

127315

**NUMERICAL SOLUTIONS OF SOME PARTIAL
DIFFERENTIAL EQUATIONS
BY CUBIC SPLINE FUNCTIONS**

Dursun IRK

**Department of Mathematics
The Thesis for Master Degree
2002**

**TC. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

127 315

**KÜBİK SPLINE FONKSİYONLAR YARDIMIYLA
BAZI KISMİ TÜREVLİ DİFERENSİYEL
DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

Dursun IRK

**Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
Master Tezi
Olarak Hazırlanmıştır.**

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

Danışman: Doç. Dr. İdris DAĞ

127015

Eylül 2002

Dursun IRK ın Master tezi olarak hazırladığı

**“KÜBİK SPLINE FONKSİYONLAR YARDIMIYLA BAZI KISMİ
TÜREVLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ”**

başlıklı bu çalışma jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye: *Bora YILDIRIM* *Bhu*

Üye: *Abdulkadir DOĞAN* *AS*

Üye: *M. Naci* *1202* *M. Naci*

Üye: *Dursun ERER* *ERER*

Üye: *İdris Dağ* *İdris*

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu' nun .../1...9-2002..... gün
ve2002-...12.../6..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

M. Selami KILIÇKAYA
Prof. M. Selami KILIÇKAYA

Enstitü Müdürü

TEŐEKKÜR

Master çalıőmalarımın her aőamasında, btyık yardımlarını ve desteklerini gördüğüm hocam Doç. Dr. İdris DAĞ'a teőekkürlerimi sunarım.

Eskiőehir, 2002

Dursun IRK



ÖZET

Bu yüksek lisans tezi altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, sonlu farklar metodu ve kolokeyşin metodu hakkında kısa bilgi verildi. Spline fonksiyonların özellikleri ve tanımı verilerek, kübik spline ve kübik B-spline interpolasyonu oluşturuldu. Lineer olmayan Burger denklemi ve RLW denklemi test problemleri ile beraber tanıtılarak, daha önceki bazı sayısal çözümlerden bahsedildi.

İkinci bölümde, J. Caldwell tarafından önerilen "Lineer Olmayan Burger Denkleminin Kübik Spline Fonksiyonlar ile Sayısal Çözümü" adlı makalesi ayrıntılı olarak incelendi. Bu makaledeki lineerleştirme tekniği daha sonraki bölümlerde kullanıldı.

Üçüncü bölümde, RLW denkleminin sayısal çözümü için kübik spline kolokeyşin çözümü verildi. Metot için kesme hatası bulundu. Tek dalga çözümü, ardışık dalgaların üretilmesi ve yayılması çalışıldı.

Dördüncü bölümde, kübik B-spline kolokeyşin metodu ile lineer olmayan Burger denkleminin sayısal çözümü yapıldı. Burger denklemi için farklı sınır ve başlangıç koşulları kullanılarak metot test edildi.

Beşinci bölümde RLW denkleminin kolokeyşin metodu ile çözümü, metotta yaklaşım fonksiyonları olarak kübik B-spline fonksiyonlar kullanılarak ifade edildi.

Üçüncü dördüncü ve beşinci bölümlerdeki metotların kararlılığı Fourier kararlılık yöntemi ile incelendi.

Son bölümde ise, lineer olmayan Burger denklemi ve RLW denklemi için bulunan sayısal sonuçlar arasında kıyaslamalarla çözümlerin tartışması yapılmıştır.

SUMMARY

This master thesis consists of six chapters.

A short introduction about the finite difference and collocation methods are given in the first chapter. Definition and properties of spline functions are outlined. Derivation of the cubic spline and cubic B-spline interpolation is shown. RLW and Burger equations, which are dealt with finding the numerical solution, are introduced together with some initial and boundary conditions. Some of the previous numerical methods about those equations are mentioned.

In the second chapter, the paper of J. Caldwell's titled "Application of Cubic Splines to the Nonlinear Burgers' Equation" is examined in detail. The linearization technique given in the J. Caldwell's paper is used in the next chapters.

The cubic spline collocation solution of the RLW equation is set up in the third chapter. Local truncation error of the method is derived. Migration of solitary wave and undular bore development are studied for the RLW equation.

In the following chapter, Burger equation is solved by using cubic B-spline collocation method. The method is tested for various initial and boundary conditions of Burger equation.

In the fifth chapter, the collocation method incorporated with the cubic B-spline function is used to get the solution of the RLW equation.

Von Neuman stability analyses of algorithms are investigated.

In the last chapter the comparison and discussion are done for the proposed methods with some of the previous studies.

İçindekiler

1	Temel Kavramlar	1
1.1	Sonlu Farklar Metodu	1
1.2	Sonlu Elemanlar Metodu	6
1.2.1	Ağırlıklı Rezidü Metodu	6
1.2.2	Kolokeyşin Metodu	7
1.3	Spline Fonksiyonlar	8
1.3.1	Kübik Spline	9
1.3.2	Kübik B-spline	19
1.4	Burger Denklemi	25
1.4.1	Test Problemleri	27
1.5	Regularized Long Wave (RLW) Denklemi	29
1.5.1	Test Problemleri	30
2	Lineer Olmayan Burger Denklemine Kübik Spline Kolokeyşin Metoduyla Sayısal Çözümü	33
2.1	Lineer Olmayan Burger Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları	34
2.2	Kübik Spline Kolokeyşin Metodu	34
2.3	Başlangıç Durumu ve Sayısal Hesaplamalar	40
2.4	Metodun Kararlılık Analizi	43

2.5	Test Problemi	46
3	RLW Denkleminein Kübik Spline Kolokeyşin Metoduyla Sayısal	
	zm	48
3.1	RLW Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları	48
3.2	Kübik Spline Kolokeyşin Metodu	49
3.3	Başlangıç Durumu ve Sayısal Hesaplamalar	50
3.4	Metodun Kararlılığı ve Kesme Hatası	53
3.5	Test Problemleri	58
3.5.1	Tek Dalga zm	58
3.5.2	Ardışık Dalgalar zm	62
4	Lineer Olmayan Burger Denkleminein Kubik B-Spline Kolokeyşin	
	Metoduyla Sayısal zm	65
4.1	Lineer Olmayan Burger Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları	66
4.2	Kübik B-Spline Kolokeyşin Metodu	66
4.3	Başlangıç Durumu ve Sayısal Hesaplamalar	68
4.4	Metodun Kararlılık Analizi	70
4.5	Test Problemleri	73
5	RLW Denkleminein Kübik B-Spline Kolokeyşin Metoduyla	
	Sayısal zm	80
5.1	RLW Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları	80
5.2	Kübik B-spline Kolokeyşin Metodu	81
5.3	Başlangıç Durumu ve Sayısal Hesaplamalar	82
5.4	Metodun Kararlılık Analizi	85
5.5	Test Problemleri	88
5.5.1	Tek Dalga zm	88

5.5.2	Ardışık Dalgaların Çözümü	91
6	Sonuçlar ve Öneriler	95



Bölüm 1

Temel Kavramlar

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanacağımız temel kavramlardan kısaca bahsedildi. İlk olarak sonlu farklar metodu ve sonlu elemanlar metodu özetlendi. Spline fonksiyonların tanımı verildikten sonra, sayısal çözümlerde kullanacağımız kübik ve kübik B-spline interpolasyon polinomlarının çıkarılışları gösterildi. Son olarak sayısal çözümlerini araştıracağımız lineer olmayan Burger ve RLW denklemleri tanıtıldı.

1.1 Sonlu Farklar Metodu

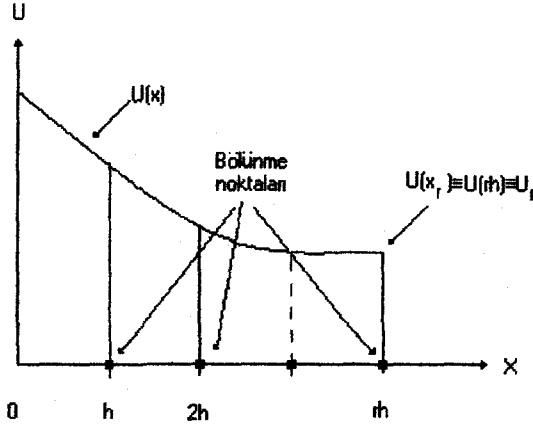
Mühendislik ve fen alanlarında karşılaşılan çoğu problemler kısmi türevli diferensiyel denklemlerle (KTDD) ifade edilir. KTDD'lerin analitik çözümlerinin olmadığı ya da analitik çözümün çok karmaşık olduğu durumlarda, bu denklemleri çözebilmek için sayısal yöntemler kullanılır. Sonlu farklar metodu da bu yöntemlerden biridir.

x bağımsız değişkenli sürekli bir $U(x)$ fonksiyonunu ele alalım. Şekil 1.1 de görüldüğü gibi tanım kümesini $x_r = x + rh$ noktalarına bölelim. Bu durumda

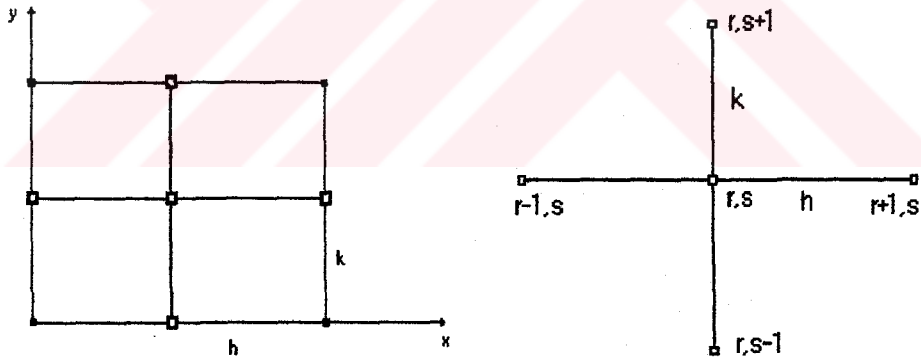
bölünme noktalarında

$$U(x_r) \equiv U(rh) \equiv U_r \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

olacak şekilde $U(x)$ fonksiyonunu gösterebiliriz.



Şekil 1.1: $U = U(x)$ olmak üzere h aralığı için sonlu fark parçalanması



Şekil 1.2: İki boyutta sonlu fark bölünmesi

İki boyutlu durumda $U(x, y)$ fonksiyonunu bölünme noktalarında

$$U(x_r, y_s) \equiv U(rh, sk) \equiv U_{rs} \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

notasyonu ile tanımlayabiliriz.

Bir değişken içeren ifadeler için Taylor Serisi yardımıyla sonlu fark yaklaşımlarını elde etmeye çalışalım. $U(x)$ fonksiyonunun x_r noktasındaki Taylor Seri açılımları

$$U(x_r + h) = U(x_r) + hU_x|_r + \frac{h^2}{2!}U_{xx}|_r + \frac{h^3}{3!}U_{xxx}|_r + \dots \quad (1.1)$$

veya

$$U(x_r - h) = U(x_r) - hU_x|_r + \frac{h^2}{2!}U_{xx}|_r - \frac{h^3}{3!}U_{xxx}|_r + \dots \quad (1.2)$$

olarak bulunabilir. Yukarıdaki iki denklem düzenlenirse;

$$U_x|_r = \frac{U(x_r + h) - U(x_r)}{h} - \frac{h}{2!}U_{xx}|_r - \frac{h^2}{3!}U_{xxx}|_r - \dots, \quad (1.3)$$

$$U_x|_r = \frac{U(x_r) - U(x_r - h)}{h} + \frac{h}{2!}U_{xx}|_r - \frac{h^2}{3!}U_{xxx}|_r + \dots \quad (1.4)$$

elde edilir. Böylece U fonksiyonunun x_r noktasındaki birinci türevi yaklaşık olarak

$$U_x|_r \approx \frac{U(x_r + h) - U(x_r)}{h} \equiv \frac{U_{r+1} - U_r}{h}, \quad (1.5)$$

$$U_x|_r \approx \frac{U(x_r) - U(x_r - h)}{h} \equiv \frac{U_r - U_{r-1}}{h} \quad (1.6)$$

şeklinde bulunabilir.

Görüldüğü gibi seri belli bir yerden kesilmiştir. Bu durumda da belli bir hata olacaktır. Hatalar serinin kesildiği yerden sonraki ilk terime göre değerlendirilir. Bu durumda bu yaklaşımla ilgili E_r hatası

$$E_r = \pm \frac{h}{2}U_{xx}|_\xi = O(h) \quad x_r \leq \xi \leq x_r + h, \quad x_r - h \leq \xi \leq x_r$$

olarak temsil edilir. $O(h)$, h . mertebeden bir hata olarak kabul edilir. (1.3) ve (1.4) denklemlerini taraf tarafa toplar ve $U_x|_r$ ye göre çözersek;

$$U_x|_r \approx \frac{U_{r+1} - U_{r-1}}{2h} \quad (1.7)$$

sonucunu ve

$$-\frac{h^2}{6} U_{xxx}|_\xi \quad x_{r-1} \leq \xi \leq x_{r+1}$$

hata terimini buluruz. (1.7) denklemini için hata 2. derecedendir denir ve $O(h^2)$ ile gösterilir.

(1.4) denklemini (1.3) den çıkarıp $U_{xx}|_r$ ye göre çözersek;

$$U_{xx}|_r = \frac{U_{r+1} - 2U_r + U_{r-1}}{h^2} \quad (1.8)$$

sonucunu ve

$$-\frac{h^2}{12} U_{xxxx}|_\xi \quad x_{r-1} \leq \xi \leq x_{r+1}$$

olarak ikinci mertebeden hatayı bulabiliriz.

Tablo 1.1: Bir bağımsız değişken içeren fonksiyonlarda sonlu fark yaklaşımları

Türev	Sonlu Fark Yaklaşımı	Hata Mertebesi
$U_x _r$	$\frac{U_{r+1} - U_r}{h}$	$O(h)$
	$\frac{U_r - U_{r-1}}{h}$	$O(h)$
	$\frac{U_{r+1} - U_{r-1}}{2h}$	$O(h^2)$
$U_{xx} _r$	$\frac{U_{r+1} - 2U_r + U_{r-1}}{h^2}$	$O(h^2)$

(1.9)

$U(x, y)$ için sonlu fark yaklaşımlarını daha önce bulmuş olduğumuz tek değişkenli sonlu fark yaklaşımları yardımıyla elde edeceğiz.

$$U_x|_r \approx \frac{U_{r+1} - U_r}{h}$$

şeklinde tek değişken için bir yaklaşımımız vardı. Şekil 1.2 yi göz önüne alırsak buradan;

$$\frac{\partial U_{r,s}}{\partial x} \equiv U_x |_{r,s} = \frac{U_{r+1,s} - U_{r,s}}{h} + O(h), \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial U_{r,s}}{\partial y} \equiv U_y |_{r,s} = \frac{U_{r,s+1} - U_{r,s}}{k} + O(k) \quad (1.11)$$

eşitliklerine ulaşabiliriz.

Bu yaklaşımlarda $U_x |_{r,s}$ iken alt indisteki s sabit olarak, $U_y |_{r,s}$ ikende r sabit olarak kabul edilir. Tek değişkenli fonksiyonlar için olan ikinci dereceden türev yaklaşımını ele alalım.

$$U_{xx} |_r = \frac{U_{r+1} - 2U_r + U_{r-1}}{h^2}$$

bu yaklaşımı iki değişken içeren yaklaşıma uygularsak;

$$U_{xx} |_{r,s} = \frac{U_{r+1,s} - 2U_{r,s} + U_{r-1,s}}{h^2} + O(h^2) \quad (1.12)$$

veya

$$U_{yy} |_{r,s} = \frac{U_{r,s+1} - 2U_{r,s} + U_{r,s-1}}{k^2} + O(k^2) \quad (1.13)$$

olarak elde edebiliriz. [19]

İki değişkenli fonksiyonlar için en çok kullanılan sonlu fark yaklaşımları $h = k$ alınarak aşağıda verilmiştir.

Tablo 1.2

Türev	Sonlu Fark Yaklaşımı	Hata Mertebesi
$U_x _{r,s}$	$\frac{1}{h} [U_{r+1,s} - U_{r,s}]$	$O(h)$
	$\frac{1}{h} [U_{r,s} - U_{r-1,s}]$	$O(h^2)$
	$\frac{1}{2h} [U_{r+1,s} - U_{r-1,s}]$	$O(h^2)$
$U_{xx} _{r,s}$	$\frac{1}{h^2} [U_{r+1,s} - 2U_{r,s} + U_{r-1,s}]$	$O(h^2)$

1.2 Sonlu Elemanlar Metodu

Sonlu elemanlar metodu aslında inşaat mühendisliğinde kullanılmak üzere geliştirilmiş bir yöntemdir. Fakat günümüzde matematiğin tüm alanlarında ortaya çıkan KTDD'lerin çözümlerine yaklaşımda kullanılmaktadır.

Sonlu elemanlar metodunun sonlu farklar yönteminden farkı; KTDD'in alt aralıklara bölünen çözüm bölgesine fonksiyonlarla yaklaşmasıdır. Bilindiği gibi bu yaklaşım sonlu farklar metodunda noktasal bir yaklaşım oluyordu. Ayrıca çoğu fiziksel problem, türevler ve düzensiz sınırlar içeren sınır koşullarına sahiptir. Bu tip problemlerin sonlu farklar metodu ile çözümleri zordur. Sonlu farklar metodu problemin çözümünün düzgün geometrik şekiller olması durumunda iyi sonuç vermesine karşılık sonlu elemanlar metodu hem düzgün hemde düzgün olmayan karmaşık geometrik bölgelerdeki çözümlerde iyi sonuçlar vermektedir. [44]

1.2.1 Ağırlıklı Rezidü Metodu

Ağırlıklı rezidü metodunda; istenen $U(\cdot)$ fonksiyonu yerine bir $\hat{U}(\cdot)$ sonlu yaklaşım serisi kullanılır.

$$U(\cdot) \approx \hat{U}(\cdot) = \sum_{j=1}^N U_j \phi_j(\cdot) \quad (1.14)$$

(1.14) denkleminde verilen $\phi_j(\cdot)$, $j = 1, \dots, N$ fonksiyon kümesi zaman ve konum bölgesi üzerinde tanımlıdır U_j , $j = 1, \dots, N$ bilinmeyen katsayılarıdır. Sonlu elemanlar metodunda $\phi_j(\cdot)$ fonksiyonları problem için verilen sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilirler.

$\phi_j(\cdot)$ fonksiyonları, çözülmesi istenen problem için olan tüm sınır koşullarını sağlar ama genelde diferensiyel denklemi sağlamazlar. $\hat{U}(\cdot)$, KTDD de yerine

yazılırsa

$$L\hat{U}(\cdot) - f = R(\cdot) \quad (1.15)$$

sonucu $R(\cdot)$ olarak adlandırılan Rezidüyü verir.

$W_i(\cdot)$ ağırlık fonksiyonları integrasyonu minimize edecek biçimde tanımlanmış olan özel fonksiyonlar olmak üzere rezidü ifadesini $W_i(\cdot)$ ağırlık fonksiyonları ile çarpılarak tanımlanan bölge üzerinde integre edilirse;

$$\int_t \int_x W_i(\cdot) R(\cdot) dx dt = 0, i = 1, \dots, N \quad (1.16)$$

N bilinmeyenli N denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Bu sistemden U_j ler bulunarak (1.14) denkleminde yerine yazılırsa $\hat{U}(\cdot)$ yaklaşık çözümüne ulaşılır.

1.2.2 Kolokeyşin Metodu

Kolokeyşin metodu Ağırlıklı Rezidü Metodunun bir uygulamasıdır. Bu metotta W_i ağırlık fonksiyonları yerine

$$W_i = \delta(x - x_i) \quad (1.17)$$

olacak şekilde Dirac Delta fonksiyonları seçilir.

Dirac Delta fonksiyonları;

$$\int_t \int_x a(\cdot) \delta_i(x - x_i, t - t_i) dx dt = a |_{x_i, t_i} \quad (1.18)$$

olacak şekilde önemli bir özelliğe sahiptir. Burada x konumu ve t zamanı göstermektedir. (1.18) denklemini kolokeyşin metodu için;

$$\int_t \int_x \delta_i(\cdot) R(\cdot) dx dt = 0, i = 1, \dots, N \quad (1.19)$$

formunda matematiksel olarak ifade edilebilir. N bağımsız değişken ve N denklemden oluşan bu sistemden her bir (x_i, y_i) kolokeyşin noktasındaki rezidü değeri yok edilerek istenen sonuçlar kolaylıkla elde edilebilir. [19]

1.3 Spline Fonksiyonlar

Çok sayıdaki veri noktalarına bir tek eğri ile yaklaşmak büyük kolaylıklar sağlasa da bazı durumlarda büyük hatalara neden olabilir. Ayrıca bu amaç için kullanılan Newton ve Lagrange interpolasyon polinomlarının derecesi nokta sayısı arttıkça artacağından bu tür polinomlarla yapılacak işlemler zorlaşır. Bu gibi durumlarda art arda gelen iki veri arasında birinci, ikinci ya da üçüncü dereceden fonksiyonlarla yaklaşımın yapıldığı spline interpolasyon yöntemi önerilmektedir. Spline interpolasyonu, tanımlanan aralık üzerinde ve sonlu noktalarda birbirini örtmeyen alt aralıklarda daha küçük dereceden polinom bulma esasına dayanır.

Reel sayıların monoton artan bir dizisi x_1, x_2, \dots, x_n ' e bağlı m . dereceden $S(x)$ spline fonksiyonu aşağıdaki iki özelliğe sahiptir ve reel doğru üzerinde tanımlı bir fonksiyondur.

- a. $S(x)$, her $[x_j, x_{j+1}]$ de m . ya da daha küçük bir dereceden bir polinomdur. (Burada $x_0 = -\infty$ ve $x_{n+1} = \infty$ olabilir)
- b. $S(x)$ ve kendisinin $1, 2, \dots, m-1$. basamaktan türevleri tanımlanan her aralıkta ve $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ bölünme noktalarında süreklidir.

Yukarıdaki tanıma göre, parçalı polinom fonksiyonlarının süreklilik durumunda ve türevlerinin belirli koşulları sağlaması durumunda bir spline fonksiyon oluşturur. $m = 0$ için b koşulu geçersizdir ve 0. dereceden spline fonksiyonu adım fonksiyonu olarak adlandırılır. $m = 1$ için $S(x)$ polinomu kırık çizgidir.

Genel olarak, $S(x); [x_{j-1}, x_j]$ ve $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 1, \dots, n$ aralıklarından her biri içinde derecesi m ya da daha küçük olan farklı fonksiyonlar olarak verilebilir. $m > 0$ için m . dereceden bir $S(x)$ spline fonksiyonunun m . türevi

bir adım fonksiyonudur. Farklı bir tanım olarak m . dereceden bir spline fonksiyonu bir adım fonksiyonunun m . basamaktan belirsiz integralidir.

Spline fonksiyonları aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. Spline fonksiyonlar, düzgün fonksiyonlardır.
2. Spline fonksiyonları, uygun baza sahip olan sonlu boyutlu lineer uzaylardır.
3. Spline fonksiyonların elle hesaplanması ve sayısal bilgisayarlara uygun programlarının yapılması kolaydır.
4. Spline fonksiyonlarının türevleri ve integralleride spline fonksiyonlardır.
5. Yeteri kadar alt bölmelere ayrılmış $[a, b]$ aralığı üzerinde her sürekli fonksiyon; m . dereceden spline fonksiyonu ile iyi bir şekilde temsil edilebilir.
6. Küçük dereceden spline'lar çok esnektir ve polinomlardaki gibi salınım sergilemezler.

Şimdi ilerideki bölümlerde lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde kullanacağımız kübik spline ve kübik B-spline interpolasyon eşitliklerimizi elde etmeye çalışalım

1.3.1 Kübik Spline

x_j 'ler, $[a, b]$ aralığındaki bölünme noktalarının koordinatları olmak üzere

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad h = x_{j+1} - x_j > 0 \quad (1.20)$$

$S''(x_j) = M_j$ ve $S'(x_j) = m_j$ olsun. Aşağıdaki üç özelliği sağlayan $S(x)$ fonksiyonuna kübik spline denir.

- a. $S(x), \forall [x_j, x_{j+1}]$ alt aralığında parçalı kübik polinomdur.
- b. $S(x_j) = U(x_j), 0 \leq j \leq n$.
- c. $S(x) \in C^2[a, b]$.

$S''(x_j) = M_j$ olmak üzere $S(x)$ kübik spline'i; M_0, M_1, \dots, M_n 'lere bağlı olarak elde edilecek ve M_0, M_1, \dots, M_n 'ler lineer denklem sisteminin bilinmeyenleri olacaktır.

Daha sonra belirlenmek üzere M_0, M_1, \dots, M_n değerlerini seçelim. $S(x)$ kübik spline olduğundan her $[x_j, x_{j+1}]$ aralığında $S''(x)$ birinci dereceden bir polinom tanımlar. $[x_j, x_{j+1}]$ aralığındaki kübik spline fonksiyonunu $S_j(x)$ ile göstereyim.

(x_j, M_j) ve (x_{j+1}, M_{j+1}) noktaları için $[x_j, x_{j+1}]$ aralığında Lagrange interpolasyon formülünden

$$S''_j(x) = \frac{M_j(x_{j+1} - x)}{h} + \frac{M_{j+1}(x - x_j)}{h} \quad (1.21)$$

yazılabilir. Burada $S''_j(x_j) = M_j, S''_j(x_{j+1}) = M_{j+1} 0 \leq j \leq n - 1$ ve $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1}) 0 \leq j \leq n - 2$ olduğuna dikkat edelim. Böylece $x \in [x_j, x_{j+1}]$ için $S''_j(x)$ değerine sahip olan $S''(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ de sürekli fonksiyon tanımlar ($S''(x)$ kırık çizgidir). (1.21) eşitliğinin iki defa integrali alınırsa;

$$\begin{aligned} S'_j(x) &= -\frac{M_j}{2h}(x_{j+1} - x)^2 + \frac{M_{j+1}}{2h}(x - x_j)^2 + m \\ S_j(x) &= \frac{M_j}{6h}(x_{j+1} - x)^3 + \frac{M_{j+1}}{6h}(x - x_j)^3 + mx + n \end{aligned}$$

elde edilir. Hesaplamalarda kolaylık için;

$$\begin{aligned} mx + n &= (c_j - d_j)x - c_j x_j + d_j x_{j+1} \\ &= c_j(x - x_j) + d_j(x_{j+1} - x) \end{aligned}$$

alnarak c_j ve d_j katsayıları integrasyon sabitleri olmak üzere

$$S_j(x) = \frac{M_j}{6h}(x_{j+1} - x)^3 + \frac{M_{j+1}}{6h}(x - x_j)^3 + c_j(x - x_j) + d_j(x_{j+1} - x) \quad (1.22)$$

bulunur. $S(x)$ 'in sürekli yapılması ve integrasyon koşullarının sağlanması için (1.22) de;

$$S_j(x_j) = U_j, \quad S_j(x_{j+1}) = U_{j+1}, \quad 0 \leq j \leq n - 1$$

uygulanırsa;

$$\begin{aligned} U_j &= S_j(x_j) = \frac{M_j}{6h}(x_{j+1} - x_j)^3 + \frac{M_{j+1}}{6h}(x_j - x_j)^3 + c_j(x_j - x_j) \\ &\quad + d_j(x_{j+1} - x_j) \\ U_{j+1} &= S_j(x_{j+1}) = \frac{M_j}{6h}(x_{j+1} - x_{j+1})^3 + \frac{M_{j+1}}{6h}(x_{j+1} - x_j)^3 + c_j(x_{j+1} - x_j) \\ &\quad + d_j(x_{j+1} - x_{j+1}) \\ d_j &= \frac{U_j}{h} - \frac{M_j h}{6} \quad \text{ve} \quad c_j = \frac{U_{j+1}}{h} - \frac{M_{j+1} h}{6} \end{aligned}$$

bulunur. Bulunan c_j ve d_j katsayıları (1.22) yerine yazılırsa $0 \leq j \leq n - 1$ için;

$$\begin{aligned} S_j(x) &= \frac{M_j}{6h}(x_{j+1} - x)^3 + \frac{M_{j+1}}{6h}(x - x_j)^3 + \left(\frac{U_{j+1}}{h} - \frac{M_{j+1}h}{6}\right)(x - x_j) \\ &\quad + \left(\frac{U_j}{h} - \frac{M_j h}{6}\right)(x_{j+1} - x) \end{aligned} \quad (1.23)$$

sonucuna varılır.

