\big[x(t) - 2x(t - 1/t^2)\big]' + 2x(t - 1/t) - x(t) = 0, \quad t \in [1, \infty)_{\mathbb{R}} \tag{3.2.9}$$

denklemini göz önüne alalım. Bu denklemde $t \in [1, \infty)_{\mathbb{R}}$ için $A(t) \equiv -2$, $\alpha(t) = t - 1/t^2$, $B(t) \equiv 2$, $\beta(t) = t - 1/t$, $C(t) \equiv 1$, $\gamma(t) = t$ ve $\varphi(t) \equiv 0$ şeklinde olduğu görülür. Açıkça, $t \in [1, \infty)_{\mathbb{R}}$ için $\nu(t) = t - 1/t$, $D(t) = 1 - 1/t^2$ ve $\Phi(t) \equiv 0$ şeklindedir. Böylece Teorem 3.2.6'nın tüm şartları sağlanır ve (3.2.9) denkleminin sınırlı her çözümü salınır veya sonsuzda sıfıra yakınsar.

Aşağıdaki örnek, Teorem 3.2.6'nın sınırsız çözümler için genişletilemeyeceğini göstermektedir.

Örnek 3.2.8: $a, b \in (0, \infty)_{\mathbb{R}}$ için $\mathbb{P}_{a,b}$ kümesi Örnek 2.1.2'deki gibi tanımlanmak üzere $\mathbb{T} = \mathbb{P}_{1,1}$ üzerinde tanımlı

$$\big[x(t) - 2x(t - 6)\big]^{\Delta} + \frac{2}{t - 4}x(t - 4) - \frac{1}{t - 2}x(t - 2) = 0, \quad t \in [6, \infty)_{\mathbb{P}_{1,1}} \tag{3.2.10}$$

denklemine bakalım. Bu denklemde $t \in [6,\infty)_{\mathbb{P}_{1,1}}$ için $A(t) \equiv -2$, $\alpha(t) = t-6$, $B(t) = 2/(t-4)$, $\beta(t) = t-4$, $C(t) = 1/(t-2)$ ve $\gamma(t) = t-2$ olduğu görülür. O halde, $t \in [6,\infty)_{\mathbb{P}_{1,1}}$ için $\nu(t) = t-2$ ve $D(t) = 1/(t-4)$ olur. Teorem 3.2.6'nın tüm şartlarının sağlandığını görmek kolaydır. $t \in [6,\infty)_{\mathbb{P}_{1,1}}$ için $x(t) = t$ fonksiyonu (3.2.10) denklemini sağlar ve bu salınımsız çözüm için $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$ olur.

Teorem 3.2.9: *Kabul edelim ki (C1), (H3)–(H5) ve (H7) sağlansın; fakat (H6) sağlanmasın. Bu durumda,* (3.0.1) *denkleminin sonsuzda sıfıra yakınsamayan salınımsız bir sınırlı çözümü vardır.*

İspat: Krasnosel´skiĭ'nin sabit nokta teoremini kullanarak belirtilen özelliği sağlayan çözümün varlığını göstereceğiz. (C1) koşulu sağladığından her $t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ için (3.1.2) sağlanacak şekilde $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ ve $a, \tilde{a} \in [0,1)_{\mathbb{R}}$ vardır. (H3) şartından, her $t \in [t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $|\Phi(t)| \le k$ sağlanacak şekilde $t_2 \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ ve $k \in (0,\infty)_{\mathbb{R}}$ vardır. Bu durumda, $k = [-m + (1-a-\tilde{a})\tilde{m}]/6$ ve $\tilde{m} > m$ olacak şekilde $m, \tilde{m} \in (0,\infty)_{\mathbb{R}}$ bulunabilir. (H6) sağlanmayıp (H7) sağlandığından her $t \in [t_3,\infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\int_t^\infty D(\eta)\Delta\eta \le \frac{k}{\tilde{m}} \quad \text{ve} \quad \int_{\nu(t)}^t C(\eta)\Delta\eta \le \frac{k}{\tilde{m}} \tag{3.2.11}$$

olacak şekilde $t_3 \in [t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. $\mathrm{BC}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ ile $[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde tanımlı reel değerli tüm sınırlı ve sürekli fonksiyonların supremum normu ile oluşturulmuş Banach uzayını gösterelim. Bu uzay içinde

$$\Omega := \big\{x \in \mathrm{BC}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R}) : \ \eta \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}} \text{ için } m \le x(\eta) \le \tilde{m}\big\} \tag{3.2.12}$$

alt uzayını oluşturalım. $\min\{\alpha(t_4), \beta(t_4), \gamma(t_4)\} \ge t_3$ sağlanacak şekilde $t_4 \in [t_3,\infty)_{\mathbb{T}}$ seçelim ve $\tilde{k} := [m + (1+\tilde{a}-a)\tilde{m}]/2$ değerini tanımlayalım. Şimdi, $\Gamma, \Psi : \Omega \to \Omega$ dönüşümlerini

$$(\Gamma x)(t) := \begin{cases} (\Gamma x)(t_4), & t \in [t_0,t_4)_{\mathbb{T}} \\ \tilde{k} - A(t)x(\alpha(t)) + \Phi(t), & t \in [t_4,\infty)_{\mathbb{T}} \end{cases} \tag{3.2.13}$$

ve

$$(\Psi x)(t) := \begin{cases} (\Psi x)(t_4), & t \in [t_0,t_4)_{\mathbb{T}} \\ \displaystyle\int_t^\infty D(\eta)x(\beta(\eta))\Delta\eta + \int_{\nu(t)}^t C(\eta)x(\gamma(\eta))\Delta\eta, & t \in [t_4,\infty)_{\mathbb{T}}. \end{cases}$$

ile tanımlayalım. İddia ediyoruz ki $\Gamma x + \Psi x = x$ denkleminin Ω içinde bir sabit noktası vardır. Önce her $x, y \in \Omega$ için $\Gamma x + \Psi y \in \Omega$ olduğunu gösterelim. Açıkça, (3.2.11) ve (3.2.12) ifadelerinden her $x, y \in \Omega$ ve her $t \in [t_4, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$(\Gamma x)(t) + (\Psi y)(t) \leq \tilde{k} + a\tilde{m} + 3k = \tilde{m}$$

ve

$$(\Gamma x)(t) + (\Psi y)(t) \geq \tilde{k} - \tilde{a}\tilde{m} - 3k = m$$

olduğunu görürüz. Yani, her $x, y \in \Omega$ için $\Gamma x + \Psi y \in \Omega$ olur. Ayrıca, $\max\{a, \tilde{a}\} < 1$ ve $[t_4, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $\|\Gamma x - \Gamma y\| \leq \max\{a, \tilde{a}\}\|x - y\|$ olduğundan Γ dönüşümünün bir büzülme oluğunu görürüz. Ψ dönüşümünün sürekli ve kompakt olduğunu gösterelim. Ω içinde bir x elemanına noktasal olarak yakınsayan $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ dizisini seçelim. Her $t \in [t_4, \infty)_{\mathbb{T}}$ ve $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\big|(\Psi x_k)(t) - (\Psi x)(t)\big| = &\bigg| \int_t^\infty D(\eta)\big[x_k(\beta(\eta)) - x(\beta(\eta))\big]\Delta\eta \\ &+ \int_{\nu(t)}^t C(\eta)\big[x_k(\gamma(\eta)) - x(\gamma(\eta))\big]\Delta\eta \bigg|.\end{aligned}$$

elde edilir. Lebesgue'nin baskın yakınsaklık teoreminden her $t \in [t_4, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\lim_{k\to\infty} \big|(\Psi x_k)(t) - (\Psi x)(t)\big| = 0 \tag{3.2.14}$$

elde edilir. Böylece Ψ dönüşümü Ω üzerinde süreklidir. $\Psi\Omega$'nın göreceli kompaktlılığını göstermek için Teorem 2.5.9'un şartlarının sağlandığını göstereceğiz. Açıkça, Ω düzgün sınırlıdır. Her $\varepsilon \in (0, \infty)_{\mathbb{R}}$ için $t \in [t_5, \infty)_{\mathbb{T}}$ olduğunda

$$\left| \int_t^\infty D(\eta)\Delta\eta \right| < \frac{\varepsilon}{4\tilde{m}} \quad \text{ve} \quad \left| \int_{\nu(t)}^t C(\eta)\Delta\eta \right| < \frac{\varepsilon}{4\tilde{m}} \tag{3.2.15}$$

sağlanacak şekilde $t_5 \in [t_4, \infty)_{\mathbb{T}}$ bulmak mümkündür. Böylece $\Psi\Omega$'nın düzgün Cauchy olduğu görülür çünkü her $s, t \in [t_5, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\begin{aligned}\big|(\Psi x)(t) - (\Psi x)(s)\big| = &\bigg| \bigg[\int_t^\infty D(\eta)x(\beta(\eta))\Delta\eta + \int_{\nu(t)}^t C(\eta)x(\gamma(\eta))\Delta\eta \bigg] \\ &- \bigg[\int_s^\infty D(\eta)x(\beta(\eta))\Delta\eta + \int_{\nu(s)}^s C(\eta)x(\gamma(\eta))\Delta\eta \bigg] \bigg|\end{aligned}$$

$$\leq \tilde{m}\left(\left|\int_{\nu(t)}^{t} C(\eta)\Delta\eta\right| + \left|\int_{t}^{\infty} D(\eta)\Delta\eta\right| + \left|\int_{\nu(s)}^{s} C(\eta)\Delta\eta\right| + \left|\int_{s}^{\infty} D(\eta)\Delta\eta\right|\right)$$

olup (3.2.15) ifadesinden

$$\big|(\Psi x)(t) - (\Psi x)(s)\big| < \varepsilon \tag{3.2.16}$$

sağlanır. Her $t \in [t_4, t_5]_{\mathbb{T}}$ için

$$\left|\int_{\nu(t)}^{t} C(\eta)\Delta\eta\right| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{3\tilde{m}} \tag{3.2.17}$$

ve her $s, t \in [t_4, t_5]_{\mathbb{T}}$ için

$$\left|\int_{s}^{t} D(\eta)\Delta\eta\right| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{3\tilde{m}} \tag{3.2.18}$$

sağlanacak şekilde $\tilde{\varepsilon} \in (0,\infty)_{\mathbb{R}}$ bulmak mümkündür. $\delta := \varepsilon/\tilde{\varepsilon}$ olarak seçilirse $|t-s| < \delta$ şartını sağlayan her $s, t \in [t_4, t_5]_{\mathbb{T}}$ için

$$\begin{aligned}
\big|(\Psi x)(t) - (\Psi x)(s)\big| =& \Bigg|\left[\int_{t}^{\infty} D(\eta)x(\beta(\eta))\Delta\eta + \int_{\nu(t)}^{t} C(\eta)x(\gamma(\eta))\Delta\eta\right] \\
&- \left[\int_{s}^{\infty} D(\eta)x(\beta(\eta))\Delta\eta + \int_{\nu(s)}^{s} C(\eta)x(\gamma(\eta))\Delta\eta\right]\Bigg| \\
=& \left|\int_{t}^{s} D(\eta)x(\beta(\eta))\Delta\eta + \int_{\nu(t)}^{t} C(\eta)x(\gamma(\eta))\Delta\eta - \int_{\nu(s)}^{s} C(\eta)x(\gamma(\eta))\Delta\eta\right| \\
\leq& \tilde{m}\left(\left|\int_{s}^{t} D(\eta)\Delta\eta\right| + \left|\int_{\nu(t)}^{t} C(\eta)\Delta\eta\right| + \left|\int_{\nu(s)}^{s} C(\eta)\Delta\eta\right|\right)
\end{aligned}$$

olup (3.2.17) ve (3.2.18) ifadelerinden

$$\big|(\Psi x)(t) - (\Psi x)(s)\big| < \tilde{\varepsilon}|t-s| \tag{3.2.19}$$

sağlandığı görülür. Bu, (3.2.16) ifadesinin sağlandığını söyler. Sonuç olarak $\Psi\Omega$ lokal eşsüreklidir. Böylece Teorem 2.5.9'dan $\Psi\Omega$ kümesi $\mathrm{BC}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ içinde göreceli kompakttır; dolayısıyla da Ψ kompakttır. Krasnosel´skiĭ'nin sabit nokta teoreminden $\Gamma x + \Psi x = x$ ifadesinin sağlandığı bir $x \in \Omega$ vardır. Dolayısıyla her $t \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$x(t) = \tilde{k} - A(t)x(\alpha(t)) + \Phi(t) + \int_{t}^{\infty} D(\eta)x(\beta(\eta))\Delta\eta + \int_{\nu(t)}^{t} C(\eta)x(\gamma(\eta))\Delta\eta$$

veya buna denk olan

$$x(t) + A(t)x(\alpha(t)) - \int_t^\infty D(\eta)x(\beta(\eta))\Delta\eta - \int_{\nu(t)}^t C(\eta)x(\gamma(\eta))\Delta\eta = \Phi(t) + \tilde{k} \quad (3.2.20)$$

sağlanır. Son ifade türetilerek x fonksiyonunun (3.0.1) denkleminin de çözümü olduğu görülür. Açıkça,

$$\limsup_{t\to\infty} x(t) \le \tilde{m} \quad \text{ve} \quad \liminf_{t\to\infty} x(t) \ge m \qquad (3.2.21)$$

sağlanır. Bu da ispatı tamamlar. □

Sonuç 3.2.10: *Kabul edelim ki (C1), (H3)–(H5) ve (H7) sağlansın. Bu durumda,* (3.0.1) *denkleminin her çözümü salınır veya sonsuzda sıfıra yakınsar ancak ve ancak (H6) sağlanır.*

Teorem 3.2.11: *Kabul edelim ki (C2), (H3)–(H5) ve (H7) sağlansın; fakat (H6) sağlanmasın. Bu durumda,* (3.0.1) *denkleminin sonsuzda sıfıra yakınsamayan salınımsız bir sınırlı çözümü vardır.*

İspat: Bu teoremin ispatında da Teorem 3.2.9'daki yöntemi izleyeceğiz. A fonksiyonu (C2) koşulunu sağladığından her $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için (3.1.17) sağlanacak şekilde bir $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ ve $a, \tilde{a} \in (1, \infty)_{\mathbb{R}}$ vardır. (H3) şartından her $t \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $|\Phi(t)| \le k$ sağlanacak şekilde $t_2 \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ ve $k \in (0, \infty)_{\mathbb{R}}$ vardır. Bu durumda, $k = [-\tilde{a}m + (a - 1)\tilde{m}]/6$ ve $\tilde{m} > m$ olacak şekilde $m, \tilde{m} \in (0, \infty)_{\mathbb{R}}$ bulunabilir. (H6) sağlanmayıp (H7) sağlandığından her $t \in [t_3, \infty)_{\mathbb{T}}$ için (3.2.11) sağlanacak şekilde $t_3 \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. $\min\{\alpha(t_4), \beta(t_4), \gamma(t_4)\} \ge t_3$ olacak şekilde $t_4 \in [t_3, \infty)_{\mathbb{T}}$ seçelim ve $\tilde{k} := [\tilde{a}m + (1 + a)\tilde{m}]/2$ değerini tanımlayalım. (3.2.12) ifadesindeki gibi $\Omega \subset \mathrm{BC}([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ alt uzayı tanımlanmak üzere $\Gamma, \Psi : \Omega \to \Omega$ dönüşümleri

$$(\Gamma x)(t) := \begin{cases} \Gamma x(t_4), & t \in [t_0, t_4)_{\mathbb{T}} \\ \dfrac{1}{A(\alpha^{-1}(t))}\big[\tilde{k} - x(\alpha^{-1}(t)) + \Phi(\alpha^{-1}(t))\big], & t \in [t_4, \infty)_{\mathbb{T}} \end{cases} \qquad (3.2.22)$$

ve

$$(\Psi x)(t) := \begin{cases} (\Psi x)(t_4), & t \in [t_0, t_4)_{\mathbb{T}} \\ \dfrac{1}{A(\alpha^{-1}(t))}\Bigg[\displaystyle\int_{\alpha^{-1}(t)}^{\infty} D(\eta)x(\beta(\eta))\Delta\eta \\ \qquad + \displaystyle\int_{\nu(\alpha^{-1}(t))}^{\alpha^{-1}(t)} C(\eta)x(\gamma(\eta))\Delta\eta\Bigg], & t \in [t_4, \infty)_{\mathbb{T}} \end{cases} \tag{3.2.23}$$

olarak tanımlansın. (3.1.17), (3.2.11) ve (3.2.12) ifadelerinden her $x, y \in \Omega$ ve her $t \in [t_3, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$(\Gamma x)(t) + (\Psi y)(t) \leq \frac{1}{a}[\tilde{k} + 3k] = \tilde{m}$$

ve

$$(\Gamma x)(t) + (\Psi y)(t) \geq \frac{1}{\tilde{a}}[\tilde{k} - \tilde{m} + 3k] = m$$

olduğunu görürüz. Yani, her $x, y \in \Omega$ için $\Gamma x + \Psi y \in \Omega$ olur. Buna ek olarak, her $x, y \in \Omega$ için $\|\Gamma x - \Gamma y\| < (1/a)\|x - y\|$ sağlandığından Γ dönüşümü bir büzülmedir. Teorem 3.2.9'un ispatındaki adımlara benzer adımlar takip edilirse Ψ dönüşümünün sürekli ve kompakt olduğunu göstermek mümkündür. Böylece Krasnosel´skiĭ'nin sabit nokta teoreminden $\Gamma x + \Psi x = x$ denkleminin Ω uzayında bir x çözümü mevcuttur. Dolayısıyla, her $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\begin{aligned} x(t) = &\frac{1}{A(\alpha^{-1}(t))}\Bigg[\tilde{k} - x(\alpha^{-1}(t)) + \Phi(\alpha^{-1}(t)) \\ &\qquad + \int_{\alpha^{-1}(t)}^{\infty} D(\eta)x(\beta(\eta))\Delta\eta + \int_{\nu(\alpha^{-1}(t))}^{\alpha^{-1}(t)} C(\eta)x(\gamma(\eta))\Delta\eta\Bigg] \end{aligned}$$

veya buna denk olan (3.2.20) denklemi sağlanır. (3.2.20) ifadesi türetilerek, x fonksiyonunun (3.0.1) denkleminin de çözümü olduğu görülür. Açıkça, x çözümü (3.2.21) ifadesini sağlar. Bu ise ispatı tamamlar. □

