T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE İSTATİSTİKSEL LİMİT NOKTALARI

Emine KAYAN

Yüksek Lisans Tezi
Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi
Danışman: Prof.Dr. Rifat ÇOLAK

EYLÜL-2012

T.C

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE İSTATİSTİKSEL LİMİT NOKTALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emine KAYAN

(101121124)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih	**:**	**04.09.2012**
Tezin Savunulduğu Tarih	**:**	**21.09.2012**

Tez Danışmanı	**:**	**Prof.Dr. Rifat ÇOLAK**
Diğer Jüri Üyeleri	**:**	**Prof.Dr. Mikail ET**
	:	**Yrd.Doç.Dr. Mahmut Işık**

EYLÜL-2012

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca desteğini ve ilgisini hiç esirgemeyen, saygıdeğer hocam Prof. Dr. Rifat ÇOLAK'a üzerimdeki emeklerinden dolayı çok teşekkür eder, saygılar sunarım.

Emine KAYAN
ELAZIĞ-2012

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ I

İÇİNDEKİLER II

ÖZET III

SUMMARY IV

SİMGELER LİSTESİ V

1. BÖLÜM

1. GİRİŞ 1

2. BÖLÜM

2. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK 2

3. BÖLÜM

3. λ-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK 9

4. BÖLÜM

4. α. DERECEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK 19

5. BÖLÜM

5. İSTATİSTİKSEL LİMİT NOKTALARI 26

6. BÖLÜM

6. İSTATİSTİKSEL ÜST LİMİT ve ALT LİMİT 34

KAYNAKLAR 42

ÖZET

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde doğal yoğunluk, istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel sınırlılık, istatistiksel Cauchy dizisi ve p pozitif bir reel sayıyı göstermek üzere kuvvetli p-Cesàro toplanabilirlik kavramları ile bunlara ait temel özellikler ve bunlar arasındaki ilişkiler verilmiştir. Bunlardan başka istatistiksel yakınsak dizilerin çarpımına ilişkin bir teorem ve bu teoreme ait bazı sonuçlar eklenmiştir.

Üçüncü bölümde λ-istatistiksel yakınsaklık, kuvvetli (V, λ)-toplanabilirlik kavramları verilmiş; λ-istatistiksel yakınsak dizilerin S_λ kümesi ile istatistiksel yakınsak dizilerin S kümesi ve kuvvetli (V, λ)-toplanabilir dizilerin $[V, \lambda]$ kümesi arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca, Λ sınıfındaki farklı λ, μ dizileri için S_λ ile S_μ, $[V, \lambda]$ ile $[V, \mu]$ ve S_λ ile $[V, \mu]$ kümeleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Bu bölümde de ikinci bölümdekine benzer olarak λ-istatistiksel yakınsak dizilerin çarpımına ilişkin bazı teorem ve sonuçlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde α. dereceden istatistiksel yakınsaklık, α. dereceden kuvvetli p-Cesàro toplanabilirlik kavramları ve bunlar arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Beşinci bölümde bir sayı dizisi için istatistiksel limit noktası ve istatistiksel değme noktası kavramları ve bunlar arasındaki ilişki verilmiştir.

Son bölümde ise bir sayı dizisi için istatistiksel üst limit ve istatistiksel alt limit kavramları ve bunlar arasındaki ilişki incelenmiştir. Ayrıca bir dizinin istatistiksel üst limit ve istatistiksel alt limitleri ile, istatistiksel değme noktalarının Γ_x kümesi arasındaki ilişki incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Doğal yoğunluk, istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel sınırlılık, kuvvetli p-Cesàro toplanabilirlik, λ-istatistiksel yakınsaklık, α. dereceden istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel limit ve değme noktası, istatistiksel üst ve alt limit.

SUMMARY

Generalized Statistical Convergence and Statistical Limit Points

This thesis consists of six chapters. The first chapter is devoted the introduction part.

In chapter two, we give the concepts of natural density, statistical convergence, statistical boundedness, statistical Cauchy sequence, strong p-Cesàro summability and their basic properties and the relationships between them. Furthermore a theorem of multiplication of statistical convergent sequences and some results of this theorem are added.

In chapter three, the concepts of $\lambda-$statistical convergence, strong $(V, \lambda)-$summability are given; the relations between the set of $\lambda-$statistical convergent sequences S_λ and the set of statistical convergent sequences S, and the set of strongly $(V, \lambda)-$summable sequences $[V, \lambda]$ are examined. Also, the relations between the sets S_λ and S_μ, $[V, \lambda]$ and $[V, \mu]$, S_λ and $[V, \mu]$ for various sequences λ, μ in the class Λ are examined. Furthermore some theorems and results of multiplication of $\lambda-$statistical convergent sequences are introduced.

In chapter four, the concepts of statistical convergence of order α, strongly p-Cesàro summability of order α and the relations between them are given.

In chapter five, the concepts statistical limit and statistical cluster points of a real number sequence and the relation between them are given.

In the last chapter, the concepts statistical limit superior and limit inferior and the relation between them are given. Also, the relations between statistical limit superior (limit inferior) and Γ_x the set of statistical cluster points are given.

Key Words: Natural density, statistical convergence, statistical boundedness, strong p-Cesàro summability, $\lambda-$statistical convergence, statistical convergence of order α, statistical limit and statistical cluster points, statistical limit superior and limit inferior.

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	:	Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
c	:	Tüm yakınsak dizilerin uzayı
l_∞	:	Tüm sınırlı dizilerin uzayı
$\Vert x\Vert_\infty$	:	x dizisinin supremum normu
A^c	:	A kümesinin tümleyeni
$\delta(A)$	:	A kümesinin doğal yoğunluğu
$\delta_\lambda(A)$	:	A kümesinin λ-yoğunluğu
$\delta_\alpha(A)$	:	A kümesinin α yoğunluğu
S	:	İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
S_λ	:	λ-istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
S^α	:	α. dereceden istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
$S-\lim x_k$	:	$x=(x_k)$ dizisinin istatistiksel limiti
$S^\alpha-\lim x_k$	:	$x=(x_k)$ dizisinin α. dereceden istatistiksel limiti
w	:	Tüm reel ve kompleks terimli dizilerin uzayı
$[C,1]$	:	Kuvvetli Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi
w_p	:	Kuvvetli p-Cesàroto planabilir dizilerin kümesi
w_p^α	:	α. dereceden kuvvetli p-Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi
L_x	:	x dizisinin limit noktalarının kümesi
Λ_x	:	x dizisinin istatistiksel limit noktalarının kümesi
Γ_x	:	x dizisinin istatistiksel değme noktalarının kümesi
$st-\limsup x$	:	x dizisinin istatistiksel üst limiti
$st-\liminf x$	:	x dizisinin istatistiksel alt limiti
C_1x	:	x dizisinin Cesàro toplamı
$O(1)$	:	Sınırlı bir fonksiyon
$o(1)$	:	Sıfıra yaklaşan bir fonksiyon

1.GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık düşüncesi, Zygmund tarafından 1935'te Varşova'da kendi monografisinin ilk baskısında yayınlandı ([18]). İstatistiksel yakınsaklık kavramı, Steinhaus ([16]) ve Fast ([5]) tarafından verildi ve daha sonra bağımsız olarak Schoenberg([15]) tarafından yeniden ortaya konuldu. Yıllar boyunca ve farklı isimler altında istatistiksel yakınsaklık, Fourier analizi teorisi, ergodic teori, sayılar teorisi, ölçü teorisi, trigonometrik seriler, dönüşüm teorisi ve Banach uzaylarında tartışıldı. Daha sonra Fridy ([6]), Connor ([4]), Savaş ([14]), Mursaleen ([11]), Rath ve Tripathy ([12]), Salat([13]), ve diğerleri tarafından dizi uzayları açısından ve toplanabilirlikle ilişkisi araştırıldı. Son yıllarda, istatistiksel yakınsaklığın genellemeleri, kuvvetli integral toplanabilirliği çalışmasında ve yerel kompakt uzaylarda sınırlı, sürekli fonksiyon ideallerinin yapısında ortaya çıktı. İstatistiksel yakınsaklık ve onun genellemeleri ayrıca doğal sayıların Stone-Čech kompaktlaştırmasının alt kümeleri ile ilişkilidir. Bundan başka, istatistiksel yakınsaklık olasılıktaki yakınsaklık kavramıyla yakından ilişkilidir.

Bu çalışmada bir sayı dizisi için istatistiksel yakınsaklık kavramı, bunların bazı genelleştirilmeleri olan λ-istatistiksel yakınsaklık ve α. dereceden istatistiksel yakınsaklık kavramları verilecektir. Ayrıca istatistiksel yakınsak dizilerin çarpımına ilişkin bazı sonuçlar verilecek ve bu sonuçlar λ-istatistiksel yakınsak diziler için de genişletilecektir. Daha sonra bir sayı dizisi için istatistiksel limit ve değme noktası, istatistiksel üst ve alt limit kavramları verilecektir.

2. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Tanım 2.1 ([6]) $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini göstermek üzere bir $A \subset \mathbb{N}$ alt kümesinin $\delta(A)$ *doğal yoğunluğu*, $|\{k \leq n : k \in A\}|$, A kümesinin n'i geçmeyen elemanlarının sayısını göstermek üzere

$$\delta(A) = \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in A\}|$$

ile tanımlanır.

$\delta(\mathbb{N}) = 1$ ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin sonlu bir $B \subset \mathbb{N}$ alt kümesi için $\delta(B) = 0$ olduğu açıktır. A^c, A'nın tümleyenini göstermek üzere $\delta(A^c) = 1 - \delta(A)$ dır.

Herhangi bir $x = (x_k)$ dizisinin terimleri bir P özelliğini doğal yoğunluğu sıfır olan bir küme dışında bütün k'lar için sağlıyorsa "(x_k) dizisi hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor" denir ve kısaca $h.h.k$ ile gösterilir.

Tanım 2.2 ([6]) Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *istatistiksel yakınsaktır* denir.

İstatistiksel yakınsaklığın buna denk olan bir diğer tanımı şöyledir:

$x = (x_k)$ bir dizi olmak üzere h.h.k için $|x_k - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $S - \lim x_k = L$ yazılır.

Tüm istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S ile gösterilir. Eğer özel olarak $L = 0$ ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel sıfır dizisi denir. İstatistiksel sıfır dizilerinin kümesi S_0 ile gösterilir. Buna göre

$$S = \left\{ x = (x_k) : \exists L, \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}$$

$$S_0 = \left\{ x = (x_k) : \exists L, \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}$$

dır.

Yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Ama bunun tersi doğru değildir.

Örnek 2.3 $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \\ & \qquad\qquad m = 1, 2, 3, ... \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir, yani $S - \lim x_k = 0$ dır. Ancak (x_k) dizisi yakınsak değildir.

Lemma 2.4([13]**)** $S - \lim\limits_{k \to \infty} x_k = L$ olması için gerek yeter koşul $\delta(K) = 1$ ve $\lim\limits_{n \to \infty} x_{k_n} = L$ olan bir $K = \{k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots\} \subset \mathbb{N}$ kümesinin var olmasıdır.

Lemma 2.5([13]**)** $S - \lim x_k = l_1$, $S - \lim y_k = l_2$ ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda,

(i) $S - \lim (x_k + y_k) = l_1 + l_2$

(ii) $S - \lim (cx_k) = cl_1$

dır.

İspat (i) $S - \lim x_k = l_1$ ve $S - \lim y_k = l_2$ olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\left(\left\{k \in \mathbb{N} : |x_k - l_1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) = 0$$

ve

$$\delta\left(\left\{k \in \mathbb{N} : |y_k - l_2| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) = 0$$

dır. $|(x_k + y_k) - (l_1 + l_2)| \leq |x_k - l_1| + |y_k - l_2|$ olduğundan

$$\{k : |(x_k + y_k) - (l_1 + l_2)| \geq \varepsilon\} \subseteq \left\{k : |x_k - l_1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{k : |y_k - l_2| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

kapsaması ve buradan da

$$\delta(\{k : |(x_k + y_k) - (l_1 + l_2)| \geq \varepsilon\}) \leq \delta\left(\left\{k : |x_k - l_1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + \delta\left(\left\{k : |y_k - l_2| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) = 0$$

elde edilir. O halde $S - \lim (x_k + y_k) = l_1 + l_2$ olur.

(ii) $c=0$ durumu açıktır. $c\neq 0$ olsun. $|cx_k-cl_1|\geq \varepsilon$ ise $|x_k-l_1|\geq \frac{\varepsilon}{|c|}$olduğundan

$$\{k:|cx_k-cl_1|\geq \varepsilon\}\subseteq \left\{k:|x_k-l_1|\geq \frac{\varepsilon}{|c|}\right\}$$

bulunur. Böylece

$$\delta\left(\{k:|cx_k-cl_1|\geq \varepsilon\}\right)\leq \delta\left(\left\{k:|x_k-l_1|\geq \frac{\varepsilon}{|c|}\right\}\right)=0$$

eşitsizliğinden $S-\lim cx_k=cl_1$ elde edilir.

Lemma 2.5 den istatistiksel yakınsak dizilerin S kümesinin bir lineer uzay olduğu sonucu çıkar. İstatistiksel yakınsak bir dizinin limiti varsa tektir.

Tanım 2.6([8]) $\delta\left(\{k:\ |x_k|>B\}\right)=0$ olacak şekilde bir B sayısı varsa $x=(x_k)$ dizisine *istatistiksel sınırlıdır* denir.

İstatistiksel sınırlı dizilerin kümesi S_∞ ile gösterilir.

Teorem 2.7 $S-\lim x_k=l_1$, $S-\lim y_k=l_2$ olsun. Bu durumda $S-\lim\left(x_ky_k\right)=l_1l_2$ dir.

