T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK SAYI DİZİLERİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

Abdulkadir KARAKAŞ
(101121201)
Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi
Tez Danışmanı: Doç.Dr. Yavuz ALTIN

HAZİRAN-2014

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK SAYI DİZİLERİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

Abdulkadir KARAKAŞ
(101121201)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 20.05.2014
Tezin Savunulduğu Tarih: 17.06.2014

Tez Danışmanı: Doç.Dr. Yavuz ALTIN

Diğer Juri Üyeleri:

Prof.Dr. Mikail ET (F.Ü)

Prof.Dr. Salih AYTAR (S.D.Ü) Salih Ayt

Doç.Dr. Hikmet KEMALOĞLU (F.Ü) H. Kemaloğlu

Doç.Dr. Mahmut IŞIK (F.Ü)

HAZİRAN-2014

ÖNSÖZ

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde daima yanımda olan her konuda yardımlarını esirgemeyen, emeğini her zaman üzerimde hissettiğim, gerek bilgi ve gerek tecrübelerinden her zaman yararlandığım, saygıdeğer hocam Doç.Dr.Yavuz ALTIN' a sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca, engin bilgi ve birikimlerinden yararlandığım Sayın Prof.Dr.Rifat ÇOLAK, Prof.Dr.Mikail ET ve Doç.Dr.Mahmut IŞIK hocalarıma, doktora eğitimim boyunca her zaman yanımızda olan ve karşılaştığımız problemlerde tartışmalarıyla desteğini bizden esirgemeyen Sayın Doç.Dr.Hıfsı ALTINOK hocama ve yaşamım boyunca hep yanımda olan emeklerini benden hiç esirgemeyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

Abdulkadir KARAKAŞ

ELAZIĞ-2014

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde bulanık sayıların kısa bir tarihçesinden bahsedilmiş ve konunun daha iyi anlaşılması için günlük hayattan örnekler verilmiştir.

İkinci bölümde ilerki bölümlerde kullanılacak bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde bir kümenin β. dereceden yoğunluk kavramı açıklanıp, bu kavram yardımıyla β. dereceden istatistiksel yakınsaklık tanımlandıktan sonra β. dereceden kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilirlik ile arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca istatistiksel yakınsaklığın genelleştirilmiş bir hali olan β. dereceden $\lambda-$ istatistiksel yakınsaklık kavramı verilmiştir.

Dördüncü bölümde, bulanık küme, bulanık sayı ve bulanık sayı dizisi kavramları tanımlanmış ve bulanık sayı dizisi kavramları tanımlanmış ve bulanık sayılar arasındaki bazı cebirsel işlemlerden ve bu sayıların oluşturduğu $L(\mathbb{R})$ bulanık sayılar kümesinin üzerinde tanımlanan metriğin yapısı incelenmiştir. Daha sonra bulanık sayı dizisi ve bu dizilerin bazı temel özellikleri verilip bulanık sayı dizilerinin yakınsaklığı, istatistiksel yakınsaklığı ve kuvvetli $p-$ Cesàro yakınsaklığı gibi kavramlar ve ayrıca $\lambda = (\lambda_n)$ dizisi, pozitif sayıların $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1, \lambda_1 = 1$ şartına sahip, ∞ a giden ve azalmayan bir dizi olmak üzere bu dizinin yardımıyla bulanık sayı dizilerinin $\lambda-$ istatistiksel yakınsaklığı ve $\lambda-$ toplanabilirliği hakkında kısa bilgiler ve örnekler verilmiştir.

Beşinci bölümde genelleştirilmiş fark dizileri kullanılarak $0 < \beta \leq 1$ ve $\lambda = (\lambda_n) \in \Lambda$ dizisi için bulanık sayı dizilerinin β. dereceden $\lambda-$ istatistiksel yakınsak dizilerin $S_\lambda^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}^m)$ uzayı ve β. dereceden $\lambda-$ toplanabilir dizilerin $w_\lambda^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}^m)$ uzayı tanımlanarak bu uzaylara ilişkin bazı teoremler verilmiştir. Ayrıca Λ sınıfına ait $\lambda = (\lambda_n)$ ve $\mu = (\mu_n)$ dizileri için $S_\lambda^\gamma(\Delta_{\mathcal{F}}^m), S_\mu^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}^m), w_\mu^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}^m, p), w_\lambda^\gamma(\Delta_{\mathcal{F}}^m, p)$ uzayları arasındaki kapsama ilişkileri incelenmiştir.

Ayrıca bir f modülüs fonksiyonu kullanılarak β. dereceden kuvvetli $\lambda p-$ Cesàro toplanabilir ve β. dereceden Δ_λ^m- istatistiksel yakınsak dizi sınıfları arasındaki bazı kapsama bağıntıları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık sayı dizisi, İstatistiksel yakınsaklık, Cesàro toplanabilme, Modülüs fonksiyonu, Fark dizileri

SUMMARY

Some Properties of Fuzzy Numbers Sequences

The first chapter of this thesis that consist of five chapters, we mention a short history of the fuzzy numbers and in order to understanding the topic we give some examples from daily life.

In the second chapter, we give some fundamental definitions and theorems which will be used in the next chapters.

In the third chapter, we will explain a statement that has density of order β and by using this concept statistical convergence of order β will be defined and relations between strongly $p-$ Cesàro summability of order β will be given. In addition, the concept of $\lambda-$ statistically convergent of order β that generalized case of statistically convergent is given.

In the fourth chapter, we analyse the fuzzy set and some algebraic properties between the fuzzy numbers and metric defined on $L(\mathbb{R})$ fuzzy number set which generated by these numbers. We define the concepts of fuzzy number, fuzzy set and sequence of fuzzy numbers and moreever we give some properties of the sequences fuzzy numbers: Convergence, boundedness, statistical convergence and strongly $p-$Cesàro summability of in the sequences fuzzy numbers and moreover, by a nondecreasing positive $\lambda = (\lambda_n)$ sequence that $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1, \lambda_1 = 1$ and goes to ∞, short information and examples about $\lambda-$ statistically convergent and $\lambda-$ summability of the sequences fuzzy numbers is given.

In the fifth chapter, by using generalized difference sequence for Λ a sequence that $\lambda = (\lambda_n) \in \Lambda$ and $0 < \beta \leq 1$ the sequences of fuzzy numbers of $S_\lambda^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}^m)$ the space of $\lambda-$ statistical convergence of order β and the $w_\lambda^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}^m)$ space of $\lambda-$ summable sequence of order β are defined and some theorems about these spaces are given. Also for belong to Λ class $\lambda = (\lambda_n)$ and $\mu = (\mu_n)$ sequences inclusion relations between $S_\lambda^\gamma(\Delta_{\mathcal{F}}^m), S_\mu^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}^m), w_\mu^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}^m, p)$, and $w_\lambda^\gamma(\Delta_{\mathcal{F}}^m, p)$ spaces are examined.

Also, by using a modulus function f some inclusion relations between strongly $\lambda p-$ Cesàro summable sequence of order β and Δ_λ^m- statistical convergence sequence of order β are given.

Keywords: Sequence of fuzzy numbers, Statistical convergence, Cesàro summability, Modulus function, Difference sequences

ŞEKİLLER LİSTESİ

SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	:	$n-$ boyutlu Öklid uzay
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
$L(\mathbb{R})$	:	Reel bulanık sayılar kümesi
$L(\mathbb{R}^n)$	:	$n-$ boyutlu reel bulanık sayılar kümesi
A^α	:	A bulanık kümesinin $\alpha-$ kesimi
$cl(A)$	:	A kümesinin kapanışı
$\operatorname{supp} A$	:	A bulanık kümesinin desteği (support)
$h.h.k$	:	hemen hemen her k
$w^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}, p)$	:	β. dereceden kuvvetli Δ_p- Cesàro toplanabilir bulanık sayı dizileri kümesi
$S(\Delta_{\mathcal{F}})$	:	$\Delta-$ istatistiksel yakınsak bulanık sayı dizileri kümesi
$S^\beta(\Delta_{\mathcal{F}})$	:	β. dereceden $\Delta-$ istatistiksel yakınsak bulanık sayı dizileri kümesi
$w^\beta(\Delta^m_{\mathcal{F}}, p)$	:	β. dereceden kuvvetli Δ^m_p- Cesàro toplanabilir bulanık sayı dizileri kümesi
$w^\beta_\lambda(\Delta^m_{\mathcal{F}}, p)$	:	β. dereceden kuvvetli $\Delta^m_{\lambda p}-$ Cesàro toplanabilir bulanık sayı dizileri kümesi
$S(\Delta^m_{\mathcal{F}})$	:	Δ^m- istatistiksel yakınsak bulanık sayı dizileri kümesi
$S^\beta(\Delta^m_{\mathcal{F}})$	:	β. dereceden Δ^m- istatistiksel yakınsak bulanık sayı dizileri kümesi
$S^\beta_\lambda(\Delta^m_{\mathcal{F}})$	:	β. dereceden $\Delta^m_\lambda-$ istatistiksel yakınsak bulanık sayı dizileri kümesi
BK	:	Banach Koordinatsal
ℓ_∞	:	Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı
c	:	Kompleks terimli yakınsak diziler uzayı
c_0	:	Kompleks terimli sıfıra yakınsak diziler uzayı

1. GİRİŞ

1965 de Zadeh [26] doğruluk derecesi çok değerli bir mantık olan bulanık küme teorisini ortaya atmıştır. Bulanık küme teorisi kümelerle elemanları arasındaki ilişkiyi geleneksel siyah veya beyaz bakış açısı yerine bize yeni bir açıyla gözlem ve inceleme olanağı sağlamıştır. Çeşitli pratik işlemlerde görülen bir küme ile bir elemanı arasındaki sahip olmanın yanında sahip olamama gibi bir olasılığın da olabileceğini bize anlatır. Bu bakış açısı bize kesin küme teorisine yeni bir sistem olanağı sağlamıştır.

Bulanık küme teorisi hayattaki bir çok şeyi derecesine göre içerir. Bir siyah- beyaz fotoğraf sadece siyah veya beyaz değildir. Tipik bir resimde farklı seviyelerde bir çok gri gölge gözlemlenebilir. Bilgisayar bilimcileri ve mühendisleri uzun zamandır bu gerçeği kabul etmişlerdir.

Örneğin, bir pikselde parlaklık 0 ile 256 değerleri arasındadır. 0 değeri siyaha, 256 değeri beyaza karşılık gelirken 0 ile 256 arasındaki değerler gri renginin tonlarına karşılık gelirler.

Bir klasik küme; sonlu, sayılabilir veya sayılamayan bir nesneler veya elemanlar topluluğu olarak tanımlanır. Her bir eleman ya bir $A, (A \subseteq X)$ kümesinin elemanıdır veya değildir. İlk durumdaki, "x, A ya aittir" ifadesi doğru, sonraki ifade ise yanlıştır.

Böyle bir klasik küme farklı şekillerde de gösterilebilir:

Kümenin elemanları numaralandırılarak küme analitik olarak gösterilebilir. Örneğin kümenin elemanı olması için şartlar belirtilebilir $A = \{x : x \leq 5\}$, veya üye elemanlar karakteristik fonksiyon kullanılarak tanımlanabilir. Bu durumda üyeler 1 ile üye olmayanlar 0 ile gösterilir. Bir bulanık kümesi için karakteristik fonksiyon verilen kümenin elemanları için farklı değerlerdeki üyelik tanımlanabilir.

Zadeh [26] tarafından yayınlanan bu çalışma, modern anlamda belirsizlik kavramının değerlendirilmesinde önemli bir nokta olarak kabul edilir. Zadeh [26], bu çalışmada kesin olmayan sınırlara sahip nesnelerin oluşturduğu bulanık küme teorisini ortaya koymuştur.

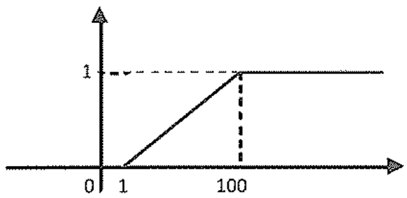
Bulanık kümeler, boş olmayan bir X kümesinin ilgili elemanlarına göre göz önüne alınır. Temel düşünce, her bir $x \in X$ elemanının $[0, 1]$ aralığında değerler alan bir $\mu_A(x)$

üyelik derecesine (doğruluk derecesinin uygulanabilirlik derecesi) atanmasıdır. Burada $\mu_A(x) = 0$, üyeliğin olmamasına; $0 < \mu_A(x) < 1$ kısmi üyeliğe ve $\mu(x) = 1$ de tam üyeliğe karşılık gelir. Zadeh'e göre X in bir bulanık alt kümesi en az bir $\mu : X \to [0,1]$ fonksiyonu için $X \times [0,1]$ kümesinin boş olmayan bir $\{(x, \mu_A(x) : x \in X)\}$ alt kümesidir.

Örneğin:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \text{ ise} \\ \frac{1}{99}(x-1) & 1 \leq x \leq 100 \text{ ise} \\ 1 & 100 \leq x \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlı $\mu : \mathbb{R} \to [0,1]$ fonksiyonu reel 1 den büyük sayıların bulanık kümesine bir örnek olarak verilebilir (Şekil 1.1.1). Şüphesiz üyelik derece fonksiyonunun pek çok farklı uygun seçimleri vardır.



Şekil 1.1.1. Bir bulanık küme

X in klasik anlamdaki bir A alt kümesi için üyelik ihtimalleri sadece üyesizlik ve tam üyeliktir. Buna göre böyle bir küme, kendisinin $\mu_A : X \to [0,1]$ karakteristik fonksiyonuyla X kümesi üzerinde verilen bir bulanık kümesiyle tanımlanabilir, yani

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A \text{ ise} \\ 1, & x \in A \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanabilir.

Bulanık sayı kavramı düşüncesi ilk kez 1972 de Chang ve Zadeh [28] tarafından tanımlanmıştır. Bulanık sayının cebirsel özellikleri pek çok yazar tarafından incelenmiştir. Bulanık sayı dizileri ve cebirsel özellikleri ilk defa Matloka [35] tarafından çalışılmıştır. Nanda [32] sınırlı ve yakınsak bulanık sayı dizilerin uzayını çalışmış ve bu uzayların birer tam metrik uzay olduklarını göstermiştir. Bulanık dizilerin istatistiksel yakınsaklığı ve istatistiksel Cauchy kavramları ilk defa Nuray ve Savaş [36] tarafından verilmiştir. Daha sonra bulanık sayı dizilerinin Cesàro toplanabilirliği tanımı Subrahmanyam [38] tarafından çalışılmış olup bu tanım Kwon [39] tarafından genelleş tirilip istatistiksel yakınsaklık ile kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilme arasındaki ilişkileri incelemiştir. Aytar [55] tarafından bulanık sayı dizilerinin istatistiksel yığılma noktaları ve istatistiksel limit kavramları çalışılmıştır. Ayrıca, Tuncer ve Benli [56] bulanık sayı dizilerinin $\lambda-$ istatistiksel limit kavramının temel sonuçlarını incelemişlerdir. Yakın zamanlarda Talo ve Başar [57-58] bulanık sayı dizilerinin temel sonuçlarını genişlettiler, aynı zamanda Talo ve Başar [52] quasi normlu $l_\infty(F), c(F), c_0(F)$ ve $l_p(F)$ klasik kümelerinin bulanık sayı dizileri üzerinde çalışmışlardır. Daha sonra Başar [59] bulanık sayı dizleri ile ilgili çalışmaları ayrıntılı bir şekilde incelemiştir.

2. GENEL KAVRAMLAR

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1.

X boş olmayan bir küme ve K reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$\begin{aligned} + &: X \times X \to X \\ \cdot &: K \times X \to X \end{aligned}$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X kümesine K cismi üzerinde bir vektör (lineer) uzayı denir. Her $\lambda, \mu \in K$ ve $x, y, z \in X$ için;

1) $x + y = y + x$

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

3) $\forall x \in X$ için $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.

4) $\forall x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $-x \in X$ vardır.

5) $1x = x$

6) $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$

7) $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$

8) $\lambda(\mu x) = (\lambda \mu) x$ dir [1].

Tanım 2.1.2.

X boş olmayan bir küme olsun. Her $x, y, z \in X$ için;

M1) $d(x, y) \geq 0$

M2) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

M3) $d(x, y) = d(y, x)$

M4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

özelliklerine sahip $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna metrik ve (X, d) ikilisine de metrik uzay denir [1].

Tanım 2.1.3.

(X, d) bir metrik uzay ve $x = (x_n)$ X de bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ öyle ki $n > n_0$ olduğunda

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisi X de yakınsaktır denir ve $x_n \to x$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ şeklinde gösterilir [1].

Tanım 2.1.4.

Bir (X, d) bir metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu metrik uzaya tam metrik uzay denir [1].

Tanım 2.1.5.

X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olmak üzere;

$$\begin{aligned} \|\cdot\| &: X \to K \\ x &\to \|x\| \end{aligned}$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonu X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir.

N1) $\|x\| \geq 0, (x \in X)$

N2) $\|x\| = 0 \iff x = \theta, (x \in X)$

N3) $\|\alpha x\| = \alpha \|x\|, (\alpha \in K, x \in X)$

N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, (x, y \in X)$ dir [2].

Tanım 2.1.6.

Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında aldığımız her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa bu normlu uzaya Banach uzayı adı verilir [2].

Tanım 2.1.7.

Kompleks terimli tüm $x = (x_k), (k = 1, 2, 3, ...)$ dizilerinin cümlesini ω ile göstereceğiz. ω, $x = (x_k), y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere

$$x + y = (x_k + y_k)$$

$$\alpha x = (\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzayıdır [3]. ω nın her alt lineer uzayına dizi uzayı denir. Bu çalışmada sık sık kullanacağımız

$$l_\infty = \left\{ x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty \right\}$$

sınırlı,

$$c = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k \text{ mevcut} \right\}$$

yakınsak ve

$$c_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k = 0 \right\}$$

sıfıra yakınsak diziler uzayı

$$\|x\| = \sup_k |x_k|$$

normu ile birer Banach uzaydır.

Tanım 2.1.8.

X bir dizi uzayı ve Banach uzayı olsun. Eğer;

$$\tau_k : X \rightarrow \mathbb{C}, \tau_k(x) = x_k, (k = 1, 2, 3, ...)$$

dönüşümü sürekli ise X e bir BK−uzayı denir [3].

Tanım 2.1.9.

Bir X vektör uzayının bir Y alt kümesi verilsin. Eğer $y_1, y_2 \in Y$ olduğunda

$$M(y_1, y_2) = \{y \in Y : y = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2, 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset Y$$

oluyorsa Y alt kümesi konvekstir denir [2].

Teorem 2.1.10.