Sonuç 3.2.12: *Kabul edelim ki (C2), (H3)–(H5) ve (H7) sağlansın. Bu durumda, (3.0.1) denkleminin her çözümü salınır veya sonsuzda sıfıra yakınsar ancak ve ancak (H6) sağlanır.*

Teorem 3.2.13: *Kabul edelim ki (C3), (H3)–(H5) ve (H7) sağlansın; fakat (H6) sağlanmasın. Bu durumda,* (3.0.1) *denkleminin sonsuzda sıfıra yakınsamayan salınımsız bir sınırlı çözümü vardır.*

İspat: İspat Teorem 3.2.11'deki ispata çok benzerdir. Bunun için (C3) kullanılarak her $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için (3.1.21) sağlanacak şekilde $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ ve $\tilde{a} > a$ özelliğini sağlayan $a, \tilde{a} \in (1, \infty)_{\mathbb{R}}$ değerleri seçilir. Her $t \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $|\Phi(t)| \leq k$ sağlanacak şekilde $t_2 \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ ve $k \in (0, \infty)_{\mathbb{R}}$ seçelim. Her $t \in [t_3, \infty)_{\mathbb{T}}$ için (3.2.11) sağlanacak şekilde $t_3 \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. $k = [-m + (a-1)\tilde{m}]/6$ ve $\tilde{m} > m$ sağlanacak şekilde $\tilde{m}, m \in (0, \infty)_{\mathbb{R}}$ belirleyelim. $\tilde{k} := [(1-\tilde{a})m - a\tilde{m}]/2$ olarak seçilip Γ ve Ψ dönüşümleri sırasıyla (3.2.22) ve (3.2.23) ifadelerindeki gibi tanımlanır. Böylece (3.1.17), (3.2.11) ve (3.2.12) ifadelerinden her $x, y \in \Omega$ ve her $t \in [t_3, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$(\Gamma x)(t) + (\Psi y)(t) \leq \left(-\frac{1}{a}\right)[\tilde{k} - m - 3k] = \tilde{m}$$

ve

$$(\Gamma x)(t) + (\Psi y)(t) \geq \left(-\frac{1}{\tilde{a}}\right)[\tilde{k} + 3k] = m$$

olduğunu görürüz. Yani, her $x, y \in \Omega$ için $\Gamma x + \Psi y \in \Omega$ olur. Krasnosel´skiĭ'nin sabit nokta teoreminin diğer şartlarının sağlandığı da gösterilebilir. Sonuç olarak, (3.0.1) denkleminin istenilen çözümü $\Gamma x + \Psi x = x$ denkleminin Ω uzayındaki sabit noktasıdır ve bu çözüm (3.2.21) ifadesini sağlar. İspat böylece tamamlanır. □

Sonuç 3.2.14: *Kabul edelim ki (C3), (H3)–(H5) ve (H7) sağlansın. Bu durumda,* (3.0.1) *denkleminin her sınırlı çözümü salınır veya sonsuzda sıfıra yakınsar ancak ve ancak (H6) sağlanır.*

Örnek 3.2.15: $\mathbb{T}$ zaman skalasını $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ veya $\mathbb{P}_{1/2,1/2}$ kümelerinden herhangi birisi olarak alalım. $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$ olmak üzere

$$\big[x(t) + \lambda x(t-1)\big]^{\Delta} + \frac{2}{t^2}x(t-3) - \frac{1}{t^2}x(t-1) = \frac{1}{t^2}, \quad t \in [1, \infty)_{\mathbb{T}} \tag{3.2.24}$$

denklemi dikkate alalım. Bu denklemde $t \in [1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $A(t) \equiv \lambda$, $\alpha(t) = t - 1$, $F(\lambda) = \lambda^2$, $B(t) = 2/t^2$, $\beta(t) = t - 3$, $C(t) = 1/t^2$, $\gamma(t) = t - 1$ ve $\varphi(t) = 1/t^2$

olduğu görülür. $\lambda \in (-1, 1)_{\mathbb{R}}$ için Teorem 3.2.9, $\lambda \in (1, \infty)_{\mathbb{R}}$ için Teorem 3.2.11 ve $\lambda \in (-\infty, -1)_{\mathbb{R}}$ için Teorem 3.2.13'ün tüm şartları sağlanır. Böylece (3.2.24) denklemi sınırlı salınımsız ve sonsuzda sıfıra yakınsamayan bir çözümü vardır. Açıkça, $t \in [1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $x(t) \equiv 1$ fonksiyonu belirtilen şekilde bir çözümdür.

3.3 Bölüm Sonu Değerlendirmesi

Bölüm 3.1 ve Bölüm 3.2'deki sonuçlar (Dix et al. 2008, Parhi and Chand 2000, Parhi and Rath 2001, Rath and Misra 2004, Rath et al. 2007, Rath et al. 2007) makalelerindeki sonuçları sadece zaman skalasına genişmekle kalmayıp bu sonuçları aynı zamanda geliştirmektedir. A katsayısının işaretinin sabit olduğu durum (Parhi and Chand 2000, Parhi and Rath 2001, Rath and Misra 2004, Rath et al. 2007, Rath et al. 2007) makalelerinde incelenmiştir ve A katsayısının işaret değiştirebilir olduğu durum (Dix et al. 2008) makalesinde göz önüne alınmıştır; ancak bu makaledeki ispatların zahmetli ve karmaşık olmasının yanında gecikme fonksiyonunun keyfi olduğu durumda ispat yöntemi işe yaramamaktadır. (Guan and Shen 2007, Karpuz 2009a, Ladas and Qian 1990, Öcalan 2007a, Öcalan 2007b, Öcalan et al. 2008, Parhi and Rath 2001, Rath et al. 2007, Rath et al. 2007, Shen and Debnath 2001, Tang et al. 2000) makalelerinin hepsinde gecikme fonksiyonları lineer fonksiyonlar olarak alınmıştır. Literatürde pozitif ve negatif katsayı içeren denklemlerin gecikmeleri keyfi olduğu durumda hemen hemen hiç sonuç bulunmamaktadır. Ayrıca, bu bölümde verilen sonuçlar, (Zhu and Wang 2007) makalesindeki bazı şartları zayıflatarak sonuçları geliştirmektedir. Bölüm 3.1 ve Bölüm 3.2'de verilen sonuçların dayandığı şartların oldukça keskin olduğu uygun örneklerle gösterilmiştir. Örneğin, (H2) şartının gerekliliğini Örnek 3.1.5, (H7) şartının gerekliliğini ise Örnek 3.2.5 vurgulamaktadır. Diğer taraftan, $A \in \mathrm{C_{rd}}([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$, $B \in \mathrm{C_{rd}}([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathrm{C}([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{T})$ kesin artan sınırsız fonksiyonları her $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $\alpha(t), \beta(t) \leq t$ sağlanmak ve $\varphi \in \mathrm{C_{rd}}([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$\left[x(t) + A(t)x(\alpha(t))\right]^{\Delta} + B(t)x(\beta(t)) = \varphi(t), \quad t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$$

şeklindeki bir denklemin tüm katsayıları işaret değiştirebilmektedir. Bu denklem (3.0.1) denkleminin biçimindeki gibi düzenlirse

$$\big[x(t) + A(t)x(\alpha(t))\big]^{\Delta} + B^{+}(t)x(\beta(t)) - B^{-}(t)x(\beta(t)) = \varphi(t), \quad t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$$

elde edilir. Burada, $B^{\pm} \in \mathrm{C}_{\mathrm{rd}}([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, [0, \infty)_{\mathbb{R}})$ fonksiyonları (3.1.1) ifadesindekine benzer şekilde tanımlanmıştır. Böylece Bölüm 3.1'deki sonuçlar tüm katsayıları işaret değiştirebilen denklemler için de geçerlidir. Bu bölümü, (Karpuz and Öcalan 2009, Karpuz et al. 2009) makalelerindeki sonuçların biraz daha genel hallerini sırasıyla Bölüm 3.1 ve Bölüm 3.2'nin içerdiğini belirterek sonlandıralım.

4 İKİNCİ MERTEBEDEN DENKLEMLER

Bu bölümde $\mathbb{T}$ üstten sınırsız bir zaman skalası, $t_0 \in \mathbb{T}$, $A \in \mathrm{C_{rd}}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$, $B, C \in \mathrm{C_{rd}}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},[0,\infty)_{\mathbb{R}})$, $\alpha,\beta,\gamma \in \mathrm{C}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{T})$ kesin artan sınırsız fonksiyonlar, her $t \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $\alpha(t),\beta(t),\gamma(t) \leq t$, $\alpha([t_0,\infty)_{\mathbb{T}}) = [\alpha(t_0),\infty)_{\mathbb{T}}$ ve $\varphi \in \mathrm{C_{rd}}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\big[x(t) + A(t)x(\alpha(t))\big]^{\Delta^2} + B(t)x(\beta(t)) - C(t)x(\gamma(t)) = \varphi(t), \quad t \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}} \tag{4.0.1}$$

denkleminin çözümlerinin asimptotik davranışı incelenecektir.

Tanım 4.0.1 (Çözüm)**:** $t_{-1} := \inf_{t\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}}\{\alpha(t),\beta(t),\gamma(t)\}$ ile tanımlanmak üzere $x : [t_{-1},\infty)_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $x + A \cdot x \circ \alpha \in \mathrm{C^2_{rd}}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ olmak üzere (4.0.1) denklemi $[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ ekseni üzerinde özdeş olarak sağlanıyorsa x fonksiyonuna (4.0.1) denkleminin *çözümü* denir.

(4.0.1) denkleminin çözümlerinin salınımlılık özelliği Tanım 3.0.12'deki gibidir.

4.1 Sınırlı Çözümlerin Davranışı

Teorem 4.1.1: *Kabul edelim ki A katsayısı için (C1) sağlansın. Buna ek olarak, (H4), (H5) ve aşağıdaki koşullar sağlansın.*

(H8) $\int_{t_0}^{\infty} \sigma(\eta)D(\eta)\Delta\eta = \infty$.

(H9) $\int_{t_0}^{\infty}\int_{\nu(\zeta)}^{\zeta} C(\eta)\Delta\eta\Delta\zeta < \infty$.

(H10) $[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ *üzerinde* $\Phi^{\Delta^2} = \varphi$ *ve* $\lim_{t\to\infty}\Phi(t) = 0$ *sağlanacak şekilde bir* $\Phi \in \mathrm{C^2_{rd}}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ *fonksiyonu vardır.*

Bu durumda, (4.0.1) *denkleminin her sınırlı çözümü salınır veya sonsuzda sıfıra yakınsar.*

İspat: Kabul edelim ki x fonksiyonu (4.0.1) denkleminin salınmayan bir sınırlı çözümü olsun. İspatı tamamlamak için (3.1.14) ifadesinin sağlandığını göstermek gerekir. Genellikten ödün vermeden x çözümün er geç pozitif olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda, her $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için (H5) koşulu, (3.1.2) ifadesi ve $x(t), x(\alpha(t)), x(\beta(t)), x(\gamma(t)) > 0$ sağlancak şekilde $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. Şimdi, $[t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde y_x fonksiyonu (3.1.4) ve

$$z_x(t) := y_x(t) - \int_{t_1}^{t} \int_{\nu(\zeta)}^{\zeta} C(\eta) x(\gamma(\eta)) \Delta\eta \Delta\zeta, \quad t \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}} \tag{4.1.1}$$

ile tanımlansın. O halde, (H4), (H5) şartları ve (4.0.1) denkleminden her $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$z_x^{\Delta}(t) = y_x^{\Delta}(t) - \int_{\nu(t)}^{t} C(\eta) x(\gamma(\eta)) \Delta\eta \tag{4.1.2}$$

ve

$$\begin{aligned} z_x^{\Delta^2}(t) =& y_x^{\Delta^2}(t) - \left[\int_{t_2}^{t} C(\eta) x(\gamma(\eta)) \Delta\eta - \int_{\nu(t_2)}^{\nu(t)} C(\eta) x(\gamma(\eta)) \Delta\eta \right]^{\Delta} \\ =& y_x^{\Delta^2}(t) - \left[\int_{t_1}^{t} C(\eta) x(\gamma(\eta)) \Delta\eta - \int_{t_2}^{t} \nu^{\Delta}(\eta) C(\nu(\eta)) x(\beta(\eta)) \Delta\eta \right]^{\Delta} \\ =& y_x^{\Delta^2}(t) - C(t) x(\gamma(t)) - \nu^{\Delta}(t) C(\nu(t)) x(\beta(t)) \\ =& - D(t) x(\beta(t)) \leq 0 \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

elde edilir, burada $t_2 := \nu^{-1}(t_1)$ ile tanımlanmıştır. Yani, z_x ve z_x^{Δ} fonksiyonları yeterince büyük bir $t_3 \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $[t_3, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde monoton ve sabit işaretlidir. (H8) şartı kullanılarak bu fonksiyonların er geç sabit olmadığı öğrenilir. Açıkça, (H9) ve (H10) koşullarından ve x ile A fonksiyonlarının sınırlılığından (3.1.11) ile tanımlı ℓ_z değeri var ve sonludur. Bu ise Lemma 2.4.5'ten $\ell_{z^{\Delta}} := \lim_{t \to \infty} z_x^{\Delta}(t)$ ile tanımlı değerin 0 olduğunu söyler. (4.1.3) ifadesinin $[t, \infty)_{\mathbb{T}} \subset [t_3, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde integralini alırsak

$$z_x^{\Delta}(t) = \int_{t}^{\infty} D(\eta) x(\beta(\eta)) \Delta\eta \tag{4.1.4}$$

elde edilir. Şimdi, (4.1.4) ifadesinin $[t_3, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde integrali alınıp Lemma 2.4.2 (ii) yardımıyla integral sınırları değiştirilirse

$$\begin{aligned} \infty > \ell_z - z_x(t_3) &= \int_{t_3}^{\infty} \int_{\zeta}^{\infty} D(\eta) x(\beta(\eta)) \Delta\eta \Delta\zeta \\ &= \int_{t_3}^{\infty} \big[\sigma(\eta) - t_3\big] D(\eta) x(\beta(\eta)) \Delta\eta \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

elde edilir. Bu, (3.1.12) ifadesinin sağlandığını söyler. Şimdi, y_x fonksiyonunun limitinin var olduğunu ispat edelim. Bunun için y_x fonksiyonunun er geç artan olduğunu ispat etmek yeterlidir. z_x^Δ fonksiyonu $[t_3,\infty)_\mathbb{T}$ üzerinde monoton olduğundan ya negatif yada pozitiftir. $[t_3,\infty)_\mathbb{T}$ üzerinde $z_x^\Delta < 0$ ise z_x^Δ artmayan olduğundan her $t \in [t_3,\infty)_\mathbb{T}$ için $z_x^\Delta(t) \le z_x^\Delta(t_3) < 0$ olduğunu ve dolayısıyla da

$$\begin{aligned} z_x(t) &= \int_{t_3}^{t} z_x^\Delta(\eta)\Delta\eta + z_x(t_3) \\ &\le z_x^\Delta(t_3)(t-t_3) + z_x(t_3) \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

olduğunu söyler. (4.1.6) ifadesinde $t \to \infty$ için limit alınarak $\ell_z = -\infty$ olduğu görülür. Bu ise ℓ_z değerinin sonlu olmasıyla çelişir. O halde, $[t_3,\infty)_\mathbb{T}$ üzerinde $z_x^\Delta > 0$ dır. Böylece (4.1.2) ifadesinden $[t_3,\infty)_\mathbb{T}$ üzerinde $y_x^\Delta > 0$ elde edilir. Yani, ℓ_y var ve sonludur. İspatın geri kalan kısmında Teorem 3.1.1'in ispatındaki adımlar takip edilerek (3.1.14) elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. □

Aşağıdaki örnek, Teorem 4.1.1'in bir uygulaması olup sonucun bu haliyle sınırsız çözümlere genişletilemeyeceğini gösterir.