İspat $S-\lim x_k=l_1$, $S-\lim y_k=l_2$ olsun. İstatistiksel yakınsak bir dizinin aynı zamanda istatistiksel sınırlı olduğunu biliyoruz. Bu durumda, her $\varepsilon>0$ için

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\{k\leq n:\ |x_k|\geq B\}\right| &= 0\\
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k\leq n:\ |x_k-l_1|\geq \frac{\varepsilon}{B+|l_2|}\right\}\right| &= 0\\
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k\leq n:\ |y_k-l_2|\geq \frac{\varepsilon}{B+|l_2|}\right\}\right| &= 0
\end{aligned}$$

olacak şekilde $B>0$ ve l_1,l_2 sayıları vardır. Şimdi

$$\begin{aligned}
\{k\leq n:\ |x_ky_k-l_1l_2|\geq\varepsilon\}\ \subseteq\ &\left\{k\leq n:\ |x_k-l_1|\geq\frac{\varepsilon}{B+|l_2|}\right\}\\
\cup\ &\{k\leq n:\ |x_k|\geq B\}\cup\left\{k\leq n:\ |y_k-l_2|\geq\frac{\varepsilon}{B+|l_2|}\right\}
\end{aligned}\tag{2.1}$$

kapsamasının geçerli olduğunu gösterelim. Bunun için

$$A\subseteq B\cup C\cup D\Longleftrightarrow B^c\cap C^c\cap D^c\subseteq A^c$$

denkliğinden yararlanalım. Yani

$$\left\{k \leq n: \ |x_k - l_1| < \frac{\varepsilon}{B+|l_2|}\right\} \cap \{k \leq n: \ |x_k| < B\} \tag{2.2}$$
$$\cap \left\{k \leq n: \ |y_k - l_2| < \frac{\varepsilon}{B+|l_2|}\right\} \subseteq \{k \leq n: \ |x_k y_k - l_1 l_2| < \varepsilon\}$$

olduğunu gösterelim: (2.2) kapsamasındaki arakesit kümesinden alacağımız ortak k'lar için

$$|x_k - l_1| < \frac{\varepsilon}{B+|l_2|}, \ |x_k| < B \text{ ve } |y_k - l_2| < \frac{\varepsilon}{B+|l_2|}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu k'lar için

$$\begin{aligned} |x_k y_k - l_1 l_2| &= |x_k y_k - x_k l_2 + x_k l_2 - l_1 l_2| \\ &\leq |x_k| \, |y_k - l_2| + |l_2| \, |x_k - l_1| < B\frac{\varepsilon}{B+|l_2|} + |l_2| \frac{\varepsilon}{B+|l_2|} = \varepsilon \end{aligned}$$

sağlanır. Bu da (2.2) kapsamasının dolayısıyla da (2.1) kapsamasının sağlanması demektir. Kümelerin eleman sayısı arasındaki

$$\begin{aligned} s(B \cup C \cup D) &= s(B) + s(C) + s(D) - s(B \cap C) - s(C \cap D) - s(B \cap D) \\ &+ s(B \cap C \cap D) \leq s(B) + s(C) + s(D) \end{aligned}$$

bağıntısından yararlanarak

$$|\{k \leq n: \ |x_k y_k - l_1 l_2| \geq \varepsilon\}| \leq \left|\left\{k \leq n: \ |x_k - l_1| \geq \frac{\varepsilon}{B+|l_2|}\right\}\right|$$
$$+ |\{k \leq n: \ |x_k| \geq B\}| + \left|\left\{k \leq n: \ |y_k - l_2| \geq \frac{\varepsilon}{B+|l_2|}\right\}\right|$$

yazabiliriz. Eşitsizliğin her iki tarafını $\frac{1}{n}$ ile çarpıp limit alırsak sağ tarafın limiti sıfır olur. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: \ |x_k y_k - l_1 l_2| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olur. Böylece $S - \lim(x_k y_k) = l_1 l_2$ elde edilir.

Uyarı $(x_k) \in S_\infty$, $(y_k) \in S$ ise $(x_k y_k) \in S$ olmak zorunda değildir. Örneğin (x_k), (y_k) dizilerini

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = 2n \\ & \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \\ 0, & k = 2n-1 \end{cases}$$

$y_k = 1$ (her $k \in \mathbb{N}$ için) olacak şekilde seçelim. (x_k) dizisi istatistiksel sınırlı, (y_k) sabit dizisi de 1'e yakınsak ve dolayısıyla 1'e istatistiksel yakınsaktır. $(x_k y_k)$ dizisi için

$$x_k y_k = \begin{cases} 1, & k = 2n \\ & \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \\ 0, & k = 2n - 1 \end{cases}$$

olup, bu dizi istatistiksel yakınsak değildir.

Yakınsak her dizi aynı zamanda istatistiksel yakınsak olacağından yukarıdaki teoremden şu sonuç hemen elde edilir.

Sonuç 2.8 Her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k \neq 0$ olmak üzere $x = (x_k) \in c$ ve $y = (y_k) \in S$ ise $xy \in S$ dir.

Uyarı $(x_k) \in l_\infty$ ve $(y_k) \in S$ ise $(x_k y_k) \in S$ olması gerekmez. Örneğin, (x_k), (y_k) dizilerini

$$x_k = (-1)^k \text{ ve } y_k = 1 + \frac{1}{k}$$

olacak şekilde seçelim. (x_k) sınırlı, (y_k) 1'e yakınsak ve dolayısıyla 1'e istatistiksel yakınsaktır. Ancak

$$x_k y_k = \begin{cases} 1 + \frac{1}{k}, & k = 2n \\ & \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \\ -1 - \frac{1}{k}, & k = 2n - 1 \end{cases}$$

olup, $(x_k y_k)$ dizisi istatistiksel yakınsak değildir.

Tanım 2.9 ([6]) Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\} \right| = 0$$

yani h.h.k için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Teorem 2.10 ([6]) Aşağıdaki önermeler denktir:

(i) $x = (x_k)$ istatistiksel yakınsaktır,

(ii) $x = (x_k)$ istatistiksel Cauchy dizisidir,

(iii) $x = (x_k)$ dizisi için $\delta(\{k : x_k \neq y_k\}) = 0$ (ya da h.h.k için $x_k = y_k$) olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi vardır.

Sonuç 2.11 ([6]) Eğer (x_k), $S - \lim x_k = L$ olacak şekilde bir dizi ise, bu takdirde $\lim y_k = L$ olacak şekilde (x_k)'nın bir $y = (y_k)$ alt dizisi vardır.

Lemma 2.12 ([6]) Sonsuz çokluktaki k lar için $t_k \neq 0$ olacak şekilde bir $t = (t_k)$ sayı dizisi var ise h.h.k için $x_k = 0$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k = \infty$ olacak şekilde bir $x = (x_k)$ dizisi vardır.

İspat Her k için, $m(k) > k^2$ ve $t_{m(k)} \neq 0$ olmak üzere $\{m(k)\}_{k=1}^{\infty}$ pozitif tamsayıların artan bir dizisi olsun. Bir $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} \frac{1}{t_{m(k)}}, & k = m(k) \\ \\ 0, & k \neq m(k) \end{cases}$$

ile tanımlayalım. h.h.k için $x_k = 0$ yani $K := \{k : x_k \neq 0\}$ olmak üzere $\delta(K) = 0$ olduğu açıktır. Ayrıca

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty} t_{m(k)} x_{m(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} t_{m(k)} \cdot \frac{1}{t_{m(k)}} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$$

dur. Bu da ispatı tamamlar.

Tanım 2.13 $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olmak üzere eğer

$$\lim_n n^{-1} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L| = 0$$

olacak şekilde bir L kompleks sayısı varsa, x dizisi L sayısına *kuvvetli Cesàro toplanabilirdir* denir ve kuvvetli Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi $[C, 1]$ ile gösterilir:

$$[C, 1] = \left\{ x = (x_k) : \exists L \in \mathbb{C}, \lim_n n^{-1} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L| = 0 \right\}$$

dır.

$x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $p > 0$ bir reel sayı olsun. Eğer

$$\lim_n n^{-1} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L kompleks sayısı varsa x dizisi L sayısına *kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilirdir* denir. Kuvvetli p-Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi w_p ile gösterilir ([4]):

$$w_p = \left\{ x = (x_k) : \exists L \in \mathbb{C}, \lim_n n^{-1} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p = 0 \right\}$$

dır.

Teorem 2.14 ([4]) $0 < p < \infty$ olsun. Bu takdirde,

$i)$ Bir L sayısına kuvvetli p-Cesàro toplanabilir olan bir dizi L sayısına aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır.

$ii)$ Bir L sayısına istatistiksel yakınsak olan sınırlı bir dizi L sayısına aynı zamanda kuvvetli p-Cesàro toplanabilirdir.

İspat $i)$ w tüm dizilerin uzayını göstermek üzere her $x = (x_k) \in w$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p \geq |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| .\varepsilon^p$$

yazılabilir. Buradan, eğer x, L'ye kuvvetli p-Cesàro toplanabilir ise x, L'ye istatistiksel yakınsaktır, sonucu çıkar.

$ii)$ x sınırlı, L'ye istatistiksel yakınsak ve $K = \|x\|_\infty + |L|$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin ve N_ε seçilsin öyle ki her $n > N_\varepsilon$ için

$$n^{-1} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq (\varepsilon/2)^{1/p} \right\} \right| < \varepsilon/2K^p$$

ve $L_n = \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq (\varepsilon/2)^{1/p} \right\}$ olsun. Şimdi $n > N_\varepsilon$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p &= \frac{1}{n} \Big(\sum_{k \in L_n} |x_k - L|^p + \sum_{\substack{k \notin L_n \\ k \leq n}} |x_k - L|^p \Big) \\ &< \frac{1}{n} \Big(n \frac{\varepsilon}{2K^p}\Big) K^p + \frac{1}{n}(n)\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu da $x = (x_k)$ dizisinin L'ye kuvvetli p-Cesàro toplanabilir olmasıdır.

3. $\lambda-$ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

$\lambda = (\lambda_n)$ pozitif sayıların azalmayan, ∞ a giden ve

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1, \lambda_1 = 1$$

şartlarına sahip bir dizisi olsun. Bu şekilde tanımlanan tüm $\lambda = (\lambda_n)$ dizilerinin kümesi Λ ile gösterilecektir.

Tanım 3.1 ([11]) Eğer her $\varepsilon > 0$ için, $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L'ye $\lambda-$*istatistiksel yakınsaktır* denir. Tüm λ-istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S_λ ile gösterilir. $\lambda_n = n$ durumunda S_λ nın S'e denk olduğu açıktır.

Genelleştirilmiş de la Vallée-Poussin Ortalaması, $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere

$$t_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} x_k$$

ile tanımlanır ([9]) .

Bir $x = (x_k)$ dizisine, $n \to \infty$ iken $t_n(x) \to L$ ise L sayısına $(V, \lambda)-$*toplanabilirdir* denir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n = n$ ise $(V, \lambda)-$ toplanabilirlik $(C, 1)-$ toplanabilirliğe indirgenir. Sırasıyla L'ye kuvvetli Cesàro toplanabilir ve kuvvetli $(V, \lambda) -$ toplanabilir, yani $x_k \to L[C, 1]$ ve $x_k \to L[V, \lambda]$ olan $x = (x_k)$ dizilerinin kümesi için

$$\begin{aligned} [C, 1] &= \left\{ x = (x_k) : \exists L, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L| = 0 \right\} \\ [V, \lambda] &= \left\{ x = (x_k) : \exists L, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |x_k - L| = 0 \right\} \end{aligned}$$

yazarız.

$K \subset \mathbb{N}$ olsun ve K'nın $\lambda -$ *yoğunluğu*

$$\delta_\lambda(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : k \in K\}|$$

olarak tanımlansın. $\delta_\lambda(K)$, $\lambda-$ yoğunluğu $\lambda_n = n$ durumunda $\delta(K)$ doğal yoğunluğuna indirgenir.

Teorem 3.2 ([11]) $\lambda \in \Lambda$ olsun. Bu durumda

(i) $x_k \to L\,[V,\lambda] \Longrightarrow x_k \to L\,[S_\lambda]$ dır ve $[V,\lambda] \subset S_\lambda$ kapsaması kesindir.

(ii) Eğer $(x_k) \in l_\infty$ ve $x_k \to L\,(S_\lambda)$ ise bu durumda $x_k \to L\,[V,\lambda]$.

(iii) $S_\lambda \cap l_\infty = [V,\lambda] \cap l_\infty$ dır.

İspat (i) $\varepsilon > 0$ ve $x_k \to L\,[V,\lambda]$ olsun.

$$\sum_{k\in I_n} |x_k - L| \geq \sum_{\substack{k\in I_n \\ |x_k-L|\geq\varepsilon}} |x_k - L| \geq \varepsilon \left|\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right|$$

yazabiliriz. Buradan $x_k \to L\,[V,\lambda] \Longrightarrow x_k \to L\,(S_\lambda)$ olur.

Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için $(\lambda_n) = (n)$ özel durumu için

$$x_k = \begin{cases} k, & k = m^2 \\ & \qquad\qquad m = 1, 2, 3, ... \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $x = (x_k)$ dizisini gözönüne alalım.

$$\frac{1}{\lambda_n}\left|\{k \in I_n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}\right| = \frac{1}{n}\left|\{k \leq n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}\right| \leq \frac{\sqrt{n}}{n} \to 0 \;\; (n \to \infty)$$

yani $x_k \to 0\,(S_\lambda)$ dır. Diğer taraftan

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} |x_k - 0| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k - 0| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k \to \infty \;\; (n \to \infty)$$

yani $x_k \nrightarrow 0\,[V,\lambda]$ dır.

(ii) $x_k \to L\,(S_\lambda)$ ve $(x_k) \in l_\infty$ olsun. $(x_k) \in l_\infty$ olduğundan her k için $|x_k - L| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} |x_k - L| &= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{\substack{k\in I_n \\ |x_k-L|\geq\varepsilon}} |x_k - L| + \frac{1}{\lambda_n}\sum_{\substack{k\in I_n \\ |x_k-L|<\varepsilon}} |x_k - L| \\ &\leq \frac{M}{\lambda_n}\left|\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right| + \varepsilon \end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu da $x_k \to L\,[V,\lambda]$ anlamına gelir.

(iii) doğrudan doğruya (i) ve (ii) nin sonucudur.

En az bir $n_\circ \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ için $\mathbb{N}_{n_\circ} = \{n_\circ, n_\circ + 1, n_\circ + 2, ...\}$ olarak tanımlansın. Bu durumda "*her* $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$" ile "pozitif tamsayıların sonlu sayıları dışındaki her $n \in \mathbb{N}$" kastedilecektir.