(1.23) de tanımlandığı gibi $S_j(x)$, c_j ve d_j olan integrasyon katsayılarının düzenlenmesi ile x_j ve x_{j+1} ile aynı değere sahip olacak şekilde belirlenir. Bu düzenleme her $[x_j, x_{j+1}]$ aralığında bağımsız olarak yapıldığından $S'_j(x_j) = S'_{j-1}(x_j)$, $j = 1, \dots, n - 1$ bağıntısını garantilemez (Yani $S'(x)$ sürekli olmayabilir). (1.23) ün türevi;

$$\begin{aligned}
S'_j(x) &= -\frac{M_j}{2h}(x_{j+1} - x)^2 + \frac{M_{j+1}}{2h}(x - x_j)^2 + \left(\frac{U_{j+1}}{h} - \frac{M_{j+1}h}{6}\right) - \left(\frac{U_j}{h} - \frac{M_jh}{6}\right) \\
&= -\frac{M_j}{2h}(x_{j+1} - x)^2 + \frac{M_{j+1}}{2h}(x - x_j)^2 + \frac{U_{j+1} - U_j}{h} - \frac{h}{6}(M_{j+1} - M_j)
\end{aligned} \tag{1.24}$$

olup kübik spline olma şartlarının sağlanması için son koşul $[a, b]$ nin iç noktalarının da $S'(x)$ ' i sürekli yapmaktır. (1.24) denkleminde $S'_j(x_j) = S'_{j-1}(x_j)$, $1 \leq j \leq n$ bağıntısını sağlayacak biçimde seçilen M_j , $1 \leq j \leq n - 1$ değerleri ile $S'(x)$ sürekli yapılabilir. Böylece $n + 1$ bilinmeyenli $n - 1$ denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned}
S'_j(x_j) &= -\frac{M_j}{2h}(x_{j+1} - x_j)^2 + \frac{M_{j+1}}{2h}(x_j - x_j)^2 + \frac{U_{j+1} - U_j}{h} - \frac{h}{6}(M_{j+1} - M_j) \\
&= -\frac{M_jh}{2} + \frac{U_{j+1} - U_j}{h} - \frac{h}{6}(M_{j+1} - M_j) \\
S'_{j-1}(x_j) &= -\frac{M_{j-1}}{2h}(x_j - x_j)^2 + \frac{M_j}{2h}(x_j - x_{j-1})^2 + \frac{U_j - U_{j-1}}{h} - \frac{h}{6}(M_j - M_{j-1}) \\
&= \frac{M_jh}{2} + \frac{U_j - U_{j-1}}{h} - \frac{h}{6}(M_j - M_{j-1})
\end{aligned}$$

$S'_j(x_j) = S'_{j-1}(x_j)$ eşitliğinden $1 \leq j \leq n - 1$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
\frac{M_jh}{2} + \frac{U_j - U_{j-1}}{h} - \frac{h}{6}(M_j - M_{j-1}) &= -\frac{M_jh}{2} + \frac{U_{j+1} - U_j}{h} - \frac{h}{6}(M_{j+1} - M_j) \\
hM_{j-1} + 4hM_j + hM_{j+1} &= \frac{6}{h}(U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1})
\end{aligned} \tag{1.25}$$

bulunur. Bu sistemde M_0 ve M_n için isteksel sabit değerleri belirlenip sağ tarafa geçirilirse $(n - 1) \times (n - 1)$ lineer sistemine sahip oluruz. Sistemin matris formu $b_j = \frac{6}{h}(U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1})$, $1 \leq j \leq n - 1$ olmak üzere;

mühtinden;

$$\begin{aligned}
 S_j(x) &= m_j \frac{(x_{j+1} - x)^2(x - x_j)}{h^2} - m_{j+1} \frac{(x - x_j)^2(x_{j+1} - x)}{h^2} \\
 &+ U_j \frac{(x_{j+1} - x)^2[2(x - x_j) + h]}{h^3} \\
 &+ U_{j+1} \frac{(x - x_j)^2[2(x_{j+1} - x) + h]}{h^3}
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

eşitliğine ulaşabiliriz. Bu ifadenin iki defa türevini aldığımızda

$$\begin{aligned}
 S'_j(x) &= m_j \frac{(x_{j+1} - x)(2x_j + x_{j+1} - 3x)}{h^2} \\
 &- m_{j+1} \frac{(x - x_j)(2x_{j+1} + x_j - 3x)}{h^2} \\
 &+ 6 \frac{U_{j+1} - U_j}{h^3} (x_{j+1} - x)(x - x_j)
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 S''_j(x) &= -2m_j \frac{2x_{j+1} + x_j - 3x}{h^2} - 2m_{j+1} \frac{(2x_j + x_{j+1} - 3x)}{h^2} \\
 &+ 6 \frac{U_{j+1} - U_j}{h^3} (x_{j+1} + x_j - 2x)
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

eşitliklerini bulabiliriz.

Spline olabilme şartlarının sağlanabilmesi için gerekli olan son koşul $[a, b]$ nin iç noktalarında $S''(x)$ 'i sürekli yapmaktır. (1.31) de $S''_j(x_j) = S''_{j-1}(x_j)$, $1 \leq j \leq n$ bağıntısını sağlayacak biçimde seçilen m_j , $1 \leq j \leq n - 1$ değerleri ile $S''(x)$ sürekli yapılabilir. Böylece;

$$\begin{aligned}
 S''_j(x_j) &= -2m_j \frac{2x_{j+1} + x_j - 3x_j}{h^2} - 2m_{j+1} \frac{(2x_j + x_{j+1} - 3x_j)}{h^2} \\
 &+ 6 \frac{U_{j+1} - U_j}{h^3} (x_{j+1} + x_j - 2x_j) \\
 S''_j(x_j) &= -4 \frac{m_j}{h} - 2 \frac{m_{j+1}}{h} + 6 \frac{U_{j+1} - U_j}{h^2} \\
 S''_{j-1}(x_j) &= -2m_{j-1} \frac{2x_j + x_{j-1} - 3x_j}{h^2} - 2m_j \frac{(2x_{j-1} + x_j - 3x_j)}{h^2} \\
 &+ 6 \frac{U_j - U_{j-1}}{h^3} (x_j + x_{j-1} - 2x_j) \\
 S''_{j-1}(x_j) &= 2 \frac{m_{j-1}}{h} + 4 \frac{m_j}{h} - 6 \frac{U_j - U_{j-1}}{h^2}
 \end{aligned}$$

İç noktalar için $U(x)$ fonksiyonunun türev değerlerini hesaplayalım. Bunun için ilk olarak (1.24) denkleminde $S'_{j-1}(x_j)$ ve $S'_j(x_j)$ değerleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
 S'_{j-1}(x_j) &= m_j = -\frac{M_{j-1}}{2h}(x_j - x_j)^2 + \frac{M_j}{2h}(x_j - x_{j-1})^2 \\
 &\quad + \frac{U_j - U_{j-1}}{h} - \frac{h}{6}(M_j - M_{j-1}) \\
 m_j &= \frac{h}{3}M_j + \frac{h}{6}M_{j-1} + \frac{U_j - U_{j-1}}{h}
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

ve ikinci olarakta

$$\begin{aligned}
 S'_j(x_j) &= m_j = -\frac{M_j}{2h}(x_{j+1} - x_j)^2 + \frac{M_{j+1}}{2h}(x_j - x_j)^2 \\
 &\quad + \frac{U_{j+1} - U_j}{h} - \frac{h}{6}(M_{j+1} - M_j) \\
 m_j &= -\frac{h}{3}M_j - \frac{h}{6}M_{j+1} + \frac{U_{j+1} - U_j}{h}
 \end{aligned} \tag{1.38}$$

eşitlikleri bulunur.

(1.31) denkleminde $S''_{j-1}(x_j)$ ve $S''_j(x_j)$ değerlerini hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
 S''_{j-1}(x_j) &= M_j = -2m_{j-1} \frac{2x_j + x_{j-1} - 3x_j}{h^2} - 2m_j \frac{2x_{j-1} + x_j - 3x_j}{h^2} \\
 &\quad + 6 \frac{U_j - U_{j-1}}{h^3} (x_j + x_{j-1} - 2x_j) \\
 M_j &= \frac{2}{h}m_{j-1} + \frac{4}{h}m_j - 6 \frac{U_j - U_{j-1}}{h^2}
 \end{aligned} \tag{1.39}$$

eşitliği ve ikinci olarakta

$$\begin{aligned}
 S''_j(x_j) &= M_j = -2m_j \frac{2x_{j+1} + x_j - 3x_j}{h^2} - 2m_{j+1} \frac{2x_j + x_{j+1} - 3x_j}{h^2} \\
 &\quad + 6 \frac{U_{j+1} - U_j}{h^3} (x_{j+1} + x_j - 2x_j), \\
 M_j &= -\frac{4}{h}m_j - \frac{2}{h}m_{j+1} + 6 \frac{U_{j+1} - U_j}{h^2}
 \end{aligned} \tag{1.40}$$

eşitlikleri elde edilebilir. (1.37) denkleminde m_{j+1} ve (1.38)'den m_j eşitlikleri kullanılırsa;

$$m_{j+1} - m_j = \frac{h}{2}(M_j + M_{j+1}) \quad (1.41)$$

bağıntısı kolaylıkla elde edilebilir.

Elde ettiğimiz ve ileride kullanacağımız tüm kübik spline eşitlikleri aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Tablo 1.3: Kübik spline eşitlikleri

$$\begin{aligned} M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} &= \frac{6}{h^2} (U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}) \\ m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} &= \frac{3}{h} (U_{i+1} - U_{i-1}) \\ m_{i+1} - m_i &= \frac{h}{2} (M_i + M_{i+1}) \\ m_i &= \frac{h}{3} M_i + \frac{h}{6} M_{i-1} + \frac{U_i - U_{i-1}}{h} \\ m_i &= -\frac{h}{3} M_i - \frac{h}{6} M_{i+1} + \frac{U_{i+1} - U_i}{h} \\ M_i &= \frac{2m_{i-1}}{h} + \frac{4m_i}{h} - 6 \frac{U_i - U_{i-1}}{h^2} \\ M_i &= -\frac{4m_i}{h} - \frac{2m_{i+1}}{h} + 6 \frac{U_{i+1} - U_i}{h^2} \end{aligned}$$

1.3.2 Kübik B-spline

Herhangi bir $[a, b]$ aralığını alalım ve bu aralığı $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ şeklinde $n+1$ tane noktaya bölelim. $x_{-m}, x_{-m+1}, \dots, x_{-1}, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ noktalarında, $[a, b]$ aralığının dışında kalan noktalar olsun. $[x_{-m}, x_{n+m}]$ üzerinde tanımlı

$$B_k(t) = \frac{1}{h^{m-1}} \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i \binom{m+1}{i} (x_{i-m+k+1} - t)_+^m, \quad k = -1, 0, \dots, n+m-2 \quad (1.42)$$

m . dereceden tanımlı spline fonksiyonları vardır. Burada her $k = -1, 0, \dots, n+m-2$ için $t < x_{-m+k+1}$, $x > t_{k+2}$ olduğunda $B_k(t) = 0$ ve

$$(x_{i-m+k+1} - t)_+^m = \begin{cases} (x_{i-m+k+1} - t)^m & , t \leq x_{i-m+k+1} \\ 0 & , t > x_{i-m+k+1} \end{cases} \quad (1.43)$$

biçiminde tanımlıdır. $B_{-1}(t), B_0(t), \dots, B_{n+m-2}(t)$ fonksiyonlarına m . dereceden B-spline fonksiyonlar denir.

Bu verilen tanımları kullanarak kübik B-spline fonksiyonlarını oluşturalım. Kübik B-spline, $[a, b]$ aralığının dışındaki $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}$ noktaları ile beraber $[x_{-3}, x_{n+3}]$ aralığında tanımlıdır. Her belirli t için kübik B-spline'nun $F_t(x) = (x - t)_+^3$ fonksiyonunu hesaplırsak;

$$(x - t)_+^3 = \begin{cases} (x - t)^3 & , t \leq x \\ 0 & , t > x \end{cases} \quad (1.44)$$

elde ederiz. Bir f fonksiyonun ileri fark formülü $\Delta f = f(x+h) - f(x)$ olmak üzere $F_t(x)$ fonksiyonun

$$K(t) = \Delta^4 F_t(x_j) \quad (1.45)$$

ileri farkını hesaplayalım.

$F_t(x)$ parçalı kübik olduğundan $t \in [x_{-3}, x_{n+3}]$ için kübik spline olduğunu göstermek kolaydır.

$$\begin{aligned} K(t) &= \Delta^4 F_t(x_j) \\ &= F_t(x_{j+4}) - 4F_t(x_{j+3}) + 6F_t(x_{j+2}) - 4F_t(x_{j+1}) + F_t(x_j) \\ &= (x_{j+4} - t)_+^3 - 4(x_{j+3} - t)_+^3 + 6(x_{j+2} - t)_+^3 - 4(x_{j+1} - t)_+^3 + (x_j - t)_+^3 \end{aligned} \quad (1.46)$$

Her $t \geq x_{j+4}$ için $K(t) = 0$ olduğu, $(x - 3)_+^3$ ün tanımından açıktır. Verilen t için $x < t$ olduğunda $F_t(x) = (x - t)_+^3$ üçüncü dereceden polinomdur.

$x_j \geq t$ olduğu zaman üçüncü dereceden bir polinom için $\Delta^4 F_t(x_j)$ ileri farkı 0'a eşittir, yani

$$t \geq x_{j+4} \text{ ve } t < x_j \text{ için } K(t) \equiv 0 \quad (1.47)$$

dir. $(x_j - t)_+^3$ biçimindeki kübik spline'ların toplamında kübik spline'dır. Buna göre $K(t)$ kübik spline olur. $K(t)$ fonksiyonunu açık biçimde yazarsak;

$$K(t) = \begin{cases} (x_{j+4} - t)^3 - 4(x_{j+3} - t)^3 + 6(x_{j+2} - t)^3 - 4(x_{j+1} - t)^3, & x_j \leq t \leq x_{j+1} \\ (x_{j+4} - t)^3 - 4(x_{j+3} - t)^3 + 6(x_{j+2} - t)^3, & x_{j+1} \leq t \leq x_{j+2} \\ (x_{j+4} - t)^3 - 4(x_{j+3} - t)^3, & x_{j+2} \leq t \leq x_{j+3} \\ (x_{j+4} - t)^3, & x_{j+3} \leq t \leq x_{j+4} \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad (1.48)$$

eşitliğine ulaşırız. Bu eşitlikte; $x_j = x_0 + jh$, $x_{i+j} = x_i + jh$ olduğundan sırasıyla;

$$\begin{aligned} (x_{j+4} - t)^3 - 4(x_{j+3} - t)^3 &= (x_{j+3} - t + h)^3 - 4(x_{j+3} - t)^3 \\ &= (x_{j+3} - t)^3 + 3(x_{j+3} - t)^2 h \\ &\quad + 3(x_{j+3} - t)h^2 + h^3 - 4(x_{j+3} - t)^3 \\ &= h^3 + 3h^2(x_{j+3} - t) + 3h(x_{j+3} - t)^2 - 3(x_{j+3} - t)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x_{j+4} - t)^3 - 4(x_{j+3} - t)^3 + 6(x_{j+2} - t)^3 &= (x_{j+1} - t + 3h)^3 - 4(x_{j+1} - t + 2h)^3 \\ &\quad + 6(x_{j+1} - t + h)^3 \\ &= h^3 + 3h^2(t - x_{j+1}) + 3h(t - x_{j+1})^2 \\ &\quad - 3(t - x_{j+1})^3 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (x_{j+4} - t)^3 - 4(x_{j+3} - t)^3 + 6(x_{j+2} - t)^3 - 4(x_{j+1} - t)^3 &= (x_j - t + 4h)^3 - 4(x_j - t + 3h)^3 \\ &+ 6(x_j - t + 2h)^3 - 4(x_j - t + h)^3 \\ &= (t - x_j)^3 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu üç eşitliğin tekrar düzenlenmesiyle (1.48) denklemi;

$$K(t) = \begin{cases} (t - x_j)^3, & x_j \leq t \leq x_{j+1} \\ h^3 + 3h^2(t - x_{j+1}) + 3h(t - x_{j+1})^2 - 3(t - x_{j+1})^3, & x_{j+1} \leq t \leq x_{j+2} \\ h^3 + 3h^2(x_{j+3} - t) + 3h(x_{j+3} - t)^2 - 3(x_{j+3} - t)^3, & x_{j+2} \leq t \leq x_{j+3} \\ (x_{j+4} - t)^3, & x_{j+3} \leq t \leq x_{j+4} \\ 0, & \text{diğer yerler} \end{cases} \quad (1.49)$$

şekline döndürür ve

$$B_j = \frac{1}{h_j} K(t) = \frac{1}{h^3} \Delta^4 F_t(x_j), \quad j = -1, \dots, n+1 \quad (1.50)$$

kübik B-spline elde edilir. [18]

$[a, b]$ aralığının x_j noktalarındaki bölüntüsü, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ ve $\phi_j(x)$, x_j bölünme noktalarındaki kübik B-spline'lar olsun. $\{\phi_{-1}, \phi_0, \dots, \phi_N, \phi_{N+1}\}$ spline kümesinin $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlanan fonksiyonlar için bir baz oluşturduğu bilinmektedir. $U(x, t)$ analitik çözümüne bir yaklaşık çözüm olan $U_N(x, t)$, spline fonksiyonlar yardımıyla

$$U_N(x, t) = \sum_{j=-1}^{N+1} \phi_j(x) \delta_j(t) \quad (1.51)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada ϕ_m kübik B-spline fonksiyonu;

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3, & x \in [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3, & x \in [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3, & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer yerler} \end{cases} \quad (1.52)$$

olarak tanımlı ve $h = (x_{m+1} - x_m)$ dir. $\phi_m(x)$ spline fonksiyonu ve ilk iki türevi $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfırdır. $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı 4 ardışık $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$ kübik B-spline fonksiyonları tarafından örtülür. Şimdi de x_m noktasında $U(x_m)$ yaklaşımını belirleyelim. (1.51) yaklaşık çözümden

$$U(x_m) = \delta_{m-1}\phi_{m-1}(x_m) + \delta_m\phi_m(x_m) + \delta_{m+1}\phi_{m+1}(x_m) + \delta_{m+2}\phi_{m+2}(x_m) \quad (1.53)$$

olduğundan ayrıca

$$\begin{aligned} \phi_{m-1}(x_m) &= \frac{1}{h^3}(x_{m+1} - x_m)^3 = 1 \\ \phi_m(x_m) &= \frac{1}{h^3}[h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x_m) + 3h(x_{m+1} - x_m)^2 - 3(x_{m+1} - x_m)^3] = 4 \\ \phi_{m+1}(x_m) &= \frac{1}{h^3}[h^3 + 3h^2(x_m - x_m) + 3h(x_m - x_m)^2 - 3(x_m - x_m)^3] = 1 \\ \phi_{m+2}(x_m) &= \frac{1}{h^3}[(x_m - x_m)^3] = 0 \end{aligned} \quad (1.54)$$

eşitliklerinden

$$U(x_m) = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1} \quad (1.55)$$

olarak bulunur. Benzer yolla x_m noktasında $U'(x_m)$ yaklaşık türevini belirleyelim.

$$U'(x_m) = \delta_{m-1}\phi'_{m-1}(x_m) + \delta_m\phi'_m(x_m) + \delta_{m+1}\phi'_{m+1}(x_m) + \delta_{m+2}\phi'_{m+2}(x_m) \quad (1.56)$$

$$\begin{aligned} \phi'_{m-1}(x_m) &= -\frac{3}{h^3}(x_{m+1} - x_m)^2 = -\frac{3}{h} \\ \phi'_m(x_m) &= \frac{1}{h^3}[-3h^2 - 6h(x_{m+1} - x_m) + 9(x_{m+1} - x_m)^2] = 0 \\ \phi'_{m+1}(x_m) &= \frac{1}{h^3}[3h^2 + 6h(x_m - x_m) - 9(x_m - x_m)^2] = \frac{3}{h} \\ \phi'_{m+2}(x_m) &= \frac{1}{h^3}[3(x_m - x_m)^2] = 0 \end{aligned} \quad (1.57)$$

eşitliklerinde kullanılmasıyla

$$U'(x_m) = \frac{3}{h}(\delta_{m+1} - \delta_{m-1}) \quad (1.58)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$U''(x_m) = \delta_{m-1}\phi''_{m-1}(x_m) + \delta_m\phi''_m(x_m) + \delta_{m+1}\phi''_{m+1}(x_m) + \delta_{m+2}\phi''_{m+2}(x_m) \quad (1.59)$$

$$\begin{aligned} \phi''_{m-1}(x_m) &= \frac{6}{h^3}(x_{m+1} - x_m) = \frac{6}{h^2} \\ \phi''_m(x_m) &= \frac{1}{h^3}[6h - 18(x_{m+1} - x_m)] = -\frac{12}{h^2} \\ \phi''_{m+1}(x_m) &= \frac{1}{h^3}[6h - 18(x_m - x_m)] = \frac{6}{h^2} \\ \phi''_{m+2}(x_m) &= \frac{1}{h^3}[6(x_m - x_m)] = 0 \end{aligned} \quad (1.60)$$

eşitliklerinin kullanılmasıyla x_m noktasındaki ikinci türev;

$$U''(x_m) = \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \quad (1.61)$$

olarak bulunur.

Tablo 1.4: Bölünme noktalarındaki kübik B-spline değerleri

x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
$\phi_m(x)$	0	1	4	1	0
$\phi'_m(x)$	0	$3/h$	0	$-3/h$	0
$\phi''_m(x)$	0	$6/h^2$	$-12/h^2$	$6/h^2$	0

Tablo 1.4 de diğer bölümlerde kullanacağımız bölünme noktalarında elde edilen $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$ ve $\phi''_m(x)$ kübik B-spline eşitlikleri verilmiştir.

1.4 Burger Denklemi

λ reel bir sabit olmak üzere;

$$U_t + UU_x - \lambda U_{xx} = 0 \quad (1.62)$$

formundaki lineer olmayan Burger denklemi hakkında kısa bir inceleme yapacağız.

Hopf [1] ve Cole [2], Burger denklemini lineer hale getirerek keyfi başlangıç ve sınır koşulları kullanarak tam çözümlerini bulmuşlardır. Rubin ve Khoesla [8], kübik spline kullanarak kolokeyşin metoduyla KTDD'lerin sayısal çözümlerini araştırmış ve bu metodu Burger denkleminin sayısal çözümleri için kullanmışlardır. Jain ve Holla [10], kübik spline kullanarak bir ve iki boyutlu Burger denkleminin sonlu farklar metodu ile sayısal çözümleri üzerinde çalışmışlardır. Jain ve Lohar [11], bir ve iki boyutlu Burger denklemlerini ikiye parçaladıktan sonra kübik spline kullanarak sonlu farklar metoduyla sayısal çözümleri üzerinde çalışmışlardır. Varoğlu ve Finn [15], ağırlıklı rezidü metodunu kullanarak Burger denkleminin sayısal çözümlerini araştırmışlardır. Christie, Griffiths, Mitchell ve Sanz-Serna [17], kuadratik şekil fonksiyonları kullanarak

Burger denkleminin Petrov-Galerkin metoduyla sayısal çözümünü elde etmişlerdir. Caldwell, Wanless ve Cook [16], Galerkin sonlu elemanlar metodunu kullanarak Burger denkleminin sayısal çözümünü vermişlerdir. Herbst, Schoombie ve Mitchell [20], lineer ve kübik şekil fonksiyonları kullanarak Burger denkleminin Petrov-Galerkin metoduyla sayısal çözümü üzerinde çalışmışlardır. Fletcher [21], bir ve iki boyutlu Burger denkleminin beş ve yedi noktalı sonlu farklar metoduyla, lineer, kuadratik ve kübik şekil fonksiyonlarını kullanarak sonlu elemanlar metoduyla sayısal çözümü üzerinde çalışmış ve bulduğu sonuçları birbirleriyle kıyaslamıştır. Wang ve Kahawita [22], kübik spline kullanarak özel formdaki KTDD'ler için sayısal çözüm metodu araştırmışlar, metodu Burger denklemine uygulamış fakat sayısal çözümünü araştırmamışlar sadece basit iki KTDD'in sayısal çözümünü araştırmış ve buldukları sonuçları analitik sonuçlarla kıyaslamışlardır. Evans ve Abdullah [23], sonlu farklar metodunun bir uygulaması olan explicit grup metodunu kullanarak Burger denkleminin sayısal olarak çözmüşler ve metodun kararlılığını incelemişlerdir. Nguyen ve Reynen [24], lineer şekil fonksiyonları kullanarak Burger denkleminin en küçük kareler metoduyla çözmüşlerdir. A. H. A. Ali, L. R. T. Gardner ve G. A. Gardner [26], kuadratik B-spline kullanarak Galerkin metoduyla Burger denkleminin sayısal çözümünü araştırmışlar, metodlarının kararlılığını incelemişlerdir. A. H. A. Ali, L. R. T. Gardner ve G. A. Gardner [27], kübik spline kullanarak kolokeyşin metoduyla Burger denkleminin sayısal çözümünü araştırmışlardır. Kakuda ve Tosaka [29], genelleştirilmiş sınır elemanları yaklaşımını kullanarak Burger denkleminin sayısal çözümü üzerinde çalışmışlardır. Iskandar ve Mohsen [31], Burger denklemini ikiye parçalayarak sonlu farklar metoduyla sayısal çözümü üzerinde çalışmışlardır. Jain, Shankar ve Singh [33], Burger denklemini üçe parçaladıktan sonra kübik spline kullanarak sonlu farklar metodunu kullanarak sayısal çözümü üzerinde

çalışmışlar ve yerel kesme hatasını bularak metotlarının kararlılığını incelemişlerdir. Kutluay, Bahadır ve Özdeş [38], sonlu farklar metodunun bir uygulaması olan explicit ve tam explicit metotlarını kullanarak Burger denkleminin sayısal çözümünü vermişlerdir.

1.4.1 Test Problemleri

Lineer olmayan Burger denkleminin sayısal çözümü aşağıda verilen başlangıç ve sınır koşulları kullanılarak araştırılmıştır.

1. $[a, b]$ tanım aralığında;

$$U(x, 0) = \sin(\pi x) \quad a \leq x \leq b \quad (1.63)$$

başlangıç şartı ve

$$U(a, t) = U(b, t) = 0 \quad t > 0 \quad (1.64)$$

$$U'(a, t) = U'(b, t) = 0 \quad t > 0 \quad (1.65)$$

sınır koşulları altındaki sayısal çözüm elde edilmiştir.

Yukarıda vermiş olduğumuz başlangıç ve sınır şartları altındaki lineer olmayan Burger Denklemini için analitik çözümü Julian D. Cole tarafından sonsuz seriler cinsinden I_j ler Bessel fonksiyonları olmak üzere;

$$U(x, t) = \frac{4\pi\lambda \sum_{j=1}^{\infty} j I_j\left(\frac{1}{2\pi\lambda}\right) \sin(j\pi x) \exp(-j^2\pi^2\lambda t)}{I_0\left(\frac{1}{2\pi\lambda}\right) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} I_j\left(\frac{1}{2\pi\lambda}\right) \cos(j\pi x) \exp(-j^2\pi^2\lambda t)} \quad (1.66)$$

olarak verilmiştir. [2]

2. İkinci olarak lineer olmayan Burger Denklemini için analitik çözümümüz

H. Nguyen&J. Reynen tarafından $t_0 = \exp(\frac{1}{8\lambda})$ olmak üzere;

$$U(x, t) = \frac{\frac{x}{t}}{1 + \sqrt{\frac{t}{t_0}} \exp(\frac{x^2}{4\lambda t})} \quad t \geq 1 \quad (1.67)$$

olarak verilmiştir.

Bu test probleminde $[a, b]$ tanım aralığı olmak üzere;

$$U(x, 1) = \frac{x}{1 + \sqrt{\frac{1}{t_0}} \exp(\frac{x^2}{4\lambda})} \quad a \leq x \leq b \quad (1.68)$$

başlangıç şartı ve

$$U(a, t) = U(b, t) = 0 \quad t \geq 1 \quad (1.69)$$

sınır şartı kullanılacaktır. [24]

3. Üçüncü test probleminde; $[a, b]$ tanım aralığında $\eta = \frac{\alpha(x - \mu t - \beta)}{\lambda}$ olmak üzere;

$$U(x, t) = \frac{[\alpha + \mu + (\alpha - \mu) \exp(\eta)]}{1 + \exp(\eta)} \quad a \leq x \leq b, t \geq 0 \quad (1.70)$$

analitik çözümünü ve denklemde $t = 0$ alarak $\eta = \frac{\alpha(x - \beta)}{\lambda}$

$$U(x, 0) = \frac{[\alpha + \mu + (\alpha - \mu) \exp(\eta)]}{1 + \exp(\eta)} \quad (1.71)$$

başlangıç şartıyla beraber

$$U(a, t) = 1 \quad U(b, t) = 0.2 \quad t \geq 0 \quad (1.72)$$

sınır şartları kullanılacaktır. [17]

1.5 Regularized Long Wave (RLW) Denklemi

ε ve μ reel sabitler olmak üzere;

$$U_t + U_x + \varepsilon U U_x - \mu U_{xxt} = 0 \quad (1.73)$$

formundaki lineer olmayan RLW denklemi üzerinde duracağız.