Örnek 4.1.2: $q \in (1,\infty)_\mathbb{R}$ olmak üzere $t \in [1,\infty)_{\overline{q^\mathbb{Z}}}$ için

$$\mathrm{D}_q^2\left[x(t) - \frac{1}{q}x\left(\frac{t}{q^2}\right)\right] + \left(\frac{q^2-1}{q^5t^2} + \frac{1}{(q-1)t^3}\right)x\left(\frac{t}{q^2}\right) - \frac{q}{(q-1)t^3}x\left(\frac{t}{q}\right) = 0 \tag{4.1.7}$$

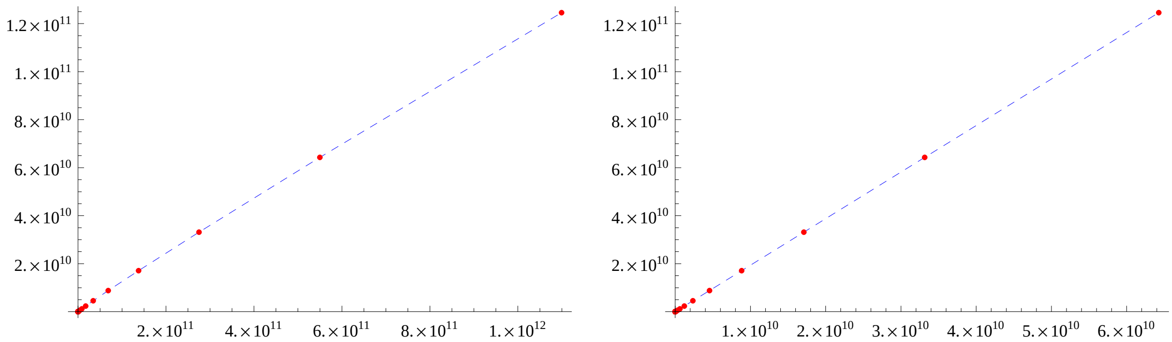
ile verilmiş q-fark denklemini dikkate alalım. Bu denklemde $t \in [1,\infty)_{\overline{q^\mathbb{Z}}}$ için $A(t) \equiv -1/q$, $\alpha(t) = t/q^2$, $B(t) = (q^2-1)/(q^5t^2) + 1/((q-1)t^3)$, $\beta(t) = t/q^2$, $\gamma(t) = t/q$, $C(t) = q/((q-1)t^3)$ ve $\varphi(t) \equiv 0$ şeklindedir. Böylece, $t \in [1,\infty)_{\overline{q^\mathbb{Z}}}$ için $\nu(t) = t/q$ kesin artan olup $\nu([1,\infty)_{\overline{q^\mathbb{Z}}}) = [1/q,\infty)_{\overline{q^\mathbb{Z}}} = [\nu(1),\infty)_{\overline{q^\mathbb{Z}}}$ sağlanır ve $D(t) = (q^2-1)/(q^5t^2) - (q^3-1)/((q-1)t^3)$ er geç pozitiftir. Diğer taraftan,

$$\int_{q^2}^{\infty} q\eta\left(\frac{q^2-1}{q^5\eta^2} - \frac{q^3-1}{(q-1)\eta^3}\right)\Delta\eta = \infty \quad \text{ve} \quad \int_{q^2}^{\infty}\int_{\eta/q}^{\eta} \frac{q}{(q-1)\zeta^3}\Delta\zeta\Delta\eta = \frac{q}{q^2-1}$$

olup (H8) ve (H9) sağlanır. Böylece,

$$\limsup_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{q}\right]^+ + \limsup_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{q}\right]^- = \frac{1}{q} < 1$$

olduğundan Teorem 4.1.1'den (4.1.7) denkleminin her sınırlı çözümünün salındığını veya sonsuzda sıfıra yakınsadığını öğreniriz. $t \in [1, \infty)_{\overline{q^{\mathbb{Z}}}}$ için $x(t) = 1/t$ fonksiyonu (4.1.7) denkleminin sonsuzda sıfıra yakınsayan bir çözümüdür; ancak Teorem 4.1.1 sınırsız çözümler için cevapsız kalır. Gerçekten, $q = 2$ alınarak (4.1.7) denkleminin $x(1/4) = x(1/2) = x(1) = 1$ başlangıç şartları altında ilk 40 teriminin $(t, x(t))$ ve $(x(t), x(2t))$ koordinatlı grafikleri Şekil 4.1.1'de verilmiş olan çözümünün pozitif ve sınırsız olduğu tahmin edilebilir.



Şekil 4.1.1: (4.1.7) denkleminin bir özel çözümünün grafiği.

Sonuç 4.1.3: *Kabul edelim ki (C1), (H4), (H5), (H8), (H9) ve*

$$\sup\{t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}} : \; A(t) \geq 0\} \tag{4.1.8}$$

sağlansın. Bu durumda, $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ *üzerinde* $\varphi = 0$ *olmak üzere* (4.0.1) *denkleminin her sınırlı çözümü salınır.*

İspat: Kabul edelim ki x denklemin sınırlı ve er geç pozitif bir çözümü olsun. Bu durumda, yeterince büyük bir $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır ve her $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için (H4), (H5) ve $x(t), x(\alpha(t)), x(\beta(t)), x(\gamma(t)) > 0$ sağlanır. Burada, (3.1.4), (3.1.14) ve A fonksiyonunun sınırlılığından $\ell_y = 0$ elde edilir. Teorem 4.1.1'in ispatından uygun bir $t_2 \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $[t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $y^{\Delta} > 0$ elde edilir. (4.1.8) ifadesinden $A(t_3) \geq 0$ olacak şekilde $t_3 \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. Böylece her $t \in [t_3, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $y_x(t) \geq y_x(t_3) = x(t_3) + A(t_3)x(\alpha(t_3)) > 0$ olup $[t_3, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $y_x > 0$ elde edilir. Bu ise $\ell_y > 0$ çelişkisini yaratır. Yani, denklem sonsuzda sıfıra yakınsayan çözüme sahip olamaz. Her sınırlı çözüm salınır ve ispat tamamlanır. □

Teorem 4.1.4: *Kabul edelim ki (C2), (H4), (H5), (H8)–(H10) sağlansın. Bu durumda,* (4.0.1) *denkleminin her sınırlı çözümü salınır veya sonsuzda sıfıra yakınsar.*

İspat: Bu ispat, Teorem 3.1.3 ve Teorem 4.1.1'den kolayca elde edilir. $\square$

Sonuç 4.1.5: *Kabul edelim ki, (C2), (H4), (H5), (H8) ve (H9) sağlansın. Bu durumda,* $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ *üzerinde* $\varphi = 0$ *olmak üzere* (4.0.1) *denkleminin her sınırlı çözümü salınır.*

İspat: İspat, Sonuç 4.1.3'ün ispatının aynısıdır. $\square$

Sonuç 4.1.5'e ait bit uygulama ile devam edelim.

Örnek 4.1.6: $\mathbb{T} = \sqrt{\mathbb{N}_0} := \{\sqrt{n} : \ n \in \mathbb{N}_0\}$ olmak üzere,

$$\left[x(t) + 2x(\sqrt{t^2-1})\right]^{\Delta^2} + \frac{1}{t}x(\sqrt{t^2-2}) - \frac{1}{t^2}x(\sqrt{t^2-1}) = 0, \quad t \in [\sqrt{3}, \infty)_{\sqrt{\mathbb{N}_0}} \quad (4.1.9)$$

ile tanımlı denklemi göz önüne alalım. Bu denklemde $t \in [\sqrt{3}, \infty)_{\sqrt{\mathbb{N}_0}}$ için $A(t) \equiv 2$, $\alpha(t) = \sqrt{t^2-1}$, $B(t) = 1/t$, $\beta(t) = \sqrt{t^2-2}$, $C(t) = 1/t^2$ ve $\gamma(t) = \sqrt{t^2-1}$ ile belirlidir. Açıkça, $t \in [\sqrt{3}, \infty)_{\sqrt{\mathbb{N}_0}}$ için $\nu(t) = \sqrt{t^2-1}$ kesin artan olup $\nu([\sqrt{3}, \infty)_{\sqrt{\mathbb{N}_0}}) = [\sqrt{2}, \infty)_{\sqrt{\mathbb{N}_0}} = [\nu(\sqrt{3}), \infty)_{\sqrt{\mathbb{N}_0}}$ sağlanır ve $D(t) = 1/t - 1/(t^2-1)$ er geç pozitiftir. Sonuç 4.1.5'in tüm şartlarının sağladığını göstermek kolaydır. Böylece, (4.1.9) denkleminin her sınırlı çözümü salınır.

Teorem 4.1.7: *Kabul edelim ki (C3), (H4), (H5), (H8)–(H10) sağlansın. Bu durumda,* (4.0.1) *denkleminin her sınırlı çözümü salınır veya sonsuzda sıfıra yakınsar.*

İspat: Bu teorem, Teorem 3.1.4 ve Teorem 4.1.1'in ispatlarından kolayca ispatlanabilir. $\square$

Teorem 4.1.8: *Kabul edelim ki (C1), (H4), (H5), (H9) ve (H10) sağlansın; fakat (H8) sağlanmasın. Bu durumda,* (4.0.1) *denkleminin sonsuzda sıfıra yakınsamayan salınımsız bir sınırlı çözümü vardır.*

İspat: Krasnosel´skiĭ'nin sabit nokta teoremini kullanarak belirtilen özellikleri sağlayan çözümün varlığını göstereceğiz. (C1) koşulu sağladığından $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ olduğunda (3.1.2) sağlanacak şekilde $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ ve $a, \tilde{a} \in [0, 1)_{\mathbb{R}}$ vardır. (H10) şartından her

$t \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $|\Phi(t)| \leq k$ sağlanacak şekilde yeterince büyük bir $t_2 \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ ve $k \in (0, \infty)_{\mathbb{R}}$ vardır. Bu durumda, $k = [-m + (1 - a - \tilde{a})\tilde{m}]/6$ ve $\tilde{m} > m$ olacak şekilde $m, \tilde{m} \in (0, \infty)_{\mathbb{R}}$ sabitleri vardır. (H8) sağlanmayıp (H9) sağlandığından her $t \in [t_3, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\int_t^\infty \sigma(\eta)D(\eta)\Delta\eta \leq \frac{k}{\tilde{m}} \quad \text{ve} \quad \int_t^\infty \int_{\nu(\zeta)}^\zeta C(\eta)\Delta\eta\Delta\zeta \leq \frac{k}{\tilde{m}} \tag{4.1.10}$$

sağlanacak şekilde yeterince büyük bir $t_3 \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. $\mathrm{BC}([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ ile $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde tanımlı reel değerli tüm sınırlı ve sürekli fonksiyonların supremum normu ile oluşturulmuş Banach uzayını gösterelim. Bu uzay içinde (3.2.12) ile Ω alt uzayını oluşturalım. $\min\{\alpha(t_4), \beta(t_4), \gamma(t_4)\} \geq t_3$ şartını sağlayan yeterince büyük bir $t_4 \in [t_3, \infty)_{\mathbb{T}}$ seçelim ve $\tilde{k} := [m + (1 - a + \tilde{a})\tilde{m}]/2$ değerini tanımlayalım. Şimdi, $\Gamma : \Omega \to \Omega$ dönüşümü (3.2.13) ifadesindeki gibi ve $\Psi : \Omega \to \Omega$ dönüşümünü

$$(\Psi x)(t) := \begin{cases} (\Psi x)(t_4), & t \in [t_0, t_4)_{\mathbb{T}} \\ \begin{array}{l} \displaystyle\int_t^\infty [t - \sigma(\eta)]D(\eta)x(\beta(\eta))\Delta\eta \\ \displaystyle -\int_t^\infty \int_{\nu(\zeta)}^\zeta C(\eta)x(\gamma(\eta))\Delta\eta\Delta\zeta \end{array}, & t \in [t_4, \infty)_{\mathbb{T}}. \end{cases}$$

ile tanımlayalım. İddia ediyoruz ki $\Gamma x + \Psi x = x$ denkleminin Ω içinde bir sabit noktası vardır. Açıkça, (3.2.12) ve (4.1.10) ifadesinden, her $x, y \in \Omega$ için $\Gamma x + \Psi y \in \Omega$ olur. Ayrıca, $\max\{a, \tilde{a}\} < 1$ ve $[t_4, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $\|\Gamma x - \Gamma y\| \leq \max\{a, \tilde{a}\}\|x - y\|$ olduğundan Γ dönüşümünün bir büzülme oluğunu görürüz. Ψ dönüşümünün sürekli ve kompakt olduğunu gösterelim. Ω içinde bir x elemanına noktasal olarak yakınsayan $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ dizisini seçelim. Lebesgue'nin baskın yakınsaklık teoreminden her $t \in [t_4, \infty)_{\mathbb{T}}$ için (3.2.14) ifadesinin sağlandığı elde edilir. Böylece Ψ dönüşümü Ω üzerinde süreklidir. $\Psi\Omega$'nın göreceli kompaktlılığını göstermek için Teorem 2.5.9'un şartlarının sağlandığını göstereceğiz. Açıkça, Ω düzgün sınırlıdır. Her $\varepsilon \in (0, \infty)_{\mathbb{R}}$ için $t \in [t_5, \infty)_{\mathbb{T}}$ olduğunda

$$\left|\int_t^\infty \sigma(\eta)D(\eta)\Delta\eta\right| < \frac{\varepsilon}{4\tilde{m}} \quad \text{ve} \quad \left|\int_t^\infty \int_{\nu(\zeta)}^\zeta C(\eta)\Delta\eta\Delta\zeta\right| < \frac{\varepsilon}{4\tilde{m}}$$

sağlanacak şekilde $t_5 \in [t_4, \infty)_{\mathbb{T}}$ bulunabilir. Böylec, her $s, t \in [t_5, \infty)_{\mathbb{T}}$ için (3.2.16) sağlandığından $\Psi\Omega$'nın düzgün Cauchy olduğu görülür. Lemma 2.4.2 (ii)'den her $t \in$

$[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\int_t^\infty [\sigma(\eta) - t] D(\eta) \Delta\eta = \int_t^\infty \int_t^{\sigma(\eta)} D(\eta) \Delta\zeta \Delta\eta$$
$$= \int_t^\infty \int_\zeta^\infty D(\eta) \Delta\eta \Delta\zeta$$

olur. (H8) sağlanmayıp (H9) sağlandığından her $t \in [t_4, t_5]_{\mathbb{T}}$ için

$$\left| \int_t^\infty D(\eta) \Delta\eta \right| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2\tilde{m}} \quad \text{ve} \quad \left| \int_{\nu(t)}^t C(\eta) \Delta\eta \right| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2\tilde{m}} \tag{4.1.11}$$

sağlanacak şekilde $\tilde{\varepsilon} \in (0, \infty)_{\mathbb{R}}$ bulmak mümkündür. $\delta := \varepsilon / \tilde{\varepsilon}$ ile tanımlanmak üzere her $s, t \in [t_4, t_5]_{\mathbb{T}}$ için

$$\begin{aligned}
\big|(\Psi x)(t) - (\Psi x)(s)\big| =& \Bigg| \bigg[\int_t^\infty [t - \sigma(\eta)] D(\eta) x(\beta(\eta)) \Delta\eta - \int_t^\infty \int_{\nu(\zeta)}^\zeta C(\eta) x(\gamma(\eta)) \Delta\eta \Delta\zeta \bigg] \\
& - \bigg[\int_s^\infty [s - \sigma(\eta)] D(\eta) x(\beta(\eta)) \Delta\eta - \int_s^\infty \int_{\nu(\zeta)}^\zeta C(\eta) x(\gamma(\eta)) \Delta\eta \Delta\zeta \bigg] \Bigg| \\
=& \left| \int_s^t \int_\zeta^\infty D(\eta) x(\beta(\eta)) \Delta\eta \Delta\zeta + \int_s^t \int_{\nu(\zeta)}^\zeta C(\eta) x(\gamma(\eta)) \Delta\eta \Delta\zeta \right| \\
\leq& \tilde{m} \left(\left| \int_s^t \int_\zeta^\infty D(\eta) \Delta\eta \Delta\zeta \right| + \left| \int_s^t \int_{\nu(\zeta)}^\zeta C(\eta) \Delta\eta \Delta\zeta \right| \right)
\end{aligned}$$

olup (4.1.11) ifadesinden $|t - s| < \delta$ şartını sağlayan her $s, t \in [t_4, t_5]_{\mathbb{T}}$ için (3.2.19); dolayısıyla da (3.2.16) ifadesinin sağlandığı elde edilir. Bu ise $\Psi\Omega$ kümesinin lokal eş-sürekli olduğunu gösterir. Böylece Teorem 2.5.9'dan $\Psi\Omega$ kümesi $\mathrm{BC}([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ içinde göreceli kompakttır; dolayısıyla da Ψ kompakttır. Krasnosel´skiĭ'nin sabit nokta teoreminden $\Gamma x + \Psi x = x$ ifadesinin sağlandığı bir $x \in \Omega$ vardır. Her $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\begin{aligned}
x(t) =& \tilde{k} - A(t) x(\alpha(t)) + \Phi(t) + \int_t^\infty [t - \sigma(\eta)] D(\eta) x(\beta(\eta)) \Delta\eta \\
& - \int_t^\infty \int_{\nu(\zeta)}^\zeta C(\eta) x(\gamma(\eta)) \Delta\eta \Delta\zeta
\end{aligned}$$

veya buna denk olan

$$\begin{aligned}
x(t) + A(t) x(\alpha(t)) + \int_t^\infty \int_\zeta^\infty D(\zeta) x(\beta(\zeta)) \Delta\zeta \Delta\eta & \\
+ \int_t^\infty \int_{\nu(\zeta)}^\zeta C(\eta) x(\gamma(\eta)) \Delta\eta \Delta\zeta =& \Phi(t) + \tilde{k}
\end{aligned} \tag{4.1.12}$$

sağlanır. Son ifade iki defa türetilerek x fonksiyonunun (4.0.1) denkleminin çözümü olduğu görülür. (3.2.21) ifadesinin sağlandığı açıkça görülür ve ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.1.1, Sonuç 4.1.3 ve Teorem 4.1.8'den aşağıdaki iki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.9: *Kabul edelim ki (C1), (H4), (H5), (H9) ve (H10) sağlansın. Bu durumda,* (4.0.1) *denkleminin her sınırlı çözümü salınır veya sonsuzda sıfıra gider ancak ve ancak (H8) sağlanır.*