Bir X Banach uzayının bir Y alt uzayının tam olması için gerek ve yeter koşul Y nin X de kapalı olmasıdır [2].

Tanım 2.1.11.

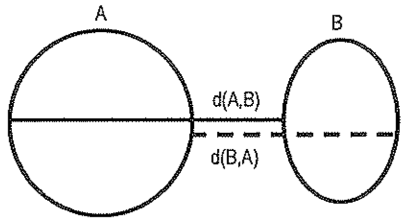
Bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A ya kompakt küme denir. Yani A kümesi kompakt ise her $\mathcal{A}$ açık örtüsünün sonlu sayıda, örneğin n tane, açık kümeden oluşan bir $\{A_i \in \mathcal{A} : i = 1, 2, 3, ..., n\}$ alt sınıfı vardır ve $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ yazılabilir [4].

Tanım 2.1.12. (Hausdorff Metriği)

(X, d) bir tam metrik uzay olsun. X in boş olmayan bütün kompakt alt kümelerinin sınıfını $\hbar(X)$ ile gösterelim. $A, B \in \hbar(X)$ kümeleri için A kümesinin B kümesine uzaklığı burada $d(x, B) = \inf\limits_{y \in B} d(x, y)$ dır.

$$d(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B)$$

şeklinde tanımlanır, A ve B kümeleri için genellikle $d(A, B) \neq d(B, A)$ dır (Şekil 2.1.1).



Şekil 2.1.1. İki kümenin birbirine uzaklıkları

Burada $d(A, A) = 0$ olduğu açıktır. $A, B, C \in \hbar(X)$ kümeleri için

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$$

bağıntısı sağlanır. Gerçekten, her $z \in C$ noktası için

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y) \leq \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} [d(x, z) + d(z, y)] \\ &\leq \sup_{x \in A} d(x, z) + \inf_{y \in B} d(z, y), (\forall z \in C) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu bağıntı sağ taraftaki her iki terimde de C kümesinin her z noktasını yerleştirdiğimizde geçerli olduğuna göre birinci terimde $d(x, z)$ uzaklığını minimum, ikinci terimde ise $d(z, y)$ uzaklığını maksimum yapan z noktalarını kullanırsak

$$d(A, B) \leq \sup_{x \in C} \inf_{z \in C} d(x, z) + \sup_{z \in C} \inf_{y \in B} d(z, y) = d(A, C) + d(C, B)$$

buluruz.

Şimdi $\hbar(X)$ üzerinde bir $h : \hbar(X) \times \hbar(X) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonunu her $A, B \in \hbar(X)$ için

$$h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu fonksiyon $\hbar(X)$ üzerinde metrik şartlarını sağlar. Yani bu h küme fonksiyonu gerçekten bir metrik olup Hausdorff metriği adını alır [5].

2.2. İstatistiksel Yakınsaklık

İstatistiksel yakınsaklık tanımı 1951 de Fast [6] tarafından kısa bir not olarak verilmiştir. Schoenberg [7] istatistiksel yakınsaklığı toplanabilme metodu olarak incelemiş ve istatistiksel yakınsaklığın bazı temel özelliklerini belirtmiştir. Her iki matematikçi de sınırlı, istatistiksel yakınsak bir dizinin Cesàro toplanabilir olduğunu ifade etmişlerdir. Daha sonra istatistiksel yakınsaklık Buck [8], Connor [9], Šalát [10], Mursaleen [11], Savaş [12], Fridy ve Orhan [13] gibi bir çok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Son zamanlarda bu kavram pek çok yazar tarafından ölçüm teorisine, trigonometrik serilere, lokal konveks uzaylara, toplanabilirlik teorisine, Banach uzaylarına ve bulanık küme teorisine uygulanmıştır.

Tanım 2.2.1.

$K \subset \mathbb{N}$ olmak üzere bir K kümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \le n : k \in K\}\right|$$

şeklinde tanımlanır. Burada $|\{k \le n : k \in K\}|$ ifadesi K kümesinin n den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermektedir.

Eğer $\delta(K) = 0$ ise K kümesine sıfır yoğunluklu küme denir [14].

Tanım 2.2.2.

Herhangi bir $x = (x_k)$ dizisinin terimleri bir P özelliğini sıfır yoğunluklu bir küme dışında bütün k lar için sağlıyorsa, (x_k) dizisi hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir ve "$h.h.k$" biçiminde gösterilir [15].

Doğal yoğunluk kavramından faydalanılarak istatistiksel yakınsaklık tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 2.2.3.

$x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \le n : |x_k - L| \ge \varepsilon\}\right| = 0$$

veya $h.h.k$ için $|x_k - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $S - \lim x = L$ veya $x_k \xrightarrow{s} L$ biçiminde gösterilir.

İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S ile gösterilir. Eğer, özel olarak $L = 0$ ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel sıfır dizisi denir. İstatistiksel yakınsak sıfır dizilerinin kümesi S_0 ile gösterilir. Buna göre;

$$S = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \left| \{ k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon \} \right| = 0, \ \exists L \in \mathbb{C} \right\}$$

ve

$$S_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \left| \{ k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon \} \right| = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlıdır [15].

Açıkça görüleceği gibi yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Yani $\lim x_k = L$ ise $S - \lim x = L$ dir. Fakat bunun tersi doğru değildir. Gerçekten;

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \text{ ise } \quad (m = 1, 2, ...) \\ 0, & k \neq m^2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\left| \{ k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon \} \right| \leq \left| \{ k \leq n : x_k \neq 0 \} \right| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \{ k \leq n : x_k \neq 0 \} \right| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Bu $S - \lim x = 0$ olduğu anlamına gelir. Ancak (x_k) yakınsak değildir.

Diğer taraftan istatistiksel yakınsak bir dizi sınırlı olmak zorunda değildir. Yani ℓ_∞ ve S uzayları birbirlerini kapsamazlar, ancak ortak elemanları vardır. Gerçekten;

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2 \text{ ise } \quad (m = 1, 2, ...) \\ 1, & k \neq m^2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $S - \lim x = 1$ dir, ancak $x \notin \ell_\infty$ dir. Diğer taraftan, $x = (1, 0, 1, 0, ...)$ dizisi sınırlıdır. Ancak istatistiksel yakınsak değildir.

Bir dizi istatistiksel yakınsak ise istatistiksel limiti tektir, yani $S - \lim x = L_1$ ve $S - \lim x = L_2$ ise $L_1 = L_2$ dir.

Tanım 2.2.4.

Bir $x = (x_k)$ kompleks terimli dizisini göz önüne alalım. $\varepsilon > 0$ verilsin. Eğer $h.h.k$ için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa yani;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [15].

Teorem 2.2.5.

Bir $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsak ise aynı zamanda istatistiksel Cauchy dizisidir [15].

İspat:

Burada, "yakınsak bir dizi Cauchy dizisidir." teoreminin ispatına benzer bir yol takip edilecektir. $S - \lim x_k = L$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda, $h.h.k.$ için $|x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ dır.

Eğer $N, |x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde seçilirse,

$$|x_k - x_N| = |x_k - L + L - x_N| \leq |x_k - L| + |x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

şeklinde olur.

Teorem 2.2.6.

$S - \lim x = a, S - \lim y = b$ ve c bir reel sayı olsun. Bu taktirde;

$i)$ $S - \lim cx_k = ca$

$ii)$ $S - \lim (x_k + y_k) = a + b$ dir [6].

Bu teoreme göre istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi bir lineer uzay olur.

Teorem 2.2.7.

Aşağıdaki önermeler denktir.

$i)$ x dizisi istatistiksel yakınsaktır,

$ii)$ x dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir,

$iii)$ $h.h.k$ için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi vardır [15].

2.3. İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli Cesàro Toplanabilirlik

Bu kısımda, kuvvetli Cesàro toplanabilme ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki incelenecektir.

Tanım 2.3.1.

$x = (x_k)$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, x dizisi L ye Cesàro toplanabilirdir denir. Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi σ_1 ile gösterilecektir. Buna göre;

$$\sigma_1 = \left\{ x = (x_k) : \lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - L) = 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

dir. Eğer x dizisi L ye Cesàro toplanabilir ise bu $\sigma_1 - \lim x = L$ yazılarak gösterilir [16].

Teorem 2.3.2.

$x = (x_k)$ dizisi L ye yakınsak ise (x_k) dizisi L ye σ_1 yakınsaktır [16].

İspat. $x = (x_k)$ dizisi L ye yakınsak olsun. Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $k > N_1$ olunca $|x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde pozitif bir N_1 tamsayısı mevcuttur. Şimdi;

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k - L \right| &= \left| \frac{x_1 + ... + x_n}{n} - L \right| \\
&= \left| \frac{x_1 + ... + x_n - nL}{n} \right| \\
&\leq \left| \frac{(x_1 - L) + ... + (x_{N_1} - L)}{n} \right| \\
&\quad + \left| \frac{(x_{N_1+1} - L) + ... + (x_n - L)}{n} \right| \\
&\leq \frac{|x_1 - L| + ... + |x_{N_1} - L|}{n} \\
&\quad + \frac{|x_{N_1+1} - L| + ... + |x_n - L|}{n}
\end{aligned}$$

yazılabilir. $K = max \{|x_1 - L|, ..., |x_{N_1} - L|\}$ alınırsa, $n > N_1$ için

$$\left| \frac{x_1 + ... + x_n - nL}{n} \right| \leq \frac{N_1 K}{n} + \frac{(n - N_1)\varepsilon}{2n}$$

elde edilir. $\forall\, n > N_2$ için $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2N_1K}$ olacak şekilde N_2 bulabiliriz. Bu durumda $n > N_2$ için

$$\left|\frac{x_1 + ... + x_n - nL}{n}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{(n - N_1)\,\varepsilon}{2n}$$

olur. Ayrıca $\frac{n-N_1}{n} < 1$ olduğundan $N = max\,\{N_1, N_2\}$ alınırsa her $n > N$ için

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - L\right| = \left|\frac{x_1 + ... + x_n}{n} - L\right| = \left|\frac{x_1 + ... + x_n - nL}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Bu teoremin tersi doğru değildir, yani σ_1 yakınsak bir dizi yakınsak olmayabilir. Gerçekten $(x_n) = (1 + (-1)^n)$ dizisi için $\sigma_1 - \lim x = \frac{1}{2}$ dir. Ancak bu dizi yakınsak değildir.

Tanım 2.3.3.

$x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $p > 0$ reel bir sayı olsun. Eğer

$$\lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L ye kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilirdir denir. Bu durumda $\omega_p - \lim x = L$ yazılır. Kuvvetli $p-$ Cesàro yakınsak dizilerin cümlesi ω_p ile gösterilecektir [17]. Yani;

$$\omega_p = \left\{x = (x_k) : \lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p = 0, \text{ en az bir } L \text{ için}\right\}$$

dir.

Teorem 2.3.4.

$0 < p < \infty$ olsun. Bu taktirde

$i)$ Bir L sayısına kuvvetli $p-$ Cesàro yakınsak olan bir dizi L sayısına aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır.

$ii)$ Bir L sayısına istatistiksel yakınsak olan sınırlı bir dizi L sayısına aynı zamanda kuvvetli $p-$ Cesàro yakınsaktır [17].

İspat. $i)$ $x \in \omega_p$ ve $\lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p = 0$ olsun. Bu takdirde verilen herhangi bir

$\varepsilon > 0$ için

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k - L|^p &= \frac{1}{n}\sum_{\substack{1\le k\le n\\ |x_k-L|<\varepsilon}}|x_k - L|^p + \frac{1}{n}\sum_{\substack{1\le k\le n\\ |x_k-L|\ge\varepsilon}}|x_k - L|^p \\
&\ge \frac{1}{n}\varepsilon^p\left|\{k\le n : |x_k - L|\ge\varepsilon\}\right|
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Burada $n \to \infty$ için limit alınırsa $\lim \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k - L|^p = 0$ olması

$$
\lim \frac{1}{n}\left|\{k\le n : |x_k - L|\ge\varepsilon\}\right| = 0
$$

olmasını gerektirir, bir başka ifadeyle $\omega_p - \lim x = L$ olması $S - \lim x_k = L$ olduğu sonucunu verir.

ii) Sınırlı bir $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsak olsun ve $E = \|x\|_\infty + L$ diyelim. $\varepsilon \ge 0$ verilsin. N_ε sayısını her $n > N_\varepsilon$ için

$$
\frac{1}{n}\left|\left\{k\le n : |x_k - L|\ge\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}\right| < \frac{\varepsilon}{2E^p}
$$

olacak şekilde seçelim ve

$$
L_n = \left\{k\le n : |x_k - L|\ge\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}
$$

olarak tanımlayalım. Bu taktirde her $n > N_\varepsilon$ için

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k - L|^p &= \frac{1}{n}\left(\sum_{\substack{k\le n\\ k\in L_n}}|x_k - L|^p + \sum_{\substack{k\le n\\ k\notin L_n}}|x_k - L|^p\right) \\
&< \frac{1}{n}\left(\frac{n\varepsilon}{2E^p}E^p + n\frac{\varepsilon}{2}\right) \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan $x = (x_k)$ dizisinin L sayısına kuvvetli $p-$ Cesàro yakınsak olduğu sonucu çıkar.

2.4. Fark Dizileri

Fark dizisi ve bazı fark dizi uzayları, ilk defa 1981 yılında Kızmaz [18] tarafından tanımlanmıştır.

Tanım 2.4.1.

$x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$ olmak üzere $\ell_\infty(\Delta), c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ dizi uzayları

$$\ell_\infty(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in \ell_\infty\},$$
$$c(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c\},$$
$$c_0(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0\},$$

şeklinde tanımlanır. Kızmaz [18], bu uzayların

$$\|x\|_1 = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$$

normu ile birer Banach uzayı olduğunu göstermiştir. Daha sonra Et ve Çolak [19], Çolak ve Et [20], $\Delta^0 x = (x_k), \Delta x = (x_k - x_{k+1}), \Delta^m x = (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1}x_k - \Delta^{m-1}x_{k+1})$, $\Delta^m x_k = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} x_{k+i}$ olmak üzere;

$$\ell_\infty(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in \ell_\infty\},$$
$$c(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c\},$$
$$c_0(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c_0\} \ (m \in \mathbb{N}),$$

dizi uzaylarını tanımlamış ve bu uzayların

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^{m} |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty$$

normu ile birer Banach uzayı olduklarını göstermişlerdir.

Daha sonra Et ve Nuray [21], X herhangi bir dizi uzayı olmak üzere yukarıdaki dizi uzaylarını $X(\Delta^m)$ dizi uzaylarına genişleterek bu uzayların bazı özelliklerini incelemiştir. Fark dizi uzayları ile ilgili bazı özellikleri şöyle sıralayabiliriz.

Teorem 2.4.2.

Eğer X bir lineer uzay ise $X(\Delta^m)$ de bir lineer uzaydır [21].

Teorem 2.4.3.

Eğer $X \subset Y$ ise $X(\Delta^m) \subset Y(\Delta^m)$ dir [21].

Teorem 2.4.4.

Eğer X, $\|\cdot\|$ normu ile bir Banach uzayı ise $X(\Delta^m)$ uzayı da

$$\|x\|_{\Delta} = \sum_{i=1}^{m} |x_i| + \|\Delta^m x\|_{\infty}$$

normu ile bir Banach uzayıdır [21].

Tanım 2.4.5.

$x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olsun. Buna göre her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

yani $h.h.k.$ için $|\Delta^m x_k - L| < \varepsilon$ ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına Δ^m- istatistiksel yakınsaktır denir. Δ^m- istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı $S(\Delta^m)$ ile gösterilir. Özel olarak $L = 0$ olması halinde $S_0(\Delta^m)$, yani sıfıra Δ^m- istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı elde edilir [21].

Sonuç 2.4.6.

$S(\Delta^m)$ uzayı bir lineer uzaydır [21].

2.5. $\lambda-$ İstatistiksel Yakınsaklık

$\lambda = (\lambda_n)$ dizisi, pozitif sayıların $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1, \lambda_1 = 1$ şartını sağlayan, $n \to \infty$ için ∞ a ıraksayan ve azalmayan bir dizi olsun. Bu şartları sağlayan λ dizilerinin kümesini Λ ile gösterilir. $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere genelleştirilmiş de la Vallée-Poussın ortalaması,

$$t_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k\in I_n} x_k$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $n \to \infty$ iken $t_n(x) \to L$ ise $x = (x_k)$ dizisine L sayısına $(V, \lambda)-$ toplanabilirdir denir [22].

Eğer $\lambda_n = n$ ise bu durumda $(V, \lambda)-$ toplanabilme ω_p- toplanabilmeye indirgenir.

Tanım 2.5.1.

Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left|\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

şartları sağlanırsa $x = (x_k)$ dizisi L ye $\lambda-$ istatistiksel yakınsaklıktır veya L ye S_λ yakınsaktır denir [11]. Bu durumda $S_\lambda - \lim x = L$ veya $x_k \to L(S_\lambda)$ yazılır. $\lambda_n = n$ özel halinde S_λ ile S uzayları birbirine denk olur.

Teorem 2.5.2.

$\lambda \in \Lambda$ olsun. Bu taktirde;

i) $x_k \to L\,[V,\lambda]$ ise $x_k \to L\,(S_\lambda)$ ve $[V,\lambda] \subset S_\lambda$ kapsaması kesindir.

ii) Eğer $x \in l_\infty$ ve $x_k \to L\,(S_\lambda)$ ise $x_k \to L\,[V,\lambda]$ dır.

iii) $S_\lambda \cap l_\infty = [V,\lambda] \cap l_\infty$ dır [11].

Teorem 2.5.3.

$S \subseteq S_\lambda$ olması için gerek ve yeter koşul $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n} > 0$ olmasıdır [11].

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde bir kümenin β. dereceden yoğunluğu kavramı tanımlanıp, bu kavram yardımıyla β. dereceden istatistiksel yakınsaklık tanımlanacak ve β. dereceden kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilirlik ile arasındaki ilişkiler verilecektir. Ayrıca istatistiksel yakınsaklığın genelleştirilmiş bir hali olan β. dereceden $\lambda-$ istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanacaktır.

3.1. β. Dereceden İstatistiksel Yakınsaklık

Sayı dizileri için β. dereceden istatistiksel yakınsaklık ilk defa Gadjiev ve Orhan [23] tarafından verilmiştir. Daha sonra Çolak [24], β. dereceden istatistiksel yakınsaklık kavramı ile ilgili temel kavramları aşağıdaki gibi vermiştir.

Tanım 3.1.1.