D. H. Peregrine [3], ardışık dalgaların gelişimini modellemek için RLW denklemini önermiş ve denklemin sonlu farklar metodu ile ilk sayısal çözümlerini elde etmiştir. T. B. Benjamin, J. L. Bona ve J. J. Mahony [5] ise, RLW denkleminin dalga denklemi çözümlerini, daha yaygın olarak bilinen Korteweg-de Vries (KdV) denkleminin dalga denklemi çözümlerine benzerliğini göstermişlerdir. J. C. Eilbeck ve G. R. McGuire [6], birinci ve ikinci mertebeden iki adımlı ve ikinci mertebeden üç adımlı sonlu farklar metodlarını kullanarak RLW denkleminin sayısal çözümleri üzerinde çalışmışlardır. Ayrıca 1977 yılında, üç adımlı sonlu farklar yöntemi üzerinde daha ayrıntılı bir çalışma yapmışlardır [9]. C. J. Padam ve L. Iskandar [12], farklı formdaki sonlu farklar yöntemini kullanarak RLW denkleminin sayısal çözümlerini vermişlerdir. M. E. Alexander ve J. LL. Morris [13], kübik spline kullanarak Galerkin metoduyla RLW denkleminin sayısal çözümüyle uğraşmışlardır. L. R. T. Gardner, G. A. Gardner [28] ve L.R.T. Gardner, İ. Dağ [35], kübik B-spline kullanarak Galerkin metoduyla RLW denkleminin sayısal çözümlerini elde etmişlerdir. Q. Chang, G. Wang ve B. Guo [30], RLW denklemi için korunumlu fark yöntemini vermişlerdir. Yöntemin yakınsaklık ve kararlılığını ispatlamışlardır. P. C. Jain, R. Shankar ve T. V. Singh [32], RLW denklemini parçalayıp kübik spline kullanarak sonlu farklar metoduyla sayısal çözümlerini bulmuşlardır. L. R. T. Gardner, G. A. Gardner ve İ. Dağ [34], kuadratik B-spline kullanarak Galerkin metoduyla RLW denkleminin sayısal çözümünü yapmışlardır. L. R. T. Gardner, G. A. Gardner ve A. Doğan [36], lineer

şekil fonksiyonları kullanarak RLW denkleminin en küçük kareler metoduyla sayısal çözümünü üzerinde çalışmışlardır. L. R. T. Gardner, G. A. Gardner, F. A. Ayoub ve N. K. Amein [37], kuintik B-spline kullanarak Petrov-Galerkin metoduyla RLW denkleminin sayısal çözümlerini yapmışlardır. İ. Dağ [39], kuadratik B-spline kullanarak en küçük kareler metoduyla RLW denkleminin sayısal çözümünüyle uğraşmıştır. D. Bhardwaj ve R. Shankar [40], RLW denklemini parçalayıp kuintik spline kullanarak sonlu farklar metoduyla sayısal çözümünü, yerel kesme hatasını ve kararlılığını çalışmışlardır. İ. Dağ ve M. N. Özer [41], kübik B-spline kullanarak en küçük kareler yöntemiyle RLW denkleminin sayısal çözümünü elde etmişlerdir. A. Doğan [42, 43], kuadratik B-spline kullanarak Petrov-Galerkin metoduyla ve lineer şekil fonksiyonları kullanarak Galerkin metoduyla RLW denkleminin sayısal çözümlerini çalışmıştır.

1.5.1 Test Problemleri

RLW denkleminin aşağıdaki başlangıç ve sınır koşulları ile birlikte sayısal çözümlerini araştıracağız.

1. Tek Dalga Oluşumu

$[a, b]$ aralığında tanımlı $3c$ genlikli, $v = 1 + \varepsilon c$ dalga hızı RLW denkleminin analitik çözümünü $k = \frac{1}{2}(\varepsilon c/\mu(1 + \varepsilon c))^{1/2}$ olmak üzere

$$U(x, t) = 3c \sec h^2(k[x - x_0 - (1 + \varepsilon c)t]), \quad a \leq x \leq b \quad (1.74)$$

Peregrine [3] tarafından bulunmuştur.

(1.74) denkleminde $t = 0$ alınarak;

$$U(x, 0) = 3c \sec h^2(k[x - x_0]) \quad (1.75)$$

başlangıç şartını ve

$$U(a, t) = U(b, t) = 0 \quad (1.76)$$

sınır şartını kullanacağız.

Sayısal metodumuzun analitik çözümle olan uyumunu kontrol etmek için;

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U_j - (U_N)_j|^2} \quad (1.77)$$

$$L_\infty = \|U - U_N\|_\infty = \max_j |U_j - (U_N)_j|$$

L_2 ve L_∞ hata normlarıyla beraber Olver [14] tarafından verilen sırasıyla kütle, momentum ve enerjiye karşılık gelen;

$$C_1 = \int_a^b U dx \simeq h \sum_{m=1}^N (U_N)_m^n,$$

$$C_2 = \int_a^b (U^2 + \mu(U_x)^2) dx \simeq h \sum_{m=1}^N [((U_N)_m^n)^2 + \mu(((U_N)_x)_m^n)^2], \quad (1.78)$$

$$C_3 = \int_a^b (U^3 + 3U^2) dx \simeq h \sum_{m=1}^N [((U_N)_m^n)^3 + 3((U_N)_m^n)^2]$$

korunum kanunlarını inceleyeceğiz.

2. Ardışık Dalgaların Oluşumu

Peregrine [3] tarafından verilen ardışık dalgaların oluşumu test probleminde $[a, b]$ tanım aralığımız olmak üzere;

$$U(x, 0) = 0.5U_0 \left[1 - \tanh\left(\frac{x - x_c}{d}\right) \right] \quad (1.79)$$

başlangıç şartını ve

$$U(a, t) = U_0, U(b, t) = 0 \quad (1.80)$$

sınır şartlarını kullanacağız. Buradaki $U(x, 0)$, $t = 0$ zamanında durgun su yüzeyinin üstündeki suyun yükseltisini gösterir. d ise durgun su ve derin su arasındaki eğimi temsil eder. Korunum sabitlerinin zamana göre değişimi

analitik olarak;

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \frac{d}{dt} C_1 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} U dx = U_0 + \frac{\varepsilon}{2} U_0^2 = 0.1075, \\
 M_2 &= \frac{d}{dt} C_2 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} (U^2 + \mu(U_x)^2) dx = U_0^2 + \frac{2\varepsilon}{3} U_0^3 = 0.011, \\
 M_3 &= \frac{d}{dt} C_3 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} (U^3 + 3U^2) dx = 3U_0^2 + (1 + 2\varepsilon)U_0^3 + \frac{3\varepsilon}{4} U_0^4 = 0.034113
 \end{aligned}$$

(1.81)

şeklinde hesaplanabilir.

Bölüm 2

Lineer Olmayan Burger

Denkleminin Kübik Spline

Kolokeyşin Metoduyla Sayısal

Çözümü

Bu bölümde lineer olmayan Burger denkleminin kübik spline kolokeyşin metoduyla sayısal çözümü tanıtıldı. Birinci bölümde elde edilen kübik spline bağıntıları kullanılarak lineer olmayan Burger denklemini sadece U_i , m_i ve M_i 'yi içeren üç elemanlı köşgensel matris sistemleriyle elde edildi. Metodun kararlılık analizi yapılarak sayısal çözümün doğruluğu test problemi kullanılarak gösterildi.

2.1 Lineer Olmayan Burger Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları

λ pozitif parametre, t ve x türevleri göstermek üzere $[a, b]$ tanım aralığında

$$U_t + UU_x = \lambda U_{xx} \quad (2.1)$$

formundaki lineer olmayan Burger denkleminin;

$$\begin{aligned} U(a, t) &= U(b, t) = 0 \quad t > 0 \\ U'(a, t) &= U'(b, t) = 0 \quad t > 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

sınır şartları ve $f(x)$ sonradan belirlenmek üzere

$$U(x, 0) = f(x) \quad (2.3)$$

başlangıç şartı altındaki sayısal çözümünü bulmaya çalışacağız.

2.2 Kübik Spline Kolokeyşin Metodu

x_j 'ler, $[a, b]$ tanım aralığındaki bölünme noktalarının koordinatları olmak üzere

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b, \quad h = x_j - x_{j-1} > 0, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

olsun. (2.1) denklemi

$$U_t = -UU_x + \lambda U_{xx} \quad (2.4)$$

formunda tekrar yazılır; U_i yaklaşık çözüm $(U_x)_i = m_i$, $(U_{xx})_i = M_i$ ve $f = -UU_x + \lambda U_{xx}$ olmak üzere zamana göre türev için sonlu fark yaklaşımı kullanılarak düzenlenirse;

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = (1 - \theta)f^n + \theta f^{n+1} \quad (2.5)$$

elde edilir. (2.5) denklemi için lineerliği bozan terim yerine Rubin ve Graves [7] tarafından kullanılan

$$(UU_x)_i^{n+1} = U_i^{n+1}m_i^n + U_i^n m_i^{n+1} - U_i^n m_i^n \quad (2.6)$$

eşitlik kullanılırsa (2.5) denklemi

$$\begin{aligned} \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} &= (1 - \theta)(-U_i^n m_i^{n-1} - U_i^{n-1} m_i^n + U_i^{n-1} m_i^{n-1} \\ &\quad + \lambda M_i^n) + \theta(-U_i^{n+1} m_i^n - U_i^n m_i^{n+1} + U_i^n m_i^n + \lambda M_i^{n+1}) \end{aligned}$$

ve buradan da;

$$\begin{aligned} U_i^{n+1} &= \{U_i^n + (1 - \theta)\Delta t(-U_i^n m_i^{n-1} - U_i^{n-1} m_i^n + U_i^{n-1} m_i^{n-1} \\ &\quad + \lambda M_i^n) + \theta\Delta t(-U_i^{n+1} m_i^n + U_i^n m_i^{n+1} + \lambda M_i^{n+1})\} / (1 + \theta\Delta t m_i^n) \end{aligned} \quad (2.7)$$

olarak bulunur. (2.7) denklemi düzenlenirse;

$$\begin{aligned} F_i &= \{U_i^n + (1 - \theta)\Delta t(-U_i^n m_i^{n-1} - U_i^{n-1} m_i^n + U_i^{n-1} m_i^{n-1} \\ &\quad + \lambda M_i^n) + \theta\Delta t U_i^n m_i^n\} / (1 + \theta\Delta t m_i^n) \\ G_i &= \frac{\theta\Delta t U_i^n}{1 + \theta\Delta t m_i^n} \\ S_i &= \frac{\lambda\theta\Delta t}{1 + \theta\Delta t m_i^n} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$U_i^{n+1} = F_i + G_i m_i^{n+1} + S_i M_i^{n+1} \quad (2.8)$$

formunda yazılabilir.

(2.8) denklemini birinci bölümde elde ettiğimiz kübik spline bağıntılarını kullanarak sadece U_i , m_i ve M_i 'yi içeren üç elemanlı köşegensel matris sistemlerine dönüştürelim. (2.8) denkleminden sırasıyla U_{i-1}^{n+1} , U_i^{n+1} ve U_{i+1}^{n+1}

eşitlikleri hesaplanır ve bu eşitliklerde bulunan M_{i-1}^{n+1} , M_i^{n+1} ve M_{i+1}^{n+1} değerlerinin yerine Tablo 1.3'de verilen kübik spline bağıntıları kullanılırsa

$$\begin{aligned} U_{i-1}^{n+1} &= G_{i-1}m_{i-1}^{n+1} + F_{i-1} + S_{i-1}\left(-4\frac{m_{i-1}^{n+1}}{h} - 2\frac{m_i^{n+1}}{h} + 6\frac{U_i^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{h^2}\right) \\ U_i^{n+1} &= G_i m_i^{n+1} + F_i + S_i\left(-4\frac{m_i^{n+1}}{h} - 2\frac{m_{i+1}^{n+1}}{h} + 6\frac{U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}}{h^2}\right) \\ U_{i+1}^{n+1} &= G_{i+1}m_{i+1}^{n+1} + F_{i+1} + S_{i+1}\left(2\frac{m_i^{n+1}}{h} + 4\frac{m_{i+1}^{n+1}}{h} - 6\frac{U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}}{h^2}\right) \end{aligned}$$

ve bu denklemlerin düzenlenmesiyle;

$$\begin{bmatrix} G_{i-1} - 4\frac{S_{i-1}}{h} & -2\frac{S_{i-1}}{h} & 0 \\ 0 & G_i - 4\frac{S_i}{h} & -2\frac{S_i}{h} \\ 0 & 2\frac{S_{i+1}}{h} & G_{i+1} + 4\frac{S_{i+1}}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{i-1}^{n+1} \\ m_i^{n+1} \\ m_{i+1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{i-1}^{n+1} - F_{i-1} - 6S_{i-1}\frac{U_i^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{h^2} \\ U_i^{n+1} - F_i - 6S_i\frac{U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}}{h^2} \\ U_{i+1}^{n+1} - F_{i+1} + 6S_{i+1}\frac{U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}}{h^2} \end{bmatrix}$$

matris sistemi elde edilir.

m_{i-1}^{n+1} , m_i^{n+1} ve m_{i+1}^{n+1} bilinmeyenlerine göre matris sistemi çözülmüş ve bu eşitlikler

$$m_{i-1}^{n+1} + 4m_i^{n+1} + m_{i+1}^{n+1} = \frac{3}{h} (U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1})$$

denkleminde yerine yazılır ve bulunan denklem düzenlenirse,

$$\begin{aligned} A_i &= 72S_{i-1}S_iS_{i+1} + 12h^2G_{i-1}G_iS_{i+1} - 36hG_{i-1}S_iS_{i+1} + 3h^3G_{i-1}G_iG_{i+1} \\ &\quad - 12h^2G_{i-1}S_iG_{i+1} + h^4G_iG_{i+1} - 24hS_{i-1}G_iS_{i+1} - 6h^2S_{i-1}G_iG_{i+1} \\ &\quad + 24hS_{i-1}S_iG_{i+1} + 4h^3G_iS_{i+1} - 12h^2S_iS_{i+1} - 4h^3S_iG_{i+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_i &= 60hG_{i-1}S_iS_{i+1} + 4h^4G_{i-1}G_{i+1} + 24h^2G_{i-1}S_iG_{i+1} - 6h^2G_{i-1}G_iS_{i+1} \\
&\quad + 14h^3G_{i-1}S_{i+1} - 60hS_{i-1}S_iG_{i+1} - 14h^3S_{i-1}G_{i+1} - 144S_{i-1}S_iS_{i+1} \\
&\quad - 48h^2S_{i-1}S_{i+1} - 6h^2S_{i-1}G_iG_{i+1} \\
C_i &= -4h^3S_{i-1}G_i + 4h^3G_{i-1}S_i + h^4G_{i-1}G_i - 3h^3G_{i-1}G_iG_{i+1} \\
&\quad - 12h^2G_{i-1}S_iG_{i+1} + 24hS_{i-1}G_iS_{i+1} + 12h^2S_{i-1}G_iG_{i+1} + 72S_{i-1}S_iS_{i+1} \\
&\quad + 36hS_{i-1}S_iG_{i+1} - 12h^2S_{i-1}S_i - 6h^2G_{i-1}G_iS_{i+1} - 24hG_{i-1}S_iS_{i+1} \\
D_i &= -14h^3S_{i-1}F_iG_{i+1} + 4h^3F_{i-1}G_iS_{i+1} - 48h^2S_{i-1}F_iS_{i+1} + 4h^3G_{i-1}S_iF_{i+1} \\
&\quad + 14h^3G_{i-1}F_iS_{i+1} + 4h^4G_{i-1}F_iG_{i+1} - 12h^2F_{i-1}S_iS_{i+1} + h^4F_{i-1}G_iG_{i+1} \\
&\quad + h^4G_{i-1}G_iF_{i+1} - 12h^2S_{i-1}S_iF_{i+1} - 4h^3S_{i-1}G_iF_{i+1} - 4h^3F_{i-1}S_iG_{i+1}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$A_i U_{i-1}^{n+1} + B_i U_i^{n+1} + C_i U_{i+1}^{n+1} = D_i \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.9)$$

denklemini elde edilir.

(2.8) denkleminde sırasıyla U_{i-1}^{n+1} , U_i^{n+1} ve U_{i+1}^{n+1} eşitlikleri hesaplanıp bu eşitliklerde bulunan M_{i-1}^{n+1} , M_i^{n+1} ve M_{i+1}^{n+1} değerleri yerine Tablo 1.3'de ve rilen kübik spline eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
U_{i-1}^{n+1} - S_{i-1} \left(-4 \frac{m_{i-1}^{n+1}}{h} - 2 \frac{m_i^{n+1}}{h} + 6 \frac{U_i^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right) &= G_{i-1} m_{i-1}^{n+1} + F_{i-1} \\
U_i^{n+1} - S_i \left(2 \frac{m_{i-1}^{n+1}}{h} + 4 \frac{m_i^{n+1}}{h} - 6 \frac{U_i^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right) &= G_i m_i^{n+1} + F_i \\
U_{i+1}^{n+1} - S_{i+1} \left(2 \frac{m_i^{n+1}}{h} + 4 \frac{m_{i+1}^{n+1}}{h} - 6 \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}}{h^2} \right) &= G_{i+1} m_{i+1}^{n+1} + F_{i+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu sistemin düzenlenmesiyle

$$\begin{bmatrix} 1 + 6\frac{S_{i-1}}{h^2} & -6\frac{S_{i-1}}{h^2} & 0 \\ -6\frac{S_i}{h^2} & 1 + 6\frac{S_i}{h^2} & 0 \\ 0 & -6\frac{S_{i+1}}{h^2} & 1 + 6\frac{S_{i+1}}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i-1}^{n+1} \\ U_i^{n+1} \\ U_{i+1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{i-1}m_{i-1}^{n+1} - S_{i-1}(4\frac{m_{i-1}^{n+1}}{h} + 2\frac{m_i^{n+1}}{h}) + F_{i-1} \\ G_i m_i^{n+1} + S_i(2\frac{m_{i-1}^{n+1}}{h} + 4\frac{m_i^{n+1}}{h}) + F_i \\ G_{i+1}m_{i+1}^{n+1} + S_{i+1}(2\frac{m_i^{n+1}}{h} + 4\frac{m_{i+1}^{n+1}}{h}) + F_{i+1} \end{bmatrix}$$

matris sistemine ulaşılabilir. U_{i-1}^{n+1} , U_i^{n+1} ve U_{i+1}^{n+1} bilinmeyenlerine göre matris sistemi çözümlenir ve bu sonuçlar;

$$hm_{i-1}^{n+1} + 4hm_i^{n+1} + hm_{i+1}^{n+1} = 3U_{i+1}^{n+1} - 3U_{i-1}^{n+1}$$

denkleminde yerine yazılarak bulunan denklem düzenlenirse;

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{3h} - \left(\frac{2S_i + 4S_{i-1} - hG_{i-1}}{h^3\Delta_i} \right) \\ B_i &= \frac{4}{3h} - \left(\frac{2S_{i+1} + 4S_i - hG_i}{h^3\Delta_{i+1}} + \frac{2S_{i-1} + 4S_i - hG_i}{h^3\Delta_i} \right) \\ C_i &= \frac{1}{3h} - \left(\frac{2S_i + 4S_{i+1} - hG_{i+1}}{h^3\Delta_{i+1}} \right) \\ D_i &= \frac{F_{i+1} - F_i}{h^2\Delta_{i+1}} + \frac{F_i - F_{i-1}}{h^2\Delta_i} \\ \Delta_i &= 1 + 6 \left(\frac{S_i + S_{i-1}}{h^2} \right) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$A_i m_{i-1}^{n+1} + B_i m_i^{n+1} + C_i m_{i+1}^{n+1} = D_i \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.10)$$

denklemini elde edilir.

(2.8) denkleminde sırasıyla U_{i-1}^{n+1} , U_i^{n+1} ve U_{i+1}^{n+1} eşitlikleri ve Tablo 1.3 de verilen kübik spline bağıntılarından m_{i-1}^{n+1} , m_i^{n+1} ve m_{i+1}^{n+1} eşitlikleri hesaplanırsa;

$$\begin{aligned}
U_{i-1}^{n+1} - G_{i-1}m_{i-1}^{n+1} &= S_{i-1}M_{i-1}^{n+1} + F_{i-1} \\
U_i^{n+1} - G_i m_i^{n+1} &= S_i M_i^{n+1} + F_i \\
U_{i+1}^{n+1} - G_{i+1}m_{i+1}^{n+1} &= S_{i+1}M_{i+1}^{n+1} + F_{i+1} \\
\frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{h} - m_{i-1}^{n+1} &= \frac{h}{3}M_{i-1}^{n+1} + \frac{h}{6}M_i^{n+1} \\
\frac{U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}}{h} - m_i^{n+1} &= \frac{h}{3}M_i^{n+1} + \frac{h}{6}M_{i+1}^{n+1} \\
\frac{U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}}{h} - m_{i+1}^{n+1} &= -\frac{h}{3}M_{i+1}^{n+1} - \frac{h}{6}M_i^{n+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu sistemin düzenlenmesiyle 6 bilinmeyenli 6 denklemden oluşan

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & -G_{i-1} & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -G_i & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -G_{i+1} \\
-\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 & -1 & 0 \\
0 & -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 & 0 & -1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
U_{i-1}^{n+1} \\
U_i^{n+1} \\
U_{i+1}^{n+1} \\
m_{i-1}^{n+1} \\
m_i^{n+1} \\
m_{i+1}^{n+1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
S_{i-1}M_{i-1}^{n+1} + F_{i-1} \\
S_i M_i^{n+1} + F_i \\
S_{i+1}M_{i+1}^{n+1} + F_{i+1} \\
\frac{h}{3}M_{i-1}^{n+1} + \frac{h}{6}M_i^{n+1} \\
\frac{h}{3}M_i^{n+1} + \frac{h}{6}M_{i+1}^{n+1} \\
-\frac{h}{3}M_{i+1}^{n+1} - \frac{h}{6}M_i^{n+1}
\end{bmatrix}$$

matris sistemine ulaşılır. U_{i-1}^{n+1} , U_i^{n+1} , U_{i+1}^{n+1} , m_{i-1}^{n+1} , m_i^{n+1} ve m_{i+1}^{n+1} bilinmeyenlerine göre matris sistemi çözümler ve sonuçlar

$$hm_{i-1}^{n+1} + 4hm_i^{n+1} + hm_{i+1}^{n+1} = 3U_{i+1}^{n+1} - 3U_{i-1}^{n+1}$$

denkleminde yerine yazılarak düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
A_i &= \frac{h}{6} + \frac{G_i + 2G_{i-1}}{6\Delta_i} - \frac{S_{i-1}}{h\Delta_i} \\
B_i &= \frac{2h}{3} - \frac{G_{i+1} + 2G_i}{6\Delta_{i+1}} + \frac{2G_i + G_{i-1}}{6\Delta_i} + S_i \left(\frac{1}{h\Delta_{i+1}} + \frac{1}{h\Delta_i} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_i &= \frac{h}{6} - \frac{2G_i + G_i}{6\Delta_{i+1}} - \frac{S_{i+1}}{h\Delta_{i+1}} \\
D_i &= \frac{F_{i+1} - F_i}{h\Delta_{i+1}} - \frac{F_i - F_{i-1}}{h\Delta_i} \\
\Delta_i &= 1 - \frac{G_i - G_{i-1}}{h}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$A_i M_{i-1}^{n+1} + B_i M_i^{n+1} + C_i M_{i+1}^{n+1} = D_i \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.11)$$

eşitliği bulunur.

(2.9) denklemini ele alırsak U_i , m_i ve M_i 'lerden oluşan üçgensel bir matris sistemidir ve $d^{n+1} = \{U_0^{n+1}, U_1^{n+1}, \dots, U_N^{n+1}\}$ bilinmeyenler parametreleri olmak üzere $N+1$ bilinmeyen $N-1$ denklemden oluşur. (2.2) sınır şartları kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
U_0^{n+1} &= 0 \text{ ve } U_N^{n+1} = 0 \quad t > 0 \\
m_0^{n+1} &= 0 \text{ ve } m_N^{n+1} = 0 \quad t > 0
\end{aligned} \quad (2.12)$$

elde edilir. Sınır şartlarından gelen $U_0^{n+1} = 0$ ve $U_N^{n+1} = 0$ eşitlikleri sisteme dahil edilirse yeni denklem sistemi Thomas algoritması kullanılarak çözülebilen $N-1$ bilinmeyen $N-1$ denklemden oluşan bir sisteme döndürür.

2.3 Başlangıç Durumu ve Sayısal Hesaplamalar

$t = 0$ iken (2.3) başlangıç şartı kullanılarak $d^0 = \{U_0^0, U_1^0, \dots, U_N^0\}$ başlangıç vektörü hesaplanabilir ve başlangıç vektörü kullanılarak her bölünme noktasındaki

$$m_{i-1}^0 + 4m_i^0 + m_{i+1}^0 = \frac{3}{h} (U_{i+1}^0 - U_{i-1}^0), \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

kübik spline eşitliği yardımıyla birinci türev değerleri bulunabilir. Bölünme noktalarındaki birinci türev değerleri bulunurken $N+1$ bilinmeyenli $N-1$

denklemden oluşan bir denklem sistemi karşımıza çıkar. Denklem sistemine (2.12) sınır şartlarından gelen $m_0^{n+1} = 0$ ve $m_N^{n+1} = 0$ değerlerini katarak $N - 1$ denklem, $N - 1$ bilinmeyenden oluşan yeni bir denklem sistemine dönüştürülürse, bölünme noktalarındaki birinci türev değerleri Thomas algoritması kullanılarak hesaplanabilir. İkinci türev değerleride

$$M_i^0 = \frac{2m_{i-1}^0}{h} + \frac{4m_i^0}{h} - 6\frac{U_i^0 - U_{i-1}^0}{h^2}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$M_0^0 = -\frac{4m_0^0}{h} - \frac{2m_1^0}{h} + 6\frac{U_1^0 - U_0^0}{h^2}$$

eşitlikleri kullanılarak bulunabilir.

$d^1 = \{U_0^1, U_1^1, \dots, U_N^1\}$ ikinci zaman adımındaki bilinmeyenler vektörünü hesaplamak için (2.8) denkleminde $\theta = 1$ alarak kapalı çözüm araştırılırsa (2.8) denklemi

$$F_i = \frac{U_i^0 + \Delta t U_i^0 m_i^0}{1 + \Delta t m_i^0}$$

$$G_i = -\frac{\Delta t U_i^0}{1 + \Delta t m_i^0}$$

$$S_i = \frac{\lambda \Delta t}{1 + \Delta t m_i^0}$$

olmak üzere;

$$U_i^1 = F_i + G_i m_i^1 + S_i M_i^1 \quad (2.13)$$

denklemine dönüştür. (2.9) eşitliği kullanılır ve bu eşitlikte bulunan F_i , G_i ve S_i değerleri (2.13) denklemindeki değerler olarak alınırsa (2.9) denklem sistemi $N+1$ bilinmeyen $N-1$ denklemden oluşan sisteme dönüştür. (2.12) olarak elde ettiğimiz sınır şartları bu zaman adımında kullanılırsa sistem; $(N - 1) \times (N - 1)$ 'lik yeni bir denklem sistemine dönüştür. Bu yeni denklem sistemi Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir. Böylece $d^1 = \{U_0^1, U_1^1, \dots, U_N^1\}$ bilinmeyen vektörü elde edilir. Bunun sonucunda ikinci zaman adımında her-

bir bölünme noktasındaki

$$m_{i-1}^1 + 4m_i^1 + m_{i+1}^1 = \frac{3}{h} (U_{i+1}^1 - U_{i-1}^1), \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

kübik spline eşitliği kullanılarak birinci türev değerleri (ilk zaman adımında yapılan benzer işlemlerle) bulunabilir. İkinci türev değerleri

$$M_i^1 = \frac{2m_{i-1}^1}{h} + \frac{4m_i^1}{h} - 6 \frac{U_i^1 - U_{i-1}^1}{h^2}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$M_0^1 = -\frac{4m_0^1}{h} - \frac{2m_1^1}{h} + 6 \frac{U_1^1 - U_0^1}{h^2}$$

eşitliklerinden hesaplanabilir.