Sonuç 4.1.10: *Kabul edelim ki (C1), (H4), (H5), (H9) ve* (4.1.8) *sağlansın. Bu durumda,* $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ *üzerinde* $\varphi = 0$ *olmak üzere* (4.0.1) *denkleminin her sınırlı çözümü salınır ancak ve ancak (H8) sağlanır.*

Teorem 4.1.11: *Kabul edelim ki (C2), (H4), (H5), (H9) ve (H10) sağlansın; fakat (H8) sağlanmasın. Bu durumda,* (4.0.1) *denkleminin sonsuzda sıfıra yakınsamayan salınımsız bir sınırlı çözümü vardır.*

İspat: Bu teoremin ispatında Teorem 4.1.8'deki yöntemi takip edeceğiz. A fonksiyonu (C2) koşulunu sağladığından her $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için (3.1.17) sağlanacak şekilde $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ ve $a, \tilde{a} \in (1, \infty)_{\mathbb{R}}$ vardır. (H10) şartından her $t \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $|\Phi(t)| \leq k$ sağlanacak şekilde $t_2 \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ ve $k \in (0, \infty)_{\mathbb{R}}$ vardır. Bu durumda, $k = [-\tilde{a}m + (a - 1)\tilde{m}]/6$ ve $\tilde{m} > m$ olacak şekilde $m, \tilde{m} \in (0, \infty)_{\mathbb{R}}$ sabitleri bulunabilir. (H8) sağlanmayıp (H9) sağlandığından her $t \in [t_3, \infty)_{\mathbb{T}}$ için (4.1.10) sağlanacak şekilde $t_3 \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. $\tilde{k} := [\tilde{a}m + (1 + a)\tilde{m}]/2$ ve $t_4 \in [t_3, \infty)_{\mathbb{T}}$ noktası $\min\{\alpha(t_4), \beta(t_4), \gamma(t_4)\} \geq t_3$ özelliğini sağlayacak şekilde seçilsin. $\Omega \subset \mathrm{BC}([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ alt uzayı (3.2.12) ifadesindeki gibi tanımlanmak üzere $\Gamma : \Omega \to \Omega$ dönüşümü (3.2.22) ifadesindeki gibi ve $\Psi : \Omega \to \Omega$ dönüşümünü

$$(\Psi x)(t) := \begin{cases} (\Psi x)(t_4), & t \in [t_0, t_4)_{\mathbb{T}} \\ \dfrac{1}{A(\alpha^{-1}(t))}\Bigg[\displaystyle\int_{\alpha^{-1}(t)}^{\infty} [\alpha^{-1}(t) - \sigma(\eta)] D(\eta) x(\beta(\eta)) \Delta\eta \\ \qquad + \displaystyle\int_{\alpha^{-1}(t)}^{\infty} \int_{\nu(\zeta)}^{\zeta} C(\eta) x(\gamma(\eta)) \Delta\eta \Delta\zeta\Bigg], & t \in [t_4, \infty)_{\mathbb{T}} \end{cases} \tag{4.1.13}$$

olarak tanımlayalım. (3.1.17), (3.2.12) ve (4.1.10) ifadelerinden her $x, y \in \Omega$ için $\Gamma x + \Psi y \in \Omega$ olur. Buna ek olarak, her $x, y \in \Omega$ için $\|\Gamma x - \Gamma y\| < (1/a)\|x - y\|$ sağlandığından Γ dönüşümü bir büzülme dönüşümüdür. Burada, Teorem 3.2.9'un ispatındaki adımlara benzer adımlar takip edilirse Ψ dönüşümünün sürekli ve kompakt olduğunu göstermek mümkündür. Krasnosel´skiĭ'nin sabit nokta teoreminden $\Gamma x + \Psi x = x$ denkleminin Ω uzayında bir x çözümü vardır. Dolayısıyla, her $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$x(t) = \frac{1}{A(\alpha^{-1}(t))}\Bigg[\tilde{k} - x(\alpha^{-1}(t)) + \Phi(\alpha^{-1}(t)) + \int_{\alpha^{-1}(t)}^{\infty}[\alpha^{-1}(t) - \sigma(\eta)]D(\eta)x(\beta(\eta))\Delta\eta + \int_{\alpha^{-1}(t)}^{\infty}\int_{\nu(\zeta)}^{\zeta} C(\eta)x(\gamma(\eta))\Delta\eta\Delta\zeta\Bigg]$$

veya buna denk olan (4.1.12) denklemi sağlanır. (4.1.12) ifadesi iki defa türetilerek x fonksiyonunun (4.0.1) denkleminin çözümü olduğu görülür. Açıkça, x çözümü (3.2.21) ifadesini sağlar. Bu ise ispatı tamamlar. □

Teorem 4.1.4, Sonuç 4.1.5 ve Teorem 4.1.11'den aşağıdaki iki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.12: *Kabul edelim ki (C2), (H4), (H5), (H9) ve (H10) sağlansın. Bu durumda,* (4.0.1) *denkleminin her sınırlı çözümü salınır veya sonsuzda sıfıra yakınsar ancak ve ancak (H8) sağlanır.*

Sonuç 4.1.13: *Kabul edelim ki (C2), (H4), (H5) ve (H9) sağlansın. Bu durumda,* $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ *üzerinde* $\varphi = 0$ *olmak üzere* (4.0.1) *denkleminin her sınırlı çözümü salınır ancak ve ancak (H8) sağlanır.*

Teorem 4.1.14: *Kabul edelim ki (C3), (H4), (H5), (H9) ve (H10) sağlansın; fakat (H8) sağlanmasın. Bu durumda,* (4.0.1) *denkleminin sonsuzda sıfıra yakınsamayan salınımsız bir sınırlı çözümü vardır.*

İspat: Teoremin ispatında Krasnosel´skiĭ'nin sabit nokta teoremini kullanacağız. A fonksiyonu (C3) koşulunu sağladığından her $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için (3.1.21) sağlanacak şekilde $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ ve $a, \tilde{a} \in (1, \infty)_{\mathbb{R}}$ vardır. (H10) şartından her $t \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $|\Phi(t)| \leq k$ olacak şekilde $t_2 \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ ve $k \in (0, \infty)_{\mathbb{R}}$ bulunabilir. Bu durumda, $k = [-(1 +$

$\tilde{a})m + a\tilde{m}]/6$ ve $\tilde{m} > m$ sağlanacak şekilde $m, \tilde{m} \in (0,\infty)_{\mathbb{R}}$ vardır. (H8) sağlanmayıp (H9) sağlandığından her $t \in [t_3,\infty)_{\mathbb{T}}$ için (4.1.10) sağlananacak şekilde $t_3 \in [t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. Şimdi $\min\{\alpha(t_4), \beta(t_4), \gamma(t_4)\} \geq t_3$ olacak şekilde bir $t_4 \in [t_3,\infty)_{\mathbb{T}}$ seçelim ve $\tilde{k} := [(1-\tilde{a})m - a\tilde{m}]/2$ değerini tanımlayalım. Son olarak $\Gamma, \Psi : \Omega \to \Omega$ dönüşümlerini sırasıyla (3.2.22) ve (4.1.13) ifadelerindeki gibi tanımlarsak Teorem 4.1.11'in ispatındaki gibi $\Gamma + \Psi$ operatörünün Ω içinde bir çözümünün var olduğunu gösterebiliriz. Bu ise ispatı tamamlar. □

Teorem 4.1.7 ve Teorem 4.1.14'ten aşağıda verilen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.15: *Kabul edelim ki (C3), (H4), (H5), (H9) ve (H10) sağlansın. Bu durumda,* (4.0.1) *denkleminin her sınırlı çözümü salınır veya sonsuzda sıfıra gider ancak ve ancak (H8) sağlanır.*

4.2 Sınırsız Çözümlerin Davranışı

Teorem 4.2.1: *Kabul edelim ki (C1), (H4), (H5) ve (H9) sağlansın. Ayrıca, aşağıdaki koşullar da sağlansın.*

(H11) $\int_{t_0}^{\infty} D(\eta)\Delta\eta = \infty$.

(H12) $[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ *üzerinde* $\Phi^{\Delta^2} = \varphi$ *sağlanacak şekilde sınırlı bir* $\Phi \in \mathrm{C}^2_{\mathrm{rd}}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ *fonksiyonu vardır.*

Bu durumda, (4.0.1) *denkleminin her sınırsız çözümü salınır.*

İspat: Kabul edelim ki x fonksiyonu (4.0.1) denkleminin salınmayan bir sınırsız çözümü olsun. Genellikten ödün vermeden x çözümünün er geç pozitif olduğunu kabul edebiliriz. (C1) ve (H9) şartlarından uygun $a, \tilde{a} \in [0,1)_{\mathbb{R}}$ sabitleri ve yeterince büyük bir $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ vardır ve her $t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ için (H4), (H5) koşulları, (3.1.2) ifadesi, $x(t), x(\alpha(t)), x(\beta(t)), x(\gamma(t)) > 0$ ve

$$\int_{t_1}^{t}\int_{\nu(\zeta)}^{\zeta} C(\eta)\Delta\eta\Delta\zeta \leq \frac{1-\tilde{a}}{2} \tag{4.2.1}$$

sağlanır. x sınırsız olduğundan (3.1.7) ve (3.1.8) sağlanacak şekile artan ve ıraksak $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ dizisi vardır. y_x ve z_x fonksiyonlarını sırasıyla (3.1.4) ve (4.1.1) ifadelerindeki gibi tanımlayalım. Böylece her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} z_x(\xi_k) \geq & y_x(\xi_k) - \int_{t_1}^{\xi_k}\int_{\nu(\zeta)}^{\zeta} C(\eta)x(\gamma(\eta))\Delta\eta\Delta\zeta \\ \geq & \left[1 - \tilde{a} - \int_{t_1}^{\xi_k}\int_{\nu(\zeta)}^{\zeta} C(\eta)\Delta\eta\Delta\zeta\right]x(\xi_k) - \Phi(\xi_k) \\ \geq & \left[1 - \tilde{a} - \frac{1-\tilde{a}}{2}\right]x(\xi_k) - \Phi(\xi_k) \\ = & \frac{1-\tilde{a}}{2}x(\xi_k) - \Phi(\xi_k) \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

elde edilir. (4.2.2) ifadesinde (H12) ve (3.1.7) dikkate alınarak $k \to \infty$ için limit alındığında $\ell_z = \infty$ bulunur. Yani, z_x^{Δ} er geç pozitiftir. O halde, $\ell_{z^{\Delta}}$ negatif olmayan bir sabittir. Diger taraftan, (4.1.1) ifadesinden y_x^{Δ} fonksiyonunun er geç pozitif olduğu görülür. Böylece (3.1.13) ile tanımlı ℓ_y limitinin varlığı görülür. (3.1.2) ve (3.1.4) ifadelerinden her $k \in \mathbb{N}$ için $y_x(\xi_k) \geq (1-a)x(\xi_k) - \Phi(\xi_k)$ olup (H10) dikkate alınarak $k \to \infty$ için $\ell_y = \infty$ elde edilir. Böylece uygun bir $t_2 \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $[t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $y_x, y_x^{\Delta} > 0$ elde edilir. (4.1.3) ifadesi $[t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde integrallenerek

$$\infty > z_x^{\Delta}(t_2) - \ell_{z^{\Delta}} = \int_{t_2}^{\infty} D(\eta)x(\beta(\eta))\Delta\eta$$

elde edilir. Yani, (3.1.12) sağlanır. Şimdi, $t \in [t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\hat{x}(t) := \frac{x(t)}{y_x(t)}, \quad \hat{A}(t) := A(t)\frac{y_x(\alpha(t))}{y_x(t)} \quad \text{ve} \quad \hat{\Phi}(t) := \frac{\Phi(t)}{y_x(t)} \tag{4.2.3}$$

olarak tanımlansın. Böylece $\ell_y = \infty$, (3.1.12) ifadesi ve (H12) şartından

$$\liminf_{t\to\infty} \hat{x}(t) = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{t\to\infty} \hat{\Phi}(t) = 0 \tag{4.2.4}$$

olur. Ayrıca, y_x fonksiyonu $[t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde artan olduğundan her $t \in [t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$-a \leq -\hat{A}^{-}(t) \leq \hat{A}(t) \leq \hat{A}^{+}(t) \leq \tilde{a} \tag{4.2.5}$$

bulunur. (3.1.4) ifadesinden her $t \in [t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\begin{aligned} 1 = & \frac{x(t)}{y_x(t)} + \frac{A(t)x(\alpha(t))}{y_x(t)} - \frac{\Phi(t)}{y_x(t)} \\ = & \hat{x}(t) + \hat{A}(t)\hat{x}(\alpha(t)) - \hat{\Phi}(t) \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

elde edilir. Şimdi, $\hat{x}$ fonksiyonunun sınırlı olduğunu gösterelim. Aksi taktirde,

$$\lim_{k\to\infty} \hat{x}(\hat{\xi}_k) = \infty \quad \text{ve} \quad \hat{x}(\hat{\xi}_k) = \max\{\hat{x}(\eta) : \ \eta \in [t_0, \hat{\xi}_k]_{\mathbb{T}}\}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

sağlanacak şekile artan ve ıraksak $\{\hat{\xi}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ dizisi vardır. (4.2.6) ifadesinden her $k \in \mathbb{N}$ için

$$1 \geq (1-a)\hat{x}(\hat{\xi}_k) - \hat{\Phi}(\hat{\xi}_k)$$

olup (4.2.4) yardımıyla $k \to \infty$ için $1 \geq \infty$ çelişkisi elde edilir. O halde, $\hat{x}$ fonksiyonu sınırlı olmalıdır. Teorem 3.1.1'in ispatındaki adımlara benzer adımlar takip edilirse $\lim_{t\to\infty} \hat{x}(t) = 0$ bulunur. Bu ise (4.2.6) ifadesinde $t \to \infty$ için limit alındığında $1 = 0$ çelişkisini verir. Böylece denklemin salınmayan sınırsız çözümü yoktur. Sonuç olarak, her sınırsız çözüm salınır. □

Örnek 4.2.2: $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olsun ve $t \in [3\pi, \infty)_{\mathbb{R}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \big[x(t) - 2\,\mathrm{e}^{-t/2}\cos(t/2)x(t/2)\big]'' + \mathrm{e}^{5\pi/2}\left(2 + \frac{1}{t^2}\right)x(t - 5\pi/2) \\ - \frac{\mathrm{e}^{\pi/2}}{t^2}x\big(t - \pi/2) = \sin(t) \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

denklemini inceliyelim. $t \in [3\pi, \infty)_{\mathbb{R}}$ için $A(t) = -2\,\mathrm{e}^{-t/2}\cos(t/2)$, $\alpha(t) = t/2$, $B(t) = \mathrm{e}^{5\pi/2}(2 + 1/t^2)$, $\beta(t) = t - 5\pi/2$, $C(t) = \mathrm{e}^{\pi/2}/t^2$, $\gamma(t) = t - \pi/2$ ve $\varphi(t) = \sin(t)$ şeklindedir. Açıkça,

$$\limsup_{t\to\infty}\big[-2\,\mathrm{e}^{-t/2}\cos(t/2)\big]^{+} + \limsup_{t\to\infty}\big[-2\,\mathrm{e}^{-t/2}\cos(t/2)\big]^{-} = 0 < 1$$

olup A katsayısı (C1) koşulunu sağlar. $t \in [3\pi, \infty)_{\mathbb{R}}$ için sonsuzda limiti olmayan $\Phi(t) := -\sin(t)$ alınabilir. Açıkça, $t \in [3\pi, \infty)_{\mathbb{R}}$ için $\nu(t) = t - 2\pi$ kesin artan olup $\nu([3\pi, \infty)_{\mathbb{R}}) = [\pi, \infty)_{\mathbb{R}} = [\nu(3\pi), \infty)_{\mathbb{R}}$ sağlanır ve $D(t) = \mathrm{e}^{5\pi/2}(2+1/t^2) - \mathrm{e}^{\pi/2}/(t-2\pi)^2$ er geç pozitiftir. Diğer taraftan,

$$\int_{4\pi}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{5\pi/2}\left(2 + \frac{1}{\eta^2}\right) - \frac{\mathrm{e}^{\pi/2}}{(\eta - 2\pi)^2}\right)\Delta\eta = \infty \quad \text{ve} \quad \int_{4\pi}^{\infty}\int_{\eta-2\pi}^{\eta}\frac{\mathrm{e}^{\pi/2}}{\zeta^2}\Delta\zeta\Delta\eta = \mathrm{e}^{\pi/2}\log(2)$$

olup (H9) ve (H11) sağlanır. Teorem 4.2.1'in tüm şartları sağlandığından (4.2.7) denkleminin her sınırsız çözümü salınımlıdır. Örneğin, $t \in [3\pi, \infty)_{\mathbb{R}}$ için $x(t) = \mathrm{e}^{t}\sin(t)$ fonksiyonu böyle bir çözümdür.