$0 < \beta \leq 1$ olsun. Bir K kümesinin β yoğunluğu,

$$\delta_\beta (K) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\beta} \left|\{k \leq n : k \in K\}\right| \text{ (limit sonlu yada sonsuz olabilir)}$$

ile tanımlanır [24]. Bilindiği gibi $|\{k \leq n : k \in K\}|$ K nın n den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermektedir.

Eğer $x = (x_k)$, β ya göre sıfır yoğunluklu bir küme hariç diğer bütün k lar için $P(k)$ özelliğini sağlıyorsa, o zaman bu diziye $h.h.k(\beta)$ için $P(k)$ özelliğini sağlar denir.

$\mathbb{N}$ nin sonlu her altkümesinin β yoğunluğu sıfırdır ve $\delta_\beta (K^c) = 1 - \delta_\beta (K)$ eşitliği $0 < \beta < 1$ için genelde doğru değildir. Bu eşitlik sadece $\beta = 1$ için sağlanır.

Teorem 3.1.2.

$K \subseteq \mathbb{N}$ herhangi bir küme olsun. Bu durumda $0 < \beta \leq \gamma < 1$ ise $\delta_\gamma (K) \leq \delta_\beta (K)$ dir [24].

İspat. $0 < \beta \leq \gamma < 1$ olsun Bu durumda $n^\beta \leq n^\gamma$ olacağından her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n^\gamma} \leq \frac{1}{n^\beta}$ olur.

$$\frac{1}{n^\gamma} \left|\{k \leq n : k \in K\}\right| \leq \frac{1}{n^\beta} \left|\{k \leq n : k \in K\}\right|$$

olup bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa $\delta_\gamma(K) \leq \delta_\beta(K)$ elde edilir.

Buna göre $0 < \beta \leq \gamma < 1$ için eğer K kümesinin β yoğunluğu sıfır ise γ yoğunluğu da sıfırdır. Eğer $0 < \beta \leq 1$ şartını sağlayan en az bir β için K kümesinin β yoğunluğu sıfır ise, K nın doğal yoğunluğu da sıfır olur.

Tanım 3.1.3.

$x = (x_k) \in w$ ve $0 < \beta \leq 1$ verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\beta} \left|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, o zaman (x_k) dizisi L ye β. dereceden istatistiksel yakınsaktır denir. (x_k) dizisinin L ye β. dereceden istatistiksel yakınsak olması halinde $S^\beta - \lim x_k = L$ şeklinde yazılır. β. dereceden istatistiksel yakınsak bütün dizilerin kümesi S^β ile gösterilir. S_0^β da β. dereceden 0 a istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini gösterecektir.

Her $\beta \in (0,1]$ için $S_0^\beta \subseteq S^\beta$ olduğu açıktır. β. dereceden istatistiksel yakınsaklık $\beta = 1$ için istatistiksel yakınsaklık ile çakışır [24].

Teorem 3.1.4.

$0 < \beta \leq 1$ ve $x = (x_k), y = (y_k)$ birer kompleks sayı dizileri olsunlar.

$i)$ Eğer $S^\beta - \lim x_k = x_0$ ve $c \in \mathbb{C}$ ise o zaman $S^\beta - \lim cx_k = cx_0$

$ii)$ Eğer $S^\beta - \lim x_k = x_0$ ve $S^\beta - \lim y_k = y_0$ ise o zaman $S^\beta - \lim(x_k + y_k) = x_0 + y_0$ dır [24].

Tanım 3.1.5.

$0 < \beta \leq 1$ ve $p \in \mathbb{R}^+$ olsun. Eğer;

$$\lim \frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, o zaman $x = (x_k)$ dizisi β. dereceden kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilirdir denir. β. dereceden kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilirlik, $\beta = 1$ için kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilirliğe indirgenir. β. dereceden kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilir dizilerin uzayı w_p^β ile gösterilir. Yani;

$$w_p^\beta = \left\{ x = (x_k) : \lim \frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p = 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

dir. 0 a β. dereceden kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilir dizilerin uzayı ise w_{0p}^{β} ile gösterilecektir [24].

Teorem 3.1.6.

$0 < \beta \leq \gamma < 1$ olsun $S^{\beta} \subseteq S^{\gamma}$ ve $\beta < \gamma$ şartını sağlayan en az bir $\beta, \gamma \in (0,1]$ için bu kapsama kesindir [24].

Sonuç 3.1.7.

Eğer $0 < \beta \leq 1$ için bir dizi L sayısına β. dereceden istatistiksel yakısak ise, o zaman bu dizi L ye istatistiksel yakınsaktır, yani $S^{\beta} \subseteq S$ 'dir [24].

Teorem 3.1.8.

$0 < \beta \leq 1$ ve $x = (x_k)$ dizisi L ye β. dereceden istatistiksel yakınsak olsun. Bu durumda $\lim y_k = L$ olacak şekilde $x = (x_k)$ dizisinin bir (y_k) alt dizisi vardır [24].

Teorem 3.1.9.

$0 < \beta \leq \gamma < 1$ ve p bir pozitif reel sayı olsun. Bu durumda $\omega_p^{\beta} \subseteq \omega_p^{\gamma}$ dir ve en az bir $\beta < \gamma$ için bu kapsama kesindir [24].

Sonuç 3.1.10.

$0 < \beta \leq \gamma < 1$ ve $p \in \mathbb{R}^{+}$ olsun. Bu durumda

i) $\omega_p^{\beta} = \omega_p^{\gamma}$ olması için gerek ve yeter şart $\beta = \gamma$ olmasıdır.

ii) Her $\beta \in (0,1]$ ve $0 < p < \infty$ için $\omega_p^{\beta} \subseteq \omega_p$ dir [24].

Teorem 3.1.11.

$0 < \beta \leq 1$ ve $0 < p < q < \infty$ olsun. Bu durumda $\omega_q^{\beta} \subseteq \omega_p^{\beta}$ olur. Teorem 3.1.9 da $\gamma = 1$ alınırsa $0 < p < q < \infty$ için $\omega_q \subset \omega_p$ olur [24].

Teorem 3.1.12.

$0 < \beta \leq \gamma < 1$ ve $0 < p < \infty$ olsun. Eğer bir dizi L sayısına β. dereceden kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilir ise bu durumda L ye γ. dereceden istatistiksel yakınsaktır [24].

Sonuç 3.1.13.

$0 < \beta \leq 1$ ve $0 < p < \infty$ olsun. Bir dizi L ye β. dereceden kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilir ise bu durumda L ye β. dereceden istatistiksel yakınsaktır [24].

Sonuç 3.1.14.

$0<\beta\leq 1$ ve $p\in\mathbb{R}^{+}$ olsun. Bu durumda $\omega_{p}^{\beta}\subseteq S$ dir. Eğer $0<\beta<1$ ise kapsama kesindir [24].

3.2. β. Dereceden $\lambda-$ İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 3.2.1.

$\lambda\in\Lambda$ ve $\beta\in(0,1]$ olsun. $I_n=[n-\lambda_n+1,n]$ ve $\lambda_n^{\beta},\lambda_n$ nin β. kuvveti yani $\lambda_n=\left(\lambda_n^{\beta}\right)=\left(\lambda_1^{\beta},\lambda_2^{\beta},\lambda_3^{\beta},...\lambda_n^{\beta},...\right)$ olmak üzere her $\varepsilon>0$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n^{\beta}}\left|\{k\in I_n:|x_k-L|\geq\varepsilon\}\right|=0$$

ise $x=(x_k)$ dizisi L ye β. dereceden $\lambda-$ istatistiksel yakınsaklıktır veya L ye S_{λ}^{β} yakınsaktır denir [25]. Bu durumda $S_{\lambda}^{\beta}-\lim x=L$ veya $x_k\to L\left(S_{\lambda}^{\beta}\right)$ yazılır. $\lambda_n=n$ özel halinde S_{λ}^{β} ile S^{β} uzayları birbirine denk olur.

β. dereceden $\lambda-$ istatistiksel yakınsaklık $0<\beta\leq 1$ için iyi tanımlıdır, fakat $\beta>1$ için iyi tanımlı değildir.

Teorem 3.2.2.

$0<\beta\leq 1$ ve $x=(x_k)\,,y=(y_k)$ birer kompleks sayı dizileri olsunlar.

i) Eğer $S_{\lambda}^{\beta}-\lim x_k=x_0$ ve $c\in\mathbb{C}$ ise o zaman $S_{\lambda}^{\beta}-\lim cx_k=cx_0$

ii) Eğer $S_{\lambda}^{\beta}-\lim x_k=x_0$ ve $S_{\lambda}^{\beta}-\lim y_k=y_0$ ise o zaman $S_{\lambda}^{\beta}-\lim(x_k+y_k)=x_0+y_0$ dır [25].

Tanım 3.2.3.

$0<\beta\leq 1$ ve $p\in\mathbb{R}^{+}$ olsun. Eğer,

$$\lim\frac{1}{\lambda_n^{\beta}}\sum_{k\in I_n}|x_k-L|^{p}=0$$

olacak şekilde bir L kompleks sayısı varsa, o zaman $x=(x_k)$ dizisi β. dereceden kuvvetli (V,λ) yakınsaktır denir. β. dereceden kuvvetli (V,λ) yakınsak dizilerin kümesini $w_{\lambda,p}^{\beta}$ ile göstereceğiz. Yani;

$$w_{\lambda,p}^{\beta}=\left\{x=(x_k):\lim\frac{1}{\lambda_n^{\beta}}\sum_{k\in I_n}^{n}|x_k-L|^{p}=0,\text{ en az bir } L \text{ için}\right\}$$

dir. 0 a β. dereceden kuvvetli (V,λ) dizilerin uzayı ise $w^{\beta}_{\lambda,0,p}$ ile gösterilecektir [25].

Teorem 3.2.4.

$S \subseteq S^{\beta}_{\lambda}$ olması için gerek ve yeter koşul $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^{\beta}}{n} > 0$ olmasıdır [25].

Teorem 3.2.5.

$0 < \beta \leq 1$ olsun. $w^{\beta}_{\lambda,p} \subseteq S^{\beta}_{\lambda}$ olup bu kapsama kesindir [25].

Teorem 3.2.6.

$0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ için $S^{\beta}_{\lambda} \subseteq S^{\gamma}_{\lambda}$ olup bu kapsama en az bir $\beta < \gamma$ için kesindir [25].

Teorem 3.2.7.

$0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ ve p pozitif reel sayısı için $w^{\beta}_{\lambda,p} \subseteq w^{\gamma}_{\lambda,p}$ dır ve bu kapsama en az bir $\beta < \gamma$ için kesindir [25].

4. BULANIK KÜMELER VE BULANIK SAYI DİZİLERİ

Bu bölümün ilk kısmında bulanık kümenin tanımı ve bazı özellikleri verildi. İkinci kısımda bulanık sayılar arasındaki bazı cebirsel işlemler ve bu sayıların oluşturduğu $L(\mathbb{R})$ bulanık sayılar kümesinin üzerinde tanımlanan metriğin yapısı incelenmiştir. Üçüncü kısımda ise bulanık sayı dizisi ve bu dizilerin bazı temel özellikleri verilip bulanık sayı dizilerinin yakınsaklığı, istatistiksel yakınsaklığı ve kuvvetli $p-$ Cesàro yakınsaklığı gibi kavramlar ve ayrıca $\lambda = (\lambda_n)$ dizisi, pozitif sayıların $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1, \lambda_1 = 1$ şartına sahip, ∞ a giden ve azalmayan bir dizi olmak üzere bu dizinin yardımıyla bulanık sayı dizilerinin $\lambda-$ istatistiksel yakınsaklığı ve $\lambda-$ toplanabilirliği hakkında kısa bilgiler ve örnekler verilmiştir.

4.1. Bulanık Kümeler

Bulanık kümeyi tanımlamadan önce bir kümenin karakteristik fonksiyonunu tanımlamak gerekir. Karakteristik fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 4.1.1.

X herhangi bir küme ve A, X in bir alt kümesi olsun. Bu durumda,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \text{ ise} \\ 0, & x \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\mu_A : X \to \{0, 1\}$ fonksiyonuna A kümesinin karakteristik fonksiyonu denir. Buna göre X in bir A alt kümesini karakteristik fonksiyon yardımıyla

$$A = \{x \in X : \mu_A(x) = 1\}$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

Karakteristik fonksiyonu kullanarak X in herhangi bir elemanının A kümesinin elemanı olup olmadığını kesin olarak anlayabiliriz.

Zadeh [26] tarafından tanımlanan bazı tanımlar aşağıda verilmiştir:

Tanım 4.1.2.

X, elemanları x ile gösterilmiş bir nesneler kümesi olsun. X kümesinde bir A bulanık kümesi, X deki herbir noktayı $[0,1]$ aralığındaki bir reel sayıya karşılık getiren bir $\mu_A(x)$ karakteristik fonksiyonu ile karakterize edilir.

X deki bir A bulanık kümesinden bahsedilirken $\mu_A : X \longrightarrow [0,1]$ şeklinde bir karakteristik fonksiyon daima mevcuttur. Bu fonksiyon $x \in A$ için $\mu_A(x) \in [0,1], x \notin A$ için $\mu_A(x) = 0$ biçiminde tanımlanır. Bu şekilde tanımlanmış karakteristik fonksiyona bundan sonra üyelik fonksiyonu denilecektir.

Üyelik fonksiyonunun tanımından yararlanarak bir A bulanık kümesi,

$$A = \{x \in X : \mu_A(x) \in [0,1]\}$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada $\mu_A(x)$ in değeri A bulanık kümesindeki x noktasının üyelik derecesini göstermektedir. Buna göre $\mu_A(x)$ in 1 e en yakın değeri, A bulanık kümesindeki x in en yüksek üyelik derecesidir. Eğer A kümesi klasik anlamda bir küme ise üyelik fonksiyonu sadece 0 ve 1 değerlerini alır. Burada $\mu_A(x) = 1$ veya $\mu_A(x) = 0$ olması x in A ya ait olması veya olmaması demektir. Buna göre $\mu_A(x)$, A kümesinin bilinen karakteristik fonksiyonuna indirgenmiş olur.

Tanım 4.1.3.

Eğer $\mu(x_0) = 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ varsa A bulanık kümesine normaldir denir.

Örnek 4.1.4.

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{2x-5}{5}, & x \in \left[\frac{5}{2}, 5\right] \text{ ise} \\ \frac{-2x+15}{5}, & x \in \left(5, \frac{15}{7}\right] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

bulanık kümesi $x = 5$ için 1 değerini aldığından normaldir.

Tanım 4.1.5.

A bir bulanık küme olsun ve $\alpha \in (0,1]$ verilsin. A bulanık kümesinin $\alpha-$ kesimi A^α ile gösterilir ve

$$A^\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak 0− kesim kümesi $cl\{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$ şeklinde tanımlanır.

Bu tanımın benzeri olan ve bulanık kümelerde sık kullanılan "destek" kavramı şu şekilde tanımlanabilir.

Tanım 4.1.6.

A bir bulanık küme olsun. A nın desteği (support), üyelik derecesi sıfır olmayan bütün noktaların kümesidir yani;

$$supp(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$$

şeklinde tanımlanır.

Konvekslik kavramı, klasik kümelerdeki pek çok özellik korunacak şekilde bulanık kümelere genişletilebilir. Bu kavram, bulanık sayının tanımını yapabilmek için gerekli olan önemli özelliklerden birisidir.

Tanım 4.1.7.

X, n boyutlu $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayı olsun. Bir $A \subset X$ bulanık kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart her $\alpha \in [0,1]$ için A^α kümesinin konveks olmasıdır.

Konveksliğin diğer bir tanımı ise şöyle verilebilir.

Tanım 4.1.8.

Bir A bulanık kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart her $\lambda \in [0,1]$ ve her $x_1, x_2 \in X$ için

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

4.2. Bulanık Sayılar

Bulanık sayının tanımını vermeden önce reel sayılarda aralık kavramını tanımlayalım.

Tanım 4.2.1.

a ve b iki reel sayı olmak üzere

$$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

şeklinde tanımlanan reel sayı kümesine kapalı bir aralık denir.

A bir aralık olmak üzere bu aralığın uç noktalarını $\underline{A}$ ve $\overline{A}$ ile göstereceğiz. Yani $A = [\underline{A}, \overline{A}]$ şeklinde bir gösterim kullanacağız. Ayrıca bir $[a, a]$ aralığını a reel sayısına karşılık getireceğiz.

A ve B yukarıdaki şekilde tanımlanmış iki aralık olmak üzere reel sayılar için tanımlanmış olan "$\leq$" ve "$<$" sıralama bağıntılarını aralıklar için aşağıdaki gibi genişlete biliriz:

$$A \leq B \Leftrightarrow \underline{A} \leq \underline{B} \text{ ve } \overline{A} \leq \overline{B}$$

$$A < B \Leftrightarrow \underline{A} < \underline{B} \text{ ve } \overline{A} < \overline{B}$$

"$\leq$" bağıntısı D üzerinde kısmi sıralama bağıntısıdır.

A ve B aralıkları birer sayı gibi düşünülebileceği için bu aralıkların oluşturduğu kümede toplama işlemi $A = [\underline{A}, \overline{A}]$ ve $B = [\underline{B}, \overline{B}]$ olmak üzere

$$[\underline{A}, \overline{A}] + [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A} + \underline{B}, \overline{A} + \overline{B}]$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre iki aralığın toplamı yine bir aralıktır.

A ve B aralıkları arasındaki çıkarma işlemi de

$$[\underline{A}, \overline{A}] - [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A} - \overline{B}, \overline{A} - \underline{B}]$$

şeklinde tanımlanır.

Reel sayılar doğrusu üzerindeki bütün kapalı ve sınırlı $[\underline{A}, \overline{A}]$ aralıklarının kümesini D ile gösterelim. Herhangi iki $A, B \in D$ için aralıklar üzerindeki Hausdorff metriği

$$d(A, B) = \max\left(|\underline{A} - \underline{B}|, |\overline{A} - \overline{B}|\right)$$

şeklinde tanımlanır. Burada (D, d) bir tam metrik uzaydır [27].

Tanım 4.2.2.

Bir reel bulanık sayı aşağıdaki şartları sağlayan bir $X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonudur.

$i)$ X normaldir.

$ii)$ X bulanık konvekstir.

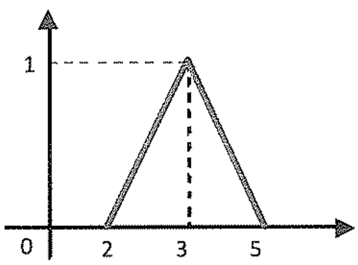
$iii)$ X üstten yarı süreklidir.

$iv)$ X^0 kompakttır [28].