$d^2 = \{U_0^2, U_1^2, \dots, U_N^2\}$ üçüncü zaman adımındaki bilinmeyenler vektörünü hesaplamak için (2.8) denkleminde $\theta = \frac{1}{2}$ olarak Crank Nicolson yaklaşımı kullanılırsa (2.8) denklemi;

$$F_i = \frac{U_i^1 + \frac{\Delta t}{2}(-U_i^1 m_i^0 - U_i^0 m_i^1 + U_i^0 m_i^0 + \lambda M_i^1 + U_i^1 m_i^1)}{2 + \Delta t m_i^1}$$

$$G_i = -\frac{\Delta t U_i^1}{2 + \Delta t m_i^1}$$

$$S_i = \frac{\lambda \Delta t}{2 + \Delta t m_i^1}$$

olmak üzere;

$$U_i^2 = F_i + G_i m_i^2 + S_i M_i^2 \quad (2.14)$$

denkleminde dönüşür. (2.9) eşitliği kullanılır ve bu eşitlikte bulunan F_i , G_i ve S_i değerleri (2.14) denklemindeki değerler olarak alınırsa (2.9) denklem sistemi $N+1$ bilinmeyen $N-1$ denklemden oluşan yeni bir sisteme dönüşür. (2.12) sınır şartlarını bu zaman adımı içinde kullanılırsa iki bilinmeyenin elimine edilmesiyle $N-1$ bilinmeyenli $N-1$ denklemden oluşan yeni bir denklem sistemine ulaşılır. Bu yeni denklem sistemi Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir. Böylece $d^2 = \{U_0^2, U_1^2, \dots, U_N^2\}$ bilinmeyen vektörü

bulunur. Üçüncü zaman adımında herbir bölünme noktasındaki

$$m_{i-1}^2 + 4m_i^2 + m_{i+1}^2 = \frac{3}{h} (U_{i+1}^2 - U_{i-1}^2), \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

kübik spline eşitliği kullanılarak birinci türev değerleri (birinci ve ikinci zaman adımında yapılan benzer işlemlerle) ve

$$M_i^2 = \frac{2m_{i-1}^2}{h} + \frac{4m_i^2}{h} - 6 \frac{U_i^2 - U_{i-1}^2}{h^2}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$M_0^2 = -\frac{4m_0^2}{h} - \frac{2m_1^2}{h} + 6 \frac{U_1^2 - U_0^2}{h^2}$$

bağıntılarıyla da ikinci türev değerleri bulunabilir.

Sonraki tüm zaman adımları için n hesaplanacak zaman adımı olmak üzere $d^{n+1} = \{U_0^{n+1}, U_1^{n+1}, \dots, U_N^{n+1}\}$ bilinmeyen vektörlerini hesaplarırken üçüncü zaman adımında yapılan benzer işlemler yapılır. Örneğin d^3 bilinmeyen vektörünü bulmak için d^1 ve d^2 bilinmeyen vektörleri kullanılır. Bu şekilde her zaman adımı için gerekli olan bilinmeyen vektörler önceki iki zaman adımındaki vektörler kullanılarak istenen tüm zaman adımları için hesaplanabilir.

2.4 Metodun Kararlılık Analizi

Metodun kararlılığını incelemek için Fourier kararlılık metodunu kullanalım. Denklemi lineer duruma getirmek için UU_x teriminde U yerine g sabiti kullanılırsa (2.1) denklemi

$$U_t = \lambda U_{xx} - gU_x \quad (2.15)$$

olur. (2.15) denklemine zamana göre türev için sonlu fark yaklaşımı kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$U_m^{n+1} = U_m^n + (1 - \theta)\Delta t[\lambda M_m^n - gm_m^n] + \theta\Delta t[\lambda M_m^{n+1} - gm_m^{n+1}] \quad (2.16)$$

denkleminde ulaşılır. (2.16) denkleminde U_{m-1}^{n+1} , $4U_m^{n+1}$ ve U_{m+1}^{n+1} eşitliklerini hesaplanıp taraf tarafa toplanırsa;

$$\begin{aligned} U_{m-1}^{n+1} + 4U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1} &= U_{m-1}^n + 4U_m^n + U_{m+1}^n + (1 - \theta)\Delta t[\lambda(M_{m-1}^n + 4M_m^n \\ &+ M_{m+1}^n) - g(m_{m-1}^n + 4m_m^n + m_{m+1}^n)] + \theta\Delta t[\lambda(M_{m-1}^{n+1} + 4M_m^{n+1} + M_{m+1}^{n+1}) \\ &- g(m_{m-1}^{n+1} + 4m_m^{n+1} + m_{m+1}^{n+1})] \end{aligned}$$

denkleminde elde edilir. Denkleminde karşımıza çıkan bağıntılar için birinci bölümde hesapladığımız kübik spline eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} U_{m-1}^{n+1} + 4U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1} &= U_{m-1}^n + 4U_m^n + U_{m+1}^n + (1 - \theta)\Delta t[\lambda\frac{6}{h^2}(U_{m-1}^n \\ &- 2U_m^n + U_{m+1}^n) - g\frac{3}{h}(U_{m+1}^n - U_{m-1}^n)] + \theta\Delta t[\lambda\frac{6}{h^2}(U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}) \\ &- g\frac{3}{h}(U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1})] \end{aligned}$$

ve bulunan bu denklem düzenlenirse;

$$\begin{aligned} U_{m-1}^{n+1}(1 - g\theta\Delta t\frac{3}{h} - \theta\Delta t\lambda\frac{6}{h^2}) + U_m^{n+1}(4 + \theta\Delta t\lambda\frac{12}{h^2}) + U_{m+1}^{n+1}(1 + g\theta\Delta t\frac{3}{h} \\ - \theta\Delta t\lambda\frac{6}{h^2}) &= U_{m-1}^n(1 + (1 - \theta)\Delta t\lambda\frac{6}{h^2} + (1 - \theta)\Delta t g\frac{3}{h}) \\ + U_m^n(4 - (1 - \theta)\Delta t\lambda\frac{12}{h^2}) + U_{m+1}^n(1 + (1 - \theta)\Delta t\lambda\frac{6}{h^2} - (1 - \theta)\Delta t g\frac{3}{h}) \end{aligned}$$

elde edilir. Fourier kararlılık metodu gereğince $U_m^n = \xi^n e^{i\beta mh}$, $i = \sqrt{-1}$ eşitlikleri yukarıdaki denkleme uygulanırsa

$$\begin{aligned} \xi^n e^{i\beta mh}[\xi e^{-i\beta h}(1 - g\theta\Delta t\frac{3}{h} - \theta\Delta t\lambda\frac{6}{h^2}) + \xi(4 + \theta\Delta t\lambda\frac{12}{h^2}) + \xi e^{i\beta h}(1 + g\theta\Delta t\frac{3}{h} \\ - \theta\Delta t\lambda\frac{6}{h^2})] &= \xi^n e^{i\beta mh}[e^{-i\beta h}(1 + (1 - \theta)\Delta t\lambda\frac{6}{h^2} + (1 - \theta)\Delta t g\frac{3}{h}) \\ + (4 - (1 - \theta)\Delta t\lambda\frac{12}{h^2}) + e^{i\beta h}(1 + (1 - \theta)\Delta t\lambda\frac{6}{h^2} - (1 - \theta)\Delta t g\frac{3}{h})] \end{aligned}$$

olur. $\beta h = \alpha$, $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ ve $e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha$ eşitliklerinin kullanılmasıyla;

$$\begin{aligned} & \xi \left[\cos \alpha \left(1 - g\theta \Delta t \frac{3}{h} - \theta \Delta t \lambda \frac{6}{h^2} + 1 + g\theta \Delta t \frac{3}{h} - \theta \Delta t \lambda \frac{6}{h^2} \right) + \left(4 + \theta \Delta t \lambda \frac{12}{h^2} \right) \right. \\ & \left. + i \sin \alpha \left(-1 + g\theta \Delta t \frac{3}{h} + \theta \Delta t \lambda \frac{6}{h^2} + 1 + g\theta \Delta t \frac{3}{h} - \theta \Delta t \lambda \frac{6}{h^2} \right) \right] \\ & = \cos \alpha \left(1 + (1 - \theta) \Delta t \lambda \frac{6}{h^2} + (1 - \theta) \Delta t g \frac{3}{h} + 1 + (1 - \theta) \Delta t \lambda \frac{6}{h^2} - (1 - \theta) \Delta t g \frac{3}{h} \right) \\ & \left(4 - (1 - \theta) \Delta t \lambda \frac{12}{h^2} \right) + i \sin \alpha \left(-1 - (1 - \theta) \Delta t \lambda \frac{6}{h^2} - (1 - \theta) \Delta t g \frac{3}{h} \right. \\ & \left. + 1 + (1 - \theta) \Delta t \lambda \frac{6}{h^2} - (1 - \theta) \Delta t g \frac{3}{h} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa;

$$\begin{aligned} & \xi \left[\cos \alpha \left(2 - \theta \Delta t \lambda \frac{12}{h^2} \right) + i \sin \alpha \left(g\theta \Delta t \frac{6}{h} \right) + \left(4 + \theta \Delta t \lambda \frac{12}{h^2} \right) \right] \\ & = \cos \alpha \left(2 + (1 - \theta) \Delta t \lambda \frac{12}{h^2} \right) + i \sin \alpha \left(-(1 - \theta) \Delta t g \frac{6}{h} \right) + \left(4 - (1 - \theta) \Delta t \lambda \frac{12}{h^2} \right) \end{aligned}$$

denkleme ulaşılır. Bu denkleme

$$\begin{aligned} A &= 2 \cos \alpha + 4 \\ B &= \lambda \frac{12}{h^2} \Delta t (1 - \cos \alpha) \\ C &= g \frac{6}{h} \Delta t \sin \alpha \end{aligned}$$

olmak üzere;

$$\xi(A + \theta B + i\theta C) = A - (1 - \theta)B - i(1 - \theta)C \quad (2.17)$$

yazılabilir. Fourier kararlık metodu gereğince $|\xi| \leq 1$ olmalıydı. Bu durumda (2.17) denklemi için;

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sqrt{\frac{(A + \theta B - B)^2 + (1 - \theta)^2 C^2}{(A + \theta B)^2 + \theta^2 C^2}} \leq 1 \\ 0 &\leq \frac{(A + \theta B - B)^2 + (1 - \theta)^2 C^2}{(A + \theta B)^2 + \theta^2 C^2} \leq 1 \end{aligned} \quad (2.18)$$

koşulu elde edilir. (2.18) denkleminin için eşitliğin sol tarafının doğrulandığı aşıkardır. Göstermemiz gereken;

$$(A + \theta B - B)^2 + (1 - \theta)^2 C^2 \leq (A + \theta B)^2 + \theta^2 C^2 \quad (2.19)$$

olduğu durumdur. (2.19) düzenlenirse;

$$(B^2 + C^2)(1 - 2\theta) - 2AB \leq 0 \quad (2.20)$$

şartına ulaşır. $B^2 + C^2 \geq 0$ ve $2AB \geq 0$ olduklarından (2.20) eşitliğinin her durumda sağlanması $1 - 2\theta \leq 0$ olmasına bağlıdır. Bu durumda da $\frac{1}{2} \leq \theta$ olur. $\theta \in [0, 1]$ olduğu biliniyordu, öyleyse Fourier kararlılık metoduna göre metodumuz $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$ aralığında iken kararlıdır.

2.5 Test Problemi

Bilgisayar programımızı (2.1) formundaki lineer olmayan Burger denkleminin; (1.63) başlangıç ve (1.64) sınır şartları altında sayısal çözümlenti yapmak için tasarladık. İlk olarak program; $\lambda = 1$, $h = 0.25$, $\Delta t = 0.1$ olarak ve $0 \leq x \leq 1$ tanım aralığında $t = 0.25$ oluncaya kadar çalıştırıldı. Daha sonrada $h = 0.125$ ve $h = 0.0625$ için aynı hesaplamalar yapılarak bulunan sayısal sonuçlar ile analitik sonuçlar farklı zamanlar için düzenlenerek Tablo 2.1'de verildi.

Tabloyu incelediğimizde sayısal sonuçlar ile analitik sonuçların en iyi uyumu; en küçük konum artımında sağladığı görüldü.

Tablo 2.1: $\lambda = 1$ iken $h = 0.25$, $h = 0.125$ ve $h = 0.0625$

değerleri için spline sonuçları ile analitik sonuçların kıyaslanması

x	t	$h = 0.25$	$h = 0.125$	$h = 0.0625$	Analitik Çözüm
0.25	0	0.7071	0.7071	0.7071	0.7071
	0.05	0.3734	0.4095	0.4125	0.4131
	0.10	0.2202	0.2531	0.2536	0.2536
	0.15	0.1334	0.1566	0.1566	0.1566
	0.20	0.0814	0.0964	0.0964	0.0964
	0.25	0.0510	0.0592	0.0592	0.0592
0.50	0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	0.05	0.5563	0.6024	0.6083	0.6091
	0.10	0.3263	0.3692	0.3716	0.3716
	0.15	0.1944	0.2266	0.2268	0.2268
	0.20	0.1173	0.1387	0.1385	0.1385
	0.25	0.0614	0.0845	0.845	0.0845
0.75	0	0.7071	0.7071	0.7071	0.7071
	0.05	0.4263	0.4453	0.4492	0.4502
	0.10	0.2444	0.2704	0.2726	0.2726
	0.15	0.1423	0.1643	0.1644	0.1644
	0.20	0.0843	0.0994	0.0994	0.0994
	0.25	0.0501	0.0603	0.0603	0.0603

Bölüm 3

RLW Denkleminin Kübik Spline Kolokeyşin Metoduyla Sayısal Çözümü

Bu bölümde RLW denkleminin kübik spline kolokeyşin metodu ile sayısal çözümü tanıtıldı. Metodun kararlılık analizi çalışıldı. RLW denkleminin tek dalga çözümü ve ardışık dalgalar çözümü elde edildi. Sayısal çözümün doğruluğu korunum sabitleri, L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak her iki test problemi içinde gösterildi.

3.1 RLW Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları

ε ve μ pozitif parametre, t ve x türevi göstermek üzere

$$U_t + U_x + \varepsilon U U_x - \mu U_{xxt} = 0 \quad (3.1)$$

formundaki RLW denkleminin;

$$\begin{aligned} U(a, t) = \alpha_1, U(b, t) = \alpha_2 \\ a \leq x \leq b, t \geq 0 \\ U'(a, t) = 0, U'(b, t) = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

sınır şartı ve $f(x)$ sonradan belirlenmek üzere

$$U(x, 0) = f(x) \quad (3.3)$$

başlangıç şartı altındaki sayısal çözümünü araştıracağız.

3.2 Kübik Spline Kolokeyşin Metodu

x_j 'ler, $[a, b]$ tanım aralığındaki bölünme noktalarının koordinatları olmak üzere

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b, \quad h = x_j - x_{j-1} > 0, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

olsun. (3.1) formundaki RLW denklemini

$$U_t - \mu U_{xxt} = -(U_x + \varepsilon U U_x) \quad (3.4)$$

formunda tekrar yazar ve U_i yaklaşık çözüm, $(U_x)_i = m_i$, $(U_{xx})_i = M_i$ ve $f = -(U_x + \varepsilon U U_x)$ olmak üzere zamana göre türev için sonlu fark yaklaşımı kullanılarak düzenlenirse;

$$(U_i^{n+1} - U_i^n) - \mu(M_i^{n+1} - M_i^n) = (1 - \theta) \Delta t (f^n)_i + \theta \Delta t (f^{n+1})_i \quad (3.5)$$

formunda yazılabilir. (3.5) denklemini lineer yapmak için;

$$(U U_x)_i^{n+1} = U_i^{n+1} m_i^n + U_i^n m_i^{n+1} - U_i^n m_i^n \quad (3.6)$$

eşitliği kullanılırsa (3.5) denklemini;

$$\begin{aligned} U_i^{n+1}(1 + \theta \Delta t \varepsilon m_i^n) &= U_i^n + \mu M_i^{n+1} - \mu M_i^n - (1 - \theta) \Delta t \{m_i^n \\ &+ \varepsilon (U_i^n m_i^{n-1} + U_i^{n-1} m_i^n - U_i^{n-1} m_i^{n-1})\} \\ &- \theta \Delta t \{m_i^{n+1} + \varepsilon (U_i^n m_i^{n+1} - U_i^n m_i^n)\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

olarak elde edilir. (3.7) denklemi

$$F_i = \frac{U_i^n - \mu M_i^n - (1 - \theta) \Delta t (m_i^n + \varepsilon (U_i^n m_i^{n-1} + U_i^{n-1} m_i^n - U_i^{n-1} m_i^{n-1})) + \varepsilon \theta \Delta t U_i^n m_i^n}{1 + \theta \Delta t \varepsilon m_i^n}$$

$$G_i = \frac{\theta \Delta t (-1 - \varepsilon U_i^n)}{1 + \theta \Delta t \varepsilon m_i^n}$$

$$S_i = \frac{\mu}{1 + \theta \Delta t \varepsilon m_i^n}$$

olmak üzere

$$U_i^{n+1} = F_i + G_i m_i^{n+1} + S_i M_i^{n+1} \quad (3.8)$$

formunda düzenlenebilir.

(3.8) denklemi; ikinci bölümde (2.8) denklemi için yapılan benzer işlemlerle sadece U_i , m_i ve M_i 'yi içeren üç elemanlı köşegen matris sistemine dönüştürülebilir. Biz bunlardan biri olan (2.9) eşitliğini kullanır ve bu eşitlikte bulunan F_i , G_i ve S_i değerleri, (3.8) denklemindeki değerler olarak alınırsa $N+1$ bilinmeyen $N-1$ denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilebilir. (3.2) olarak bölümün başında verdiğimiz sınır şartları kullanılırsa;

$$\begin{aligned} U_0^{n+1} &= \alpha_1, U_N^{n+1} = \alpha_2 \\ m_0^{n+1} &= 0, m_N^{n+1} = 0 \end{aligned}, t \geq 0 \quad (3.9)$$

yazılabilir. Sınır şartlarından bulunan $U_0^{n+1} = \alpha_1$ ve $U_N^{n+1} = \alpha_2$ eşitliklerinin sisteme ilave edilmesiyle yeni denklem sistemi artık $N-1$ bilinmeyen, $N-1$ denklemden oluşan yeni bir sisteme dönüşür ve bu sistem Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir.

3.3 Başlangıç Durumu ve Sayısal Hesaplamalar

İlk zaman adımında ($t = 0$ anında), (3.3) başlangıç şartı yardımıyla $d^0 = \{U_0^0, U_1^0, \dots, U_N^0\}$ başlangıç vektörü hesaplanabilir ve başlangıç vektörü

kullanılarak herbir bölünme noktasındaki;

$$m_{i-1}^0 + 4m_i^0 + m_{i+1}^0 = \frac{3}{h} (U_{i+1}^0 - U_{i-1}^0), \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

kübik spline eşitliğinden birinci türev değerleri bulunabilir. Birinci türev değerleri hesaplanırken $N+1$ bilinmeyen, $N-1$ denklemden oluşan sisteminin çözülmesi gerekir. Denklem sistemine (3.9) sınır şartlarından gelen $m_0^{n+1} = 0$ ve $m_N^{n+1} = 0$ eşitliklerinin katılmasıyla $N-1$ denklem, $N-1$ bilinmeyenden oluşan yeni bir denklem sistemi elde edilir. Bulunan bu yeni sistem Thomas algoritması ile çözülebilir. Bölünme noktalarındaki ikinci türev değerleri;

$$M_i^0 = \frac{2m_{i-1}^0}{h} + \frac{4m_i^0}{h} - 6\frac{U_i^0 - U_{i-1}^0}{h^2}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$M_0^0 = -\frac{4m_0^0}{h} - \frac{2m_1^0}{h} + 6\frac{U_1^0 - U_0^0}{h^2}$$

kübik spline eşitlikleri kullanılarak hesaplanabilir.

$d^1 = \{U_0^1, U_1^1, \dots, U_N^1\}$ ikinci zaman adımındaki bilinmeyenler vektörünü hesaplamak için (3.8) denkleminde $\theta = 1$ olarak kapalı çözüm araştırılırsa (3.8) denklemi

$$F_i = \frac{U_i^0 - \mu M_i^0 + \varepsilon \Delta t U_i^0 m_i^0}{1 + \Delta t \varepsilon m_i^0}$$

$$G_i = \frac{\Delta t (-1 - \varepsilon U_i^0)}{1 + \Delta t \varepsilon m_i^0}$$

$$S_i = \frac{\mu}{1 + \Delta t \varepsilon m_i^0}$$

olmak üzere;

$$U_i^1 = F_i + G_i m_i^1 + S_i M_i^1 \quad (3.10)$$

denkleminde dönüştür. (2.9) eşitliği kullanılır ve bu eşitlikte bulunan F_i , G_i ve S_i değerleri (3.10) denklemindeki değerler olarak alınırsa (2.9) denklem sistemi $N+1$ bilinmeyen $N-1$ denklemden oluşan bir sisteme dönüştür. (3.9)

olarak elde ettiğimiz sınır şartları bu zaman adımı içinde kullanılırsa sistem; $(N - 1) \times (N - 1)$ 'lik yeni bir sistemine döndürür. Bu yeni denklem sistemide Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir. Böylece $d^1 = \{U_0^1, U_1^1, \dots, U_N^1\}$ bilinmeyen vektörü elde edilebilir. Bunun sonucunda ikinci zaman adımında bölünme noktalarında

$$m_{i-1}^1 + 4m_i^1 + m_{i+1}^1 = \frac{3}{h} (U_{i+1}^1 - U_{i-1}^1), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1$$

kübik spline eşitliği kullanılarak birinci türev değerleri (ilk zaman adımında yapılan benzer işlemlerle) kolaylıkla bulunabilir. İkinci türev değerleride;

$$M_i^1 = \frac{2m_{i-1}^1}{h} + \frac{4m_i^1}{h} - 6 \frac{U_i^1 - U_{i-1}^1}{h^2}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$M_0^1 = -\frac{4m_0^1}{h} - \frac{2m_1^1}{h} + 6 \frac{U_1^1 - U_0^1}{h^2}$$

kübik spline eşitlikleri kullanılarak hesaplanabilir.

$d^2 = \{U_0^2, U_1^2, \dots, U_N^2\}$ üçüncü zaman adımındaki bilinmeyenler vektörünü hesaplamak için (3.8) denkleminde $\theta = \frac{1}{2}$ olarak Crank Nicolson yaklaşımı kullanılırsa (3.8)

$$F_i = \frac{2 \frac{U_i^1 - \mu M_i^1}{2} - \frac{\Delta t}{2} (m_i^1 + \varepsilon (U_i^1 m_i^0 + U_i^0 m_i^1 - U_i^0 m_i^0)) + \frac{\varepsilon}{2} \Delta t U_i^1 m_i^1}{2 + \Delta t \varepsilon m_i^1}$$

$$G_i = \frac{\Delta t (-1 - \varepsilon U_i^1)}{2 + \Delta t \varepsilon m_i^1}$$

$$S_i = 2 \frac{\mu}{2 + \Delta t \varepsilon m_i^1}$$

olmak üzere;

$$U_i^2 = F_i + G_i m_i^2 + S_i M_i^2 \quad (3.11)$$

denkleminde döndürür. (2.9) eşitliği kullanılır ve bu eşitlikte bulunan F_i , G_i ve S_i değerleri (3.11) denklemindeki değerler olarak alınırsa (2.9) denklem sistemi $N + 1$ bilinmeyen $N - 1$ denklemden oluşan bir sisteme döndürür. (3.9)

sınır şartından dolayı birinci türevin bölünme noktalarının başında ve sonunda sıfır olduğu kullanılırsa yeni denklem sistemi $N - 1$ bilinmeyen $N - 1$ denklemden oluşan bir sisteme döndürür ve bu sistem Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir. Böylece $d^2 = \{U_0^2, U_1^2, \dots, U_N^2\}$ bilinmeyen vektörü elde edilir. Bunun sonucunda üçüncü zaman adımında herbir bölünme noktasındaki;

$$m_{i-1}^2 + 4m_i^2 + m_{i+1}^2 = \frac{3}{h} (U_{i+1}^2 - U_{i-1}^2), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1$$

kübik spline eşitliği kullanılarak birinci türev değerleri (ikinci zaman adımında yapılan benzer işlemlerle) bulunabilir. İkinci türev değerleri içinde;

$$M_i^2 = \frac{2m_{i-1}^2}{h} + \frac{4m_i^2}{h} - 6 \frac{U_i^2 - U_{i-1}^2}{h^2}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$M_0^2 = -\frac{4m_0^2}{h} - \frac{2m_1^2}{h} + 6 \frac{U_1^2 - U_0^2}{h^2}$$

eşitlikleri kullanılarak hesaplamalar yapılabilir.

Üçüncü zaman adımından sonraki tüm zaman adımları için n hesaplanacak zaman adımı olmak üzere $d^{n+1} = \{U_0^{n+1}, U_1^{n+1}, \dots, U_N^{n+1}\}$ bilinmeyenler vektörleri hesaplanırken önceki iki zaman adımında bulunan bilinmeyenler vektörleri kullanılır.

3.4 Metodun Kararlılığı ve Kesme Hatası

Şimdi de yerel kesme hatasını elde edelim. Bunun için U_i , m_i ve M_i yaklaşımları için Taylor serisi açılımları kullanılırsa;

$$U_{i-1}^n = U_i^n - hm_i^n + \frac{1}{2}h^2 M_i^n - \frac{1}{6}h^3 (U_{xxx})_i^n + \dots$$

$$U_i^{n-1} = U_i^n - k(U_t)_i^n + \frac{1}{2}k^2 (U_{tt})_i^n - \frac{1}{6}k^3 (U_{ttt})_i^n + \dots$$

$$\begin{aligned}
U_{i+1}^n &= U_i^n + hm_i^n + \frac{1}{2}h^2 M_i^n + \frac{1}{6}h^3 (U_{xxx})_i^n + \dots \\
U_i^{n+1} &= U_i^n + k(U_t)_i^n + \frac{1}{2}k^2 (U_{tt})_i^n + \frac{1}{6}k^3 (U_{ttt})_i^n + \dots \\
U_{i-1}^{n-1} &= U_i^n - (hm_i^n + k(U_t)_i^n) + \frac{1}{2}(h^2 M_i^n + 2hk(U_{xt})_i^n + k^2 (U_{tt})_i^n) \\
&\quad + \frac{1}{6}(h^3 (U_{xxx})_i^n - 3h^2 k(U_{xxt})_i^n + 3hk^2 (U_{xtt})_i^n - k^3 (U_{ttt})_i^n) + \dots \\
U_{i+1}^{n-1} &= U_i^n + (hm_i^n - k(U_t)_i^n) + \frac{1}{2}(h^2 M_i^n - 2hk(U_{xt})_i^n + k^2 (U_{tt})_i^n) \\
&\quad + \frac{1}{6}(h^3 (U_{xxx})_i^n - 3h^2 k(U_{xxt})_i^n + 3hk^2 (U_{xtt})_i^n - k^3 (U_{ttt})_i^n) + \dots \\
U_{i-1}^{n+1} &= U_i^n + (-hm_i^n + k(U_t)_i^n) + \frac{1}{2}(h^2 M_i^n - 2hk(U_{xt})_i^n + k^2 (U_{tt})_i^n) \\
&\quad + \frac{1}{6}(-h^3 (U_{xxx})_i^n + 3h^2 k(U_{xxt})_i^n - 3hk^2 (U_{xtt})_i^n + k^3 (U_{ttt})_i^n) + \dots \\
U_{i+1}^{n+1} &= U_i^n + (hm_i^n + k(U_t)_i^n) + \frac{1}{2}(h^2 M_i^n + 2hk(U_{xt})_i^n + k^2 (U_{tt})_i^n) \\
&\quad + \frac{1}{6}(h^3 (U_{xxx})_i^n + 3h^2 k(U_{xxt})_i^n + 3hk^2 (U_{xtt})_i^n + k^3 (U_{ttt})_i^n) + \dots \\
m_{i-1}^n &= m_i^n - hM_i^n + \frac{1}{2}h^2 (U_{xxx})_i^n + \dots \\
m_i^{n-1} &= m_i^n - k(U_{xt})_i^n + \frac{1}{2}k^2 (U_{xtt})_i^n + \dots \\
m_{i+1}^n &= m_i^n + hM_i^n + \frac{1}{2}h^2 (U_{xxx})_i^n + \dots \\
m_{i-1}^{n-1} &= m_i^n - (hM_i^n + k(U_{xt})_i^n) + \frac{1}{2}(h^2 (U_{xxx})_i^n + 2hk(U_{xxt})_i^n + k^2 (U_{xtt})_i^n) + \dots \\
m_{i+1}^{n-1} &= m_i^n + (hM_i^n - k(U_{xt})_i^n) + \frac{1}{2}(h^2 (U_{xxx})_i^n - 2hk(U_{xxt})_i^n + k^2 (U_{xtt})_i^n) + \dots \\
M_{i-1}^n &= M_i^n - h(U_{xxx})_i^n + \dots \\
M_{i+1}^n &= M_i^n + h(U_{xxx})_i^n + \dots
\end{aligned}
\tag{3.12}$$

elde edilir. Bu eşitlikler (3.8) denkleminde yerine yazılır ve bulunan F_i , G_i ve S_i değerleri (2.9) denkleminde kullanılırsa kesme hatası

$$\begin{aligned}
& k [6\mu^2(U_{tt})_i^n + 12\mu^2\theta\varepsilon(U)_i^n(U_{xt})_i^n + 12\mu^2\theta(U_{xt})_i^n + 12\mu^2\theta\varepsilon(U_x)_i^n(U_t)_i^n] + \\
& h^2[2\mu^2(U_{xxx})_i^n + 2\mu^2(U_{xxt})_i^n + 6\mu^2\varepsilon(U_x)_i^n(U_{xx})_i^n + 2\mu^2\varepsilon(U)_i^n(U_{xxx})_i^n] + \\
& h^2k[2\mu^2\theta\varepsilon(U_{xxx})_i^n(U_t)_i^n + 6\mu^2\theta\varepsilon(U_{xx})_i^n(U_{xt})_i^n - 6\mu\theta\varepsilon^2(U)_i^n((U_x)^2)_i^n + \\
& 12\mu^2\theta\varepsilon(U_x)_i^n(U_{xxt})_i^n - 6\mu\theta\varepsilon((U_x)^2)_i^n - 6\mu\theta\varepsilon(U_x)_i^n(U_t)_i^n] + \dots \quad (3.13)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. (3.13) denkleminde görüldüğü gibi kesme hatası $\theta \in [0, 1]$ olmak üzere $O(k + h^2 + kh^2)$ dir.