Teorem 4.1.1, Teorem 4.2.1 ve Sonuç 4.1.3yardımıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.2.3: *Kabul edelim ki (C1), (H4), (H5), (H9)–(H11) sağlansın. Bu durumda,* (4.0.1) *denkleminin her çözümü salınır veya sonsuzda sıfıra yakınsar.*

Sonuç 4.2.4: *Kabul edelim ki (C1), (H4), (H5), (H9), (H11) ve* (4.1.8) *sağlansın. Bu durumda,* $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ *üzerinde* $\varphi = 0$ *olmak üzere* (4.0.1) *denkleminin her çözümü salınır.*

4.3 Bölüm Sonu Değerlendirmesi

Tezdeki Bölüm 4.1 ve Bölüm 4.2'de verilen salınım sonuçları (Karpuz et al. 2009, Manojlović et al. 2006, Parhi and Chand 2002, Parhi and Chand 1999) makalelerindeki sonuçları zaman skalasına genişletip bazı kısıtlarını da ortadan kaldırmaktadır. Ayrıca, Bölüm 4.1'deki pozitif çözümlerin varlığı üzerine verilen sonuçlar, salınım üzerine verilen sonuçlar için tamamlayıcı nitelikte olup literatürde daha önce (H8) ve (H9) şartları altında hiç incelenmemiştir. Literatürde salınım üzerine yapılmış olan çalışmaların büyük bir çoğunluğu ikinci mertebe üzerinde odaklaşmış olup bu denklemin sadece pozitif katsayı içerdiği durumu ele almıştır ve pozitif ve negatif katsayı içeren sonuçlar yok denecek kadar azdır. Dolayısıyla, burada verilen sonuçlar bu boşluğu oldurmaya yönelik bir adımdır. Bildiğimiz kadarıyla literatürde ikinci mertebeden denklemler üzerine verilen sonuçların hepsinde A katsayısının işaretinin sabit olduğu kabul edilmiştir. Burada verilen sonuçlar, pozitif ve negatif katsayı içeren denklemlerde nötral terimdeki A katsayısının işaret değiştirebilmesine de imkan vermektedir. Bölüm 4.1 ve Bölüm 4.2'deki sonuçların biraz daha genel halleri (Karpuz 2011) referansında yer almaktadır.

5 YÜKSEK MERTEBEDEN DENKLEMLER

Bu bölümde $\mathbb{T}$ üstten sınırsız bir zaman skalası, $n \in \mathbb{N}$, $t_0 \in \mathbb{T}$, $A \in \mathrm{C_{rd}}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$, $B, C \in \mathrm{C_{rd}}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},[0,\infty)_{\mathbb{R}})$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{C}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{T})$ kesin artan sınırsız fonksiyonlar, her $t \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t) \leq t$, $\alpha([t_0,\infty)_{\mathbb{T}}) = [\alpha(t_0),\infty)_{\mathbb{T}}$ ve $\varphi \in \mathrm{C_{rd}}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\big[x(t) + A(t)x(\alpha(t))\big]^{\Delta^n} + B(t)x(\beta(t)) - C(t)x(\gamma(t)) = \varphi(t), \quad t \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}} \tag{5.0.1}$$

denkleminin çözümlerinin asimptotik davranışı incelenecektir.

Tanım 5.0.1 (Çözüm)**:** $t_{-1} := \min_{t\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}}\{\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)\}$ ile tanımlanmak üzere $x : [t_{-1},\infty)_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için fonksiyonu için $x + A \cdot x \circ \alpha \in \mathrm{C^n_{rd}}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ olmak üzere (5.0.1) denklemini $[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ ekseni üzerinde özdeş olarak sağlıyorsa x fonksiyonuna (5.0.1) denkleminin *çözümü* denir.

(5.0.1) denkleminin çözümlerinin salınımlılık özelliği Tanım 3.0.12'deki gibidir.

5.1 Sınırlı Çözümlerin Davranışı

Teorem 5.1.1: *Kabul edelim ki A katsayısı için (C1) sağlansın. Buna ek olarak aşağıdaki koşullar sağlansın.*

(H13) $(-1)^{n-1}\int_{t_0}^{\infty} h_{n-1}(t_0,\sigma(\eta))B(\eta)\Delta\eta = \infty.$

(H14) $(-1)^{n-1}\int_{t_0}^{\infty} h_{n-1}(t_0,\sigma(\eta))C(\eta)\Delta\eta < \infty.$

(H15) $[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ *üzerinde* $\Phi^{\Delta^n} = \varphi$ *ve* $\lim_{t\to\infty}\Phi(t) = 0$ *sağlanacak şekilde bir* $\Phi \in \mathrm{C^n_{rd}}([t_0,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ *fonksiyonu vardır.*

Bu durumda, (5.0.1) *denkleminin her sınırlı çözümü salınır veya sonsuzda sıfıra yakınsar.*

İspat: Kabul edelim ki x fonksiyonu (5.0.1) denkleminin salınmayan bir sınırlı çözümü olsun. Genellikten ödün vermeden x çözümünün er geç pozitif olduğunu kabul edelim. (C1) şartından her $t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ için (3.1.2) ve $x(t), x(\alpha(t)), x(\beta(t)),\ x(\gamma(t)) > 0$

sağlanacak şekilde $a, \tilde{a} \in [0,1)_{\mathbb{R}}$ ve $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ olmak üzere y_x fonksiyonu (3.1.4) ve

$$z_x(t) := y_x(t) + \int_t^{\infty} h_{n-1}(t, \sigma(\eta)) C(\eta) x(\gamma(\eta)) \Delta\eta \tag{5.1.1}$$

ile tanımlansın. (5.1.1) ifadesinde Lemma 2.4.2 (ii) kullanılıp n defa türev alınarak her $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$z_x^{\Delta^n}(t) = y_x^{\Delta^n}(t) - C(t)x(\gamma(t)) \tag{5.1.2}$$

elde edilir. (5.1.2) ifadesi (5.0.1) denkleminde kullanılarak her $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$z_x^{\Delta^n}(t) = -B(t)x(\beta(t)) \leq 0 \tag{5.1.3}$$

olduğu görülür. Bu ise her $j \in [0, n)_{\mathbb{Z}}$ için $z_x^{\Delta^j}$ fonksiyonunun $[t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde monoton olduğunu söyler. O halde, bir $t_2 \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için z_x fonksiyonu $[t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde sabit işaretlidir. Diğer taraftan; x çözümünün sınırlılığı, (C1), (H14) ve (H15) şartları kullanılarak z_x fonksiyonunun sınırlı olduğu (3.1.4) ifadesinden öğrenilir. Lemma 2.4.5'ten her $j \in [1, n)_{\mathbb{Z}}$ için

$$\lim_{t\to\infty} z_x^{\Delta^j}(t) = 0 \tag{5.1.4}$$

olduğu sonucuna varılır. (5.1.4) dikkate alınarak (5.1.3) ifadesi, $[t, \infty)_{\mathbb{T}} \subset [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $(n-1)$ defa integre edildiğinde her $t \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$(-1)^{n-1} z_x^{\Delta}(t) = -\int_t^{\infty} \int_{\eta_{n-2}}^{\infty} \cdots \int_{\eta_2}^{\infty} C(\eta_1) x(\beta(\eta_1)) \Delta\eta_1 \cdots \Delta\eta_{n-2} \Delta\eta_{n-1}$$

olduğu görülür. Burada ardışık integraller için Lemma 2.4.2 (ii) uygulanarak her $t \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$(-1)^{n-1} z_x^{\Delta}(t) = (-1)^{n-1} \int_t^{\infty} h_{n-2}(t, \sigma(\eta)) B(\eta) x(\beta(\eta)) \Delta\eta$$

elde edilir. Son ifadeyi $[t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde integre eder ve Sonuç 2.4.3 (ii)'yi kullanırsak sonlu olan ℓ_z değeri (3.1.11) ifadesindeki gibi tanımlı olmak üzere

$$\int_{t_2}^{\infty} h_{n-1}(t_2, \sigma(\eta)) B(\eta) x(\beta(\eta)) \Delta\eta = z_x(t_2) - \ell_z$$

sonucuna ulaşılır. Son ifadenin sağ tarafı sonlu olup (H13) şartından (3.1.12) ifadesi elde edilir. (5.1.1) ifadesinde $t \to \infty$ için limit alalım, Lemma 2.4.6 (ii)'den (3.1.13) ile tanımlı ℓ_y değeri için $\ell_y = \ell_z$ olduğu görülür. İspatın geri kalan kısmında Teorem 3.1.1'in ispatındaki adımlar kullanılırsa (3.1.14) ifadesinin sağlandığı görülür ve ispat tamamlanır. □

Örnek 5.1.2: $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\Delta^3\left[x(t) + \frac{(-1)^t}{3}x(t-2)\right] + \left(8 + \frac{1}{t^4}\right)x(t-2) - \frac{1}{t^4}x(t-4) = 0, \quad t \in [1,\infty)_{\mathbb{Z}} \quad (5.1.5)$$

ile verilen fark denklemini inceliyelim. Bu denklemde $n = 3$ olup $t \in [1,\infty)_{\mathbb{Z}}$ için $A(t) = (-1)^t/3$, $\alpha(t) = t-2$, $B(t) = 8+1/t^4$, $\beta(t) = t-2$, $C(t) = 1/t^4$, $\gamma(t) = t-4$ ve $\varphi(t) \equiv 0$ şeklindedir. $s, t \in \mathbb{Z}$ için $h_2(t,s) = (t-s)^{\underline{2}}/2 = (t-s)(t-s-1)/2$ şeklinde olduğundan (H13)–(H15) şartlarının sağlandığını göstermek kolaydır. A fonksiyonu (C1) şartını sağladığından, Teorem 5.1.1'den (5.1.5) denkleminin her sınırlı çözümü salınır veya sonsuzda sıfıra yakınsar. $t \in [1,\infty)_{\mathbb{Z}}$ için $x(t) = (-1)^t$ fonksiyonunun (5.1.5) denkleminin salınan bir sınırlı çözümü olduğunu görmek kolaydır. Bildiğimiz kadarıyla literatürde bu denklemin çözümlerinin davranışıyla ilgili bilgi veren hiçbir sonuç yoktur.

Sonuç 5.1.3: *Kabul edelim ki n bir çift sayı olsun, (C1), (H13) ve* (4.1.8) *sağlansın. Bu durumda, $[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $C = 0$ ve $\varphi = 0$ olmak üzere* (5.0.1) *denkleminin her sınırlı çözümü salınır.*

İspat: Kabul edelim ki x fonksiyonu (5.0.1) denkleminin salınmayan bir sınırlı çözümü olsun. Genellikten ödün vermeden x çözümünün er geç pozitif olduğunu kabul edelim. Her $t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $x(t), x(\alpha(t)), x(\beta(t)), x(\gamma(t)) > 0$ sağlanacak şekilde $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. Teorem 5.1.1'den (3.1.14) sağlanır. Bu durumda, (3.1.4) ve A fonksiyonunun sınırlılığından (3.1.14) ile tanımlı değer için $\ell_y = 0$ elde edilir. n çift sayı olduğundan Kiguradze'nin lemmasından $[t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $y^{\Delta} > 0$ sağlanacak şekilde $t_2 \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. (4.1.8) ifadesinden $A(t_3) \geq 0$ olacak şekilde $t_3 \in [t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. Böylece her $t \in [t_3,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $y_x(t) \geq y_x(t_3) = x(t_3)+A(t_3)x(\alpha(t_3)) > 0$ olup $[t_3,\infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $y_x > 0$

elde edilir. Bu ise $\ell_y > 0$ çelişkisini yaratır. Sonuç olarak her sınırlı çözüm salınır ve ispat biter. □

Teorem 5.1.4: *Kabul edelim ki (C2), (H13)–(H15) sağlansın. Bu durumda,* (5.0.1) *denkleminin her sınırlı çözümü salınır veya sonsuzda sıfıra yakınsar.*

İspat: Teorem 3.1.3 ve Teorem 5.1.1'in ispatındaki adımlar kullanılarak salınmayan sınırlı çözümlerin sonsuzda sıfır değerine yakınsadığı gösterilebilir. □

Sonuç 5.1.5: *Kabul edelim ki n bir çift sayı olsun, (C2) ve (H13) sağlansın. Bu durumda, $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $C = 0$ ve $\varphi = 0$ olmak üzere* (5.0.1) *denkleminin her sınırlı çözümü salınır.*

İspat: İspat, Sonuç 5.1.3'ün ispatının aynısıdır. □

Teorem 5.1.6: *Kabul edelim ki (C3), (H13)–(H15) sağlansın. Bu durumda* (5.0.1) *denkleminin her sınırlı çözümü salınır veya sonsuzda sıfıra yakınsar.*

İspat: Teorem 3.1.4 ve Teorem 5.1.1'in ispatındaki adımlar kullanılarak salınmayan sınırlı çözümlerin sonsuzda sıfıra yakınsadığı gösterilebilir. □

Sonuç 5.1.7: *Kabul edelim ki n bir tek sayı olsun, (C3) ve (H13) sağlansın. Bu durumda, $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $C = 0$ ve $\varphi = 0$ olmak üzere* (5.0.1) *denkleminin her sınırlı çözümü salınır.*

İspat: Kabul edelim ki x fonksiyonu (5.0.1) denkleminin salınmayan bir sınırlı çözümü olsun ve x çözümünün er geç pozitif olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $x(t), x(\alpha(t)), x(\beta(t)), x(\gamma(t)) > 0$ sağlanacak şekilde $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. Teorem 5.1.6'dan (3.1.14) sağlanır. Bu durumda $z_x = y_x$ olup bu fonksiyon (5.1.3) ifadesinden dolayı salınımsızdır ve (3.1.4) ve A fonksiyonunun sınırlılığından $\ell_y = 0$ elde edilir. y_x fonksiyonu uygun bir $t_2 \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $[t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde sabit işaretli olsun. Şimdi y_x fonksiyonunun $[t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde pozitif olduğunu kabul edelim. Her $t \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $x(t) = y_x(t) - A(t)x(\alpha(t)) > ax(\alpha(t)) > x(\alpha(t))$ olup $\liminf_{t\to\infty} x(t) > 0$ çelişkisi elde edilir. O halde, $[t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $y_x < 0$ olmalıdır. n tek sayı olduğundan

Kiguradze'nin lemmasından $(-y_x)$ artan olmalıdır. Yani, y_x azalandır. Bu durumda da $\ell_y < 0$ olup çelişki elde edilir. Sonuç olarak her sınırlı çözüm salınır. $\square$

Örnek 5.1.8: $q \in (1,\infty)_{\mathbb{R}}$ olmak üzere $\mathbb{T} = \overline{q^{\mathbb{Z}}}$ olarak alalım ve

$$\mathrm{D}_q^3\left[x(t) - 2x(t/q)\right] + \frac{6(q+1)(q^2+1)}{(q-1)^3q^3t^3}x(t) = 0, \quad t \in [1,\infty)_{\overline{q^{\mathbb{Z}}}} \tag{5.1.6}$$

ile verilen q-fark denklemini göz önüne alalım. Bu denklemde $n = 3$ ve $t \in [1,\infty)_{\overline{q^{\mathbb{Z}}}}$ için $A(t) \equiv -2$, $\alpha(t) = t/q$, $B(t) = [6(q+1)(q^2+1)]/[(q-1)^3q^3t^3]$, $\beta(t) = t$, $C(t) \equiv 0$, $\gamma(t) = t$ ve $\varphi(t) = \Phi(t) \equiv 0$ şeklindedir. Sonuç 5.1.7'nin tüm şartlarının sağlandığı gösterilebilir. Açıkça, $t \in [1,\infty)_{\overline{q^{\mathbb{Z}}}}$ için $x(t) = (-1)^{\log_q(t)}$ ile tanımlı fonksiyon (5.1.6) denkleminin salınımlı bir sınırlı çözümüdür.