Örnek 4.2.3.

$$X(x) = \begin{cases} x-2, & x \in [2,3] \text{ ise} \\ \frac{5-x}{2}, & x \in (3,5] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu, bir bulanık sayısıdır ve üyelik fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir:



Şekil 4.2.1. Bir bulanık sayı

Bütün reel bulanık sayılar kümesini $L(\mathbb{R})$ ile göstereceğiz. $L(\mathbb{R})$ kümesinde bazı aritmetik işlemler şu şekilde tanımlanır.

$X, Y \in L(\mathbb{R})$ bulanık sayılarının toplamı ve farkı sırasıyla

$$(X+Y)(x) = \sup_{x=y+z} \min\{X(y), Y(z)\}$$

ve

$$(X-Y)(x) = \sup_{x=y-z} \min\{X(y), Y(z)\}$$

şeklindedir [29].

X ve Y gibi iki bulanık sayının $\alpha-$ kesim kümelerine göre toplamı ve farkı ise şu şekilde tanımlanır. X ve Y nin $\alpha-$ kesim kümeleri $\alpha \in [0,1]$ için $X^\alpha = [\underline{X}^\alpha, \overline{X}^\alpha]$ ve

$Y^\alpha = \left[\underline{Y}^\alpha, \overline{Y}^\alpha\right]$ olsun. Bu takdirde

$$(X+Y)^\alpha = \left[\underline{X}^\alpha + \underline{Y}^\alpha, \overline{X}^\alpha + \overline{Y}^\alpha\right],$$
$$(X-Y)^\alpha = \left[\underline{X}^\alpha - \overline{Y}^\alpha, \overline{X}^\alpha - \underline{Y}^\alpha\right],$$

dir.

Bir X bulanık sayısının bir $k \in \mathbb{R}$ reel sayısıyla çarpımı da

$$(k \cdot X)^\alpha = \begin{cases} \left[k \cdot \underline{X}^\alpha, k \cdot \overline{X}^\alpha\right], & k \geq 0 \text{ ise} \\ \left[k \cdot \overline{X}^\alpha, k \cdot \underline{X}^\alpha\right], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklindedir.

Burada $(X^\alpha \pm Y^\alpha) = X^\alpha \pm Y^\alpha$ ve $(k \cdot X)^\alpha = kX^\alpha$ yazılabilir. Bunu aşağıdaki gibi basit cebirsel işlemler yaparak gösterebiliriz.

$$\begin{aligned} X^\alpha + Y^\alpha &= \{x \in \mathbb{R} : X(x) \geq \alpha\} + \{x \in \mathbb{R} : Y(x) \geq \alpha\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : X(x) + Y(x) \geq 2\alpha \geq \alpha\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (X+Y)(x) \geq 2\alpha \geq \alpha\} \\ &= (X+Y)^\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (k \cdot X)^\alpha &= \{x \in \mathbb{R} : (kX)(x) \geq \alpha\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : kX(x) \geq \alpha\} \\ &= k\{x \in \mathbb{R} : X(x) \geq \alpha\} \\ &= kX^\alpha \end{aligned}$$

dir.

Her bir reel sayı kendisinin karakteristik fonksiyonuyla ifade edilebilir. Ayrıca bulanık sayının tanımına göre her bir karakteristik fonksiyon bir bulanık sayı olur. Yani $r \in \mathbb{R}$ için $\bar{r} \in L(\mathbb{R})$ bulanık sayısı

$$\bar{r}(x) = \begin{cases} 1, & x = r \text{ ise} \\ 0, & x \neq r \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece her r reel sayısı için $\bar{r} = [r, r]$ şeklinde bir gösterimi vardır. Bu düşünceden hareketle $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, $L(\mathbb{R})$ bulanık sayılar kümesine gömülebilir [30-31].

Bulanık sayılar kümesi üzerindeki sıralama bağıntısı, reel aralıklar arasındaki sıralama bağıntısına benzerlik gösterir.

$X, Y \in L(\mathbb{R})$ için "$\leq$" kısmi sıralama bağıntısı

$$X \leq Y \Leftrightarrow \forall \alpha \in [0,1] \text{ için } \underline{X}^{\alpha} \leq \underline{Y}^{\alpha} \text{ ve } \overline{X}^{\alpha} \leq \overline{Y}^{\alpha}$$

şeklinde tanımlanır [30].

Tanım 4.2.4.

$A \subset L(\mathbb{R})$ kümesi verilsin. Her $X \in A$ bulanık sayısı için $X \leq U$ olacak şekilde bir U bulanık sayısı varsa A kümesine üstten sınırlıdır ve U bulanık sayısına da A kümesinin bir üst sınırı denir. Eğer A kümesinin her μ üst sınırı için $U \leq \mu$ ise U bulanık sayısına A kümesinin en küçük üst sınırı (supremumu) denir. Bir küme için alttan sınırlılık ve infimum kavramları da benzer şekilde tanımlanır [32].

$L(\mathbb{R})$ üzerinde X ve Y gibi iki bulanık sayı arasındaki uzaklığı hesaplamak için

$$\bar{d} : L(\mathbb{R}) \times L(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$\bar{d}(X, Y) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} d_H(X^{\alpha}, Y^{\alpha})$$

metriği kullanılacaktır. Burada d_H Hausdorff metriğidir ve

$$d_H(X^{\alpha}, Y^{\alpha}) = \max\left(\left|\underline{X}^{\alpha} - \underline{Y}^{\alpha}\right|, \left|\overline{X}^{\alpha} - \overline{Y}^{\alpha}\right|\right)$$

şeklinde tanımlanır. $\left(L(\mathbb{R}), \bar{d}\right)$, bir tam metrik uzaydır [33].

$C(\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{R}^n$ öklid uzayının boş olmayan, kompakt ve konveks bütün alt kümelerinin ailesini göstersin. Bu takdirde $C(\mathbb{R}^n)$ üzerinde toplama ve skalerle çarpma her $A, B \in C(\mathbb{R}^n)$ için

$$A + B = \{z : z = x + y,\ x \in A \text{ ve } y \in B\}$$

ve her $A \in C(\mathbb{R}^n)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\lambda A = \{z : z = \lambda x,\ x \in A\}$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki toplama ve çarpma işlemleri $C(\mathbb{R}^n)$ üzerinde bir lineer yapı üretir.

A ve B kümeleri arasındaki uzaklık

$$\delta_\infty(A,B)=\max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|, \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\|a-b\|\right\}$$

Hausdorff metriğiyle tanımlanır. Burada $\|\cdot\|$ sembolü ile $\mathbb{R}^n$ deki alışılmış Öklid normu gösterilmektedir. $(C(\mathbb{R}^n), \delta_\infty)$ uzayının bir tam metrik uzay olduğu bilinmektedir.

Bir bulanık sayının tanımı aşağıdaki biçimde genelleştirilebilir.

Tanım 4.2.5.

$n-$boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^n$ üzerindeki bir bulanık sayı aşağıdaki şartları sağlayan bir $X:\mathbb{R}^n\to[0,1]$ fonksiyonudur:

i) X normaldir, yani $X(x_0)=1$ olacak şekilde en az bir $x_0\in\mathbb{R}^n$ mevcuttur,

ii) X bulanık konvekstir, yani herhangi $x,y\in\mathbb{R}^n$ ve $0\le\lambda\le1$ için

$$X(\lambda x+(1-\lambda)y)\ge\min\{X(x),X(y)\}$$

eşitsizliği sağlanır,

iii) X üstten yarı süreklidir,

iv) $X^0=\{x\in\mathbb{R}^n : X(x)>0\}$ kümesinin kapanışı kompakttır.

$\mathbb{R}^n$ üzerindeki bütün bulanık sayıların kümesi $L(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. $0\le\alpha\le1$ için X^α kesim kümesini göz önüne alalım. Tanımdan, $X^\alpha\in C(\mathbb{R}^n)$ olduğu açıktır. $L(\mathbb{R}^n)$ deki toplama ve skaler ile çarpma $X,Y\in L(\mathbb{R}^n)$ ve $k\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$(X+Y)^\alpha=X^\alpha+Y^\alpha \text{ ve } (kX)^\alpha=kX^\alpha$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi, herbir $1\le q<\infty$ için

$$d_q(X,Y)=\left(\int_0^1\delta_\infty(X^\alpha,Y^\alpha)^q\,d\alpha\right)^{\frac{1}{q}}$$

ve

$$d_\infty=\sup_{0\le\alpha\le1}\delta_\infty(X^\alpha,Y^\alpha)$$

metriklerini tanımlayalım. $q\le s$ için $d_q\le d_s$ olmak üzere

$$d_\infty(X,Y)=\lim_{q\to\infty}d_q(X,Y)$$

olduğu açıktır. $(C(\mathbb{R}^n), d_q)$ metrik uzayı tamdır [34].

Bundan sonraki kısımlarda d_q yerine d notasyonu kullanılacaktır. Açıkça $n = 1$ için $L(\mathbb{R}^n)$ kümesinden $L(\mathbb{R})$ ve üzerinde tanımlı metrik elde edilir.

4.3. Bulanık Sayı Dizileri ve Bazı Özellikleri

Bulanık sayı dizisi ilk defa 1986 yılında Matloka [35] tarafından tanımlanmış ve diziyle ilgili temel kavramları aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tanım 4.3.1.

Bulanık sayılarının bir $X = (X_k)$ dizisi, doğal sayılar kümesinden $L(\mathbb{R}^n)$ içine tanımlı bir X fonksiyonudur. Bu durumda her bir k pozitif tamsayısına bir $X(k)$ bulanık sayısı karşılık gelir. Bundan sonraki bölümlerde $X(k)$ yerine X_k yazacağız.

Tanım 4.3.2.

$X_0 \in L(\mathbb{R}^n)$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Buna göre X_0 bulanık sayısının $\varepsilon-$komşuluğu $d(X, X_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bütün X bulanık sayılarının kümesidir. Bir X_0 bulanık sayısının $\varepsilon-$komşuluğu $K(X_0, \varepsilon)$ ile gösterilir.

Tanım 4.3.3.

$X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $k > N$ iken $d(X_k, X_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı mevcut ise (X_k) dizisi yakınsaktır ve limiti X_0 dır denir. Bu durumda $\lim X_k = X_0$ yazılır. Eğer $\lim X_k$ mevcut değilse (X_k) dizisi ıraksaktır denir.

Bütün yakınsak bulanık sayı dizilerinin kümesini $c(\mathcal{F})$ ile göstereceğiz.

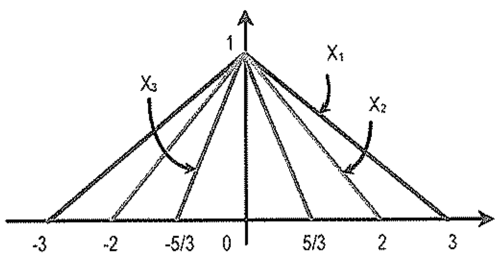
Örnek 4.3.4.

$$X_k(x) = \begin{cases} \frac{k}{k+2}x + 1, & x \in \left[-\frac{k+2}{k}, 0\right] \text{ ise} \\ -\frac{k}{k+2}x + 1, & x \in \left(0, \frac{k+2}{k}\right] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklindeki $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini göz önüne alalım. Bu dizinin limiti

$$X_0(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [-1,0] \text{ ise} \\ -x+1, & x \in (0,1] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

bulanık sayısıdır (Şekil 4.3.1).



Şekil 4.3.1. (X_k) bulanık sayı dizisinin X_0 bulanık sayısına yakınsaması

Teorem 4.3.5.

Yakınsak bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisinin limiti tektir.

Teorem 4.3.6.

$X = (X_k)$ ve $Y = (Y_k)$ bulanık sayı dizilerinin limitleri sırasıyla X_0 ve Y_0 olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) $\lim (X_k + Y_k) = X_0 + Y_0$,

ii) $\lim (X_k - Y_k) = X_0 - Y_0$,

iii) $\lim (X_k . Y_k) = X_0 . Y_0$,

iv) $\lim \left(\frac{X_k}{Y_k} \right) = \frac{X_0}{Y_0}$, (Eğer bütün k lar için $0 \notin suppY_k$ ve $0 \notin suppY_0$).

Tanım 4.3.7.

Her $\varepsilon > 0$ için $k, m > N$ olduğunda $d(X_k, X_m) < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir $N = N(\varepsilon)$ tamsayısı mevcutsa $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 4.3.8.

Her $k \in \mathbb{N}$ sayısı için $L \leq X_k \leq U$ olacak şekilde L ve U bulanık sayıları mevcut ise $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisine sınırlıdır denir. Bütün sınırlı bulanık sayı dizilerinin kümesini $\ell_\infty(\mathcal{F})$ ile göstereceğiz.

Teorem 4.3.9.

Yakınsak her bulanık sayı dizisi sınırlıdır.

Tanım 4.3.10.

Bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini ve doğal sayıların artan bir $\{k_n\}$ dizisini gözönüne alalım. Bu durumda (X_{k_n}) dizisine (X_k) dizisinin bir alt dizisi denir.

Teorem 4.3.11.

Yakınsak bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisinin her alt dizisi de yakınsaktır ve alt dizinin limiti $X = (X_k)$ dizisinin limiti ile aynıdır.

Tanım 4.3.12.

$X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_n \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

olacak şekilde bir X_0 bulanık sayısı mevcut ise, yani $h.h.k$ için $d(X_k, X_0) < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir X_0 bulanık sayısı varsa $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. (X_k) dizisi X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsak ise $S(\mathcal{F}) - \lim X_k = X_0$ veya $X_k \to X_0\,(S(\mathcal{F}))$ yazılır.

$S(\mathcal{F})$ ile istatistiksel yakınsak bulanık sayı dizilerinin kümesini göstereceğiz. Özel olarak $X_0 = \bar{0}$ alınırsa $S(\mathcal{F})$ yerine $S_0(\mathcal{F})$ yazacağız [36].

Bilindiği gibi sonlu bir kümenin doğal yoğunluğu sıfırdır. Bundan dolayı $c(\mathcal{F}) \subset S(\mathcal{F})$ kapsaması açıktır. Bu kapsamanın kesin olduğunu da aşağıdaki örnekte görebiliriz.

Örnek 4.3.13.

$X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini

$$X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} x - k + 1, & x \in [k-1, k] \text{ ise} \\ -x + k + 1, & x \in (k, k+1] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & \begin{array}{c} k = n^2 \text{ ise} \\ (n = 1, 2, 3, ...) \end{array} \\ X_0(x), & k \neq n^2 \text{ ise} \end{cases}$$

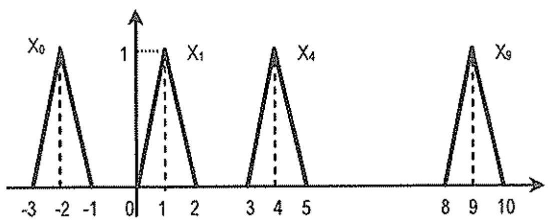
olacak biçimde tanımlayalım. Burada

$$X_0(x) = \begin{cases} x+3, & x \in [-3,-2] \text{ ise} \\ -x-1, & x \in (-2,-1] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olup, her $\varepsilon > 0$ için,

$$\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\} \subseteq \{1, 4, 9, 16, ...\}$$

olduğundan $\delta(\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}) = 0$ dır. Bu nedenle $X = (X_k)$ dizisi X_0 a istatistiksel yakınsaktır. Ancak $\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}$ kümesi sonlu olmadığı için (X_k) dizisi X_0 a yakınsak değildir (Şekil 4.3.2).



Şekil 4.3.2. İstatistiksel sınırlı, fakat sınırlı olmayan bulanık sayı dizisi

$S(\mathcal{F})$ ve $\ell_\infty(\mathcal{F})$ uzayları birbirlerini kapsamazlar. Yukarıdaki örnekte verilen $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini göz önüne alalım. Bu dizi istatistiksel yakınsaktır fakat sınırlı değildir. Şimdi de sınırlı olup istatistiksel yakınsak olmayan bir dizi örneği verelim.

Örnek 4.3.14.

$$U_1(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \text{ ise} \\ -x+2, & x \in (1,2] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

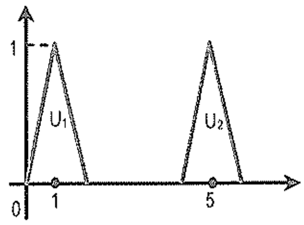
ve

$$U_2(x) = \begin{cases} x-4, & x \in [4,5] \text{ ise} \\ -x+6, & x \in (5,6] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere

$$X_k(x) = \begin{cases} U_1, & k \text{ tek ise} \\ U_2, & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (X_k) bulanık sayı dizisi sınırlıdır, ancak istatistiksel yakınsak değildir (Şekil 4.3.3).



Şekil 4.3.3. İstatistiksel yakınsak olmayan, ancak sınırlı olan bir bulanık sayı dizisi

Yakınsak her bulanık sayı dizisi aynı zamanda hem istatistiksel yakınsak hem de sınırlı olduğundan $S(\mathcal{F}) \cap \ell_\infty(\mathcal{F}) \neq \emptyset$ dir. Hatta $c(\mathcal{F}) \subset S(\mathcal{F}) \cap \ell_\infty(\mathcal{F})$ kapsaması kesindir. Bununla ilgili bir örnek aşağıda verilmiştir:

Örnek 4.3.15.

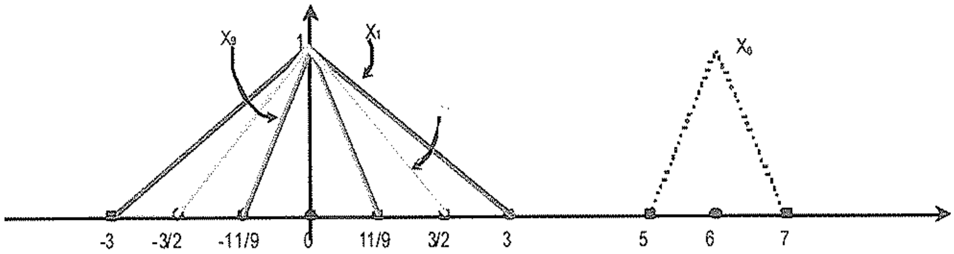
$X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini

$$X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} \frac{k}{k+2}x + 1, & x \in \left[-\frac{k+2}{k}, 0\right] \text{ ise} \\ -\frac{k}{k+2}x + 1, & x \in \left(0, \frac{k+2}{k}\right] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & \begin{array}{c} k = n^2 \text{ ise} \\ (n = 1, 2, 3, ...) \end{array} \\ X_0(x), & k \neq n^2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada

$$X_0(x) = \begin{cases} x - 5, & x \in [5, 6] \text{ ise} \\ -x + 7, & x \in (6, 7] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olup $X = (X_k)$ dizisi hem sınırlıdır hem de X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsaktır. Ancak bu dizi yakınsak değildir (Şekil 4.3.4).