Teorem 3.3 ([3]) $\lambda = (\lambda_n)$ ve $\mu = (\mu_n)$, Λ da her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olacak şekilde iki dizi olsun.

(*i*) Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{\lambda_n}{\mu_n} > 0 \tag{3.1}$$

ise $S_\mu \subseteq S_\lambda$ dır.

(*ii*) Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} = 1 \tag{3.2}$$

ise $S_\lambda \subseteq S_\mu$ dir.

İspat (*i*) Her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olduğunu ve (3.1) in sağlandığını varsayalım. Bu durumda $I_n \subset J_n$ ve böylece $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \in J_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

yazabiliriz ve bu nedenle her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için

$$\frac{1}{\mu_n} |\{k \in J_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \frac{\lambda_n}{\mu_n} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

elde ederiz, burada $J_n = [n - \mu_n + 1, n]$ dir.

Son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alarak ve (3.1) i kullanarak $x_k \to L\,(S_\mu) \Longrightarrow x_k \to L\,(S_\lambda)$ olduğunu böylece $S_\mu \subseteq S_\lambda$ olduğunu buluruz.

(*ii*) $(x_k) \in S_\lambda$ olsun ve (3.2) sağlansın $I_n \subset J_n$ olduğundan $\varepsilon > 0$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_n} |\{k \in J_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| &= \frac{1}{\mu_n} |\{n - \mu_n + 1 \leq k \leq n - \lambda_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \\
&\quad + \frac{1}{\mu_n} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \\
&\leq \frac{\mu_n - \lambda_n}{\mu_n} + \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \\
&\leq \left(1 - \frac{\lambda_n}{\mu_n}\right) + \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki birinci terim (3.2) den dolayı $\lim_n \frac{\lambda_n}{\mu_n} = 1$ olduğundan ve ikinci terim $x = (x_k) \in S_\lambda$ olduğundan $n \to \infty$ iken 0 a gider. Bu, $n \to \infty$ iken $\frac{1}{\mu_n} |\{k \in J_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \to 0$ olduğu ve böylece $x_k \to L\,(S_\lambda) \Longrightarrow x_k \to L\,(S_\mu)$ olduğu anlamına gelir. Bu nedenle $S_\lambda \subseteq S_\mu$ dir.

Teorem 3.3 ten aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.4 ([3]) $\lambda = (\lambda_n)$ ve $\mu = (\mu_n)$, Λ da her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olacak şekilde iki dizi olsun. Eğer (3.2) sağlanıyorsa $S_\lambda = S_\mu$ dir.

Teorem 3.3 de $\mu = (\mu_n) = (n)$ alarak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.5 ([3]) $\lambda = (\lambda_n) \in \Lambda$ olsun. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n} = 1$ ise $S_\lambda = S$ elde ederiz.

Teorem 3.6 ([3]) $\lambda = (\lambda_n)$, $\mu = (\mu_n) \in \Lambda$ olsun ve her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olduğunu varsayalım.

(i) (3.1) sağlanırsa $[V, \mu] \subseteq [V, \lambda]$ dır,

(ii) (3.2) sağlanırsa $l_\infty \cap [V, \lambda] \subseteq [V, \mu]$ dir,

(iii) (3.2) sağlanırsa $l_\infty \cap [V, \lambda] = l_\infty \cap [V, \mu]$ dir.

İspat (i) Her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olduğu varsayılsın. Bu durumda $I_n \subseteq J_n$ dir ve bundan dolayı her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için

$$\frac{1}{\mu_n} \sum_{k \in J_n} |x_k - L| \geq \frac{1}{\mu_n} \sum_{k \in I_n} |x_k - L|$$

yazabiliriz. Bu da

$$\frac{1}{\mu_n} \sum_{k \in J_n} |x_k - L| \geq \frac{\lambda_n}{\mu_n} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |x_k - L|$$

eşitsizliğini verir. Bu durumda son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alarak ve (3.1) i kullanarak $x_k \to L\,[V, \mu] \Longrightarrow x_k \to L\,[V, \lambda]$ elde ederiz. $x = (x_k) \in [V, \mu]$ keyfi bir dizi olduğundan $[V, \mu] \subseteq [V, \lambda]$ bulunur.

(ii) $x = (x_k) \in l_\infty \cap [V, \lambda]$ herhangi bir dizi olsun. $x_k \to L\,[V, \lambda]$ ve (3.2) nin geçerli olduğu varsayılsın. $x = (x_k) \in l_\infty$ olduğundan her k için $|x_k - L| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ vardır. Şimdi, $\lambda_n \leq \mu_n$ ve böylece $\frac{1}{\mu_n} \leq \frac{1}{\lambda_n}$ olduğundan ve her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için

$I_n \subset J_n$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_n}\sum_{k\in J_n}|x_k - L| &= \frac{1}{\mu_n}\sum_{k\in J_n - I_n}|x_k - L| + \frac{1}{\mu_n}\sum_{k\in I_n}|x_k - L| \\ &\leq \frac{\mu_n - \lambda_n}{\mu_n}M + \frac{1}{\mu_n}\sum_{k\in I_n}|x_k - L| \\ &\leq \left(1 - \frac{\lambda_n}{\mu_n}\right)M + \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}|x_k - L|\end{aligned}$$

yazabiliriz. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki birinci terim (3.2) gereğince $\lim_n \frac{\lambda_n}{\mu_n} = 1$ olduğundan ve ikinci terim $x_k \to L\,[V,\lambda]$ olması nedeniyle $n \to \infty$ için 0'a gider. Böylece $x_k \to L\,[V,\lambda] \Longrightarrow x_k \to L\,[V,\mu]$ elde ederiz. $x = (x_k) \in l_\infty \cap [V,\lambda]$ keyfi bir dizi olduğundan $l_\infty \cap [V,\lambda] \subseteq [V,\mu]$ bulunur.

(iii), (i) ve (ii) nin bir sonucudur.

Teorem 3.7 ([3]) Her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olmak üzere $\lambda, \mu \in \Lambda$ olsun.

(i) (3.1) geçerli ise

$$x_k \to L\,[V,\mu] \Longrightarrow x_k \to L\,(S_\lambda)$$

dır ve bazı $\lambda, \mu \in \Lambda$ için $[V,\mu] \subset S_\lambda$ kapsaması kesindir,

(ii) $(x_k) \in l_\infty$ ve $x_k \to L\,(S_\lambda)$ ise bu durumda, (3.2) geçerli olduğunda $x_k \to L\,[V,\mu]$ dir,

(iii) (3.2) geçerli ise $l_\infty \cap S_\lambda = l_\infty \cap [V,\mu]$ dir.

İspat (i) $\varepsilon > 0$ verilsin ve $x_k \to L\,[V,\mu]$ olsun. Şimdi her $\varepsilon > 0$ için

$$\sum_{k\in J_n}|x_k - L| \geq \sum_{k\in I_n}|x_k - L| \geq \sum_{\substack{k\in I_n \\ |x_k - L|\geq\varepsilon}}|x_k - L| \geq \varepsilon\,|\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

yazabiliriz ve böylece her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için

$$\frac{1}{\mu_n}\sum_{k\in J_n}|x_k - L| \geq \frac{\lambda_n}{\mu_n}\frac{1}{\lambda_n}\,|\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|\,\varepsilon$$

yazabiliriz.

Son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alarak ve (3.1) i kullanarak $x_k \to L\,[V,\mu]$ olduğunda $x_k \to L\,(S_\lambda)$ yı elde ederiz. $x = (x_k) \in [V,\mu]$ keyfi bir dizi olduğundan $[V,\mu] \subseteq S_\lambda$ elde ederiz. Bazı $\lambda, \mu \in \Lambda$ için $[V,\mu] \subset S_\lambda$ kapsamasının kesin olduğunu göstermek için, her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n = \frac{n+1}{2}$, $\mu_n = n$ alalım. Bu durumda $\lim\limits_n \frac{\lambda_n}{\mu_n} = \frac{1}{2} > 0$ ve buradan $[V, \mu] \subseteq S_\lambda$ dır. $x = (x_k)$

$$x_k = \begin{cases} \frac{1}{k}, & k \neq m^3 \\ \\ k, & k = m^3 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. Bu durumda her $k > k_\circ$ için $|x_k| < \varepsilon$ olacak şekilde $k_\circ \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi $n \to \infty$ iken

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \left|\{k \in I_n : |x_k| \geq \varepsilon\}\right| &\leq \frac{1}{\lambda_n}\left(k_\circ + \sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{\frac{n-1}{2}}\right) \\ &= \frac{2}{n+1}\left(k_\circ + \sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{\frac{n-1}{2}}\right) \to 0 \end{aligned}$$

olduğundan $x_k \to 0\,(S_\lambda)$ elde ederiz. Diğer taraftan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$$

eşitliğinin sağlandığını biliyoruz. Bu eşitliği gözönüne alarak, $\sqrt[3]{n} < [\sqrt[3]{n}] + 1$ ve böylece $\frac{1}{n} > \frac{1}{([\sqrt[3]{n}]+1)^3}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_n}\sum_{k \in J_n} |x_k| &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1 \\ k=m^3}}^{n} x_k + \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq m^3}}^{n} x_k > \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1 \\ k=m^3}}^{n} x_k = \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1 \\ k=m^3}}^{n} k \\ &= \frac{1}{n}\left(1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + \left[\sqrt[3]{n}\right]^3\right) \\ &= \frac{\left[\sqrt[3]{n}\right]^2\left(\left[\sqrt[3]{n}\right]+1\right)^2}{4n} > \frac{\left[\sqrt[3]{n}\right]^2\left(\left[\sqrt[3]{n}\right]+1\right)^2}{4\left(\left[\sqrt[3]{n}\right]+1\right)^3} \to \infty \;\; (n \to \infty) \end{aligned}$$

yazarız. Bunun için $x = (x_k) \notin [V, \mu]$. Bu nedenle $[V, \mu] \subset S_\lambda$ kapsaması kesindir.

(ii) $x_k \to L\,(S_\lambda)$ ve $x = (x_k) \in l_\infty$ olduğu varsayılsın. Bu durumda her k için $|x_k - L| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ vardır. $\frac{1}{\mu_n} \leq \frac{1}{\lambda_n}$ olduğundan $\forall\varepsilon > 0$ ve her

$n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_n}\sum_{k\in J_n}|x_k-L| &= \frac{1}{\mu_n}\sum_{k\in J_n-I_n}|x_k-L|+\frac{1}{\mu_n}\sum_{k\in I_n}|x_k-L| \\
&\leq \frac{\mu_n-\lambda_n}{\mu_n}M+\frac{1}{\mu_n}\sum_{k\in I_n}|x_k-L| \\
&\leq \left(1-\frac{\lambda_n}{\mu_n}\right)M+\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}|x_k-L| \\
&\leq \left(1-\frac{\lambda_n}{\mu_n}\right)M+\frac{1}{\lambda_n}\sum_{\substack{k\in I_n\\|x_k-L|\geq\varepsilon}}|x_k-L|+\frac{1}{\lambda_n}\sum_{\substack{k\in I_n\\|x_k-L|<\varepsilon}}|x_k-L| \\
&\leq \left(1-\frac{\lambda_n}{\mu_n}\right)M+\frac{M}{\lambda_n}\left|\{k\in I_n : |x_k-L|\geq\varepsilon\}\right|+\varepsilon
\end{aligned}$$

yazarız. (3.2) yi kullanarak $x_k \to L\,(S_\lambda)$ olduğunda $x_k \to L\,[V,\mu]$ elde ederiz. $x = (x_k) \in l_\infty \cap S_\lambda$ keyfi bir dizi olduğundan $l_\infty \cap S_\lambda \subseteq [V,\mu]$ olur.

(iii) nin ispatı (i) ve (ii) den açıktır.

Teorem 3.3 (i) ve Teorem 3.7 (i) den aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.8 ([3]) $\lim\limits_{n\to\infty}\inf\frac{\lambda_n}{\mu_n} > 0$ ise $S_\mu \cap [V,\mu] \subset S_\lambda$ dır.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{\mu_n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\inf\frac{\lambda_n}{\mu_n} = 1 > 0$ anlamına gelir, bu (3.2) $\Longrightarrow$ (3.1) demek olduğundan, Teorem 3.7 de her n için $\mu_n = n$ alırsak aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Sonuç 3.9 ([3], [11]) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{n} = 1$ ise, bu durumda
(i) $(x_k) \in l_\infty$ ve $x_k \to L\,(S_\lambda)$ ise $x_k \to L\,[C,1]$,
(ii) $x_k \to L\,[C,1]$ ise $x_k \to L\,(S_\lambda)$
dır.

Teorem 3.7 de her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için $\mu_n = \lambda_n$ alırsak Teorem 3.2 (i) ve (ii) yi elde ederiz. $\left(Not : \text{Bu durumda } \lim\limits_{n\to\infty}\inf\frac{\lambda_n}{\mu_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{\mu_n} = 1 > 0 \text{ ve böylece (3.1) ve (3.2) sağlanır}\right)$. Teorem 3.7 de her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için $\mu_n = \lambda_n = n$ alırsak Teorem 2.14 (i) de $p = 1$ ile Teorem 3.2 yi elde ederiz.

Uyarı $\lambda = (\lambda_n) \in \Lambda$ ve $0 < p < \infty$ olsun.

$$[V,\lambda,p] = \left\{x = (x_k) : \exists L,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}|x_k-L|^p = 0\right\}$$

tanımlansın. Bu durumda $[V,\lambda]$ nın yerine $[V,\lambda,p]$ ve $[V,\mu]$ nin yerine $[V,\mu,p]$ alırsak, Teorem 3.6 $[V,\lambda,p]$ ve $[V,\mu,p]$ için sağlanır.

Teorem 3.10 (x_k), $(y_k) \in S_\lambda$ ise $(x_k y_k) \in S_\lambda$ dır.

İspat Teorem 2.7 nin ispatına benzerdir.

Sonuç 3.11 $\lambda = (\lambda_n)$ ve $\mu = (\mu_n)$ Λ da her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olacak şekilde iki dizi olmak üzere $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} = 1$ olsun. Bu takdirde $x \in S_\lambda$ ve $y \in S_\mu$ ise $xy \in S_\mu$ dir.