Teorem 5.1.9: *Kabul edelim ki (C1), (H14) ve (H15) sağlansın; fakat (H13) sağlanmasın. Bu durumda,* (5.0.1) *denkleminin sonsuzda sıfıra yakınsamayan salınımsız bir sınırlı çözümü vardır.*

İspat: Belirtilen salınımsız çözümün varlığını göstermek için Krasnosel´skiĭ'nin sabit nokta teoremini kullanacağız. A fonksiyonu (C1) koşulunu sağladığından her $t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ için (3.1.2) sağlanacak şekilde $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ ve $a, \tilde{a} \in [0,1)_{\mathbb{R}}$ vardır. (H15) şartından her $t \in [t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $|\Phi(t)| \leq k$ olacak şekilde $t_2 \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ ve $k \in (0,\infty)_{\mathbb{R}}$ vardır. Bu durumda, $k = [-m+(1-a-\tilde{a})\tilde{m}]/6$ ve $\tilde{m} > m$ şartını sağlayan $m, \tilde{m} \in (0,\infty)_{\mathbb{R}}$ vardır. (H14) sağlanıp (H13) sağlanmadığından Lemma 2.4.6 (ii)'den her $t \in [t_3,\infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\left|\int_t^\infty h_{n-1}(t,\sigma(\eta))B(\eta)\Delta\eta\right| \leq \frac{k}{\tilde{m}} \quad \text{ve} \quad \left|\int_t^\infty h_{n-1}(t,\sigma(\eta))C(\eta)\Delta\eta\right| \leq \frac{k}{\tilde{m}} \tag{5.1.7}$$

sağlanacak şekilde $t_3 \in [t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. $\mathrm{BC}([t_3,\infty)_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ ile $[t_3,\infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde tanımlı tüm reel değerli sınırlı ve sürekli fonksiyonların supremum normu ile oluşturulmuş Banach uzayını gösterelim. Bu uzay içinde Ω alt uzayını (3.2.12) ile tanımlayalım. $\min\{\alpha(t_4),\beta(t_4),\gamma(t_4)\} \geq t_3$ olacak şekilde $t_4 \in [t_3,\infty)_{\mathbb{T}}$ seçelim ve $\tilde{k} := [m+(1-a+\tilde{a})\tilde{m}]/2$ değerini tanımlayalım. Şimdi $\Gamma : \Omega \to \Omega$ dönüşümü (3.2.13) ifadesindeki gibi ve $\Psi : \Omega \to \Omega$ dönüşümünü

$$(\Psi x)(t) := \begin{cases} (\Psi x)(t_4), & t \in [t_0, t_4)_{\mathbb{T}} \\ \displaystyle\int_t^\infty h_{n-1}(t, \sigma(\eta))\big[C(\eta)x(\gamma(\eta)) - B(\eta)x(\beta(\eta))\big]\Delta\eta, & t \in [t_4, \infty)_{\mathbb{T}} \end{cases}$$

ile tanımlayalım. İddia ediyoruz ki $\Gamma x + \Psi x = x$ denkleminin Ω içinde bir sabit noktası vardır. Açıkça, (3.2.12) ve (5.1.7) ifadelerinden her $x, y \in \Omega$ için $\Gamma x + \Psi y \in \Omega$ olur. Ayrıca, $\max\{a, \tilde{a}\} < 1$ ve $[t_3, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $\|\Gamma x - \Gamma y\| \leq \max\{a, \tilde{a}\}\|x - y\|$ olduğundan Γ dönüşümünün bir büzülme oluğunu görürüz. Şimdi de Ψ dönüşümünün sürekli ve kompakt olduğunu gösterelim. Ω içinde bir x elemanına noktasal olarak yakınsayan $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ dizisini seçelim. Her $t \in [t_4, \infty)_{\mathbb{T}}$ ve $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\big|(\Psi x_k)(t) - (\Psi x)(t)\big| =& \bigg|\int_t^\infty h_{n-1}(t, \sigma(\eta))C(\eta)\big[x_k(\gamma(\eta)) - x(\gamma(\eta))\big]\Delta\eta \\ &+ \int_t^\infty h_{n-1}(t, \sigma(\eta))B(\eta)\big[x_k(\beta(\eta)) - x(\beta(\eta))\big]\Delta\eta\bigg|.\end{aligned}$$

elde edilir. Lebesgue'nin baskın yakınsaklık teoreminden her $t \in [t_4, \infty)_{\mathbb{T}}$ için (3.2.14) elde edilir. Böylece Ψ dönüşümü Ω üzerinde süreklidir. $\Psi\Omega$'nın göreceli kompaktlığını göstermek için Teorem 2.5.9'un şartlarının sağlandığını göstereceğiz. Açıkça, Ω düzgün sınırlıdır. Lemma 2.4.6 (ii)'den her $\varepsilon \in (0, \infty)_{\mathbb{R}}$ için $t \in [t_5, \infty)_{\mathbb{T}}$ olduğunda

$$\left|\int_t^\infty h_{n-1}(t, \sigma(\eta))B(\eta)\Delta\eta\right| < \frac{\varepsilon}{4\tilde{m}} \quad \text{ve} \quad \left|\int_t^\infty h_{n-1}(t, \sigma(\eta))C(\eta)\Delta\eta\right| < \frac{\varepsilon}{4\tilde{m}}$$

sağlanacak şekilde $t_5 \in [t_4, \infty)_{\mathbb{T}}$ bulunabilir. Böylece $\Psi\Omega$'nın düzgün Cauchy olduğu görülür. Çünkü her $s, t \in [t_5, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\begin{aligned}\big|(\Psi x)(t) - (\Psi x)(s)\big| =& \bigg|\left[\int_t^\infty h_{n-1}(t, \sigma(\eta))\big[C(\eta)x(\gamma(\eta)) - B(\eta)x(\beta(\eta))\big]\Delta\eta\right] \\ &- \left[\int_s^\infty h_{n-1}(s, \sigma(\eta))\big[C(\eta)x(\gamma(\eta)) - B(\eta)x(\beta(\eta))\big]\Delta\eta\right]\bigg| \\ \leq& \tilde{m}\Bigg(\left|\int_t^\infty h_{n-1}(t, \sigma(\eta))C(\eta)\Delta\eta\right| + \left|\int_t^\infty h_{n-1}(t, \sigma(\eta))B(\eta)\Delta\eta\right| \\ &+ \left|\int_s^\infty h_{n-1}(s, \sigma(\eta))C(\eta)\Delta\eta\right| + \left|\int_s^\infty h_{n-1}(s, \sigma(\eta))B(\eta)\Delta\eta\right|\Bigg)\end{aligned}$$

olup (3.2.16) sağlanır. Şimdi $\Psi\Omega$ kümesinin $[t_4, t_5]_{\mathbb{T}}$ üzerinde lokal eşsürekli olduğunu gösterelim. $n = 1$ ise integralin yakınsaklığından her $\varepsilon \in (0, \infty)_{\mathbb{R}}$ için $|t - s| < \delta$ şartını sağlayan her $s, t \in [t_4, t_5]_{\mathbb{T}}$ için

$$\left| \int_s^t B(\eta)\Delta\eta \right| < \frac{\varepsilon}{2\tilde{m}} \quad \text{ve} \quad \left| \int_s^t C(\eta)\Delta\eta \right| < \frac{\varepsilon}{2\tilde{m}} \tag{5.1.8}$$

olacak şekilde $\delta \in (0, \infty)_{\mathbb{R}}$ vardır. Bu durumda, (5.1.8) yardımıyla $|t - s| < \delta$ şartını sağlayan her $s, t \in [t_4, t_5]_{\mathbb{T}}$ için (3.2.16) sağlanır. $n \geq 2$ ise Lemma 2.4.6 (ii)'den her $t \in [t_4, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\left| \int_t^\infty h_{n-2}(t, \sigma(\eta))B(\eta)\Delta\eta \right| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2\tilde{m}} \quad \text{ve} \quad \left| \int_t^\infty h_{n-2}(t, \sigma(\eta))C(\eta)\Delta\eta \right| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2\tilde{m}} \tag{5.1.9}$$

olacak şekilde bir $\tilde{\varepsilon} \in (0, \infty)_{\mathbb{R}}$ vardır. Böylece Sonuç 2.4.3 (ii)'den ve (5.1.9) ifadesinden her $s, t \in [t_4, t_5]_{\mathbb{T}}$ için

$$\begin{aligned} \big|(\Psi x)(t) - (\Psi x)(s)\big| =& \Bigg| \Bigg[\int_t^\infty h_{n-1}(t, \sigma(\eta))\big[C(\eta)x(\gamma(\eta)) - B(\eta)x(\beta(\eta))\big]\Delta\eta \\ & - \int_s^\infty h_{n-1}(s, \sigma(\eta))\big[C(\eta)x(\gamma(\eta)) - B(\eta)x(\beta(\eta))\big]\Delta\eta \Bigg] \Bigg| \\ =& \Bigg| \int_s^t \int_\eta^\infty h_{n-2}(\eta, \sigma(\zeta))C(\zeta)x(\gamma(\zeta))\Delta\zeta\Delta\eta \\ & - \int_s^t \int_\eta^\infty h_{n-2}(\eta, \sigma(\zeta))B(\zeta)x(\beta(\zeta))\Delta\zeta\Delta\eta \Bigg| \end{aligned}$$

olup (3.2.19) ifadesinin sağlandığı görülür. $\delta := \varepsilon/\tilde{\varepsilon}$ ile tanımlanırsa $\delta \in (0, \infty)_{\mathbb{R}}$ olup, $|t-s| < \delta$ şartını sağlayan her $s, t \in [t_4, t_5]_{\mathbb{T}}$ için (3.2.16) sağlanır. Sonuç olarak,$\Psi\Omega$ lokal eşsüreklidir. Teorem 2.5.9'dan, $\Psi\Omega$ kümesi $\mathrm{BC}([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ içinde göreceli kompakttır; dolayısıyla da Ψ kompakttır. Krasnosel´skiĭ'nin sabit nokta teoreminden $\Gamma x + \Psi x = x$ ifadesinin sağlandığı bir $x \in \Omega$ vardır. O halde, her $t \in [t_4, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$x(t) = -A(t)x(\alpha(t)) + \int_t^\infty h_{n-1}(t, \sigma(\eta))\big[B(\eta)x(\beta(\eta)) - C(\eta)x(\gamma(\eta))\big]\Delta\eta + \Phi(t) + \tilde{k}$$

veya buna denk olan

$$x(t) + A(t)x(\alpha(t)) - \int_t^\infty h_{n-1}(t, \sigma(\eta))\big[B(\eta)x(\beta(\eta)) - C(\eta)x(\gamma(\eta))\big]\Delta\eta = \Phi(t) + \tilde{k} \tag{5.1.10}$$

denklemi n defa türetilerek x fonksiyonunun (5.0.1) denklemini sağladığı görülür. Açıkça, bu x çözümü için (3.2.21) sağlanır ve ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 5.1.1, Sonuç 5.1.3 ve Teorem 5.1.9'dan aşağıdaki iki sonuç elde dilir.

Sonuç 5.1.10: *Kabul edelim ki (C1), (H14) ve (H15) sağlansın. Bu durumda,* (5.0.1) *denkleminin her sınırlı çözümü salınır veya sonsuzda sıfıra yakınsar ancak ve ancak (H13) sağlanır.*

Sonuç 5.1.11: *Kabul edelim ki n bir çift sayı olsun, (C1) ve* (4.1.8) *sağlansın. Bu durumda, $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $C = 0$ ve $\varphi = 0$ olmak üzere* (5.0.1) *denkleminin her sınırlı çözümü salınır ancak ve ancak (H13) sağlanır.*

Teorem 5.1.12: *Kabul edelim ki (C2), (H14) ve (H15) sağlansın; fakat (H13) sağlanmasın. Bu durumda,* (5.0.1) *denkleminin sonsuzda sıfıra yakınsamayan salınımsız bir sınırlı çözümü vardır.*

İspat: Teoremin ispatında Krasnosel´skiĭ'nin sabit nokta teoremini kullanacağız. A fonksiyonu (C2) koşulunu sağladığından her $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için (3.1.17) sağlanacak şekilde $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ ve $a, \tilde{a} \in (1, \infty)_{\mathbb{R}}$ vardır. (H15) şartından her $t \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $|\Phi(t)| \leq k$ sağlanacak şekilde $t_2 \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ ve $k \in (0, \infty)_{\mathbb{R}}$ vardır. Bu durumda, $k = [-\tilde{a}m + (a - 1)\tilde{m}]/6$ ve $\tilde{m} > m$ olacak şekilde $m, \tilde{m} \in (0, \infty)_{\mathbb{R}}$ bulunabilir. Diğer taraftan (H14) sağlanıp (H13) sağlanmadığından Lemma 2.4.6 (ii)'den her $t \in [t_3, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\left| \int_t^\infty h_{n-1}(t, \sigma(\eta)) B(\eta) \Delta\eta \right| \leq \frac{k}{\tilde{m}} \quad \text{ve} \quad \left| \int_t^\infty h_{n-1}(t, \sigma(\eta)) C(\eta) \Delta\eta \right| \leq \frac{k}{\tilde{m}} \qquad (5.1.11)$$

sağlanacak şekilde $t_3 \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. $\mathrm{BC}([t_3, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ ile $[t_3, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde tanımlı tüm reel değerli sınırlı ve sürekli fonksiyonların supremum normu ile oluşturulmuş Banach uzayını gösterelim. Bu uzay içinde Ω alt uzayını (3.2.12) ile tanımlayalım. $\min\{\alpha(t_4), \beta(t_4), \gamma(t_4)\} \geq t_3$ olacak şekilde $t_4 \in [t_3, \infty)_{\mathbb{T}}$ seçelim ve $\tilde{k} := [\tilde{a}m + (a + 1)\tilde{m}]/2$ değerini tanımlayalım. $\Gamma : \Omega \to \Omega$ dönüşümü (3.2.22) ifadesindeki gibi ve

$\Psi : \Omega \to \Omega$ dönüşümünü

$$(\Psi x)(t) := \begin{cases} (\Psi x)(t_4), & t \in [t_0, t_4)_{\mathbb{T}} \\ \dfrac{1}{A(\alpha^{-1}(t))} \displaystyle\int_{\alpha^{-1}(t)}^{\infty} h_{n-1}(\alpha^{-1}(t), \sigma(\eta)) \\ \qquad\qquad \times \big[B(\eta)x(\beta(\eta)) - C(\eta)x(\gamma(\eta))\big]\Delta\eta, & t \in [t_4, \infty)_{\mathbb{T}} \end{cases} \tag{5.1.12}$$

ile tanımlayalım. İddia ediyoruz ki $\Gamma x + \Psi x = x$ denkleminin Ω içinde bir sabit noktası vardır. Önce her $x, y \in \Omega$ için $\Gamma x + \Psi y \in \Omega$ olduğunu gösterelim. Açıkça, (3.2.12) ve (5.1.11) ifadelerinden her $x, y \in \Omega$ için $\Gamma x + \Psi y \in \Omega$ olur. Ayrıca, $a \in (1, \infty)_{\mathbb{R}}$ ve $[t_3, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $\|\Gamma x - \Gamma y\| \leq (1/a)\|x - y\|$ olduğundan Γ dönüşümünün bir büzülme oluğunu görürüz. Ψ dönüşümünün sürekli ve kompakt olduğunu göstermek zor değildir. Krasnosel´skiĭ'nin sabit nokta teoreminden $\Gamma x + \Psi x = x$ ifadesinin sağlandığı bir $x \in \Omega$ vardır. Yani,

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{1}{A(\alpha^{-1}(t))}\bigg[\tilde{k} - x(\alpha^{-1}(t)) + \Phi(\alpha^{-1}(t)) \\ & + \int_{\alpha^{-1}(t)}^{\infty} h_{n-1}(\alpha^{-1}(t), \sigma(\eta))\big[B(\eta)x(\beta(\eta)) - C(\eta)x(\gamma(\eta))\big]\Delta\eta\bigg] \end{aligned}$$

veya buna denk olan (5.1.10) ifadesi elde edilir. Son olarak (5.1.10) ifadesi n defa türetilerek, x fonksiyonunun aynı zamanda (5.0.1) denkleminin çözümü olduğu görülür. Açıkça, x çözümü için (3.2.21) sağlanır ve ispat tamamlanır. □

Teorem 5.1.4, Sonuç 5.1.5 ve Teorem 5.1.12'den aşağıdaki iki sonuç elde dilir.

Sonuç 5.1.13: *Kabul edelim ki (C2), (H14) ve (H15) sağlansın. Bu durumda,* (5.0.1) *denkleminin her sınırlı çözümü salınır veya sonsuzda sıfıra yakınsar ancak ve ancak (H13) sağlanır.*

Sonuç 5.1.14: *Kabul edelim ki n bir çift sayı olsun ve (C2) sağlansın. Bu durumda,* $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ *üzerinde $C = 0$ ve $\varphi = 0$ olmak üzere* (5.0.1) *denkleminin her sınırlı çözümü salınır ancak ve ancak (H13) sağlanır.*

Teorem 5.1.15: *Kabul edelim ki (C3), (H14) ve (H15) sağlansın; fakat (H13) sağlanmasın. Bu durumda,* (5.0.1) *denkleminin sonsuzda sıfıra yakınsamayan salınımsız bir sınırlı çözümü vardır.*

İspat: İspatta Krasnosel´skiĭ'nin sabit nokta teoremini kullanacağız. (C3) sağladığından her $t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ için (3.1.21) sağlanacak şekilde $t_1 \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ ve $a, \tilde{a} \in (1,\infty)_{\mathbb{R}}$ vardır. (H15) şartından her $t \in [t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $|\Phi(t)| \leq k$ olacak şekilde $t_2 \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ ve $k \in (0,\infty)_{\mathbb{R}}$ vardır. Bu durumda, $k = [-(1+\tilde{a})m + a\tilde{m}]/6$ ve $\tilde{m} > m$ şartını sağlayan $m, \tilde{m} \in (0,\infty)_{\mathbb{R}}$ sabitleri bulunabilir. Diğer taraftan (H14) sağlanıp (H13) sağlanmadığından her $t \in [t_3,\infty)_{\mathbb{T}}$ için (5.1.11) sağlanacak şekilde $t_3 \in [t_2,\infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. Şimdi $\min\{\alpha(t_4),\beta(t_4),\gamma(t_4)\} \geq t_3$ olacak şekilde $t_4 \in [t_3,\infty)_{\mathbb{T}}$ seçelim ve $\tilde{k} := [(1-\tilde{a})m - a\tilde{m}]/2$ değerini tanımlayalım. Son olarak $\Gamma, \Psi : \Omega \to \Omega$ dönüşümlerini sırasıyla (3.2.22) ve (5.1.12) ifadelerindeki gibi tanımlarsak, $\Gamma + \Psi$ operatörünün Ω içinde bir çözümünün var olduğunu Teorem 5.1.12'deki gibi gösterebiliriz. İspat böylece tamamlanır. □

Teorem 5.1.6, Sonuç 5.1.7 ve Teorem 5.1.15'ten aşağıdaki iki sonuç elde dilir.