Şekil 4.3.4. İstatistiksel yakınsak, fakat yakınsak olmayan bir bulanık sayı dizisi

Teorem 4.3.16.

$X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi olsun. Bu durumda $h.h.k.$ için $X_k = Y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $Y = (Y_k)$ dizisi varsa X dizisi istatistiksel yakınsaktır [37].

Tanım 4.3.17.

$X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} d(X_k, X_0) = 0$$

olacak şekilde bir X_0 bulanık sayısı varsa $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına Cesàro yakınsaktır denir [38].

Uyarı 4.3.18.

$X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi bir X_0 bulanık sayısına yakınsak ise aynı zamanda X_0 a Cesàro toplabilirdir, fakat tersi doğru değildir. Şimdi tersinin her zaman sağlanmadığına dair aşağıdaki gibi bir örnek verelim.

Örnek 4.3.19.

(X_k) bulanık sayı dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$X_k = \begin{cases} \bar{1}, & k \text{ çift ise} \\ -\bar{1}, & k \text{ tek ise} \end{cases}.$$

Açıktır ki (X_k) dizisi yakınsak değildir, fakat $\bar{0}$ bulanık sayısına Cesàro yakınsaktır. Gerçekten, $S_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$ olmak üzere $d(S_{2k}, \bar{0}) = 0$ ve $d(S_{2k+1}, \bar{0}) = \frac{1}{2k+1}$ yazılabilir, dolayısıyla $k \to \infty$ için $d(S_k, \bar{0}) \to 0$ dir.

Tanım 4.3.20.

$X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi ve p bir pozitif reel sayı olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} [d(X_k, X_0)]^p = 0$$

olacak şekilde bir X_0 bulanık sayısı varsa $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına kuvvetli $p-$ Cesàro yakınsaktır denir. Kuvvetli $p-$Cesàro yakınsak bulanık sayı dizilerinin kümesini $w(\mathcal{F}, p)$ ile göstereceğiz. Bir başka ifadeyle

$$w(\mathcal{F}, p) = \left\{ X = (X_k) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} [d(X_k, X_0)]^p = 0, \text{ en az bir } X_0 \text{ için} \right\}$$

dir. $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına kuvvetli $p-$ Cesàro yakınsak ise $X_k \to X_0 \,(w(\mathcal{F}, p))$ yazacağız [39].

Teorem 4.3.21.

$0 < p < \infty$ olsun. Eğer bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına kuvvetli $p-$ Cesàro yakınsak ise aynı zamanda X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsaktır [39].

Teorem 4.3.22.

$0 < p < \infty$ olsun. Eğer sınırlı bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsak ise bu takdirde X_0 bulanık sayısına kuvvetli $p-$ Cesàro yakınsaktır [40].

Örnek 4.3.23.

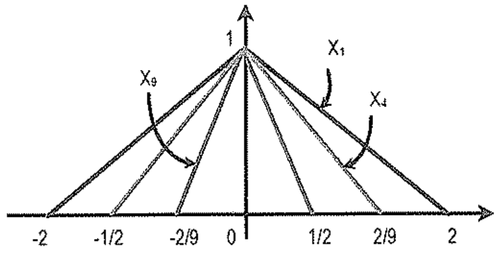
(X_k) bulanık sayı dizisini aşağıdaki gibi göz önüne alalım:

$$X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{cc} \frac{kx}{2} + 1, & x \in \left[-\frac{2}{k}, 0\right] \text{ ise} \\ \frac{kx}{2} + 1, & x \in \left(0, \frac{2}{k}\right] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & \begin{array}{c} k = n^2 \text{ ise} \\ (n = 1, 2, 3, ...) \end{array} \\ \bar{0}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Bu dizinin $\alpha-$ seviye kümesi

$$X_k^\alpha = \begin{cases} \left[\frac{2\alpha-2}{k}, \frac{2-2\alpha}{k}\right], & k = n^2 \text{ ise} \\ [0, 0], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır. Buradan $p=1$ için $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[d\left(X_k,X_0\right)\right]^p=0$ olup (X_k) bulanık sayı dizisinin $\bar{0}$ bulanık sayısına kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilir olduğu anlaşılır (Şekil 4.3.5).



Şekil 4.3.5. (X_k) bulanık sayı dizisinin $\bar{0}$ bulanık sayısına kuvvetli p-Cesaro toplanabilirdir

Tanım 4.3.24.

$\lambda=(\lambda_n)$ dizisi, pozitif sayıların $\lambda_{n+1}\leq\lambda_n+1,\lambda_1=1$ şartına sahip, ∞ a giden ve azalmayan bir dizi olsun. $X=(X_k)$ bir bulanık sayı dizisi ve p bir pozitif reel sayı olsun. Eğer;

$$\lim_{\lambda_n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[d\left(X_k,X_0\right)\right]^p=0$$

olacak şekilde bir X_0 bulanık sayısı varsa $X=(X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına kuvvetli $\lambda p-$ toplanabilirdir denir. Kuvvetli $\lambda-$ toplanabilir bulanık sayı dizilerinin kümesini $w_\lambda\left(\mathcal{F},p\right)$ ile göstereceğiz. Bir başka ifadeyle

$$w_\lambda\left(\mathcal{F},p\right)=\left\{X=(X_k):\lim_{\lambda_n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left[d\left(X_k,X_0\right)\right]^p=0,\text{ en az bir }X_0\text{ için}\right\}$$

dir. $X=(X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına kuvvetli $\lambda-$ toplanabilir ise $X_k\to X_0\left(w_\lambda\left(\mathcal{F},p\right)\right)$ yazacağız [39].

Tanım 4.3.24.

$X=(X_k)$ bir bulanık sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon>0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayına $\lambda-$ istatistiksel yakınsaktır denir. Bu takdirde $S_\lambda(\mathcal{F}) - \lim X_k = X_0$ yazılır. Bulanık sayıların bütün $\lambda-$ istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini $S_\lambda(\mathcal{F})$ ile göstereceğiz [40].

Teorem 4.3.25.

Eğer $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayı dizisine kuvvetli $\lambda-$ toplanabilir ise X_0 bulanık sayısına $\lambda-$ istatistiksel yakınsaktır [40].

Teorem 4.3.26.

$\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n} > 0$ olsun. Eğer $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 sayısına istatistiksel yakınsak ise aynı zamanda $\lambda-$ istatistiksel yakınsaktır [40].

İspat. $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$\{k \leq n : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\} \supset \{k \in I_n : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}$$

olduğundan

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \geq \frac{1}{n} |\{k \in I_n : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}|$$

$$= \frac{\lambda_n}{n} . \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}|$$

dır. Bu ifadede $n \to \infty$ için limit alınırsa ve $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n} > 0$ olduğundan sağ taraf da sıfıra gider. Bu $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisinin X_0 sayısına $\lambda-$ istatistiksel yakınsak olduğu ifade eder.

5. BULANIK SAYI DİZİLERİNDE β. DERECEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bulanık sayıların fark dizileri kavramı ilk olarak Savaş [41] tarafından verilmiştir. Altın v.d. [42-43], Et v.d. [44], Çolak v.d [45] ve Altınok v.d. [46] bulanık sayılarının genelleştirilmiş fark dizilerinin istatistiksel yakınsaklık kavramlarını tanımlamışlardır.

Sayı dizileri için β. dereceden istatistiksel yakınsaklık kavramı Gadjiev ve Orhan [23] tarafından ilk defa verilmiştir. Daha sonra β. dereceden istatistiksel yakınsak ile kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilme kavramları arasındaki ilişki Çolak [24] tarafından incelenmiştir. Ayrıca sayı dizileri için β. dereceden $\lambda-$ istatistiksel yakınsaklık kavramı Çolak ve Bektaş [25], Çolak [47] tarafından çalışılmıştır. Bulanık sayı dizileri için aynı kavramlar Altınok v.d. [48], Altınok [49] tarafından tanımlanmıştır. Bu bölümde genelleştirilmiş fark dizileri kullanılarak $0 < \beta \leq 1$ ve $\lambda = (\lambda_n) \in \Lambda$ dizisi için bulanık sayı dizilerinin β. dereceden $\lambda-$ istatistiksel yakınsak dizilerin $S_\lambda^\beta(\Delta_\mathcal{F}^m)$ uzayı ve β. dereceden $\lambda-$ toplanabilir dizilerin $w_\lambda^\beta(\Delta_\mathcal{F}^m)$ uzayı tanımlanıp ve bu uzaylara ilişkin bazı teoremler verilmiştir. Ayrıca Λ sınıfına ait $\lambda = (\lambda_n)$ ve $\mu = (\mu_n)$ dizileri için $S_\lambda^\gamma(\Delta_\mathcal{F}^m), S_\mu^\beta(\Delta_\mathcal{F}^m), w_\mu^\beta(\Delta_\mathcal{F}^m, p), w_\lambda^\gamma(\Delta_\mathcal{F}^m, p)$ uzayları arasındaki kapsama ilişkileri incelenmiştir.

5.1. Bulanık Sayı Dizilerinde β. Dereceden Δ_λ^m- İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 5.1.1.

$X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi olsun. Eğer $\{\Delta^m X_k : k \in \mathbb{N}\}$ bulanık sayılar kümesi sınırlı ise $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisine Δ^m- sınırlıdır denir. Bu durumda her $k \in \mathbb{N}$ için $K \leq \Delta^m X_k \leq M$ olacak şekilde K ve M bulanık sayıları mevcuttur.

Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $k > N$ için $d(\Delta^m X_k, X_0) < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir $N = N(\varepsilon)$ tamsayısı mevcut ise $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına Δ^m- yakınsaktır denir. Burada $\Delta^m X = (\Delta^m X_k) = (\Delta^{m-1} X_k - \Delta^{m-1} X_{k+1})$, $\Delta X = (X_k - X_{k+1})$ ve $\Delta^0 X = (X_k)$, $m \in \mathbb{N}$ dir. $\ell_\infty(\Delta_\mathcal{F}^m)$, $c(\Delta_\mathcal{F}^m)$ ve $c_0(\Delta_\mathcal{F}^m)$ ile sırasıyla bütün Δ^m- sınırlı, Δ^m- yakınsak ve sıfıra Δ^m- yakınsak bulanık sayı dizilerinin sınıflarını göstereceğiz [42].

$\ell_\infty(\Delta^m_{\mathcal{F}})$, $c(\Delta^m_{\mathcal{F}})$ ve $c_0(\Delta^m_{\mathcal{F}})$ bulanık dizi sınıfları sınırsız ve yakınsak olmayan bulanık dizileri de ihtiva eder. Şimdi bununla ilgili bir örnek verelim:

Örnek 5.1.2.

$$X_k(x) = \begin{cases} x-k+1, & x \in [k-1,k] \text{ ise} \\ -x+k+1, & x \in (k,k+1] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini göz önüne alalım. (X_k) dizisi Δ^m- sınırlı ve Δ^m- yakınsak bir dizidir. Ancak bu dizi ne sınırlı ne de yakınsaktır.

Gerçekten, (X_k) bulanık sayı dizisinin $\alpha-$ kesim kümesi $\alpha \in [0,1]$ için

$$X_k^\alpha = [k-1+\alpha, k+1-\alpha]$$

$$\Delta X_k^\alpha = [-3+2\alpha, 1-2\alpha]$$

olup, buradan $m \in \mathbb{N}$ için yukarıdaki şekilde m defa fark almaya devam edilirse

$$\Delta^m X_k^\alpha = [2^m(\alpha-1), 2^m(1-\alpha)]$$

elde edilir. Bu takdirde $X_0{}^\alpha = [2^m(\alpha-1), 2^m(1-\alpha)]$ olmak üzere $m \geq 2$ için $(\Delta^m X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına yakınsaktır. Ayrıca bu dizi sınırlı bir dizidir.

Buna göre Δ^m- sınırlı diziler sınıfı ve Δ^m- yakınsak dizilerin sınıfları, sınırlı ve yakınsak bulanık dizi sınıflarından daha geneldir. Ayrıca $c_0(\Delta^m_{\mathcal{F}}) \subset c(\Delta^m_{\mathcal{F}}) \subset \ell_\infty(\Delta^m_{\mathcal{F}})$ olup bu kapsama kesindir.

Örnek 5.1.3.

$$X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} x-2, & x \in [2,3] \text{ ise} \\ -x+4, & x \in (3,4] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & , k \text{ tek ise} \\ \left.\begin{array}{ll} x-5, & x \in [5,6] \text{ ise} \\ -x+7, & x \in (6,7] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & , k \text{ çift ise} \end{cases}$$

bulanık sayı dizisini göz önüne alalım. Bu dizi Δ^m- sınırlı olduğu halde Δ^m- yakınsak değildir. Gerçekten, (X_k) bulanık sayı dizisi için $\alpha-$ kesim kümesi $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere,

$$X_k^\alpha = \begin{cases} [2+\alpha, 4-\alpha], & k \text{ tek ise} \\ [5+\alpha, 7-\alpha], & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

olup buradan

$$\Delta X_k^\alpha = \begin{cases} [2\alpha-5, -1-2\alpha], & k \text{ tek ise} \\ [1+2\alpha, 5-2\alpha], & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

aynı zamanda $m \in \mathbb{N}$ için yukarıdaki şekilde m defa fark almaya devam edilirse

$$\Delta^m X_k^\alpha = \begin{cases} [2^m\alpha - 2^{m-1}5, -2^{m-2} - 2^m\alpha], & k \text{ tek ise} \\ [2^m\alpha + 2^{m-2}, 2^{m-1}5 - 2^m], & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

elde edilir. Bu takdirde $m \geq 2$ için $(\Delta^m X_k)$ dizisi sınırlıdır, ancak yakınsak değildir.

Tanım 5.1.4.

$X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi olsun. $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir X_0 bulanık sayısı mevcut ise, yani $h.h.k$ için $d(\Delta^m X_k, X_0) < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir X_0 bulanık sayısı varsa $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına Δ^m- istatistiksel yakınsaktır denir. (X_k) dizisi X_0 bulanık sayısına Δ^m- istatistiksel yakınsak ise $S(\mathcal{F}) - \lim \Delta^m X_k = X_0$ veya $\Delta^m X_k \to X_0\,(S(\mathcal{F}))$ yazılır. Tüm Δ^m- istatistiksel yakınsak bulanık sayı dizilerinin kümesini $S(\Delta^m_{\mathcal{F}})$ ile göstereceğiz [42].

Klasik kümeler için (x_k) dizisi ℓ ye istatistiksel yakınsarken $(\Delta^m x_k)$ dizisi 0 a istatistiksel yakınsar (yani $x_k \xrightarrow{s} \ell$ ise $\Delta^m x_k \xrightarrow{s} 0$). Aşağıdaki örnek bunun bulanık sayı dizileri için geçerli olmadığını gösterir.

Örnek 5.1.5.

(X_k) bulanık sayı dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{matrix} x-k, & k \leq x \leq k+1 \\ -x+k+2, & k+1 < x \leq k+2 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{matrix}\right\}, & \begin{matrix} k = n^2 \text{ ise} \\ (n = 1,2,3,...) \end{matrix} \\ \left.\begin{matrix} x-2, & 2 \leq x \leq 3 \\ -x+4, & 3 < x \leq 4 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{matrix}\right\}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

buradan

$$X_k^\alpha = \begin{cases} [k+\alpha, k+2-\alpha], & k = n^2 \text{ ise} \\ [2+\alpha, 4-\alpha], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$\Delta X_k^\alpha = \begin{cases} [k-4+2\alpha, k-2\alpha], & k = n^2 \text{ ise} \\ [-k-1+2\alpha, -k+3-2\alpha], & k+1 = n^2 \text{ ise } (n > 1) \\ [-2+2\alpha, 2-2\alpha], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

elde edilir. Böylece $\ell_1^\alpha = [2+\alpha, 4-\alpha]$ olmak üzere $X_k \xrightarrow{s} \ell_1$ dır ve $m \in \mathbb{N}$ için yukarıdaki şekilde m defa fark almaya devam edilirse. $\ell_2^\alpha = [2^m(\alpha-1), 2^m(1-\alpha)]$ olmak üzere $\Delta^m X_k \xrightarrow{s} \ell_2$ dır. Burada $\ell_2^\alpha = [2^m(\alpha-1), 2^m(1-\alpha)] \neq \bar{0}^\alpha$ dır.

Tanım 5.1.6.

$X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi, Δ^m fark operatörü ve $\beta \in (0,1]$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^\beta} \left|\{k \in I_n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

oluyorsa $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına β. dereceden Δ_λ^m- istatistiksel yakınsaktır denir. Bu takdirde $S_\lambda^\beta(\mathcal{F}) - \lim \Delta^m X_k = X_0$ yazılır. Tüm β. dereceden Δ_λ^m- istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini $S_\lambda^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}^m)$ ile göstereceğiz.

$\beta = 1$ için Δ_λ^m- istatistiksel yakınsaklık ile β. dereceden Δ_λ^m- istatistiksel yakınsaklık aynıdır. $\beta \in (0,1]$ için β dereceden Δ_λ^m- istatistiksel yakınsaklık iyi tanımlı olduğu halde $\beta > 1$ için iyi tanımlı değildir (Bkz. Örnek 5.1.7).