İspat $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} = 1$ olsun. Sonuç 3.4 den $S_\lambda = S_\mu$ olur ve bu nedenle $x \in S_\lambda$ ise $x \in S_\mu$ elde edilir. Böylece Teorem 3.10 dan $xy \in S_\mu$ bulunur.

Tanım 3.12 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left|\{k \in I_n : \ |x_k| \geq B\}\right| = 0$ olacak şekilde bir $B > 0$ sayısı varsa (x_k) dizisine λ-istatistiksel sınırlıdır denir.

Teorem 3.13 $\lambda = (\lambda_n)$ ve $\mu = (\mu_n)$ Λ da her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olacak şekilde iki dizi olmak üzere $(x_k) \in S_\lambda$ ve $(y_k) \in S_\mu$ ise $(x_k y_k) \in S_\mu$ dir.

İspat $\lambda = (\lambda_n)$ ve $\mu = (\mu_n)$ Λ da her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olacak şekilde iki dizi olmak üzere $(x_k) \in S_\lambda$ ve $(y_k) \in S_\mu$ olsun. λ-istatistiksel yakınsak bir dizi aynı zamanda λ-istatistiksel sınırlı olduğundan (x_k) λ-istatistiksel sınırlıdır. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left|\{k \in I_n : \ |x_k| \geq B\}\right| &= 0 \\
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left|\left\{k \in I_n : \ |x_k - l_1| \geq \frac{\varepsilon}{B + |l_2|}\right\}\right| &= 0 \\
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mu_n} \left|\left\{k \in J_n : \ |y_k - l_2| \geq \frac{\varepsilon}{B + |l_2|}\right\}\right| &= 0
\end{aligned}$$

olacak şekilde $B > 0$ ve l_1, l_2 sayıları vardır. Şimdi

$$\begin{aligned}
\{k \in J_n : \ |x_k y_k - l_1 l_2| \geq \varepsilon\} \ \subseteq \ & \left\{k \in I_n : \ |x_k - l_1| \geq \frac{\varepsilon}{B + |l_2|}\right\} \\
& \cup \{k \in I_n : \ |x_k| \geq B\} \cup \left\{k \in J_n : \ |y_k - l_2| \geq \frac{\varepsilon}{B + |l_2|}\right\}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

kapsamasının geçerli olduğunu gösterelim. Bunun için

$$A \subseteq B \cup C \cup D \Longleftrightarrow B^c \cap C^c \cap D^c \subseteq A^c$$

denkliğinden yararlanarak (3.3) kapsaması yerine

$$\begin{aligned}&\left\{k \in I_n: \ |x_k - l_1| < \frac{\varepsilon}{B + |l_2|}\right\} \cap \{k \in I_n: \ |x_k| < B\} \\ &\cap \left\{k \in J_n: \ |y_k - l_2| < \frac{\varepsilon}{B + |l_2|}\right\} \subseteq \{k \in J_n: \ |x_k y_k - l_1 l_2| < \varepsilon\}\end{aligned} \tag{3.4}$$

kapsamasının geçerli olduğunu gösterelim: (3.4) kapsamasındaki arakesit kümesinden alacağımız ortak k'lar için yani $k \in I_n$ ler için ($\lambda_n \le \mu_n$ olduğundan $I_n \subseteq J_n$ olur ve $I_n \cap J_n = I_n$ dir)

$$|x_k - l_1| < \frac{\varepsilon}{B + |l_2|}, \ |x_k| < B \text{ ve } |y_k - l_2| < \frac{\varepsilon}{B + |l_2|}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu k'lar için

$$\begin{aligned}|x_k y_k - l_1 l_2| &= |x_k y_k - x_k l_2 + x_k l_2 - l_1 l_2| \le |x_k| \, |y_k - l_2| + |l_2| \, |x_k - l_1| \\ &< B \frac{\varepsilon}{B + |l_2|} + |l_2| \frac{\varepsilon}{B + |l_2|} = \varepsilon\end{aligned}$$

sağlanır. Bu da (3.4) kapsamasının dolayısıyla da (3.3) kapsamasının sağlanması demektir. Kümelerin eleman sayısı arasındaki

$$\begin{aligned}s(B \cup C \cup D) &= s(B) + s(C) + s(D) - s(B \cap C) - s(C \cap D) - s(B \cap D) \\ &+ s(B \cap C \cap D) \le s(B) + s(C) + s(D)\end{aligned}$$

bağıntısından yararlanarak

$$\begin{aligned}&|\{k \in J_n: \ |x_k y_k - l_1 l_2| \ge \varepsilon\}| \\ \le \ &\left|\left\{k \in I_n: \ |x_k - l_1| \ge \frac{\varepsilon}{B + |l_2|}\right\}\right| + |\{k \in I_n: \ |x_k| \ge B\}| \\ &+ \left|\left\{k \in J_n: \ |y_k - l_2| \ge \frac{\varepsilon}{B + |l_2|}\right\}\right|\end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mu_n} |\{k \in J_n: \ |x_k y_k - l_1 l_2| \ge \varepsilon\}| \\ \le \ &\frac{1}{\mu_n} \left|\left\{k \in I_n: \ |x_k - l_1| \ge \frac{\varepsilon}{B + |l_2|}\right\}\right| \\ &+ \frac{1}{\mu_n} |\{k \in I_n: \ |x_k| \ge B\}| + \frac{1}{\mu_n} \left|\left\{k \in J_n: \ |y_k - l_2| \ge \frac{\varepsilon}{B + |l_2|}\right\}\right| \\ \le \ &\frac{1}{\lambda_n} \left|\left\{k \in I_n: \ |x_k - l_1| \ge \frac{\varepsilon}{B + |l_2|}\right\}\right| \\ &+ \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n: \ |x_k| \ge B\}| + \frac{1}{\mu_n} \left|\left\{k \in J_n: \ |y_k - l_2| \ge \frac{\varepsilon}{B + |l_2|}\right\}\right|\end{aligned}$$

yazarız. $n \to \infty$ için limit alırsak, $(x_k) \in S_\lambda$, $(y_k) \in S_\mu$ ve (x_k) λ-istatistiksel sınırlı olduğundan sağ tarafın limiti 0 olur. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mu_n} \left|\{k \in J_n : \ |x_k y_k - l_1 l_2| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

olur. Böylece $(x_k y_k) \in S_\mu$ elde edilir.

Teorem 3.14 $\lambda = (\lambda_n)$ ve $\mu = (\mu_n)$ Λ da her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olacak şekilde iki dizi ve $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} = 1$ olsun. Eğer $(x_k) \in [V, \lambda] \cap l_\infty$ ve $(y_k) \in [V, \mu]$ ise $(x_k y_k) \in [V, \mu]$ dir.

İspat $(x_k) \in l_\infty$ olduğundan $|x_k| \leq M$ ve $|x_k - l_1| \leq K$ olacak şekilde M,$K \in \mathbb{R}^+$ vardır.

$$|x_k y_k - l_1 l_2| = |x_k y_k - x_k l_2 + x_k l_2 - l_1 l_2| \leq |x_k|\,|y_k - l_2| + |l_2|\,|x_k - l_1|$$

eşitsizliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_n}\sum_{k\in J_n} |x_k y_k - l_1 l_2| &\leq \frac{1}{\mu_n}\sum_{k\in J_n} |x_k|\,|y_k - l_2| + \frac{1}{\mu_n}\sum_{k\in J_n} |l_2|\,|x_k - l_1| \\
&= \frac{1}{\mu_n}\sum_{k\in J_n} |x_k|\,|y_k - l_2| + \frac{1}{\mu_n}\sum_{k\in J_n - I_n} |l_2|\,|x_k - l_1| + \frac{1}{\mu_n}\sum_{k\in I_n} |l_2|\,|x_k - l_1| \\
&\leq \frac{M}{\mu_n}\sum_{k\in J_n} |y_k - l_2| + \frac{\mu_n - \lambda_n}{\mu_n}\,|l_2|\,K + \frac{|l_2|}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} |x_k - l_1|
\end{aligned}$$

yazarız. $n \to \infty$ için limit alırsak eşitsizliğin sağ tarafı, $(x_k) \in [V, \lambda]$, $(y_k) \in [V, \mu]$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} = 1$ olduğundan 0 olur. Böylece $(x_k y_k) \in [V, \mu]$ bulunur.

4. α. DERECEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Tanım 4.1 ([2]) α, $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde herhangi bir reel sayı olsun. $\mathbb{N}$'in bir E alt kümesinin $\alpha - yoğunluğunu$

$$\delta_\alpha (E) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : k \in E\}|$$

mevcut limitiyle (sonlu ya da sonsuz) tanımlarız, burada $|\{k \leq n : k \in E\}|$ E'nin n'yi geçmeyen elemanlarının sayısını gösterir.

$x = (x_k)$, α-yoğunluğu sıfır olan bir küme dışında her k için x_k, $P(k)$ özelliğini sağlayacak şekilde bir dizi ise bu durumda "α ya göre hemen her k için" x_k $P(k)$ yı sağlar deriz ve bunu "h.h.k(α)" ile kısaltırız.

$\mathbb{N}$'in sonlu her alt kümesinin α-yoğunluğunun sıfır olduğu açıktır ve genel olarak $0 < \alpha < 1$ için $\delta_\alpha (E^c) = 1 - \delta_\alpha (E)$ eşitliği geçerli değildir; eşitlik ancak $\alpha = 1$ ise geçerlidir.

Herhangi bir kümenin α-yoğunluğu $\alpha = 1$ durumunda kümenin doğal yoğunluğuna indirgenir.

Lemma 4.2 ([2]) $E \subseteq \mathbb{N}$ olsun. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ise $\delta_\beta (E) \leq \delta_\alpha (E)$ dir.

İspat $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $n^\alpha \leq n^\beta$ ve böylece $\frac{1}{n^\beta} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ olduğundan

$$\frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : k \in E\}| \leq \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : k \in E\}|$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikten $\delta_\beta (E) \leq \delta_\alpha (E)$ elde ederiz.

$0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun. Bu durumda, Lemma 4.2 den E'nin α-yoğunluğu sıfır ise β-yoğunluğu da sıfır olur ve bir $0 < \alpha \leq 1$ için E'nin α-yoğunluğu sıfır ise doğal yoğunluğu da sıfır olur.

Tanım 4.3 ([2]) $x = (x_k) \in w$ ve $0 < \alpha \leq 1$ verilmiş olsun. (x_k) dizisine

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir l kompleks sayısı varsa α. dereceden istatistiksel yakınsaktır denir. x, l'ye α. dereceden istatistiksel yakınsaktır dediğimiz durumda her $\varepsilon > 0$ için h.h.k(α) $|x_k - l| < \varepsilon$ dur. Bu durumda $S^\alpha - \lim x_k = l$ yazarız. Tüm α. dereceden istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S^α ile gösterilir. Tüm α. dereceden istatistiksel sıfır dizilerinin kümesini göstermek için S_0^α yazarız. Herbir $0 < \alpha \leq 1$ için $S_0^\alpha \subset S^\alpha$ olduğu açıktır. $\alpha = 1$ için α. dereceden istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık ile aynıdır.

α. dereceden istatistiksel yakınsaklık $0 < \alpha \leq 1$ için iyi tanımlıdır ancak $\alpha > 1$ için iyi tanımlı değildir. Bunun için $x = (x_k)$ aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun:

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = 2n \\ & \qquad n = 1, 2, 3, ... \\ 0, & k \neq 2n \end{cases}$$

Bu durumda $\alpha > 1$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left|\{k \leq n : |x_k - 1| \geq \varepsilon\}\right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n^\alpha} = 0$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}\right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n^\alpha} = 0$$

dır. Böylece $x = (x_k)$ hem 1'e hem de 0'a α. dereceden istatistiksel yakınsak, yani $S^\alpha - \lim x_k = 1$ ve $S^\alpha - \lim x_k = 0$ olur. Ama bu mümkün değildir.

α. dereceden istatistiksel yakınsaklığın $\alpha > 1$ için iyi tanımlı olmadığına ilişkin bir diğer örnek

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = n^2 \\ & \qquad n = 1, 2, 3, ... \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases}$$

ile tanımlı 0'a istatistiksel yakınsak $x = (x_k)$ dizisidir. Halbuki $\alpha > 1$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left|\{k \leq n : |x_k - 1| \geq \varepsilon\}\right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^\alpha} = 0$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}\right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n - \sqrt{n}}{n^\alpha} = 0$$

olması nedeniyle bu dizi hem $0'$a ve hem de 1'e istatistiksel yakınsak olmaktadır. Bu ise mümkün değildir.

Teorem 4.4 ([2]) $0 < \alpha \leq 1$ ve $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ kompleks sayı dizileri olsun.

(i) $S^\alpha - \lim x_k = x_\circ$ ve $c \in \mathbb{C}$ ise $S^\alpha - \lim cx_k = cx_\circ$ dır.

(ii) $S^\alpha - \lim x_k = x_\circ$ ve $S^\alpha - \lim y_k = y_\circ$ ise $S^\alpha - \lim (x_k + y_k) = x_\circ + y_\circ$ dır.

İspat (i) $c=0$ durumu açıktır. $c\neq 0$ olduğunu varsayalım. (i) nin ispatı

$$\frac{1}{n^\alpha}\left|\{k\leq n:|cx_k-cx_\circ|\geq\varepsilon\}\right|\leq\frac{1}{n^\alpha}\left|\left\{k\leq n:|x_k-x_\circ|\geq\frac{\varepsilon}{|c|}\right\}\right|$$

eşitsizliğinden ve (ii) nin ispatı

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^\alpha}\left|\{k\leq n:|(x_k+y_k)-(x_\circ+y_\circ)|\geq\varepsilon\}\right| &\leq \frac{1}{n^\alpha}\left|\left\{k\leq n:|x_k-x_\circ|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|\\ &+\frac{1}{n^\alpha}\left|\left\{k\leq n:|y_k-y_\circ|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|\end{aligned}$$

eşitsizliğinden çıkar.

Genel olarak S^α nın S_λ dan farklı olduğuna dikkat edilmeli. $0<\alpha<1$ için $\lambda_n=n^\alpha$ alırsak $S^\alpha\subseteq S_\lambda$ dır. $\alpha=1$ olmak üzere $\lambda_n=n^\alpha$, yani $\lambda_n=n$ ise $S^\alpha=S_\lambda=S$ dir, ki bu $\alpha=1$ olmak üzere $\lambda_n=n^\alpha$ durumunda α. dereceden istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık ve λ-istatistiksel yakınsaklığın denk olmasıdır.

Yakınsak her dizinin α. dereceden istatistiksel yakınsak olduğunu yani herbir $0<\alpha\leq 1$ için $c\subset S^\alpha$ olduğunu görmek kolaydır. Ama tersi doğru değildir. Örneğin,

$$x_k=\begin{cases}1, & k=n^3\\ & \qquad n=1,2,3,...\\ 0, & k\neq n^3\end{cases}\tag{4.1}$$

ile tanımlı $x=(x_k)$ dizisi $\alpha>\frac{1}{3}$ için α. dereceden istatistiksel yakınsaktır ($S^\alpha-\lim x_k=0$), ama yakınsak değildir.

Tanım 4.5 ([2]) α, $0<\alpha\leq 1$ olacak şekilde herhangi bir reel sayı ve p pozitif bir reel sayı olsun. Bir $x=(x_k)$ dizisine,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n}|x_k-l|^p=0$$

olacak şekilde bir l kompleks sayısı varsa α. dereceden kuvvetli p-Cesàro toplanabilirdir denir. Bu durumda x, l'ye α. dereceden kuvvetli p-Cesàro toplanabilirdir deriz. $\alpha=1$ için α. dereceden kuvvetli p-Cesàro toplanabilirlik, p-Cesàro toplanabilirliğe indirgenir. Tüm α. dereceden kuvvetli p-Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi w_p^α ile gösterilir. $l=0$ durumunda $w_{\circ p}^\alpha$ yazarız.

Teorem 4.6 ([2],[1]) $0<\alpha\leq\beta\leq 1$ olsun. Bu durumda $S^\alpha\subseteq S^\beta$ dır. $\alpha<\beta$ için (en azından $\alpha<\frac{1}{k}<\beta$ olacak şekildeki bir $k\in N$ varsa) kapsama kesindir.

İspat $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ise, her $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{n^{\beta}} \left|\{k \leq n : |x_k - l| \geq \varepsilon\}\right| \leq \frac{1}{n^{\alpha}} \left|\{k \leq n : |x_k - l| \geq \varepsilon\}\right|$$

dır ve bu $S^{\alpha} \subseteq S^{\beta}$ olduğunu verir. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = n^2 \\ \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases} \qquad \textbf{(4.2)}$$

ile tanımlı $x = (x_k)$ dizisini gözönüne alalım. Bu durumda, $S^{\beta} - \lim x_k = 0$ yani $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ için $x \in S^{\beta}$ ama $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ için $x \notin S^{\alpha}$ dır.

Teorem 4.6 da $\beta = 1$ alırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.7 ([2]) Bir dizi $0 < \alpha \leq 1$ için l'ye α. dereceden istatistiksel yakınsak ise l'ye istatistiksel yakınsaktır, yani $S^{\alpha} \subseteq S$ dir ve kapsama kesindir.

Teorem 4.8 ([2]) $0 < \alpha < 1$ olsun ve $x = (x_k)$, $S^{\alpha} - \lim x_k = l$ olacak şekilde α. dereceden istatistiksel yakınsak bir dizi olsun. Bu durumda $x = (x_k)$ nın $\lim y_k = l$ olacak şekilde bir $y = (y_k)$ alt dizisi vardır.

Teorem 4.9 ([2]) $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve p pozitif bir reel sayı olsun. Bu durumda, $w_p^{\alpha} \subseteq w_p^{\beta}$ dır ve kapsama $\alpha < \beta$ olacak şekildeki α ve β lar için kesindir.

İspat $x = (x_k) \in w_p^{\alpha}$ olsun. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olmak üzere α ve β ve bir p pozitif sayısı verildiğinde

$$\frac{1}{n^{\beta}} \sum_{k=1}^{n} |x_k - l|^p \leq \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} |x_k - l|^p$$

yazabiliriz ve bu $w_p^{\alpha} \subseteq w_p^{\beta}$ olduğunu verir.

Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için (4.2) de tanımlı $x = (x_k)$ dizisini gözönüne alalım. Buna göre

$$\frac{1}{n^{\beta}} \sum_{k=1}^{n} |x_k - 0|^p \leq \frac{\sqrt{n}}{n^{\beta}} = \frac{1}{n^{\beta - \frac{1}{2}}}$$

dir. $n \to \infty$ iken $\frac{1}{n^{\beta-\frac{1}{2}}} \to 0$ olduğundan $w_p^{\beta} - \lim x_k = 0$, yani $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ için $x \in w_p^{\beta}$ dır, ama

$$\frac{\sqrt{n} - 1}{n^{\alpha}} \leq \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} |x_k - 0|^p$$

ve $n \to \infty$ iken $\frac{\sqrt{n}-1}{n^\alpha} \to \infty$ olduğundan $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ için $x \notin w_p^\alpha$ dır. Bu ispatı tamamlar.

Aşağıdaki sonuç Teorem 4.9 un bir sonucudur.

Sonuç 4.10 ([2]) $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve p pozitif bir reel sayı olsun. Bu durumda herbir $\alpha \in (0,1]$ ve $0 < p < \infty$ için $w_p^\alpha \subseteq w_p$ dir.

Teorem 4.11 ([2]) $0 < \alpha \leq 1$ ve $0 < p < q < \infty$ olsun. Bu durumda $w_q^\alpha \subset w_p^\alpha$ dır.

Bu teorem Maddox'a ait bir sonucun bir uzantısı olan Hölder eşitsizliğinin basit bir sonucudur ([10]).

Teorem 4.11 de $\alpha = 1$ alırsak Maddox'un $0 < p < q < \infty$ ise $w_q \subset w_p$ sonucunu elde ederiz.

Teorerm 4.12 ([2]) α ve β, $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olacak şekilde sabit reel sayılar ve $0 < p < \infty$ olsun. Eğer bir dizi l'ye α. dereceden kuvvetli p-Cesàro toplanabilir ise bu durumda bu dizi l'ye β. dereceden istatistiksel yakınsaktır.

İspat Herhangi bir $x = (x_k)$ dizisi ve $\varepsilon > 0$ için

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k - l|^p \geq |\{k \leq n : |x_k - l| \geq \varepsilon\}| \, \varepsilon^p$$

ve böylece

$$\frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} |x_k - l|^p \geq \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |x_k - l| \geq \varepsilon\}| \, \varepsilon^p \geq \frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : |x_k - l| \geq \varepsilon\}| \, \varepsilon^p$$

yazarız. Buradan $x = (x_k)$ l'ye α. dereceden kuvvetli p-Cesàro toplanabilir ise l'ye β. dereceden istatistiksel yakınsaktır sonucu çıkar.

Teorem 4.12 de $\beta = \alpha$ alırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.13 ([2]) α, $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde sabit bir reel sayı ve $0 < p < \infty$ olsun. Eğer bir dizi l'ye α. dereceden kuvvetli p-Cesàro toplanabilir ise, bu dizi l'ye α. dereceden istatistiksel yakınsaktır.

$\alpha = 1$ durumunda eğer bir dizi l'ye kuvvetli p-Cesàro toplanabilir ise l'ye istatistiksel yakınsaktır.

Uyarı Teorem 4.12 ün tersi genelde doğru değildir. Genel olarak $0 < \alpha < 1$ için sınırlı ve α. dereceden istatistiksel yakınsak bir dizinin α. dereceden kuvvetli p-Cesàro toplanabilir olmasının gerekmediğini görürüz.

$$x_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}}, & k \neq m^3 \\ & \qquad m = 1, 2, 3, ... \\ 1, & k = m^3 \end{cases}$$

ile tanımlı $x = (x_k)$ dizisi bu durum için bir örnektir. $x \in l_\infty$ ve herbir α $\left(\frac{1}{3} < \alpha \leq 1\right)$ için $x \in S^\alpha$ olduğu açıktır. İlk olarak her $n \geq 2$ pozitif tamsayısı için

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu hatırlayalım.

$H_n = \{k \leq n : k \neq m^3, m = 1, 2, 3, ...\}$ tanımlansın ve $p = 1$ alınsın.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p &= \sum_{k=1}^{n} |x_k| = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \in H_n}} |x_k| + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \notin H_n}} |x_k| \\ &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \in H_n}} \frac{1}{\sqrt{k}} + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \notin H_n}} 1 > \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \in H_n}} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n} \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} |x_k| > \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{n^\alpha} \sqrt{n} = \frac{1}{n^{\alpha - \frac{1}{2}}} \to \infty, \ \ (n \to \infty)$$

elde ederiz ve böylece $p = 1$ ise $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$ için $x \in S^\alpha - w_p^\alpha$ olur.

Sonuç 4.14 ([2]) $0 < \alpha \leq 1$ ve p bir pozitif reel sayı olsun. Bu durumda, $w_p^\alpha \subset S$ dir. $0 < \alpha < 1$ ise kapsama kesindir.

İspat Sonuç 4.13 ve Sonuç 4.7 den $w_p^\alpha \subset S$ elde ederiz. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için (4.1) de tanımlı $x = (x_k)$ dizisini gözönüne alalım. Bu durumda, $S-\lim x_k = 0$ olduğu açıktır, yani $x \in S$ dir ama $0 < \alpha < \frac{1}{3}$ ve $p = 1$ için $x \notin w_p^\alpha$ dır. Gerçekten,

$$\frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} |x_k - 0|^p = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} |x_k| \geq \frac{\sqrt[3]{n} - 1}{n^\alpha}$$

olduğundan $n \to \infty$ iken $\frac{\sqrt[3]{n}-1}{n^\alpha} \to \infty$ olup $0 < \alpha \leq \frac{1}{3}$ ve $p = 1$ için $x \notin w_p^\alpha$ dır. Sonuç olarak $0 < \alpha \leq \frac{1}{3}$ ve $p = 1$ için $x \in S - w_p^\alpha$ dır.

Sonuç 4.7, Sonuç 4.13 ve Teorem 2.14 (ii) den herbir α için $S^{\alpha} \cap l_{\infty} \subset w_p \subset S$ elde ederiz, burada $0 < \alpha \leq 1$ ve $0 < p < \infty$ dır.

5. İSTATİSTİKSEL LİMİT NOKTALARI

Tanım 5.1 ([7]) $x = (x_k)$ bir dizi olmak üzere bu dizinin değer kümesini göstermek için $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ yazacağız. $\left(x_{k(j)}\right)$, x'in bir alt dizisi ve $K = \{k(j) : j \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $\left(x_{k(j)}\right)$ yerine $\{x\}_K$ yazacağız. $\delta(K) = 0$ olması durumunda $\{x\}_K$ ya *sıfır yoğunluklu bir alt dizi* ya da *ince bir alt dizi* denir. Diğer taraftan K sıfır yoğunluğa sahip değilse $\{x\}_K$ ya x'in *ince olmayan bir alt dizisi* denir.

$\delta(K)$ pozitif bir sayı ise ya da K doğal yoğunluğa sahip değilse $\{x\}_K$'nın x'in ince olmayan bir alt dizisi olduğuna dikkat edilmelidir.

Tanım 5.2 ([7]) Bir $x = (x_k)$ sayı dizisinin bir υ sayısına yakınsayan, ince olmayan bir alt dizisi varsa υ sayısına x dizisinin bir *istatistiksel limit noktası* denir.

Her x sayı dizisi için Λ_x ile x'in istatistiksel limit noktalarının kümesini ve L_x ile x'in (klasik) limit noktalarının kümesini gösterelim.

Örnek 5.3

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = n^2 \\ & \qquad n = 1, 2, 3, ... \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases}$$

olsun. Bu durumda $L_x = \{0, 1\}$, $\Lambda_x = \{0\}$ dır.

Her x dizisi için $\Lambda_x \subseteq L_x$ olduğu açıktır. Λ_x ve L_x in çok farklı olabileceğini göstermek için $\Lambda_x = \emptyset$ iken $L_x = \mathbb{R}$ olan bir x dizisi verelim.

Örnek 5.4 $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$, değer kümesi tüm rasyonel sayılar olan bir dizi olsun ve $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} r_n, & k = n^2 \\ & \qquad n = 1, 2, 3, ... \\ k, & k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$K := \{k = n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $\delta(K) = 0$ olduğundan $\Lambda_x = \emptyset$ dır. Fakat $\{r_k : k \in \mathbb{N}\}$ kümesi $\mathbb{R}$'de yoğun olduğundan $L_x = \mathbb{R}$ bulunur.

Tanım 5.5 ([7]) Her $\varepsilon > 0$ için $\{k \in \mathbb{N} : \ |x_k - \gamma| < \varepsilon\}$ kümesi sıfır yoğunluğa sahip değilse, γ sayısına x dizisinin bir *istatistiksel değme noktası* denir.

Verilen bir x dizisi için, x'in tüm istatistiksel değme noktalarının kümesini Γ_x ile gösterelim. Her x dizisi için $\Gamma_x \subseteq L_x$ olduğu açıktır.

Önerme 5.6 ([7]) Herhangi bir x sayı dizisi için $\Lambda_x \subseteq \Gamma_x$ dir.

İspat $\upsilon \in \Lambda_x$ olsun. Bu durumda

$$\lim_j x_{k(j)} = \upsilon \text{ ve } \lim_n \sup \frac{1}{n} \left|\{k(j) \leq n : \ j \in \mathbb{N}\}\right| = d > 0$$

olacak şekilde doğal sayıların bir $\{k(j)\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi vardır.

$\lim_j x_{k(j)} = \upsilon$ olduğundan, $\left\{j : \ \left|x_{k(j)} - \upsilon\right| \geq \varepsilon\right\}$ kümesi sonlu bir kümedir, böylece

$$\{k \in \mathbb{N} : \ |x_k - \upsilon| < \varepsilon\} \supseteq \{k(j) : \ j \in \mathbb{N}\} \setminus \{sonlu\ k\ddot{u}me\}$$

dir. Buradan, sonsuz çokluktaki n ler için

$$\frac{1}{n}\left|\{k \leq n : \ |x_k - \upsilon| < \varepsilon\}\right| \geq \frac{1}{n}\left|\{k(j) : \ j \in \mathbb{N}\}\right| - \frac{1}{n}O(1) \geq \frac{d}{2}$$

olur. Böylece

$$\delta\left(\{k \in \mathbb{N} : \ |x_k - \upsilon| < \varepsilon\}\right) \neq 0$$

bulunur, bu da $\upsilon \in \Gamma_x$ dir.

Sıradan limit noktaları ile ilgili deneyimlerimiz bizi Λ_x ve Γ_x in eşdeğer olduğu kabulüne götürse de aşağıdaki örnek bunun her zaman böyle olmadığını gösterir.

Örnek 5.7 $x = (x_k)$ dizisi, $k = 2^{p-1}(2q+1)$ (p ve q doğal sayılar ve $q \geq 0$) olmak üzere

$$x_k = \frac{1}{p}$$

ile tanımlansın.

Herbir p için $\delta\left(\left\{k : \ x_k = \frac{1}{p}\right\}\right) = 2^{-p}$ yani $\left|\left\{k : \ x_k = \frac{1}{p}\right\}\right| = n2^{-p}$ olduğunu gösterelim. $x = (x_k)$ dizisini

$$(x_k) = (1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{5}, 1, \ldots)$$

şeklinde açık olarak yazarsak

$$\begin{aligned}
p &= 1 \text{ için } \left|\{k \leq n : \; x_k = 1\}\right| = \frac{n}{2} \\
p &= 2 \text{ için } \left|\left\{k \leq n : \; x_k = \frac{1}{2}\right\}\right| = \frac{n}{4} \\
p &= 3 \text{ için } \left|\left\{k \leq n : \; x_k = \frac{1}{3}\right\}\right| = \frac{n}{8} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

olduğunu ve sonuç olarak herbir p için $\left|\left\{k : \; x_k = \frac{1}{p}\right\}\right| = n2^{-p}$ olduğunu görürüz.

Herbir p için

$$\delta\left(\left\{k : \; x_k = \frac{1}{p}\right\}\right) = 2^{-p} > 0$$

olduğundan $\frac{1}{p} \in \Lambda_x$ dir.

Şimdi $\delta\left(\left\{k : 0 < \; x_k < \frac{1}{p}\right\}\right) = 2^{-p}$ olduğunu gösterelim:

$p = 1$ için $0 < x_k < 1$ aralığındaki x_k lar $x_k \neq 1$ olanlardır, dolayısıyla

$$\left|\{k : 0 < \; x_k < 1\}\right| = n - n2^{-1} = n2^{-1}$$

dir.

$p = 2$ için $0 < x_k < \frac{1}{2}$ aralığındaki x_k lar $x_k \neq 1$ ve $x_k \neq \frac{1}{2}$olanlardır, dolayısıyla

$$\left|\left\{k : 0 < \; x_k < \frac{1}{2}\right\}\right| = n - \left(n2^{-1} + n2^{-2}\right) = n2^{-2}$$

dir.

$p = 3$ için $0 < x_k < \frac{1}{3}$ aralığındaki x_k lar $x_k \neq 1$, $x_k \neq \frac{1}{2}$ ve $x_k \neq \frac{1}{3}$ olanlardır, dolayısıyla

$$\left|\left\{k : 0 < \; x_k < \frac{1}{3}\right\}\right| = n - \left(n2^{-1} + n2^{-2} + n2^{-3}\right) = n2^{-3}$$

dir. Benzer şekilde devam edilerek herbir p için $\left|\left\{k : 0 < \; x_k < \frac{1}{p}\right\}\right| = n2^{-p}$ bulunur. Böylece $0 \in \Gamma_x$ dir ve $\Gamma_x = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{p}\right\}_{p=1}^{\infty}$ elde ederiz.

$0 \notin \Lambda_x$ olduğunu iddia ediyoruz. Bunun için $\{x\}_K$, sıfır limite sahip bir dizi iken $\delta(K) = 0$ olduğunu gösterelim. Bunun için de önce herbir p için $\left|\left\{k \in K_n : \; x_k \geq \frac{1}{p}\right\}\right| = n2^{-p}$ olduğunu gösterelim:

$p = 1$ için $x_k \geq 1$ şartını sağlayan x_k lar sadece $x_k = 1$ olanlardır, dolayısıyla

$$\left|\{k \in K_n : \; x_k \geq 1\}\right| = n2^{-1}$$

dir.

$p=2$ için $x_k \geq \frac{1}{2}$ şartını sağlayan x_k lar $x_k=\frac{1}{2}$ ve $x_k=1$ olanlardır, dolayısıyla

$$\left|\left\{k \in K_n: \ x_k \geq \frac{1}{2}\right\}\right| = n2^{-1}+n2^{-2}$$

dir.

$p=3$ için $x_k \geq \frac{1}{3}$ şartını sağlayan x_k lar $x_k=\frac{1}{3}$, $x_k=\frac{1}{2}$ ve $x_k=1$ olanlardır, dolayısıyla

$$\left|\left\{k \in K_n: \ x_k \geq \frac{1}{3}\right\}\right| = n2^{-1}+n2^{-2}+n2^{-3}$$

dir. Benzer şekilde devam edilerek herbir p için $\left|\left\{k \in K_n: \ x_k \geq \frac{1}{p}\right\}\right| = n2^{-p}$ bulunur. Böylece herbir p için

$$\begin{aligned} |K_n| &= \left|\left\{k \in K_n: \ x_k \geq \frac{1}{p}\right\}\right| + \left|\left\{k \in K_n: \ x_k < \frac{1}{p}\right\}\right| \\ &\leq n2^{-p}+O(1) \end{aligned}$$

olur. Buradan $\delta(K) \leq 2^{-p}$ olur ve p keyfi olduğundan $\delta(K)=0$ bulunur.

Sonuç 5.8 ([17]) $S-\lim x_k = \upsilon$ ise $\Lambda_x=\Gamma_x=\{\upsilon\}$ dır.

İspat Önce $\Lambda_x=\Gamma_x$ olduğunu gösterelim. Bunun için bir $L\in\Lambda_x$ve bir $a\in\Gamma_x$ alalım ve $L\neq a$ olduğunu kabul edelim. $\varepsilon < \left|\frac{a-L}{2}\right|$ seçerek

$$\{k\in\mathbb{N}: \ |x_k-L|\geq\varepsilon\} \supseteq \{k\in\mathbb{N}: \ |x_k-a|<\varepsilon\}$$

kapsamasını yazabiliriz. Buradan yoğunluğa geçersek

$$\delta(\{k\in\mathbb{N}: \ |x_k-L|\geq\varepsilon\}) \geq \delta(\{k\in\mathbb{N}: \ |x_k-a|<\varepsilon\}) \qquad \textbf{(5.1)}$$

elde ederiz. (x_k) dizisi istatistiksel yakınsak olduğundan

$$\delta(\{k\in\mathbb{N}: \ |x_k-L|\geq\varepsilon\})=0$$

dır ve (5.1) den

$$\delta(\{k\in\mathbb{N}: \ |x_k-a|<\varepsilon\})=0$$

bulunur. Bu ise a'nın istatistiksel değme noktası olmasıyla çelişir. O halde $L=a$ olmak zorundadır. L ve a keyfi olduğundan $\Lambda_x=\Gamma_x=\{L\}$ olur.

$S-\lim x_k = \upsilon$ olduğundan

$$\delta\left(\{k \in \mathbb{N} : \ |x_k - \upsilon| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

dır. Buradan

$$\delta\left(\{k \in \mathbb{N} : \ |x_k - \upsilon| < \varepsilon\}\right) \neq 0$$

dır. Bu ise $\upsilon \in \Gamma_x$ olmasıdır. Böylece $\Lambda_x = \Gamma_x = \{\upsilon\}$ bulunur.

Bu sonucun tersi doğru değildir, yani $\Lambda_x = \Gamma_x = \{\upsilon\}$ olması $S-\lim x_k = \upsilon$ olmasını gerektirmez. Örneğin $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \left[1 + (-1)^k\right] k$$

olacak şekilde alınırsa $\Lambda_x = \Gamma_x = \{0\}$ dır, fakat (x_k) dizisi istatistiksel yakınsak değildir.

Örnek 5.9 $x = \left(0, 0, 1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1, \ldots\right)$ dizisi verilsin. Bu dizi $[0,1]$ aralığında düzgün dağılımlıdır, böylece $L_x = [0,1]$ dir ve aynı zamanda herhengi bir d uzunluklu alt aralıkta x_k'ların yoğunluğu aralığın boyuna eşittir. Ayrıca $[0,1]$ deki her γ için

$$\delta\left(\{k \in \mathbb{N} : \ x_k \in (\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon)\}\right) \geq \varepsilon > 0$$

dır. Buradan $\Gamma_x = [0,1]$ dir.

Diğer taraftan $\upsilon \in [0,1]$ ve $\{x\}_K$, υ'ye yakınsayan bir alt dizi ise, bu durumda $\delta(K) = 0$ olduğunu iddia ediyoruz. Bu iddiayı ispatlamak için, $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. Her n için

$$\begin{aligned} |K_n| &= |\{k \in K_n : \ |x_k - \upsilon| < \varepsilon\}| + |\{k \in K_n : \ |x_k - \upsilon| \geq \varepsilon\}| \\ &\leq 2\varepsilon n + O(1) \end{aligned}$$

dir. Buradan $\delta\left(\{k(j)\}\right) \leq 2\varepsilon$ ve ε keyfi olduğundan $\delta\left(\{k(j)\}\right) = 0$ elde ederiz. Böylece $\Lambda_x = \emptyset$ dir.

Örnek 5.7'den Λ_x'in kapalı bir nokta kümesi olması gerekmediğini görürüz. Buna rağmen aşağıdaki önerme Γ_x'in L_x gibi daima kapalı bir nokta kümesi olduğunu ifade eder.

Önerme 5.10 **(**[7]**)** Her $x = (x_k)$ sayı dizisi için, x'in istatistiksel değme noktalarının Γ_x kümesi kapalı bir nokta kümesidir.

İspat p, Γ_x'in bir yığılma noktası olsun. Bu durumda $\varepsilon > 0$ için Γ_x, $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ aralığındaki bazı γ noktalarını içerir. $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ açık aralığı aynı zamanda bir açık küme olduğundan

$$\left(\gamma - \varepsilon', \gamma + \varepsilon'\right) \subseteq (p - \varepsilon, p + \varepsilon) \tag{5.2}$$

olacak şekilde bir $\varepsilon' > 0$ seçilebilir. $\gamma \in \Gamma_x$ olduğundan $\delta\left(\left\{k: \ x_k \in \left(\gamma - \varepsilon', \gamma + \varepsilon'\right)\right\}\right) \neq 0$ dır ve (5.2) kapsamasından dolayı $\delta\left(\{k: \ x_k \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)\}\right) \neq 0$ dır. Bu da $p \in \Gamma_x$ olduğunu verir. Böylece Γ_x bütün yığılma noktalarını içerdiğinden kapalı bir kümedir.

Teorem 5.11 **(**[7]**)** $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$, hemen her k için $x_k = y_k$ olan diziler ise bu durumda $\Lambda_x = \Lambda_y$ ve $\Gamma_x = \Gamma_y$ dir.

İspat $\delta\left(\{k: \ x_k \neq y_k\}\right) = 0$ varsayılsın ve $\upsilon \in \Lambda_x$ olsun, yani $\{x\}_K$, x'in υ'ye yakınsayan, ince olmayan bir alt dizisi olsun. $\delta\left(\{k: k \in K, \ x_k \neq y_k\}\right) = 0$ olduğundan, $\{k: k \in K$ ve $x_k = y_k\}$ kümesinin sıfır yoğunluğa sahip olmadığı sonucu çıkar. Üstelik bu küme $\{y\}_K$ nın υ'ye yakınsayan, ince olmayan bir $\{y\}_{K'}$ alt dizisini verir. Buradan $\upsilon \in \Lambda_y$ ve $\Lambda_x \subseteq \Lambda_y$ bulunur. Simetrik olarak $\Lambda_y \subseteq \Lambda_x$ olduğunu görürüz, bu nedenle $\Lambda_x = \Lambda_y$ dir.

Şimdi de $\Gamma_x = \Gamma_y$ olduğunu gösterelim: $\gamma \in \Gamma_x$ olsun. $\delta\left(\{k \in \mathbb{N}: \ x_k \neq y_k\}\right) = 0$ olduğundan $\delta\left(\{k \in \mathbb{N}: \ x_k = y_k\}\right) \neq 0$ dır. $K := \{k \in \mathbb{N}: \ x_k = y_k\}$ diyelim. Her $\varepsilon > 0$ için

$\delta\left(\{k \in \mathbb{N}: \ |x_k - \gamma| < \varepsilon\}\right) \neq 0$ olduğundan $\delta\left(\{k \in K: \ |y_k - \gamma| < \varepsilon\}\right) \neq 0$ elde edilir.

$$\{k \in K: \ |y_k - \gamma| < \varepsilon\} \subseteq \{k \in \mathbb{N}: \ |y_k - \gamma| < \varepsilon\}$$

olduğundan $\delta\left(\{k \in \mathbb{N}: \ |y_k - \gamma| < \varepsilon\}\right) \neq 0$ olur, bu da $\gamma \in \Gamma_y$ dir. Böylece $\Gamma_x \subseteq \Gamma_y$ elde edilir. Benzer şekilde $\Gamma_y \subseteq \Gamma_x$ bulunur ve sonuç olarak $\Gamma_x = \Gamma_y$ elde edilir.

Teorem 5.12 **(**[7]**)** x bir sayı dizisi olmak üzere, h.h.k için $x_k = y_k$ ve $L_y = \Gamma_x$ olacak şekilde bir y dizisi vardır; üstelik y'nin değer kümesi, x'in değer kümesinin bir alt kümesidir.

Önerme 5.13 ([7]) $x = (x_k)$ bir sayı dizisi ve $M := \{k \in \mathbb{N}: \ x_k \leq x_{k+1}\}$ olsun. $\delta(M) = 1$ ve x, M'de sınırlı ise x dizisi istatistiksel yakınsaktır.

İspat $\{x\}_M$, x sayı dizisinin monoton alt dizisi olmak üzere, $\delta(M) = 1$ ve x, M'de sınırlı olsun. $\{x\}_M = y$ alalım. $\delta(M) = 1$ olduğundan h.h.k için $x_k = y_k$ olur. x, M'de sınırlı olduğundan, y sınırlı bir dizidir. $\{x\}_M$, M'de monoton artan olduğundan y monotondur. Bu durumda Monoton Yakınsaklık Teoremi'nden y yakınsaktır. O halde h.h.k için $x_k = y_k$ ve y yakınsak olduğundan Teorem 2.10 dan x dizisi istatistiksel yakınsaktır.

Not: Bu Önermenin $M := \{k \in \mathbb{N} : \; x_k \geq x_{k+1}\}$ olması halinde de geçerli olacağı açıktır.

Teorem 5.14 ([7]) $x = (x_k)$ sınırlı ince olmayan bir alt diziye sahip bir sayı dizisi ise x, bir istatistiksel değme noktasına sahiptir.

İspat Bir $x = (x_k)$ sayı dizisi, sınırlı ve ince olmayan bir alt diziye sahip olsun. Teorem 5.12 den $L_y = \Gamma_x$ ve $\delta(\{k \in \mathbb{N} : \; y_k \neq x_k\}) = 0$ olacak şekilde bir y dizisi vardır. Bu durumda y, sınırlı ve ince olmayan bir alt diziye sahiptir, böylece Bolzano-Weierstrass Teoremi'nden $L_y \neq \emptyset$ dir, buradan $\Gamma_x \neq \emptyset$ dir.

Sonuç 5.15 ([7]) $x = (x_k)$ sınırlı bir sayı dizisi ise, x bir istatistiksel değme noktasına sahiptir.

Aşağıdaki teorem Heine-Borel Örtü Teoremi'nin istatistiksel bir benzeridir. x sınırlı bir sayı dizisi olmak üzere $\overline{X}$, $\{x_k : \; k \in \mathbb{N}\} \cup L_x$ kompakt kümesini göstersin. Heine-Borel Teoremi'nin dizisel bir versiyonu bize, $\{J_n\}$, $\overline{X}$ yi örten açık kümelerin bir kolleksiyonu ise, $\{J_n\}$ in, $\overline{X}$ yi örten sonlu bir alt kolleksiyonunun var olduğunu söyler. Bu sonucun istatistiksel bir benzerini oluşturmak için, Γ_x ile L_x in yerini değiştirelim ve x dizisinin istatistiksel kapanışı dediğimiz $X := \{x_k : \; k \in \mathbb{N}\} \cup \Gamma_x$ kümesi tanımlansın. X in kapalı bir küme olması gerekmez. Gerçekten X kapalı bir küme olsaydı

$$X = \{x_k : \; k \in \mathbb{N}\} \cup L_x = \overline{X}$$

olurdu. Bu ise $L_x = \Gamma_x$ olmasını gerektirirdi.

Teorem 5.16 ([7]) $x = (x_k)$ sınırlı bir sayı dizisi ise, $\{x_k : \; k \in \mathbb{N} \backslash K\} \cup \Gamma_x$ kompakt bir küme olacak şekilde ince bir $\{x\}_K$ alt dizisine sahiptir.

İspat Teorem 5.12 yi kullanarak, $K = \{k \in \mathbb{N} : \; x_k \neq y_k\}$ olmak üzere $L_y = \Gamma_x$, $\{y_k : \; k \in \mathbb{N}\} \subseteq \{x_k : \; k \in \mathbb{N}\}$ ve $\delta(K) = 0$ olacak şekilde sınırlı bir $y = (y_k)$ dizisi seçebiliriz. Bu durumda

$$\{x_k : \ k \in \mathbb{N}\backslash K\} \cup \Gamma_x = \{y_k : \ k \in \mathbb{N}\} \cup L_y$$

elde edilir ve y sınırlı bir dizi olduğundan Heine-Borel Teoremi'ne göre eşitliğin sağ tarafı kompakttır. Bu da $\{x_k : \ \text{n } k \in \mathbb{N}\backslash K\} \cup \Gamma_x$ kümesinin kompakt olduğunu verir.

Uyarı Teorem 5.16 daki kompakt küme için Γ_x in yerine Λ_x i kullanamayacağımıza dikkat etmeliyiz. Örnek 5.7 de, $\Lambda_x = \left\{\frac{1}{p} : p \in \mathbb{N}\right\}$ ve $\mathbb{N}$'deki her p için $\delta\left(\left\{k \in \mathbb{N} : \ x_k = \frac{1}{p}\right\}\right) = 2^{-p}$ dir. $\{x\}_K$ herhangi bir ince alt dizi ise bu durumda her p için $\delta\left(\left\{k \in \mathbb{N}\backslash K : \ x_k = \frac{1}{p}\right\}\right) = 2^{-p}$ dir ve üstelik $\{x_k : k \in \mathbb{N}\backslash K\}$ hala bir limit noktası olarak sıfıra sahiptir. Dolayısıyla $\{x_k : \ k \in \mathbb{N}\backslash K\} \cup \Lambda_x$ kümesi kompakt değildir.

6. İSTATİSTİKSEL ÜST LİMİT ve ALT LİMİT

$x = (x_k)$ bir reel sayı dizisi olmak üzere,

$$B_x = \{b \in \mathbb{R} : \ \delta(\{k : \ x_k > b\}) \neq 0\}$$

ve

$$A_x = \{a \in \mathbb{R} : \ \delta(\{k : \ x_k < a\}) \neq 0\}$$

olsun.

Tanım 6.1 ([8]) $x = (x_k)$ bir reel sayı dizisi olmak üzere, x'in *istatistiksel üst ve alt limitleri* sırasıyla

$$st - \limsup x := \begin{cases} \sup B_x, & B_x \neq \emptyset \\ \\ -\infty, & B_x = \emptyset \end{cases}$$

$$st - \liminf x := \begin{cases} \inf A_x, & A_x \neq \emptyset \\ \\ +\infty, & A_x = \emptyset \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 6.2. n ve m birer doğal sayı olmak üzere $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} k, & k = m^2 \ \text{ ve } \ k = 2n \\ 2, & k = m^2 \ \text{ ve } \ k = 2n+1 \\ 1, & k \neq m^2 \ \text{ ve } \ k = 2n \\ 0, & k \neq m^2 \ \text{ ve } \ k = 2n+1 \end{cases}$$

ile tanımlansın.

x dizisi sınırsız olmasına rağmen istatistiksel sınırlıdır. Çünkü bu dizi sadece çift tamkare indisli terimler için sınırsız ve bu indis kümesinin yoğunluğu sıfırdır. Bu durumda $B_x = (-\infty, 1)$ ve $A_x = (0, \infty)$ dır ve böylece $st - \limsup x = 1$ ve $st - \liminf x = 0$ dır. Ayrıca x dizisi istatistiksel yakınsak değildir. Çünkü indislerinin kümesinin yoğunluğu sıfırdan farklı olan ve 0'a ve 1'e yakınsayan iki ayrı alt dizisi vardır. Ayrıca x'in istatistiksel değme noktalarının kümesinin $\Gamma_x = \{0, 1\}$ olduğuna ve $st-\liminf x$ bu kümenin en küçük elemanı iken, $st-\limsup x$ in bu kümenin en büyük elemanı olduğuna dikkat edelim. Bu gözlem, en küçük üst sınır ve en büyük alt sınır tartışmasıyla kanıtlanabilen aşağıdaki teoremin temel düşüncesini önermektedir.

Teorem 6.3 ([8]) $\beta = st-\limsup x$ sonlu ise her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\left(\{k:\ x_k > \beta-\varepsilon\}\right) \neq 0 \text{ ve } \delta\left(\{k:\ x_k > \beta+\varepsilon\}\right) = 0 \tag{6.1}$$

dır. Tersine (6.1) geçerli ise her $\varepsilon > 0$ için $\beta = st-\limsup x$ dir.

İspat Tanım 6.1 den β sonlu olduğuna göre, $B_x = \{b \in \mathbb{R}:\ \delta\left(\{k:\ x_k > b\}\right) \neq 0\}$ olmak üzere $\beta = \sup B_x$ dir. Bu durumda her $b \in B_x$ için $b \leq \beta$ ve her $\varepsilon > 0$ için $b > \beta-\varepsilon$ olacak şekilde bir $b \in B_x$ vardır.

$$\{k:\ x_k > b\} \subseteq \{k:\ x_k > \beta-\varepsilon\}$$

olduğundan

$$\delta\left(\{k:\ x_k > b\}\right) \leq \delta\left(\{k:\ x_k > \beta-\varepsilon\}\right)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte sol taraf sıfırdan farklı olduğundan sağ taraf da sıfırdan farklıdır.

$b \leq \beta$ ise her $\varepsilon > 0$ için $b+\varepsilon \leq \beta+\varepsilon$ olduğundan,

$$\{k:\ x_k > b+\varepsilon\} \supseteq \{k:\ x_k > \beta+\varepsilon\}$$

olur. Ayrıca $\beta = \sup B_x$ ve $b \in B_x$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $b+\varepsilon \notin B_x$ elde edilir. Bu durumda,

$$\delta\left(\{k:\ x_k > b+\varepsilon\}\right) \geq \delta\left(\{k:\ x_k > \beta+\varepsilon\}\right)$$

eşitsizliğinde sol taraf sıfıra eşit olduğundan sağ taraf da sıfıra eşittir.

Tersine (6.1) gerçeklensin. $\delta\left(\{k:\ x_k > \beta-\varepsilon\}\right) \neq 0$ olduğundan $\beta-\varepsilon \in B_x$ dir, yani $B_x \neq \emptyset$ dir. $\sup B_x = \beta$ olduğunu yani

$$\begin{aligned} &1)\ \forall b \in B_x \text{ için } b \leq \beta \\ &2)\ \forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists b_\varepsilon \in B_x \ni \beta-\varepsilon < b_\varepsilon \end{aligned}$$

koşullarının sağlandığını gösterelim.

$\exists b \in B_x$ için $b > \beta$ olduğunu kabul edelim. (6.1) den $\forall \varepsilon > 0$ için $\delta(\{k: \ x_k > \beta + \varepsilon\})$ $= 0$ dır, dolayısıyla $b > \beta$ için de $\delta(\{k: \ x_k > b\}) = 0$ olur. Oysa $b \in B_x$ olduğundan $\delta(\{k: \ x_k > b\}) \neq 0$ dır. Bu nedenle $\forall b \in B_x$ için $b \leq \beta$ olmak zorundadır.

$\forall \varepsilon > 0$ için $\beta - \varepsilon \in B_x$ olduğundan $b_\varepsilon = \beta - \frac{\varepsilon}{2}$ seçebiliriz. (6.1) den $b_\varepsilon \in B_x$ olur. Böylece 2. koşul da sağlanmış olur.

Teorem 6.4 ([8]) $\alpha = st - \liminf x$ sonlu ise her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{k: \ x_k < \alpha + \varepsilon\}) \neq 0 \text{ ve } \delta(\{k: \ x_k < \alpha - \varepsilon\}) = 0 \tag{6.2}$$

dir. Tersine, her $\varepsilon > 0$ için (6.2) geçerli ise $\alpha = st - \liminf x$ olur.

İspat $\alpha = st - \liminf x$ sonlu olsun. Tanım 6.1 den α sonlu olduğundan

$$A_x = \{a \in \mathbb{R}: \ \delta(\{k: \ x_k < a\}) \neq 0\}$$

olmak üzere $\alpha = \inf A_x$ dir. Bu durumda her $a \in A_x$ için $\alpha \leq a$ dır ve her $\varepsilon > 0$ için $a < \alpha + \varepsilon$ olacak şekilde bir $a \in A_x$ vardır. Ayrıca

$$\{k: \ x_k < a\} \subseteq \{k: \ x_k < \alpha + \varepsilon\}$$

olduğundan

$$\delta(\{k: \ x_k < a\}) \leq \delta(\{k: \ x_k < \alpha + \varepsilon\})$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte sol taraf sıfırdan farklı olduğundan sağ taraf da sıfırdan farklıdır.

$a \geq \alpha$ ise her $\varepsilon > 0$ için $a - \varepsilon \geq \alpha - \varepsilon$ olduğundan,

$$\{k: \ x_k < a - \varepsilon\} \supseteq \{k: \ x_k < \alpha - \varepsilon\}$$

bulunur. Ayrıca $\alpha = \inf A_x$ ve $a \in A_x$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $a - \varepsilon \notin A_x$ elde edilir. Bu durumda

$$\delta(\{k: \ x_k < a - \varepsilon\}) \geq \delta(\{k: \ x_k < \alpha - \varepsilon\})$$

eşitsizliğinde sol taraf sıfıra eşit olduğundan sağ taraf da sıfıra eşittir.

Tersine (6.2) gerçeklensin. $\delta(\{k: \ x_k < \alpha + \varepsilon\}) \neq 0$ olduğu için $\alpha + \varepsilon \in A_x$ olup $A_x \neq \emptyset$ dir. $\inf A_x = \alpha$ olduğunu yani

$$1) \forall a \ \in \ A_x \text{ için } \alpha \leq a$$

$$2) \forall \varepsilon \ > \ 0 \text{ için } \exists a_\varepsilon \in A_x \ni a_\varepsilon < \alpha + \varepsilon$$

koşullarının sağlandığını gösterelim.

$\exists a \in A_x$ için $\alpha > a$ olduğunu kabul edelim. (6.2) den her $\varepsilon > 0$ için $\delta\left(\{k : \; x_k < \alpha - \varepsilon\}\right) = 0$ dır, dolayısıyla $a < \alpha$ için de $\delta\left(\{k : \; x_k < a\}\right) = 0$ olur. Oysa $a \in A_x$ olduğundan $\delta\left(\{k : \; x_k < a\}\right) \neq 0$ dır. Bu nedenle $\alpha \leq a$ olmak zorundadır.

$\forall \varepsilon > 0$ için $\alpha + \varepsilon \in A_x$ olduğundan $a_\varepsilon = \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ seçebiliriz ve (6.2) den $a_\varepsilon \in A_x$ dir.

İstatistiksel değme noktaları tanımı ile Teorem 6.3 ve Teorem 6.4 den $st - \limsup x$ ve $st - \liminf x$ in, en büyük ve en küçük istatistiksel değme noktası olduğu anlamı çıkarılabilir. Aşağıdaki teorem bu fikri kuvvetlendirmektedir.

Teorem 6.5 ([8]) Herhangi bir $x = (x_k)$ dizisi için

$$st - \liminf x \leq st - \limsup x$$

dir.

İspat *1. Durum:* $st - \limsup x = -\infty$ olsun. Bu $B_x = \emptyset$ olmasını gerektirir, öyle ki her $b \in \mathbb{R}$ için $\delta\left(\{k : \; x_k > b\}\right) = 0$ dır. Buradan her $b \in \mathbb{R}$ için $\delta\left(\{k : \; x_k \leq b\}\right) = 1$ yazabiliriz. O halde her $a \in \mathbb{R}$ için $\delta\left(\{k : \; x_k < a\}\right) \neq 0$ olur ve buradan $st - \liminf x = -\infty$ elde edilir.

2. Durum: $st - \limsup x = \infty$ olsun. Bu durum açıktır.

3. Durum: $st - \limsup x = \beta$ sonlu ve $st - \liminf x = \alpha$ olsun. $\varepsilon > 0$ için $\beta + \varepsilon \in A_x$ ve bu durumda $\alpha \leq \beta + \varepsilon$ olduğunu gösterelim.

Teorem 6.3 den $\beta = \sup B_x$ olduğundan $\delta\left(\left\{k : \; x_k > \beta + \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) = 0$ dır. Bu durumda

$$\delta\left(\left\{k : \; x_k \leq \beta + \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) = 1$$

olur ve bu da $\delta\left(\{k : \; x_k < \beta + \varepsilon\}\right) = 1$ olmasını gerektirir. Buradan $\beta + \varepsilon \in A_x$ olur ve $\alpha = \inf A_x$ tanımından $\alpha \leq \beta + \varepsilon$ elde edilir. ε keyfi olduğundan $\alpha \leq \beta$ gerçeklenir.

Teorem 6.5 ten ve tanımdan, herhangi bir x dizisi için

$$\liminf x \leq st - \liminf x \leq st - \limsup x \leq \limsup x \qquad \textbf{(6.3)}$$

olduğu açıktır.

Sınırlı her dizinin istatistiksel anlamda da, klasik anlamda da alt ve üst limit değerleri vardır. Sınırlı bir dizi istatistiksel limit noktalarına sahip olmayabilir fakat varsa istatistiksel limit noktalarının en büyüğünün bu sınırlı dizi için istatistiksel üst limit olduğunu söyleyemeyiz. Bunun için aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 6.6 $u = \left\{0, 1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1, 0, \ldots\right\}$ düzgün dağılımlı dizisini alalım ve $x_{2k-1} := 0$ ve $x_{2k} := u_k$ olarak tanımlayalım.

$st - \limsup x = 1$ dir, çünkü Teorem 6.3 den $\delta\left(\{k : \ x_k > 1 - \varepsilon\}\right) = \frac{\varepsilon}{2}$ dir. Ayrıca 0, x'in tek istatistiksel limit noktasıdır, çünkü Örnek 5.9 dan u, hiçbir limit noktasına sahip değildir. Buradan, x'in en büyük istatistiksel limit noktası 0 dır, fakat $st - \limsup x = 1$ dir.

Teorem 6.7 ([8]) İstatistiksel sınırlı x dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek yeter koşul

$$st - \liminf x = st - \limsup x$$

olmasıdır.

İspat $\alpha := st - \liminf x$ ve $\beta := st - \limsup x$ olsun. İlk olarak $st - \lim x = L$ ve $\varepsilon > 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\delta\left(\{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right) = 0$ dır, böylece $\delta\left(\{k : x_k > L + \varepsilon\}\right) = 0$ olur. İddia ediyoruz ki $\beta \leq L$ dir, böyle olduğunu gösterelim:

Kabul edelim ki $\beta > L$ olsun. Bu durumda $\beta - \varepsilon > L + \varepsilon$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ vardır. Böylece

$$\{k : x_k > L + \varepsilon\} \supseteq \{k : x_k > \beta - \varepsilon\}$$

elde ederiz. Buradan

$$\delta\left(\{k : x_k > L + \varepsilon\}\right) \geq \delta\left(\{k : x_k > \beta - \varepsilon\}\right)$$

bulunur. Eşitsizliğin sol tarafı sıfıra eşit olduğundan sağ tarafı da sıfıra eşittir. Bu durum (6.1) deki ifadeyle çelişir. O halde $\beta \leq L$ olmalıdır.

Ayrıca x dizisi istatistiksel yakınsak olduğundan $\delta\left(\{k : x_k < L - \varepsilon\}\right) = 0$ elde ederiz, bu da $L \leq \alpha$ olmasını gerektirir. Şimdi bunu gösterelim:

Kabul edelim ki $L > \alpha$ olsun. Bu durumda $L - \varepsilon > \alpha + \varepsilon$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ vardır. Böylece

$$\{k : x_k < L - \varepsilon\} \supseteq \{k : x_k < \alpha + \varepsilon\}$$

elde ederiz. Buradan

$$\delta\left(\{k : x_k < L - \varepsilon\}\right) \geq \delta\left(\{k : x_k < \alpha + \varepsilon\}\right)$$

bulunur. Sol taraf sıfıra eşit olduğundan sağ taraf da sıfıra eşittir. Bu durum (6.2) ifadesiyle çelişir. O halde $L \leq \alpha$ olmalıdır.

$\beta \leq L$ ve $L \leq \alpha$ eşitsizliklerinden $\beta \leq \alpha$ elde edilir. Ayrıca Teorem 6.5 ten $\alpha \leq \beta$ dır. Böylece $\alpha = \beta$ olup gereklilik ispatlanmış olur.

Şimdi yeterliliği gösterelim. Kabul edelim ki $\alpha = \beta$ ve $L := \alpha$ olsun. $\varepsilon > 0$ olmak üzere Teorem 6.3 ve Teorem 6.4 ün (6.1) ve (6.2) özelliklerinden

$$\delta\left(\left\{k : x_k > L + \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) = 0 \text{ ve } \delta\left(\left\{k : x_k < L - \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) = 0$$

elde edilir. Böylece $\delta\left(\{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right) = 0$ bulunur, yani $st - \lim x_k = L$ elde edilir.

Teorem 6.8 ([8]) x dizisi üstten sınırlı ve $\beta := st{-}\limsup x$ sayısına $C_1{-}$toplanabilir ise, bu durumda x, β'ya istatistiksel yakınsaktır.

İspat x'in β'ya istatistiksel yakınsak olmadığını varsayalım. Teorem 6.7 den $st - \liminf x < \beta$ olacaktır. Buradan $\delta\left(\{k : x_k < \mu\}\right) \neq 0$ olacak şekilde $\mu < \beta$ sayısı vardır. Gerçekten de Teorem6.4 den $\delta\left(\{k : x_k < \alpha + \varepsilon\}\right) \neq 0$ olup, en azından $\mu := \alpha{+}\varepsilon$ sayısı vardır.

$K' := \{k : x_k < \mu\}$ olsun. β'nın tanımından, her $\varepsilon > 0$ için $\delta\left(\{k : x_k > \beta + \varepsilon\}\right) = 0$ dır.

$K'' := \{k : \mu \leq x_k \leq \beta + \varepsilon\}$ ve $K''' := \{k : x_k > \beta + \varepsilon\}$ olsun ve $B := \sup\limits_k x_k < \infty$ olsun. $\delta\left(K'\right) \neq 0$ olduğundan, sonsuz çokluktaki n'ler için

$$\frac{1}{n}\left|K'_n\right| \geq d > 0 \qquad \textbf{(6.4)}$$

olacak şekilde bir d sayısı vardır. Ayrıca her n için, $\delta\left(\{k : x_k > \beta + \varepsilon\}\right) = 0$ ve

$$\begin{aligned} K'' &= \{k : \mu \leq x_k \leq \beta + \varepsilon\} = \{k : x_k \geq \mu\} \cap \{k : x_k \leq \beta + \varepsilon\} \\ &= \left(K'\right)^c \cap \left(K'''\right)^c \\ &\subseteq \left(K'\right)^c \end{aligned}$$

olup $\frac{\left|K''_n\right|}{n} \leq \frac{n - \left|K'_n\right|}{n}$ olduğundan

$$\begin{aligned} (C_1 x)_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{n}\sum_{k \in K'_n} x_k + \frac{1}{n}\sum_{k \in K''_n} x_k + \frac{1}{n}\sum_{k \in K'''_n} x_k \\ &< \frac{\mu}{n}\left|K'_n\right| + \frac{\beta + \varepsilon}{n}\left|K''_n\right| + \frac{B}{n}\left|K'''_n\right| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \mu \frac{\left|K_n'\right|}{n} + (\beta+\varepsilon)\left(1-\frac{\left|K_n'\right|}{n}\right) + o(1) \\
&= -\frac{\left|K_n'\right|}{n}(\beta+\varepsilon-\mu) + \beta + \varepsilon + o(1) \\
&\leq -d(\beta+\varepsilon-\mu) + \beta + \varepsilon + o(1)
\end{aligned}
$$

gerçeklenir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan

$$\liminf (C_1 x)_n \leq \beta - d(\beta-\mu) < \beta$$

elde edilir. Bu durumda x, β'ya C_1-toplanamaz. Çelişki elde ettik. O halde $st-\lim x_k = \beta$ olmalıdır.

Alttan sınırlılık için de benzer bir sonuç elde ederiz.

Sonuç 6.9 x dizisi alttan sınırlı ve $\alpha := st - \liminf x$ sayısına C_1-toplanabilir ise, bu durumda x, α'ya istatistiksel yakınsaktır.

Aşağıdaki örnekte göreceğiz ki Teorem 6.8 deki üst sınır koşulu ihmal edilemez ve hatta en zayıf varsayımıyla bu şart istatistiksel üst sınır şartı ile de değiştirilemez.

Örnek 6.10 $x = (x_k)$ dizisi

$$
x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k \text{ tamkare} \\ 0, & k \text{ tek tamkare değil} \\ 1, & k \text{ çift tamkare değil} \end{cases}
$$

ile tanımlansın.

$\delta(\{k : x_k = 0\}) = \frac{1}{2} = \delta(\{k : x_k = 1\})$ olduğundan $st - \liminf x = 0$ ve $st - \limsup x = 1$ olduğu açıktır. Bu nedenle x, istatistiksel yakınsak değildir. Ayrıca

$$\delta(\{k : |x_k| > 1\}) = \delta\left(\left\{k : x_k = \sqrt{k}\right\}\right) = \delta\left(\left\{k : k = m^2\right\}\right) = 0$$

olduğundan, x'in istatistiksel sınırlı olduğuna dikkat edelim. Geriye $C_1 x$ in $st - \limsup x = 1$ limitine sahip olduğunu göstermek kaldı. K^2 tamkarelerin kümesini, K^0 ve K^1 sırasıyla tek ve çift tamkare olmayanların kümesini göstersin. $[t] = maks\,\{k : k \leq t\}$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
(C_1x)_n &= \frac{1}{n}\sum_{k\in K_n^{\circ}} x_k + \frac{1}{n}\sum_{k\in K_n^{1}} x_k + \frac{1}{n}\sum_{k\in K_n^{2}} x_k \\
&= 0 + \frac{1}{n}\frac{[n-\sqrt{n}]}{2} + \frac{1}{n}\sum_{i\leq\sqrt{n}} i \\
&= 1 + o(1)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] Bhunia, S.; Das, P.; Pal, S. K. Restricting statistical convergence. Acta Math. Hungar. 134 (2012), no. 1-2, 153–161

[2] Çolak, R., Statistical convergence of order α, Modern Methods in Analysis and Its Applications (Editor: M. Mursaleen), Anamaya Pub., New Delhi, India 121-129, 2010

[3] Çolak R., On λ-statistical convergence, Conference on summability and applications, Commerce University, May 12–13, 2011, Istanbul, Turkey

[4] Connor J.S., The Statistical and Strong p-Cesaro Convergence of Sequences. Analysis , 1988, 8: 47-63

[5] Fast H., Sur la convergence statistique. Colloq. Math., 1951, 2: 241-244

[6] Fridy J., On statistical convergence. Analysis, 1985, 5: 301-313.

[7] Fridy, J. A. Statistical limit points. Proc. Amer. Math. Soc. 118 (1993), no. 4, 1187–1192.

[8] Fridy, J. A.; Orhan, C., Statistical limit superior and limit inferior. Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), no. 12, 3625–3631.

[9] Leindler L., Über die de la Vallée-Pousinsche Summierbarkeit allgemeiner Orthogonalreihen. Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 1965, 16: 375-387

[10] Maddox, I. J., Spaces of strongly summable sequences, Quart. J. Math. Oxford(2) 18 (1967) 345-55.

[11] Mursaleen, $\lambda-$ statistical convergence. Math. Slovaca, 2000, 50(1): 111 -115

[12] Rath D., Tripathy B.C., On statistically convergent and statistically Cauchy sequences. Indian J. Pure. Appl. Math., 1994, 25(4): 381-386

[13] Šalát T., On statistically convergent sequences of real numbers. Math. Slovaca , 1980, 30: 139-150.

[14] Savaş E., Strong almost convergence and almost λ-statistically convergence. Hokkaido Math. Jour., 2000, 29(3): 531-536.

[15] Schoenberg I. J., The integrability of certain functions and related summability methods. Amer. Math. Monthly, 1959, 66: 361-375.

[16] Steinhaus H., Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. Colloquium Mathematicum, 1951, 2: 73-74

[17] Tripathy, B. C., On statistically convergent and statistically bounded sequences. Bull. Malaysian Math. Soc. (2) 20 (1997), no. 1, 31–33.

[18] Zygmund, A., Trigonometric Series, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1979.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Malatya'da doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Malatya'da tamamladım. 2004 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'ne girdim. 2010 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nın Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Programı'nda yüksek lisans eğitimime başladım.

Emine KAYAN