Sonuç 5.1.16: *Kabul edelim ki (C3), (H14) ve (H15) sağlansın. Bu durumda,* (5.0.1) *denkleminin her sınırlı çözümü salınır veya sonsuzda sıfıra yakınsar ancak ve ancak (H13) sağlanır.*

Sonuç 5.1.17: *Kabul edelim ki n bir tek sayı olsun ve (C3) sağlansın. Bu durumda, $[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $C = 0$ ve $\varphi = 0$ olmak üzere* (5.0.1) *denkleminin her sınırlı çözümü salınır ancak ve ancak (H13) sağlanır.*

Örnek 5.1.18: $\mathbb{T}$ zaman skalasını $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ veya $\mathbb{P}_{1/2,1/2}$ kümelerinden herhangi birisi olarak alalım. $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$ ve $b, c \in (0,\infty)_{\mathbb{R}}$ olmak üzere

$$\big[x(t) + \lambda x(t-2)\big]^{\Delta^n} + \frac{1}{t^b}x(t-1) - \frac{1}{t^c}x(t) = 0, \quad t \in [1,\infty)_{\mathbb{T}} \tag{5.1.13}$$

denklemini dikkate alalım. Bu denklemde $t \in [1,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $A(t) \equiv \lambda$, $\alpha(t) = t-2$, $B(t) = 1/t^b$, $\beta(t) = t-1$, $C(t) = 1/t^c$, $\gamma(t) = t$ ve $\varphi(t) = \Phi(t) \equiv 0$ olduğu görülür. Açıkça, $\lambda = \pm 1$ veya $c \geq n$ olduğunda yukarıdaki sonuçlardan hiç birisi (5.1.13) denklemine uygulanamaz. Ancak, $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{\pm 1\}$ ve $c < n$ şartları altında Sonuç 5.1.10, Sonuç 5.1.13 ve Sonuç 5.1.16'dan (5.1.13) denkleminin sınırlı her çözümünün $b \geq n$ olması halinde salındığını veya sonsuzda sıfıra yakınsadığını görürüz. Diğer taraftan $b < n$ ise denklem sınırlı salınımsız ve sonsuzda sıfıra yakınsamayan bir çözüme sahiptir.

5.2 Sınırsız Çözümlerin Davranışı

Teorem 5.2.1: *Kabul edelim ki $n \geq 2$ olsun ve A katsayısı için (C1) sağlansın. Buna ek olarak aşağıdaki koşullar sağlansın.*

(H16) $(-1)^{n-2} \int_{t_0}^{\infty} h_{n-2}(t_0, \sigma(\eta)) B(\eta) \Delta \eta = \infty.$

(H17) Yeterince büyük her $s \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ ve $(n - j)$ tek olacak şekilde her $j \in [1, n - 2]_{\mathbb{Z}}$ için

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{(-1)^{j-1} h_{n-j-1}(s, \sigma(t)) h_{j-1}(\beta(t), s)}{h_{n-2}(s, \sigma(t))} > 0.$$

(H18) $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $\Phi^{\Delta^n} = \varphi$ olacak şekilde sınırlı bir $\Phi \in \mathrm{C}_{\mathrm{rd}}^{\mathrm{n}}([t_0, \infty)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ fonksiyonu vardır.

Bu durumda, $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $C = 0$ olmak üzere (5.0.1) *denkleminin her sınırsız çözümü salınır.*

İspat: Genellikten ödün vermeden x fonksiyonunun (5.0.1) denkleminin er geç pozitif bir sınırsız çözümü olduğunu kabul edelim. (C1) şartlarından her $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için (3.1.2) ve $x(t), x(\alpha(t)), x(\beta(t)), x(\gamma(t)) > 0$ sağlanacak şekilde $a, \tilde{a} \in [0, 1)_{\mathbb{R}}$ ve $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır. $[t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $y_x = z_x$ fonksiyonu (3.1.4) ile tanımlansın. Böylece her $t \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ için (5.1.3) sağlanır. Bu durumda, y_x monoton olup (3.1.13) ifadesindeki ℓ_y değeri tanımlıdır. x çözümünün sınırsızlığı kullanılarak Teorem 4.2.1'in ispatındaki adımlar takip edilirse $\ell_y = \infty$ olduğunu öğreniriz. Kiguradze'nin lemmasından $t_2 \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ ve $(n - m)$ çift olacak şekilde $m \in [1, n)_{\mathbb{Z}}$ için $[t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde

$$\begin{cases} y_x^{\Delta^j} > 0, & j \in [0, m)_{\mathbb{Z}} \\ (-1)^{j-m} y_x^{\Delta^j} > 0, & j \in [m, n)_{\mathbb{Z}} \end{cases}$$

sağlanır. Lemma 2.4.5'ten her $j \in [0, m)_{\mathbb{Z}}$ için

$$\lim_{t\to\infty} y_x^{\Delta^j}(t) = 0$$

olduğu görülür. (5.1.3) ifadesi $[t, \infty)_{\mathbb{T}} \subset [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $(n-m)$ defa integre edilerek Lemma 2.4.2 (ii) uygulanırsa $\ell_{y_x^{\Delta^m}} := \lim_{t\to\infty} y_x^{\Delta^m}(t)$ olmak üzere her $t \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$y_x^{\Delta^m}(t_2) - \ell_{y_x^{\Delta^m}} = \int_{t_2}^{\infty} h_{n-m-1}(t_2, \sigma(\eta))B(\eta)x(\beta(\eta))\Delta\eta \tag{5.2.1}$$

olduğu görülür. Böylece (5.2.1) ifadesinin sol tarafı sonlu olduğundan (H16) şartı ve Özellik 2.4.1'den

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{(-1)^{m-1}h_{n-m-1}(t_2, \sigma(t))x(\beta(t))}{h_{n-2}(t_2, \sigma(t))} = 0$$

olduğu görülür ve (H17) şartından da

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{x(\beta(t))}{h_{m-1}(\beta(t), t_2)} = 0$$

veya

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{x(t)}{h_{m-1}(t, t_2)} = 0 \tag{5.2.2}$$

olur. Taylor formülü ve Özellik 2.4.1'den her $t \in [t_2, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\begin{aligned} y_x(t) =& \sum_{j=0}^{m-1} y_x^{\Delta^j}(t_2)h_j(t, t_2) + \int_{t_2}^{t} h_{m-1}(t, \sigma(\eta))y_x^{\Delta^m}(\eta)\Delta\eta \\ \geq& y_x^{\Delta^{m-1}}(t_2)h_{m-1}(t, t_2) \end{aligned}$$

olup

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{y_x(t)}{h_{m-1}(t, t_2)} \geq y_x^{\Delta^{m-1}}(t_2) > 0 \tag{5.2.3}$$

elde edilir. $\hat{x}, \hat{A}$ ve $\hat{\Phi}$ fonksiyonları (4.2.3) ifadesindeki gibi tanımlanırsa (5.2.2) ve (5.2.3) ifadelerinden (4.2.4) ifadesinin sağlandığı görülür. Teorem 4.2.1'in ispatındaki adımlar takip edilirse çelişki elde edilir. Böylece (5.0.1) denkleminin her sınırsız çözümü salınır. $\square$

Örnek 5.2.2: $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\Delta^3\left[x(t) + \left(-\frac{1}{3}\right)^t x(t-2)\right] + 64x(t) = 0, \quad t \in [1, \infty)_{\mathbb{Z}} \tag{5.2.4}$$

ile verilen fark denklemini inceliyelim. Burada $n = 3$ ve $t \in [1, \infty)_{\mathbb{Z}}$ için $A(t) = (-1/3)^t$, $\alpha(t) = t - 2$, $B(t) \equiv 64$, $\beta(t) = t$ ve $\varphi(t) = \Phi(t) \equiv 0$ şeklindedir. A fonksiyonu için (C1) şartının sağlandığı açıktır. $k \in \mathbb{N}_0$ ve $s, t \in [1, \infty)_{\mathbb{Z}}$ için $h_k(t, s) = (t - s)^{\underline{k}}/k!$ olup (H16) ve (H17) şartlarının sağlandığını görmek kolaydır. Denklem homojen olduğundan aşikar olarak (H18) şartı da sağlanır. Teorem 5.2.1'in tüm şartları sağlandığından (5.2.4) denkleminin sınırsız her çözümü salınır. Örneğin $t \in [1, \infty)_{\mathbb{Z}}$ için $x(t) = (-3)^t$ böyle bir çözümdür. Bildiğimiz kadarıyla literatürde bu denklemin sınırsız çözümleri hakkında bilgi verebilen sonuç yoktur.

Sonuç 5.2.3: *Kabul edelim ki $n \geq 2$ olsun, (C1), (H15), (H16) ve (H17) sağlansın. Bu durumda, $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $C = 0$ olmak üzere* (5.0.1) *denkleminin her çözümü salınır veya sonsuzda sıfıra yakınsar.*

Sonuç 5.2.4: *Kabul edelim ki $n \geq 2$ bir çift sayı olsun, (C1), (H15), (H16), (H17) ve* (4.1.8) *sağlansın. Bu durumda, $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $C = 0$ ve $\varphi = 0$ olmak üzere* (5.0.1) *denkleminin her çözümü salınır.*

Örnek 5.2.5: $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\left[x(t) + \frac{1}{128}\cos(t)x(t - 2\pi)\right]^{(6)} + \frac{1}{2}\big(2 + \cos(t)\big)x(t) = 0, \quad t \in [0, \infty)_{\mathbb{R}} \tag{5.2.5}$$

ile tanımımlı diferensiyel denklemi dikkate alalım. Burada $n = 6$ ve $t \in [0, \infty)_{\mathbb{R}}$ için $A(t) = \cos(t)/128$, $\alpha(t) = t - 2$, $B(t) = (2 + \cos(t))/2$, $\beta(t) = t$ ve $\varphi(t) = \Phi(t) \equiv 0$ şeklindedir. Açıkça, A fonksiyonu (C1) şartını sağlar. Sonuç 5.2.3'ün tüm şartları sağlandığı gösterilebilir. Böylece (5.2.5) denkleminin her çözümü salınır veya sonsuzda sıfıra yakınsar. Örneğin $t \in [0, \infty)_{\mathbb{R}}$ için $x(t) = \sin(t)$ fonksiyonu (5.2.5) denkleminin salınımlı bir çözümdür. Literatürdeki sonuçlar (5.2.5) denkleminin sadece sınırlı çözümleri hakkında bilgi verebilmektedir.

5.3 Bölüm Sonu Değerlendirmesi

Literatürde, yüksek mertebeden diferensiyel ve fark denklemler üzerine oldukça çok çalışma bulunmaktadır. Ancak, bu sonuçların neredeyse hiçbiri zaman skalası teorisiyle birleştirilip dinamik denklemlere genişletilmemiştir. Tezin Bölüm 5.1 ve Bölüm 5.2'sinde verilen sonuçlar bu alandaki ilk çalışmalar olup yeni çalışmalar için fikir vermektedir. Bu bölümlerdeki sonuçlar literatürde daha önceden diferensiyel ve fark denklemler üzerine verilmiş olan sonuçların basit bir yansıması olmayıp bu alanda açık kalan bazı problemlere de cevap vermektedir. Örneğin, (Şahiner and Zafer 2001) makalesinde bahsedilen bir açık probleme Teorem 5.1.6 cevap vermektedir ve Teorem 5.1.1 neutral terime ilişkin katsayının işaret değiştirmesine olanak vermektedir. Literatüre, yüksek mertebeden denklemler için nötral terimin işaret değiştirdiği duruma ilişkin çok az sayıda sonuç bulunmaktadır. Örneğin, (Bolat and Akın 2004) makalesinde nötral terime ilişkin katsayının işaret değiştirilmesine izin verilmiştir; ancak burada bahsi geçen terimin sonsuzda sıfıra yakınsadığı kabul edilmiştir ve sonuçlar sadece sınırlı çözümleri ele almaktadır. Başka bir sonuç (Parhi and Rath 2003b) makalesinde verilmiş olup nötral terime ilişkin katsayının periyodik olduğu durumda sınırsız çözümlerin davranışları ele alınabilmiştir. Dolayısıyla, Bölüm 5.1 ve Bölüm 5.2'de verilen sonuçlar oldukça önemli olup (Bolat and Akın 2004, Parhi and Rath 2003a) makalelerindeki sonuçları geliştirerek zaman skalasınına genişletmektedir. Burada bahsedilen sonuçlar aynı zamanda (Parhi and Rath 2003a, Parhi and Rath 2003b, Parhi and Tripathy 2003, Şahiner and Zafer 2001, Thandapani et al. 1997, Thandapani et al. 1999) makalelerinde verilen sonuçların bir çoğunu da içermektedir. Ayrıca, (Kubiaczyk et al. 2003, Li and Quan 1995) makalelerinde yüksek mertebeden pozitif ve negatif katsayı içeren denklemler üzerine verilmiş olan sonuçların yanlış olduğunu belirtmek gerekir. Sınırlı çözümler için doğru sonuçlar Bölüm 5.1'de verilmiştir. Bölüm 5.1'de pozitif çözümlerin varlığı üzerine verilmiş olan sonuçlar (Li et al. 2008, Zhou and Zhang 2002, Zhou and Zhang 2003) makalelerindeki sonuçları zaman skalasına genişletip nötral terime ilişkin katsayının işaret değiştirebilmesine imkan vermektedir. Bölüm 5.1 ve Bölüm 5.2'de verilen sonuçların daha genel halleri (Karpuz 2009b, Karpuz 2009c) makalelerinde yayımlanmıştır.

KAYNAKLAR

Agarwal, R.P. (1992). Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods, and Applications. Second Edition, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **228**, Marcel Dekker Inc., New York, USA.

Agarwal, R.P. and Bohner, M. (1999). Basic calculus on time scales and some of its applications, *Results Math.*, **35**(1-2): 3–22.

Agarwal, R.P., Bohner, M., Grace, S.R. and O'Regan, D. (2005). Discrete Oscillation Theory. Hindawi Publishing Corporation, New York, USA.

Agarwal, R.P., Bohner, M., Li and W.T. (2004). Nonoscillation and Oscillation: Theory for Functional Differential Equations. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **267**, Marcel Dekker Inc., New York, USA.

Agarwal, R.P., Bohner, M. and Řehák, P. (2003). Half-linear dynamic equations. Nonlinear Analysis and Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, **1-2**: 1–58.

Agarwal, R.P., Grace, S.R. and O'Regan, D. (2000). Oscillation Theory for Difference and Functional Differential Equations. Nonlinear Analysis and Applications, **1-2**: 1–58, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands.

Akın-Bohner, E., Bohner, M., Djebali and S., Moussaoui, T. (2008). On the asymptotic integration of nonlinear dynamic equations. *Adv. Difference Equ.*, **739602**: 1–17.

Amrein, W.O., Hinz, A.M. and Pearson, D.B. (2005). Sturm-Liouville Theory: Past and Present. Birkhäuser Verlag, Basel.

Anderson, D.R. and Kenz, Z.R. (2007). Global asymptotic behavior for delay dynamic equations. *Nonlinear Anal.*, **6**(7): 1633–1644.

Bohner, M. (2005). Some oscillation criteria for first order delay dynamic equations. *Far East J. Appl. Math.*, **18**(3): 289–304.

Bohner, M., Karpuz, B. and Öcalan, Ö. (2008). Iterated oscillation criteria for delay dynamic equations of first order. *Adv. Difference Equ.*, **458687**: 1–12.

Bohner, M. and Peterson, A. (2001). Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, USA.

Bohner, M. and Peterson, A. (2003). Advances in Dynamic Equations on Time Scales. Birkhäuser Boston Inc., Boston, USA.

Bolat, Y. and Akın, Ö. (2004). Oscillatory behaviour of higher order neutral type nonlinear forced differential equation with oscillating coefficients. *J. Math. Anal. Appl.*, **290**(1): 302–309.

Erbe, L.H., Kong, Q. and Zhang, B.G. (1995). Oscillation Theory for Functional-Differential Equations. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **190**, Marcel Dekker Inc., New York, USA.

Erbe, L.H. and Zhang, B.G. (1989). Oscillation of discrete analogues of delay equations. *Differential Integral Equations*, **2**(3): 300–309.

Dix, J.G., Misra, N., Padhy and L.N., Rath, R.N. (2008). Oscillatory and asymptotic behaviour of a neutral differential equation with oscillating coefficients. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, **2008**(19): 1–10.

Guan, K.Z. and Shen, J.H. (2007). Hille type oscillation criteria for a class of first order neutral pantograph differential equations of Euler type. *Commun. Math. Anal.*, **3**(1): 27–35.

Guseinov, G.Sh. (2003). Integration on time scales. *J. Math. Anal. Appl.*, **285**(1): 107–127.

Győri, I. and Ladas, G. (1991). Oscillation Theory of Delay Differential Equations: With Applications. Oxford Science Publications. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, USA.

Hilger, S. (1988). Ein MaßKettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten. Ph.D. Thesis, Universität Würzburg, Germany.

Karpuz, B. (2009a). Some oscillation and nonoscillation criteria for neutral delay difference equations with positive and negative coefficients. *Comput. Math. Appl.*, **57**(4): 633–642.

Karpuz, B. (2009b). Unbounded oscillation of higher-order nonlinear delay dynamic equations of neutral type with oscillating coefficients. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, **2009**(34): 1–14.

Karpuz, B. (2009c). Asymptotic behaviour of bounded solutions of a class of higher-order neutral dynamic equations. *Appl. Math. Comput.*, **215**(6): 2174–2183.

Karpuz, B. (2011). Necessary and sufficient conditions on the asymptotic behavior of second-order neutral delay dynamic equations with positive and negative coefficients. (Yayına gönderildi).

Karpuz, B., Manojlović, J., Öcalan, Ö. and Shoukaku, Y. (2009). Oscillation criteria for a class of second-order neutral delay differential equations. *Appl. Math. Comput.*, **210**(2): 303–312.

Karpuz, B. and Öcalan, Ö. (2009). Necessary and sufficient conditions on the asymptotic behaviour of solutions of forced neutral delay dynamic equations. *Nonlinear Anal.*, **71**(7-8): 3063–3071.

Karpuz, B., Öcalan, Ö. and Rath, R.N. (2009). Necessary and sufficient conditions on the oscillatory and asymptotic behaviour of solutions to neutral delay dynamic equations. *Electron. J. Differential Equations*, **2009**(64): 1–15.

Kelley, W.G. and Peterson, A.C. (2001). Difference Equations: An Introduction with Applications. Second Edition, Harcourt/Academic Press, San Diego, USA.

Kelley, W.G. and Peterson, A.C. (2004). The Theory of Differential Equations: Classical and Qualitative. Prentice Hall, New Jersey, USA.

Kolmanovskii, V. and Myshkis, A. (1999). Introduction to the theory and applications of functional-differential equations. Mathematics and its Applications, **463**, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, Nederlands.

Kubiaczyk, I., Li, W.T. and Saker, S.H. (2003). Oscillation of higher order delay differential equations with applications to hyperbolic equations. *Indian J. Pure Appl. Math.*, **34**(8): 1259–1271.

Ladas, G. (1979). Sharp conditions for oscillations caused by delays. *Applicable Anal.*, **9**(2): 93–98.

Ladas, G., Philos, C.G. and Sficas, Y.G. (1989). Sharp conditions for the oscillation of delay difference equations. *J. Appl. Math. Simulation*, **2**(2): 101–111.

Ladas, G. and Qian, C. (1990). Oscillation in differential equations with positive and negative coefficients. *Canad. Math. Bull.*, **33**(4): 442–451.

Ladde, G.S., Lakshmikantham, V. and Zhang, B.G. (1987). Oscillation Theory of Differential Equations with Deviating Arguments. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **110**, Marcel Dekker Inc., New York, USA.

Lakshmikantham, V., Sivasundaram, S. and Kaymakçalan, B. (1996). Dynamic systems on measure chains. Mathematics and its Applications, **370**, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, Nederlands.

Li, B.T. (1996). Oscillation of first order delay differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **124**(12): 3729–3737.

Li, B.T. (1998). Multiple integral average conditions for oscillation of delay differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, **219**(1): 165–178.

Li, Q.L., Liang, H., Dong, W. and Zhang, Z.G. (2008). Existence of nonoscillatory solutions of higher-order difference equations with positive and negative coefficients. *Bull. Korean Math. Soc.*, **45**(1): 23–31.

Li, W.T. and Quan, H.S. (1995). Oscillation of higher order neutral differential equations with positive and negative coefficients. *Ann. Differential Equations*, **11**(1): 70–76.

Manojlović, J., Shoukaku, Y., Tanigawa, T. and Yoshida, N. (2006). Oscillation criteria for second order differential equations with positive and negative coefficients. *Appl. Math. Comput.*, **181**(2): 853–863.

Myshkis, A.D. (1972). Lineinye differentsialnye uravneniya s zapazdyvayushchim argumentom. Second Ed., Izdat. Nauka, Moscow, Russia.

Naito, M. (1984). Nonoscillatory solutions of linear differential equations with deviating arguments. *Ann. Mat. Pura Appl.*, **136**(4): 1–13.

Öcalan, Ö. (2007a). Oscillation of neutral differential equation with positive and negative coefficients. *J. Math. Anal. Appl.*, **331**(1): 644–654.

Öcalan, Ö. (2007b). Oscillation of forced neutral differential equations with positive and negative coefficients. *Comput. Math. Appl.*, **54**(11-12): 1411–1421.

Öcalan, Ö., Yıldız, M.K. and Karpuz, B. (2008). On the oscillation of nonlinear neutral differential equation with positive and negative coefficients. *Dynam. Systems Appl.*, **17**(3-4): 667–675.

Parhi, N. and Chand, S. (1999). Oscillation of second order neutral delay differential equations with positive and negative coefficients. *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, **66**(1-4): 227–235.

Parhi, N. and Chand, S. (2000). On forced first order neutral differential equations with positive and negative coefficients. *Math. Slovaca*, **50**(1): 81–94.

Parhi, N. and Chand, S. (2002). On second order neutral delay differential equations with positive and negative coefficients. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **94**(1): 7–16.

Parhi, N. and Rath, R.N. (2001). Oscillation criteria for forced first order neutral differential equations with variable coefficients. *J. Math. Anal. Appl.*, **256**(2): 525–541.

Parhi, N. and Rath, R.N. (2003a). On oscillation of solutions of forced nonlinear neutral differential equations of higher order. *Czechoslovak Math. J.*, **53(128)**(4): 805–825.

Parhi, N. and Rath, R.N. (2003b). On oscillation of solutions of forced nonlinear neutral differential equations of higher order. II. *Ann. Polon. Math.*, **81**(2): 101–110.

Parhi, N. and Tripathy, A.K. (2003). Oscillation of a class of nonlinear neutral difference equations of higher order. *J. Math. Anal. Appl.*, **284**(2): 756–774.

Rath, R.N., Mishra, P.P. and Padhy, L.N. (2007). On oscillation and asymptotic behaviour of a neutral differential equation of first order with positive and negative coefficients, *Electron. J. Differential Equations*, **2007**(1): 1–7.

Rath, R.N. and Misra, N. (2004). Necessary and sufficient conditions for oscillatory behaviour of solutions of a forced nonlinear neutral equation of first order with positive and negative coefficients. *Math. Slovaca*, **54**(3): 255–266.

Rath, R.N., Padhy, L.N. and Misra, N. (2007). Oscillation and non-oscillation of neutral difference equations of first order with positive and negative coefficients. *Fasc. Math.*, (7): 57–65.

Smart, D.R. (1974). Fixed Point Theorems. Cambridge University Press, **66**, London.

Shen, J.H. and Debnath, L. (2001). Oscillations of solutions of neutral differential equations with positive and negative coefficients. *Appl. Math. Lett.*, **14**(6): 775–781.

Sturm, C. (1836). Mémoire sur les équations difféntielles linéaries du second ordre. *J. Math. Pures Appl.*, **1**: 106–186.

Swanson, C.A. (1968). Comparison and oscillation theory of linear differential equation. Mathematics in Science and Engineering, **48**, Academic Press, New York, USA.

Şahiner, Y. and Stavroulakis, I.P. (2006). Oscillations of first order delay dynamic equations. *Dynam. Systems Appl.*, **15**(3-4): 645–655.

Şahiner, Y. and Zafer, A. (2001). Bounded oscillation of nonlinear neutral differential equations of arbitrary order. *Czechoslovak Math. J.*, **51(126)**(1): 185–195.

Şuhubi, E.S. (2003). Functional Analysis. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Thandapani, E., Manuel, M.M.S., Graef, J.R. and Spikes, P.W. (1999). Oscillation of a higher order neutral difference equation with a forcing term. *Int. J. Math. Math. Sci.*, **22**(1): 147–154.

Thandapani, E., Sundaram, P., Graef, J.R. and Spikes, P.W. (1997). Asymptotic behaviour and oscillation of solutions of neutral delay difference equations of arbitrary order. *Math. Slovaca*, **47**(5): 539–551.

Tang, X.H. and Shen, J.H. (1998). Oscillations of delay differential equations with variable coefficients. *J. Math. Anal. Appl.*, **217**(1): 32–42.

Tang, X.H. and Yu, J.S. (1999a). A further result on the oscillation of delay difference equations. *Comput. Math. Appl.*, **38**(11-12): 229–237.

Tang, X.H. and Yu, J.S. (1999b). Oscillation of delay difference equation. *Comput. Math. Appl.*, **37**(7): 11–20.

Tang, X.H., Yu, J.S. and Peng, D.H. (2000). Oscillation and nonoscillation of neutral difference equations with positive and negative coefficients. *Comput. Math. Appl.*, **39**(7-8): 169–181.

Weng, A. and Sun, J. (2008). Oscillation of second order delay differential equations. *Appl. Math. Comput.*, **198**(2): 930–935.

Zhang, B.G. and Deng, X.H. (2002). Oscillation of delay differential equations on time scales. *Math. Comput. Modelling*, **36**(11-13): 1307–1318.

Zhang, B.G., Yan, X.Z. and Liu, X.Y. (2005). Oscillation criteria of certain delay dynamic equations on time scales. *J. Difference Equ. Appl.*, **11**(10): 933–946.

Zhou, Y. and Zhang, B.G. (2002). Existence of nonoscillatory solutions of higher-order neutral differential equations with positive and negative coefficients. *Appl. Math. Lett.*, **15**(7): 867–874.

Zhou, Y. and Zhang, B.G. (2003). Existence of nonoscillatory solutions of higher-order neutral delay difference equations with variable coefficients. Advances in Difference Equations IV, *Comput. Math. Appl.*, **45**(6-9): 991–1000.

Zhu, Z.Q. and Wang, Q.R. (2007). Existence of nonoscillatory solutions to neutral dynamic equations on time scales. *J. Math. Anal. Appl.*, **335**(2): 751–762.

ÖZGEÇMİŞ

Adı SOYADI	: Başak KARPUZ
Doğum Yeri ve Tarihi	: Kolonya/B. Almanya, 01.08.1984
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim	: bkarpuz@gmail.com, http://www2.aku.edu.tr/˜bkarpuz

Eğitim Durumu

Lise	: Soma Rıfat Dağdelen Anadolu Lisesi, 1999–2002
Lisans	: Afyon Kocatepe Universitesi, 2002–2006
Yüksek Lisans	: Afyon Kocatepe Universitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2006–2008

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl

Araştırma Görevlisi, Afyon Kocatepe Universitesi, Matematik Bölümü, 2007–

Misafir Araştırmacı, Calgary Üniversitesi, Matematik ve İstatistik Bölümü, 2010–2011

Yayınları

Karpuz, B. (2011). On uniqueness of the Laplace transform on time scales. *Panamer. Math. J.*, **21**(2): 101–110.

Braverman, E. and Karpuz, B. (2011). On oscillation of differential and difference equations with non-monotone delays. *Appl. Math. Comput.*, **218**(7): 3880–3887.

Bohner, M., Güseinov, Sh.G. and Karpuz, B. (2011). Properties of the Laplace transform on time scales with arbitrary graininess. *Integral Transforms Spec. Funct.*, **22**(11): 785–800.

Karpuz, B., Öcalan, Ö. and Öztürk S. (2011). Comparison criteria for the oscillation of mixed-type impulsive difference equations with continuous arguments. *Hacet. J. Math. Stat.*, **40**(2): 265–272.

Dix, G.J., Karpuz, B. and Rath, R.N. (2011). Necessary and sufficient conditions on the asymptotic behaviour of higher-order differential equations involving distributed arguments. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, **2011**(19): 1–15.

Braverman, E. and Karpuz, B. (2011). Nonoscillation of second-order dynamic equations with several delays. *Abstr. Appl. Anal.*, **2011**(591254): 1–34.

Karpuz, B. and Özkan, U.M. (2011). Some generalizations for Opial's inequality involving several functions and their derivatives of arbitrary order on arbitrary time scales. *Math. Inequal. Appl.*, **14**(1): 79–92.

Karpuz, B. (2011). Existence and uniqueness of solutions to systems of delay dynamic equations on time scales. *Int. J. Math. Comput.*, **10**(M1): 48–58.

Karpuz, B., Kaymakçalan, B. and Öcalan, Ö. (2010). A generalization of Opial's inequality and applications to second-order dynamic equations. *Differ. Equ. Dyn. Syst.*, **18**(1-2): 11–18.

Braverman, E. and Karpuz, B. (2010). Nonoscillation of first-order dynamic equations with several delays. *Adv. Difference Equ.*, **2010**(873459): 1–22.

Karpuz, B., Kaymakçalan, B. and Özkan, U.M. (2010). Some multi-dimensional Opial-type inequalities on time scales. *J. Math. Inequal.*, **4**(2): 207–216.

Karpuz, B. and Öcalan, Ö. (2010). Comparison theorems on the oscillation of a class of neutral difference equations with continuous variables. *Bull. Korean Math. Soc.*, **47**(2): 401–409.

Karpuz, B., Öcalan, Ö. and Öztürk S. (2010). Oscillation of first-order impulsive difference equations with continuous arguments. *J. Comput. Anal. Appl.*, **12**(2): 539–543.

Karpuz, B., Öcalan, Ö. and Yıldız, M.K. (2010). Corrigendum to "Oscillation of a class of difference equations of second order" [Math. Comput. Modelling 49 (2009) 912–917]. *Math. Comput. Modelling.*, **51**(9-10): 1009–1010.

Karpuz, B. and Öcalan, Ö. (2010). Further oscillation criteria for partial difference equations with variable coefficients. *Comput. Math. Appl.*, **59**(1): 55–63.

Karpuz, B., Öcalan, Ö. and Öztürk S. (2010). Comparison theorems on the oscillation and asymptotic behaviour of higher-order neutral differential equations. *Glasg. Math. J.*, **52**(1): 107–114.

Yıldız, M.K., Karpuz, B. and Öcalan, Ö. (2009). Oscillation of nonlinear neutral delay differential equations of second order with positive and negative coefficients. *Turkish J. Math.*, **33**(4): 341–350.

Karpuz, B. and Öcalan, Ö. (2009). Oscillation and nonoscillation of first-order dynamic equations with positive and negative coefficients. *Dynam. Systems Appl.*, **18**(3-4): 363–374.

Karpuz, B. (2009). Asymptotic behaviour of bounded solutions of a class of higher-order neutral dynamic equations. *Appl. Math. Comput.*, **215**(6): 2174–2183.

Karpuz, B. (2009). Remarks on: "Oscillation criteria for second-order functional difference equation with neutral terms" [Demon. Math. 41 (2008)]. *Demonstratio Math.*, **52**(3): 549–551.

Karpuz, B., Öcalan, Ö. and Yıldız, M.K. (2009). Oscillation of high-order nonlinear delay differential equations with oscillatory coefficients. *Turkish J. Math.*, **33**(3): 259–263.

Karpuz, B., Rath, R.N. and Rath, S.K. (2009). On oscillation and asymptotic behaviour of a higher order functional difference equation of neutral type. *Int. J. Difference Equ.*, **4**(1): 69–96.

Karpuz, B. and Yıldırım H. (2009). A method on the general solution of inhomogeneous Euler differential equations. *Selçuk J. Appl. Math.*, **10**(1): 19–32.

Karpuz, B. and Öcalan, Ö. (2009). Necessary and sufficient conditions on asymptotic behaviour of solutions of forced neutral delay dynamic equations. *Nonlinear Anal.*, **71**(7-8): 3063–3071.

Karpuz, B. (2009). Unbounded oscillation of higher-order nonlinear delay dynamic equations of neutral type with oscillating coefficients. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, **2009**(34): 1–14.

Karpuz, B., Öcalan, Ö. and Rath, R.N. (2009). Necessary and sufficient conditions for the oscillatory and asymptotic behaviour of solutions to neutral delay dynamic equations. *Electron. J. Differential Equations*, **2009**(64): 1–15.

Karpuz, B., Manojlović, J.V., Öcalan, Ö. and Shoukaku, Y. (2009). Oscillation criteria for a class of second-order neutral delay differential equations. *Appl. Math. Comput.*, **210**(2): 303–312.

Karpuz, B., Öcalan, Ö. and Yıldız, M.K. (2009). Oscillation of a class of difference equations of second order. *Math. Comput. Modelling*, **49**(5-6): 912–917.

Karpuz, B. (2009). Some oscillation and nonoscillation criteria for neutral delay difference equations with positive and negative coefficients. *Comput. Math. Appl.*, **57**(4): 633–642.

Karpuz, B. and Öcalan, Ö. (2008). Discrete approach on oscillation of difference equations with continuous variable. *Adv. Dyn. Syst. Appl.*, **3**(2): 283–290.

Bohner, M., Karpuz, B. and Öcalan, Ö. (2008). Iterated oscillation criteria for delay dynamic equations of first-order. *Adv. Difference Equ.*, **2008**(458687): 1–12.

Karpuz, B. and Özkan, U.M. (2008). Generalized Ostrowski's inequality on time scales. *JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.*, **9**(4),112: 1–7.

Öcalan, Ö., Yıldız, M.K. and Karpuz, B. (2008). On the oscillation of nonlinear neutral differential equation with positive and negative coefficients. *Dynam. Systems Appl.*, **17**: 667–676.

Karpuz, B., Padhy, N.R. and Rath, R.N. (2008). Oscillation and asymptotic behaviour of a higher order neutral differential equation with positive and negative coefficients. *Electron. J. Differential Equations*, **2008**(113): 1–15.

Karpuz, B. and Öcalan, Ö., (2008). Erratum to: "Stability for first-order delay dynamic equations on time scales" [Comput. Math. Appl. 53 (2007) 1820–1831]. *Comput. Math. Appl.*, **56**(4): 1157–1158.

Karpuz, B. and Öcalan, Ö., (2008). Erratum to: "Oscillation of forced neutral differential equations with positive and negative coefficients" [Comput. Math. Appl. 54 (2007) 1411–1421]. *Comput. Math. Appl.*, **56**(2): 590–591, (2008).

Karpuz, B. and Öcalan, Ö., (2008). Oscillation criteria for some classes of linear delay differential equations of first-order. *Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.)*, **3**(2): 293–314.

Karpuz, B., Öcalan, Ö. and Özkan, U.M. (2007). Comparison theorems on oscillatory nature of higher order difference equations with continuous variables. *International Journal: Mathematical Manuscripts*, **1**(1): 73–81.