Örnek 5.1.7.

$$X_k(x)=\begin{cases}\left.\begin{array}{ll} x-3, & 3\le x\le 4 \text{ ise}\\ -x+5, & 4<x\le 5 \text{ ise}\\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{array}\right\}, & k \text{ tek ise}\\ \left.\begin{array}{ll} x-1, & 1\le x\le 2 \text{ ise}\\ -x+3, & 2<x\le 3 \text{ ise}\\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{array}\right\}, & k \text{ çift ise}\end{cases}$$

bulanık sayı dizisini alalım. Bu takdirde (X_k) ve $(\Delta^m X_k)$ dizilerinin $\alpha-$ seviye kümelerini sırasıyla

$$X_k^\alpha=\begin{cases}[3+\alpha,5-\alpha], & k \text{ tek ise}\\ [1+\alpha,3-\alpha], & k \text{ çift ise}\end{cases}$$

ve

$$\Delta^m X_k^\alpha=\begin{cases}[2^m\alpha,2^m(2-\alpha)], & k \text{ tek ise}\\ [2^m(\alpha-2),-2^m\alpha], & k \text{ çift ise}\end{cases}$$

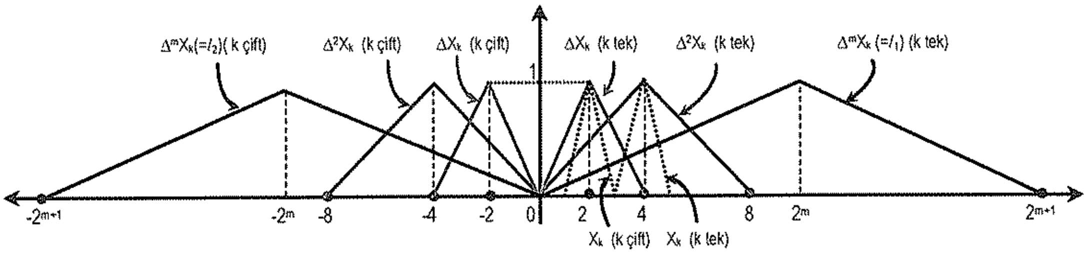
şeklinde hesaplayabiliriz. Buradan $\beta>1$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n^\beta}\left|\{k\in I_n: d(\Delta^m X_k^\alpha,l_1^\alpha)\ge\varepsilon\}\right|\le\lim_{n\to\infty}\frac{[\lambda_n]+1}{2\lambda_n^\beta}=0$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n^\beta}\left|\{k\in I_n: d(\Delta^m X_k^\alpha,l_2^\alpha)\ge\varepsilon\}\right|\le\lim_{n\to\infty}\frac{[\lambda_n]+1}{2\lambda_n^\beta}=0$$

elde edilir, burada $l_1^\alpha=[2^m\alpha,2^m(2-\alpha)]$ ve $l_2^\alpha=[2^m(\alpha-2),-2^m\alpha]$ olmak üzere $X=(X_k)$ dizisi l_1 ve l_2 bulanık sayılarının ikisine de β. dereceden Δ_λ^m- istatistiksel yakınsak olur (Şekil 5.1.1). Bu ise Δ_λ^m- istatistiksel yakınsaklık tanımı gereğince mümkün değildir.



Şekil 5.1.1. (X_k) bulanık sayı dizisi l_1 ve l_2 ye β dereceden Δ_λ^m – istatistiksel yakınsaktır.

Sonuç 5.1.8.

β. dereceden $\Delta_{\lambda}^{m}-$ istatistiksel yakınsaklığın tanımında β nın seçimi önemli rol oynadığı gibi aynı zamanda $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\lambda_n = \sqrt[k]{n}$ şeklinde alınırsa $\beta > k$ için, $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına β. dereceden $\Delta_{\lambda}^{m}-$ istatistiksel yakınsak olmaz.

Tanım 5.1.9.

$\beta \in (0,1]$ ve p bir pozitif reel sayı olsun. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^{\beta}} \sum_{k\in I_n} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p = 0$$

olacak şekilde bir X_0 bulanık sayısı varsa $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına β. dereceden kuvvetli $\Delta_{\lambda p}^{m}-$ Cesàro toplanabilirdir denir.

$\beta = 1$ olması halinde β. dereceden kuvvetli $\Delta_{\lambda p}^{m}-$ Cesàro toplanabilme, kuvvetli $\Delta_{\lambda p}^{m}-$ Cesàro toplanabilmeye indirgenir. β. dereceden tüm kuvvetli $\Delta_{\lambda p}^{m}-$ Cesàro toplanabilir dizilerin kümesini $w_{\lambda}^{\beta}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}, p)$ ile göstereceğiz.

Teorem 5.1.10.

$X = (X_k)$ ve $Y = (Y_k)$ iki bulanık sayı dizisi ve $\beta \in (0,1]$ olsun. Bu takdirde

i) $S_{\lambda}^{\beta}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}) - \lim X_k = X_0$ ve $c \in \mathbb{R}$ ise $S_{\lambda}^{\beta}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}) - \lim cX_k = cX_0$ dir.

ii) $S_{\lambda}^{\beta}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}) - \lim X_k = X_0$ ve $S_{\lambda}^{\beta}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}) - \lim Y_k = Y_0$ ise $S_{\lambda}^{\beta}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}) - \lim (X_k + Y_k) = X_0 + Y_0$ dır.

İspat. *i)*

$$\frac{1}{\lambda_n^{\beta}} \left|\{k \in I_n : d(c\Delta^m X_k, cX_0) \geq \varepsilon\}\right| \leq \frac{1}{\lambda_n^{\beta}} \left|\left\{k \in I_n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \frac{\varepsilon}{|c|}\right\}\right|$$

dır.

ii)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda_n^\beta}\left|\{k \in I_n : d\left(\Delta^m\left(X_k+Y_k\right), X_0+Y_0\right) \geq \varepsilon\}\right| \\
&\qquad \leq \frac{1}{\lambda_n^\beta}\left|\{k \in I_n : d\left(\Delta^m X_k, X_0\right)+d\left(\Delta^m Y_k, Y_0\right) \geq \varepsilon\}\right| \\
&\qquad \leq \frac{1}{\lambda_n^\beta}\left|\left\{k \in I_n : d\left(\Delta^m X_k, X_0\right) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| \\
&\qquad + \frac{1}{\lambda_n^\beta}\left|\left\{k \in I_n : d\left(\Delta^m Y_k, Y_0\right) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|
\end{aligned}$$

eşitsizliği gözönüne alındığında istenilen sonuç kolayca elde edilir. $\lambda_n = n, \beta = 1, m = 0$ alındığında istatistiksel yakınsaklık, $\lambda-$ istatistiksel yakınsaklık ve β. dereceden Δ_λ^m- istatistiksel yakınsaklık kavramlarının çakıştığına dikkat etmek gerekir.

Aynı zamanda, [46] dan $S_\lambda^\beta\left(\Delta_{\mathcal{F}}^m\right)$ nın $S_\lambda\left(\Delta_{\mathcal{F}}^m\right)$ e eşit olmadığını belirtmemiz gerekir. Eğer, $0 < \beta < 1$ ise $\lambda_n = n^\beta$ için $S_\lambda^\beta\left(\Delta_{\mathcal{F}}^m\right) \subseteq S_\lambda\left(\Delta_{\mathcal{F}}^m\right)$ olur. Eğer, $\beta = 1$ ve $m = 0$ için $\lambda_n = n$ aldığımızda $S_\lambda^\beta\left(\Delta_{\mathcal{F}}^m\right) = S_\lambda\left(\Delta_{\mathcal{F}}^m\right) = S\left(\mathcal{F}\right)$ sonucunu elde ederiz [46].

Her Δ^m- yakınsak $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisinin β. dereceden Δ_λ^m- yakınsak olduğunu görmek kolaydır. Fakat tersi genelde doğru değildir, aşağıdaki örnekte bunu görebiliriz.

Örnek 5.1.11.

$X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{cc} x-3, & 3 \leq x \leq 4 \text{ ise} \\ -x+5, & 4 < x \leq 5 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & k = n^3 \text{ ise} \\ \left.\begin{array}{cc} x, & 0 \leq x \leq 1 \text{ ise} \\ -x+2, & 1 < x \leq 2 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & k \neq n^3 \text{ ise} \end{cases}$$

Bu durumda (X_k) ve $(\Delta^m X_k)$ dizilerinin $\alpha-$ seviye kümeleri

$$X_k^\alpha = \begin{cases} [3+\alpha, 5-\alpha], & k = n^3 \text{ ise} \\ [\alpha, 2-\alpha], & k \neq n^3 \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$\Delta X_k^\alpha = \begin{cases} [1+2\alpha, 5-2\alpha], & k = n^3 \text{ ise} \\ [-5+2\alpha, -1-2\alpha], & k+1 = n^3 \text{ ise} \\ [-2+2\alpha, 2-2\alpha], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklindedir. Bu şekilde m defa fark işlemine devam edilirse $\beta > \frac{1}{3}$ için $X_0^\alpha = [2^m(\alpha-1), 2^m(1-\alpha)]$ olmak üzere $X = (X_k)$ dizisinin X_0 bulanık sayısına β. dereceden Δ^m- istatistiksel yakınsak olduğu görülebilir fakat bu dizi Δ^m- yakınsak değildir.

Teorem 5.1.12.

$0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ olsun. Eğer $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına β. dereceden Δ_λ^m- istatistiksel yakınsak ise bu takdirde bu dizi X_0 bulanık sayısına γ. dereceden Δ_λ^m- istatistiksel yakınsaktır. Yani $S_\lambda^\beta(\Delta_\mathcal{F}^m) \subseteq S_\lambda^\gamma(\Delta_\mathcal{F}^m)$ dir ve bu kapsama $\beta < \gamma$ olacak şekildeki β ve γ sayıları için kesindir.

İspat. $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ olsun. Bu takdirde her $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{\lambda_n^\gamma}\left|\{k \in I_n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}\right| \leq \frac{1}{\lambda_n^\beta}\left|\{k \in I_n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}\right|$$

olduğundan $S_\lambda^\beta(\Delta_\mathcal{F}^m) \subseteq S_\lambda^\gamma(\Delta_\mathcal{F}^m)$ elde edilir.

Şimdi bu kapsamanın kesin olduğunu gösterelim. Bunun için $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} x-k, & k \leq x \leq k+1 \text{ ise} \\ -x+k+2, & k+1 < x \leq k+2 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & \begin{array}{c} k = n^2 \\ (n = 1,2,3,...) \text{ ise} \end{array} \\ \left.\begin{array}{ll} x+1, & -1 \leq x \leq 0 \text{ ise} \\ -x+1, & 0 < x \leq 1 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} = X_0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Bu durumda (X_k) ve (ΔX_k) dizilerinin $\alpha-$ seviye kümelerini sırasıyla

$$X_k^\alpha = \begin{cases} [k+\alpha, k+2-\alpha], & k = n^2 \text{ ise} \\ [\alpha-1, 1-\alpha], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$\Delta X_k^\alpha = \begin{cases} [3\alpha+2, 8-3\alpha], & k=n^2 \text{ ise} \\ [-8+3\alpha, -2-3\alpha], & k+1=n^2 \text{ ise} \\ [-3+3\alpha, 3-3\alpha], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde buluruz. Özel olarak $\lambda_n = n$ alınırsa ve yukarıdaki şekilde m defa fark almaya devam edilirse,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^\gamma} \left|\{k \in I_n : d([\Delta^m X_k]^\alpha, [X_0]^\alpha) \geq \varepsilon\}\right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^\gamma}$$

yazabiliriz. Böylece $X_0^\alpha = [2^m(\alpha-1), 2^m(1-\alpha)]$ olmak üzere $\gamma \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ için (X_k) dizisinin X_0 bulanık sayısına γ. dereceden $\Delta_\lambda^m -$ istatistiksel yakınsak olduğu görülür. Fakat bu dizi $\beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ için $\Delta_\lambda^m -$ istatistiksel yakınsak değildir.

Sonuç 5.1.13.

$\beta \in (0,1]$ için $X = (X_k)$ dizisi X_0 bulanık sayısına β. dereceden $\Delta_\lambda^m -$ istatistiksel yakınsak ise bu dizi X_0 bulanık sayısına $\Delta_\lambda^m -$ istatistiksel yakınsaktır yani $S_\lambda^\beta(\Delta_\mathcal{F}^m) \subset S_\lambda(\Delta_\mathcal{F}^m)$ dir ve bu kapsama kesindir.

Teorem 5.1.14.

$S(\Delta_\mathcal{F}^m) \subset S_\lambda^\beta(\Delta_\mathcal{F}^m)$ olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n\to\infty} \inf \frac{\lambda_n^\beta}{n} > 0$ olmasıdır.

İspat. İlk olarak $\lim_{n\to\infty} \inf \frac{\lambda_n^\beta}{n} > 0$ olduğunu kabul edelim. $\varepsilon > 0$ alalım,

$$\{k \leq n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\} \supset \{k \in I_n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}$$

olduğundan,

$$\frac{1}{n} \left|\{k \leq n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}\right| \geq \frac{1}{n} \left|\{k \in I_n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}\right|$$

$$= \frac{\lambda_n^\beta}{n} \cdot \frac{1}{\lambda_n^\beta} \left|\{k \in I_n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}\right|$$

dır. Her iki taraftan $n \to \infty$ için limit alırsak β. dereceden $\Delta_\lambda^m -$ istatistiksel yakınsak olduğu görülür.

Kabul edelim ki $\lim\limits_{n\to\infty}\inf \frac{\lambda_n^{\beta}}{n} = 0$ olsun aşağıda verilen örneği ele alalım. $\lim\limits_{n\to\infty}\inf \frac{\lambda_n^{\beta}}{n} = 0$ olduğundan $\frac{\lambda_{n_j}^{\beta}}{n_j} < \frac{1}{j}$ $(j = 1, 2, 3, ...)$ olacak şekilde (n_j) alt dizisini elde edebiliriz. Şimdide (X_k) bulanık sayı dizisini,

$$X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} x-3, & 3 \le x \le 4 \text{ ise} \\ -x+5, & 4 \le x \le 5 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & k \in I_{n_j} \text{ise} \\ \left.\begin{array}{ll} x-1, & 1 \le x \le 2 \text{ ise} \\ -x+3, & 2 \le x \le 3 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde alalım. (X_k) dizisinin $\alpha-$ seviye kümesini hesapladığımızda,

$$[X_k]^{\alpha} = \begin{cases} [3+\alpha, 5-\alpha], & k \in I_{n_j} \text{ ise} \\ [1+\alpha, 3-\alpha], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

bulunur. Buradan (X_k) dizisinin istatistiksel yakınsak olduğu halde $\Delta_{\lambda}^{m}-$ istatistiksel yakınsak olmadığı sonucu çıkar. (X_k) dizisi Sonuç 5.1.14. teki $S_{\lambda}^{\beta}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}) \subset S_{\lambda}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m})$ kapsamasıyla β. dereceden istatistiksel yakınsak olmadığı görülür, dolayısıyla bu bir çelişkidir. O halde $\lim\limits_{n\to\infty}\inf \frac{\lambda_n^{\beta}}{n} > 0$ dır.

Teorem 5.1.15.

$0 < \beta \le \gamma \le 1$ ve $p > 0$ olsun. $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına β. dereceden kuvvetli $\Delta_{\lambda p}^{m}-$ Cesàro toplanabilir ise bu takdirde bu dizi X_0 sayısına γ. dereceden kuvvetli $\Delta_{\lambda p}^{m}-$ Cesàro toplanabilirdir. Yani $w_{\lambda}^{\beta}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}, p) \subseteq w_{\lambda}^{\gamma}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}, p)$ dir ve bu kapsama $\beta < \gamma$ olacak şekildeki bazı β ve γ için kesindir.

İspat. $0 < \beta \le \gamma \le 1$ iken $X = (X_k)$ dizisi X_0 sayısına β. dereceden kuvvetli $\Delta_{\lambda p}^{m}-$ Cesàro toplanabilir olsun. Bu durumda $p > 0$ için

$$\frac{1}{\lambda_n^{\gamma}} \sum_{k\in I_n}^{n} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p \le \frac{1}{\lambda_n^{\beta}} \sum_{k\in I_n}^{n} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p$$

yazabiliriz. Buradan eşitliğin sağ tarafı $n \to \infty$ için sıfıra gittiğinden $X = (X_k)$ dizisi X_0 sayısına γ dereceden kuvvetli $\Delta_{\lambda p}^{m}-$ Cesàro toplanabilirdir. Yani $w_{\lambda}^{\beta}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}, p) \subseteq w_{\lambda}^{\gamma}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}, p)$ dir.

Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} x-3, & 3 \le x \le 4 \text{ ise} \\ -x+5, & 4 \le x \le 5 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\}, & k = n^3 \\ \left.\begin{array}{ll} x-1, & 1 \le x \le 2 \text{ ise} \\ -x+3, & 2 \le x \le 3 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\}, & k \ne n^3 \end{cases}$$

$$X_k^\alpha = \begin{cases} [3+\alpha, 5-\alpha], & k = n^3 \text{ ise} \\ [1+\alpha, 3-\alpha], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Bu taktirde (X_k) ve (ΔX_k) nın $\alpha-$ seviye kümelerini aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz.

$$\Delta X_k^\alpha = \begin{cases} [2\alpha, 4-2\alpha)], & k = n^3 \text{ ise} \\ [2\alpha-4, -2\alpha], & k+1 = n^3 \text{ ise} \\ [2\alpha-2, 2-2\alpha], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Buradan $\lambda_n = n$ ve m defa farkını aldığımızda $m \ge 1, \gamma \in \left(\frac{1}{3}, 1\right]$ ve $p = 1$ için

$$\frac{1}{\lambda_n^\gamma} \sum_{k \in I_n}^{n} \left[d\left(\Delta^m X_k^\alpha, X_0^\alpha\right)\right]^p \le \frac{2(m+1)\sqrt[3]{n}}{n^\gamma} \tag{5.1}$$

elde edilir. (5.1) eşitsiziliğinin sağ tarafı $n \to \infty$ için sıfıra gittiğinden $X = (X_k)$ dizisi X_0 sayısına γ. dereceden kuvvetli $\Delta_{\lambda p}^m-$ Cesàro toplanabilirdir. Burada $X_0^\alpha = [2^m(\alpha-1), 2^m(\alpha-1)]$ dır. Diğer taraftan $\beta \in \left(0, \frac{1}{3}\right]$ ve $p = 1$ için,

$$\frac{2m\left[\sqrt[3]{n}-1\right]}{n^\beta} \le \frac{1}{\lambda_n^\beta} \sum_{k \in I_n}^{n} \left[d\left(\Delta^m X_k^\alpha, X_0^\alpha\right)\right]^p \tag{5.2}$$

eşitsizliği elde edilir. (5.2) eşitsiziliğinin sağ tarafı $n \to \infty$ için sıfıra gittiğinden $X = (X_k)$ dizisi X_0 sayısına β. dereceden kuvvetli $\Delta_{\lambda p}^m-$ Cesàro toplanabilir olmadığı görülür. Bu ispatı tamamlar.

Sonuç 5.1.16.

$0 < \beta \le \gamma \le 1$ ve $p > 0$ olsun. Bu takdirde;

i) $w_{\lambda}^{\beta}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}, p) = w_{\lambda}^{\gamma}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}, p)$ olması için gerek ve yeter şart $\beta = \gamma$ olmasıdır.

ii) Her $\beta \in (0,1]$ için $w_{\lambda}^{\beta}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}, p) \subseteq w_{\lambda}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}, p)$ dir.

Teorem 5.1.17.

$0 < p < q < \infty$ ve $\beta \in (0,1]$ olsun. Eğer bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına β. dereceden kuvvetli $\Delta_{\lambda q}^{m}-$ Cesàro toplanabilir ise bu takdirde X_0 bulanık sayısına β. dereceden kuvvetli $\Delta_{\lambda p}^{m}-$ Cesàro toplanabilirdir, yani $w_{\lambda}^{\beta}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}, q) \subseteq w_{\lambda}^{\beta}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}, p)$ dir.