Fourier kararlılık metodu ile metodun kararlılığını inceleyelim. Denklemi lineer hale getirebilmek için UU_x teriminde U yerine g sabiti kullanılırsa (3.1) denklemi

$$U_t + U_x(1 + \varepsilon g) - \mu U_{xxt} = 0$$

olur ve $(1 + \varepsilon g) = \lambda$ alınırsa denklem

$$U_t - \mu U_{xxt} = -\lambda U_x$$

formunda bulunur. Eşitliğin sol tarafında zamana göre sonlu fark yaklaşımı kullanılır ve denklem düzenlenirse

$$U_m^{n+1} = -\lambda\Delta t[(1 - \theta)m_m^n + \theta m_m^{n+1}] + U_m^n + \mu M_m^{n+1} - \mu M_m^n \quad (3.14)$$

bulunur. (3.14) denkleminde U_{m-1}^{n+1} , $4U_m^{n+1}$ ve U_{m+1}^{n+1} eşitlikleri hesaplanıp taraf tarafa toplanırsa;

$$\begin{aligned}
U_{m-1}^{n+1} + 4U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1} &= -\lambda\Delta t(1 - \theta)(m_{m-1}^n + 4m_m^n + m_{m+1}^n) \\
&\quad -\lambda\Delta t\theta(m_{m-1}^{n+1} + 4m_m^{n+1} + m_{m+1}^{n+1}) + U_{m-1}^n \\
&\quad + 4U_m^n + U_{m+1}^n + \mu(M_{m-1}^{n+1} + 4M_m^{n+1} + M_{m+1}^{n+1}) \\
&\quad -\mu(M_{m-1}^n + 4M_m^n + M_{m+1}^n)
\end{aligned}$$

denkleminde ulaşılır. Denkleminde karşımıza ıkan bağıntılar için birinci bölümde hesapladığımız kubik spline bağıntıları kullanılırsa

$$\begin{aligned} U_{m-1}^{n+1} + 4U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1} &= -\lambda\Delta t(1-\theta)\frac{3}{h}(U_{m+1}^n - U_{m-1}^n) - \lambda\Delta t\theta\frac{3}{h}(U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}) \\ &+ U_{m-1}^n + 4U_m^n + U_{m+1}^n + \mu\frac{6}{h^2}(U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}) \\ &- \mu\frac{6}{h^2}(U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n) \end{aligned}$$

olur ve denklemin duzenlenmesiyle;

$$\begin{aligned} U_{m-1}^{n+1}(1 - \lambda\Delta t\theta\frac{3}{h} - \mu\frac{6}{h^2}) + U_m^{n+1}(4 + \mu\frac{12}{h^2}) + U_{m+1}^{n+1}(1 + \lambda\Delta t\theta\frac{3}{h} - \mu\frac{6}{h^2}) \\ = U_{m-1}^n(1 + \lambda\Delta t(1-\theta)\frac{3}{h} - \mu\frac{6}{h^2}) + U_m^n(4 + \mu\frac{12}{h^2}) + U_{m+1}^n(1 - \lambda\Delta t(1-\theta)\frac{3}{h} - \mu\frac{6}{h^2}) \end{aligned}$$

elde edilir. Fourier kararlılık metodu gereğince $U_m^n = \xi^n e^{i\beta mh}$, $i = \sqrt{-1}$ eşitlikleri yukarıdaki denkleme uygulanırsa

$$\begin{aligned} \xi^n e^{i\beta mh} [\xi e^{-i\beta h}(1 - \lambda\Delta t\theta\frac{3}{h} - \mu\frac{6}{h^2}) + \xi(4 + \mu\frac{12}{h^2}) + \xi e^{i\beta h}(1 + \lambda\Delta t\theta\frac{3}{h} - \mu\frac{6}{h^2})] \\ = \xi^n e^{i\beta mh} [e^{-i\beta h}(1 + \lambda\Delta t(1-\theta)\frac{3}{h} - \mu\frac{6}{h^2}) + (4 + \mu\frac{12}{h^2}) \\ + e^{i\beta h}(1 - \lambda\Delta t(1-\theta)\frac{3}{h} - \mu\frac{6}{h^2})] \end{aligned}$$

bulunur. $\beta h = \alpha$, $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ ve $e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha$ eşitlikleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \xi [\cos \alpha(1 - \lambda\Delta t\theta\frac{3}{h} - \mu\frac{6}{h^2}) + 1 + \lambda\Delta t\theta\frac{3}{h} - \mu\frac{6}{h^2} + (4 + \mu\frac{12}{h^2}) + i \sin \alpha(-1 + \lambda\Delta t\theta\frac{3}{h} \\ + \mu\frac{6}{h^2} + 1 + \lambda\Delta t\theta\frac{3}{h} - \mu\frac{6}{h^2})] = \cos \alpha(1 + \lambda\Delta t(1-\theta)\frac{3}{h} - \mu\frac{6}{h^2}) + 1 - \lambda\Delta t(1-\theta)\frac{3}{h} \\ - \mu\frac{6}{h^2} + (4 + \mu\frac{12}{h^2}) + i \sin \alpha(-1 - \lambda\Delta t(1-\theta)\frac{3}{h} + \mu\frac{6}{h^2} + 1 - \lambda\Delta t(1-\theta)\frac{3}{h} - \mu\frac{6}{h^2}) \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli dtzenlemelerin yapılmasıyla

$$\begin{aligned} & \xi \left[\cos \alpha \left(2 - \mu \frac{12}{h^2} \right) + i \sin \alpha \left(\lambda \Delta t \theta \frac{6}{h} \right) + \left(4 + \mu \frac{12}{h^2} \right) \right] \\ & = \cos \alpha \left(2 - \mu \frac{12}{h^2} \right) + i \sin \alpha \left(-\lambda \Delta t (1 - \theta) \frac{6}{h} \right) + \left(4 + \mu \frac{12}{h^2} \right) \end{aligned}$$

denklemine ulaşılır. Bu denklem

$$\begin{aligned} A & = \cos \alpha \left(2 - \mu \frac{12}{h^2} \right) + \left(4 + \mu \frac{12}{h^2} \right) \\ B & = \lambda \Delta t \frac{6}{h} \sin \alpha \end{aligned}$$

olmak üzere;

$$\xi(A + i\theta B) = A - (1 - \theta)iB \quad (3.15)$$

formunda yazılabilir. Fourier kararlık metodu gereğince $|\xi| \leq 1$ olmalı idi.

Bu durumda (3.15) denklemini için

$$\begin{aligned} -1 & \leq \sqrt{\frac{A^2 + (1 - \theta)^2 B^2}{A^2 + \theta^2 B^2}} \leq 1 \\ 0 & \leq \frac{A^2 + (1 - \theta)^2 B^2}{A^2 + \theta^2 B^2} \leq 1 \end{aligned} \quad (3.16)$$

şartına ulaşılır. (3.16) denklemini için eşitliğin sol tarafının doğrulandığı aşıkardır.

Göstermemiz gereken

$$A^2 + (1 - \theta)^2 B^2 \leq A^2 + \theta^2 B^2 \quad (3.17)$$

olduğu durumdur. (3.17) dtzenlenirse;

$$(1 - \theta)^2 \leq \theta^2 \quad (3.18)$$

koşuluna ulaşılır. (3.18) denkleminin sağlanması $1 - 2\theta \leq 0$ olmasına bağlıdır.

$\theta \in [0, 1]$ olduğunu biliniyordu. Bu durumda Fourier kararlık metoduna göre metodumuz $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$ aralığında iken kararlıdır.

3.5 Test Problemleri

3.5.1 Tek Dalga Çözümü

Bu kısımda (1.74) denklemi ile verilen tek dalga analitik çözümünü incelendi. Başlangıç koşulu olarak (1.75) denklemi ve sınır koşulu olarakta (1.76) eşitlikleri kullanıldı. $\varepsilon = \mu = 1$, $x_0 = 0$ parametreleri ve $-40 \leq x \leq 60$ tanım aralığı seçilerek bu aralığın içinde; $3c$ genlikli, sola yerleştirilmiş tek dalganın $v = 1 + \varepsilon c$ hızla sağa doğru hareketi $0 \leq t \leq 20$ zaman aralığında incelendi.

Parametreler [36, 39, 42], olduğu gibi konum artımı $h = 0.125$, zaman artımı $\Delta t = 0.1$ ve genliği $3c = 0.3$ olarak alındı. Alınan parametrelere göre 0.3 genlikli tek dalga çözümü için korunum sabitlerinin analitik değerleri;

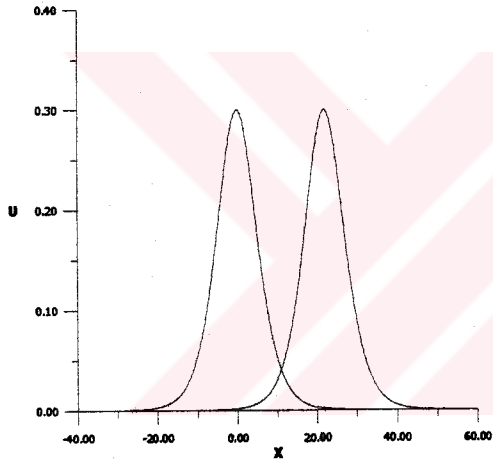
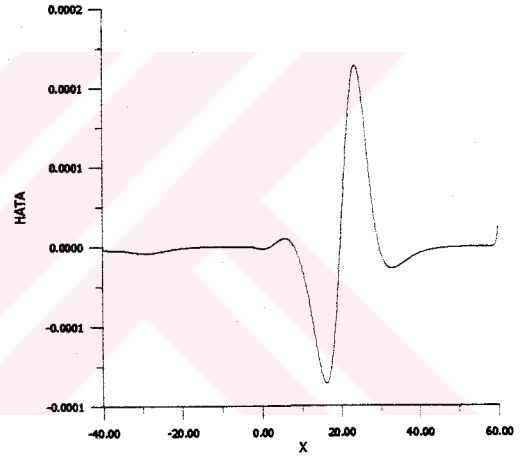
$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{6c}{k} = 3.9799497 \\ C_2 &= \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5} = 0.81046249 \\ C_3 &= \frac{36c^2}{k} + \frac{144c^3}{5k} = 2.579007 \end{aligned} \quad (3.19)$$

olarak hesaplanabilir.

Program $t = 20$ oluncaya kadar çalıştırıldı. $t = 20$ olduğu ana kadarki çeşitli zamanlardaki L_2 , L_∞ hata normlarıyla beraber C_1 , C_2 ve C_3 korunum sabitleri Tablo 3.1 de verildi. Çalışma boyunca korunum sabitlerimiz ile (3.19) eşitliğinde verilen analitik sonuçların birbiri ile oldukça uyumlu oldukları görüldü. Şekil 3.1 de başlangıç fonksiyonu ile $t = 20$ anındaki sayısal çözümün grafiği çizildi. Şekil 3.2 de $t = 20$ anındaki sayısal çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkı temsil eden grafik çizildi. Grafik incelendiğinde maksimum hatanın dalganın tepe noktası civarlarında olduğu gözlemlendi.

Tablo 3.1: Tek dalga için hata normları ve korunum sabitleriGenlik = 0.3, $h = 0.125\Delta t = 0.1$, $-40 \leq x \leq 60$

Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
0	0.000	0.000	3.97992	0.810462	2.57900
4	0.191	0.083	3.97995	0.810276	2.57839
8	0.208	0.087	3.97997	0.810276	2.57839
12	0.234	0.095	3.97998	0.810276	2.57839
16	0.266	0.104	3.97998	0.810276	2.57839
20	0.301	0.114	3.97996	0.810276	2.57839

**Şekil 3.1:** $t = 0$ ve $t = 20$ zamanındaki tek dalga çözümü**Şekil 3.2 :** $t = 20$ zamanındaki hata

Parametreler aynı olmak üzere 0.09 genlikli tek dalga çözümü için korunum sabitlerinin analitik değerleri;

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{6c}{k} = 2.1094075 \\
C_2 &= \frac{12c^2}{k} + \frac{48kc^2\mu}{5} = 0.1273017 \\
C_3 &= \frac{36c^2}{k} + \frac{144c^3}{5k} = 0.3888060
\end{aligned} \tag{3.20}$$

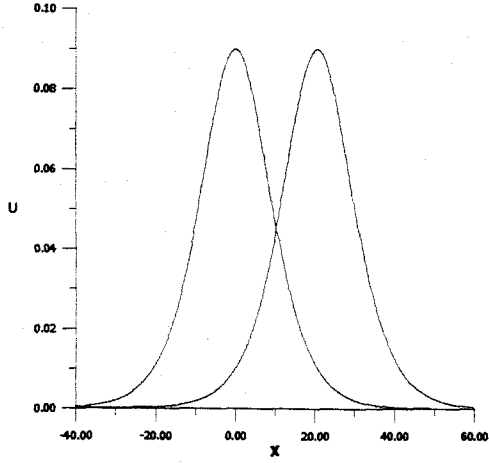
olarak hesaplanabilir.

Dalga genliği 0.09 seçilerek program tekrar çalıştırıldı. Bu parametrelere göre program çalıştırdıktan sonra elde edilen hata normları ve korunum sabitlerinin çeşitli zamanlardaki değerleri Tablo 3.2 de verildi. Çalışma boyunca korunum sabitleri ile (3.20) eşitliğinde verilen analitik sonuçların birbiri ile oldukça uyumlu oldukları görüldü. $t = 20$ anındaki 0.09 genlikli tek dalga çözümü ile $t = 0$ anındaki başlangıç şartının grafiği Şekil 3.3 de çizildi. Şekil 3.4 de analitik çözüm ile sayısal çözüm arasındaki farkı belirten grafik çizildi. Bu grafik incelendiğinde hatanın en sağ kısmında ($x = 60$ anında) olduğu görüldü. Bunun sebebi ise tanım aralığının son noktasında analitik çözümün 0.00043 olmasıydı. Bilindiği gibi sınır şartlarından dolayı tanım aralığının başlangıç ve bitiş noktalarında sayısal çözüm 0 alınmıştı.

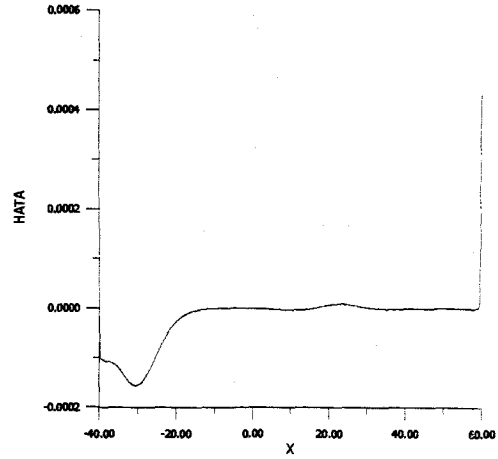
Tablo 3.2: Tek dalga için hata normları ve korunum sabitleri

Genlik = 0.09, $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $-40 \leq x \leq 60$.

Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
0	0.000	0.000	2.10702	0.12730	0.38880
4	0.149	0.193	2.10838	0.12729	0.38878
8	0.280	0.141	2.10928	0.12729	0.38878
12	0.397	0.151	2.10981	0.12729	0.38878
16	0.479	0.213	2.10981	0.12729	0.38878
20	0.547	0.431	2.10900	0.12729	0.38878



Şekil 3.3: $t = 0$ ve $t = 20$ zamanındaki tek dalga çözümü



Şekil 3.4: $t = 20$ zamanındaki hata

Tablo 3.3 de genlik değerleri olarak sırasıyla 0.3 ve 0.09 seçilerek farklı konum ve zaman artımlarıyla tek dalga çözümü için hata normları verildi. Aynı genlik değerleri arasında inceleme yapıldığında konum artım değerleri küçükken hata normlarının daha küçük olduğu görüldü.

Tablo 3.3: Genlik = 0.3

h	Δt	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.025	0.025	0.031	0.013
0.05	0.05	0.076	0.028
0.125	0.1	0.301	0.114
0.25	0.2	1.197	0.454
0.5	0.4	4.824	1.826
1.0	0.8	19.238	7.155
4.0	0.8	86.866	30.006

Genlik = 0.09

h	Δt	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.025	0.025	1.110	0.431
0.05	0.05	0.928	0.432
0.125	0.1	0.547	0.432
0.25	0.2	0.287	0.432
0.5	0.4	0.536	0.432
1.0	0.8	1.757	0.548
4.0	0.8	4.442	1.277

3.5.2 Ardışık Dalgalar Çözümü

Bu kısımda (1.79) başlangıç şartı ve (1.80) sınır şartı kullanılarak ardışık dalgaların oluşumu incelendi.

Sayısal çözümümüz için $U_0 = 0.1$, $\varepsilon = 3/2$, $\mu = 0.16666667$, $h = 0.24$, $\Delta t = 0.1$ parametre değerleri ve $-60 \leq x \leq 540$ tanım aralığı [36, 39] referanslarında olduğu gibi seçildi. Başlangıç koşulunda $d = 5$ kullanılarak program $t = 400$ zamanına kadar çalıştırılarak C_1 , C_2 ve C_3 korunum sabitleriyle beraber tanım aralığı içinde oluşan tüm dalgaların maksimum yükseklik değerleri (U_{\max}) Tablo 3.4 de farklı zamanlar için verildi.

Tablo 3.4: Ardışık dalga sonuçları

Zaman	U_{\max}	x	C_1	C_2	C_3
0	0.10000	-60	6.01198	0.57630	1.78496
50	0.11031	48.480	11.38698	1.12631	3.49045
100	0.13694	102.24	16.76198	1.67632	5.19570
150	0.15754	156.24	22.13698	2.22635	6.90068
200	0.17029	210.48	27.51198	2.77638	8.60551
250	0.17786	264.96	32.88698	3.32642	10.31029
300	0.18208	319.44	38.26198	3.87645	12.01504
350	0.18508	374.15	43.63698	4.42649	13.71979
400	0.18686	428.87	49.01198	4.97652	15.42453

Korunum sabitlerinin değişimini $d = 5$ olmak üzere Tablo 3.4 deki sonuçlara göre;

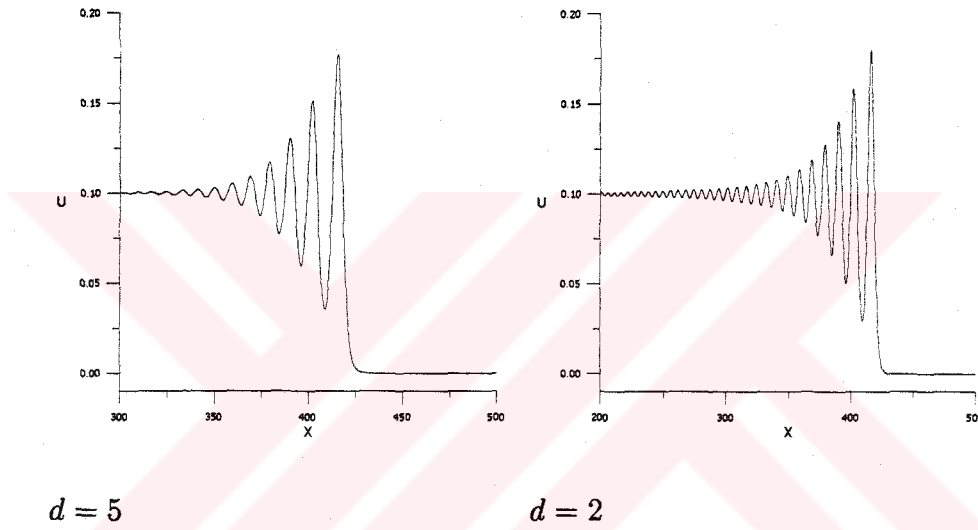
$$M_1 = \frac{49.01198 - 6.01198}{400} = 0.1075$$

$$M_2 = \frac{4.97652 - 0.57630}{400} = 0.011001$$

$$M_3 = \frac{15.42453 - 1.78496}{400} = 0.034099$$

olarak hesaplanabilir. Bu sonuçları (1.81) denkleminin hesaplanan analitik sonuçlar ile kıyaslandığında sayısal sonuçların tutarlı oldukları görüldü.

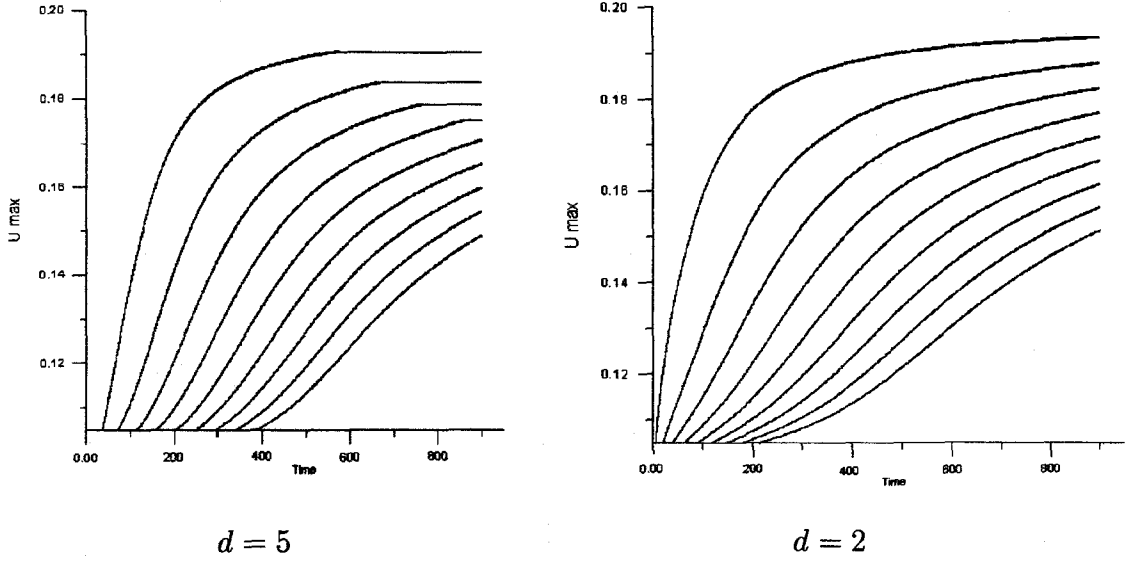
Şekil 3.5'in solundaki grafikte $d = 5$ düşük eğiminin kullanılmasıyla elde edilen ardışık dalganın profili gösterildi. Sağ taraftaki grafikte de $d = 2$ yüksek eğimiyle elde edilen ardışık dalganın profili gösterildi. Yüksek eğim, başlangıç şartında kullanıldığında şekilde daha fazla ardışık dalgalar oluştuğu gözlemlendi.



Şekil 3.5: $t = 400$ zamanında ardışık dalgaların profili, $U_0 = 0.1$,
 $h = 0.24$, $\Delta t = 0.1$

Tanım aralığımızı $-60 \leq x \leq 900$ olarak genişleterek $d = 5$ ve $d = 2$ için program ayrı ayrı tekrar çalıştırıldı. $t = 900$ oluncaya kadarki oluşan ilk dokuz dalganın maksimum yüksekliğinin zamana göre grafikleri Şekil 3.6 da görüntülendi. Oluşan ilk dokuz dalganın maksimum genlikleri ve bu değerleri aldıkları x koordinatları Tablo 3.6 da verildi. $d = 5$ düşük eğimi için çizdiğimiz grafikte yaklaşık $t = 600$ zamanından sonra ilk dalga için maksimum genlik

değeri sonraki zaman adımlarında sabit kaldı. Bu durum zaman adımları ilerledikçe ikinci, üçüncü ve dördüncü oluşan dalgalarda da görüldü.



Şekil 3.6: Dalgaların gelişimi

Tablo 3.6: $t = 900$ zamanında dalgaların genlikleri

	$d = 5$	$d = 2$
İlk Dalga	0.1907	0.1938
İkinci Dalga.	0.1839	0.1882
Üçüncü Dalga	0.1788	0.1825
Dördüncü Dalga	0.1753	0.1774
Beşinci Dalga	0.1708	0.1721
Altıncı Dalga	0.1652	0.1668
Yedinci Dalga.	0.1599	0.1617
Sekizinci Dalga.	0.1545	0.1565
Dokuzuncu Dalga	0.1491	0.1515

Bölüm 4

Lineer Olmayan Burger

Denkleminin Kubik B-Spline

Kolokeyşin Metoduyla Sayısal

Çözümü

Bu bölümde kübik B-spline fonksiyonları lineer olmayan Burger denkleminin kolokeyşin metoduyla sayısal çözümünde kullanıldı. Birinci bölümde elde edilen kübik B-spline bağıntıları kullanılarak üç test problemi üzerinde çalışıldı. Sayısal çözümü temsil eden grafikler çizilerek sayısal metodumuzun kararlılığı Fourier kararlılık analizi ile incelendi.

4.1 Lineer Olmayan Burger Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları

λ pozitif parametre, t ve x türevleri göstermek üzere $[a, b]$ tanım aralığında tanımlı

$$U_t + UU_x = \lambda U_{xx} \quad (4.1)$$

formundaki lineer olmayan Burger denkleminin

$$U(a, t) = \beta_1, \quad U(b, t) = \beta_2 \quad t > 0 \quad (4.2)$$

sınır şartları ve $f(x)$ sonradan belirlenmek üzere

$$U(x, 0) = f(x) \quad a \leq x \leq b \quad (4.3)$$

başlangıç şartları altındaki sayısal çözümü üzerinde çalışacağız.

4.2 Kübik B-Spline Kolokeyşin Metodu

x_j 'ler, $[a, b]$ tanım aralığındaki bölünme noktalarının koordinatları olmak üzere

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b, \quad h = x_j - x_{j-1} > 0, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

olsun. (4.1)'de tanımlanan lineer olmayan Burger denklemini

$$U_t + UU_x - \lambda U_{xx} = 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.4)$$

formunda tekrar yazar ve (4.4) denkleminde $f = UU_x - \lambda U_{xx}$ olmak üzere zamana göre türev için sonlu fark yaklaşımı kullanılırsa

$$\frac{1}{\Delta t}(U^{n+1} - U^n) + (1 - \theta)f^n + \theta f^{n+1} = 0$$

olur ve denklemin düzenlenmesiyle

$$U^{n+1} - U^n + (1 - \theta) \Delta t [(UU_x)^n - \lambda(U_{xx})^n] + \theta \Delta t [(UU_x)^{n+1} - \lambda(U_{xx})^{n+1}] = 0 \quad (4.5)$$

elde edilir.

Denklemi lineer hale getirebilmek için her x_m bölünme noktasında $(UU_x)_m^{n+1}$ yerine;

$$(UU_x)_m^{n+1} = U_m^{n+1}(U_x)_m^n + U_m^n(U_x)_m^{n+1} - U_m^n(U_x)_m^n \quad (4.6)$$

eşitliği yazılırsa (4.5) denklemi;

$$\begin{aligned} U_m^{n+1} - U_m^n + (1 - \theta) \Delta t [U_m^n(U_x)_m^{n-1} + U_m^{n-1}(U_x)_m^n - U_m^{n-1}(U_x)_m^{n-1} - \lambda(U_{xx})_m^n] \\ + \theta \Delta t [U_m^{n+1}(U_x)_m^n + U_m^n(U_x)_m^{n+1} - U_m^n(U_x)_m^n - \lambda(U_{xx})_m^{n+1}] = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

formunda yazılabilir. Kübik B-spline eşitlikleri kullanılarak (4.7) düzenlenirse

$$\begin{aligned} L_1 &= \delta_{m-1}^n + 4\delta_m^n + \delta_{m+1}^n & L_2 &= \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^n - \delta_{m-1}^n) \\ L_3 &= \delta_{m-1}^{n-1} + 4\delta_m^{n-1} + \delta_{m+1}^{n-1} & L_4 &= \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^{n-1} - \delta_{m-1}^{n-1}) \\ L_5 &= \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1}^n - 2\delta_m^n + \delta_{m+1}^n) \end{aligned}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} \delta_{m-1}^{n+1} \left(1 + \theta \Delta t L_2 - \frac{3\theta \Delta t L_1}{h} - \lambda \frac{6\theta \Delta t}{h^2} \right) + \delta_m^{n+1} \left(4 + 4\theta \Delta t L_2 + \lambda \frac{12\theta \Delta t}{h^2} \right) \\ \delta_{m+1}^{n+1} \left(1 + \theta \Delta t L_2 + \frac{3\theta \Delta t L_1}{h} - \lambda \frac{6\theta \Delta t}{h^2} \right) \\ = L_1 - (1 - \theta) \Delta t [L_1 L_4 + L_3 L_2 - L_3 L_4 - \lambda L_5] + \theta \Delta t L_1 L_2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

denklem sistemine ulaşılır. Bu sistem $d^{n+1} = \{\delta_{-1}^{n+1}, \delta_0^{n+1}, \dots, \delta_{m+1}^{n+1}\}$ bilinmeyenler vektörü olmak üzere üçgensel bir matris sistemine karşılık gelir. Bu

matris sistemi $N + 3$ bilinmeyen $N + 1$ denklemden oluşan bir sistemdir. (4.2) sınır koşulları kullanılırsa

$$\begin{aligned} U(x_0) &= \delta_{-1}^{n+1} + 4\delta_0^{n+1} + \delta_1^{n+1} = \beta_1 \implies \delta_{-1}^{n+1} = \beta_1 - (4\delta_0^{n+1} + \delta_1^{n+1}) \\ U(x_N) &= \delta_{N-1}^{n+1} + 4\delta_N^{n+1} + \delta_{N+1}^{n+1} = \beta_2 \implies \delta_{N+1}^{n+1} = \beta_2 - (\delta_{N-1}^{n+1} + 4\delta_N^{n+1}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler (4.7) denkleminde kullanıldığında Thomas algoritmasıyla çözülebilen $(N + 1) \times (N + 1)$ 'lik yeni bir matris sistemi elde edilir.

4.3 Başlangıç Durumu ve Sayısal Hesaplamalar

İlk zaman adımında ($t = 0$ anında), (4.3) başlangıç şartı kullanılarak $d^0 = \{\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_{N+1}^0\}$ başlangıç vektörü hesaplanabilir. Kübik B-spline eşitlikleri yardımıyla başlangıç vektörü kullanılarak $t = 0$ anında x_m , $m = 0, 1, \dots, N$ bölünme noktalarındaki

$$\begin{aligned} U(x_m) &= \delta_{m-1}^0 + 4\delta_m^0 + \delta_{m+1}^0 \\ U'(x_m) &= \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^0 - \delta_{m-1}^0) \\ U''(x_m) &= \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1}^0 - 2\delta_m^0 + \delta_{m+1}^0) \end{aligned}$$

değerleri hesaplanabilir.

$d^1 = \{\delta_{-1}^1, \delta_0^1, \dots, \delta_{N+1}^1\}$ ikinci zaman adımındaki bilinmeyenler vektörünü hesaplariken (4.8) denkleminde $\theta = 1$ alarak kapalı çözüm araştırılırsa (4.8) denklemi

$$L_1 = \delta_{m-1}^0 + 4\delta_m^0 + \delta_{m+1}^0 \quad L_2 = \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^0 - \delta_{m-1}^0)$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} & \delta_{m-1}^1 \left(1 + \Delta t L_2 - \frac{3 \Delta t L_1}{h} - \lambda \frac{6 \Delta t}{h^2} \right) + \delta_m^1 \left(4 + 4 \Delta t L_2 + \lambda \frac{12 \Delta t}{h^2} \right) + \\ & \delta_{m+1}^1 \left(1 + \Delta t L_2 + \frac{3 \Delta t L_1}{h} - \lambda \frac{6 \Delta t}{h^2} \right) = L_1 + \Delta t L_1 L_2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

denkleme dönüşür. (4.10) denklem sistemi $N + 3$ bilinmeyen $N + 1$ denklemden oluşan bir sistemdir. (4.9) olarak elde ettiğimiz sınır şartları bu zaman adımı için kullanılırsa iki bilinmeyen elimine edilerek sistem $(N + 1) \times (N + 1)$ 'lik yeni bir denklem sistemine dönüşür. Bu yeni denklem sistemi Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir. Böylece $d^1 = \{\delta_{-1}^1, \delta_0^1, \dots, \delta_{N+1}^1\}$ bilinmeyenler vektörü elde edilir ve kübik B-spline eşitlikleri kullanılarak x_m , $m = 0, 1, \dots, N$ bölünme noktalarındaki;

$$\begin{aligned} U(x_m) &= \delta_{m-1}^1 + 4\delta_m^1 + \delta_{m+1}^1 \\ U'(x_m) &= \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^1 - \delta_{m-1}^1) \\ U''(x_m) &= \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1}^1 - 2\delta_m^1 + \delta_{m+1}^1) \end{aligned}$$

değerleri hesaplanabilir.

$d^2 = \{\delta_{-1}^2, \delta_0^2, \dots, \delta_{N+1}^2\}$ üçüncü zaman adımındaki bilinmeyenler vektörünü hesaplamak için (4.8) denkleminde $\theta = \frac{1}{2}$ olarak Crank Nicolson yaklaşımı kullanılırsa (4.8) denklemi

$$\begin{aligned} L_1 &= \delta_{m-1}^1 + 4\delta_m^1 + \delta_{m+1}^1 & L_2 &= \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^1 - \delta_{m-1}^1) \\ L_3 &= \delta_{m-1}^0 + 4\delta_m^0 + \delta_{m+1}^0 & L_4 &= \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^0 - \delta_{m-1}^0) \\ L_5 &= \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1}^1 - 2\delta_m^1 + \delta_{m+1}^1) \end{aligned}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}
& \delta_{m-1}^2 \left(1 + \frac{\Delta t L_2}{2} - \frac{3 \Delta t L_1}{2h} - \lambda \frac{3 \Delta t}{h^2} \right) + \delta_m^2 \left(4 + 2 \Delta t L_2 + \lambda \frac{6 \Delta t}{h^2} \right) + \\
& \delta_{m+1}^2 \left(1 + \frac{\Delta t L_2}{2} + \frac{3 \Delta t L_1}{2h} - \lambda \frac{3 \Delta t}{h^2} \right) \\
& = L_1 - \frac{\Delta t}{2} [L_1 L_4 + L_3 L_2 - L_3 L_4 - \lambda L_5] + \frac{\Delta t}{2} L_1 L_2
\end{aligned} \tag{4.11}$$

denklemine dönüştür. (4.11) denklem sistemi $N + 3$ bilinmeyen $N + 1$ denklemden oluşan bir sistem olup (4.9) olarak elde edilen sınır şartları bu zaman adımında kullanılırsa yeni denklem sistemi $(N + 1) \times (N + 1)$ 'lik yeni bir sisteme dönüştür. Bu yeni denklem sistemide Thomas algoritması kullanılarak çözülebilir. Böylece $d^2 = \{\delta_{-1}^2, \delta_0^2, \dots, \delta_{N+1}^2\}$ bilinmeyenler vektörü elde edilir ve kübik B-spline eşitlikleri kullanılarak x_m , $m = 0, 1, \dots, N$ bölünme noktalarındaki

$$\begin{aligned}
U(x_m) &= \delta_{m-1}^2 + 4\delta_m^2 + \delta_{m+1}^2 \\
U'(x_m) &= \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^2 - \delta_{m-1}^2) \\
U''(x_m) &= \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1}^2 - 2\delta_m^2 + \delta_{m+1}^2)
\end{aligned}$$

değerleri hesaplanabilir.

Üçüncü zaman adımından sonraki tüm $d^{n+1} = \{\delta_{-1}^{n+1}, \delta_0^{n+1}, \dots, \delta_{N+1}^{n+1}\}$ bilinmeyenler vektörleri hesaplanırken önceki iki zaman adımında bulunan bilinmeyenler vektörleri kullanılır. Bu şekilde kalan tüm zaman adımlarında üçüncü adımda yapılan benzer işlemlerle hesaplamalar yapılabilir.

4.4 Metodun Kararlılık Analizi

Fourier kararlılık metodunu kullanarak metodumuzun kararlılığını araştırılm. Burger denklemini lineer hale getirebilmek için UU_x teriminde U yerine

g sabitini kullanılırsa (4.5) denklemini

$$U_m^{n+1} - U_m^n + (1 - \theta) \Delta t [g(U_x)_m^n - \lambda(U_{xx})_m^n] + \theta \Delta t [g(U_x)_m^{n+1} - \lambda(U_{xx})_m^{n+1}] = 0$$

olur. Elde edilen denklemde kübik B-Spline eşitlikleri kullanılarak denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \delta_{m-1}^{n+1} + 4\delta_m^{n+1} + \delta_{m+1}^{n+1} - (\delta_{m-1}^n + 4\delta_m^n + \delta_{m+1}^n) + (1 - \theta) \Delta t [g \frac{3}{h} (\delta_{m+1}^n - \delta_{m-1}^n) \\ & - \lambda \frac{6}{h^2} (\delta_{m-1}^n - 2\delta_m^n + \delta_{m+1}^n)] + \theta \Delta t [g \frac{3}{h} (\delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m-1}^{n+1}) \\ & - \lambda \frac{6}{h^2} (\delta_{m-1}^{n+1} - 2\delta_m^{n+1} + \delta_{m+1}^{n+1})] = 0 \end{aligned}$$

ve buradan da

$$\begin{aligned} & \delta_{m-1}^{n+1} (1 - g \frac{3}{h} \theta \Delta t - \lambda \frac{6}{h^2} \theta \Delta t) + \delta_m^{n+1} (4 + \lambda \frac{12}{h^2} \theta \Delta t) \\ & + \delta_{m+1}^{n+1} (1 + g \frac{3}{h} \theta \Delta t - \lambda \frac{6}{h^2} \theta \Delta t) \\ & = \delta_{m-1}^n (1 + g \frac{3}{h} (1 - \theta) \Delta t + \lambda \frac{6}{h^2} (1 - \theta) \Delta t) + \delta_m^n (4 - \lambda \frac{12}{h^2} (1 - \theta) \Delta t) \\ & + \delta_{m+1}^n (1 - g \frac{3}{h} (1 - \theta) \Delta t + \lambda \frac{6}{h^2} (1 - \theta) \Delta t) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Fourier kararlılık yöntemi gereğince $\delta_m^n = \xi^n e^{i\beta mh}$, $i = \sqrt{-1}$ eşitlikleri yukarıdaki denkleme uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \xi^n e^{i\beta mh} [\xi e^{-i\beta h} (1 - g \frac{3}{h} \theta \Delta t - \lambda \frac{6}{h^2} \theta \Delta t) + \xi (4 + \lambda \frac{12}{h^2} \theta \Delta t) \\ & + \xi e^{i\beta h} (1 + g \frac{3}{h} \theta \Delta t - \lambda \frac{6}{h^2} \theta \Delta t)] \\ & = \xi^n e^{i\beta mh} [e^{-i\beta h} (1 + g \frac{3}{h} (1 - \theta) \Delta t + \lambda \frac{6}{h^2} (1 - \theta) \Delta t) \\ & + (4 - \lambda \frac{12}{h^2} (1 - \theta) \Delta t) + \xi e^{i\beta h} (1 - g \frac{3}{h} (1 - \theta) \Delta t + \lambda \frac{6}{h^2} (1 - \theta) \Delta t)] \end{aligned}$$

bulunur. $\beta h = \alpha$ ve $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha$ eşitlikleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned} & \xi \left[\cos \alpha \left(1 - g \frac{3}{h} \Delta t - \lambda \frac{6}{h^2} \theta \Delta t + 1 + g \frac{3}{h} \theta \Delta t - \lambda \frac{6}{h^2} \theta \Delta t \right) \right. \\ & \left. + \left(4 + \lambda \frac{12}{h^2} \theta \Delta t \right) + i \sin \alpha \left(-1 + g \frac{3}{h} \theta \Delta t + \lambda \frac{6}{h^2} \theta \Delta t + 1 + g \frac{3}{h} \theta \Delta t - \lambda \frac{6}{h^2} \theta \Delta t \right) \right] \\ & = \cos \alpha \left(1 + g \frac{3}{h} (1 - \theta) \Delta t + \lambda \frac{6}{h^2} (1 - \theta) \Delta t + 1 - g \frac{3}{h} (1 - \theta) \Delta t \right. \\ & \left. + \lambda \frac{6}{h^2} (1 - \theta) \Delta t \right) + \left(4 - \lambda \frac{12}{h^2} (1 - \theta) \Delta t \right) \\ & \left. + i \sin \alpha \left(-1 - g \frac{3}{h} (1 - \theta) \Delta t - \lambda \frac{6}{h^2} (1 - \theta) \Delta t + 1 - g \frac{3}{h} (1 - \theta) \Delta t + \lambda \frac{6}{h^2} (1 - \theta) \Delta t \right) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \xi \left[\cos \alpha \left(2 - \lambda \frac{12}{h^2} \theta \Delta t \right) + i \sin \alpha \left(g \frac{6}{h} \theta \Delta t \right) + \left(4 + \lambda \frac{12}{h^2} \theta \Delta t \right) \right] \\ & = \cos \alpha \left(2 - \lambda \frac{12}{h^2} (1 - \theta) \Delta t \right) + i \sin \alpha \left(-g \frac{6}{h} (1 - \theta) \Delta t \right) + \left(4 - \lambda \frac{12}{h^2} (1 - \theta) \Delta t \right) \end{aligned}$$

denkleme ulaşılır. Bu denkleme

$$\begin{aligned} A &= 2 \cos \alpha + 4 \\ B &= \lambda \frac{12}{h^2} \Delta t (1 - \cos \alpha) \\ C &= g \frac{6}{h} \Delta t \sin \alpha \end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$\xi(A + \theta B + i\theta C) = A - (1 - \theta)B - i(1 - \theta)C \quad (4.12)$$

elde edilir. Fourier kararlık metodu gereğince $|\xi| \leq 1$ olmalı idi. Bu durumda (4.12) denklemini için;

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sqrt{\frac{(A + \theta B - B)^2 + (1 - \theta)^2 C^2}{(A + \theta B)^2 + \theta^2 C^2}} \leq 1 \\ 0 &\leq \frac{(A + \theta B - B)^2 + (1 - \theta)^2 C^2}{(A + \theta B)^2 + \theta^2 C^2} \leq 1 \end{aligned} \quad (4.13)$$

şartına ulaşılır. (4.13) denklemini için eşitliğin sol tarafının doğrulandığı aşıkardır. Göstermemiz gereken durum;

$$(A + \theta B - B)^2 + (1 - \theta)^2 C^2 \leq (A + \theta B)^2 + \theta^2 C^2 \quad (4.14)$$

olduğu durumdur. (4.14) düzenlenirse

$$(B^2 + C^2)(1 - 2\theta) - 2AB \leq 0 \quad (4.15)$$

koşuluna ulaşılır. $B^2 + C^2 \geq 0$ ve $2AB \geq 0$ olduklarından (4.15) eşitliğin her durumda sağlanması $1 - 2\theta \leq 0$ olmasına bağlıdır. $\theta \in [0, 1]$ olduğunu biliyorduk, bu durumda Fourier kararlılık metoduna göre metodumuz $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$ aralığında iken kararlıdır.

4.5 Test Problemleri

Bu bölümde birinci bölümde lineer olmayan Burger denklemi için verilen test problemleri kullanılarak sayısal metodun doğruluğu kontrol edildi.

1. Birinci Test Problemi

İlk test probleminde sayısal çözümün doğruluğunu kontrol edebilmek için (1.66) denklemiyle beraber $[0, 1]$ tanım aralığında; (1.63) başlangıç şartı ve (1.64) sınır şartları kullanıldı. Sayısal çözümde $\lambda = 1$ parametresi ve zaman artımı olarak $\Delta t = 0.01$ alındı. Konum artımları sırasıyla $h = 0.25$, $h = 0.125$ ve $h = 0.0625$ alınarak hesaplanan sayısal çözümler Tablo 4.1 de verildi. Tüm sonuçlar incelendiğinde konum aralıkları küçüldükçe sayısal metodun daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlendi ve $h = 0.0625$ için yapılan hesaplamalarda en iyi sonuçlar bulundu.

Tablo 4.1: $\lambda = 1$ iken sayısal ve analitik sonuçların kıyaslanması

x	t	$h = 0.25$	$h = 0.125$	$h = 0.0625$	Analitik Sonuç
0.25	0.00	0.7071	0.7071	0.7071	0.7071
	0.05	0.4077	0.4134	0.4148	0.4131
	0.10	0.2443	0.2528	0.2549	0.2536
	0.15	0.1467	0.1546	0.1565	0.1566
	0.20	0.0878	0.0945	0.0962	0.0964
	0.25	0.0524	0.0576	0.0589	0.0592
0.50	0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	0.05	0.5968	0.6080	0.6108	0.6091
	0.10	0.3547	0.3684	0.3719	0.3716
	0.15	0.2109	0.2234	0.2266	0.2268
	0.20	0.1254	0.1355	0.1380	0.1385
	0.25	0.0746	0.0821	0.0841	0.0845
0.75	0.00	0.7071	0.7071	0.7071	0.7071
	0.05	0.4373	0.4480	0.4508	0.4502
	0.10	0.2577	0.2695	0.2725	0.2726
	0.15	0.1517	0.1619	0.1641	0.1644
	0.20	0.0899	0.0971	0.0991	0.0964
	0.25	0.0531	0.0586	0.0600	0.0603

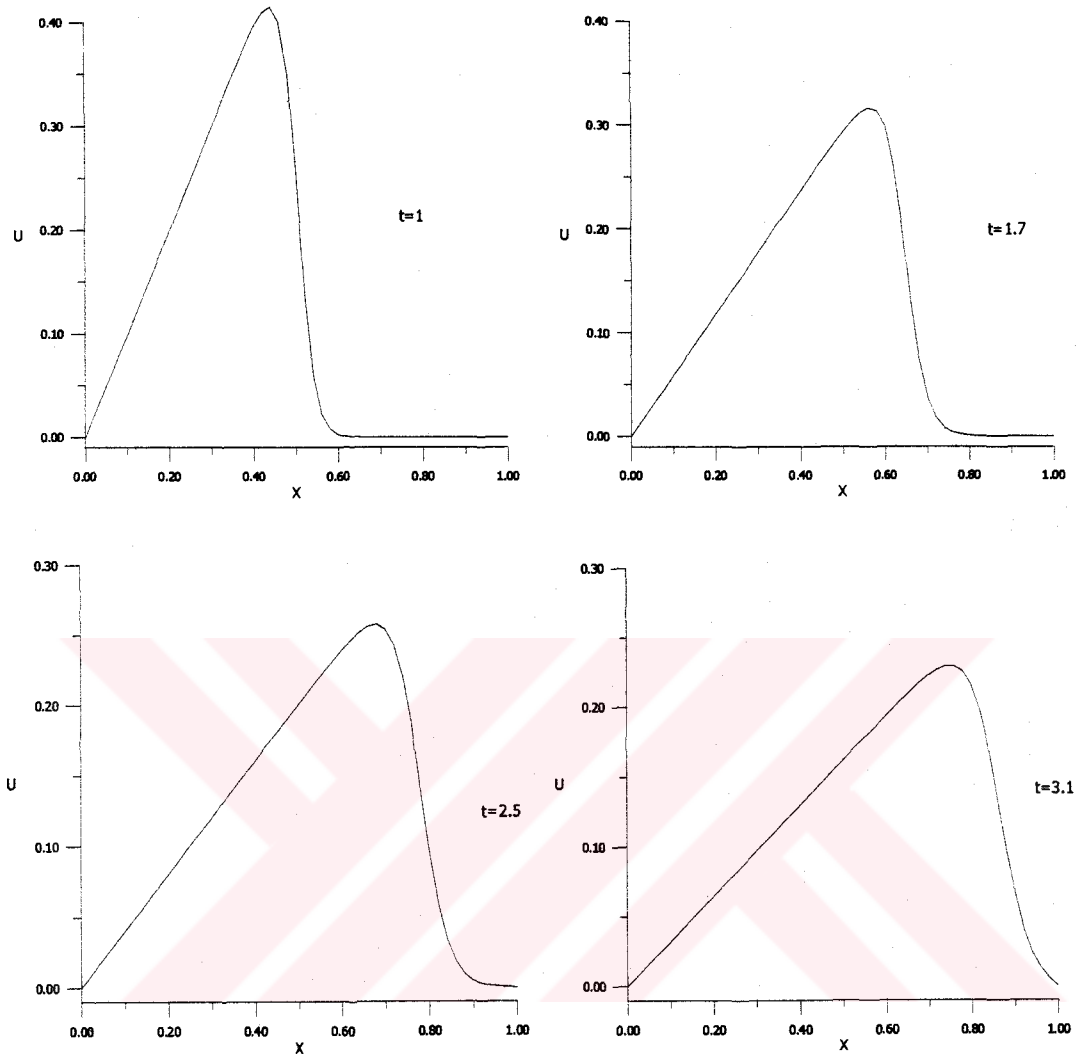
λ , h ve Δt için seçilen farklı durumlarda sayısal sonuçlar ile analitik sonuçlar Tablo 4.2 de verildi. λ için küçük değerler alındığında sayısal yöntemin daha iyi sonuçlar verdiği görüldü.

Tablo 4.2: $t = 0.5$ anında sayısal sonuçlarla analitik sonuçların kıyaslanması

x	$\lambda = 0.01$ $h = 1/36$ $\Delta t = 0.01$	$\lambda = 0.01$ Analitik Sonuç	$\lambda = 0.001$ $h = 1/216$ $\Delta t = 0.125$	$\lambda = 0.001$ Analitik Sonuç
0.500	0.589	0.589	0.613	0.595
0.556	0.649	0.649	0.673	0.656
0.611	0.707	0.707	0.730	0.715
0.667	0.762	0.762	0.784	0.772
0.722	0.814	0.814	0.833	0.826
0.778	0.861	0.861	0.875	0.876
0.833	0.902	0.902	0.903	0.921
0.889	0.934	0.934	0.898	0.959
0.944	0.951	0.937	0.802	0.959
1.000	0.000	0.000	0.000	0.000

2. İkinci Test Problemi

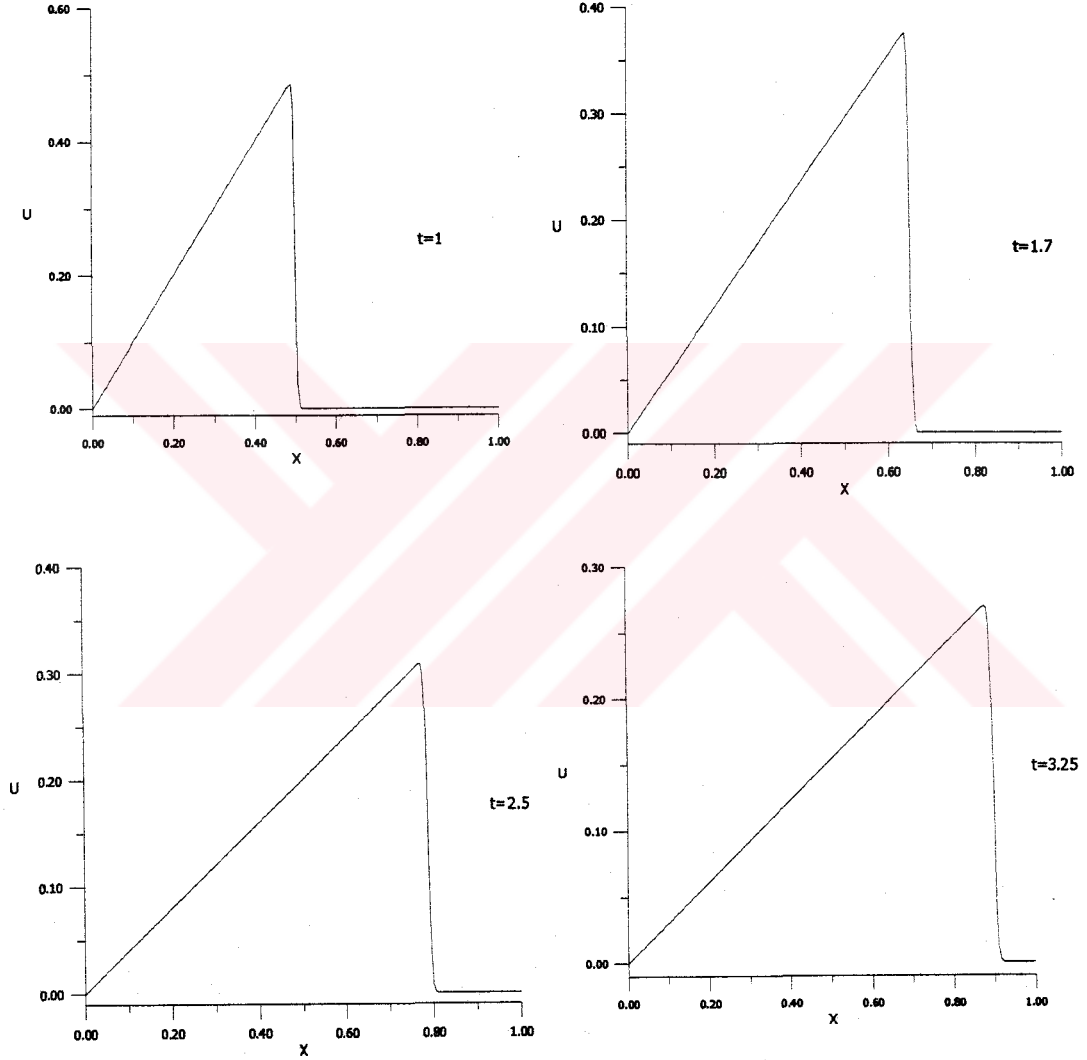
İkinci test probleminde sayısal çözümün doğruluğunu kontrol edebilmek için (1.67) denklemiyle beraber $[0, 1]$ tanım aralığında (1.68) başlangıç şartı ve (1.69) sınır şartları kullanıldı.



Şekil 4.1: $\lambda = 0.005$, $h = 0.02$, $\Delta t = 0.1$

Şekil 4.1 de çizilen grafik $\lambda = 0.005$ iken $1 \leq t \leq 3.1$ zaman aralığında sayısal çözümün hareketini göstermektedir. Zaman arttıkça dalganın tanım aralığı içinde hareketi incelendiğinde $t = 1$ anında dalganın belli konumdan sonra sıfırlandığı görülmekte, bu durum zaman arttıkça azalmakta ve son

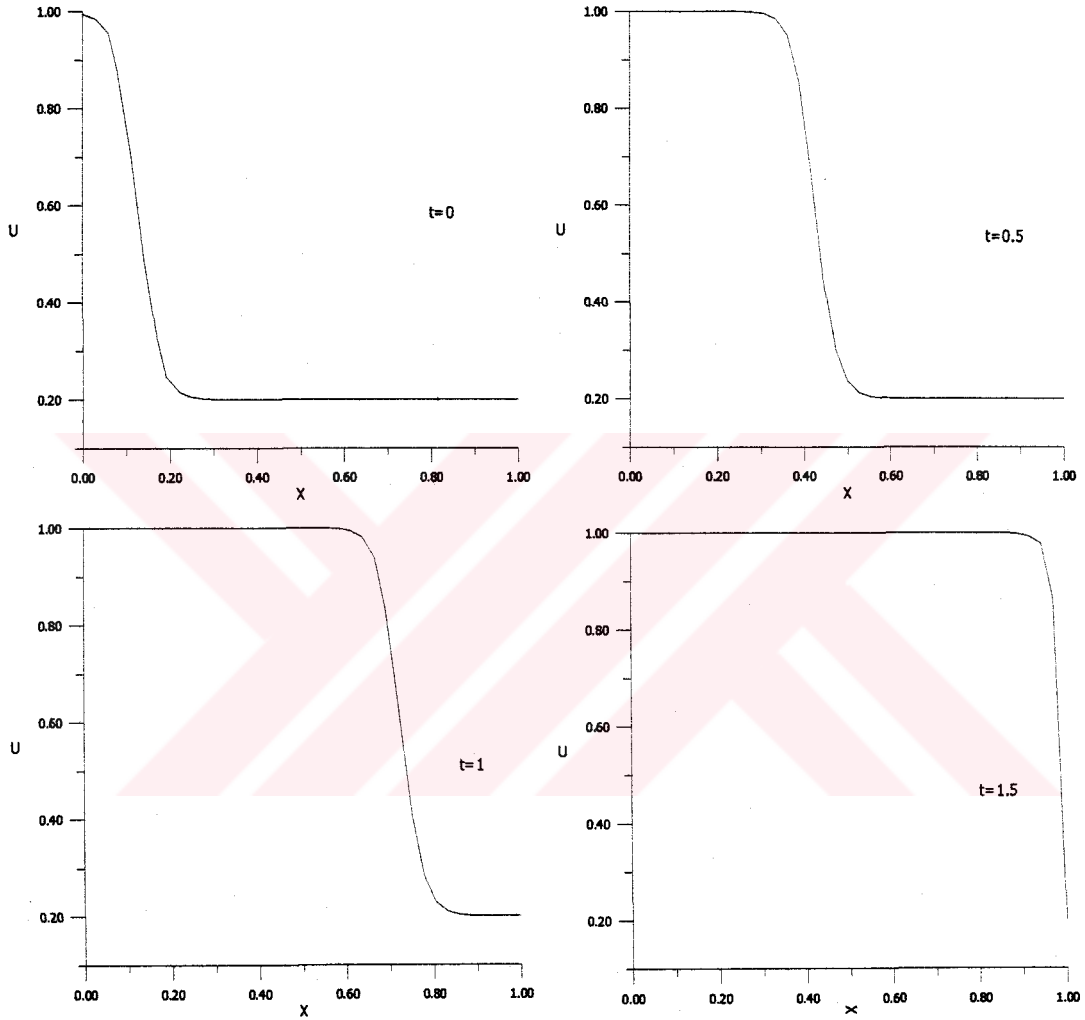
zaman adımıyla ilerlemekte ve bu durum bu test problemi için istenmeyen bir durumdur. Şekil 4.2 de çizilen grafik $\lambda = 0.0005$ iken $1 \leq t \leq 3.25$ zaman aralığındaki yaklaşık çözümün hareketini göstermektedir. Zaman arttıkça dalganın tanım aralığı içerisindeki hareketinin ilk duruma göre daha kararlı olduğu görülmektedir.



Şekil 4.2: $\lambda = 0.0005$, $h = 0.005$, $\Delta t = 0.01$

3. Üçüncü Test Problemi

Son test probleminde sayısal çözümün doğruluğunu kontrol ederken (1.70) denkleminle beraber $[0, 1]$ tanım aralığında (1.71) başlangıç şartı ve (1.72) sınır şartı kullanıldı.



Şekil 4.3: $\lambda = 0.01$, $h = \frac{1}{36}$, $\Delta t = 0.025$

Şekil 4.3 de çizilen grafik $\lambda = 0.01$ iken $0 \leq t \leq 1.5$ zaman aralığındaki sayısal çözümün hareketini göstermektedir. Dalganın başlangıç durumu

$x = \beta$ olup dalgamız tanım aralığımızda soldan sağa doğru μ hızla hareket etmektedir. Grafikler incelendiğinde zaman ilerledikçe sayısal çözümde bozulmalar olduğu görülmektedir. Hesaplanan sayısal çözümlerin farklı konumlarıdaki değerleri ile analitik sonuçlar Tablo 4.4 de verilmiştir.

Tablo 4.4: Sayısal sonuçlar ve analitik çözümlerin karşılaştırılması ($\lambda = 0.01$)

x	$h = 1/36$ $\Delta t = 0.025$	Analitik Sonuç
0.000	1.000	1.000
0.056	1.000	1.000
0.111	1.000	1.000
0.167	1.000	1.000
0.222	1.000	1.000
0.278	0.999	0.998
0.333	0.986	0.980
0.389	0.850	0.847
0.444	0.448	0.452
0.500	0.236	0.238
0.556	0.204	0.204
0.611	0.200	0.200
0.667	0.200	0.200
0.722	0.200	0.200
0.778	0.200	0.200
0.833	0.200	0.200
0.889	0.200	0.200
0.944	0.200	0.200
1.000	0.200	0.200

Bölüm 5

RLW Denkleminin Kübik

B-Spline Kolokeyşin Metoduyla

Sayısal Çözümü

Bu bölümde RLW denkleminin kübik B-spline kolokeyşin metodu ile sayısal çözümü tanıtıldı. Metodun kararlılık analizi çalışıldı. RLW denkleminin tek dalga çözümü, ardışık dalgalar çözümü elde edildi. Sayısal çözümün doğruluğu korunum sabitleri, L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak gösterildi.

5.1 RLW Denklemi, Başlangıç ve Sınır Şartları

ε ve μ pozitif parametre, x ve t türevi göstermek üzere $[a, b]$ aralığında tanımlı

$$U_t + U_x + \varepsilon U U_x - \mu U_{xxt} = 0, \quad (5.1)$$

formundaki RLW denkleminin

$$U(a, t) = \beta_1, \quad U(b, t) = \beta_2 \quad (5.2)$$

$$U_x(a, 0) = 0, \quad U_x(b, 0) = 0$$

sınır şartları ve $f(x)$ sonradan belirlenmek üzere

$$U(x, 0) = f(x) \quad (5.3)$$

başlangıç şartı altındaki sayısal çözümünü araştıracağız.

5.2 Kübik B-spline Kolokeyşin Metodu

(5.1) denklemini

$$(U - \mu U_{xx})_t + U_x + \varepsilon U U_x = 0 \quad (5.4)$$

formunda tekrar yazar ve $f = U_x + \varepsilon U U_x$ olmak üzere zamana göre türev için sonlu fark yaklaşımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} U^{n+1} - \mu U_{xx}^{n+1} - U^n + \mu U_{xx}^n + \Delta t(1 - \theta)(U_x^n + \varepsilon(U U_x)^n) \\ + \Delta t\theta(U_x^{n+1} + \varepsilon(U U_x)^{n+1}) = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

denklemini bulunur.

(5.5) denklemini lineer hale getirebilmek için her bölünme noktasında $(U U_x)^{n+1}$ yerine

$$(U U_x)_m^{n+1} = U_m^{n+1}(U_x)_m^n + U_m^n(U_x)_m^{n+1} - U_m^n(U_x)_m^n \quad (5.6)$$

eşitliği kullanılırsa (5.5) denklemini lineer olarak;

$$\begin{aligned} U_m^{n+1} - \mu(U_{xx})_m^{n+1} - U_m^n + \mu(U_{xx})_m^n + (1 - \theta)\Delta t[(U_x)_m^n \\ + \varepsilon\{U_m^n(U_x)_m^{n-1} + U_m^{n-1}(U_x)_m^n - U_m^{n-1}(U_x)_m^{n-1}\}] \\ + \Delta t\theta[(U_x)_m^{n+1} + \varepsilon\{U_m^{n+1}(U_x)_m^n + U_m^n(U_x)_m^{n+1} - U_m^n(U_x)_m^n\}] = 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

formunda elde edilebilir. Birinci bölümde elde ettiğimiz kübik B-Spline eşitlikleri (5.7) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned} L_1 &= \delta_{m-1}^n + 4\delta_m^n + \delta_{m+1}^n & L_2 &= \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^n - \delta_{m-1}^n) \\ L_3 &= \delta_{m-1}^{n-1} + 4\delta_m^{n-1} + \delta_{m+1}^{n-1} & L_4 &= \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^{n-1} - \delta_{m-1}^{n-1}) \\ L_5 &= \delta_{m-1}^n - 2\delta_m^n + \delta_{m+1}^n \end{aligned}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} &\delta_{m-1}^{n+1} \left(1 - \mu \frac{6}{h^2} - \theta \Delta t \frac{3}{h} + \varepsilon \theta \Delta t L_2 - \varepsilon \theta \Delta t \frac{3}{h} L_1\right) \\ &+ \delta_m^{n+1} \left(4 + \mu \frac{12}{h^2} + 4\varepsilon \theta \Delta t L_2\right) + \delta_{m+1}^{n+1} \left(1 - \mu \frac{6}{h^2} + \theta \Delta t \frac{3}{h} + \varepsilon \theta \Delta t L_2 + \varepsilon \theta \Delta t \frac{3}{h} L_1\right) \\ &= L_1 - \mu \frac{6}{h^2} L_5 - (1 - \theta) \Delta t (L_2 + \varepsilon L_1 L_4 + \varepsilon L_3 L_2 - \varepsilon L_3 L_4) + \theta \varepsilon \Delta t L_1 L_2 \end{aligned} \quad (5.8)$$

denklem sistemine ulaşılır. Bu sistem $d^{n+1} = \{\delta_{-1}^{n+1}, \delta_0^{n+1}, \dots, \delta_{m+1}^{n+1}\}$ bilinmeyenler vektörü olmak üzere üçgensel bir matris sistemine karşılık gelir. Bu matris sistemi $N+3$ bilinmeyen, $N+1$ denklemden oluşan bir sistemdir. (5.2) olarak verilen sınır koşulları kullanılırsa

$$\begin{aligned} U(x_0) &= \delta_{-1}^{n+1} + 4\delta_0^{n+1} + \delta_1^{n+1} = \beta_1 \implies \delta_{-1}^{n+1} = \beta_1 - (4\delta_0^{n+1} + \delta_1^{n+1}) \\ U(x_N) &= \delta_{N-1}^{n+1} + 4\delta_N^{n+1} + \delta_{N+1}^{n+1} = \beta_2 \implies \delta_{N+1}^{n+1} = \beta_2 - (\delta_{N-1}^{n+1} + 4\delta_N^{n+1}) \end{aligned} \quad (5.9)$$

eşitlikleri bulunur. Bulunan bu eşitlikler (5.8) denkleminde kullanılırsa Thomas algoritması yardımıyla çözülebilen $(N+1) \times (N+1)$ 'lik yeni bir matris sistemi elde edilir.

5.3 Başlangıç Durumu ve Sayısal Hesaplamalar

$t = 0$ iken (ilk zaman adımı), (5.3) başlangıç şartından $d^0 = \{\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_{N+1}^0\}$ başlangıç vektörü bulunabilir ve kübik B-spline eşitlikleri yardımıyla

$x_m, m = 0, 1, \dots, N$ bölünme noktalarındaki

$$\begin{aligned} U(x_m) &= \delta_{m-1}^0 + 4\delta_m^0 + \delta_{m+1}^0 \\ U'(x_m) &= \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^0 - \delta_{m-1}^0) \\ U''(x_m) &= \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1}^0 - 2\delta_m^0 + \delta_{m+1}^0) \end{aligned}$$

değerleri hesaplanabilir.

$d^1 = \{\delta_{-1}^1, \delta_0^1, \dots, \delta_{N+1}^1\}$ ikinci zaman adımındaki bilinmeyenler vektörünü hesaplamak için (5.8) denkleminde $\theta = 1$ alarak kapalı çözüm bulunursa (5.8) denklemi

$$\begin{aligned} L_1 &= \delta_{m-1}^0 + 4\delta_m^0 + \delta_{m+1}^0 & L_2 &= \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^0 - \delta_{m-1}^0) \\ L_5 &= \delta_{m-1}^0 - 2\delta_m^0 + \delta_{m+1}^0 \end{aligned}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} &\delta_{m-1}^1 \left(1 - \mu \frac{6}{h^2} - \Delta t \frac{3}{h} + \varepsilon \Delta t L_2 - \varepsilon \Delta t \frac{3}{h} L_1\right) \\ &+ \delta_m^1 \left(4 + \mu \frac{12}{h^2} + 4\varepsilon \Delta t L_2\right) + \delta_{m+1}^1 \left(1 - \mu \frac{6}{h^2} + \Delta t \frac{3}{h} + \varepsilon \Delta t L_2 + \varepsilon \Delta t \frac{3}{h} L_1\right) \\ &= L_1 - \mu \frac{6}{h^2} L_5 + \varepsilon \Delta t L_1 L_2 \end{aligned} \tag{5.10}$$

denkleminde dönüşür. (5.10) denklem sistemi $N+3$ bilinmeyen, $N+1$ denklemden oluşan bir sistemdir. (5.9) olarak elde ettiğimiz sınır şartları bu zaman adımı için kullanılırsa $(N+1) \times (N+1)$ 'lik yeni bir denklem sistemi elde edilir. Bu yeni denklem sistemi Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir. Böylece $d^1 = \{\delta_{-1}^1, \delta_0^1, \dots, \delta_{N+1}^1\}$ bilinmeyen vektörü elde edilir ve kübik B-spline eşitlikleri kullanılarak ikinci zaman adımında $x_m, m = 0, 1, \dots, N$ bölünme

noktalarındaki

$$\begin{aligned} U(x_m) &= \delta_{m-1}^1 + 4\delta_m^1 + \delta_{m+1}^1 \\ U'(x_m) &= \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^1 - \delta_{m-1}^1) \\ U''(x_m) &= \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1}^1 - 2\delta_m^1 + \delta_{m+1}^1) \end{aligned}$$

değerleri hesaplanabilir.

$d^2 = \{\delta_{-1}^2, \delta_0^2, \dots, \delta_{N+1}^2\}$ üçüncü zaman adımındaki bilinmeyenler vektörünü hesaplamak için (5.8) denkleminde $\theta = \frac{1}{2}$ olarak Crank Nicolson yaklaşımı kullanılırsa (5.8) denklemi

$$\begin{aligned} L_1 &= \delta_{m-1}^1 + 4\delta_m^1 + \delta_{m+1}^1 & L_2 &= \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^1 - \delta_{m-1}^1) \\ L_3 &= \delta_{m-1}^0 + 4\delta_m^0 + \delta_{m+1}^0 & L_4 &= \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^0 - \delta_{m-1}^0) \\ L_5 &= \delta_{m-1}^1 - 2\delta_m^1 + \delta_{m+1}^1 \end{aligned}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} &\delta_{m-1}^2 \left(1 - \mu \frac{6}{h^2} - \Delta t \frac{3}{2h} + \frac{\varepsilon}{2} \Delta t L_2 - \varepsilon \Delta t \frac{3}{2h} L_1\right) \\ &+ \delta_m^2 \left(4 + \mu \frac{6}{h^2} + 2\varepsilon \Delta t L_2\right) + \delta_{m+1}^2 \left(1 - \mu \frac{6}{h^2} + \Delta t \frac{3}{2h} + \frac{\varepsilon}{2} \Delta t L_2 + \varepsilon \Delta t \frac{3}{2h} L_1\right) \\ &= L_1 - \mu L_5 \frac{6}{h^2} - \frac{\Delta t}{2} (L_2 + \varepsilon L_1 L_4 + \varepsilon L_3 L_2 - \varepsilon L_3 L_4) + \frac{\varepsilon}{2} \Delta t L_1 L_2 \end{aligned} \quad (5.11)$$

denklemine dönüştür. (5.11) denklem sistemi $N+3$ bilinmeyen $N+1$ denklemden oluşan bir sistemdir. (5.9) olarak elde ettiğimiz sınır şartları bu zaman adımında kullanılırsa $(N+1) \times (N+1)$ 'lik yeni bir denklem sistemi elde edilir. Bu yeni denklem sistemi Thomas algoritması yardımıyla çözülebilen bir sistemdir. Böylece $d^2 = \{\delta_{-1}^2, \delta_0^2, \dots, \delta_{N+1}^2\}$ bilinmeyen vektörü elde edilir ve kübik B-spline eşitliklerini kullanarak üçüncü zaman adımında x_m ,

$m = 0, 1, \dots, N$ bölünme noktalarındaki

$$\begin{aligned} U(x_m) &= \delta_{m-1}^2 + 4\delta_m^2 + \delta_{m+1}^2 \\ U'(x_m) &= \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^2 - \delta_{m-1}^2) \\ U''(x_m) &= \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1}^2 - 2\delta_m^2 + \delta_{m+1}^2) \end{aligned}$$

değerleri hesaplanabilir.

Üçüncü zaman adımında yapılan benzer işlemler dördüncü ve kalan tüm zaman adımlarında yapılırsa $d^{n+1} = \{\delta_{-1}^{n+1}, \delta_0^{n+1}, \dots, \delta_{N+1}^{n+1}\}$ bilinmeyen vektörleri bulunabilir.

5.4 Metodun Kararlılık Analizi

Fourier kararlılık metodunu kullanarak metodun kararlılığını inceleyelim. Denklemi lineer duruma getirmek için UU_x teriminde U yerine g sabiti kullanılırsa (5.5) denklemi

$$\begin{aligned} U_m^{n+1} - \mu(U_{xx})_m^{n+1} - U_m^n + \mu(U_{xx})_m^n + \Delta t(1 - \theta)((U_x)_m^n + \varepsilon g(U_x)_m^n) \\ + \Delta t\theta((U_x)_m^{n+1} + \varepsilon g(U_x)_m^{n+1}) = 0 \end{aligned}$$

olur. Bulduğumuz denklemde kübik B-Spline eşitlikleri kullanılarak denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned} \delta_{m-1}^{n+1} + 4\delta_m^{n+1} + \delta_{m+1}^{n+1} - \mu \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1}^{n+1} - 2\delta_m^{n+1} + \delta_{m+1}^{n+1}) - (\delta_{m-1}^n + 4\delta_m^n + \delta_{m+1}^n) \\ + \mu \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1}^n - 2\delta_m^n + \delta_{m+1}^n) + \Delta t(1 - \theta) \frac{3}{h}[(\delta_{m+1}^n - \delta_{m-1}^n) + \varepsilon g(\delta_{m+1}^n - \delta_{m-1}^n)] \\ + \Delta t\theta \frac{3}{h}[(\delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m-1}^{n+1}) + \varepsilon g(\delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m-1}^{n+1})] = 0 \end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}
& \delta_{m-1}^{n+1} \left(1 - \mu \frac{6}{h^2} - \Delta t \theta \frac{3}{h} - \Delta t \theta \frac{3}{h} \varepsilon g \right) + \delta_m^{n+1} \left(4 + \mu \frac{12}{h^2} \right) \\
& + \delta_{m+1}^{n+1} \left(1 - \mu \frac{6}{h^2} + \Delta t \theta \frac{3}{h} + \Delta t \theta \frac{3}{h} \varepsilon g \right) \\
& = \delta_{m-1}^n \left(1 - \mu \frac{6}{h^2} + \Delta t (1 - \theta) \frac{3}{h} + \Delta t (1 - \theta) \frac{3}{h} \varepsilon g \right) + \delta_m^n \left(4 + \mu \frac{12}{h^2} \right) \\
& + \delta_{m+1}^n \left(1 - \mu \frac{6}{h^2} - \Delta t (1 - \theta) \frac{3}{h} - \Delta t (1 - \theta) \frac{3}{h} \varepsilon g \right)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Fourier kararlılık metodu gereğince $\delta_m^n = \xi^n e^{i\beta m h}$, $i = \sqrt{-1}$ eşitlikleri yukarıdaki denkleme uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \xi^n e^{i\beta m h} \left[\xi e^{-i\beta h} \left(1 - \mu \frac{6}{h^2} - \Delta t \theta \frac{3}{h} - \Delta t \theta \frac{3}{h} \varepsilon g \right) + \xi \left(4 + \mu \frac{12}{h^2} \right) \right. \\
& \left. + \xi e^{i\beta h} \left(1 - \mu \frac{6}{h^2} + \Delta t \theta \frac{3}{h} + \Delta t \theta \frac{3}{h} \varepsilon g \right) \right] \\
& = \xi^n e^{i\beta m h} \left[e^{-i\beta h} \left(1 - \mu \frac{6}{h^2} + \Delta t (1 - \theta) \frac{3}{h} + \Delta t (1 - \theta) \frac{3}{h} \varepsilon g \right) \right. \\
& \left. + \left(4 + \mu \frac{12}{h^2} \right) + e^{i\beta h} \left(1 - \mu \frac{6}{h^2} - \Delta t (1 - \theta) \frac{3}{h} - \Delta t (1 - \theta) \frac{3}{h} \varepsilon g \right) \right]
\end{aligned}$$

bulunur. $\beta h = \alpha$, $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ ve $e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha$ eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
& \xi \left[\cos \alpha \left(1 - \mu \frac{6}{h^2} - \Delta t \theta \frac{3}{h} - \Delta t \theta \frac{3}{h} \varepsilon g + 1 - \mu \frac{6}{h^2} + \Delta t \theta \frac{3}{h} + \Delta t \theta \frac{3}{h} \varepsilon g \right) \right. \\
& \left. + \left(4 + \mu \frac{12}{h^2} \right) + i \sin \alpha \left(-1 + \mu \frac{6}{h^2} + \Delta t \theta \frac{3}{h} + \Delta t \theta \frac{3}{h} \varepsilon g + 1 - \mu \frac{6}{h^2} + \Delta t \theta \frac{3}{h} + \Delta t \theta \frac{3}{h} \varepsilon g \right) \right] \\
& = \cos \alpha \left(1 - \mu \frac{6}{h^2} + \Delta t (1 - \theta) \frac{3}{h} + \Delta t (1 - \theta) \frac{3}{h} \varepsilon g + 1 - \mu \frac{6}{h^2} - \Delta t (1 - \theta) \frac{3}{h} \right. \\
& \left. - \Delta t (1 - \theta) \frac{3}{h} \varepsilon g \right) + \left(4 + \mu \frac{12}{h^2} \right) + i \sin \alpha \left(-1 + \mu \frac{6}{h^2} - \Delta t (1 - \theta) \frac{3}{h} - \Delta t (1 - \theta) \frac{3}{h} \varepsilon g \right. \\
& \left. + 1 - \mu \frac{6}{h^2} - \Delta t (1 - \theta) \frac{3}{h} - \Delta t (1 - \theta) \frac{3}{h} \varepsilon g \right)
\end{aligned}$$

elde edilir ve gerekli düzenlemelerin yapılmasıyla

$$\begin{aligned}
& \xi \left[\cos \alpha \left(2 - \mu \frac{12}{h^2} \right) + i \sin \alpha \left(\Delta t \theta \frac{6}{h} + \Delta t \theta \frac{6}{h} \varepsilon g \right) + \left(4 + \mu \frac{12}{h^2} \right) \right] \\
& = \cos \alpha \left(2 - \mu \frac{12}{h^2} \right) + i \sin \alpha \left(- \Delta t (1 - \theta) \frac{6}{h} - \Delta t (1 - \theta) \frac{6}{h} \varepsilon g \right) + \left(4 - \lambda \frac{12}{h^2} (1 - \theta) \Delta t \right) \\
& + \left(4 + \mu \frac{12}{h^2} \right)
\end{aligned}$$

denkleme ulaşılır. Bu denkleme

$$\begin{aligned}
A & = \cos \alpha \left(2 - \mu \frac{12}{h^2} \right) + \left(4 + \mu \frac{12}{h^2} \right) \\
B & = \sin \alpha \left(\Delta t \frac{6}{h} + \Delta t \frac{6}{h} \varepsilon g \right)
\end{aligned}$$

eşitlikleri kullanırsa

$$\xi(A + i\theta B) = A - i(1 - \theta)B \quad (5.12)$$

elde edilir. Fourier kararlılık metodu gereğince $|\xi| \leq 1$ olmalı idi. Bu durumda (5.12) denklemi için;

$$\begin{aligned}
-1 & \leq \sqrt{\frac{A^2 + (1 - \theta)^2 B^2}{A^2 + \theta^2 B^2}} \leq 1 \\
0 & \leq \frac{A^2 + (1 - \theta)^2 B^2}{A^2 + \theta^2 B^2} \leq 1
\end{aligned} \quad (5.13)$$

şartına ulaşılır. (5.13) denklemi için eşitliğin sol tarafının doğrulandığı aşıkardır.

Göstermemiz gereken

$$A^2 + (1 - \theta)^2 B^2 \leq A^2 + \theta^2 B^2 \quad (5.14)$$

olduğu durumdur. (5.14) düzenlenirse

$$(1 - \theta)^2 \leq \theta^2 \quad (5.15)$$

elde edilir. (5.15) denkleminin sağlanması $1 - 2\theta \leq 0$ olmasına bağlıdır. Bu durumdada $\frac{1}{2} \leq \theta$ olur. $\theta \in [0, 1]$ olduğunu biliniyordu, o halde Fourier kararlılık metoduna göre metodumuz $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$ aralığında iken kararlıdır.

5.5 Test Problemleri

5.5.1 Tek Dalga Çözümü

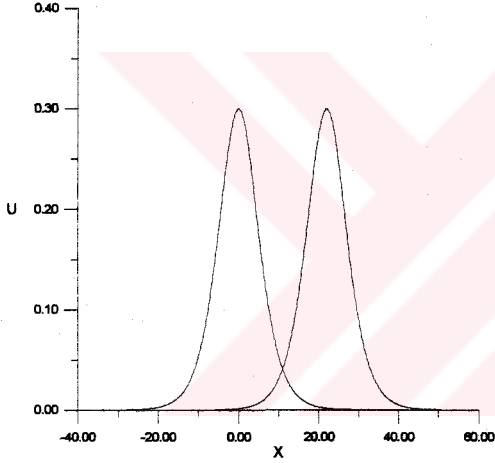
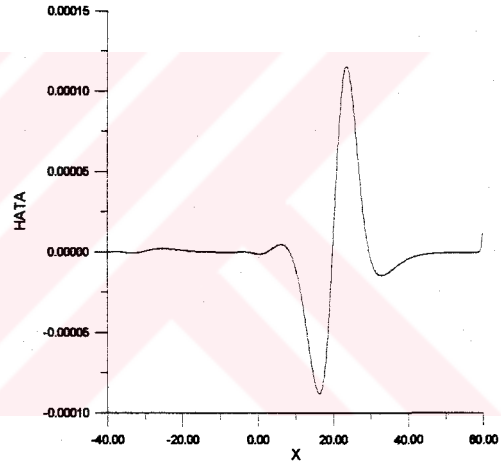
Bu kısımda üçüncü bölümde olduğu gibi; (1.74) denklemi ile verilen tek dalga analitik çözümü RLW denkleminin sayısal çözümü ile kıyaslanmasında kullanıldı. Başlangıç koşulu olarak (1.75) denklemini ve sınır koşulu olarakta (1.76) eşitlikleri kullanıldı. $\varepsilon = \mu = 1$, $x_0 = 0$ parametreleri ve $-40 \leq x \leq 60$ tanım aralığı seçilerek $3c$ genlikli, sola yerleştirilmiş tek dalganın $v = 1 + \varepsilon c$ hızla sağa doğru hareketi $0 \leq t \leq 20$ zaman aralığında incelendi.

Parametreler [36, 39, 42] de, olduğu gibi konum artımı $h = 0.125$, zaman artımı $\Delta t = 0.1$ ve genlik $3c = 0.3$ olarak alındı. Bu aldığımız parametrelere göre 0.3 genlikli tek dalga çözümü için korunum sabitlerimizin analitik değerleri (3.19) eşitliği ile üçüncü bölümde hesaplanmıştı.

Program $t = 20$ oluncaya kadar çalıştırıldı. $t = 20$ olduğu ana kadar çeşitli zamanlardaki L_2 , L_∞ hata normlarıyla beraber C_1 , C_2 ve C_3 korunum sabitleri Tablo 5.1 de verildi. Çalışma boyunca korunum sabitleri ile (3.19) eşitliğinde verilen analitik sonuçların birbiri ile oldukça uyumlu oldukları görüldü. Şekil 5.1 de başlangıç fonksiyonu ile $t = 20$ anındaki sayısal çözümün grafiği çizildi. Şekil 5.2 de sayısal çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkı temsil eden grafik çizildi. Grafik incelediğinde maksimum hatanın dalganın tepe noktası civarlarında olduğunu gözlemlendi.

Tablo 5.1: Tek dalga için hata normları ve korunum sabitleriGenlik = 0.3, $\Delta t = 0.1$, $\Delta x = 0.125$, $-40 \leq x \leq 60$

Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
0	0.000	0.000	3.97992	0.81046	2.57901
4	0.192	0.082	3.97992	0.81028	2.57839
8	0.210	0.089	3.97993	0.81028	2.57839
12	0.236	0.097	3.97993	0.81028	2.57839
16	0.268	0.106	3.97992	0.81028	2.57839
20	0.304	0.116	3.97989	0.81028	2.57839

**Şekil 5.1 :** $t = 0$ ve $t = 20$ zamanındaki tek dalga çözümü**Şekil 5.2 :** $t = 20$ zamanındaki hata

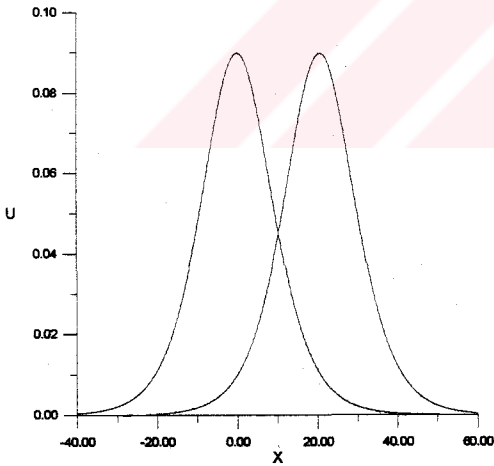
Aynı parametreler için dalga genliği 0.09 seçilerek program tekrar çalıştırıldığında, elde edilen hata normları ve korunum sabitlerinin çeşitli zamanlardaki değerleri Tablo 5.2 de verildi. Çalışma boyunca korunum sabitleri ile (3.20) eşitliğinde verilen analitik sonuçların birbiri ile oldukça uyumlu oldukları görüldü. $t = 20$ anındaki 0.09 genlikli tek dalga çözümü ile $t = 0$

anındaki başlangıç şartımızın grafiği Şekil 5.3 de çizildi. Şekil 5.4 de analitik çözüm ile sayısal çözüm arasındaki farkı belirten grafik çizildi. Bu grafik incelendiğinde en büyük hatanın Şekil 3.4 de olduğu gibi tanım aralığının en son noktasında olduğu görüldü. Bunun sebebi üçüncü bölümde açıkladığı gibi $t = 20$ anında analitik çözümümüzün 0.00043 iken sayısal çözümümüzün sınır şartlarından dolayı 0 olmasıydı.

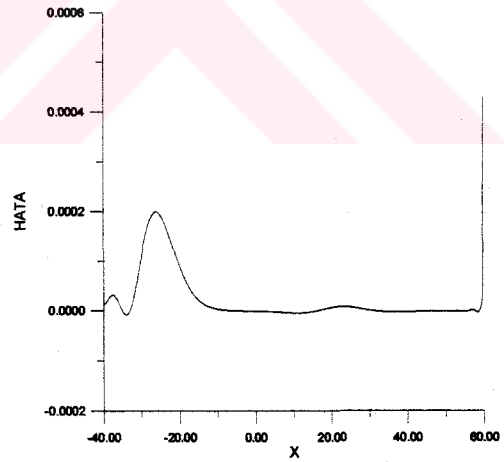
Tablo 5.2 : Tek dalga için hata normları ve korunum sabitleri

Genlik = 0.09, $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$, $-40 \leq x \leq 60$

Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1	C_2	C_3
0	0.000	0.000	2.10707	0.12730	0.38880
4	0.418	0.232	2.10708	0.12729	0.38878
8	0.517	0.223	2.10688	0.12729	0.38878
12	0.541	0.214	2.10653	0.12729	0.38878
16	0.549	0.214	2.10591	0.12729	0.38878
20	0.570	0.431	2.10458	0.12729	0.38878



Şekil 5.3: $t = 0$ ve $t = 20$ zamanındaki tek dalga çözümü



Şekil 5.4: $t = 20$ zamanındaki hata

Tablo 5.3 de ise genlik değerleri olarak sırasıyla 0.3 ve 0.09 seçerek farklı konum ve zaman artımlarıyla tek dalga çözümü için hata normları verildi. Aynı genlik değerleri arasında inceleme yapıldığında konum artım değerleri küçükkken hata normlarının daha küçük olduğu görüldü.

Tablo 5.3: Genlik = 0.3

h	Δt	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.025	0.025	0.022	0.013
0.05	0.05	0.074	0.029
0.125	0.1	0.304	0.116
0.25	0.2	1.071	0.425
0.5	0.5	4.869	1.853
1.0	0.8	19.404	7.195
4.0	0.8	87.144	30.081

Genlik = 0.09

h	Δt	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.025	0.025	0.560	0.431
0.05	0.05	0.562	0.432
0.125	0.1	0.570	0.432
0.25	0.2	0.594	0.432
0.5	0.5	0.746	0.432
1.0	0.8	1.806	0.552
4.0	0.8	4.286	1.288

5.5.2 Ardışık Dalgaların Çözümü

Bu kısımda (1.79) başlangıç şartı ve (1.80) sınır şartları kullanılarak ardışık dalgaların oluşumu incelenecektir.

Sayısal çözüm için $U_0 = 0.1$, $\varepsilon = 3/2$, $\mu = 0.16666667$, $h = 0.24$, $\Delta t = 0.1$ parametre değerleri ve $-60 \leq x \leq 540$ tanım aralığı [36, 39] referanslarında olduğu gibi seçildi. Başlangıç koşulunda $d = 5$ kullanılarak program $t = 400$ zamanına kadar çalıştırıldı. Yapılan hesaplamalar sonucunda farklı zamanlar için verilen C_1 , C_2 ve C_3 korunum sabitleriyle beraber tanım aralığı içinde oluşan tüm dalgaların maksimum yükseklik değerleri (U_{\max}) Tablo 5.4 de verilmiştir.

Tablo 5.4: Ardışık dalga sonuçları

Zaman	U_{\max}	x	C_1	C_2	C_3
0	0.10000	-60	6.01198	0.57631	1.78496
50	0.11031	48.48	11.38698	1.12631	3.49045
100	0.13696	102.24	16.76198	1.67633	5.19574
150	0.15758	156.24	22.13698	2.22637	6.90076
200	0.17034	210.48	27.51198	2.77642	8.60564
250	0.17792	264.96	32.88698	3.32647	10.31047
300	0.18215	319.44	38.26198	3.87653	12.01529
350	0.18515	374.16	43.63698	4.42658	13.72009
400	0.18692	428.88	49.01198	4.97664	15.42490

Korunum sabitlerinin değişimini $d = 5$ olmak üzere Tablo 5.4 deki sonuçlara göre;

$$M_1 = \frac{49.01198 - 6.01198}{400} = 0.107500$$

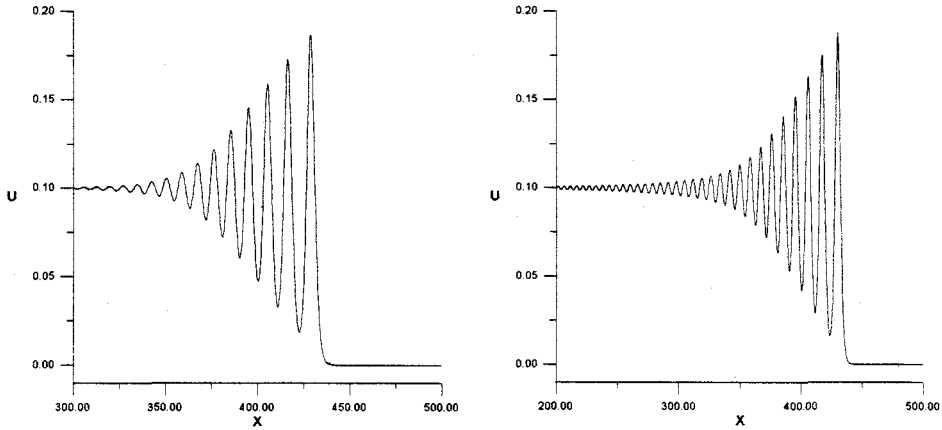
$$M_2 = \frac{4.97664 - 0.57631}{400} = 0.0110008$$

$$M_3 = \frac{15.42490 - 1.78496}{400} = 0.034099$$

olarak hesaplanabilir. Bu sonuçları (1.81) denklemiyle hesaplanan analitik sonuçlar ile kıyaslanırsa sayısal sonuçların oldukça iyi olduğu görülebilir.

Şekil 5.5'in solundaki grafik ile, $d = 5$ düşük eğiminin kullanılmasıyla elde edilen ardışık dalganın profili gösterildi. Sağ taraftaki grafik ile $d = 2$ yüksek eğimiyle elde edilen ardışık dalganın profili çizildi. Yüksek eğim, başlangıç

şartında kullanıldığında, şekilde daha fazla ardışık dalgalar oluştuğu gözlemlendi.

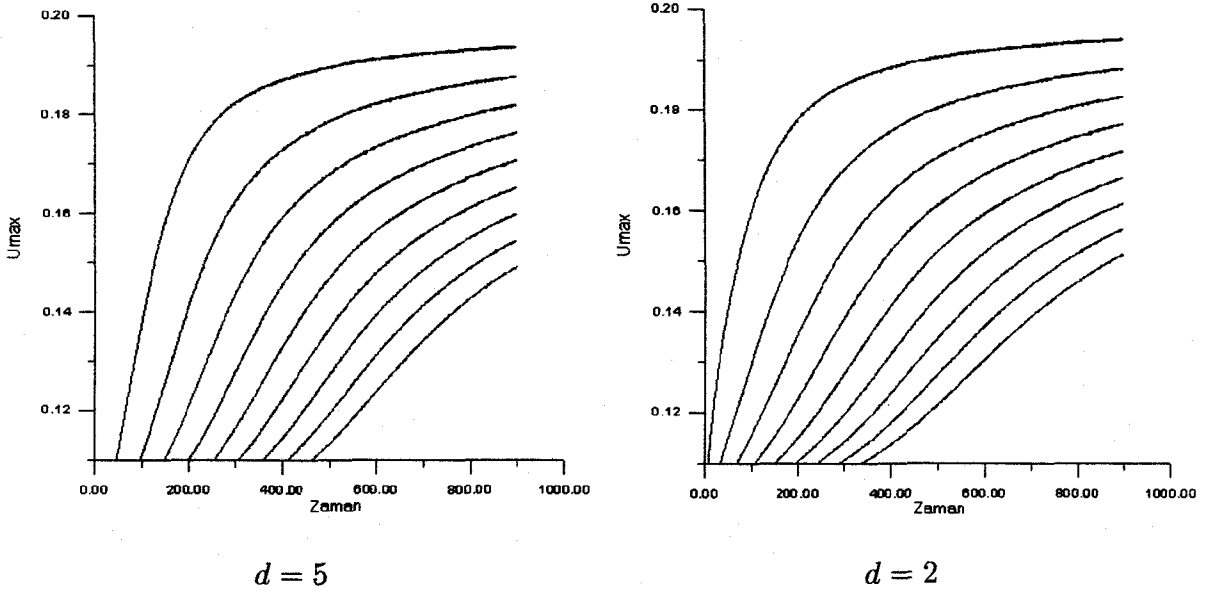


$d = 5$

$d = 2$

Şekil 5.5: $t = 400$ zamanında ardışık dalgaların profili, $U_0 = 0.1$,
 $h = 0.24$, $\Delta t = 0.1$

Tanım aralığımızı $-60 \leq x \leq 1140$ olarak genişleterek $d = 5$ ve $d = 2$ olarak programı iki kez ayrı ayrı çalıştırdığımızda; $t = 900$ oluncaya kadarki oluşan ilk dokuz dalganın maksimum yüksekliğinin zamana göre grafikleri Şekil 5.6 da görüntülenmiştir. Oluşan ilk dokuz dalganın maksimum genlikleri ve bu değerleri aldıkları x koordinatları Tablo 5.5 de verilmiştir.



Şekil 5.6: Dalgaların gelişimi

Tablo 5.5: $t = 900$ zamanında dalgaların genlikleri

	$d = 5$	$d = 2$
İlk Dalga	0.1938	0.1941
İkinci Dalga	0.1878	0.1883
Üçüncü Dalga	0.1820	0.1829
Dördüncü Dalga	0.1764	0.1774
Beşinci Dalga	0.1708	0.1721
Altıncı Dalga	0.1653	0.1668
Yedinci Dalga.	0.1599	0.1617
Sekizinci Dalga.	0.1545	0.1566
Dokuzuncu Dalga	0.1491	0.1514

Bölüm 6

Sonuçlar ve Öneriler

Tezimizin ikinci ve dördüncü bölümünde lineer olmayan Burger denkleminin sayısal çözümü, üçüncü ve beşinci bölümde RLW denkleminin sayısal çözümü üzerinde çalıştık.

İkinci bölümde J. Caldwell tarafından araştırılan lineer olmayan Burger denkleminin sayısal çözümü, diğer bölümlerde kullanılan sayısal çözümler için bir temel oldu. Bu bölümde kullanılan lineerleştirme tekniği diğer bölümlerde de kullanılarak sayısal çözümler araştırıldı.

Lineer olmayan Burger denkleminin sayısal çözümünü dördüncü bölümde bulduktan sonra üç test problemi kullanarak metodumuzun doğruluğunu kontrol ettik. İlk test problemimiz için $\lambda = 1$, $\Delta t = 0.01$ seçimleri sonucunda bulunan sayısal sonuçlar ile aynı parametreler için Burger denkleminin diğer sayısal çözümleriyle beraber farklı konum artımları için düzenlenerek Tablo 6.1 de analitik çözümle birlikte verildi. Tablo incelendiğinde bazı konum ve zamanlarda iyi sonuçlar vermesine rağmen genel olarak bakıldığında dördüncü bölümde bulunan sayısal çözümün (K.B-s) bu test problemi için iyi sonuçlar vermediği görüldü.

Tablo 6.1: Birinci test problemi için sayısal sonuçların kıyaslanması (K.s.K: Kübik spline Kol., K.B-s: Kübik B-spline Kol.)

x	t	$h = 1/4$		$h = 1/8$		$h = 1/16$		Analitik Çözüm
		K.s.K	K.B-s. [27]	K.s.K	K.B-s [27]	K.s.K	K.B-s [27]	
0.25	0	0.7071	0.7071	0.7071	0.7071	0.7071	0.7071	0.7071
0.25	0.05	0.3734	0.4077	0.4134	0.4139	0.4125	0.4148	0.4131
0.25	0.10	0.2202	0.2443	0.2528	0.2540	0.2536	0.2549	0.2536
0.25	0.15	0.1334	0.1467	0.1546	0.1567	0.1566	0.1565	0.1566
0.25	0.20	0.0814	0.0878	0.0945	0.0964	0.0964	0.0962	0.0964
0.25	0.25	0.0510	0.0524	0.0576	0.0592	0.0592	0.0589	0.0592
0.50	0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.50	0.05	0.5563	0.5968	0.6080	0.6091	0.6083	0.6108	0.6091
0.50	0.10	0.3263	0.3547	0.3684	0.3714	0.3716	0.3719	0.3716
0.50	0.15	0.1944	0.2109	0.2234	0.2267	0.2266	0.2266	0.2268
0.50	0.20	0.1173	0.1254	0.1355	0.1383	0.1387	0.1380	0.1385
0.50	0.25	0.0614	0.0746	0.0821	0.0844	0.0845	0.0841	0.0845
0.75	0	0.7071	0.7071	0.7071	0.7071	0.7071	0.7071	0.7071
0.75	0.05	0.4263	0.4373	0.4480	0.4490	0.4453	0.4508	0.4502
0.75	0.10	0.2444	0.2577	0.2695	0.2719	0.2704	0.2725	0.2726
0.75	0.15	0.1423	0.1517	0.1619	0.1640	0.1643	0.1641	0.1644
0.75	0.20	0.0843	0.0899	0.0971	0.0992	0.0994	0.0991	0.0994
0.75	0.25	0.0501	0.0531	0.0586	0.0602	0.0603	0.0600	0.0603

Birinci test problemi için $\lambda = 0.01$, $h = 1/216$ ve $\Delta t = 0.01$ seçimi ile $t = 0.5$ anındaki sayısal çözüm Tablo 6.2. de verildi. Aynı tabloda [17] ve [27] sonuçlarında verildi. [17] de, $h = 1/18$ ve $\Delta t = 0.001$ için hesaplamalar verilmiştir. J. Caldwell makalesinde bu incelemeyi yapmamıştır. Tablo incelendiğinde [27] tarafından bulunan sayısal çözümlerle kübik B-spline kolokeyşin çözümünün aynı olduğunu ve analitik çözümlerde oldukça yakın olduğu görüldü.

Tablo 6.2: P.G.M: Petrov Galerkin Metodu, P.Y: Product Yaklaşımı, C.D: Compact Differencing

x	K.B-s.	P.G.M, [17]	P.Y, [17]	C.D, [17]	[27]	Ana. Son
0.500	0.589	0.589	0.589	0.589	0.589	0.589
0.556	0.649	0.649	0.649	0.648	0.649	0.649
0.611	0.707	0.707	0.707	0.709	0.707	0.707
0.667	0.762	0.762	0.762	0.760	0.762	0.762
0.722	0.814	0.813	0.814	0.820	0.814	0.814
0.778	0.861	0.860	0.861	0.852	0.861	0.861
0.833	0.902	0.895	0.907	0.917	0.902	0.902
0.889	0.934	0.911	0.952	0.911	0.934	0.934
0.944	0.951	0.764	0.774	0.964	0.951	0.937
1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Birinci test problemi için parametreleri $\lambda = 0.0001$, $h = \frac{1}{216}$ ve $\Delta t = 0.125$ seçerek program $t = 0.5$ anına kadar çalıştırıldığında elde edilen sayısal çözümler Tablo 6.3 de verildi. Tablo 6.2 deki sonuçların aksine λ değerinin küçük seçildiği bu durumda sayısal çözümün bozulduğu ve diğer çözümlere göre daha kötü sonuçlar verdiği görüldü.

Tablo 6.3:

x	K.B-s.K	P.G.M, [17]	P.Y, [17]	C.D, [17]	[27]	Ana. Son
0.500	0.613	0.594	0.595	0.619	0.595	0.595
0.556	0.673	0.656	0.656	0.621	0.657	0.656
0.611	0.730	0.715	0.715	0.764	0.719	0.715
0.667	0.784	0.772	0.772	0.718	0.778	0.772
0.722	0.833	0.826	0.826	0.887	0.835	0.826
0.778	0.875	0.876	0.876	0.819	0.887	0.876
0.833	0.903	0.906	0.921	0.978	0.927	0.921
0.889	0.898	0.902	0.960	0.908	0.938	0.959
0.944	0.802	0.835	0.854	1.046	0.881	0.959
1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Üçüncü test problemi için $\lambda = 0.01$, $h = \frac{1}{36}$ ve $\Delta t = 0.025$ seçimleri ile program $\Delta t = 0.5$ anına kadar çalıştırıldı. (1) olarak gösterilen kübik B-spline kolokeyşin metodunu sayısal çözümünün; [27] tarafından bulunan sayısal çözümler ile hemen hemen aynı olduğu, [17]'nin bulduğu sayısal çözümlerden ise iyi olduğu görüldü. [17] sayısal çözümünü yaparken kullandığı $h = 1/18$ ve $\Delta t = 0.001$ değerleri için yapılan kübik B-spline kolokeyşin çözümü de (2) olarak gösterildi. Bu sonuçlarında analitik sonuçlara yakın olduğu ve [17]'nin tüm sayısal çözümlerinden daha iyi olduğu görüldü.

RLW denkleminin sayısal çözümünün doğruluğunu test etmek için iki test problemi üzerinde çalıştık. Test problemlerimizin doğruluğunu L_2 ve L_∞ hata normlarıyla, korunum sabitlerini vererek inceledik.

İlk test problemi için 0.3 genlikli, $h = 0.125$ konum artımı ve $\Delta t = 0.1$ zaman artımı kullanarak program çalıştırıldı. $t = 20$ anında bulunan hata normları ve korunum sabitleri ile daha önceki sayısal çözümler de bulunan değerler Tablo 6.5 de birlikte verildi. Tablo incelendiğinde hata normlarına göre en iyi çözümün [42] de bulunduğu görüldü. Bulunan korunum sabitlerinin analitik sonuçlara bakılarak karşılaştırıldığında en iyi sonuçların, C_1 için kübik spline kolokeyşin de, C_2 ve C_3 için [42] de bulunduğu görüldü.

Tablo 6.5: Genlik 0.3 alındığında $t = 20$ iken tek dalga için hata normları ve korunum sabitleri

Metod	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	C_1 (3.97995)	C_2 (0.81046)	C_3 (2.57901)
Kübik spline Kol.	0.301	0.114	3.97996	0.81028	2.57839
Kübik B-spline Kol.	0.304	0.116	3.97989	0.81028	2.57839
[36]	4.688	1.755	3.98203	0.80865	2.57302
[41]	0.018	1.566	3.98203	0.84189	2.55830
[42]	0.227	0.081	3.97986	0.81040	2.57880
[43]	0.511	0.198	3.98206	0.81116	2.58133

İlk test probleminde genliği 0.09 seçerek program tekrar çalıştırıldığında bulunan sayısal sonuçlar Tablo 6.6 da verildi. Genlik küçük iken bulunan sonuçların büyük genlik alındığında bulunan sonuçlardan daha kötü olduğu ve aynı parametreler için bulunan diğer sayısal çözümlerinde metodlarımıza göre daha tutarlı oldukları görüldü.

Tablo 6.6: Genlik 0.09 alındığında $t = 20$ iken tek dalga için hata normları ve korunum sabitleri

Metod	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$C_1 (2.10941)$	$C_2 (0.12730)$	$C_3 (0.38881)$
Kübik spline Kol.	0.547	0.431	2.10900	0.12729	0.38878
Kübik B-spline Kol.	0.570	0.431	2.10458	0.12729	0.38878
[36]	0.347	0.239	2.10769	0.12726	0.38868
[41]	0.028	1.551	2.12887	0.12723	0.38858
[42]	0.537	0.316	2.10908	0.12732	0.38886
[43]	0.535	0.198	2.10906	0.12731	0.38882

İkinci test probleminde $d = 5$ düşük eğimi kullanılarak $U_0 = 0.1$, $\varepsilon = 3/2$, $\mu = 1/6$, $h = 0.24$, $\Delta t = 0.1$ parametre değerleri ve $-60 \leq x \leq 540$ tanım aralığı seçilerek program $t = 400$ anına kadar çalıştırıldı. Korunum sabitleri için bulunan değerler korunum sabitlerindeki oluşan değişimlerle birlikte üçüncü ve beşinci bölümlerde verilmişti. Korunum sabitlerinde oluşan değişimler, [42] tarafından yapılan çalışma ve analitik çözümlerle birlikte Tablo 6.7 de verildi. Tablo incelendiğinde kübik spline kolokeyşin ve kübik B-spline kolokeyşin çözümlerinin analitik sonuçlara çok yakın olduğu ve diğer çözümden daha iyi olduğu görüldü.

Tablo 6.7: $t = 400$ zamanında ardışık dalgaların korunum sabitlerindeki değişimler

Metod	$M_1 (0.1075)$	$M_2 (0.011)$	$M_3 (0.34113)$
Kübik spline Kol.	0.1075	0.0110010	0.034099
Kübik B-spline Kol.	0.1075	0.0110008	0.034099
[42]	0.1052	0.0169000	0.033140

Bu tezde RLW ve lineer olmayan Burger denklemlerinin; kübik ve kübik B-spline fonksiyonları kullanarak kolokeyşin metoduyla sayısal çözümleri araştırıldı. Denklemlerde lineerliği bozan UU_x terimi yerine [7] tarafından verilen eşitlik kullanıldı. Bulunan sonuçların; bazı test problemleri için önceki sonuçlara göre kötü sonuçlar vermesine rağmen genelde tutarlı oldukları görüldü. Sonuç olarak metodumuz; benzer tipteki kısmi türevli diferensiyel denklemlerin sayısal çözümlerinin arandığı durumlarda kullanılabilir uygun bir yöntemdir.



Kaynaklar

- [1] E. Hopf, The Partial Differential Equation $U_t + UU_x = \mu U_{xx}$, Comm. Pure App. Math., 3, 201-230, 1950.
- [2] Julian D. Cole, On a Quasi-linear Parabolg in Aerodynamics, Quarterly of Applied Math., 9, 225-236, 1951.
- [3] D. H. Peregrine, Calculations of the Development of an Undular Bore, J. Fluid. Mech. 25(2), 321-330, 1966.
- [4] J. H. Ahlberg, E. N. Nilson and J. L. Walsh, The Theory of Splines and Their Application, Academic press, 1967.
- [5] T. B. Benjamin, J. L. Bona and J. J. Mahony, Model Equations for Long Waves in Nonlinear Dispersive Systems, Phil. Trans. Roy. Soc., London, A272, 47-78, 1972.
- [6] J. C. Eilbeck and G. R. McGuire, Numerical Study of the Regularized Long-Wave Equation I: Numerical Methods, J. Comput. Physics, 19, 43-57, 1975.
- [7] S. G. Rubin and R. A. Graves, Cubic Spline Approximation for Problems in Fluid Mechanics, Nasa TR R-436, Washington, D. C. 1975.
- [8] S. G. Rubin and P. K. Khosla, Higher-order Numerical Solutions Using Cubic Splines, AIAA Journal, vol 14, no 7, 851-858, 1976.

- [9] J. C. Eilbeck and G. R. McGuire, Numerical Study of the Regularized Long-Wave Equation II: Interaction of Solitary Waves, *J. Comput. Physics*, 23, 63-73, 1977.
- [10] P. C. Jain and D. N. Holla, Numerical Solutions of Coupled Burgers' Equation, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 13, 213-222, 1978.
- [11] P. C. Jain and B. L. Lohar, Cubic Spline Technique for Coupled Non-linear Parabolic Equations, *Comp. & Maths. with Appl.*, 5, 179-185, 1979.
- [12] P. C. Jain and L. Iskandar, Numerical Solutions of the Regularized Long Wave Equation, *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 20, 195-201, 1979.
- [13] M. E. Alexander and J. LL. Morris, Galerkin Methods Applied to Some Model Equations for Non-Linear Dispersive Waves, *J. Comput. Physics*, 30, 428-451, 1979.
- [14] P. J. Olver, Euler Operators and Conservation Laws of the BBM Equation, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 85, 143-160, 1979.
- [15] E. Varoğlu, W. D. Liam Finn, Space-Time Finite Elements Incorporating Characteristics for the Burgers' Equation, *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, 16, 171-184, 1980.
- [16] J. Caldwell, P. Wanless and A. E. Cook, A Finite Element Approach to Burgers' Equation, *App. Math. Modelling*, 5, 189-193, 1981.
- [17] I. Christie, D. F. Griffiths, A. R. Mitchell and J. M. Sanz-Serna, Product Approximation for Non-linear Problems in the Finite Element Method, *IMA, J. Num. Anal.*, 1, 253-266, 1981.
- [18] L. W. Johnson and R. Dean Riess, *Numerical Analysis* 1982.

- [19] L. Lapidus and G. F. Pinder, Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering, John Wiley and Sons, Inc., 1982.
- [20] B. M. Herbst, S. W. Schoombie and A. R. Mitchell, A Moving Petrov-Galerkin Method for Transport Equations, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 18, 1321-1336, 1982.
- [21] C. A. J. Fletcher, A Comparison of Finite Element and Finite Difference Solutions of the One- and Two-Dimensional Burgers' Equations, *Jour. Comp. Physics*, 51, 159-188, 1983.
- [22] P. Wang and R. Kahawita, Numerical Integration of Partial Differential Equations Using Cubic Splines, *Intern. J. Computer Math.* 13, 271-286, 1983.
- [23] D. J. Evans and A. R. Abdullah, The Group Explicit Method for the Solution of Burgers' Equation, *Computing*, 32, 239-253, 1984.
- [24] H. Nguyen and J. Reynen, A Space-time Finite Element Approach to Burgers' Equation, in "Numerical Methods for Nonlinear Problems.", Vol 3, (Eds. E Hinton et al.: Pineridge Press), 1987.
- [25] J. Caldwell, Application of Cubic Splines to the Non-linear Burgers' Equation, pp 253-261, in "Numerical Methods for Nonlinear Problems.", Vol 3, (Eds. E Hinton et al.: Pineridge Press), 1987.
- [26] A. H. A. Ali, L. R. T. Gardner and G. A. Gardner, A Galerkin Approach to the Solution of Burgers' Equation, UCNW maths Pre-print, 90.04, 1990.

- [27] A. H. A. Ali, L. R. T. Gardner and G. A. Gardner, A Collocation Method for Burgers' Equation Using Cubic Splines, UCNW maths Pre-print, 90.29, 1990.
- [28] L. R. T. Gardner and G. A. Gardner, Solitary Waves of the Regularised Long Wave Equation, J. Comput. Physics, 91, 441-459, 1990.
- [29] K. Kakuda and N. Tosaka, The Generalized Boundary Element Approach to Burgers' Equation, Int. J. Num. Meth. Eng., 29, 245-261, 1990.
- [30] Q. Chang, G. Wang and B. Guo, Conservative Scheme for a Model of Nonlinear Dispersive Waves and Its Solitary Waves Induced by Boundary Motion, Jour. Comp. Phy., 93, 360-375, 1991.
- [31] L. Iskandar and A. Mohsen, Some Numerical Experiments on the Splitting of Burgers' Equation, Num. Meth. Par. Diff. Eq., 8, 267-276, 1992.
- [32] P. C. Jain, R. Shankar and T. V. Singh, Numerical Solution of Regularized Long-Wave Equation, Comm. Numer. Methods Eng., 9, 579-586, 1993.
- [33] P. C. Jain, R. Shankar and T. V. Singh, Numerical Technique for Solving Convective-Reaction-Diffusion Equation, Math. Comput. Modelling, Vol. 22, No. 9, 113-125, 1995.
- [34] L. R. T. Gardner, G. A. Gardner and İ. Dağ, A B-spline Finite Element Method for the Regularized Long Wave Equation, Comm. Numer. Methods Eng., 11, 59-68, 1995.
- [35] L. R. T. Gardner and İ. Dağ, The Boundary-Forced Regularised Long-Wave Equation, Il Nuovo Cimento, Vol. 110 B, N. 12, 1487-1496, 1995.

- [36] L. R. T. Gardner, G. A. Gardner and A. Doğan, A Least Squares Finite Element Scheme for the RLW Equation, *Comm. Numer., Methods Eng.*, 12, 795-804, 1996.
- [37] L. R. T. Gardner, G. A. Gardner, F. A. Ayoub, N. K. Ameen, Modelling an Undular Bore with B-splines, *Comput Methods Appl. Mech. Eng.*, 147, 147-152, 1997.
- [38] S. Kutluay, A. R. Bahadır, A. Özdeş, Numerical Solution of One-dimensional Burgers Equation: Explicit and Exact-Explicit Finite Difference Methods, *J. Comp. App. Maths.*, 103, 251-261, 1999.
- [39] İ. Dağ, Least Squares Quadratic B-spline Finite Element Method for the Regularised Long Wave Equation, *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 182, 205-215, 2000.
- [40] D. Bhardwaj and R. Shankar, A Computational Method for Regularized Long Wave Equation, *Comp. Math. Appl.*, 40 1397-1404, 2000.
- [41] İ. Dağ, M. N. Özer, Approximation of the RLW Equation by the Least Square Cubic B-spline Finite Element Method, *Appl. Math. Modelling*, 25, 221-231, 2001.
- [42] A. Doğan, Numerical Solution of Regularized Long Wave Equation Using Petrov-Galerkin Method, *Comm. Numer., Methods Eng.*, 17, 485-494, 2001.
- [43] A. Doğan, Numerical Solution of RLW Equation Using Linear Finite Elements within Galerkin's Method, *Applied Mathematical Modelling*, 26 (7), 771-783, 2002.

- [44] M. Bayram, Fen ve Mühendislik için Nümerik Analiz, Aktif Yayınevi, 2002.