Teorem 5.1.18.

$0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ ve p pozitif bir reel sayı olsun. Eğer bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına β. dereceden kuvvetli $\Delta_{\lambda p}^{m}-$ Cesàro toplanabilir ise bu takdirde X_0 bulanık sayısına γ. dereceden $\Delta_{\lambda}^{m}-$ istatistiksel yakınsaktır, yani $w_{\lambda}^{\beta}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}, p) \subseteq S_{\lambda}^{\gamma}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m})$ dir.

İspat. $p > 0$ ve $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Herhangi bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi için

$$\sum_{k \in I_n} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p = \sum_{\substack{k \in I_n \\ d(\Delta^m X_k, X_0) < \varepsilon}} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p + \sum_{\substack{k \in I_n \\ d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon}} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p$$

ve dolayısıyla

$$\geq \sum_{\substack{k \in I_n \\ d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon}} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p \geq |\{k \in I_n : [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p \geq \varepsilon\}| .\varepsilon^p$$

buradan da,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n^{\beta}} \sum_{k \in I_n} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p &\geq \frac{1}{\lambda_n^{\beta}} |\{k \in I_n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| .\varepsilon^p \\ &\geq \frac{1}{\lambda_n^{\gamma}} |\{k \in I_n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| .\varepsilon^p \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece eğer bir $X = (X_k)$ dizisi X_0 bulanık sayısına β. dereceden kuvvetli $\Delta_{\lambda p}^{m}-$ Cesàro toplanabilir ise bu dizi X_0 bulanık sayısına γ. dereceden $\Delta_{\lambda}^{m}-$ istatistiksel yakınsaktır.

Sonuç 5.1.19.

$\beta \in (0,1]$ ve $0 < p < \infty$ olsun. Eğer bir (X_k) bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına β. dereceden kuvvetli $\Delta_{\lambda p}^{m}-$ Cesàro toplanabilir ise bu durumda X_0 bulanık sayısına β. dereceden $\Delta_{\lambda}^{m}-$ istatistiksel yakınsaktır. Yani $w_{\lambda}^{\beta}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}, p) \subset S_{\lambda}^{\beta}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m})$ dir.

Sonuç 5.1.20. $\beta \in (0,1]$ ve $0 < p < \infty$ olsun. Eğer $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayı dizisine β. dereceden kuvvetli $\Delta_{\lambda p}^{m}-$ Cesàro toplanabilir ise X_0 bulanık sayısına $\Delta_{\lambda}^{m}-$ istatistiksel yakınsaktır. Yani $w_{\lambda}^{\beta}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}, p) \subset S_{\lambda}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m})$ dir. $\beta \in (0,1)$ için kapsama kesindir.

Teorem 5.1.21.

$\lambda, \mu \in \Lambda$ ve $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olsun. γ ve β sayıları, $0 < \gamma \leq \beta \leq 1$ olacak şekilde iki reel sayı olsun.

Bu taktirde;

$i)\ \lim\limits_{n\to\infty} \inf \frac{\lambda_n^{\gamma}}{\mu_n^{\beta}} > 0$ ise $S_{\mu}^{\beta}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}) \subseteq S_{\lambda}^{\gamma}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m})$ (5.3)

$ii)\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{\lambda_n^{\beta}} = 1$ ise $S_{\lambda}^{\gamma}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}) \subseteq S_{\mu}^{\beta}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m})$ (5.4)

dır.

İspat. $i)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ için (5.3) sağlansın. $\lambda_n \leq \mu_n$ olduğundan $I_n = [n - \lambda_n + 1, n] \subset J_n = [n - \mu_n + 1, n]$ olup $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \in J_n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\} \supseteq \{k \in I_n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}$$

yazabiliriz. Buradan,

$$\frac{1}{\mu_n^{\beta}} \left|\{k \in J_n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}\right| \geq \frac{\lambda_n^{\gamma}}{\mu_n^{\beta}} \cdot \frac{1}{\lambda_n^{\gamma}} \left|\{k \in I_n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}\right|$$

elde edilir. (5.3) kullanılırsa $S_{\mu}^{\beta}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}) \subseteq S_{\lambda}^{\gamma}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m})$ olur.

$ii)$ $X = (X_k) \in S_{\lambda}^{\gamma}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m})$ olsun ve (5.4) sağlansın $I_n \subset J_n$ olduğundan $\varepsilon > 0$ ve her $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{\mu_n^{\beta}} \left| \{ k \in J_n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon \} \right| \\
= \; & \frac{1}{\mu_n^{\beta}} \left| \{ n - \mu_n + 1 \leq k \leq n - \lambda_n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon \} \right| \\
& + \frac{1}{\mu_n^{\beta}} \left| \{ k \in I_n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon \} \right| \\
\leq \; & \frac{\mu_n - \lambda_n}{\mu_n^{\beta}} + \frac{1}{\lambda_n^{\gamma}} \left| \{ k \in I_n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon \} \right| \\
\leq \; & \left(\frac{\mu_n}{\lambda_n^{\beta}} - \frac{\lambda_n^{\beta}}{\lambda_n^{\beta}} \right) + \frac{1}{\lambda_n^{\gamma}} \left| \{ k \in I_n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon \} \right| \\
\leq \; & \left(\frac{\mu_n}{\lambda_n^{\beta}} - 1 \right) + \frac{1}{\lambda_n^{\gamma}} \left| \{ k \in I_n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon \} \right|
\end{aligned}
$$

yazabiliriz. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\mu_n}{\lambda_n^{\beta}} = 1$ ve $X = (X_k) \in S_\lambda^\gamma(\Delta_{\mathcal{F}}^m)$ olduğundan $S_\lambda^\gamma(\Delta_{\mathcal{F}}^m) \subseteq S_\mu^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}^m)$ olur. Teorem 5.1.22 den aşağıdaki iki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.1.22.

$\lambda, \mu \in \Lambda, \gamma \in (0,1]$ olsun ve (5.3) sağlansın. Bu taktirde,

i) $S_\mu^\gamma(\Delta_{\mathcal{F}}^m) \subseteq S_\lambda^\gamma(\Delta_{\mathcal{F}}^m)$,

ii) $S_\mu(\Delta_{\mathcal{F}}^m) \subseteq S_\lambda^\gamma(\Delta_{\mathcal{F}}^m)$,

iii) $S_\mu(\Delta_{\mathcal{F}}^m) \subseteq S_\lambda(\Delta_{\mathcal{F}}^m)$,

dır.

Sonuç 5.1.23.

$\lambda, \mu \in \Lambda, \gamma \in (0,1]$ olsun ve (5.4) sağlansın. Bu taktirde,

i) $S_\lambda^\gamma(\Delta_{\mathcal{F}}^m) \subseteq S_\mu^\gamma(\Delta_{\mathcal{F}}^m)$,

ii) $S_\lambda^\gamma(\Delta_{\mathcal{F}}^m) \subseteq S_\mu(\Delta_{\mathcal{F}}^m)$,

iii) $S_\lambda(\Delta_{\mathcal{F}}^m) \subseteq S_\mu(\Delta_{\mathcal{F}}^m)$,

dır.

Teorem 5.1.24.

$\lambda, \mu \in \Lambda$ ve $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olsun. γ ve β sayıları, $0 < \gamma \leq \beta \leq 1$ olacak şekilde iki reel sayı olsun. Bu taktirde,

i) (5.3) sağlanırsa $w_\mu^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}^m, p) \subseteq w_\lambda^\gamma(\Delta_{\mathcal{F}}^m, p)$,

ii) (5.4) sağlansın ve $l_\infty(\Delta_{\mathcal{F}}^m) \cap w_\lambda^\gamma(\Delta_{\mathcal{F}}^m, p) \subseteq w_\mu^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}^m, p)$,

dır.

İspat. *i)* (5.3) ün sağlandığını kabul edelim. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olduğundan $I_n \subseteq J_n$ olup,

$$\frac{1}{\mu_n^\beta} \sum_{k \in J_n} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p \geq \frac{\lambda_n^\gamma}{\mu_n^\beta} \frac{1}{\lambda_n^\gamma} \sum_{k \in J_n} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p$$

olup $w_\mu^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}^m, p) \subseteq w_\lambda^\gamma(\Delta_{\mathcal{F}}^m, p)$ elde edilir.

ii) $X = (X_k) \in l_\infty(\Delta_{\mathcal{F}}^m) \cap w_\lambda^\gamma(\Delta_{\mathcal{F}}^m, p)$ olsun ve (5.4) sağlansın. $X = (X_k) \in l_\infty(\Delta_{\mathcal{F}}^m)$ olduğundan her k için $d(\Delta^m X_k, X_0) \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır. Her $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_n^\beta} \sum_{k \in J_n} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p &= \frac{1}{\mu_n^\beta} \sum_{k \in J_n - I_n} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p + \frac{1}{\mu_n^\beta} \sum_{k \in I_n} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p \\
&\leq \left(\frac{\mu_n - \lambda_n}{\mu_n^\beta}\right) M^p + \frac{1}{\mu_n^\beta} \sum_{k \in I_n} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p \\
&\leq \left(\frac{\mu_n}{\lambda_n^\beta} - 1\right) M^p + \frac{1}{\lambda_n^\gamma} \sum_{k \in I_n} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p
\end{aligned}$$

olur. Buradan, $X = (X_k) \in w_\lambda^\gamma(\Delta_{\mathcal{F}}^m, p)$ dır. Böylece $l_\infty(\Delta_{\mathcal{F}}^m) \cap w_\lambda^\gamma(\Delta_{\mathcal{F}}^m, p) \subseteq w_\mu^\beta(\Delta_{\mathcal{F}}^m, p)$ bulunur.

Sonuç 5.1.25.

$\lambda = (\lambda_n)$ ve $\mu = (\mu_n)$, Λ de $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olacak şekilde iki dizi olsun. $\gamma \in (0, 1]$ için (5.3) sağlanırsa,

i) $w_\mu^\gamma(\Delta_{\mathcal{F}}^m, p) \subset w_\lambda^\gamma(\Delta_{\mathcal{F}}^m, p)$,

ii) $w_\mu(\Delta_{\mathcal{F}}^m, p) \subset w_\lambda^\gamma(\Delta_{\mathcal{F}}^m, p)$,

iii) $w_\mu(\Delta_{\mathcal{F}}^m, p) \subset w_\lambda(\Delta_{\mathcal{F}}^m, p)$,

dır.

Sonuç 5.1.26.

$\lambda = (\lambda_n)$ ve $\mu = (\mu_n)$, Λ de $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olacak şekilde iki dizi olsun. $\gamma \in (0, 1]$ için (5.4) sağlanırsa, aşağıdaki önermeler doğrudur:

i) $l_\infty(\Delta_{\mathcal{F}}^m) \cap w_\lambda^\gamma(\Delta_{\mathcal{F}}^m, p) \subseteq w_\mu^\gamma(\Delta_{\mathcal{F}}^m, p)$,

ii) $l_\infty(\Delta_{\mathcal{F}}^m) \cap w_\lambda^\gamma(\Delta_{\mathcal{F}}^m, p) \subseteq w_\mu(\Delta_{\mathcal{F}}^m, p)$,

dır.

Teorem 5.1.27.

$0 < \gamma \leq \beta \leq 1$, $0 < p < \infty$ ve $\lambda, \mu \in \Lambda$ olsun.

$i)$ (5.3) sağlansın. Bir dizi X_0 a kuvvetli $w_{\mu}^{\beta}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}, p) -$ toplanabilir ise X_0 a $S_{\lambda}^{\gamma}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}) -$ istatistiksel yakınsaktır.

$ii)$ (5.4) sağlansın ve $X = (X_k)$, $\Delta^m -$ sınırlı bir dizi olsun. Bu dizi X_0 a kuvvetli $w_{\mu}^{\beta}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}, p) -$ toplanabilirdir.

İspat. $i)$ $X = (X_k) \in w_{\mu,}^{\beta}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}, p)$ olsun ve $\varepsilon > 0$ alalım. Bu taktirde,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in J_n} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p &\geq \sum_{k\in I_n} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p \geq \sum_{\substack{k\in I_n \\ d(\Delta^m X_k, X_0)\geq\varepsilon}} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p \\ &\geq \varepsilon^p \left|\{k \in I_n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}\right|\end{aligned}$$

ve böylece,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_n^{\beta}} \sum_{k\in J_n} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^p &\geq \frac{1}{\mu_n^{\beta}} \left|\{k \in I_n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}\right| \varepsilon^p \\ &\geq \frac{\lambda_n^{\gamma}}{\mu_n^{\beta}} \frac{1}{\lambda_n^{\gamma}} \left|\{k \in I_n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}\right| \varepsilon^p\end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan (5.3) sağlandığı için $X = (X_k)$ dizisi X_0 a kuvvetli $w_{\mu}^{\beta}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}, p)$ toplanabilir ise X_0 a $S_{\lambda}^{\gamma}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}) -$ istatistiksel yakınsaktır.

$ii)$ $X_k \to X_0(S_{\lambda}^{\gamma}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}))$ ve $X = (X_k) \in l_{\infty}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m})$ olsun. Bu taktirde her k için $d(\Delta^m X_k, X_0) \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ vardır.

Her $\varepsilon > 0$ için,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_n^\beta}\sum_{k\in J_n}\left[d\left(\Delta^m X_k, X_0\right)\right]^p &= \frac{1}{\mu_n^\beta}\sum_{k\in J_n-I_n}\left[d\left(\Delta^m X_k, X_0\right)\right]^p + \frac{1}{\mu_n^\beta}\sum_{k\in I_n}\left[d\left(\Delta^m X_k, X_0\right)\right]^p \\
&\le \left(\frac{\mu_n-\lambda_n}{\mu_n^\beta}\right)M^p + \frac{1}{\mu_n^\beta}\sum_{k\in I_n}\left[d\left(\Delta^m X_k, X_0\right)\right]^p \\
&\le \left(\frac{\mu_n-\lambda_n^\beta}{\mu_n^\beta}\right)M^p + \frac{1}{\mu_n^\beta}\sum_{k\in I_n}\left[d\left(\Delta^m X_k, X_0\right)\right]^p \\
&\le \left(\frac{\mu_n}{\lambda_n^\beta}-1\right)M^p + \frac{1}{\lambda_n^\beta}\sum_{\substack{k\in I_n\\ d(\Delta^m X_k, X_0)\ge\varepsilon}}\left[d\left(\Delta^m X_k, X_0\right)\right]^p \\
&\quad + \frac{1}{\lambda_n^\beta}\sum_{\substack{k\in I_n\\ d(\Delta^m X_k, X_0)<\varepsilon}}\left[d\left(\Delta^m X_k, X_0\right)\right]^p \\
&\le \left(\frac{\mu_n}{\lambda_n^\beta}-1\right)M^p + \frac{M^p}{\lambda_n^\gamma}\left|\left\{k\in I_n : d\left(\Delta^m X_k, X_0\right)\ge\varepsilon\right\}\right| + \frac{\lambda_n}{\lambda_n^\beta}\varepsilon^p \\
&\le \left(\frac{\mu_n}{\lambda_n^\beta}-1\right)M^p + \frac{M^p}{\lambda_n^\gamma}\left|\left\{k\in I_n : d\left(\Delta^m X_k, X_0\right)\ge\varepsilon\right\}\right| + \frac{\mu_n}{\lambda_n^\beta}\varepsilon^p
\end{aligned}
$$

olup, (5.4) sağlandığı için $X=(X_k)$ dizisi X_0 a $S_\lambda^\gamma\left(\Delta_{\mathcal{F}}^m\right)$ istatistiksel yakınsak ise X_0 a kuvvetli $w_\mu^\beta\left(\Delta_{\mathcal{F}}^m, p\right)$ toplanabilirdir.

Sonuç 5.1.28.

$\lambda=(\lambda_n)$ ve $\mu=(\mu_n)$, Λ de $\lambda_n\le\mu_n$ olacak şekilde iki dizi olsun. $\gamma\in(0,1]$ için (5.4) sağlanırsa,

i) $w_\mu^\beta\left(\Delta_{\mathcal{F}}^m, p\right)\subseteq S_\lambda^\gamma\left(\Delta_{\mathcal{F}}^m\right)$,

ii) $w_\mu\left(\Delta_{\mathcal{F}}^m, p\right)\subseteq S_\lambda^\gamma\left(\Delta_{\mathcal{F}}^m\right)$,

iii) $w_\mu\left(\Delta_{\mathcal{F}}^m, p\right)\subseteq S_\lambda\left(\Delta_{\mathcal{F}}^m\right)$,

dır.

Sonuç 5.1.29.

$\lambda=(\lambda_n)$ ve $\mu=(\mu_n)$, Λ de $\lambda_n\le\mu_n$ olacak şekilde iki dizi olsun. $\gamma\in(0,1]$ için (5.4) sağlanırsa,

i) $l_\infty\left(\Delta_{\mathcal{F}}^m\right)\cap S_\lambda^\gamma\left(\Delta_{\mathcal{F}}^m\right)\subseteq w_\mu^\gamma\left(\Delta_{\mathcal{F}}^m, p\right)$,

ii) $l_\infty\left(\Delta_{\mathcal{F}}^m\right)\cap S_\lambda^\gamma\left(\Delta_{\mathcal{F}}^m\right)\subseteq w_\mu\left(\Delta_{\mathcal{F}}^m, p\right)$,

iii) $l_\infty\left(\Delta_{\mathcal{F}}^m\right)\cap S_\lambda\left(\Delta_{\mathcal{F}}^m\right)\subseteq w_\mu\left(\Delta_{\mathcal{F}}^m, p\right)$,

dır.

5.2 Modülüs Fonksiyonu ve $\Delta_{\lambda}^{m}-$ İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda bir f modülüs fonksiyonu ve $\Delta^{m}-$ fark operatörü kullanarak β. dereceden kuvvetli $\Delta_{\lambda p}^{m}-$ Cesàro toplanabilme ve β. dereceden istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Tanım 5.2.1.

Aşağıdaki şartları sağlayan bir $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonuna modülüs fonksiyonu denir.

i) $f(x) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $x = 0$ olmasıdır.

ii) $x, y \geq 0$ için $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$,

iii) f artandır,

iv) f fonksiyonu $x = 0$ noktasında sağdan süreklidir [50].

Ruckle [51] tarafından $L(f) = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} f(|x_k|) < \infty \right\}$ dizi uzayı f modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlanmış ve bu dizi uzayının bazı özellikleri incelenmiştir. Bir modülüs fonksiyonu sınırlı veya sınırsız olabilir. Örneğin, $f(x) = x^{p}, (0 < p \leq 1)$ sınırsız ve $f(x) = \frac{x}{1+x}$ sınırlıdır.

Son zamanlarda modülüs fonksiyonları pek çok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Örneğin Talo ve Başar [52], Çolak v.d. [53] ve Sarma [54] f modülüs fonksiyonu yardımı ile bulanık sayı dizilerinin ve bazı topolojik özellikleri ile birlikte bazı kapsama bağıntılarını vermişlerdir.

Tanım 5.2.2.

f bir modülüs fonksiyonu, Δ^{m} fark operatörü, $p = (p_k)$ kesin pozitif reel sayı dizisi ve $\beta \in (0,1]$ herhangi bir reel sayı olsun. $w_{\lambda}^{\beta}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}, f, p)$ dizi sınıfını

$$w_{\lambda}^{\beta}(\Delta_{\mathcal{F}}^{m}, f, p) = \left\{ X = (X_k) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^{\beta}} \sum_{k\in I_n} [f(d(\Delta^{m} X_k, X_0))]^{p_k} = 0, \ \exists X_0 \in L(\mathbb{R}) \right\}$$

şeklinde tanımlayalım. Aşağıdaki teoremlerde $p = (p_k)$ dizisini sınırlı ve $0 < h = \inf_k p_k \leq p_k \leq \sup_k p_k = H < \infty$ olarak alacağız.

Teorem 5.2.3.

$\beta \leq \gamma$ olacak şekilde herhangi $\beta, \gamma \in (0,1]$ reel sayılarını alalım ve f bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu takdirde $w_\lambda^\beta(\Delta_\mathcal{F}^m, f, p) \subset S_\lambda^\gamma(\Delta_\mathcal{F}^m)$ dir.

İspat. $X \in w_\lambda^\beta(\Delta_\mathcal{F}^m, f, p)$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu takdirde $\lambda_n^\beta \leq \lambda_n^\gamma$ olduğundan her bir n için

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^\beta} \sum_{k\in I_n} [f(d(\Delta^m X_k, X_0))]^{p_k} &= \frac{1}{\lambda_n^\beta} \sum_{\substack{k\in I_n \\ d(\Delta^m X_k, X_0)\geq\varepsilon}} [f(d(\Delta^m X_k, X_0))]^{p_k} \\
&+ \frac{1}{\lambda_n^\beta} \sum_{\substack{k\in I_n \\ d(\Delta^m X_k, X_0)<\varepsilon}} [f(d(\Delta^m X_k, X_0))]^{p_k} \\
&\geq \frac{1}{\lambda_n^\gamma} \sum_{\substack{k\in I_n \\ d(\Delta X_k, X_0)\geq\varepsilon}} [f(d(\Delta^m X_k, X_0))]^{p_k} \\
&+ \frac{1}{\lambda_n^\gamma} \sum_{\substack{k\in I_n \\ d(\Delta^m X_k, X_0)<\varepsilon}} [f(d(\Delta^m X_k, X_0))]^{p_k} \\
&\geq \frac{1}{\lambda_n^\gamma} \sum_{\substack{k\in I_n \\ d(\Delta^m X_k, X_0)\geq\varepsilon}} [f(\varepsilon)]^{p_k} \\
&\geq \frac{1}{\lambda_n^\gamma} \sum_{\substack{k\in I_n \\ d(\Delta^m X_k, X_0)\geq\varepsilon}} \min\left([f(\varepsilon)]^h, [f(\varepsilon)]^H\right) \\
&\geq \frac{1}{\lambda_n^\gamma} \left|\{k \in I_n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}\right| \min\left([f(\varepsilon)]^h, [f(\varepsilon)]^H\right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. $X \in w_\lambda^\beta(\Delta_\mathcal{F}^m, f, p)$ olduğundan $n \to \infty$ iken yukarıdaki eşitsizliğin sol tarafı sıfıra yaklaşır. $\min\left([f(\varepsilon)]^h, [f(\varepsilon)]^H\right) > 0$ olduğundan $n \to \infty$ iken yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafı da sıfıra yaklaşır. Bu ise $w_\lambda^\beta(\Delta_\mathcal{F}^m, f, p) \subset S_\lambda^\gamma(\Delta_\mathcal{F}^m)$ olduğunu gösterir.

Teorem 5.2.4.

$\beta \leq \gamma$ olacak şekilde herhangi $\beta, \gamma \in (0,1]$ reel sayılarını alalım. Eğer f modülüs fonksiyonu sınırlı ve $\lim \frac{\lambda_n}{\lambda_n^\beta} = 1$ ise bu takdirde $S_\lambda^\gamma(\Delta_\mathcal{F}^m) \subset w_\lambda^\beta(\Delta_\mathcal{F}^m, f, p)$ dir.

İspat. $X \in S_\lambda^\gamma(\Delta_\mathcal{F})$ ve $\lambda = (\lambda_n) \in \Lambda$ olsun. f nin sınırlı olduğunu kabul edelim. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $\sum_1$ ve $\sum_2$ toplamları sırasıyla $k \in I_n, d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon$ ve $k \in I_n, d(\Delta^m X_k, X_0) < \varepsilon$ ifadelerini göstersin. f sınırlı olduğundan her $t \geq 0$ için $f(t) \leq K$ olacak şekilde bir K tamsayısı vardır. Bu takdirde her n için $\lambda_n^\beta \leq \lambda_n^\gamma$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_n^{\gamma}}\sum_{k\in I_n}\left[f\left(d\left(\Delta^m X_k,X_0\right)\right)\right]^{p_k} &\leq \frac{1}{\lambda_n^{\beta}}\sum_{k\in I_n}\left[f\left(d\left(\Delta^m X_k,X_0\right)\right)\right]^{p_k} \\
&= \frac{1}{\lambda_n^{\beta}}\left(\sum_{1}\left[f\left(d\left(\Delta^m X_k,X_0\right)\right)\right]^{p_k}+\sum_{2}\left[f\left(d\left(\Delta^m X_k,X_0\right)\right)\right]^{p_k}\right) \\
&\leq \frac{1}{\lambda_n^{\beta}}\left(\sum_{1}\max\left(K^h,K^H\right)+\sum_{2}\left[f\left(\varepsilon\right)\right]^{p_k}\right) \\
&\leq \max\left(K^h,K^H\right)\frac{1}{\lambda_n^{\gamma}}\left|\left\{k\in I_n : d\left(\Delta^m X_k,X_0\right)\geq\varepsilon\right\}\right| \\
&\quad+\max\left(f\left(\varepsilon\right)^h,f\left(\varepsilon\right)^H\right)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. $X\in S_\lambda^\gamma\left(\Delta_{\mathcal{F}}^m\right)$ olduğundan $n\to\infty$ iken yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk terim sıfıra yaklaşır ve ikinci terim istenildiği kadar küçük yapılabilir. Bu nedenle yukarıdaki eşitsizliğin sol tarafı da sıfıra yaklaşır. Dolayısıyla $X\in w_\lambda^\beta\left(\Delta_{\mathcal{F}}^m,f,p\right)$ dir.

Teorem 5.2.5.

Herhangi bir $\gamma\in(0,1]$ reel sayısı ve $\lim\frac{\lambda_n}{\lambda_n^\beta}=1$ olsun. Bu takdirde $S_\lambda^\gamma\left(\Delta_{\mathcal{F}}^m\right)=w_\lambda^\beta\left(\Delta_{\mathcal{F}}^m,f,p\right)$ olması için gerek ve yeter şart f modülüs fonksiyonunun sınırlı olmasıdır.

İspat. f sınırlı ve $\lim\frac{\lambda_n}{\lambda_n^\beta}=1$ olsun. Bu durumda Teorem 5.2.3 ve Teorem 5.2.4 den $S_\lambda^\gamma\left(\Delta_{\mathcal{F}}^m\right)=w_\lambda^\beta\left(\Delta_{\mathcal{F}}^m,f,p\right)$ eşitliği elde edilir.

6. SONUÇ

Bu tezde, Nuray ve Savaş [36] tarafından tanımlanan istatistiksel yakınsak bulanık sayı dizilerinin uzayı, $0 < \beta \leq 1$ ve $\lambda = (\lambda_n)$ dizisi kullanarak $S_\lambda^\beta(\Delta_\mathcal{F}^m)$ (β. dereceden Δ_λ^m−istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı) uzayına genelleştirildi. Ayrıca p bir pozitif reel sayı olmak üzere $w_\lambda^\beta(\Delta_\mathcal{F}^m, p)$ (β. dereceden kuvvetli $\Delta_{\lambda p}^m$− Cesàro toplanabilir bulanık sayı dizileri) uzayı tanımlandı ve bu uzaylar arasında kapsama ilişkileri incelendi.

Ayrıca Λ sınıfına ait $\lambda = (\lambda_n)$ ve $\mu = (\mu_n)$ dizileri için $S_\lambda^\gamma(\Delta_\mathcal{F}^m)$, $S_\mu^\beta(\Delta_\mathcal{F}^m)$, $w_\mu^\beta(\Delta_\mathcal{F}^m, p)$, $w_\lambda^\gamma(\Delta_\mathcal{F}^m, p)$ uzayları arasındaki kapsama ilişkileri incelendi.

Son olarak bir f modülüs fonksiyonu kullanılarak β. dereceden kuvvetli λp− Cesàro toplanabilir ve β. dereceden Δ_λ^m− istatistiksel yakınsak dizi sınıfları arasındaki bazı kapsama bağıntıları verildi.

KAYNAKLAR

1. **Maddox, I.J.**, 1970. Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, Second Edition.

2. **Kreyszig, E.**, 1978. Introductory Functional Analysis with Application, John Wiley & Sons, New York.

3. **Goes, G. and Goes, S.**, 1970. Sequences of bounded variation and sequences of Fourier coefficients. I. Math. Z. 118, 93-102.

4. **Şuhubi, E.**, 2001. Fonksiyonel Analiz, İTÜ Vakfı Yay., No: 38, İstanbul.

5. **Diamond, P. and Kloeden, P.**, 1994. Metric Spaces of Fuzzy sets Theory and Applications World Scientific, Singapore.

6. **Fast, H.**, 1951. Sur la convergence statistique, Colloq. Math., 2, 241-244.

7. **Schoenberg, I.J.**, 1959. The integrability of certain functions and related to summability methods, Amer. Math. Monthly, 66, 361-375.

8. **Buck, R. C.**, 1953. Generalized asymptotic density, Amer. J. Math., 75, 335-346.

9. **Connor, J.S.**, 1989. On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence, Canada Math. Bull. 32 (2), 194-198.

10. **Šalàt, T.**, 1980. On statistically convergent sequences of real numbers, Math. Slovaca., 30 (2), 139-150.

11. **Mursaleen, M.**, 2000. $\lambda-$ Statistical convergence, Math. Slovaca., 50 (1), 111-115.

12. **Savaş, E.**, 2000. Strongly almost convergence and almost $\lambda-$ statistical convergence, Hokkaido Math. J., 29, 531-536.

13. **Fridy, J.A. and Orhan, C.**, 1993. Lacunary statistical convergence, Pacific J. Math., 160 (1), 43-51.

14. **Niven, I. and Zuckerman, H.S.**, 1960. An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, New York.

15. **Fridy, J.A.**, 1985. On the statistical convergence, Analysis, 5, 301-313.

16. **Powell, R.E. and Shah, S.M.**, 1972. Summability Theory and its Applications, Van Nostrand-Reinhold Company, London.

17. **Connor, J.S.**, 1988. The statistical and strong $p-$ Cesàro convergence of sequences, Analysis, 8, 47-63.

18. **Kızmaz, H.**, 1981. On certain sequence spaces, Canad. Math. Bull., 24, 169-176.

19. **Et, M. and Çolak, R.**, 1995. On some generalized difference sequence spaces, Soochow J. Math., 21, 377- 386.

20. **Çolak, R. and Et, M.**, 1997. On some generalized difference sequence spaces and related matrix transformations, Hokkaido Math. J. 26 (3), 483–492.

21. **Et, M. and Nuray, F.**, 2001. Δ^m- Statistical convergence, Indian J. Pure Appl. Math., 32 (6) 961-969.

22. **Leindler, L.**, 1965. Über die verallgemeinerte de la Vallée-Poussinsche Summierbarkeit allgemeiner Orthogonalreihen, (German) Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 16, 375-387.

23. **Gadjiev, A. D. and Orhan, C.**, 2002. Some approximation theorems via statistical convergence, Rocky Mountain J. Math. 32 (1), 129–138.

24. **Çolak, R.**, 2010. Statistical convergence of order α, Modern Methods in Analysis and its Applications, (Anamaya Publ. New Delhi, India), 121-129.

25. **Çolak, R. and Bektaş, Ç. A.**, 2011. $\lambda-$ statistical convergence of order α, Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. 31 (3), 953-959.

26. **Zadeh, L.A.**, 1965. Fuzzy sets, Inform and Control, 8, 338-353.

27. **Moore, R. E.**, 1979. Methods and Applications of Interval Analysis, SIAM Philadelphia.

28. **Chang, S.S.L. and Zadeh, L.A.**, 1972. On fuzzy mapping and control, IEEE Trans. Systems Man Cybernet, 2, 30-34.

29. **Dubois, D. and Prade, H.**, 1980. Fuzzy Sets Systems: Theory and Applications, Academic Press, New York.

30. **Kaufmann, A. and Gupta, M. M.**, 1991. Introduction to Fuzzy Arithmetic Theory and Applications, Van Nostrand Reinhold Co. New York.

31. **Nanda, S. and Das, N.R.**, 2010. Fuzzy Mathematical Concepts, Alpha Sicence. U.K.

32. **Nanda, S.**, 1989. On sequence of fuzzy numbers, Fuzzy Sets Syst., 33, 123-126.

33. **Puri, M. L. and Ralescu, D.A.**, 1983. Differentials of fuzzy functions, J. Math. Anal. Appl., 91, 552-558.

34. **Puri, M. L. and Ralescu, D.A.**, 1986. Fuzzy random variables, J. Math. Anal. Appl., 114, 409-422.

35. **Matloka, M.**, 1986. Sequences of fuzzy numbers, Busefal, 28, 28-37.

36. **Nuray, F. and Savaş, E.**, 1995. Statistical convergence of fuzzy numbers, Math. Slovaca, 45 (3), 269-273.

37. **Mursaleen, M. and Başarır, M.**, 2003. On some new sequence spaces of fuzzy numbers, Indian J. Pure Appl. Math., 34 (9), 1351-1357.

38. **Subrahmanyam, P. V.**, 1999. Cesàro summability for fuzzy real number, J. Anal. 7, 159-168.

39. **Kwon, J.S.**, 2000. On statistical and $p-$ Cesàro convergence of fuzzy numbers, Korean J. Comput. Appl. Math., 7 (1), 195-203.

40. **Savaş, E.**, 2000. On strongly $\lambda-$ summable sequences of fuzzy numbers, Inform. Sci. 125, no. 1-4, 181-186.

41. **Savaş, E.**, 2000. A note on sequence of fuzzy numbers, Inform. Sci. 124, no. 1-4, 297-300.

42. **Altın, Y., Et, M. and Başarır, M.**, 2007. On some generalized difference sequences of fuzzy numbers, Kuwait J. Sci. Eng. 34 (1A) 1-14.

43. **Altın, Y., Et, M. and Çolak, R.**, 2006. Lacunary statistical and lacunary strongly convergence of generalized difference sequences of fuzzy numbers, Computers & Math. Appl., 52, 1011-1020.

44. **Et, M., Altınok, H. and Çolak, R.**, 2006. On $\lambda-$ statistical convergence of difference sequences of fuzzy numbers, Inform. Sci., 176, 2268-2278.

45. **Çolak, R., Altınok, H., Et, M.**, 2009. Generalized difference sequences of fuzzy numbers, Chaos Solitons Fractals 40, no. 3, 1106-1117.

46. **Altınok, H., Çolak, R., Et, M.**, 2009. $\lambda-$ difference sequence spaces of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems 160, no. 21, 3128–3139.

47. **Çolak, R.**, 2011. On $\lambda-$ Statistical Convergence, Conference on Summability and Applications, Commerce Univ., May 12-13, Istanbul, TURKEY.

48. **Altınok, H., Altin, Y. and Işik, M.**, 2012. Statistical convergence and strong $p-$ Cesàro summability of order $\beta-$ in sequences of fuzzy numbers, Iran. J. Fuzzy Syst. 9(2), 63-73.

49. **Altınok, H.**, 2012. On $\lambda-$ statistical convergence of order $\beta-$ of sequences of fuzzy numbers, Internat. J. Uncertain. Fuzziness Knowledge-Based Systems 20 (2), 303-314.

50. **Nakano, H.**, 1953. Concave modulars, J. Math. Soc. Japan. 5, 29-49.

51. **Ruckle W.H.**, 1973. FK spaces in which the sequence of coordinate vectors is bounded, Canad. J. Math. 25, 973-978.

52. **Talo, Ö. and Başar, F.**, 2010. Certain spaces of sequences of fuzzy numbers defined by a modulus function, Demonstratio Math. 43(1), 139-149.

53. **Çolak, R., Altın, Y. and Mursaleen, M.**, 2011. Some Difference Sequence Spaces of Fuzzy Numbers, Soft Computing (15), 787-793.

54. **Sarma, B.**, 2007. On a class of sequences of fuzzy numbers defined by modulus function, International Journal of Science & Technology, 2 (1), 25-28.

55. **Aytar, S.**, 2004. Statistical limit points of sequences of fuzzy numbers, Inform. Sci. 165 (1-2), 129-138.

56. **Tuncer, A. N. and Benli, F. B.**, 2007. $\lambda-$ statistical limit points of the sequences of fuzzy numbers, Inform. Sci. 177(16), 3297-3304.

57. **Talo, Ö. and Başar, F.**, 2010. Quasilinearity of the classical sets of sequences of fuzzy numbers and some related results, Taiwanese J. Math. 14 (5), 1799-1819.

58. **Talo, Ö. and Başar, F.**, 2009. Determination of the duals of classical sets of sequences of fuzzy numbers and related matrix transformations, Comput. Math. Appl. 58 (4), 717-733.

59. **Başar, F.**, 2011. Summability Theory and Its Applications, e-books, Monographs, Bentham Science Publishers, İstanbul, TURKEY.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Diyarbakır 'da doğdum. İlk ve Orta öğrenimimi Diyarbakır'da tamamladıktan sonra 2000 yılında kazandığım Dicle Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümünden 2004 yılında mezun oldum. 2005 yılında D.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek lisans eğitimime başladım ve 2008 yılında bitirdim. 2010 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Analiz ve Fonksiyonlar teorisi Anabilim Dalında, Doktora eğitimime başladım ve halen Siirt Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktayım.