

**DİFERANSİYEL QUADRATURE METODLARININ
PLAKALARIN SERBEST TİTREŞİMLERİNE
UYGULANMASI**

AHMET ÇETKİN

DOKTORA TEZİ

MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

MAYIS 2005

**THE APPLICATION OF DIFFERENTIAL QUADRATURE
METHODS TO FREE VIBRATION OF PLATES**

AHMET ÇETKİN

Ph.D. Thesis

THE DEPARTMENT OF MACHINE ENGINEERING

MAY 2005

768702

**DİFERANSİYEL QUADRATURE METODLARININ
PLAKALARIN SERBEST TİTREŞİMLERİNE UYGULANMASI**

Ahmet ÇETKİN

Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı
Konstrüksiyon-İmalat Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Yard. Doç. Dr. Sezan ORAK

Mayıs 2005

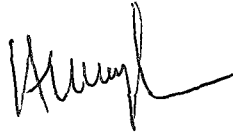
Ahmet Çetkin'in DOKTORA TEZİ olarak hazırladığı "Diferansiyel Quadrature Metodlarının Plakaların Serbest Titreşimlerine Uygulanması" başlıklı bu çalışmada, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

29/04/2005

Üye: Yard. Doç. Dr. Sezan ORAK (Danışman)



Üye: Prof. Dr. Soner ALANYALI



Üye: Yard. Doç. Dr. Zekeriya GİRGIN



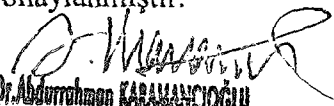
Üye: Yard. Doç. Dr. Bora YILDIRIM



Üye: Yard. Doç. Dr. Naci ZAFER



Fen Bilimleri Enstitüsünü Yönetim Kurulunun... 26..5..2005. Gün
ve2005-6/1..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.


Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU
Enstitü Müdürü

ÖZET

Karoser, yer döşemeleri, köprüler, güneş panelleri ve özellikle gemi ve uçak sanayisi gibi modern yapı uygulamalarında cıvata, perçin ve kaynaklı plaka yapıları kullanılır. Bu yapıların dinamik karakteristiklerinin, tasarımını yapan mühendis tarafından bilinmesi gerekir. Bu tip mühendislik problemleri, plaka problemleri olarak isimlendirilir. Genellikle kesin sonuçları bilinmediği için, konu üzerine bir çok nümerik ve analitik çalışmalar yapılmıştır.

Çözümüne daha hızlı ve daha doğru yaklaşımlar için daha az sayıda grid kullanan alternatif bir sayısal metot, R. Bellman tarafından mühendislik bilimlerinin başlangıç ve sınır değer problemleri için önerilmiştir. Diferansiyel Quadrature Metodu adı verilen bu metot, şu fikri baz alır; "Koordinat yönüne göre bir fonksiyonun türevi, çepeçevre saran bir alandaki yüksek dereceden bir polinom yardımıyla yaklaşım kurulabilen devamlı bir fonksiyon ve o yön boyunca bütün ağ noktalarındaki fonksiyon değerlerinin lineer toplamıdır". Özellikle 1994 ve sonrası dönemlerde metodun değişik versiyonları geliştirilmiş, problemleri matris yapılarından kurtarılmış, grid noktalarının seçimi ve sınır koşullarının uygulanmaları basitleştirilmiştir. Böylece her türlü mühendislik problemlerinde kullanılabilir olması sağlanmıştır.

Bu çalışmada değişik versiyonlardaki Diferansiyel Quadrature metotları tanıtarak kullanılan grid yapıları ve bu yapılar için hesaplanan ağırlıklı katsayıların elde edilme yöntemleri ve değişik problemlerde uygulamaları verilmiştir. Anizotropik, izotropik, bir sınır boyunca değişik sınır koşullarına sahip, farklı kalınlıkta, süreksizlikler içeren plakalar ve nokta mesnetli plakaların çözümler elde edilmiş, farklı metotlar, değişik araştırmacıların elde ettikleri çözümler ve mühendislik problemlerinin analizinde çoğunlukla kullanılan sonlu eleman analizi programı Ansys ile elde edilen çözümlerle beraber verilerek DQ çözümleri test edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Diferansiyel Quadrature Metodu, Serbest titreşim, Ansys, Plaka

SUMMARY

In the applications of modern structures, i.e. carouser, building floor, bridge deck, solar panels and especially aircraft and ship industries, bolted, riveted or spot-welded plate bodies are used. Designers have to know how these components change the dynamic characteristic of the structures. This type engineering problems are called as plate problems. As there is no exact solution in general, various analytical approach and numerical methods are utilized for this type of problems.

An alternative numerical method which requires fewer grid points and achieves acceptable accuracy for the rapid solution of linear and nonlinear partial differential equations, the method of differential quadrature was introduced by Bellman. This method is based on the ideas that; “The derivative of a function with respect to a coordinate direction can be expressed as a weighted linear sum of all the function values at all mesh points along that direction and that a continuous function can be approximated by a high order polynomial in the overall domain”. Since 1994, different versions of the method have been developed, illconditioned matrix structure is removed, the choice of grid mesh and applications of boundary conditions were simplified and so these has been given rise to efficiency to solve any type of problems.

In this study, several versions of Differential Quadrature Method and their obtaining methodology of weighted coefficient and applications to different problems were presented. Also, solutions of the free vibration on plates made of isotropic or anisotropic materials, having different geometries (stepped, with cutouts) and several boundary conditions (point support, mixed boundary conditions) were studied. Comparisons with the previous studies using other methods were presented and/or solutions were tested with ANSYS, a finite element program which has a wide spread use in the analysis of engineering problems.

Keywords: Differential Quadrature Method, Free vibration, Ansys, Plate

TEŞEKKÜR

Derslerimde ve tez çalışmalarının her kısmında bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım Yard. Doç. Dr. Sezan Orak'a teşekkürlerimi öncelikle belirtmek isterim.

Doktora konusunda beni teşvik eden ve her türlü konuda yardımlarını esirgemeyen sayın hocalarım Prof. Dr. Ö. Faruk Emrullahoğlu, Prof. Dr. Hidayet Yavuz, Doç. Dr. Süleyman Taşgetiren, Yard. Doç. Dr. Zekeriya Girgin'e, gerek analitik gerekse nümerik programlama konusunda yardımcı olan Yard. Doç. Dr. Ali Ergün, Yard. Doç. Dr. Kubilay Aslantaş, Yard. Doç. Dr. Bora Yıldırım, Öğr. Grv. Murat Caner, Öğr. Grv. Murat Uysal'a,

Çalışmaların sırasında verdiği manevi destek ve gösterdiği sabırlarından dolayı tüm eşim, oğlum, akrabalarım ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	iv
SUMMARY.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xiv
1. GİRİŞ	1
2. DİFERANSİYEL QUADRATURE METODLARI.....	3
2.1 Orijinal Diferansiyel Quadrature Metodu.....	4
2.2 Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu.....	5
2.3 Harmonik Diferansiyel Quadrature Metodu.....	7
2.4 Diferansiyel Quadrature Metotlarında Kullanılan Grid Yapıları.....	9
2.5 Quadrature Metotlarının Statik Analizde Kullanımı.....	13
2.5.1 Eğilme problemleri (Kirişler).....	13
2.5.2 Burkulma problemleri.....	16
2.5.3 Titreşim problemleri.....	20
3. DİFERANSİYEL QUADRATURE ELEMENT METODU.....	23
3.1 Ağırlıklı Katsayıların Elde Edilmesi.....	24
3.2 Quadrature Eleman Metodunun Statik Analizde Kullanımı.....	27
3.2.1 Eğilme problemleri (Kiriş-çerçeve yapı)	27
3.2.2 Burkulma problemleri	34
3.2.3 Titreşim problemleri	35
3.3. Hybrid(Karma) Yapılı Quadrature Eleman Metodu	38

İÇİNDEKİLER (Devam)

	<u>Sayfa</u>
4. DQM VE DQEM'İN PLAKALARA UYGULANMALARI.....	41
4.1 Plaka İçin Quadrature Elemanının Formülasyonu.....	53
4.2 Plaka Elemanların Birleştirilmesi.....	56
4.3 DQEM ile Plaka Problemlerinin Çözümleri.....	57
4.3.1 İzotropik plakaların titreşimi.....	59
4.3.2 Anizotropik plakaların titreşimi.....	63
4.3.3 Düzensiz sınır koşullarına sahip plakalar.....	65
4.3.4 Farklı kalınlıklara sahip plakalar.....	70
4.3.5 Kesilmiş plakalar.....	76
4.3.6 Ortası açık plakalar.....	85
4.3.7 Nokta mesnetli plakalar.....	87
5. SONUÇ VE TARTIŞMA.....	93
6. KAYNAKLAR.....	95
ÖZGEÇMİŞ.....	

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 Diferansiyel Quadrature metotlarında kullanılan grid yapıları (N=7).....	9
2.2 Farklı sınır koşullarında değişik komşu noktalarında yakınsama.....	11
2.3 Ankastre mesnet sınır koşullarında çözüm hata yüzdesinin salınımı.....	11
2.4 Farklı grid yapılarında membran titreşimleri.....	12
2.5 Ankastre-basit mesnetli kiriş	14
2.6 Basit-basit mesnetli çubuk.....	17
2.7 Basit-basit mesnet bir kiriş için Malik-Bert yöntemiyle elde edilen değerlerin normal DQM ile karşılaştırılması.....	20
2.8 Dairesel bir plağın eşit grid yapısı.....	22
3.1 Üç düğüm noktalı kiriş ve grid yapısı.....	27
3.2 İki elemanlı kirişin grid yapısı.....	29
3.3 Lokal ve global koordinatlarda değiştirme vektörü.....	31
3.4 Üç elemanlı çerçeve yapı	33
3.5 Üzerinde yayılı yük ve moment bulunan iki elemanlı çerçeve yapı.....	33
3.6 Burkulma yükü altındaki ankastre-basit mesnetli kiriş	34
3.7 Ankastre-serbest mesnet bağlantılı iki elemanlı basamak şekilli çubuk.....	36
3.8 İki elemanlı membran	40
4.1 DQM ile elde edilen kare plaka çözümlerinin Leissa'nın değerleri ile karşılaştırması	45
4.2 Malik-Bert yöntemiyle elde edilen değerlerin farklı sınır koşullarında grid yapısına bağlı davranışı.....	48
4.3 Kare plakada değişik sınır koşullarında normal DQM çözümü ile Malik-Bert çözüm yönteminin karşılaştırılması.....	51
4.4 25 Grid noktalısına ve 49 serbestlik derecesine sahip bir Quadrature plaka elemanının yapısı.....	53

ŞEKİLLER DİZİNİ (Devam)

<u>Şekil</u>	<u>sayfa</u>
4.5 Dört plaka elemanın birleştirilmesi.....	56
4.6 Ansys çözümlerinde hata(%)	58
4.7 Basit mesnetli bir plakanın ilk modunun normal quadrature şeması ve hybrid şeması çözümlerinin karşılaştırılması	60
4.8 Basit mesnetli plakanın hybrid DQEM çözümleri ve grid yapısı.....	61
4.9 Farklı sınır şartları ve mesnet boylarında kare plakalar.....	66
4.10 Farklı sınır şartlarında kare plakada mod şekilleri	69
4.11 Basamak biçiminde kalınlığı farklı plaka.....	70
4.12 Farklı kalınlıklardaki basamak plağın mod şekilleri	72
4.13 Üç basamaklı plaka.....	73
4.14 Basamak plağın mod şekilleri.....	74
4.15 Ortası farklı kalınlıktaki plaka.....	75
4.16 Ortası farklı kalınlıktaki plağın mod şekilleri	76
4.17 L plaka.....	78
4.18 U plaka.....	79
4.19 E plaka.....	80
4.20 T plaka.....	81
4.21 H plaka.....	83
4.22 Değişik şekillerde kesilmiş plakaların mod şekilleri	84
4.23 Ortası açık plaka.....	85
4.24 Ortası açık plakaların mod şekilleri.....	87
4.25 Ortasında nokta mesnet bulunan kare plakalar.....	89
4.26 Farklı sınır şartlarında ve farklı noktalarda nokta mesnetli kare plakalar.....	89
4.27 Nokta mesnetli plakaların mod şekilleri.....	92
Nokta mesnetli plakaların mod şekilleri (Devam).....	93

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Çizelge</u>	<u>sayfa</u>
2.1 Kare membranın titreşimi ve çökmesi.....	13
2.2 Ankastre-basit mesnetli bir kirişte çökme değerleri.....	15
2.3 Değişik yükleme koşullarında GLC tipi gridler ile elde edilen çökmeler.....	16
2.4 Basit-basit mesnet bir kiriş için değişik grid yapılarında elde edilen burkulma değerleri.....	19
2.5 Ankastre mesnetli GLC tipi grid yapısına sahip dairesel plağın HDQ ve GDQ ile elde edilen değerleri ve hata(%)	22
3.1 Eşit aralıklı bir grid yapısına sahip bir kirişte değişik sınır ve yükleme koşullarında DQEM ile elde edilen çökme değerleri.....	28
3.2 Değişik sınır ve yükleme koşullarında iki elemanlı eşit aralıklı tip gridler ile elde edilen çökme.....	30
3.3 Değişik sınır ve yükleme koşullarında iki elemanlı eşit aralıklı tip gridler ile elde edilen çökme değerleri.....	31
3.4 Çerçevenin A noktasında deplasman ve dönme	33
3.5 Yayılı yük bulunan iki elemanlı çerçeve yapıda elde edilen deplasman	34
3.6 Ankastre-basit mesnet kirişte burkulma değerleri.....	35
3.7 Ankastre-serbest mesnetli basamak şekilli Bernoulli-Euler çubuğunun eğilme titreşiminde doğal frekansları.....	37
3.8 Ankastre-serbest mesnetli düz elastik çubuğun eğilme titreşiminde doğal frekans değerlerinin bazı sayısal metotlarla elde edilmiş sonuçları.....	37
3.9 Normal ve hybrid şeması ile membran çözümleri.....	40
4.1 Kare plakada GDQM ile elde edilen frekans parametreleri	44
4.2 Farklı sınır koşullarında ve grid sayılarında Malik-Bert yöntemiyle elde edilen frekans parametreleri.....	47
4.3 Değişik sınır koşulları altında GLC yapısında Malik-Mert yöntemi ile N=15 için elde edilen frekans parametreleri.....	49

ÇİZELGELER DİZİNİ (Devam)

<u>Çizelge</u>	<u>sayfa</u>
4.4 Kare plakada değişik sınır koşullarında normal DQM çözümü ile Malik-Bert çözüm yönteminin karşılaştırılması.....	50
4.5 GDQM ile GLC tipi grid yapısı kullanarak N=15 için farklı en-boy oranlarında plakaların frekans parametreleri	52
4.6 25 grid noktasına sahip quadrature plaka elemanı için serbestlik dereceleri...	54
4.7 Basit mesnetli bir plakanın normal quadrature elemanı ve hybrid şeması ile elde edilen frekans parametreleri	59
4.8 Basit mesnetli plakanın hybrid şeması ile DQEM çözümlerinde grid yapısına göre elde edilen frekans parametreleri.....	61
4.9 Değişik sınır koşulları altındaki plakaların hybrid DQEM(4x4) çözümleri ile elde edilen frekans parametreleri.....	62
4.10 Anisotropik plaka için seçilen rijitlik oranları.....	64
4.11 Anisotropik ankastre plaka için doğal frekans parametreleri.....	65
4.12 A-A-S-S mesnetli anisotropik kare plaka için doğal frekans parametreleri....	65
4.13 Farklı sınır şartlarında kare plakada frekans frekans parametreleri.....	68
4.14 İki basamaklı plakanın frekans parametreleri	71
4.15 Üç basamaklı plakanın frekans parametreleri.....	73
4.16 Ortası farklı kalınlıktaki plakanın frekans parametreleri.....	75
4.17 L plakada frekans parametreleri.....	78
4.18 U plakada frekans parametreleri (Basit mesnetli).....	79
4.19 U plakada frekans parametreleri (Ankastre mesnetli).....	80
4.20 E plakada frekans parametreleri.....	81
4.21 T plakada frekans parametreleri (Basit mesnetli).....	82
4.22 T plakada frekans parametreleri (Ankastre mesnetli).....	82
4.23 H plakada frekans parametreleri.....	83
4.24 Ortası açık plakada frekans parametreleri.....	86

ÇİZELGELER DİZİNİ (Devam)

<u>Çizelge</u>	<u>sayfa</u>
4.25 Ortasında nokta mesnet bulunan Ankastre ve basit mesnetli kare plakalarda frekans parametreleri.....	89
4.26 Farklı sınır şartlarında ve noktalarda, nokta mesnetli kare plaka için doğal frekans parametreleri.....	90
4.27 Nokta mesnetli plakalar için doğal frekans parametreleri.....	91



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
C, c	Ağırlıklı katsayılar
F, f	Fonksiyonlar
E	Elastite modülü
I	Atalet momenti
Q, q	Yayıllı yük
P, p	Kuvvet
L	Uzunluk
h	Kalınlık
D	Rijitlik katsayısı
M	Moment
V	Kesme kuvveti
t	Zaman
ν	Poison oranı
δ	Yer değiştirme
ω	Titreşim frekans parametresi

<u>Kısaltmalar</u>	<u>Açıklama</u>
QEM	Quadrature Element Metodu
GDQM	Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu
GLC	Gauss-Lobatto-Chebyshev
mm	Milimetre

1. GİRİŞ

Mühendislik mekaniğinin en çok üzerinde durduğu problemlerden biri de, yüksek doğrulukta istenen çözüm alanındaki herhangi bir noktanın değerlerini elde etmek için, hesap alanının büyük sayıda düğüm noktasına bölünmesi gerektiğidir. Fakat düğüm sayısı arttıkça kullanılan matris boyutları da büyür. Bu nedenle, çözüm süresi uzar, bilgisayar kapasitesi ve gerekli bellek ihtiyacının artmasına ve hatta bazen çözümsüzlüğe neden olur.

Sonlu Elemanlar Metodu ve benzeri çalışmalarda da aynı problemlerle karşılaşmış, çözüme daha hızlı ve daha doğru yaklaşımlar için daha az sayıda grid kullanan farklı metotlar için çalışmalar yapılmıştır. Kabul edilebilir doğruluğa sahip sonuçları elde etmek için daha az grid noktası kullanan alternatif bir sayısal metot, Richard Bellman tarafından mühendislik bilimlerinin başlangıç ve sınır değer problemleri için farklı bir çözüm tekniği olarak önerilmiştir. Diferansiyel Quadrature Metodu kapsamlı bir yaklaşım metodudur ve şu fikri baz alır; “Koordinat yönüne göre bir fonksiyonun türevi, sistemi tam olarak tanımlayan bir alandaki yüksek dereceden bir polinom yardımıyla yaklaşım kurulabilen devamlı bir fonksiyon ve o yön boyunca bütün ağ noktalarındaki fonksiyon değerlerinin lineer toplamıdır” (Bellman, 1971).

Diferansiyel Quadrature Metodu, Sonlu Farklar Metoduna çok benzer. Doğrusu $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ bölgesinde lokal uygulama yapıldığında Sonlu Farklar Metodunun Diferansiyel Quadrature Metodunun özel bir hali olduğu söylenebilir. Daha yakın sonuçları yakalamak bakımından Sonlu Farklar Metodu ve Sonlu Elemanlar Metodları ile karşılaştırıldığında Diferansiyel Quadrature Metodu, yüksek dereceden bir polinom yaklaşımı olduğundan daha az grid noktası gerektirir. Ancak Diferansiyel Quadrature

Metodu çözümleri bazen band veya simetrik olmayan sistem matrisi tiplerine dönüştürür (Bellman, 1972).

Özellikle çözümler yalnızca birkaç spesifik noktada istendiğinde Diferansiyel Quadrature Metodu Sonlu Farklar Metodu veya Sonlu Elemanlar Metodu gibi geleneksel sayısal metotlara bir alternatif olabilir. Özellikle 1994 ve daha sonraki dönemlerde Malik, Du, Wang, Naadimuthu, Jang ve Shu gibi araştırmacıların önerileriyle, problemleri matris yapılarından kurtarılmış, grid noktalarının seçimi ve sınır koşullarının uygulanmaları basitleştirilmiş ve hemen her türlü problemlerde kullanılabilirliği artırılmıştır (Malik, 1996; Shu, 1990; Du, 1994; Jang, 1989; Naadimuthu, 1984; Wang, 1992).

Striz, bazı eksikliklerin varlığına değinmiş, özellikle düzgün olmayan geometri ve süreksiz yükler için DQE Metodunu geliştirmiştir. Fakat burada da bazı problemlerle karşılaşmış, metod geliştirilerek daha sonra DQEM, çökme titreşim ve burulma problemlerinde Quan ve Chen tarafından önerilmiş ve başarılı bir yaklaşım metodu olduğu görülmüştür (Striz, 1997; Quan, 1998; Chen, 2000).

Bu çalışmanın ilk bölümünde çeşitli mühendislik problemlerinde kullanılan değişik Diferansiyel Quadrature metotları tanıtılmıştır. Metotlarda kullanılan grid yapıları ve bu yapılar için hesaplanan ağırlıklı katsayıların elde edilme yöntemleri verildi. Kiriş, titreşim ve burkulma problemlerinde elde edilen çözümler verilmiş ve analitik yöntemlerle hesaplanmış değerler bulunanlarla karşılaştırılmıştır. Hangi tip problemlerde, hangi Diferansiyel Quadrature metodunun hangi tip grid yapısının daha çok yakınsama gösterdiği ve sınır koşullarına bağlı olarak değişimlerin nasıl olduğu gösterilmiştir. İkinci bölümde DQEM için uygulanan prosedürler verilerek kiriş, çerçeve, titreşim ve burkulma problemlerinde elde edilen değerler, analitik ve benzer çözüm metotları ile karşılaştırılmıştır. Son bölümde ise değişik özellikteki kare plaka problemlerine element metodu ile çözüm uygulamaları yapılmıştır. Anizotropik, izotropik, bir sınır boyunca değişik sınır koşullarına sahip, değişik bölgelerinde farklı

kalınlıklara sahip, bir kısmı kesik ve nokta mesnetli plakaların DQEM ile elde edilen çözümleri, değişik metotlar, değişik araştırmacıların çözümleri ve Ansys programıyla elde ettiğimiz çözümlerle beraber verilmiştir.

2. DİFERANSİYEL QUADRATURE METOTLARI

Diferansiyel Quadrature Metodu, test fonksiyonu veya yaklaşım fonksiyonunun değişken bölgesindeki tüm ayrık noktalarındaki değerlerinin lineer toplamı olarak ifade edilebilen, verilen ayrık noktalardaki değişkenlerine göre bir fonksiyonun kısmi türevidir.

Bir boyutlu herhangi bir $Q(x,t)$ fonksiyonun birinci türevi göz önüne alındığında, yüksek dereceden diğer kısmi türevleri de birinci türevle aynı formasyona sahip olur. Bir grid üzerindeki i 'nci ayrık noktadaki $Q(x,t)$ fonksiyonunun birinci türevinin Diferansiyel Quadrature yaklaşımı aşağıdaki biçimde verilir.

$$Q_x(x_i, t) = \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(m)} Q(x_j, t) \quad i = 1, 2 \dots N \quad (2.1)$$

i noktasında $Q(x,t)$ 'nin x 'e göre birinci türevi $Q_x(x_i,t)$ 'dir. N ayrık grid noktalarının sayısı $C_{ij}^{(m)}$, m 'nci dereceden türevinin ağırlık katsayısıdır (Du, 1994).

Diferansiyel Quadrature Metodunun en önemli kısmı, C_{ij} ağırlık katsayılarının hesaplanmasıdır. Diferansiyel Quadrature Metodunda bunun için değişik yaklaşımlar, Harmonik, genelleştirilmiş, orijinal diferansiyel Quadrature v.b. gibi değişik isimler altında kullanılmaktadır.

2.1 Orijinal Diferansiyel Quadrature Metodu

N-1'e eşit veya daha küçük dereceden polinomlar için Denklem (2.1) ele alındığında,

$$Q(x) = c_0 x^0 + c_1 x^1 + \dots + c_{N-2} x^{N-2} + c_{N-1} x^{N-1} \quad (2.2)$$

yazılabilir. Burada sisteme uygun genel bir matris formu elde etmek için,

$$Q(x) = [1 \ x \ \dots \ x^{N-2} \ x^{N-1}]^T \{Q\} \quad (2.3)$$

biçiminde düzenlenir, $[v]$ Vandermonde matrisi tipindedir ve fonksiyonun farklı noktalardaki değeri için yapı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{Bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_{N-1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0^0 & x_0^1 & \dots & x_0^{N-1} \\ x_1^0 & x_1^1 & \dots & x_1^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{N-1}^0 & x_{N-1}^1 & \dots & x_{N-1}^{N-1} \end{bmatrix} [C]^{-T} \begin{Bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_{N-1} \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

Aynı şekilde herhangi bir dereceden x'e göre türevi ise benzer şekildeki bir yaklaşımla bulunabilir. Q(x) fonksiyonunun birinci dereceden türevi ise çok basit bir şekilde aşağıda verildiği biçimiyle $[v]$ matrisinin x'e göre türevidir.

$$\begin{Bmatrix} Q'_0 \\ Q'_1 \\ \vdots \\ Q'_{N-1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & (N-1)x_0^{N-2} \\ 0 & 1 & \dots & (N-1)x_1^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & (N-1)x_{N-1}^{N-2} \end{bmatrix} [C]^{-T} \begin{Bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_{N-1} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

Yine burada integral denklemlerinde kullanılabilen ve bir benzeşim dikkati çekmektedir. Q(x) fonksiyonunun birinci dereceden x' göre integrali aşağıda verildiği gibidir.

$$\begin{Bmatrix} \int Q_0 dx \\ \int Q_1 dx \\ \vdots \\ \int Q_{N-1} dx \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0^1 & \frac{1}{2}x_0^2 & \dots & \frac{1}{N}x_0^N \\ x_1^1 & \frac{1}{2}x_1^2 & \dots & \frac{1}{N}x_1^N \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{N-1}^1 & \frac{1}{2}x_{N-1}^2 & \dots & \frac{1}{N}x_{N-1}^N \end{bmatrix} [C]^{-T} \begin{Bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_{N-1} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

2.2 Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu

Ağırlıklı katsayının bulunmasında kullanılan ikinci bir diğer yaklaşım da, bir farkla önceki yaklaşıma çok benzer. Denklem (2.1) için yaklaşım fonksiyonu olarak $F(x)$ seçilir. $L_N(x)$ N.'nci dereceden Lagrange interpolasyon polinomunu, $L_N^{(i)}(x)$ N.'nci dereceden Lagrange interpolasyon polinomunun birinci dereceden türevi gösterdiğinde x_j 'yi polinomunun kökleri olarak alıp Denklem (2.3), Denklem (2.1)'de yerine koyarak seçilen grid ağlarında herhangi bir sınırlama olmaksızın katsayıların hesaplanmasında basit cebirsel ifadeleri bulmak için, test fonksiyonu olarak Lagrange interpolasyon polinomu seçilsin. N grid noktası sayısı ise;

$$F_i(x) = \frac{L(x)}{(x - x_i)L^{(i)}(x_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, N \text{ için} \quad (2.5)$$

$$L(x) = \prod_{j=1}^N (x - x_j) \quad (2.6)$$

$$L^{(i)}(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^N (x_i - x_j) \quad (2.7)$$

bulunur. Sadeleştirme yapıldığında;

$$L(x) = K(x, x_i)(x - x_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.8)$$

$$K(x, x_i) = L^{(i)}(x_i)\delta_{ij}$$

δ_{ij} = Kronecker Operatörü

$$L^{(1)}(x) = K^{(k)}(x, x_j)(x - x_j) + kK^{(k-1)}(x - x_j) \quad k = 1, 2, \dots, (N-1) \quad (2.9)$$

Böylece, $L_N^{(k)}(x)$ ve $K^{(k)}(x, x_j)$ k'ncü dereceden $L(x)$ ve $K(x, x_j)$ 'nin türevleridir.

Denklem (2.8)'i Denklem (2.4)'de yerine koyduğumuzda ;

$$C_{ij}^{(1)} = \frac{L^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)L^{(1)}(x_j)} \quad i \neq j, \quad (2.10a)$$

$$C_{ii}^{(1)} = \frac{L^{(2)}(x_i)}{2L^{(1)}(x_j)} \quad i = j, i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (2.10b)$$

elde edilir (Jang, 1989).

Denklem (2.10a) ve (2.10b) sınırlaması olmayan grid noktalarıyla işlem görebileceğimiz C_{ij} 'nin hesabında kullanılan bir basit ifadedir. Taylor serisi açılım bağıntısı kullanılarak ikinci ve daha yüksek dereceden türevler için ağırlık katsayısı da yukarıdakilere benzer biçimde elde edilebilir. $F(x, t)$ 'nin m'ncü dereceden türevinin kesikleştirilmiş hale getirildiğinde Diferansiyel Quadrature yaklaşımının aşağıdaki gibi olduğu kabul edilir.

$$F^{(m)}(x_i, t) = \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(m)} F(x_j, t) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.11)$$

Yine $C_{ij}^{(m)}$ m'ncü dereceden ağırlıklı katsayı için ilginç bir yinelenen bağıntı elde edilir.

$$C_{ij}^{(m)} = m \left[C_{ij}^{(m-1)} C_{ij}^{(1)} - \frac{C_{ij}^{(m-1)}}{(x_i - x_j)} \right] \quad m = 2, 3, \dots, (N-1) \text{ ve } i, j = 1, 2, \dots, N \quad (2.12)$$

Yine Denklem (2.11)'e benzer bir bağıntıdan $C_{ii}^{(m)}$ de elde edilebilir.

$$C_{ii}^m = - \sum_{j=1, j \neq i}^N C_{ij}^{(m)} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.13)$$

2.3 Harmonik Diferansiyel Quadrature Metodu

Harmonik Diferansiyel Quadrature Metodu test fonksiyonu olarak trigonometrik bir yapı kullanır. Shu ve Xue tarafından ortaya atılmış ve özellikle matris yapısı ile ilgili çalışmalar ve uygulamaları Chen tarafından kullanılmıştır (Chen, 1996). Bu yöntemde harmonik test fonksiyonu olarak $h_k(x)$ yaklaşımı şu biçimde tanımlanır,

$$h_k(x) = \frac{\sin((x-x_0)\pi/2)\dots\sin((x-x_N)\pi/2)}{\sin((x_k-x_0)\pi/2)\dots\sin((x_k-x_N)\pi/2)}, \quad k = 0,1,2,\dots,N \quad (2.14)$$

Birinci dereceden türev için ağırlıklı katsayının hesaplanmasında kullanılan formül prosedürü aşağıdaki gibi verilir (Xue, 1997).

$$F(x_i) = \prod_{j=1, i \neq j}^N \sin\left[\frac{(x_i - x_j)}{2} \pi\right] \quad i = 1,2,\dots,N, \quad (2.15)$$

$$C_{ij}^{(1)} = \frac{(\pi/2)F(x_i)}{F(x_j) \sin[(x_i - x_j)(\pi/2)]}, \quad i \neq j, i, j = 1,2,\dots,N, \quad (2.16)$$

$$C_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1, i \neq j}^N C_{ij}^{(1)}, \quad i = j, i = 1,2,\dots,N \quad (2.17)$$

Sırasıyla ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden türevleri için ağırlıklı katsayıları da aşağıdaki gibi bulunur (Civaklek, 2004).

$$C_{ij}^{(2)} = C_{ij}^{(1)} \left[2C_{ii}^{(1)} - \pi \cot\left(\frac{x_i - x_j}{2} \pi\right) \right], \quad i \neq j, i = 1,2,\dots,N, \quad (2.18)$$

$$C_{ii}^{(2)} = - \sum_{j=1, i \neq j}^N C_{ij}^{(2)}, \quad i = j, i = 1,2,\dots,N, \quad (2.19)$$

$$C_{ij}^{(3)} = \sum_{k=1}^N C_{ik}^{(1)} C_{kj}^{(2)}, \quad i, j = 1,2,\dots,N, \quad (2.20)$$

$$C_{ij}^{(4)} = \sum_{k=1}^N C_{ik}^{(2)} C_{kj}^{(2)}, \quad i, j = 1,2,\dots,N \quad (2.21)$$

Dönme, moment ve yer değiştirme değerlerinin Diferansiyel Quadrature Metodu ile kolayca elde edilebilmesi, yapısal analizdeki pratik problemlerin çözülmesinde büyük bir kullanım kolaylığı verir ve bu şekilde yapısal analizdeki kullanımının potansiyeli hemen fark edilebilir. Metodun 2 boyutlu problemlere uygulamaları da oldukça basittir. Bir boyutta olduğu gibi, her boyut için sistem ayrı ayrı ele alınır. x yönündeki grid noktaları F_x , y yönündeki grid noktaları F_y kabul edildiğinde, x_i ve y_j 'deki x'e göre n'nci dereceden $F(x,y)$ 'nin kısmi türevi ve y'e göre m'nci dereceden $F(x,y)$ 'nin kısmi türevi şu şekilde kesikli hale getirilebilir (Du, 1994);

$$F_x^{(n)}(x_i, y_j) = \sum_{k=1}^{N_x} C_{ik}^{(n)} F(x_k, y_j) \quad , n = 1, 2, \dots, (N_x - 1) \quad (2.22a)$$

$$F_y^{(m)}(x_i, y_j) = \sum_{k=1}^{N_y} C_{jk}^{(m)} F(x_i, y_k) \quad , m = 1, 2, \dots, (N_y - 1) \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad j = 1, 2, \dots, N_y \quad (2.22b)$$

Yapısal analizde hem kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde hem de adi diferansiyel denklem çözümlerinde Diferansiyel Quadrature Metodu kullanılabilir. Bu metodun statik problemlerine uygulaması, bizi bilinmeyen grid noktalarındaki fonksiyon değerleriyle bir cebirsel denklem dizisine götürür. Zamana bağlı dinamik problemlerinde de sonuç, bilinmeyen grid noktasındaki zamana bağlı fonksiyon değerleriyle oluşan adi diferansiyel denklem dizisidir.

İki boyutlu bir fonksiyonun Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature yaklaşımı aşağıda olduğu gibidir;

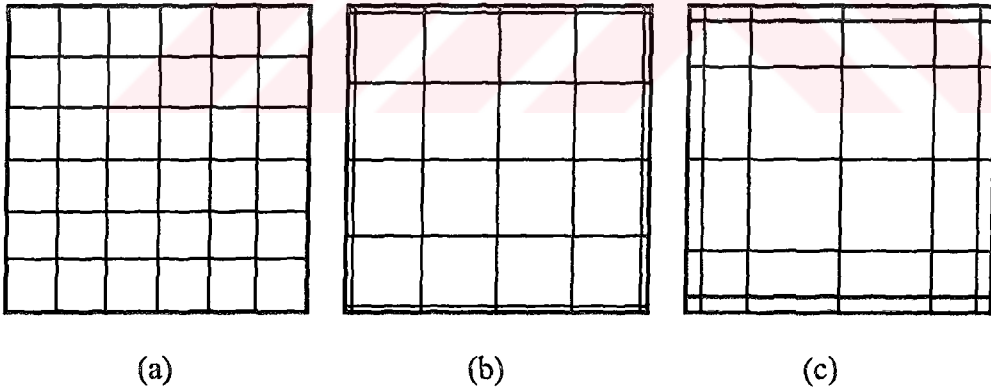
$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} F(x_i, y_j) L_i(x) L_j(y) \quad (2.24)$$

Burada, $L_i(x)$ ve $L_j(y)$ sırasıyla x ve y yönü boyunca Lagrange interpolasyon polinomlarıdır.

Diferansiyel Quadrature Metodunun uygulanması sırasında karşılaşılan bazı yakınsama problemlerin aşılmasında araştırmacılar farklı yönlere eğilmiş özellikle gerçek çözümlerle karşılaştırıldığında çok küçük hataların elde edilmesinde farklı grid yapılarının da çok önem taşıdığını tespit etmişlerdir. Özellikle statik problemlerinde kullanılan belirli sınır koşullarında Orijinal DQM'in kullandığı eşit aralıklı yapıların büyük hatalara sebep verdiği gözlemlenmiştir (Du, 1994).

2.4 Diferansiyel Quadrature Metotlarında Kullanılan Grid Yapıları

DQM 'de değişik sınır koşullarında oluşan hataları azaltmak için kullanılan metotlardan biri de farklı grid yapılarını kullanmaktır. Bu amaçla değişik grid yapıları üzerinde çeşitli çalışmalar yapılmış ve daha çok üç temel grid yapısı üzerinde durulmuştur. Kullanılan bu grid yapıları Şekil 2.1 de gösterilmiş ve bu noktalar için bulunmuş olan bazı katsayı değerleri aşağıda verilmiştir.



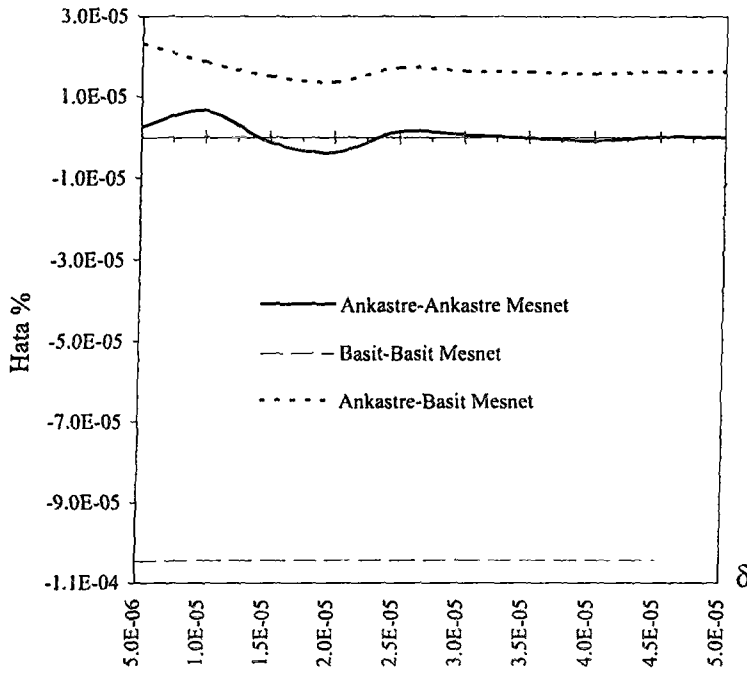
Şekil 2.1 Diferansiyel Quadrature Metotlarında kullanılan grid yapıları (N=7)
(a) Eşit Aralıklı Grid, (b) δ Tipi Grid, (c) GLC Tipi Grid

$$\frac{d^3}{dx_{(a)}^3} = \begin{bmatrix} -160 & 576 & -768 & 448 & -96 \\ -96 & 320 & -384 & 192 & -32 \\ -32 & 64 & 0 & -64 & 32 \\ 32 & -192 & 384 & -320 & 96 \\ 96 & -448 & 768 & -576 & 160 \end{bmatrix} \quad (2.25a)$$

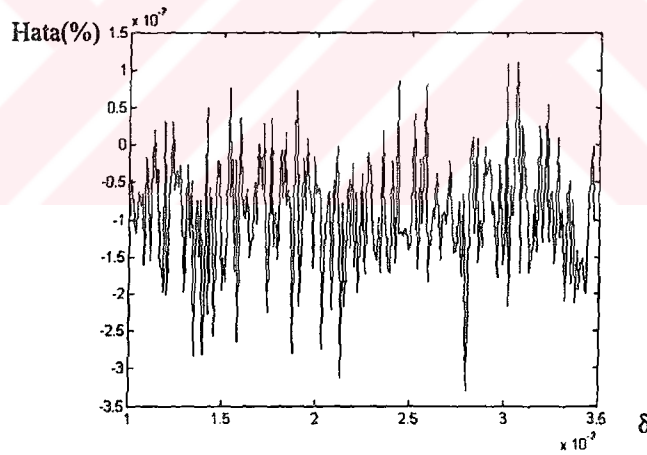
$$\frac{d^3}{dx_{(b)}^3} = \begin{bmatrix} -4221/7 & 24561/4 & -1959/10 & 25927/7 & -39799/11 \\ -65801/11 & 6091 & -194 & 10964/3 & -24989/7 \\ -1206 & 6091/5 & 0 & -6091/5 & 1206 \\ 24989/7 & -10964/3 & 194 & -6091 & 65801/11 \\ 39799/11 & -25927/7 & 1959/10 & -24561/4 & 4221/7 \end{bmatrix} \quad (2.25b)$$

$$\frac{d^3}{dx_{(c)}^3} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} -4080 & 7682 & -6528 & 5374 & -2448 \\ -3124 & 5770 & -4616 & 3462 & -1492 \\ -816 & 1154 & 0 & -1154 & 816 \\ 1492 & -3462 & 4616 & -5770 & 3124 \\ 2448 & -5374 & 6528 & -7682 & 4080 \end{bmatrix} \quad (2.25c)$$

Özellikle eşit grid yapısı ile bazı statik analiz problemlerinin çözümünde yeterli yakınsamalar elde edebilmemize rağmen, burkulma ve titreşim problemlerinde bu hataların arttığını görülmüştür. Grid sayısını artırma yerine sınırdaki istenilen birden fazla koşulunun yerine getirilebilmesi için, komşu bir noktaya sınır koşullarının yerleştirilmesinin yanı sıra komşu gridin de bu noktaya yakınlaştırılması için δ tipi gridler denenmiştir (Malik,1996). Bu noktalarda da özellikle komşu noktanın yerinin belirlenmesi ayrı bir problemi de beraberinde getirmiştir. Aşağıda Şekil 2.2 de farklı sınır koşullarında bir burkulma problemlerinde on beş grid için farklı komşu noktalarda alınan hata yüzdesi değerleri ve Şekil 2.3'te Ankastre-Ankastre Mesnet sınır koşullarında elde edilen hata değerlerinin salımı açıkça görülmektedir. Dikkat edilirse δ tipi grid yapısı değişik sınır koşullarında farklı davranış sergilemektedir. Bazen δ değerinde değişim hata miktarında değişmeye sebep olurken diğerlerinde nispeten daha az değişen bir yapıdadır. İşte yukarıda bahsedilen nedenlerle bazı durumlarda yüksek doğruluk vermesine karşın çözümde bu riski göze almaya değmez.



Şekil 2.2 Farklı sınır koşullarında değişik komşu noktalarında yakınsama grafiği



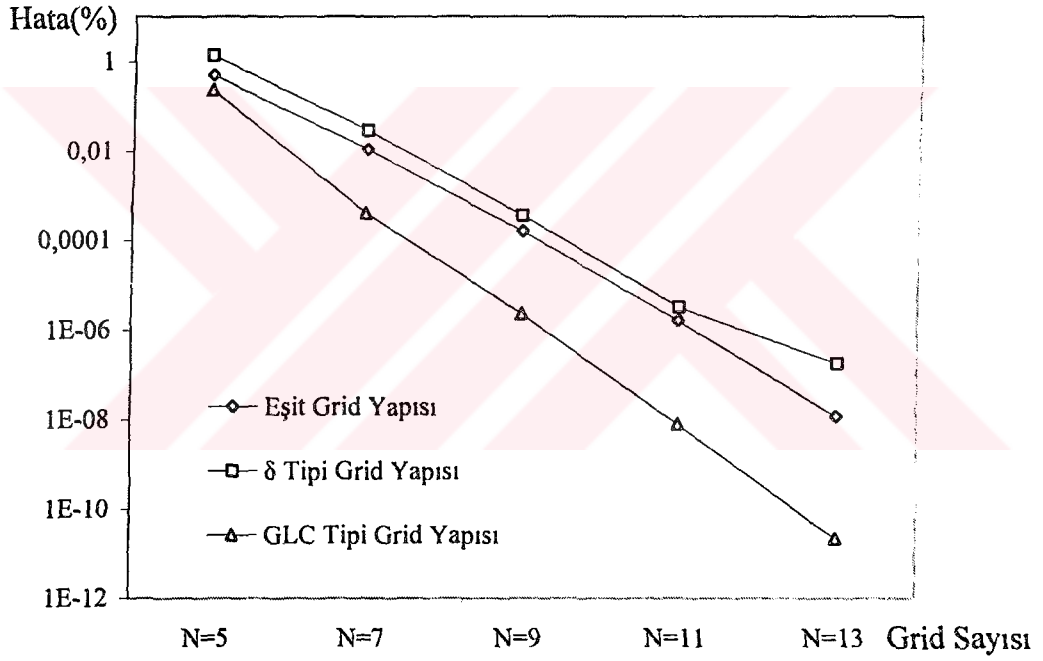
Şekil 2.3 Ankastr mesnet sınır koşullarında çözüm hatasının salınımı

Yukarıdan da anlaşılacağı gibi komşu noktaları alırken nasıl bir değerin seçileceği bu grid yapısının en büyük problemini teşkil etmektedir. Bizim bu yerin neresi olduğunu aramamız yerine çok daha doğru sonuçları alabileceğimiz GLC (Gauss-Lobatto-Chebyshev) gridleri Bert tarafından önerilmiştir (Bert, 1996).

Bu noktalar ;

$$x_i = \frac{1 - \cos[i-1]\pi}{N-1} \quad i=1,..N \text{ için} \quad (2.26)$$

formülünden elde edilebilir(Bert, 1996). Şekil 2.4'te bir kare membranın enine titreşim değerleri verilmiştir. Buradan GLC yapısı ile rahatlıkla daha küçük grid değerlerinde daha hızlı yaklaşımlar elde edilebileceği görülebilir. Her türlü problem için GLC yapısı güvenilir bir yaklaşımın garantisidir ve her çeşit çözüm için önerilir.



Şekil 2.4 Farklı grid yapılarında membran titreşimleri

Çizelge 2.1 Kare membranın titreşimi ve çökmesi

*(K.Değer=4.442883)		N=5	N=7	N=9	N=11	N=13
Eşit Grid Yapısı	Değer	4.464922	4.442404	4.442880	4.442883	4.442883
	Hata(%)	0.496067	0.010774	0.000158	1.59x10 ⁻⁶	1.17 x10 ⁻⁸
	w _(L/2,L/2)	0.073396	0.073669	0.073672	0.073671	0.073671
δ Tipi Grid Yapısı	Değer	4.381782	4.44416	4.442867	4.442883	4.442883
	Hata(%)	1.375249	0.028666	0.000359	3.2 x10 ⁻⁶	1.8 x10 ⁻⁷
	w _(L/2,L/2)	0.075	0.0736677	0.0736698	0.0736713	0.0736713
GLC Grid Yapısı	Değer	4.432603	4.442901	4.442883	4.442883	4.442883
	Hata(%)	0.231378	0.000401	2.29 x10 ⁻⁶	7.81 x10 ⁻⁹	2.16 x10 ⁻¹¹
	w _(L/2,L/2)	0.0738636	0.0736773	0.0736714	0.0736713	0.0736713

*(Bert, 1987)

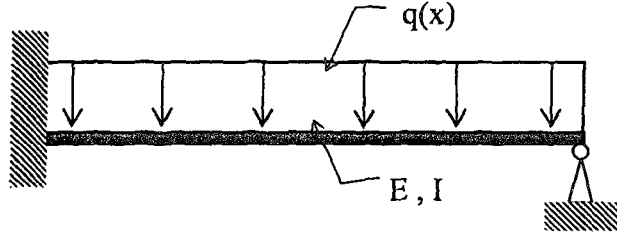
2.5 Diferansiyel Quadrature Metotlarının Statik Analizde Kullanımı

2.5.1 Eğilme problemleri (Kirişler)

Küçük deformasyonlar için Bernouilli-Euler kirişinde temel denklem,

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q(x) \quad (2.27)$$

şeklinde verilir (Wang, 1997). Burada E, I, q(x) sırasıyla Young modülünü, ağırlık merkezinden geçen eksene göre atalet momentini ve yayılı yükü temsil etmektedir. Aşağıda Şekil 2.5'te Ankastre - basit mesnetli bir kiriş yapısı görülmektedir.



Şekil 2.5 Ankastre-basit mesnetli bir kiriş

Ankastre mesnet- basit mesnet bağlantılı ve yayılı yük altındaki bir kirişin eğimi için bir örnek verirse, kirişin eğilme durumuna göre kesme kuvveti deformasyonunu çok küçük olduğundan hesaba katmadığımızda ve L kiriş uzunluğu için,

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + q(x) = 0 \quad 0 \leq x \leq L \quad (2.28)$$

olur. Bu denklemin $[0,1]$ aralığında normalizasyonu için,

$$X = \frac{x}{L}, Y = \frac{y}{L}, X = \frac{q_0 L^4}{EI}, Q(x) = \frac{q(x)}{q_0} \text{ alındığında,}$$

$$EI \frac{d^4 Y}{dX^4} + Q(X) = 0 \quad 0 \leq X \leq 1 \text{ olur.} \quad (2.29)$$

Şekil 2.5'teki gibi kirişin sağ tarafının ankastre mesnet, sol kısmının da basit mesnetli olduğunu kabul edildiğinde, sınır koşulları şu şekilde oluşur;

$$\left\{ X=0 \Rightarrow Y=0 \text{ ve } \frac{dY}{dX} = 0 \right\}, \left\{ X=1 \Rightarrow Y=0 \text{ ve } \frac{d^2 Y}{dX^2} = 0 \right\} \quad (2.30)$$

Verilen grid sayısına göre Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu yaklaşımı Denklem (2.6) uygulandığında;

$$\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(4)} Y_j = -Q(x_i) \quad i=1,2,\dots,N \text{ için} \quad (2.31)$$

olur. Sınır koşulları ise;

$$Y_1 = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} Y_j = 0, \quad Y_N = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(2)} Y_j = 0 \quad (2.32)$$

şeklinde oluşur. Elde edilen matris yapısı için ilk ve son gride düşey deplasmanlar için $Y_{1,j} = 0$, ikinci gride dönme için $C_{1j}^{(1)} Y_j = 0$, N-1'nci gride moment için $C_{Nj}^{(2)} Y_j = 0$, diğer gridlere yayılı yük için $C_{3\dots N-2,j}^{(4)} Y_j = -1$, ifadelerini kullansak, lineer denklem sistemi,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -25/3 & 16 & -12 & 16/3 & -1 \\ 256 & -1024 & 1536 & -1024 & 256 \\ 44/3 & -224/3 & 152 & -416/3 & 140/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

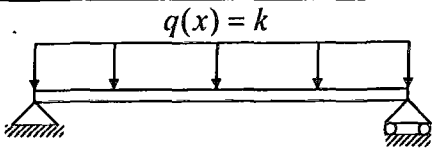
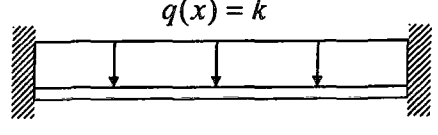
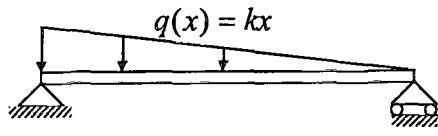
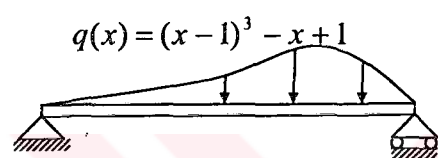
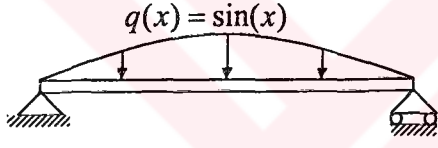
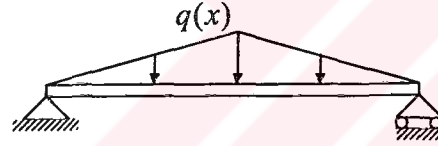
halini alır. Burada lineer denklem sisteminden elde edilen sehim değerleri ve gerçek değerleri Çizelge 2.2' de verilmiştir (Timoshenko, 1964).

Çizelge 2.2 Ankastre - basit mesnetli bir kirişte çökme değerleri

Grid No	II.	III.	IV.
Analitik Çözüm	-5/2048	-1/192	-1/2048
DQM	-5/2048	-1/192	-1/2048

Yine aynı şekilde GLC tipi gridler için farklı yükleme ve sınır koşulları için elde edilen sonuçlar Çizelge 2.3'te verilmiştir.

Çizelge 2.3 Değişik yükleme koşullarında GLC tipi gridlerde elde edilen çökmeler Kuvvetlerin ve Mesnetlerin Durumu

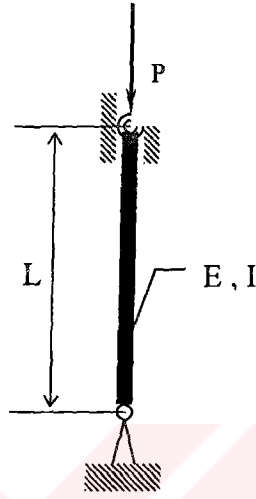
	Grid	L/4	L/2	3L/4
	DQM	0.0027669	0.013021	0.0027669
	Gerçek	0.0027669	0.013021	0.0027669
	Hata(%)	0	0	0
	DQM	0.00016276	0.0026042	0.00016276
	Gerçek	0.00016276	0.0026042	0.00016276
	Hata(%)	0	0	0
	DQM	0.0014727	0.0065104	0.0012942
	Gerçek	0.0014727	0.0065104	0.0012942
	Hata(%)	0	0	0
	DQM	0.00084783	0.0039714	0.00081436
	Gerçek	0.00084783	0.0039714	0.00081436
	Hata(%)	0	0	0
	DQM	0.0021218	0.0010173	0.0021218
	Gerçek	0.0021445	0.0010266	0.0021445
	Hata(%)	1.07	0.91	1.07
	DQM	0.0016656	0.0081597	0.0016656
	Gerçek	0.001732	0.008333	0.001732
	Hata(%)	3.84	2.08	3.84

2.5.2 Burkulma problemleri

İnce elastik çubukların burkulması problemlerinde ise, L uzunluğundaki çubuğun burkulması, Denklem (2.22)'de giriş için yapılan normalizasyona benzer biçimde düzenlendiğinde;

$$\frac{d^2}{dY^2} \left[EI \frac{d^2 Y}{dX^2} \right] = -PL^2 \frac{d^2 Y}{dX^2} \quad 0 < x < L \quad (2.34)$$

şeklini alır. $\lambda = -PL^2/EI$ alınırsa burkulma, bir özdeğer çözümü olur. Burkulma problemleri sınır koşullarıyla, özdeğer probleminin beraber işleme tabi tutulmasıyla elde edilebilir. Basit-basit mesnet bir yapıya sahip çubuk için burkulma probleminin çözümü aşağıdaki gibi verilir.



Şekil 2.6 Basit-basit mesnetli çubuk

Şekil 2.6'da gösterildiği gibi bir çubuğun her iki ucunun basit mesnetli olduğunu kabul edildiğinde aşağıda yazılan sınır koşulları elde edilebilir. Bu sisteme Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu yaklaşımı uygulandığında;

$$Y_1 = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{1j}^{(2)} Y_j = 0, \quad Y_N = 0 \quad \sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(2)} Y_j = 0 \quad (2.35)$$

$$\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(4)} Y_j = -\frac{PL^2}{EI} \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} Y_j \quad i=2,3,\dots,(N-1) \text{ için} \quad (2.36)$$

Malik ve Bert birden fazla sınır koşulunun aynı yere konulması için yaptığı çalışmalarında aşağıda verildiği şekilde katsayı matrislerinin birleştirilmesi için farklı bir yöntem izlemişlerdir (Malik, 1996). Buradaki amaç statikte karşılaştığımız tipteki bir sınır koşulunun yerine getirilmesidir. Örneğin Ankastre mesnet- Basit mesnet bir kiriş için gerekli sınır koşulu,

$$X = 0 \text{ da } \frac{dY}{dX} = 0 \text{ ve } Y = 0, X = L \text{ de } \frac{dY^2}{d^2 X} = 0 \text{ ve } Y = 0 \quad (2.30)$$

olarak verilir. Yapılması gereken, bu dört koşulunun elde edilmesi için dönme ve moment katsayı matrislerinin elde edilmesi sırasında çökme değerlerinin de buraya konulmasıdır. Aşağıda bu işlem için gerekli yöntem verilmiştir. $X=0$ için ilk iki koşul;

$$[\tilde{c}^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{2,1}^1 & c_{2,2}^1 & \dots & c_{2,N-1}^1 & c_{2,N}^1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ c_{N-1,1}^1 & c_{N-1,2}^1 & \dots & c_{N-1,N-1}^1 & c_{N-1,N}^1 \\ c_{N,1}^1 & c_{N,2}^1 & \dots & c_{N,N-1}^1 & c_{N,N}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_{N-1} \\ W_N \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

$$[\tilde{c}^{(2)}] = [c^{(1)}][\tilde{c}^{(1)}] \quad (1.32)$$

$X=L$ için diğer iki koşul ise;

$$[\tilde{c}^{(2)}] = \begin{bmatrix} * & * & \dots & * & * \\ c_{1,1}^2 & c_{1,2}^2 & \dots & c_{1,N-1}^2 & c_{1,N}^2 \\ * & * & \dots & * & * \\ c_{2,1}^2 & c_{2,2}^2 & \dots & c_{2,N-1}^2 & c_{2,N}^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ * & * & \dots & * & * \\ c_{N-1,1}^2 & c_{N-1,2}^2 & \dots & c_{N-1,N-1}^2 & c_{N-1,N}^2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_{N-1} \\ W_N \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

biçiminde elde edilir. Aşağıda GLC grid yapısına sahip bir burkulma problemi için yukarıda verilen şekil için gerekli sınır koşullarındaki matris yapısı verilmiştir.

$$[\tilde{c}^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -56 & 24 & 8 & 0 \\ 0 & 16 & -24 & 16 & 0 \\ 0 & -8 & 24 & 56 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{Bmatrix} \quad (2.34a)$$

$$[c^{(4)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3584 & -2112 & 1280 & 0 \\ 0 & -1408 & 1344 & -1408 & 0 \\ 0 & 1280 & -2112 & 3584 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{Bmatrix} \quad (2.34b)$$

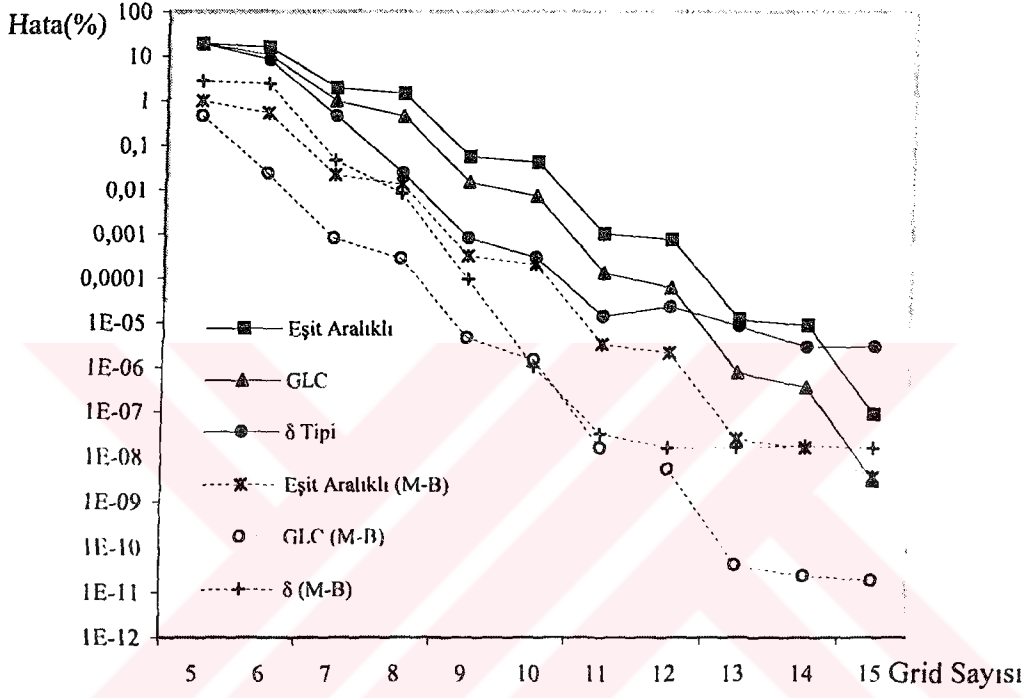
Gerekli özdeğerler için lineer denklem sistemi çözümü yapıldığında değişik grid yapılarında Malik-Bert yaklaşımıyla, Basit mesnet-Basit mesnet yapısındaki bir kiriş için burkulma değerleri Çizelge 2.4' te verilmiştir (Malik, 1996).

Çizelge 2.4 Basit - basit mesnet bir kiriş için değişik grid yapılarında elde edilen burkulma değerleri (*Kesin Değer=9,869604)

Grid	Eşit Tip	Hata(%)	GLC Tip	Hata(%)	δ Tip	Hata(%)
5	9.967767	-9.9×10^{-1}	9.823985	4.6×10^{-1}	9.600008	2.73
6	9.921377	-5.2×10^{-1}	9.867287	2.4×10^{-2}	10.10526	-2.39
7	9.867478	2.2×10^{-2}	9.869683	-8.0×10^{-4}	9.865093	4.6×10^{-2}
8	9.868328	1.3×10^{-2}	9.869631	-2.7×10^{-4}	9.87039	-7.9×10^{-3}
9	9.869635	-3.2×10^{-4}	9.869604	4.6×10^{-6}	9.869595	9.4×10^{-5}
10	9.869624	-2×10^{-4}	9.869604	1.5×10^{-6}	9.869604	1.0×10^{-6}
11	9.869604	3.2×10^{-6}	9.869604	-1.6×10^{-8}	9.869604	-3.2×10^{-8}
12	9.869604	2.1×10^{-6}	9.869604	-5.5×10^{-9}	9.869604	-1.6×10^{-8}
13	9.869604	-2.4×10^{-6}	9.869604	4.1×10^{-11}	9.869604	1.6×10^{-8}
14	9.869604	-1.6×10^{-8}	9.869604	2.4×10^{-11}	9.869604	-1.7×10^{-8}

*(Jang, 1989)

Şekil 2.7’de Malik-Bert yöntemiyle elde edilen burkulma değerlerin normal DQM ile karşılaştırılması görülmektedir. Açık bir biçimde bu yöntemin küçük gridlerde çok daha fazla yakınsama gösterdiği görülmektedir. Grid sayısının artması ile çok daha hızlı bir yakınsama yakalamaktadır. Farklı sınır koşulları içinde aynı yöntemle benzer biçimde yakınsama göstermektedir.



Şekil 2.7 Basit-basit mesnetli kirişin Malik-Bert ve yöntemiyle elde edilen değerlerin normal DQM ile karşılaştırılması

2.5.3 Titreşim problemleri

Dairesel, izotropik ince bir plak için titreşim problemlerinde ise, temel denklem aşağıdaki gibidir (Du, 1994).

$$\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.35)$$

Şekil 2.8'de verildiği gibi gridlere bölünmüş R yarıçapında dairesel plakada Denklem (2.22)'de giriş için yapılan normalizasyona benzer biçimde $R = r/a$, $\bar{\omega}^2 = \rho h a^4 \omega^2 / D$ için düzenlendiğinde;

$$\frac{\partial^4 W}{\partial R^4} + \frac{1}{R} \frac{\partial^3 W}{\partial R^3} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 W}{\partial R^2} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial W}{\partial R} = \bar{\omega}^2 W \quad (2.36)$$

elde edilir. Burada a dairesel plağın yarıçapını, h kalınlığını ve D eğilme rijitliğini göstermektedir.

Denklem 2.36 'ya Diferansiyel Quadrature yaklaşımı uygulandığında , $i, j=1, \dots, N$ için,

$$\sum_{i=1}^N c_{ij}^{(4)} W_j + \frac{1}{R_i} \sum_{i=1}^N c_{ij}^{(3)} W_j - \frac{1}{R_i^2} \sum_{i=1}^N c_{ij}^{(2)} W_j + \frac{1}{R_i^3} \sum_{i=1}^N c_{ij}^{(1)} W_j = \bar{\omega}^2 W_i \quad (2.37)$$

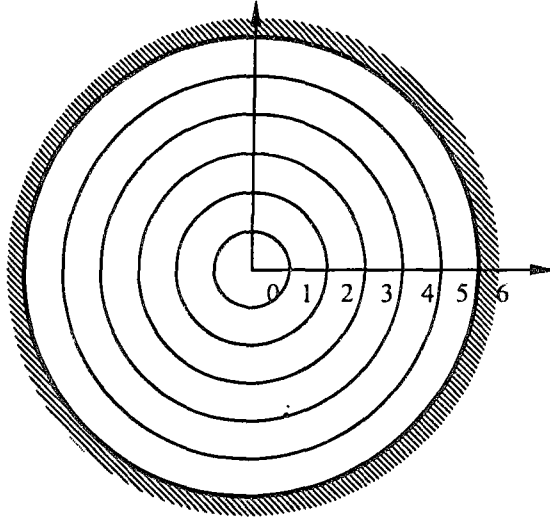
elde edilir, yine benzer biçimde Ankastre sınır koşulu için,

$$W = 0 \text{ ve } \frac{\partial W}{\partial R} = 0 \text{ için } W_N = 0 \text{ ve } \sum_{i=1}^N C_{ij}^{(1)} W_j = 0 \quad (2.38)$$

ve benzerlik probleminden kurtulmak için vazgeçilmez bir gereklilik olarak, dairesel plağın ortasında dönmenin sıfır olacağı için,

$$\sum_{j=1}^N C_{ij}^{(1)} W_j = 0 \quad (2.39)$$

uygulanır. GLC tipi gridler için Harmonik Diferansiyel Quadrature ve Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature ile elde edilen ilk üç frekans sonuçları ve karşılaştırmaları Çizelge 2.5 da verilmiştir (Bert, 1991).



Şekil 2.8 Dairesel bir plağın eşit grid yapısı

Çizelge 2.5 Ankaşre mesnetli GLC tipi grid yapısına sahip dairesel plağın HDQ ve GDQ ile elde edilen değerleri ve hata(%)

	N=7			N=9			N=11		
	ϖ_1	ϖ_2	ϖ_3	ϖ_1	ϖ_2	ϖ_3	ϖ_1	ϖ_2	ϖ_3
(Bert,1991)	10.216	39.770	89.104	10.216	39.770	89.104	10.216	39.770	89.104
GDQ	10.236	40.708	76.463	10.216	39.739	91.204	10.216	39.772	88.958
Hata(%)	1.96×10^{-1}	2.36	14.2	0	7.79×10^{-2}	2.36	0	5.03×10^{-3}	1.64×10^{-1}
HDQ	10.236	40.707	76.471	10.216	39.739	91.201	10.216	39.772	88.958
Hata(%)	1.95×10^{-1}	2.35	14.2	0	7.71×10^{-2}	2.34	0	4.83×10^{-3}	1.63×10^{-1}

Özellikle Harmonik Diferansiyel Quadrature metodu burkulma ve titreşim problemlerinin çözümünde önerilmiştir. Dikkat edilirse, küçük grid sayılarında Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metoduna göre daha iyi sonuçlar alınmaktadır (Civalek, 2003).

3. DİFERANSİYEL QUADRATURE ELEMENT METODU

Deformasyonların, değişik dış yük ve momentlerin tesiri altında çözülebilmesi gerekir. Bunun yanında süreksiz yükler ve momentler, farklı malzeme ve şekillere sahip elemanlar üzerine de etki edebilir. Yukarıda anılan durumlara DQM yeterli cevap verememektedir. Bu tip hallerde tüm değişken sahasını elemanlara bölmek gerekir. DQM ile beraber Galerkin sonlu elemanlar tekniği kullanarak istenilen yapıya ulaşılmıştır.

Aslında çözüm alanı tüm değişken sahasına ve bununla beraber herhangi bir noktadaki verilen koşullara bölünebilmektedir. Eğer $F(x)$ 'den x_i noktasında n_i kadar durum koşulu isteniyorsa, x_i ayırık noktalarında DQ yapısı aşağıdaki gibi verilir.

$$\frac{d^r F(x_i)}{dx^r} = \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^{n_j-1} C_{ijl}^{(r)} F(x_j^{(l)}) = \sum_{k=1}^M C_{ik}^{(r)} W_k \quad N=1,2, \dots, N \quad (3.1)$$

Burada $M = \sum_{i=1}^N n_i$ ve $C_{ik}^{(r)}$, x_i noktasındaki DQ'nun ağırlık katsayılarıdır. W_k ise aşağıda gösterilen vektörün k 'nci bileşenidir.

$$\{ W_1, W_2, \dots, W_k, \dots, W_M \} = \{ F_1^{(0)}, F_1^{(1)}, \dots, F_1^{(n_1-1)}, \dots, F_N^{(0)}, F_N^{(1)}, \dots, F_N^{(n_N-1)} \} \quad (3.2)$$

Burada, $F_i^{(0)} = F^{(0)}(x_i)$ fonksiyonun değerini, $F_i^{(k)} = F^{(k)}(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n_i - 1$) ise onun türevini ifade etmektedir. Yukarıdan anlaşılacağı gibi x_i noktasındaki denklem sayısı $F_i^{(k)} = F^{(k)}(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n_i - 1$) değişken sayısına eşittir. Yani bir anlamda sınırlarda aynı yere birden fazla sınır koşulu yerine getirilebilmektedir (Striz, 1994).

3.1 Ağırlıklı Katsayıların Elde Edilmesi

Ağırlıklı katsayıların elde edilmesi daha önceki bölümde de görülen ağırlıklı katsayıların elde edilmesi prosedürüne benzer. Bağımlı değişken f Lagrange polinomu ile şu biçimde ifade edilebilir;

$$f(x) = w_0 + w_1 \bar{x} + \dots + w_{n+1} \bar{x}^{n+1} + w_{n+2} \bar{x}^{n+2} \quad (3.3)$$

burada ' \bar{x} ' işareti $[-1,1]$ arasındaki lokal koordinat sistemini temsil etmektedir ve global koordinat sisteminden dönüşümü aşağıdaki gibi yapılabilir;

$$\bar{x} = \frac{2}{(x_j - x_i)} (x - x_i) - 1 \quad (3.4)$$

Denklem (3.3) matris formunda aşağıdaki yazılabilir.

$$f(x) = [g] \{w\} \quad (3.5)$$

Denklem (3.5) da g ve w vektörleri sırasıyla;

$$[g] = [1 \quad \bar{x}^1 \quad \bar{x}^2 \quad \dots \quad \bar{x}^n \quad \bar{x}^{n+1} \quad \bar{x}^{n+2}] \quad (3.6a)$$

$$\{w\} = \{w_0 \quad w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n \quad w_{n+1} \quad w_{n+2}\}^T \quad (3.6b)$$

Denklemler (3.6a) ve (3.6b) değişkenlerine bağlı olarak ifadesi aşağıdaki biçimde de yazılabilir;

$$\begin{Bmatrix} f_0 \\ f_1' \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \\ f_n' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}_0 & \bar{x}_0^{-2} & \dots & \bar{x}_0^{-n} & \bar{x}_0^{-n+1} & \bar{x}_0^{-n+2} \\ 0 & 1 & 2\bar{x}_0 & \dots & \bar{x}_0^{-n-1} & (n+1)\bar{x}_0^{-n} & (n+2)\bar{x}_0^{-n+1} \\ 1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_1^{-2} & \dots & \bar{x}_1^{-n} & \bar{x}_1^{-n+1} & \bar{x}_1^{-n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \bar{x}_{n-1} & \bar{x}_{n-1}^{-2} & \dots & \bar{x}_{n-1}^{-n} & \bar{x}_{n-1}^{-n+1} & \bar{x}_{n-1}^{-n+2} \\ 1 & \bar{x}_n & \bar{x}_n^{-2} & \dots & \bar{x}_n^{-n} & \bar{x}_n^{-n+1} & \bar{x}_n^{-n+2} \\ 0 & 1 & 2\bar{x}_n & \dots & \bar{x}_n^{-n-1} & (n+1)\bar{x}_n^{-n} & (n+2)\bar{x}_n^{-n+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ w_{n+1} \\ w_{n+2} \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

veya Denklem 3.7'de matris yapısını basit bir biçimde aşağıdaki biçimde de yazabiliriz;

$$\{f\} = [G]\{w\} \quad (3.8)$$

Buradan fonksiyonun ağırlıklı katsayısını matris biçimindeki ifadeyle çıkartalım;

$$\{w\} = [G]^{-1}\{f\} \quad (3.9)$$

O halde Denklem (3.9)'i Denklem (3.8)'de yerine koyarsak;

$$\frac{d}{dx}\{\bar{f}\} = \frac{d}{dx}([G][G]^{-1})\{f\} \quad (3.10)$$

elde ederiz. Yukarıdaki ifade basitçe şu şekilde yazılabilir;

$$[c] = [G][G]^{-1} \quad (3.11)$$

Denklem (3.11), Denklem (3.10)'te yerine konduğunda,

$$\frac{d}{dx}\{\bar{f}\} = \frac{d}{dx}[c]\{f\} \quad (3.12)$$

elde edilir. Buradan türev ifadeleri;

$$\left[\frac{d}{dx}\right] = c^{(1)}, \left[\frac{d^2}{d^2x}\right] = \left[\frac{d}{dx}\right]\left[\frac{d}{dx}\right] = c^{(2)} \quad (3.13a)$$

$$\left[\frac{d}{dx} \right] \left[\frac{d}{dx} \right] \left[\frac{d}{dx} \right] = c^{(3)}, \left[\frac{d}{dx} \right] \left[\frac{d}{dx} \right] \left[\frac{d}{dx} \right] \left[\frac{d}{dx} \right] = c^{(4)} \quad (3.13b)$$

bulunur. Kesikli hale getirme işlemi için,

$$\bar{x}_i = \frac{(2i-n)}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, n \quad (3.14)$$

Denklem (3.3)'de Lagrange polinomu yerine bağımlı değişken f ifadesinde Chebyshev polinomu kullanırsak;

$$f(x) = w_0 T_0(\bar{x}) + w_1 T_1(\bar{x}) + \dots + w_{n+1} T_{n+1}(\bar{x}) + w_{n+2} T_{n+2}(\bar{x}) \quad (3.15)$$

elde edebiliriz. Burada ;

$$T_n(\bar{x}) = \cos(n \cos^{-1} \bar{x}) \quad (3.16)$$

Kesikli hale getirme, lokal koordinat sisteminde $[-1, 1]$ için

$$\bar{x}_i = -\cos\left(\frac{\pi i}{n}\right) \quad i = 0, 1, \dots, n-1, n \quad (3.17)$$

biçimindedir. Yine türev ifadeleri Denklem (3.13a) ve (3.13b) ifadelerindeki gibi bulunabilir. $N=3$ için Lagrange polinomu kullanılarak elde edilen katsayı matrisleri aşağıda verilmiştir (Chen, 1994).

$$c^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -22 & -8 & 32 & -10 & 2 \\ -3/2 & -1/4 & 0 & 3/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -10 & -2 & 32 & -22 & 8 \end{bmatrix}, c^{(2)} = \begin{bmatrix} -22 & -8 & 32 & -10 & 2 \\ 108 & 30 & -192 & 84 & -18 \\ 8 & 1 & -16 & 8 & -1 \\ -10 & -2 & 32 & -22 & 8 \\ -84 & -18 & 192 & -108 & 30 \end{bmatrix} \quad (3.18a)$$

$$c^{(3)} = \begin{bmatrix} 108 & -30 & -192 & 84 & -18 \\ -192 & 48 & 384 & -192 & 48 \\ 12 & 6 & 0 & -12 & 6 \\ -84 & -18 & 192 & -108 & 30 \\ -192 & -48 & 384 & -192 & 48 \end{bmatrix}, c^{(4)} = \begin{bmatrix} -192 & -48 & 384 & -192 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -192 & -48 & 384 & -192 & 48 \\ -192 & -48 & 384 & -192 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18b)$$

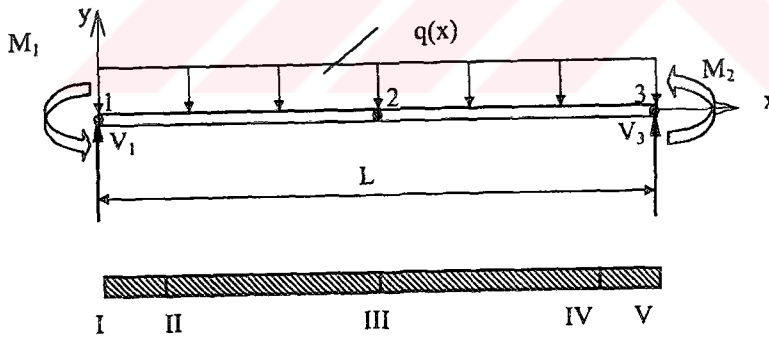
3.2 Quadrature Eleman Metodunun Statik Analizde Kullanımı

3.2.1 Eğilme problemleri (Kiriş-çerçeve)

Bir Bernoulli-Euler kirişi için küçük deformasyonlarda denge denklemleri şu şekilde ifade edilir;

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q(x) , EI \frac{d^3 v}{dx^3} = V(x) , EI \frac{d^2 v}{dx^2} = M(x) \quad (3.19)$$

Burada E, Elastite modülünü, I, z eksenine göre atalet momentini, $q(x)$, yayılı yükü, $V(x)$, kesme kuvvetini, $M(x)$ eğilme momentini göstermektedir.



Şekil 3.1 Üç düğüm noktalı bir kiriş ve grid yapısı

Şekil 3.1'de görülen $N=3$ düğüm noktasına sahip bir kiriş için Denklem (3.19) denkleminde QEM uygulanırsa,

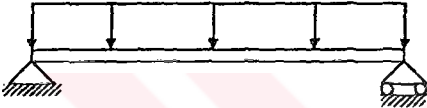
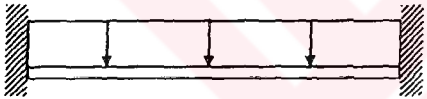
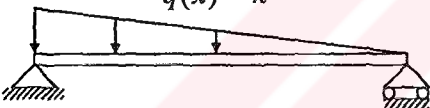
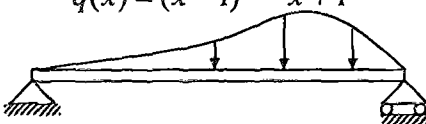
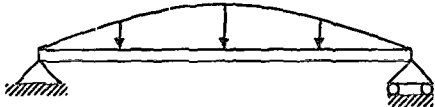
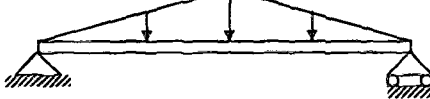
$$V_1 = \sum_{j=1}^5 C_{1j}^{(3)} \delta_j , M_2 = -\sum_{j=1}^5 C_{2j}^{(2)} \delta_j \quad (3.20a)$$

$$q_3 = \sum_{j=1}^5 C_{3j}^{(4)} \delta_j \quad (3.20b)$$

$$V_4 = -\sum_{j=1}^5 C_{4j}^{(3)} \delta_j, \quad M_5 = \sum_{j=1}^5 C_{5j}^{(2)} \delta_j \quad (3.20c)$$

elde edilir. Çizelge 3.1'de eşit aralıklı bir grid yapısı ve $N=5$ için değişik sınır ve yükleme koşullarında DQEM ile elde edilen değerler görülmektedir (Wang, 1997).

Çizelge 3.1 Eşit aralıklı bir grid yapısına sahip bir kirişte değişik sınır ve yükleme koşullarında DQEM ile elde edilen çökme değerleri

Kuvvetlerin ve Mesnetlerin Durumu	Grid	L/4	L/2	3L/4
$q(x) = k$	DQM	0.0065908	0.013021	0.0065908
	Gerçek	0.0065908	0.013021	0.0065908
	Hata(%)	0	0	0
$q(x) = k$	DQM	0.00080376	0.0026042	0.00080376
	Gerçek	0.00080376	0.0026042	0.00080376
	Hata(%)	0	0	0
$q(x) = k$	DQM	0.0034776	0.0065104	0.0031132
	Gerçek	0.0034776	0.0065104	0.0031132
	Hata(%)	0	0	0
$q(x) = (x-1)^3 - x + 1$	DQM	0.0019613	0.0039714	0.0020155
	Gerçek	0.0019613	0.0039714	0.0020155
	Hata(%)	0	0	0
$q(x) = \sin(x)$	DQM	0.00513417	0.010268	0.00513417
	Gerçek	0.00523299	0.010266	0.00523299
	Hata(%)	1.87	0.02	1.87
$q(x)$	DQM	0.0045247	0.009034	0.0045247
	Gerçek	0.0041495	0.008333	0.0041495
	Hata(%)	9.04	8.41	9.04

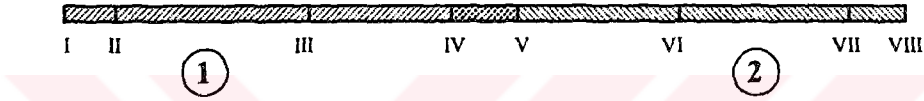
Aşağıda Şekil 3.2'de ise iki elemanlı bir kirişin grid yapısı görülmektedir. Burada I-V arasında bir eleman, IV-VIII arasında bir başka eleman yer almaktadır.

Yani burada IV ve V eleman noktaları ortak kullanılmaktadır. Elemanların sınır noktalarında iki nokta arasındaki uzaklık δ kadar alındığı düşünülürse, iki birleşen uç için koşullar aşağıdaki şekilde alınabilir;

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{1.EI.} - \left. \frac{dv}{dx} \right|_{2.EI.} = 0 \quad (3.21a)$$

$$M(x)|_{1.EI.} + M(x)|_{2.EI.} + M(x)|_D = 0 \quad (3.21b)$$

$$V(x)|_{1.EI.} + V(x)|_{2.EI.} + V(x)|_D = 0 \quad (3.21c)$$



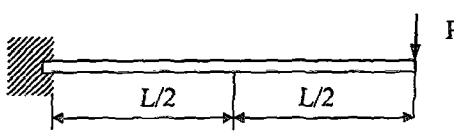
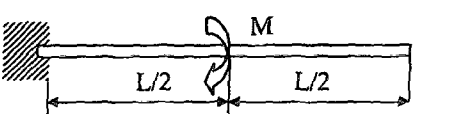
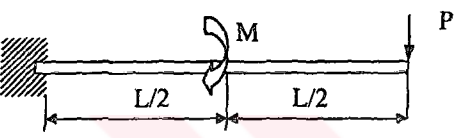
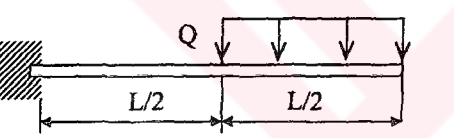
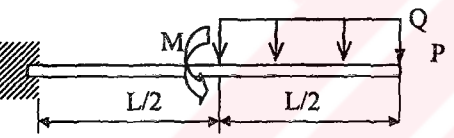
Şekil 3.2 İki elemanlı bir kirişin grid yapısı

$V = \delta / \alpha$, y yönünde normalize edilmiş eğilmeyi, α referans uzunluğunu, $F_y = F_y L^3 / EI$ kesme kuvvetini, $M = ML^2 / EI$ momenti, $Q = qL^4 / EI$ yayılı yükü gösterirse, iki eleman için ağırlıklı katsayı matrisi;

$$\begin{bmatrix} I^{(3)} & I^{(3)} & I^{(3)} & I^{(3)} & I^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & 0 & 0 & 0 \\ I^{(2)} & I^{(2)} & I^{(2)} & I^{(2)} & I^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & 0 & 0 & 0 \\ I^{(4)} & I^{(4)} & I^{(4)} & I^{(4)} & I^{(4)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & 0 & 0 & 0 \\ I^{(3)} & I^{(3)} & I^{(3)} & I^{(3)} & II^{(3)} & I^{(3)} & II^{(3)} & II^{(3)} & II^{(3)} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} + C_{11} & C_{45} + C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ I^{(2)} & I^{(2)} & I^{(2)} & I^{(2)} & II^{(2)} & I^{(2)} & II^{(2)} & II^{(2)} & II^{(2)} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} + C_{21} & C_{55} + C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ 0 & 0 & 0 & II^{(4)} & II^{(4)} & II^{(4)} & II^{(4)} & II^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ 0 & 0 & 0 & II^{(3)} & II^{(3)} & II^{(3)} & II^{(3)} & II^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} \\ 0 & 0 & 0 & II^{(2)} & II^{(2)} & II^{(2)} & II^{(2)} & II^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_2 \\ Q_3 \\ F_{y4} \\ M_5 \\ Q_6 \\ F_{y7} \\ M_8 \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

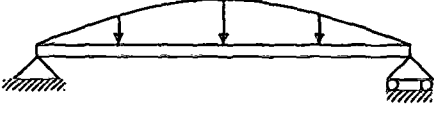
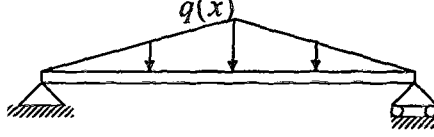
elde edilir. Çizelge 3.2’de iki elemanlı değişik sınır ve yükleme koşullarında ve eşit aralıklı yapıya sahip gridlerde elde edilen değerler verilmiştir.

Çizelge 3.2 Değişik sınır ve yükleme koşullarında iki elemanlı eşit aralıklı tip gridler ile elde edilen çökme

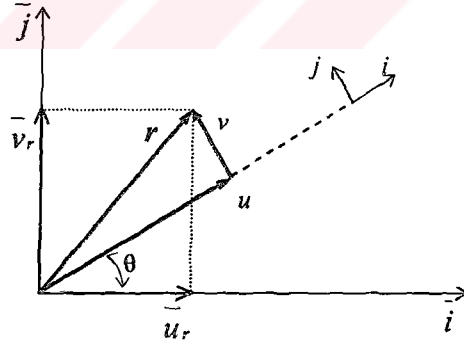
Kuvvetlerin ve Mesnetlerin Durumu	Grid	2	3	4	5
	DQM	0.028646	0.10417	0.21094	0.33333
	Gerçek	0.028646	0.10417	0.21094	0.33333
	Hata(%)	0	0	0	0
	DQM	0.03125	0.125	0.25	0.375
	Gerçek	0.03125	0.125	0.25	0.375
	Hata(%)	0	0	0	0
	DQM	0.059896	0.22917	0.46094	0.70833
	Gerçek	0.059896	0.22917	0.46094	0.70833
	Hata(%)	0	0	0	0
	DQM	0.010417	0.036458	0.070475	0.10677
	Gerçek	0.010417	0.036458	0.070475	0.10677
	Hata(%)	0	0	0	0
	DQM	0.070313	0.26563	0.53141	0.8151
	Gerçek	0.070313	0.26563	0.53141	0.8151
	Hata(%)	0	0	0	0

Çizelge 3.3’de GLC yapısına sahip kirişlerde elde edilen sonuçlar verilmiştir. Çizelge 2.3’te hatalı sonuçlar veren iki seçenek ele alınıp incelendiğinde DQM ile 9 serbestlik derecesinde hata yüzdesi, orta noktada 8.4 iken iki elemanlı QEM ile 10 serbestlik derecesinde sıfır hata yüzdesine ulaşıldığı görülebilir.

Çizelge 3.3 İki elemanlı GLC tipi grid yapılı kirişlerde elde edilen çökme değerleri

Kuvvetlerin ve Mesnetlerin Durumu	Grid	L/4	L/2	3L/4
 $q(x) = \sin(x)$	DQM	0.0021445	0.010266	0.0021445
	Gerçek	0.0021445	0.010266	0.0021445
	Hata(%)	0	0	0
 $q(x)$	DQM	0.0058757	0.0083333	0.0058757
	Gerçek	0.0058757	0.0083333	0.0058757
	Hata(%)	0	0	0

Kiriş elemanına sahip kafes yapıları ele alındığında, sırasıyla x ve y yönündeki lokal koordinatlardaki lokal deplasmanlar u ve v 'nin bir düzlemdeki global koordinatlardaki, global deplasmanlara \bar{u}, \bar{v} dönüştürülmesi gerekir. Yatay ve dikey doğrultuda olduğu varsayılan global koordinatlar ve θ açısı yapan lokal koordinatlar Şekil 3.3'de gösterilmektedir.



Şekil 3.3 Lokal ve global koordinatlarda şekil değiştirme vektörü

Toplam şekil değiştirme vektörü (r) lokal ve global koordinatlarda birbirine eşit olacağından ;

$$r = u_r \bar{i} + v_r \bar{j} = u \bar{i} + v \bar{j} \quad (3.23)$$

her taraf sırasıyla i ve j ile skaler çarpıldığında ;

$$u_r = \bar{u}_r \cos \theta + \bar{v}_r \sin \theta \quad (3.24a)$$

$$v_r = -\bar{u}_r \sin \theta + \bar{v}_r \cos \theta \quad (3.24b)$$

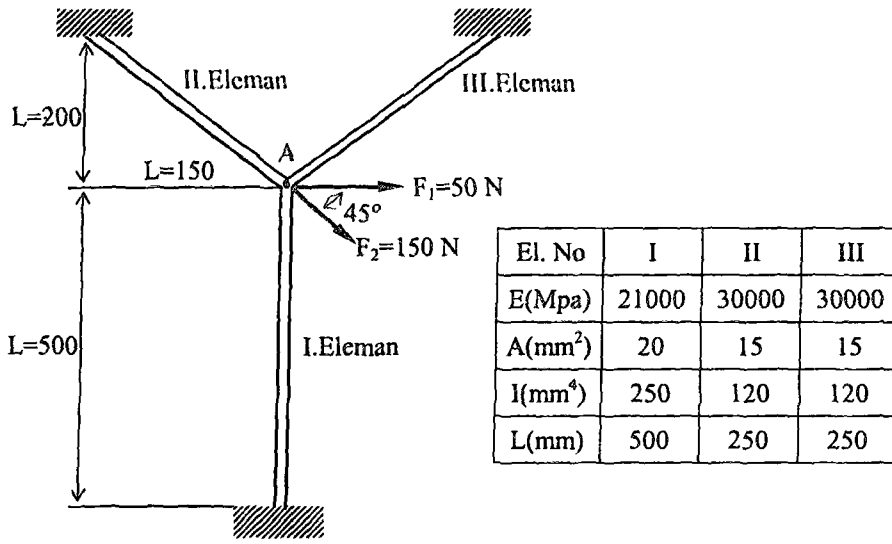
elde edilir. O halde Denklem(3.24a) ve (3.24b) ve $\theta = \bar{\theta}$ olacağından matris formunda şu biçimde yazılabilir.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

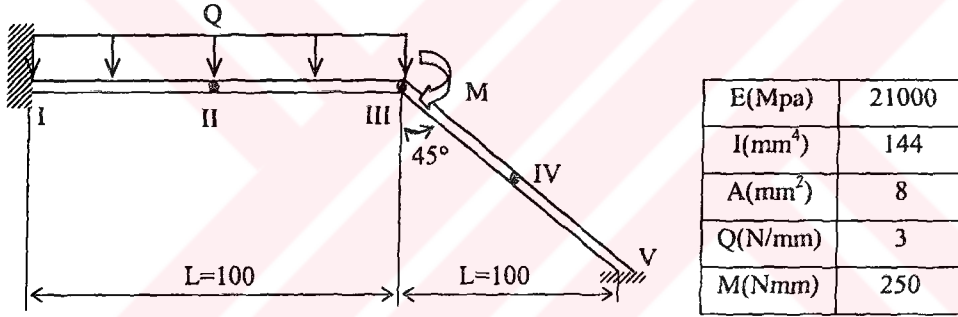
Buradan iki giriş elemanı için T transformasyon matrisi şu biçimde düzenlenebilir (Chen, 1994; Wang, 1997).

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Şekil 3.4 ve Şekil 3.5'da üç ve iki elemanlı çerçeve yapı ve Çizelge 3.4 ve Çizelge 3.5 de DQEM metodu ile elde edilen değerler görülmektedir.



Şekil 3.4 Üç elemanlı çerçeve yapı



Şekil 3.5 Üzerinde yayılı yük ve moment bulunan iki elemanlı çerçeve yapı

Çizelge 3.4 Çerçevenin A noktasındaki deplasman ve dönme

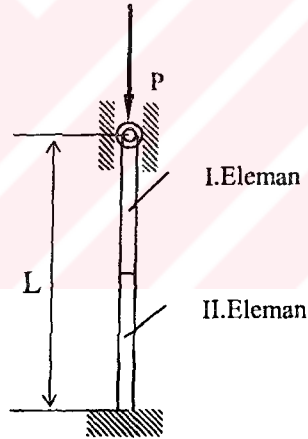
	DQM(12x12)	FEM(15x15)
U(x)	0.120154	0.120154
U(y)	-0.033715	-0.033715
θ(z)	0.000326	0.000326

Çizelge 3.5 Yayılı yük bulunan iki elemanlı çerçeve yapıda elde edilen deplasman

	DQM(12x12)			FEM(15x15)		
	II.	III.	IV.	II.	III.	IV.
U(x)	-0.038616	-0.077232	0.080040	-0.038616	-0.077232	0.080040
U(y)	-0.521699	-0.289387	-0.026037	-0.521699	-0.289387	-0.026037

3.2.2 Burkulma problemleri

İnce elastik çubukların burkulması problemlerinde QEM'un kullanımı da kolaydır. Denklem (2.34)'te verilen temel denklem ele alındığında Ankastre Mesnet-Basit Mesnet bir yapıda burkulma probleminin çözümü aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.6 Burkulma yükü altındaki ankastre-basit mesnetli kiriş

Şekil 3.6'de gösterildiği gibi iki elemandan oluşan çubuğun sınır koşulları için sırasıyla ankastre ve basit mesnetli uçta,

$$U_1 = 0, U_2 = 0 \quad X = 0 \quad (3.27a)$$

$$\sum_{j=1}^{N+2} c_{N,j}^{(3)} U_j = 0, \sum_{j=1}^{N+2} c_{N,j}^{(3)} U_j = 0 \quad X = L \quad (3.27b)$$

verilir. Çözüm uyguladığımızda elde ettiğimiz değerler Çizelge 3.6'da verilmiştir. Burada uçlar için başka herhangi bir koşula gerek olmadığından $N=7$ serbestlik dereceli iki eleman için özdeğer çözümü 13×13 lineer denklem sisteminin çözümü olacaktır. Yine aynı şekilde yalnızca bir eleman için çözüm ise 6×6 büyüklüğünde bir çözümdür.

Çizelge 3.6 Ankastre - basit mesnet kirişte burkulma değerleri

Grid Sayısı	Bir Eleman	İki Eleman
N=7	20.189	20.192
N=9	20.191	20.191
N=11	20.191	20.191
Kesin Değer=20.142 (Civalek, 2003)		

3.2.3 Titreşim problemleri

Bir Bernoulli-Euler çubuğunda kullanılan temel denklem aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = -\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3.28)$$

$$\bar{\omega}^2 = \frac{\rho A_0 l^4 \omega^2}{EI_0} \quad (3.29)$$

Doğal frekansı boyutsuz hale getirip (3.28) Denkleminde Diferansiyel Quadrature Metodunu uygulandığında;

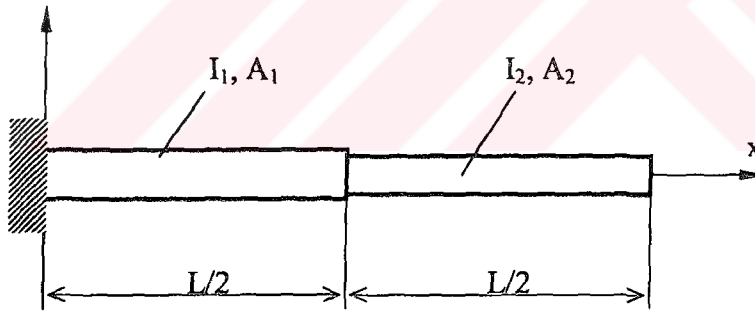
$$\sum_{j=1}^{N+2} c_{ij}^{(4)} V_j = -\bar{\omega}^2 V_i \quad i, j=1, 2, \dots, N+2 \text{ için} \quad (3.42)$$

elde edilir. Burada uygun koşulları elde etmek için iki elemanın birleşim noktalarında da aşağıda verilen koşullar sağlanmalıdır. Buraya aynı şekilde Diferansiyel Quadrature Metodunu uygulandığında;

$$\beta = \frac{I_1}{I_2} \text{ için } \left[\beta \sum_{j=1}^{N+2} c_{1j}^{(3)} V_{N+j} \right]_{I.El.} - \left[\sum_{j=1}^{N+2} c_{Nj}^{(3)} V_j \right]_{II.El.} = 0 \quad (3.43a)$$

$$\beta = \frac{I_1}{I_2} \text{ için } \left[\beta \sum_{j=1}^{N+2} c_{1j}^{(2)} V_{N+j} \right]_{I.El.} - \left[\sum_{j=1}^{N+2} c_{Nj}^{(2)} V_j \right]_{II.El.} = 0 \quad (3.43b)$$

elde edilir. Denklem (3.7a-b) 'yi kullanarak gerekli sınır koşulları elde edilebilir. Şekil 3.7'de görüldüğü gibi bir sistem için farklı modlarda ve değişik β değerlerinde elde ettiğimiz doğal titreşim değerleri Çizelge 3.7'de verilmiştir. Düz elastik bir çubuğun eğilme titreşiminde elde ettiğimiz doğal frekans değerleri de bazı sayısal metodlarla karşılaştırılması da Çizelge 3.8'de görülmektedir.



Şekil 3.7 Ankastre-serbest mesnet bağlantılı iki elemanlı basamak şekilli çubuk

Çizelge 3.7 Ankastre-serbest mesnetli basamak şekilli Bernoulli-Euler çubuğunun eğilme titreşiminde doğal frekansları

$\beta = \frac{I_1}{I_2}$	1. Mod	2. Mod	3. Mod
1	3.5156	21.935	60.994
2	4.8486	25.906	72.928
5	7.1409	30.617	90.273
	7.1419*	30.674*	92.546*
10	9.097	34.941	100.11

* On eleman için ANSYS çözümü

Çizelge 3.8 Ankastre-serbest mesnetli düz elastik çubuğun eğilme titreşiminde doğal frekans değerlerinin bazı sayısal metotlarla elde edilmiş sonuçları

Metod	Çözüm	Hata(%)
*Kesin Değer	3.5156	-
(Schimdt, 1981)	3.5173	0.048
(Bhat, 1984)	3.5300	0.409
(Bert, 1987)	3.5167	0.0313
GDQ(9)	3.5172	0.0455
GDQ(11)	3.5160	0.011
ANSYS(10)	3.5157	0.003
DQEM(10)	3.5156	0

*(Bert, 1987)

Diğer metotlarla karşılaştırıldığında DQEM'in daha az büyüklükteki bir lineer denklem sistemini kullanarak daha doğru değerler elde ettiği Çizelge 3.8'te görülebilir. İki eleman ile GLC tipi grid sistemi kullanarak ve $2x(N+2)-2$ büyüklüğünde bir matris yapısı için özdeğer çözümleri ile değerler elde edilmiştir.

3.3 Hybrid (Karma) Yapılı Quadrature Eleman Metodu

Sonlu elamanlar yöntemine benzer şekilde, çözümün, temel fonksiyonların lineer kombinasyonları olduğu farz edilirse, ki burada temel fonksiyon olarak Chebyshev polinomu alınacaktır, fonksiyon şu biçimde yazılabilir (Chen, 1994).

$$\phi^e(x) = [B]\{\phi^e\} \quad (3.27)$$

burada e indisi tek bir elemanı göstermektedir. B'yi açarsak,

$$[B] = [h_1 \quad h_2 \quad \dots \quad h_{m-1} \quad h_m] \quad (3.28)$$

$$h_m(x) = \sum_n \mu_{mn} T_n(\bar{x}) \quad (3.29)$$

$$\mu_{mn} = \frac{2}{N} \frac{1}{c_n c_n} T_n(\bar{x}_m) \quad c_n = \begin{cases} 2 & n = 0, N \\ 1 & n \neq 0, N \end{cases} \quad (3.30)$$

ve \bar{x}_n Gauss-Lobatto Chebyshev noktalarında ise yani,

$$\bar{x}_n = -\cos(\theta_n), \quad \theta_n = \frac{n\pi}{N}, \quad n = 0, \dots, N \text{ için,} \quad (3.31)$$

şeklinde bulunabilir. Burada ' $\bar{\cdot}$ ' lokal koordinat sistemini göstermektedir ve Denklem (3.4) de gösterildiği gibi global koordinatlardan dönüşüm yapıldığında aşağıda verilen membran denkleminde ve sınır koşullarında,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q(x, y), \quad a = 2b, \quad 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \quad (3.32a)$$

$$w(0, y) = 0, \quad w(a, y) = 0, \quad w(x, 0) = 0, \quad w(x, b) = 0 \quad (3.32b)$$

hybrid şeması uygulandığında iki boyutlu temel fonksiyon

$$w(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{j=0}^{N_x} \sum_{k=0}^{N_y} h_j(\bar{x}) h_k(\bar{y}) w_{jk} \quad (3.33)$$

için,

$$I^e = -\frac{1}{2} \int_a^b \int_c^d \left\{ \{\phi^e\}^T \left[\frac{dB}{dx} \right]^T \left[\frac{dB}{dx} \right] \{\phi^e\} + \{\phi^e\}^T \left[\frac{dB}{dy} \right]^T \left[\frac{dB}{dy} \right] \{\phi^e\} - q[B]^T \{\phi^e\} \right\} dx dy \quad (3.34)$$

elde edilir. Burada,

$$\{\phi^e\}^T = [\phi_0 \quad \phi_1 \quad \dots \quad \phi_{n-1} \quad \phi_n] \quad (3.35)$$

şeklinindedir. Fonksiyonu minimize etmek için ,

$$\frac{\partial I}{\partial \phi} = \sum_{e=1}^E \frac{\partial I^e}{\partial \phi^e} = 0 \quad (3.36)$$

uygulanıp, her bir eleman için karakteristik matris ve vektör yapısı şeklinde ele aldığımızda,

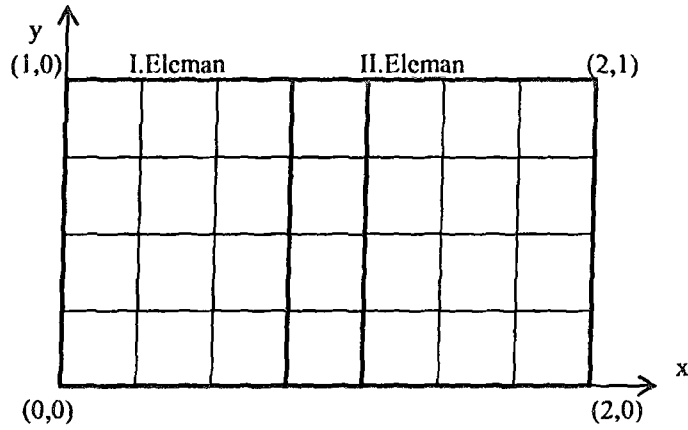
$$[K^e] = \int_a^b \int_c^d \left[\left[\frac{dB}{dx} \right]^T \left[\frac{dB}{dx} \right] + \left[\frac{dB}{dy} \right]^T \left[\frac{dB}{dy} \right] \right] dx dy \quad (3.37a)$$

$$\{P^e\} = q \int_a^b \int_c^d [B]^T dx dy \quad (3.37b)$$

elde ederiz. Bu denklemleri basitçe aşağıdaki gibi gösterebiliriz;

$$\sum_{e=1}^E [K^e] \{\phi_i\} = \sum_{e=1}^E \{P^e\} \quad (3.38)$$

İki elemanlı modelden oluşan bir yapı Şekil 3.8'da ve bununla birlikte normal şema ve hybrid şeması ile çözümleri elde edilen değerler ve analitik sonuçlarla karşılaştırılması Çizelge 3.9'da verilmiştir.



Şekil 3.8 İki elemanlı membran

Çizelge 3.9 Normal ve hybrid şeması ile membran çözümleri ($N=5$) ($\times 10^{-2}$)

Grid Tipi	(x,y)	*K. Değer	Normal Şema		Hybrid Şema	
			Değer	Hata(%)	Değer	Hata(%)
Eşit Aralıklı	(0.5,0.5)	9.712	9.673	0.40	9.715	0.03
	(1.0,0.5)	11.387	11.998	0.99	11.395	0.07
GLC	(0.5,0.5)	9.712	9.784	0.74	9.715	0.03
	(1.0,0.5)	11.387	11.426	0.34	11.395	0.07

*(Chen, 1994)

4. DQM VE DQEM'İN PLAKALARA UYGULANMALARI

İnce, dikdörtgen bir plağın eğilme, burkulma ve titreşimle ilgili temel diferansiyel denklemleri sırasıyla aşağıdaki gibi verilir.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = P(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P(y) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{\rho h \omega^2}{D} w \quad (4.3)$$

$X = \frac{x}{a}$, $Y = \frac{y}{b}$, $W = \frac{w}{a}$, $\lambda = \frac{a}{b}$, $\Omega = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$, $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$ olarak alınıp,

sistemleri boyutsuz hale getirmek için denklemleri normalize edip, DQ uygulandığında,

$i = 1, 2, \dots, N-1, N$ ve $j = 1, 2, \dots, N-1, N$ için

$$\sum_{k=1}^{N_x} C_{i,k}^{(4)} W_{k,j} + 2\lambda^2 \sum_{k=1}^{N_x} C_{i,k}^{(2)} \sum_{l=1}^{N_y} C_{j,l}^{(2)} W_{k,l} + \lambda^4 \sum_{l=1}^{N_y} C_{j,l}^{(4)} W_{i,l} - \frac{qa^4}{D} = 0 \quad (4.4)$$

$$\sum_{k=1}^{N_x} C_{i,k}^{(4)} W_{k,j} + 2\lambda^2 \sum_{k=1}^{N_x} C_{i,k}^{(2)} \sum_{l=1}^{N_y} C_{j,l}^{(2)} W_{k,l} + \lambda^4 \sum_{l=1}^{N_y} C_{j,l}^{(4)} W_{i,l} - \frac{a^2}{D} \left(P_{(x)} \sum_{k=1}^{N_x} C_{i,k}^{(2)} W_{k,j} + \lambda^2 P_{(y)} \sum_{k=1}^{N_x} C_{j,k}^{(2)} W_{i,k} \right) = 0 \quad (4.5)$$

$$\sum_{k=1}^{N_x} C_{i,k}^{(4)} W_{k,j} + 2\lambda^2 \sum_{k=1}^{N_x} C_{i,k}^{(2)} \sum_{l=1}^{N_y} C_{j,l}^{(2)} W_{k,l} + \lambda^4 \sum_{l=1}^{N_y} C_{j,l}^{(4)} W_{i,l} - \Omega^2 W_{k,j} = 0 \quad (4.6)$$

elde edilir (Civalek, 2003).

Burada $w, q, \rho, h, \omega, D, \nu, E, P$ sırası ile plağın deplasmanını, yoğunluğu, yayılı yükü, kalınlığı, doğal frekansı, eğilme rijitliğini, Poisson oranını, elastite modülünü, aksenal basınç yükünü göstermektedir. Bununla birlikte plakaların kenarları için verilmiş olan sınır koşullarına da benzer şekilde DQ uyguladığımızda,

Ankastre Mesnetlerde n 'nci grid için sınır koşulları;

X tipindeki kenarda,

$$W = 0 \text{ ve } \frac{\partial W}{\partial X} = 0 \text{ için } W = 0 \text{ ve } \sum_{k=1}^{N_x} C_{n,k}^{(1)} W_{k,j} = 0 \quad (4.7a)$$

Y tipindeki kenarda,

$$W = 0 \text{ ve } \frac{\partial W}{\partial Y} = 0 \text{ için } W = 0 \text{ ve } \sum_{k=1}^{N_x} C_{n,k}^{(1)} W_{j,k} = 0 \quad (4.7b)$$

Basit Mesnetlerde n 'nci grid için;

X tipindeki kenarda,

$$W = 0 \text{ ve } \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = 0 \text{ için } W = 0 \text{ ve } \sum_{k=1}^{N_x} C_{n,k}^{(2)} W_{k,j} = 0 \quad (4.8a)$$

Y tipindeki kenarda,

$$W = 0 \text{ ve } \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} = 0 \text{ için } W = 0 \text{ ve } \sum_{k=1}^{N_x} C_{n,k}^{(2)} W_{j,k} = 0 \quad (4.8b)$$

Kayıcı Mesnetlerde n 'nci grid için sınır koşulları;

X tipindeki kenarda,

$$\frac{\partial W}{\partial X} = 0 \text{ ve } \frac{\partial^3 W}{\partial X^3} + (2 - \nu)\lambda^2 \frac{\partial^3 W}{\partial X \partial Y^2} = 0 \text{ için} \quad (4.9a)$$

$$\sum_{k=1}^{N_x} C_{n,k}^{(1)} W_{k,j} = 0 \text{ ve } \sum_{k=1}^{N_x} C_{n,k}^{(3)} W_{k,j} + (2 - \nu)\lambda^2 \sum_{k=1}^{N_x} C_{n,k}^{(1)} \sum_{l=1}^{N_y} C_{j,l}^{(2)} W_{k,l} = 0 \quad (4.9b)$$

Y tipindeki kenarda,

$$\frac{\partial W}{\partial Y} = 0 \text{ ve } \lambda^2 \frac{\partial^3 W}{\partial Y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial X^2 \partial Y} = 0 \text{ için,} \quad (4.9c)$$

$$\sum_{k=1}^{N_x} C_{n,k}^{(1)} W_{j,k} = 0 \text{ ve } \lambda^2 \sum_{k=1}^{N_x} C_{n,k}^{(3)} W_{j,k} + (2 - \nu) \sum_{k=1}^{N_x} C_{n,k}^{(2)} \sum_{l=1}^{N_y} C_{j,l}^{(1)} W_{k,l} = 0 \quad (4.9d)$$

Serbest Mesnetlerde n'nci grid için sınır koşulları;

X tipindeki kenarda,

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \nu \lambda^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} = 0 \text{ ve } \frac{\partial^3 W}{\partial X^3} + (2 - \nu) \lambda^2 \frac{\partial^3 W}{\partial X \partial Y^2} = 0 \text{ için} \quad (4.10a)$$

$$\sum_{k=1}^{N_x} C_{n,k}^{(2)} W_{k,j} + \nu \lambda^2 \sum_{l=1}^{N_y} C_{j,l}^{(2)} W_{k,l} = 0 \text{ ve} \quad (4.10b)$$

$$\sum_{k=1}^{N_x} C_{n,k}^{(3)} W_{k,j} + (2 - \nu) \lambda^2 \sum_{k=1}^{N_x} C_{n,k}^{(1)} \sum_{l=1}^{N_y} C_{j,l}^{(2)} W_{k,l} = 0$$

Y tipindeki kenarda,

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} = 0 \text{ ve } \lambda^2 \frac{\partial^3 W}{\partial Y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial X^2 \partial Y} = 0 \text{ için,} \quad (4.10c)$$

$$\lambda^2 \sum_{k=1}^{N_x} C_{n,k}^{(2)} W_{j,k} + \nu \sum_{k=1}^{N_x} C_{n,k}^{(2)} W_{j,k} = 0 \text{ ve} \quad (4.10d)$$

$$\lambda^2 \sum_{k=1}^{N_x} C_{n,k}^{(3)} W_{j,k} + (2 - \nu) \sum_{k=1}^{N_x} C_{n,k}^{(2)} \sum_{l=1}^{N_y} C_{j,l}^{(1)} W_{k,l} = 0$$

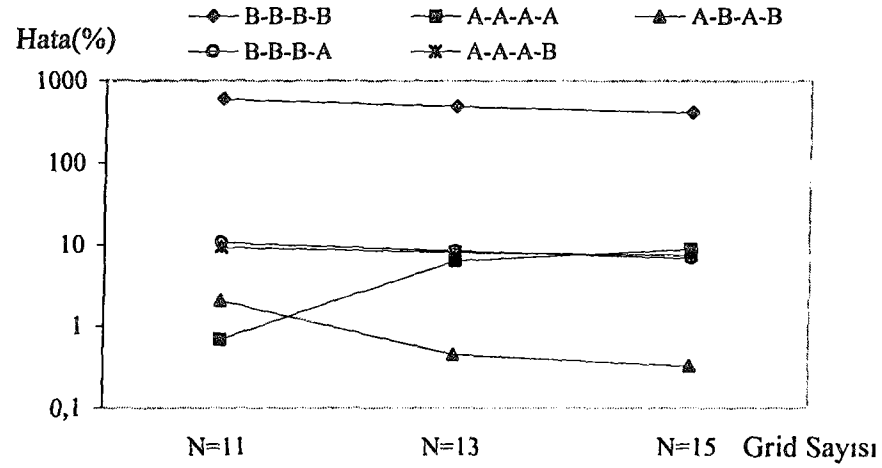
elde edilir. Bunlara ek olarak eğer iki komşu kenar serbest mesnet ise aşağıda verilen koşulu da kullanmak gerekir.

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} = 0 \text{ için } \sum_{k=1}^{N_x} C_{n,k}^{(1)} \sum_{l=1}^{N_y} C_{j,l}^{(1)} W_{k,l} = 0 \quad (4.11)$$

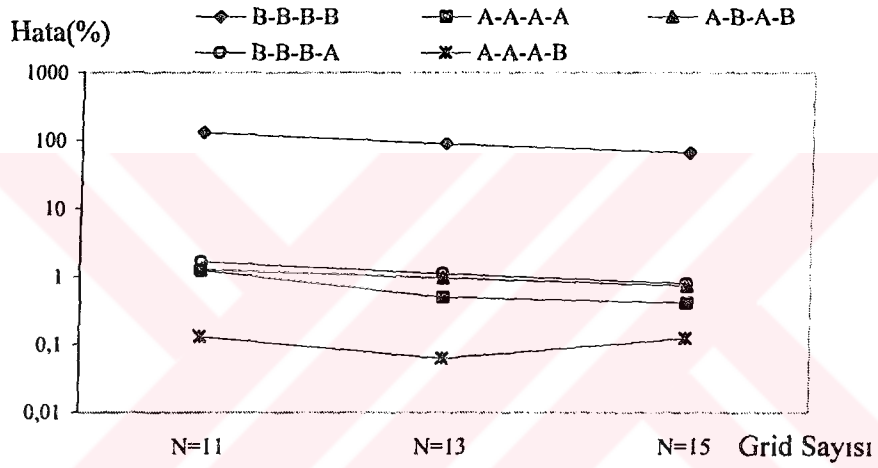
Çizelge 4.1 Kare plakada GDQM ile elde edilen frekans parametreleri $\varpi = \omega L^2 \sqrt{\rho h / D}$

Sınır Koşulları	Grid Yapısı	N=11	Hata(%)	N=13	Hata(%)	N=15	Hata(%)
B-B-B-B (19.7392)*	Eşit Grid	20.954	6.0×10^{-2}	20.726	4.9×10^{-2}	20.569	4.1×10^{-2}
	GLC	20.003	1.3×10^{-2}	19.921	9.0×10^{-1}	19.872	6.5×10^{-1}
	δ Grid	19.739	5.0×10^{-2}	19.739	2.5×10^{-2}	19.739	1.8×10^{-2}
A-A-A-A (35.992)*	Eşit Grid	35.745	6.9×10^{-1}	33.684	6.41	32.813	8.83
	GLC	35.541	1.25	35.812	5.0×10^{-1}	35.844	4.1×10^{-1}
	δ Grid	35.993	2.6×10^{-3}	35.986	1.7×10^{-2}	35.985	2.0×10^{-2}
A-B-A-B (28.9509)*	Eşit Grid	28.359	2.05	28.820	4.5×10^{-1}	29.045	3.3×10^{-1}
	GLC	29.323	1.29	29.229	9.6×10^{-1}	29.166	7.4×10^{-2}
	δ Grid	28.952	5.2×10^{-3}	28.951	2.4×10^{-4}	28.951	7.7×10^{-4}
B-B-B-A (23.6463)*	Eşit Grid	26.290	1.1×10^{-1}	25.722	8.42	25.340	6.87
	GLC	24.052	1.65	23.919	1.11	23.842	7.9×10^{-1}
	δ Grid	23.645	3.5×10^{-3}	23.646	4.2×10^{-4}	23.646	2.8×10^{-4}
A-A-A-B (31.829)*	Eşit Grid	28.865	9.31	29.250	8.10	29.459	7.45
	GLC	31.788	1.3×10^{-1}	31.849	6.1×10^{-2}	31.868	1.2×10^{-1}
	δ Grid	31.827	5.1×10^{-3}	31.826	1.1×10^{-2}	31.826	1.0×10^{-2}

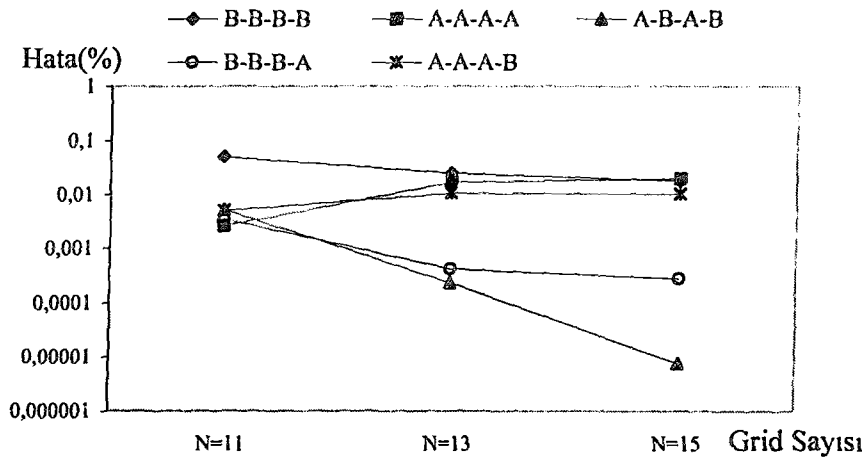
*(Leissa, 1973)



(a)



(b)



(c)

Şekil 4.1 DQM ile elde edilen kare plaka çözümlerinin Leissa değerleri ile karşılaştırması (a) Eşit aralıklı grid yapısı, (b) δ tipi grid yapısı, (c) GLC tipi grid yapısı
(B=Basit mesnet, A=Ankastre mesnet, S=Serbest mesnet)

Diferansiyel Quadrature Metodunu plakaların titreşimine uyguladığımızda elde edilen sonuçlar Çizelge 4.1’de verilmiş, elde edilen sonuçlarda Şekil 4.1’de değişik grid yapılarında Leissa değerleri ile beraber karşılaştırılarak değerlendirilmiştir (Leissa, 1973). Özellikle dikkat edilmesi gereken yerlerden biri artan grid sayılarına rağmen yakınsamanın, tüm sınır koşulları için aynı olmadığıdır. Bütün grid yapılarını kontrol ettiğimizde, A-B-A-B mesnetli plakanın gridin artmasıyla yakınsak davranış göstermesi dikkat çekicidir. Fakat bunun yanında GLC tipindeki grid yapısındaki ankastre plaka çözümleri tersine durum göstermektedir. Yine bu sınır koşullarının her tip grid yapısı için beklenen bir doğrulukta olmadığı da gözlemlenebilir. Burada özellikle eşit gridlerin büyük hatalar verdiği açıkça görülebilir. Eşit grid yapısının her tarafı basit mesnetli plakalarda oluşan hatanın çok büyüdüğü, kabul edilemez büyüklüğe ulaştığı görülmektedir. Buna karşın δ tipindeki grid yapısının Diferansiyel Quadrature Metodunun uygulamalarında daha başarılı olduğu gözlemlenebilir. Grid sayısının artmasıyla diğer yapılara göre daha keskin bir yaklaşım oluşturduğu ve diğerlerine oranla ankastre mesnet plakalarda daha doğru yaklaşım ortaya koyduğu görülür. Güvenle yaklaştığımız GLC yapısının beklenen doğruluğu vermediği de burada söylenebilir. Değişik sınır koşullarına sahip plakalarda grid yapısının etkisi çok değişken sonuçlarla karşımıza çıkmaktadır.

GLC tipindeki grid yapısı bu metodu için vazgeçilmez bir unsurdur. Bu yapı için gerçekten büyük yakınsamalar elde edilmektedir. Fakat δ tipi komşu grid yapısı ile yapılan uygulamalarda daha önce de değindiğimiz kararsızlıklar ortaya çıkmaktadır. Belli grid sayılarına kadar yakınsamalar görülmekte, fakat bazı mesnet durumlarında daha sonra artan grid sayısına rağmen yakınsamanın azaldığı tespit edilmektedir. Bu kararsızlıklar büyük ölçüde δ değerinin seçimi ile ilgilidir. Bu değer nasıl seçileceği hangi grid sayısında ve nasıl bir mesnet yapısına bağlı olduğu belirlenememiştir. Bu yüzden GLC ile çözüm vazgeçilmez bir seçenek olarak karşımıza çıkmaktadır.

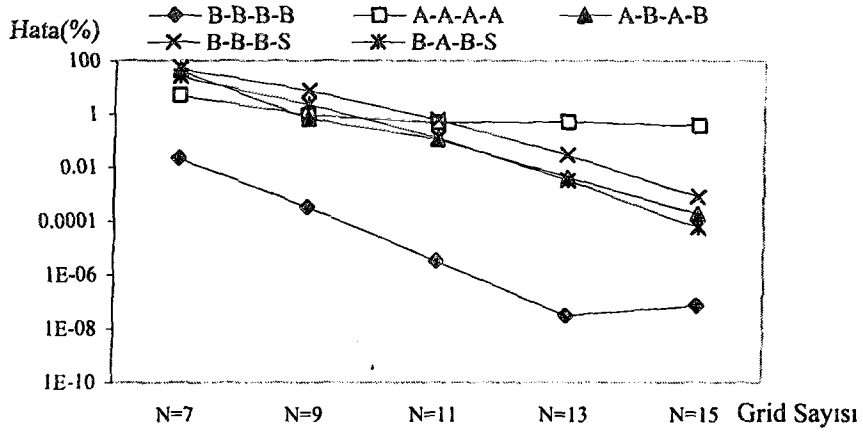
İzotropik kare plakalar için farklı sınır koşullarında ve grid sayılarında Malik–Bert yöntemiyle elde edilen değerler Çizelge 4.2’de verilmiştir. Buna bağlı olarak

Şekil 4.2’de ise bu yöntemle elde edilen değerlerin grid yapısına bağlı davranışları gösterilmiştir.

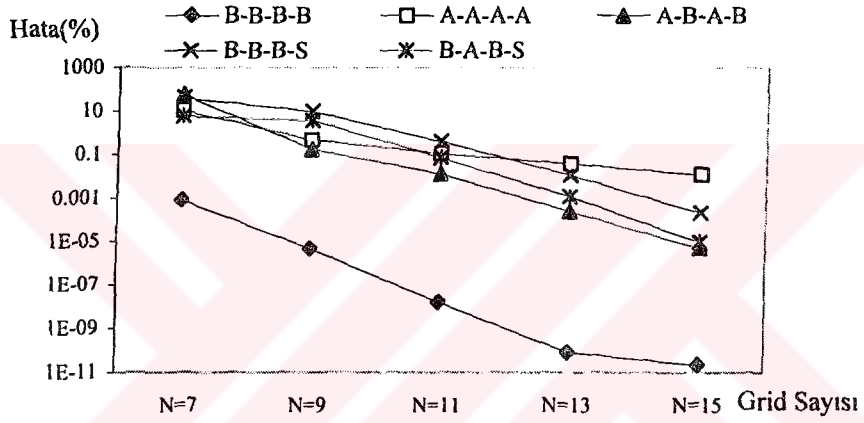
Çizelge 4.2 Farklı sınır koşullarında ve grid sayılarında Malik–Bert yöntemiyle elde edilen frekans parametreleri ($\varpi = \omega L^2 \sqrt{\rho h / D}$)

Sınır Koşulları	Grid Yapısı	N=7	N=9	N=11	N=13	N=15
B-B-B-B (19.7392)	Eşit Grid	19.735	19.739	19.739	19.739	19.739
	Hata(%)	2.15×10^{-2}	3.15×10^{-4}	3.18×10^{-6}	3.03×10^{-8}	6.99×10^{-8}
	GLC	19.739	19.739	19.739	19.739	19.739
	Hata(%)	8.01×10^{-4}	4.58×10^{-6}	1.56×10^{-8}	8.26×10^{-8}	2.08×10^{-11}
	δ Grid	19.751	19.739	19.740	19.737	19.873
	Hata(%)	5.73×10^{-2}	3.03×10^{-4}	2.45×10^{-3}	1.03×10^{-2}	6.77×10^{-1}
A-A-A-A (35.9920)	Eşit Grid	37.757	36.305	35.816	35.805	35.854
	Hata(%)	4.92	8.89×10^{-1}	4.70×10^{-1}	5.02×10^{-1}	3.64×10^{-1}
	GLC	39.680	36.143	36.023	35.998	35.989
	Hata(%)	10.3	4.38×10^{-1}	1.06×10^{-1}	3.60×10^{-2}	1.13×10^{-2}
	δ Grid	42.659	38.294	36.074	35.821	35.957
	Hata(%)	18.5	6.42	2.45×10^{-1}	4.56×10^{-1}	7.95×10^{-2}
A-B-A-B (28.9505)	Eşit Grid	16.710	29.142	28.984	28.952	28.951
	Hata(%)	42.3	6.60×10^{-1}	1.14×10^{-1}	4.15×10^{-3}	1.77×10^{-4}
	GLC	13.412	28.998	28.955	28.951	28.951
	Hata(%)	53.7	1.64×10^{-1}	1.26×10^{-2}	2.40×10^{-4}	4.86×10^{-6}
	δ Grid	28.548	28.941	28.950	28.951	28.950
	Hata(%)	1.39	3.36×10^{-2}	2.33×10^{-3}	1.66×10^{-4}	1.64×10^{-3}
B-B-B-S (11.6845)	Eşit Grid	5.844	10.825	11.614	11.681	11.684
	Hata(%)	50.0	7.36	5.99×10^{-1}	2.91×10^{-2}	7.50×10^{-4}
	GLC	7.115	10.624	11.641	11.683	11.685
	Hata(%)	39.1	9.08	3.71×10^{-1}	1.09×10^{-2}	2.01×10^{-4}
	δ Grid	5.055	7.749	11.481	11.653	11.717
	Hata(%)	56.7	33.7	1.74	2.69×10^{-1}	2.79×10^{-1}
B-A-B-S (12.6874)	Eşit Grid	9.514	12.406	12.672	12.687	12.687
	Hata(%)	25	2.22	1.24×10^{-1}	3.20×10^{-3}	5.48×10^{-5}
	GLC	11.970	12.242	12.679	12.687	12.687
	Hata(%)	5.66	3.51	6.98×10^{-2}	1.16×10^{-3}	9.16×10^{-6}
	δ Grid	13.056	13.118	11.501	12.768	12.342
	Hata(%)	2.90	3.40	9.35	6.37×10^{-1}	2.73

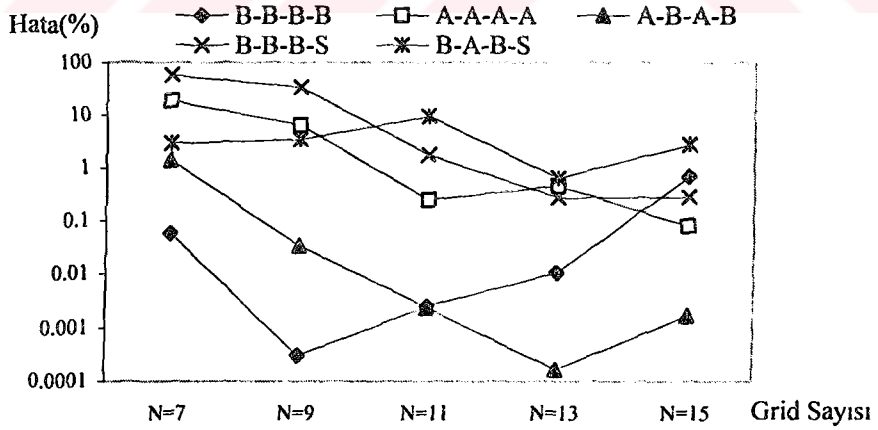
*(Leissa, 1973)



(a)



(b)



(c)

Şekil 4.2 Malik-Bert yöntemiyle elde edilen değerlerin farklı sınır koşullarında grid yapısına bağlı davranışı a- Eşit grid yapısı b- GLC grid yapısı c- δ Tipi grid yapısı

Komşu grid yapısı ile çözümlenelerde δ değeri 10^{-5} olarak alınmıştır. Özellikle burada ortaya çıkan temel özelliklerden biri de bu yöntem yaklaşımında δ tipi grid yapısının kararsız bir durum göstermesidir. Hem grid sayısı arttıkça yakınsamanın istenilen düzeyde artmadığı, hem de bazı sınır koşullarında artan grid sayılarına rağmen yakınsamanın küçüldüğü açıkça görülmektedir.

İstenilen düzeyde olmasa da eşit grid yapısı da özellikle basit mesnet yapısında oldukça kararlı bir davranış göstermektedir. Fakat ankastre mesnetli plakalar içinde bu grid yapısı problem oluşturmaktadır. Her ne olursa olsun GLC tipi yapı bu yöntemin vazgeçilmezidir. Lineere yakın bir biçimde artan grid yapısına göre yakınsamada da artış sağlanmaktadır. Çizelge 4.3’de seçilen 20 değişik sınır koşulu için izotropik kare plakalar için $N=15$ grid sayısı ile bu yöntemle elde edilen birinci modları verilmiştir.

Çizelge 4.3 Değişik sınır koşulları altında GLC yapısında Malik-Bert yöntemi ile $N=15$ için elde edilen frekans parametreleri ($\omega = \omega L^2 \sqrt{\rho h / D}$)

Sınır Durumu	ω_1		Sınır Durumu	ω_1	
	DQM	*Ref.		DQM	*Ref.
B-B-B-B	19.7392	19.7392	A-A-A-A	35.9893	35.992
B-A-B-B	23.6463	23.6463	A-B-A-S	23.4490	23.460
B-B-B-S	11.6845	11.6845	A-S-B-S	15.3430	15.285
B-A-B-A	28.9509	28.9509	A-A-A-B	31.8212	31.829
B-A-B-S	12.6874	12.6874	A-A-B-B	27.0541	27.056
B-S-B-S	9.6314	9.6314	A-A-B-S	17.4590	17.615

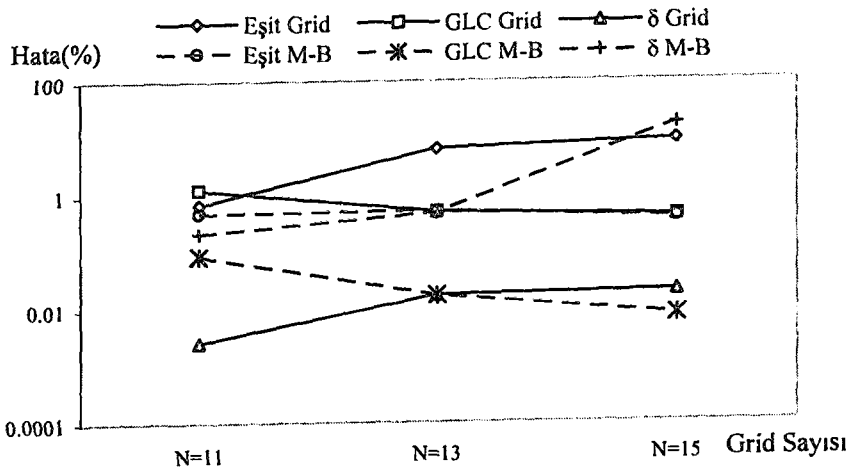
*(Leissa, 1973)

Çizelge 4.4 Kare plakada değişik sınır koşullarında normal DQM çözümü ile Malik-Bert çözüm yönteminin karşılaştırılması ($\omega = \omega L^2 \sqrt{\rho h / D}$)

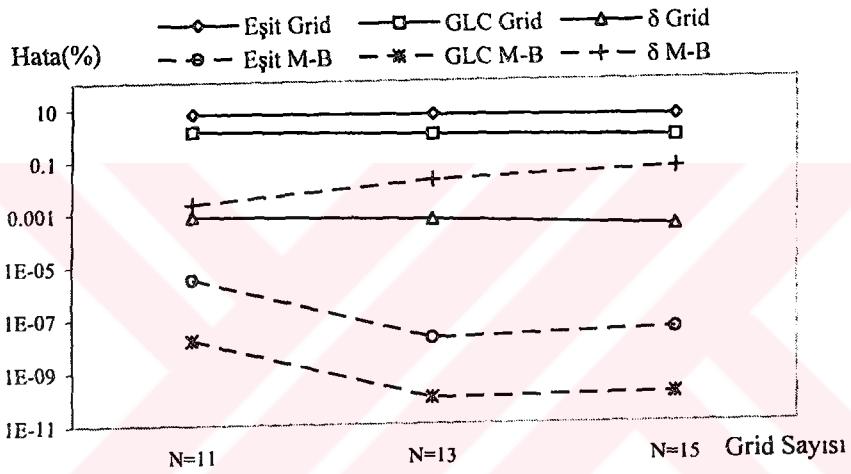
	Grid Yapısı	Normal DQM			Malik-Bert		
		N=11	N=13	N=15	N=11	N=13	N=15
A-A	Eşit	35.7452	33.6839	32.8127	35.8161	35.8045	35.8541
A-A	GLC	35.5412	35.8121	35.8440	36.0232	35.9982	35.9893
(35.9920)*	δ Grid	35.9929	35.9857	35.9848	36.0695	35.8183	42.0591
B-B	Eşit	20.9541	20.7259	20.5692	19.7392	19.7392	19.7392
B-B	GLC	20.0028	19.9207	19.8719	19.7392	19.7392	19.7392
(19.7392)*	δ Grid	19.7394	19.7393	19.7393	19.7388	19.7424	19.7307
A-B	Eşit	28.3587	28.8197	29.0453	28.9838	28.9521	28.9509
A-B	GLC	29.3232	29.2290	29.1656	28.9545	28.9509	28.9509
(28.9505)*	δ Grid	28.9525	28.9511	28.9510	28.9503	28.9495	28.9610

*(Leissa, 1973)

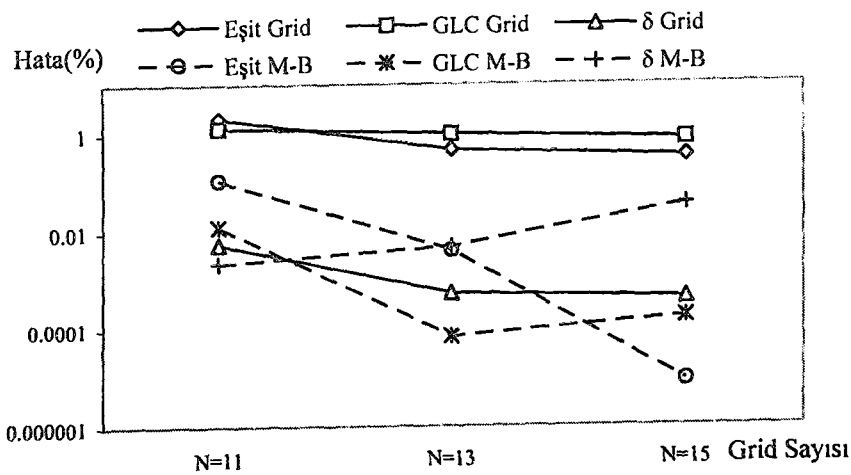
DQM ile çözümlerde karşımıza çıkabilecek soru işaretlerinden biri de çözümün hangisi ile yapılacağı olabilir. Çizelge 4.4'te değişik sınır koşullarında ve değişik grid sayılarında normal DQM çözümü ile Malik-Bert yöntemi ile çözüm karşılaştırılması verilmiştir. Burada elde edilen değerlerin Leissa çözümleriyle karşılaştırıldığında oluşan hatalar da Şekil 4.3'de gösterilmiştir. Sırasıyla grafiklerde ankastre mesnet, basit mesnet, karşılıklı her iki kenarı ankastre-basit mesnetli plakalar için bu karşılaştırma yapılmıştır. Her iki yöntem içinde GLC tipi grid yapısının ilk seçenek olduğu görülebilir. Bunun yanında normal DQM de çözümde komşu grid çözümü istemektedir.



(a) A-A-A-A



(b) B-B-B-B



(c) A-B-A-B

Şekil 4.3 Kare plakada değişik sınır koşullarında normal DQM çözümü ile Malik-Bert çözüm yönteminin karşılaştırılması

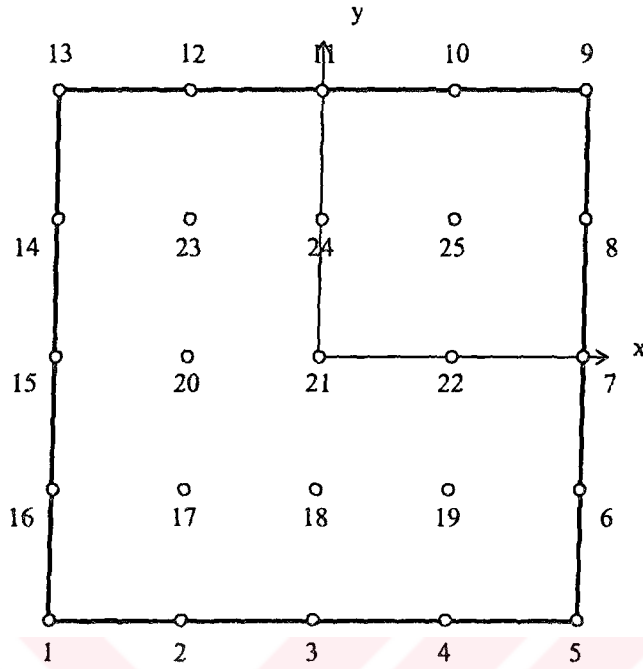
Çizelge 4.5 GDQM ile GLC tipi grid yapısı kullanarak N=15 için farklı en-boy oranlarında kare plakaların frekans parametreleri ($\omega = \omega L^2 \sqrt{\rho h / D}$)

Sınır Koşulu	λ				
	2/5	2/3	1	3/2	5/2
B-B	11.4487	14.2561	19.7392	32.0762	71.5546
B-B	^a 11.4487	^a 14.2561	^a 19.7392	^a 32.0762	^a 71.5546
B-A	11.7502	15.5783	23.6463	45.5278	103.9227
B-B	^b 11.7502	^b 15.5783	^b 23.6463	^b 45.5278	^b 103.9227
B-A	12.1347	17.3730	28.9509	56.3481	145.4839
B-A	^b 12.1347	^b 17.3730	^b 28.9509	^b 56.3481	^b 145.4839
B-S	9.7601	9.6983	9.6314	9.5582	9.4841
B-S	^b 9.7600	^b 9.6983	^b 9.6314	^b 9.5582	^b 9.4841
A-A	23.6416	27.0080	35.9892	60.7680	147.7602
A-A	^b 23.648	^b 27.010	^b 35.992	^b 60.772	^b 147.80
A-S	22.5231	22.7810	23.4389	24.6292	28.4385
B-S	^b 22.544	^b 22.855	^b 23.460	^b 24.755	^b 28.564
A-A	16.8475	19.9512	27.0541	44.8903	105.2970
B-B	^b 16.849	^b 19.952	^b 27.056	^b 44.893	^b 105.31
B-B	1.3206	2.2305	3.3562	5.0186	8.2544
F-F	^b 1.3201	^b 2.2339	^b 3.3687	^b 5.0263	^b 8.2506
B-K	9.8696	9.8696	9.8696	9.8696	9.8696
B-K	9.8696	9.8696	9.8696	9.8696	9.8696
A-K	22.3733	22.3733	22.3733	22.3733	22.3733
A-K	22.3733	22.3733	22.3733	22.3733	22.3733
A-K	15.4182	15.4182	15.4182	15.4182	15.4182
B-K	15.4182	15.4182	15.4182	15.4182	15.4182
B-B	10.2644	10.9662	12.3370	15.4213	25.2909
B-K	10.2644	10.9662	12.3370	15.4213	25.2909
B-B	2.7592	3.2453	4.0337	5.4048	8.4057
K-F	2.7592	3.2453	4.0337	5.4048	8.4057

Not: (^a) Basit mesnetli karesel plakalar için teorik formül $\pi^2(1+\lambda^2)$ ile bulunan kesin değerlerdir., (^b) (Leissa, 1973)

Bütün sınır koşulları için ve grid yapıları ne olursa olsun Malik-Bert metodunun Normal DQM'den çok daha iyi yaklaşımlar sağladığı rahatlıkla söylenebilir. Çizelge 4.5'de Malik-Bert çözüm yöntemiyle DQM ile GLC tipi gridler kullanarak 15 grid sayısı için değişik sınır koşulları kombinasyonları için farklı en ve boy oranlarında çözümler verilmiştir. İlk sekiz çözüm değeri için Leissa'nın analitik çözümleri, basit mesnet plaka için analitik çözümler de DQM çözümleri ile beraber sunulmuştur (Leissa, 1973).

4.1 Plaka Diferansiyel Quadrature Elemanının Formülasyonu



Şekil 4.4 25 Grid noktasına ve 49 serbestlik derecesine sahip bir plaka elemanın yapısı

Plaka elemanının formülasyonu Kirchhoff varsayımlarına dayanır. Daha önce Denklem 4.1’de ince bir plakanın küçük şekil değişimleri için denklemi verilmişti. Aşağıda verilen Şekil 4.4 ‘te 25 grid noktasına sahip bir dikdörtgen elemanın 49 serbestlik derecesi içerdiği kolaylıkla bulunabilir. Çizelge 4.6’da gösterildiği gibi, 49 serbestlik derecesine sahip Diferansiyel Quadrature plaka elemanı için verilen deplasman aşağıdaki biçimde tanımlanabilmektedir (Chen, 2000).

$$\begin{aligned}
 w(\bar{x}, \bar{y}) = & \sum_{i=1,5,9,13} \left[N_{i1} w_i + N_{i2} \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{x}} \right)_i + N_{i3} \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{y}} \right)_i + N_{i4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \right)_i \right] + \\
 & \sum_{i=2,3,4,10,11,12} \left[N_{i1} w_i + N_{i2} \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{y}} \right)_i \right] + \sum_{i=6,7,8,14,15,16} \left[N_{i1} w_i + N_{i2} \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{x}} \right)_i \right] + \\
 & \sum_{i=17,18,19,20,21,22,23,24,25} [N_{i1} w_i] = [N] \{w\}
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Burada N_{ij} belirli grid noktalarından elde edilebilen şekil fonksiyonudur.

Bununla birlikte $w_i, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i, \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i, \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_i$ ise i grid noktasındaki lokal serbestlik derecelerini göstermektedir.

Çizelge 4.6 25 Grid noktasına sahip DQ plaka elemanı için serbestlik dereceleri

Grid Noktası	Serbestlik Derecesi
1-5 9-13	$w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$
2-3-4 10-11-12	$w, \frac{\partial w}{\partial y}$
6-7-8 14-15-16	$w, \frac{\partial w}{\partial x}$
17-18-19-20 21-22-23-24-25	w

Kirchhoff plaka teorisinde eğilme gerilimi şu biçimde verilir (Chen, 1997).

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

Eğer Denklem 4.13 ve Denklem 4.12'yi birleştirirsek, bir gerilme-yer değiştirme bağıntısı elde ederiz.

$$\{\varepsilon\} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad \{[N]\{w\} = -z[Q]\{w\} \quad (4.14)$$

Sabit bir h kalınlığında, katılık matrisi şu biçimde hesaplanabilir,

$$[K] = \int_A [Q]^T [D][Q] dA \quad (4.15)$$

Burada A yüzeyin alanını ve D rijitlik matrisini göstermektedir. Rijitlik matrisi D ise aşağıdaki gibi verilebilir.

$$[D] = \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Katılık matrisinin hesaplanması uygun sınır koşullarının beraber verilmesi gerekliliği yüzünden zor ve analitik olarak elde edilmesi güçtür. Bu nedenle katılık matrisinin hesaplamasında nümerik integrasyon kullanma zorunluluğu duyulabilir. Kuvvet vektörü ve benzer biçimde kütle matrisi ise aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\{F\} = \int_A F_{(x,y)} [N]^T dA \quad (4.17)$$

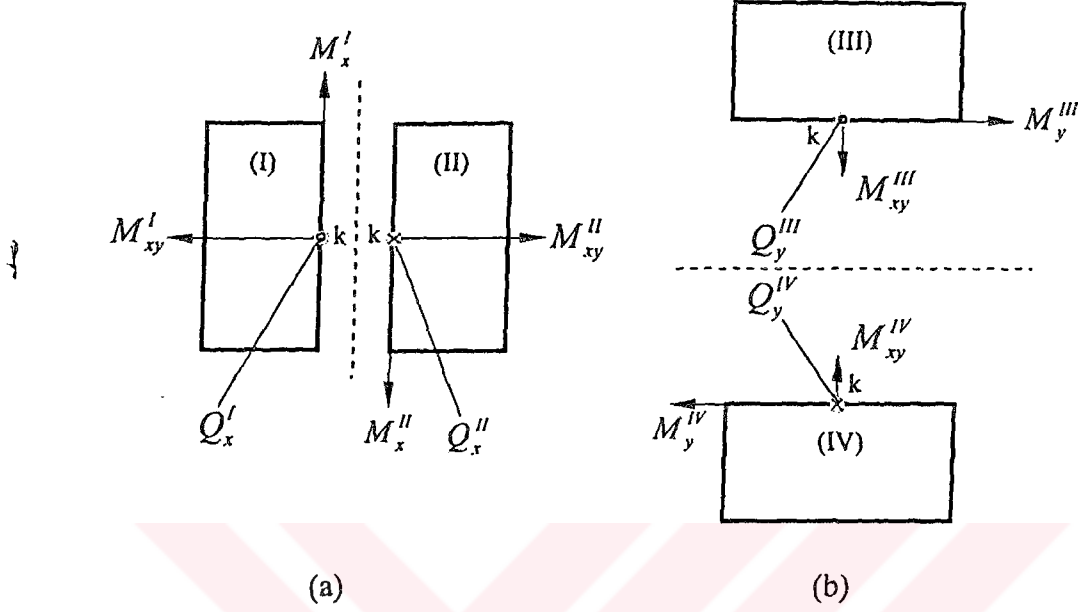
$$[M] = \int_A [N]^T [\rho h] [N] dA \quad (4.18)$$

Sonuçta matris formunda basit bir ifade ile plakalar için temel eğilme ve titreşim denklemleri şu biçimde yazılabilir, burada s bütün ayrıklaştırılmış sistemi ifade etmektedir.

$$[K_s]\{w\} = \{F_s\} \quad (4.19)$$

$$([K_s] - \omega^2 [M_s])\{w\} = \{0\} \quad (4.20)$$

4.2 Plaka Elemanlarının Birleştirilmesi



Şekil. 4.5 Dört plaka elemanın birleştirilmesi

Çözüm alanını genişletmek veya süreksizlikler oluşturabilmek için seçilen herhangi bir plaka elemanını x ve/veya y yönünde çoğaltılması gerekir. Bu çoğaltılmış global eleman kümesinin çözümü için plaka elemanlarının birleştirilmesinde daha önce Denklem (3.21)'de verildiğine benzer bir uygulama gereklidir. Eğer Şekil 4.5-a da görüldüğü gibi k noktasında iki eleman birleştirilerek çözüm yapılacaksa,

$$(Q_y)_{i,Ny}^I - (Q_y)_{i,1}^{II} = 0 \quad (4.21a)$$

$$(M_y)_{i,Ny}^I - (M_y)_{i,1}^{II} = 0 \quad (4.21b)$$

$$(M_{xy})_{i,Ny}^I - (M_{xy})_{i,1}^{II} = 0 \quad (4.21c)$$

birleştirilen eleman sayısı 4 olduğunda ise Şekil 4.5 a ve b de görüldüğü gibi,

$$(Q_x)_{Nx,Ny}^I + (Q_x)_{Nx,1}^{II} - (Q_x)_{1,Ny}^{III} - (Q_x)_{1,1}^{IV} = 0 \quad (4.22a)$$

$$(M_x)_{Nx,Ny}' + (M_x)_{Nx,1}'' - (M_x)_{1,Ny}''' - (M_x)_{1,1}'''' = 0 \quad (4.22b)$$

$$(M_{xy})_{Nx,Ny}' + (M_{xy})_{Nx,1}'' - (M_{xy})_{1,Ny}''' - (M_{xy})_{1,1}'''' = 0 \quad (4.22c)$$

uygulanarak bu noktadaki çözümler birleştirilir (Liu, 1999).

4.3 DQEM ile Plaka Problemlerinin Çözümleri

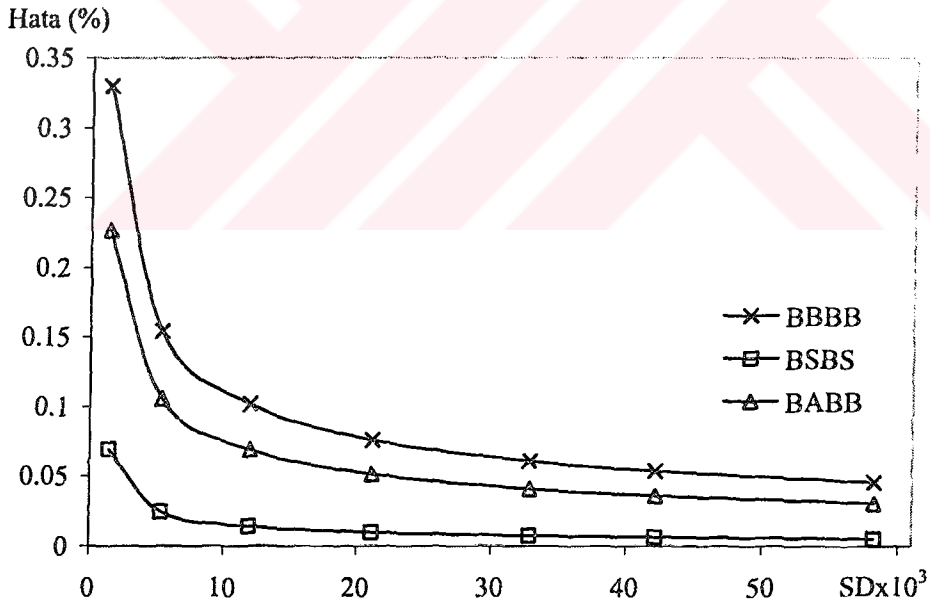
Diferansiyel Quadrature Element metodu sadece bir boyutlu problemlerde değil, iki boyutlu problemler içinde yüksek doğruluk veren kullanışlı bir yöntemdir. Özellikle dikdörtgen bazlı şekillerin kolaylıkla oluşturulabilmesi, sınır koşullarının, mesnetleme yapılarının kolaylıkla sağlanabilmesi özellikle plaka problemlerinin çözümlerinde onu öncelikli bir nümerik analiz yöntemi yapmaktadır. Bu çalışmada sadece daha önce üzerinde durulmuş bazı plaka titreşim problemleri çözümleri yer almamış, bunun yanında farklı mesnetleme tipleri ve şekillerin üzerinde de çözümler yapılmıştır. Elde edilen çözümlerin, analitik veya diğer nümerik metodlarla bulunan değerlerle karşılaştırmaları yerinde olacaktır. Özellikle referanslarda yer almayan çalışmalarda, sonlu eleman analizi için yoğunlukla kullanılan Ansys programı ile aynı plaklar için çözümler, DQEM çözümleri ile beraber yapıldı. Bu program ile yapılan çalışmalarda “Shell Type Element, 8 node 93” eleman tipi kullanılarak gerekli plaka şekilleri elde edildi.

Doğaldır ki eleman sayıları arttıkça doğru çözüme daha çok yakınlıkta değerler elde edilebilmektedir. Fakat bunun için çözüm süreleri orantısal olarak uzamakta, gerekli bilgisayar kapasite ihtiyacı artmaktadır. Kabul edilebilir bir doğrulukta değerler için gerekli eleman sayısının tespiti, değişik eleman sayılarına bölünerek yapıldı ve elde edilebilecek en efektif eleman sayısı bulundu. Analitik çözümleri ile nümerik çözümlerin çok yakın olduğu için seçilen üç mesnetleme tipinde, Ansys çözümleri test edilmiş, kullanılan serbestlik derecesine göre, Şekil 4.6’da elde edilen hata yüzdeleri

gösterilmiştir. Serbestlik derecesi aynı zamanda mesnetleme tipine göre farklı olan, lineer denklem sisteminin çözüm büyüklüğünü de göstermektedir. Burada hata hesapları için Leissa'nın analitik çözümleri, kesin değer olarak kullanıldı (Leissa, 1973).

$$\text{Hata}(\%) = \frac{\text{Değer}_{\text{Leissa}} - \text{Değer}_{\text{Ansys}}}{\text{Değer}_{\text{Leissa}}} \times 100 \quad (4.23)$$

Farklı mesnetlenme tipleri için, farklı büyüklükte hata yüzdelerinin elde edilmesi kaçınılmazdır. Ancak hata yüzdesi eğrisi nispeten lineere yaklaştığı değer için 4624 Ansys elemanı yeterli eleman sayısı olarak seçildi. Bu eleman sayısı için Ansys yaklaşık 42000 serbestlik derecesi ile çözüm yapmaktadır. Farklı şekillerdeki çalışmalar için, serbestlik derecesi esas alınarak, plakalar, serbestlik derecesine yakın eleman sayılarına bölündü.



Şekil 4.6 Ansys çözümlerinde hata(%)

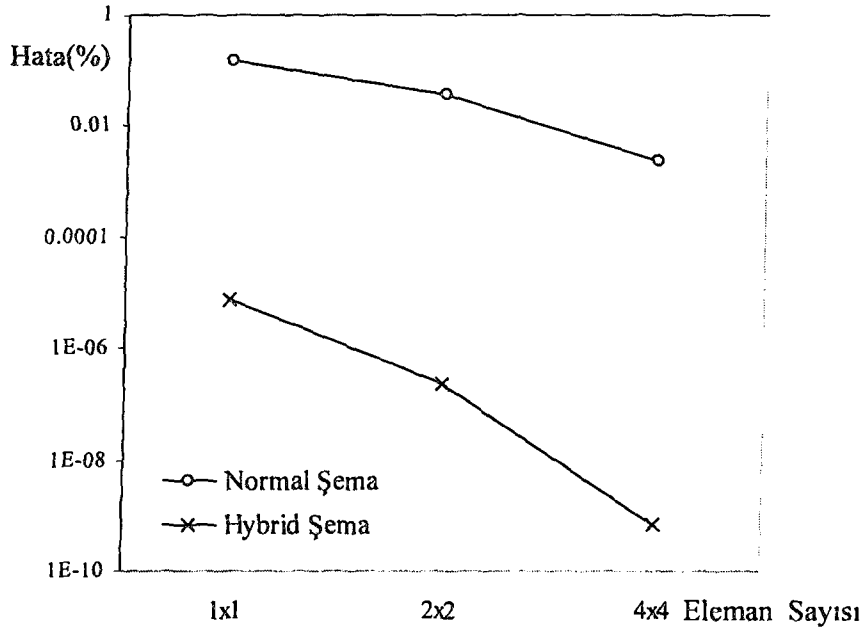
4.3.1. İsootropik plakaların titreşimi

Diferansiyel Quadrature metodunun plaka uygulamalarında karşılaşılan problemlerden biride süreksizliklerdir. Bu tip plakalarda DQM global bir çözüm metodu olduğundan, çözümle ilgili karşılaşılan problemlerin aşılması için Striz'in önerdiği Quadrature Element Metodu uygulamalardaki zorlukların üstesinden gelmiştir. Bir veya birden fazla plaka elemanının bir araya getirilmesi ile istenilen şekiller oluşturulup çözüme gidilir. Çözüm için iki seçenek söz konusudur. Bunlardan biri Denklem (4.3)'te görülen yapının lineer denklem sistemini normal bir biçimde oluşturma diğeri ise daha önce anlatıldığı gibi hybrid yapı kullanarak çözüme gitme. Bu seçeneklerden hangisinin daha efektif olduğunu test etmek için çözümlerinin karşılaştırılması gerecektir. Çizelge 4.7'de analitik çözümü basit olduğu için kullanılan basit mesnetli kare bir plakanın her iki çözüm için elde edilen üç değişik eleman sayısı için değerler verilmiştir. İlk mod için çözümde oluşan hatalar da Şekil 4.7'da karşılaştırılmıştır.

Çizelge 4.7 Basit mesnetli plakanın normal ve hybrid Quadrature şeması ile plakaların frekans parametreleri ($\varpi = \omega L^2 \sqrt{\rho h / D}$)

Eleman sayısı	Çözüm Şeması	ϖ_1 *($2\pi^2$)	ϖ_2 *($5\pi^2$)	ϖ_3 *($8\pi^2$)	ϖ_5 *($13\pi^2$)	ϖ_7 *($17\pi^2$)
1x1	Normal	19.71045	55.24895	89.42793	130.21457	173.72818
	Hata(%)	1.457×10^{-1}	11.960	13.260	1.488	3.543
	Hybrid	19.73921	49.49083	79.16678	129.61175	179.72919
	Hata(%)	7.182×10^{-5}	2.894×10^{-1}	2.659×10^{-1}	1.019	7.12
2x2	QEM	19.73220	49.26431	78.84182	127.03632	176.07704
	Hata(%)	3.550×10^{-2}	1.696×10^{-1}	1.457×10^{-1}	9.887×10^{-1}	4.943
	Hybrid	19.73921	49.34803	78.95684	128.31665	168.4234
	Hata(%)	2.217×10^{-7}	8.846×10^{-6}	7.181×10^{-6}	9.192×10^{-3}	3.815×10^{-1}
4x4	QEM	19.73873	49.32547	78.92881	128.10460	167.40696
	Hata(%)	2.411×10^{-3}	4.570×10^{-2}	3.550×10^{-2}	1.561×10^{-1}	2.243×10^{-1}
	Hybrid	19.73921	49.34802	78.95684	128.30487	167.78330
	Hata(%)	6.945×10^{-10}	2.747×10^{-5}	2.131×10^{-7}	1.165×10^{-5}	1.206×10^{-5}

(Leissa, 1973)



Şekil 4.7 Basit mesnetli bir plakanın ilk modunun normal Quadrature şeması ve hybrid şeması çözümlerinin karşılaştırılması

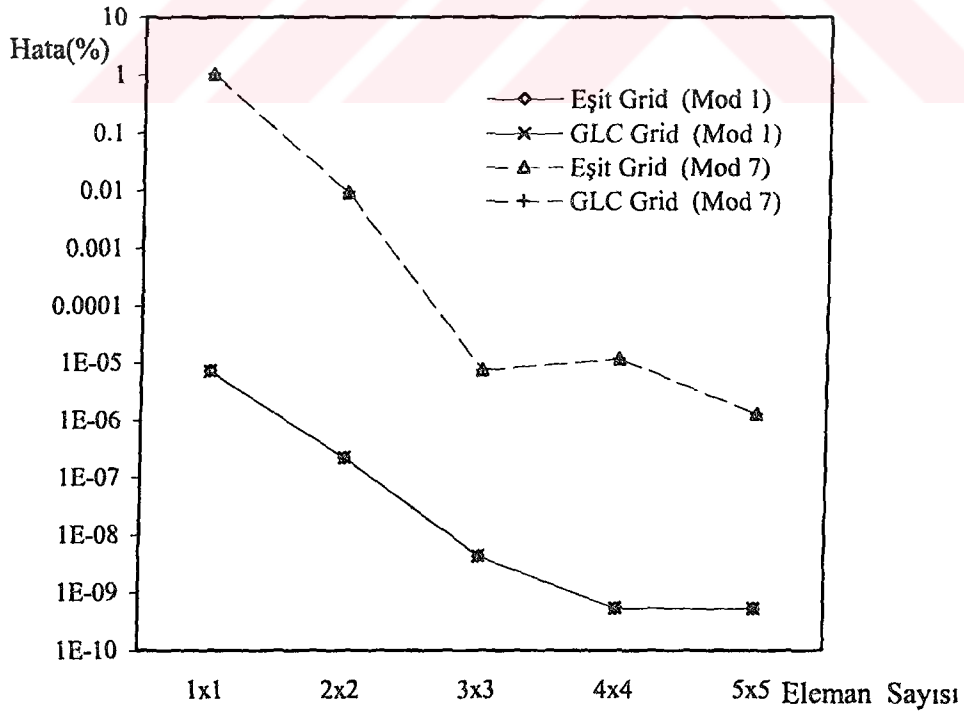
Basit mesnetli kare bir plaka için her iki çözüm şeması kullanılarak elde edilen değerler, birinci modları için, değişik eleman sayıları kullanılarak hesaplanmıştır. Şekilde hybrid şeması ile çözümün, normal şema ile çözümden çok daha doğru çözümler verdiği açık bir biçimde görülebilir. Bununla beraber eleman sayısının artmasıyla hybrid çözümün yakınsamasının daha hızlı büyüdüğü de söylenebilir. Hybrid şeması için çözümün hesapsal zamanı sembolik entegrasyon yüzünden büyüdüğü söylenebilir. Fakat standart bir yirmi beş gride sahip plaka elemanı için kullanılabilen bir data dosyasının kolaylığı da göz ardı edilemez. Hybrid Şeması ile çözümün daha yakınsak bir çözüm olduğuna karar verdikten sonra daha önce de değindiğimiz grid yapılarını da test etmek gerekir. Yukarıda daha önce grid yapılarının çözümün doğruluğu üzerinde son derece etkili olduğu görülmüştü. Diferansiyel Quadrature Eleman Metodu ile çözümde hangi grid yapısının daha etkili olduğunu görmek için seçilen iki mod için basit mesnetli kare plaka ele alınmıştır. Çizelge 4.8’de hybrid şeması ile çözüm yapılarak değişik eleman sayılarında eşit grid veya GLC tipi grid yapısını kullanılarak elde edilen değerler verilmiştir. Seçilen iki mod için Leissa’nın

analitik çözüm değerleri ile karşılaştırıldığında görülen hata yüzdeleri ise Şekil 4.8'de görülmektedir.

Çizelge 4.8 Basit mesnetli plakanın hybrid şeması ile DQEM çözümlerinde grid yapısına göre elde edilen frekans parametreleri ($\varpi = \omega L^2 \sqrt{\rho h / D}$)

		Eşit Grid Yapısı		GLC Tip Yapı	
		ϖ_1 *(19.73921)	ϖ_7 *(128.30486)	ϖ_1 *(19.73921)	ϖ_7 *(128.30486)
1x1	Çözüm Değeri	19.73921	129.61175	19.73921	129.61175
	Hata(%)	7.18×10^{-6}	1.019	7.18×10^{-6}	1.019
2x2	Çözüm Değeri	19.73921	128.31665	19.73921	128.31665
	Hata(%)	2.22×10^{-7}	9.19×10^{-3}	2.22×10^{-7}	9.19×10^{-3}
3x3	Çözüm Değeri	19.73921	128.30487	19.73921	128.30487
	Hata(%)	3.8×10^{-9}	7.46×10^{-6}	4.29×10^{-9}	7.46×10^{-6}
4x4	Çözüm Değeri	19.73921	128.30487	19.73921	128.30487
	Hata(%)	3.65×10^{-9}	1.17×10^{-5}	6.95×10^{-10}	1.16×10^{-5}
5x5	Çözüm Değeri	19.73921	128.30486	19.73921	128.30486
	Hata(%)	2.28×10^{-9}	1.288×10^{-6}	5.29×10^{-10}	1.29×10^{-6}

*(Leissa, 1973)



Şekil 4.8 Basit mesnetli plakanın hybrid DQEM çözümleri ve grid yapısı

Her iki mod için hata yüzdelerinin grid yapısına çok bağlı olmadığı görülmektedir. Her iki grid yapısında da hatalar birbirlerine son derece yakındır. Çok az da olsa GLC yapısının eşit grid yapısından daha iyi olduğu söylenebilir. Burada görülen bir başka durum da eleman sayının artmasıyla yakınsamanın lineer olarak artmadığıdır. Artan eleman sayısına rağmen hatanın yüzde olarak orantısız azalmadığı görülmüştür. Aşağıda Çizelge 4.9'da değişik sınır koşulları altında plakaların Hybrid şeması ile elde edilen çözümleri verilmiştir.

Çizelge 4.9 Değişik sınır koşulları altındaki plakaların hybrid DQEM(4x4) çözümleri ile elde edilen frekans parametreleri ($\omega = \omega L^2 \sqrt{\rho h / D}$)

Sınır				Sınır			
Durumu	DQEM	*Ref	**Ref	Durumu	DQEM	*Ref	**Ref
B-K-S-S	2.37812	2.37812	-	S-S-S-S	13.46820	13.91187	13.489
B-K-K-S	2.40785	2.40785	-	B-A-B-K	13.68577	13.68577	-
B-K-K-K	2.46740	2.46740	-	A-S-B-S	15.19284	15.17179	15.285
B-B-S-S	3.36705	3.35619	3.3687	A-K-B-K	15.41821	15.41821	
B-B-K-S	4.03369	4.03369	-	A-B-B-S	16.79282	16.99260	16.865
B-B-K-K	4.93480	4.93480	-	A-B-B-K	17.33175	17.33175	-
A-S-B-S	5.35223	-	-	A-B-A-S	17.53800	17.77422	17.615
A-K-K-K	5.59332	5.59332	-	A-A-B-K	18.34846	-	-
B-A-K-S	5.70387	5.70387	-	B-B-B-B	19.73921	19.73921	19.7392
B-S-S-S	6.64373	6.91513	6.6480	A-S-A-S	22.16898	22.24306	22.272
A-S-A-S	6.92000	-	-	A-K-A-K	22.37329	22.37329	-
A-B-K-K	7.23771	7.23771	-	A-B-A-S	23.37278	23.43890	23.460
A-A-K-K	8.99630	-	-	B-A-B-B	23.64632	23.64632	23.6463
B-S-B-S	9.63138	9.63138	9.6314	A-B-A-K	23.81563	23.81563	-
B-S-B-K	9.73624	9.73624	-	A-A-A-S	23.92317	23.99523	24.020
B-K-B-K	9.86960	9.86960	-	B-B-A-A	27.05413	27.05413	27.056
B-B-B-S	11.68454	11.68454	11.6845	A-B-A-B	28.95087	28.95085	28.9509
B-B-B-K	12.33701	12.33701	-	A-A-A-B	31.82598	31.82119	31.829
B-A-B-S	12.68736	12.68736	12.6874	A-A-A-A	35.98520	35.98926	35.992

*Ref=(Malik, 1996), **Ref=(Leissa, 1973)

(B=Basit mesnet, A=Ankastre mesnet, S=Serbest mesnet, K=Kayıcı mesnet)

4.3.2 Anizotropik plakaların titreşimi

Anizotropik plakaların serbest doğal titreşimleri için, temel referans denklem aşağıdaki gibi verilir;

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4.24)$$

Daha önce izotropik plakalar için verilenlere benzer biçimde çözüm gerçekleştirilebilir. Fakat aralarındaki fark eğilme katılık matrisinin elde edilmesidir. Aşağıda bu matrisin elde edilebilmesi için gerekli prosedür verilecektir.

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$\alpha = \sin \theta, \beta = \cos \theta$ için yukarıda verilenler ise şu şekilde elde edilebilir;

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11} \alpha^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \alpha^2 \beta^2 + Q_{22} \beta^4 \quad (4.26a)$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{12} + Q_{22} - 4Q_{66}) \alpha^2 \beta^2 + Q_{12} (\alpha^4 + \beta^4) \quad (4.26b)$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \alpha^3 \beta + (Q_{11} - Q_{12} + 2Q_{66}) \alpha \beta^3 \quad (4.26c)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11} \beta^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \alpha^2 \beta^2 + Q_{22} \alpha^4 \quad (4.26d)$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \alpha \beta^3 + (Q_{11} - Q_{12} + 2Q_{66}) \alpha^3 \beta \quad (4.26e)$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \alpha^2 \beta^2 + Q_{66} (\alpha^4 + \beta^4) \quad (4.26f)$$

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, Q_{12} = \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \quad (4.27a)$$

$$Q_{66} = G_{12}, \nu_{12} E_2 = \nu_{21} E_1 \quad (4.27b)$$

Anizotropik plak çözümlerinin DQEM ile çözümlerini direkt olarak karşılaştırabilmek için referans alınan bazı çalışmalarda kullanılan rijitlik oranlarını seçmemiz gerekir. Çizelge 4.10'de, daha sonra Çizelge 4.11 ve Çizelge 4.12'de vereceğimiz bazı DQEM çözümlerinde kullanılacak rijitlik oranları verilmiştir. Bu oranlar değişik θ dört değer için çizelgede yer almıştır. Çözümlere GLC tipi grid yapısı ve hybrid şema kullanıldı ve doğal titreşim parametresi $\omega = \omega L^2 \sqrt{\rho h / D_{11}}$ alındı.

Çizelge 4.10 Anizotropik plaka için seçilen rijitlik oranları

θ	$\frac{D_{22}}{D_{11}}$	$\frac{D_{12}}{D_{11}}$	$\frac{D_{66}}{D_{11}}$	$\frac{D_{16}}{D_{11}}$	$\frac{D_{26}}{D_{11}}$
0	0.1	0.03	0.0247750	0	0
$-\pi/12$	0.11520	0.10081	0.094881	-0.24334	-0.012084
$-\pi/6$	0.24822	0.34485	0.33612	-0.49569	-0.15537
$-\pi/4$	1	0.84259	0.82599	-0.7148	-0.7148

Grossi'nin sınır değer problemlerinin zayıf çözümü yöntemi ile yaptığı çalışmasında anizotropik kare plakalar için Çizelge 4.10'de verilen rijitlik oranlarıyla bulduğu değerler DQEM ile 2x2 plaka elemanı kullanılarak çözülmüştür. Çizelge 4.11'de DQEM ile bulunan ilk dört doğal frekans değerleri Grossi'nin değerleri ile beraber verilmiştir. Yine Grossi'nin hareket denklemlerinin Hamilton prensibini kullanarak yaptığı analitik çözümü ve yine diğer bir çalışmasında ele aldığı karşılıklı iki kenarı ankastre-serbest mesnetli kare plakada $\theta = -\pi/12$ değeri için bulunan değerler Çizelge 4.12'de ilk altı mod için 2x2 ve 4x4 plaka elemanı kullanılarak DQEM ile hesaplanan değerlerle beraber verilmiştir. DQEM ile Grossi'nin çözümleri birbirlerine son derece yakın değerleri içermektedir. Özellikle ilk modlarda çok benzer değerler elde edilebildiği görüldü (Grossi, 2001-a; Grossi, 2001-b).

Çizelge 4.11 Anisotropik ankastre plaka için frekans parametreleri ($\varpi = \omega L^2 \sqrt{\rho h / D_{11}}$)

θ	ϖ_1		ϖ_2		ϖ_3		ϖ_4	
	*Ref.	DQEM	*Ref.	DQEM	*Ref.	DQEM	*Ref.	DQEM
0	23.966	23.966	31.149	31.149	46.467	46.416	62.755	62.776
$-\pi/12$	24.601	24.601	33.570	33.571	50.817	50.762	63.344	63.347
$-\pi/6$	27.577	27.580	42.832	42.836	65.498	65.451	66.959	66.978
$-\pi/4$	36.520	36.529	62.316	62.318	83.567	83.630	92.801	92.788

*(Grossi,2001a)

Çizelge 4.12 A-A-S-S Mesnetli anisotropik kare plaka için doğal frekans parametreleri ($\theta = -\pi/12$), $\varpi = \omega L^2 \sqrt{\rho h / D_{11}}$

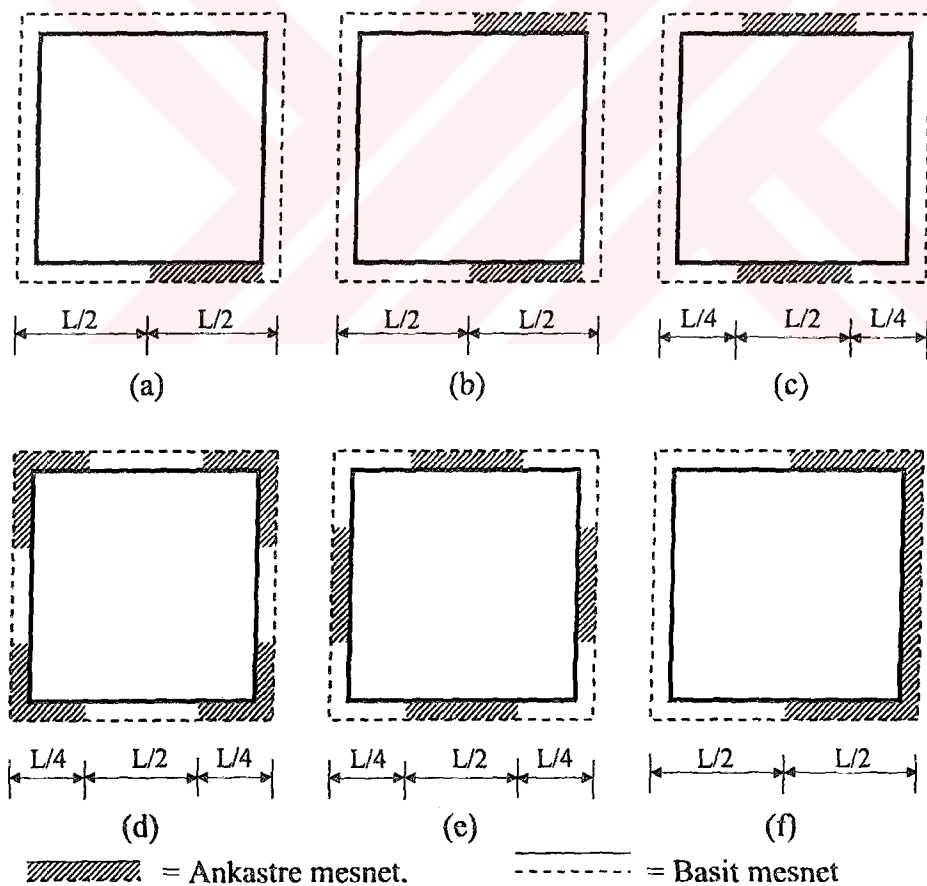
	ϖ_1	ϖ_2	ϖ_3	ϖ_4	ϖ_5	ϖ_6
(Grossi,2001b)	3.3281	9.5894	19.3192	22.6432	25.7237	36.5677
DQEM(2x2)	3.3265	9.5887	19.2932	22.6342	25.7014	36.5180
DQEM(4x4)	3.3252	9.5878	19.2756	22.6298	25.6922	36.5029

4.3.3 Düzensiz sınır koşullarına sahip plakalar

Yüksek dereceden yaklaşım metodlarının çoğu yalnızca sınırların sürekli ve basit olduğu durumlarda daha doğru sonuçlar verirler. Fakat gerçekte kullanılan plakaların her zaman sadece bir doğrultu boyunca aynı mesnet tipine sahip olduğu söylenemez. Bir plaka için aynı sınır boyunca değişik tiplerde mesnetlenme durumları da söz konusudur. Bunun yanında bir veya birden fazla tipte mesnet değişik orantıdaki uzunluklarda da olabileceği tartışılmaz. Bu nedenle değişik sınır koşullarının yine değişik oranlarda kullanıldığı plaka çözümleri için, oldukça çok nümerik analiz yöntemleri denenmiştir.

Çizelge 14.4'te görülen durumlar için değişik araştırmacılar çok farklı yöntemler kullanarak çözümler elde etmişlerdir. Bu konuda ilk başvuru kaynaklarından biri Leissa'nın Rayleigh-Ritz metodu ile yaptığı analitik çözümlerdir. Leissa, özellikle

Basit ve ankastre mesnet kombinasyonları için çözümler elde etmiştir. Narita, seri açınım algoritmasını kullanarak ankastre kısımların uzunluğuna göre modların nasıl değiştiğini göstermiştir. Cheung, Finite Strip Element, Liew, Rayleigh tabanlı ana yapı metodunu, Keer ve Stahl, Fredholm integrasyonu, Laura, Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature metodunu, Wei ise Discrete Singular Convolution (DSC) metodunu kullanarak benzer çözümler sunmuşlardır. Liu, normal şemalı Diferansiyel Quadrature Element Metodunu kullanarak, düzensiz sınır koşullarındaki kalın plakaların titreşim analizlerini yapmıştır. Yine Sakiyama, kalın Mindlin plakaların düzensiz sınır koşulları üzerinde titreşim çalışmaları yapmıştır (Leissa, 1969; Ota ve Hamada, 1969; Fan ve Cheung, 1984; Keer ve Stahl, 1972; Shu ve Wang, 1999; Narita, 1981; Gorman, 1984; Sakiyama, 1987; Mizusawa, 1990; Liew, 1993; Wei ve Xiang, 2001; Liu ve Liew, 1998).



Şekil 4.9 Farklı sınır şartları ve mesnet boylarında kare plakalar

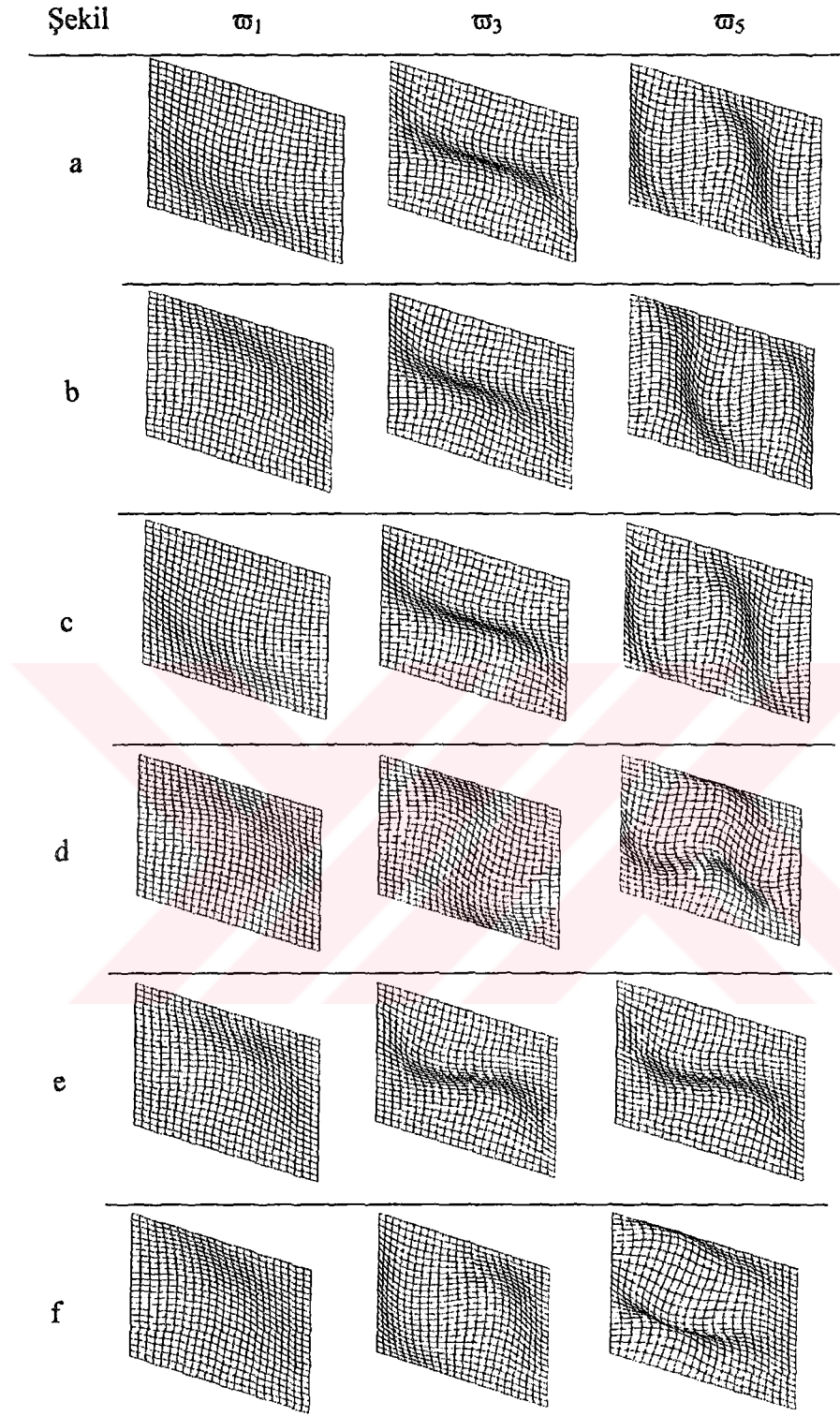
Araştırmacılar daha çok basit mesnet ve ankastre mesnet kombinasyonları üzerinde çalışılmıştır. Bu yüzden DQEM ve Ansys çözümleri de bu konularda yapıldı. Mesnetlenme boyları için üç seçenikle L, L/2, L/4 varyasyonları seçilmiştir. Bu seçimleri çok daha arttırmak mümkündür. Şekil 4.9'da da referans bulabileceğimiz altı farklı tipte mesnetlenme durumu ele alındı. Çizelge 4.13'de verilen bu şekiller için referanslarda yer alan değişik metodlarla elde edilmiş çözümler, Ansys ve DQEM çözümleri verildi. Şekil 4.10'da ise verilen bu sınır koşulları için elde edilen çözümlerin 1., 3. ve 5. modlarının şekilleri verilmiştir.

DQEM uygulanmaları 25 grid noktasına sahip 4x4 plaka elemanı kullanılarak yapılmıştır. Bu şekilde gerekli sınır koşullarını da yerleştirmesi kolaylaştırılmıştır. Değişik sınır koşullarına sahip plakalarda araştırmacılar tarafından doğal olarak farklı değerler elde edilmiştir. Bu yüzden de referans alınan bazı değerlerin farklı araştırma değerlerine yakın olması da doğaldır. Örneğin Çizelge 4.13'te (f) seçeneği için Mizusawa'nın değerleri ile DQEM çözümleri büyük benzerlik göstermektedir. Aynı durum (a) seçeneği için Liew'le bir benzerlik söz konusudur. Çizelge 4.13'te (d) seçeneğinde yer alan sınır koşulları haricinde DQEM ve Ansys çözümleri büyük bir uyum göstermektedir. Özellikle bu tipteki mesnetlenme durumu için diğer çözümler de daha geniş bir çözüm dağılımı vermektedir.

Basit mesnetler için bulunan çözümlerdeki yüksek doğruluğun yukarıda verilen şekiller için de bozulmayacağı beklenebilir, bunun yanı sıra bu durumlarda uygulamanın kolaylığı da DQE metodunu ayrıcalıklı bir çözüm metodu haline getirmektedir.

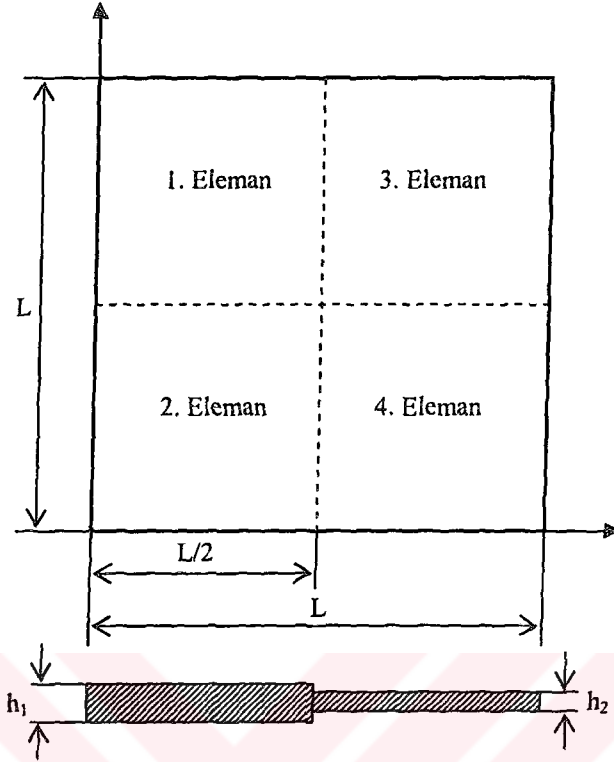
Çizelge 4.13 Farklı sınır şartlarında kare plakada frekans parametreleri $\omega = \omega L^2 \sqrt{\rho h / D}$

Şekil	Yöntem	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
(a)	(Ota ve Hamada,1969)	22.40	-	-	-	-	-
	(Fan ve Cheung,1984)	22.73	50.15	56.23	82.98	99.74	-
	(Leissa,1969)	22.40	-	-	-	-	-
	(Keer ve Stahl, 1972)	22.49	-	-	-	-	-
	(Narita, 1981)	22.63	50.04	58.95	82.34	99.71	-
	(Gorman, 1984)	22.48	-	-	-	-	-
	(Mizusawa,1990)	22.71	50.10	56.13	82.37	99.73	-
	(Liew, 1993)	22.51	49.95	55.72	82.29	99.69	107.10
	(Wei ve Xiang, 2001)	22.42	49.88	55.54	82.26	99.67	-
	(Shu ve Wang,1999)	22.42	49.93	55.51	82.32	99.64	-
	(Liu ve Liew, 1998)	22.40	49.84	55.48	82.13	99.47	106.53
	Ansys	22.49	49.93	55.68	82.24	99.66	107.01
	DQEM	22.50	49.93	55.70	82.27	99.69	107.05
	(b)	(Ota ve Hamada,1969)	25.50	-	-	-	-
(Fan ve Cheung, 1984)		26.37	52.23	61.78	-	-	-
(Laura,1994)		25.41	-	-	-	-	-
(Liew, 1993)		25.71	52.11	60.09	88.13	100.60	112.30
(Wei ve Xiang, 2001)		25.59	52.10	59.80	88.14	100.54	-
(Liu ve Liew, 1998)		25.59	52.04	59.75	87.95	104.34	111.71
Ansys		25.79	52.10	60.25	88.11	100.55	113.45
DQEM		26.03	52.14	60.84	88.14	100.58	113.50
(c)	(Ota ve Hamada,1969)	28.30	-	-	-	-	-
	(Narita, 1983)	28.44	53.49	67.85	90.50	100.60	-
	(Wei ve Xiang, 2001)	28.36	53.29	67.60	89.87	100.39	-
	Ansys	28.38	53.34	67.68	90.04	100.43	126.23
	DQEM	28.50	53.59	68.01	90.80	100.68	126.55
(d)	(Narita, 1983)	26.18	58.70	58.70	98.58	102.00	-
	(Liew, 1993)	25.40	57.63	57.63	97.05	101.10	113.30
	(Liu ve Liew, 1998)	25.31	57.46	57.46	96.67	100.88	112.88
	(Wei ve Xiang, 2001)	26.66	56.90	62.30	89.67	100.39	-
	Ansys	25.63	57.97	57.97	97.64	101.38	113.79
	DQEM	26.29	58.91	58.91	99.16	102.20	115.14
(e)	(Ota ve Hamada, 1969)	35.50	-	-	-	-	-
	(Leissa,1969)	35.50	-	-	-	-	-
	(Liew, 1993)	35.60	71.71	71.71	101.80	124.80	131.40
	(Liu ve Liew, 1998)	35.66	71.99	72.04	102.28	125.30	131.01
	Ansys	35.68	71.88	71.88	102.35	125.36	131.06
	DQEM	35.75	72.27	72.27	103.67	126.86	131.52
(f)	(Wei ve Xiang, 2001)	27.81	60.45	61.00	94.54	111.94	-
	(Fan ve Cheung, 1984)	28.65	61.06	62.48	-	-	-
	(Mizusawa, 1990)	28.28	61.01	61.56	94.29	113.92	-
	(Shu ve Wang,1999)	28.28	61.01	61.56	94.29	113.92	-
	Ansys	28.01	60.91	60.99	94.51	112.45	115.07
	DQEM	28.27	61.00	61.51	94.54	113.01	115.46



Şekil 4.9 Farklı sınır şartlarında kare plakada mod şekilleri

4.3.4 Farklı kalınlıklara sahip plakalar



Şekil 4.11 Basamak biçiminde kalınlığı farklı plaka

Kalınlık özellikle daha çok malzemeyi hafifletme ve böylece daha ekonomik yapı kurma çalışmaları için göz önünde bulundurulacak bir husustur. Plakaların farklı kalınlıklarda olması durumu değişik araştırmacılar tarafından çalışılmış ve bu konu üzerinde yapılan çalışmalarda aynı zamanda kalınlıkların farklı uzunluklarda olması da değerlendirilmiştir. Malhotra, Rayleigh-Ritz metodu ile ortotropik plakaların farklı sınır şartlarında ve kalınlığı bir yönde değişen plakaların doğal titreşimleri üzerinde çalışmıştır. Xiang ve Yuan, Levy tipindeki analitik çözüm ile, sonlu elemanlar yöntemi ile Ju ve Gao, Finite Strip yöntemi ile Cheung, dinamik Finite Strip yöntemi ile Chopra, farklı kalınlıklar, şekiller ve mesnetler için çözümler elde etmişlerdir (Goa, 1997; Ju, 1995; Cheung, 2000; Chopra, 1974; Yuan, 1975; Malhotra, 1987).

DQEM ile yaptığımız çalışmada çok çeşitlilik göz önüne alınarak sadece daha önce yapılmış bazı çalışmalarda yer alan şekiller üzerinde çözümler üretilmiştir. Şekil

4.11'da üç farklı tipte mesnet koşulu için $L/2$ uzunluğunda üç farklı kalınlıktaki plaka için, Çizelge 4.14'te DQEM 2x2 elemanla elde edilen frekans parametreleri, Ansys çözümleri ile beraber verilmiştir. Şekil 4.12'de yalnızca $h_1/h_2=1/4$ durumu alınan üç frekans parametresi için elde edilen mod şekilleri görülmektedir. Gerek Ansys çözümleri, gerekse birbirinin yarısı uzunluğunda ve yarısı kalınlığına sahip eş genişlikte iki plaka için DQEM çözümleri, Yuan'ın Levy tipindeki analitik çözümü Çizelge 4.14'te karşılaştırılmış ve değerler, burada verilen beş frekans parametresi için de birbirine son derece yakındır.

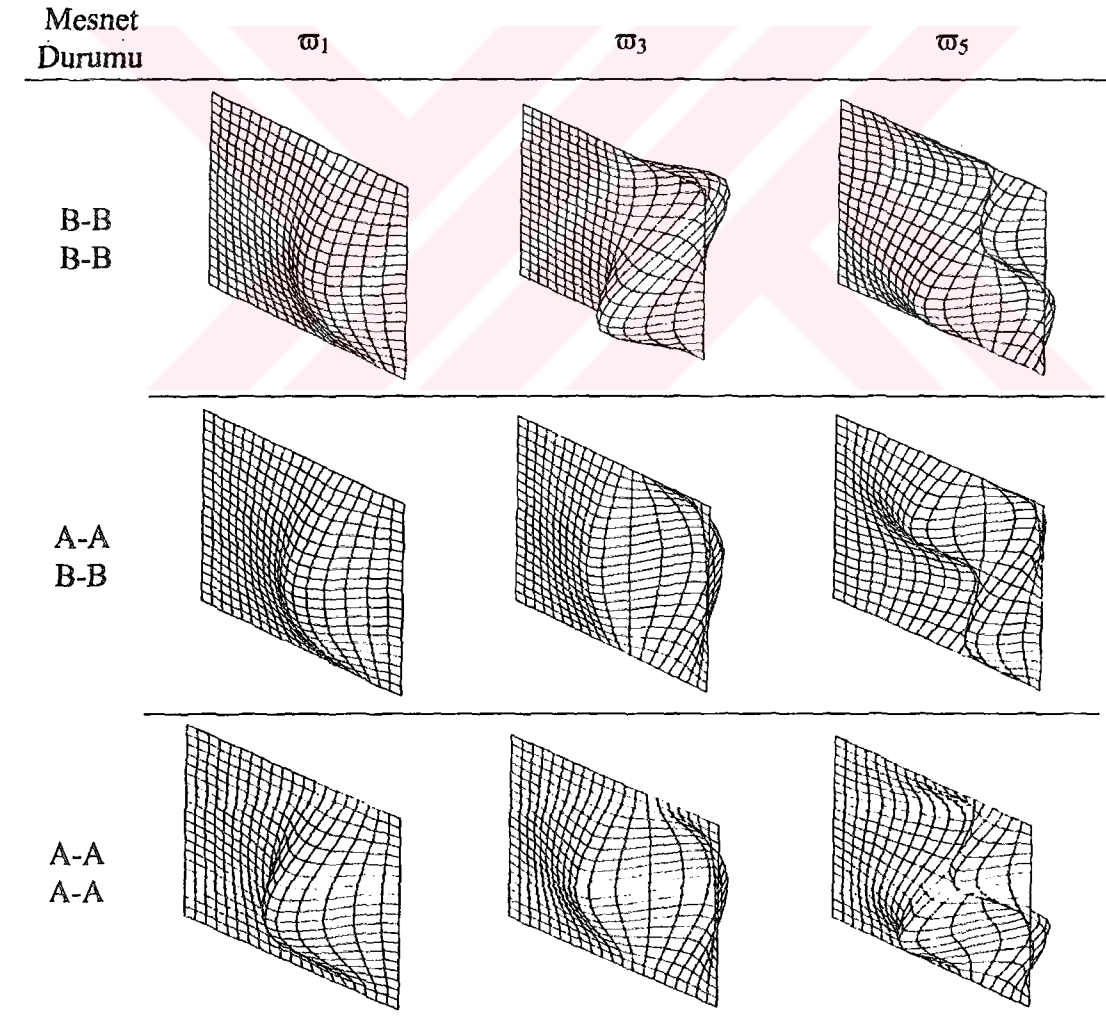
Çizelge 4.14 İki basamaklı plakanın frekans parametreleri ($\varpi = \omega L^2 \sqrt{\rho h_1 / D_1}$)

h_1/h_2		ϖ_1	ϖ_2	ϖ_3	ϖ_4	ϖ_5
B-B-B-B						
$3/4$	DQEM	17.0571	42.7235	43.1833	68.7303	83.7535
	ANSYS	17.0462	42.7046	43.1654	68.6873	83.7249
$1/2$	DQEM	14.3184	35.1142	35.4465	55.5356	63.4834
	Yuan,1975	14.3184	35.1142	35.4469	55.5361	64.1173
	ANSYS	14.3067	35.1006	35.4222	55.5074	63.4434
$1/4$	DQEM	12.5280	20.5757	22.6867	34.5832	43.3094
	ANSYS	12.5154	20.5665	22.6711	34.5614	43.2789
A-B-A-B						
$3/4$	DQEM	24.9153	47.4678	60.5976	82.2081	87.4495
	ANSYS	24.9099	47.4562	60.5881	82.1841	87.4312
$1/2$	DQEM	20.5837	39.9062	48.8779	65.5127	68.2716
	ANSYS	20.5754	39.8870	48.8711	65.4976	68.2412
$1/4$	DQEM	17.5748	27.3572	28.3473	38.3898	47.9138
	ANSYS	17.5635	27.3464	28.3406	38.3767	47.8856
A-A-A-A						
$3/4$	DQEM	31.1251	63.2297	64.1481	94.4163	111.070
	ANSYS	31.1236	63.2247	64.1448	94.4093	111.057
$1/2$	DQEM	26.1874	51.2364	51.7868	77.1354	82.6475
	ANSYS	26.1814	51.2216	51.7839	77.1279	82.6271
$1/4$	DQEM	21.1638	30.8902	32.6485	44.2939	60.7652
	ANSYS	21.1569	30.8853	32.6387	44.2879	60.7330

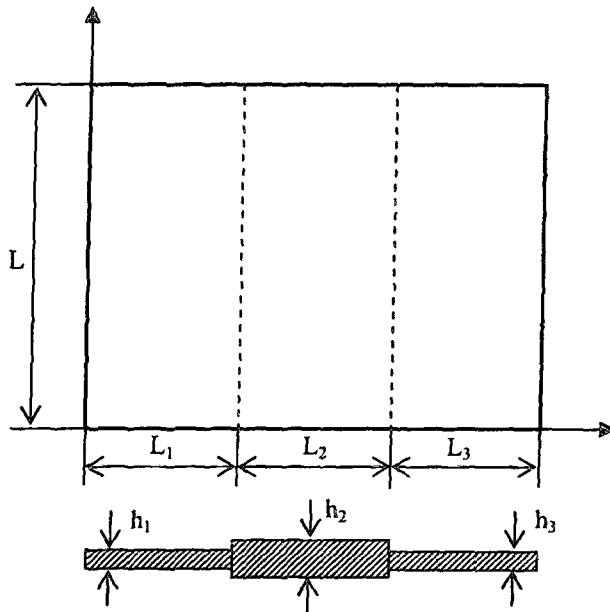
Farklı kalınlıktaki plakalarla ilgili ikinci çalışmada ise Şekil 4.12'de görüldüğü gibi, üç farklı mesnet tipi ile üç farklı kalınlığa sahip ve değişik uzunluklar için 8 farklı varyasyonda DQEM çözümü yapılmıştır. $L_1=L_3=L/2$ ve $L_2=0$ durumu için 2x2 plaka

elemanı, $L_1=L_2=L_3$ durumu için çözümler 3x3 plaka elemanı, $L_1=3L/2, L_3=L/2$ ve $L_2=0$ durumu için çözümler 4x2 plaka elemanı kullanılarak hesaplanmıştır. Çizelge 4.16'da Xiang'ın Levy tipi analitik çözümlerinin ve state-space tekniği ile birleştirilmesi ile oluşturduğu farklı bir teknikle elde ettiği çözüm değerleri DQEM çözümleri ile beraber verilmiştir (Xiang, 2002).

Çizelge 4.15'da verilen çözümler Xiang'ın kesin analitik çözümleri ile karşılaştırıldığında DQEM'in ne kadar efektif bir metod olduğu bir kez daha görülebilir. Burada elde edilen çözümlerle elde edilen seçilmiş üç frekans parametresi için $h_1/h_2=1.5$, $h_3/h_1=2$ durumunda görülen mod şekilleri Şekil 4.14'te verilmiştir.



Şekil 4.12 Farklı kalınlıklardaki basamak plağın mod şekilleri ($h_1/h_2=1/4$)

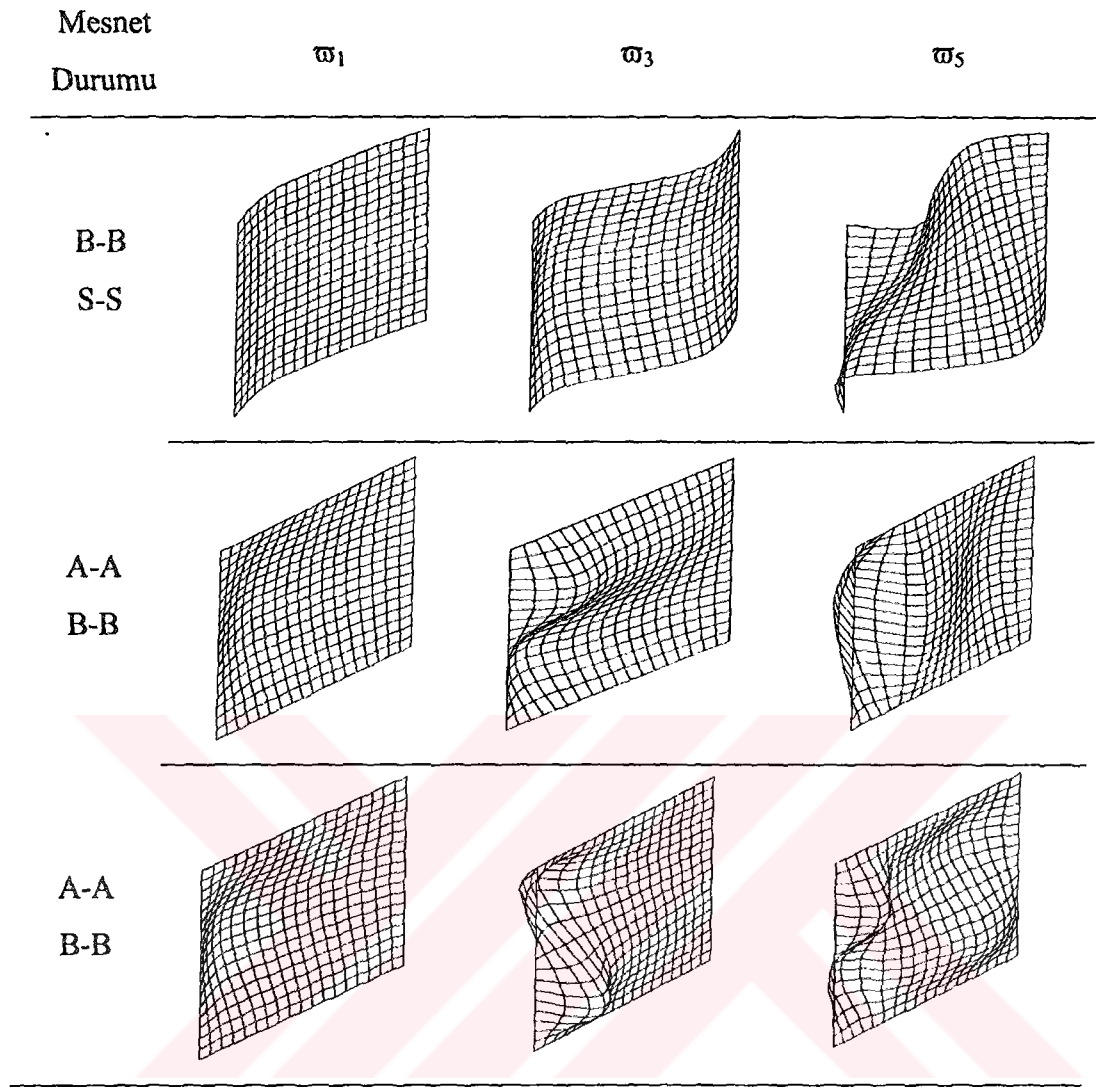


Şekil 4.13 Üç basamaklı plaka

Çizelge 4.15 Üç basamaklı plakanın frekans parametreleri $\varpi = (\omega L^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h_1 / D_1}$

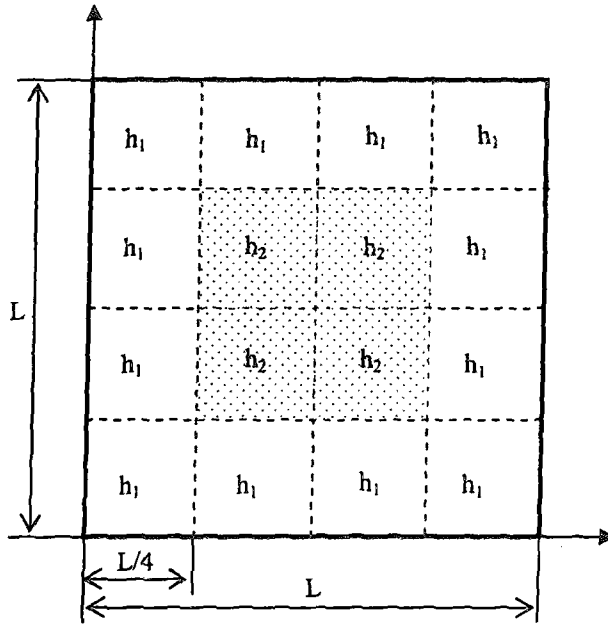
	$\frac{h_2}{h_1}$	$\frac{h_3}{h_1}$	BBBB		BSBS		ABAB		
			Mod	*Ref.	DQEM	*Ref.	DQEM	*Ref.	DQEM
$L_1=L_3=L/2$ $L_2=0$	--	1.5	ϖ_1	2.4471	2.4471	1.2266	1.2266	3.5610	3.5610
			ϖ_2	6.1338	6.1338	2.0624	2.0624	6.8275	6.8275
			ϖ_3	6.2229	6.2229	4.4695	4.4695	8.7199	8.7201
	2	ϖ_1	2.9015	2.9015	1.4928	1.4928	4.1711	4.1711	
		ϖ_2	7.1156	7.1157	2.4441	2.4441	8.0867	8.0867	
		ϖ_3	7.1830	7.1830	4.7767	4.7767	9.9047	9.9049	
$L_1=L_2=L_3$	1.5	1	ϖ_1	2.2633	2.2633	1.1780	1.1780	3.2169	3.2169
			ϖ_2	5.5848	5.5848	1.9883	1.9883	6.7268	6.7268
			ϖ_3	6.1005	6.1005	4.3628	4.3628	7.7080	7.7080
	2	ϖ_1	2.8840	2.8840	1.4994	1.4994	4.2262	4.2262	
		ϖ_2	7.1034	7.1034	2.5193	2.5193	7.9292	7.9292	
		ϖ_3	7.1047	7.1047	4.9734	4.9734	9.8627	9.8627	
$L_1=3L/2$ $L_3=L/2$ $L_2=0$	--	1.5	ϖ_1	1.5335	1.5335	1.1262	1.1262	1.7069	1.7069
			ϖ_2	2.4644	2.4644	1.5516	1.5516	2.9422	2.9422
			ϖ_3	3.9634	3.9634	2.2144	2.2144	4.7599	4.7599
	2	ϖ_1	1.7957	1.7957	1.1942	1.1942	2.0217	2.0217	
		ϖ_2	2.8135	2.8135	1.9277	1.9277	3.3189	3.3189	
		ϖ_3	4.6813	4.6813	2.6516	2.6516	5.2382	5.2381	

*(Xiang, 2002)



Şekil 4.14 Basamak plağın mod şekilleri (A-B-A-B), ($h_1/h_2=1.5$, $h_3/h_1=2$)

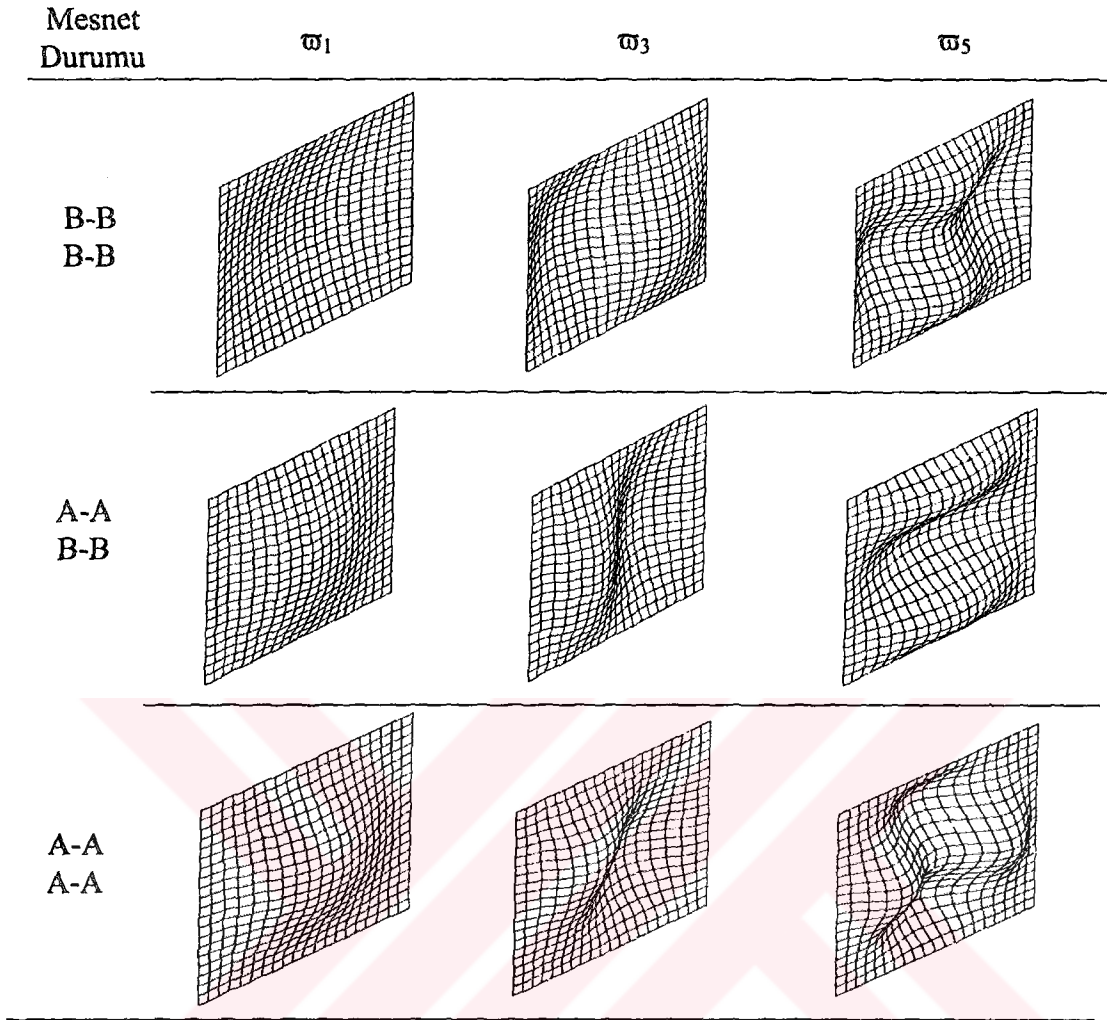
Mesnet, mesnet uzunluğu, kalınlık, kalığın uzunluğu ve bunların oranları ele alınarak sonsuz sayıda kombinasyon üretilebilir. Bizde bu nedenle farklı bir referans olması açısından farklı kalınlıklardaki plaklar ile ilgili diğer çalışmada, Şekil 4.15’de görüldüğü gibi sadece plakanın orta kısmı farklı kalınlıkta olması durumu ele aldık. Yine aynı şekil için Çizelge 4.16’da üç ayrı mesnet koşulu ve üç değişik orantıda kalınlık için DQEM ve Ansys çözümleri verilmiştir. Ansys ile DQEM çözümleri arasında fark ortalama 0.5% civarındadır. Orta bölümü farklı kalınlıktaki plak için $h_1/h_2=1/4$ durumunda için mod şekilleri Şekil 4.16’da verilmiştir.



Şekil 4.15 Ortası farklı kalınlıkta plaka

Çizelge 4.16 Ortası farklı kalınlıktaki plakanın frekans parametreleri, $\varpi = \omega L^2 \sqrt{\rho h_1 / D_1}$

h_2/h_1		ϖ_1	ϖ_2	ϖ_3	ϖ_4	ϖ_5
B-B-B-B						
$3/4$	DQEM	18.1451	44.6752	44.6752	73.4615	89.6695
	ANSYS	18.1304	44.6538	44.6538	73.4136	89.6490
$1/2$	DQEM	17.3221	39.0447	39.0447	68.0043	73.3841
	ANSYS	17.3008	39.0084	39.0084	67.9436	73.3641
$1/4$	DQEM	18.1225	35.8088	35.8088	41.3064	66.0483
	ANSYS	18.0945	35.7086	35.7086	41.2938	65.9629
A-B-A-B						
$3/4$	DQEM	27.9567	49.7795	63.1557	87.8986	93.0888
	ANSYS	27.9490	49.7653	63.1423	87.8711	93.0732
$1/2$	DQEM	28.1509	44.0115	57.4385	77.1369	81.6971
	ANSYS	28.1369	43.9797	57.4081	77.1086	81.6484
$1/4$	DQEM	27.6720	40.7076	48.0634	54.0008	78.2230
	ANSYS	27.6532	40.6015	48.0188	53.9384	78.1958
A-A-A-A						
$3/4$	DQEM	35.1422	66.7324	66.7324	99.9955	117.151
	ANSYS	35.1385	66.7244	66.7244	99.9838	117.143
$1/2$	DQEM	35.6654	60.5900	60.5900	92.3361	92.7803
	ANSYS	35.6548	60.5610	60.5610	92.3193	92.7364
$1/4$	DQEM	31.1992	55.9839	55.9839	63.0479	87.6234
	ANSYS	31.1917	55.9180	55.9180	63.0198	87.5527



Şekil 4.16 Ortası farklı kalınlıktaki plağın mod şekilleri ($h_1/h_2 = 1/4$)

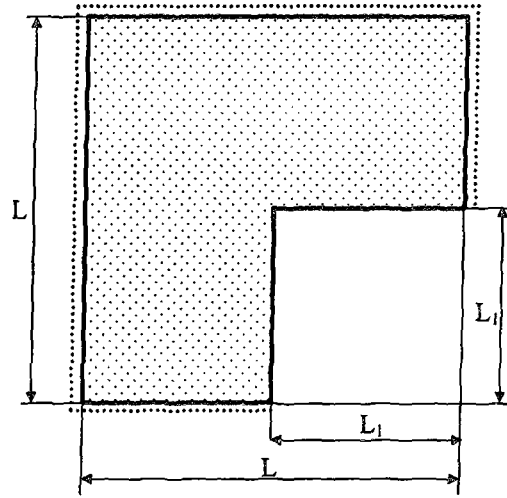
4.3.5 Kesilmiş plakalar

Plakaların değişik şekillerinin hem analitik hem de nümerik yöntemlerle çözümü zorluklar içerir. Ancak DQEM'nin kullandığı elemanlarla, kesilmiş şekiller için her türlü mesnetlerle çözüm yapmak oldukça kolaydır. Gerek bu tür bir şekil oluştururken, gerekse sınır koşullarını uygularken, çok sayıda problem tipi meydana getirilebilir. Ancak yukarıda bahsedilen zorluklar yüzünden bu çalışmalar sınırlı sayıdadır. Çalışmalarda daha çok ortasında basit geometrik şekiller bulunan ve yine basit bir veya iki geometrik şeklin bulunduğu ve bu boşlukların diyagonaller üzerinde

yer değiştirdiği plakaların çözümleri üzerinde durulmuştur. Laura, Rayleigh-Ritz tipindeki analitik çözümlerle, Rossi sonlu elemanlar yöntemi ile, Avalos geliştirilmiş Rayleigh-Ritz yöntemi ile benzer şekiller üzerinde değerler elde etmişlerdir.

Burada bu çok sayıdaki sečenekler içinden çok belirgin şekilleri oluşturmaya çalışıldı. Bu çalışmada sadece şekil 4.17-21’de verildiği gibi sırası ile L, U, E, T, H biçimindeki plakalarla ilgili DQEM çözümleri yapıldı. Mesnetleme tipi olarak her kenarı ankastre ve basit mesnet seçildi. Sırasıyla Çizelge 4.17-23’de çözümler, ANSYS çözümleri ile beraber sunulmuştur. U tipinde, yani bir tarafı karesel olarak kesik kare bir plaka için $L_1/L=0.2$ ve $L_2/L=0.2$ durumunun çözümleri, Laura’nın analitik çözümleriyle karşılaştırılmıştır. Burada elde edilen DQEM çözümleri Laura’nın elde ettiği çözümlere son derece yakın olduğu görölmüştür (Laura, 1997).

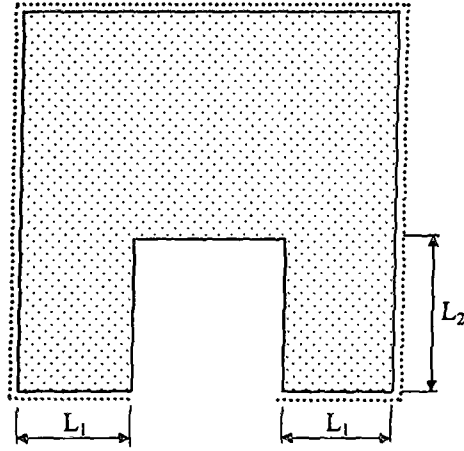
İki taraftan karesel olarak kesilmiş kare plaka, burada H şekli plaka olarak isimlendirilmiştir. $L_1/L=0.2$ ve $L_2/L=0.2$ durumunun çözümleri Avalos’un geliştirilmiş Rayleigh-Ritz tipindeki analitik çözümleriyle karşılaştırılmış ve DQEM ile elde edilen dört mod için de değerlerin çok yakın olduğu görölmüştür. Bütün kesilmiş plakalar için elde edilen frekans parametreleri Ansys ile hesaplananlarla uyumluluk göstermektedir (Avalos, 2003).



Şekil 4.17 L plaka

Çizelge 4.17 L plakada frekans parametreleri ($\varpi = \omega L^2 \sqrt{\rho h / D}$)

L_1/L		ϖ_1	ϖ_2	ϖ_3	ϖ_4	ϖ_5
B-B-B-B						
1/5	ANSYS	19.0887	47.4591	49.2504	76.9014	97.3111
	DQEM	19.0976	47.4736	49.2674	76.9462	97.3347
2/5	ANSYS	17.8325	46.7709	49.6213	83.3420	88.3467
	DQEM	17.8436	46.7988	49.6494	83.4039	88.5267
3/5	ANSYS	18.9243	39.5805	59.9787	100.004	104.132
	DQEM	18.9457	39.6760	60.0193	100.061	104.202
4/5	ANSYS	30.9675	45.5309	75.3595	104.353	137.746
	DQEM	31.0207	45.6827	75.4696	104.666	137.910
A-A-A-A						
1/5	ANSYS	35.7478	72.3662	73.3687	106.641	130.831
	DQEM	35.7495	72.3725	73.3711	106.654	130.844
2/5	ANSYS	33.6338	71.2316	72.0983	111.681	120.636
	DQEM	33.6408	71.2483	72.1262	111.716	120.877
3/5	ANSYS	37.2077	61.2935	86.4892	133.436	141.949
	DQEM	37.2253	61.4363	86.5238	133.515	142.026
4/5	ANSYS	97.8727	106.067	132.275	157.136	193.087
	DQEM	97.9284	106.217	132.389	157.521	193.272



Şekil 4.18 U plaka

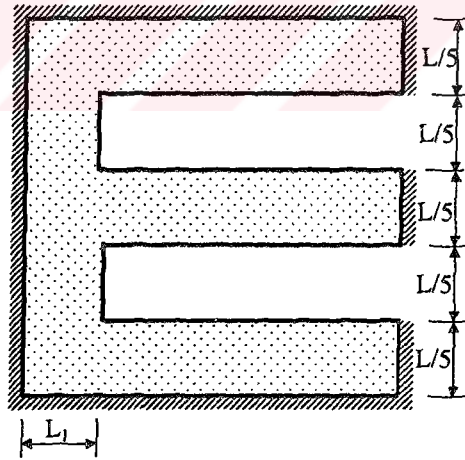
Çizelge 4.18 U plaka frekans parametreleri (Basit mesnetli) ($\omega = \omega L^2 \sqrt{\rho h / D}$)

L_1/L	L_2/L		ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
1/5	1/5	ANSYS	19.5030	48.0093	48.0754	76.3632	97.0141
		DQEM	*19.5180	48.0537	48.1002	76.4213	97.0609
	2/5	ANSYS	19.1933	43.6624	49.8643	69.4817	94.4361
		DQEM	19.2103	43.7614	49.8961	69.5901	94.5310
	3/5	ANSYS	18.9857	33.2911	49.1956	64.9832	98.5022
		DQEM	19.0064	33.4203	49.2523	65.0274	98.5494
	4/5	ANSYS	18.8831	24.7250	49.1571	59.9713	95.7675
		DQEM	18.9091	24.8148	49.2071	60.0900	95.8930
3/5	1/5	ANSYS	17.2742	41.3039	46.7381	74.2927	91.5943
		DQEM	17.3088	41.3889	46.7661	74.3708	91.6903
	2/5	ANSYS	17.9265	45.3478	56.2986	79.6773	82.5671
		DQEM	17.9587	45.3882	56.3595	79.8271	82.8421
	3/5	ANSYS	21.2368	42.8121	57.7224	71.8207	103.403
		DQEM	21.2740	42.9431	57.8008	71.9932	103.527
	4/5	ANSYS	30.0169	37.9331	52.6634	75.4539	94.1468
		DQEM	30.0721	38.0425	52.8708	75.5717	94.4577

*19.52 (Laura, 1997)

Çizelge 4.19 U plaka frekans parametreleri (Ankastre mesnetli) ($\varpi = \omega L^2 \sqrt{\rho h / D}$)

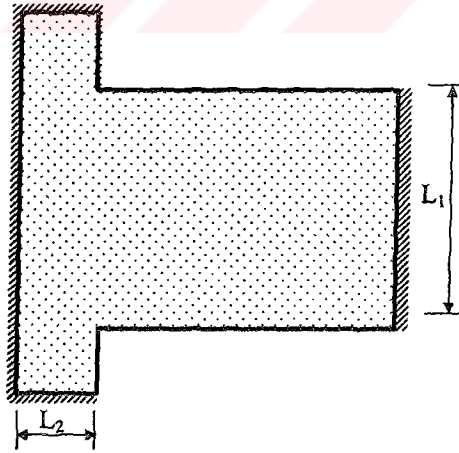
L_1/L	L_2/L		ϖ_1	ϖ_2	ϖ_3	ϖ_4	ϖ_5
1/5	1/5	ANSYS	34.7422	69.8720	72.4376	106.057	126.403
		DQEM	34.7491	69.9265	72.4445	106.071	126.523
	2/5	ANSYS	35.0912	67.4557	74.1576	98.6060	126.308
		DQEM	35.1036	67.5587	74.1838	98.7269	126.450
	3/5	ANSYS	37.0597	52.8585	73.1910	91.8728	131.374
		DQEM	37.0752	53.0341	73.2726	91.9042	131.432
	4/5	ANSYS	39.0144	41.4597	77.2737	83.6769	131.406
		DQEM	39.0485	41.5613	77.3165	83.8278	131.535
3/5	1/5	ANSYS	28.7923	55.5040	69.3112	98.9045	112.692
		DQEM	28.8360	55.6035	69.3428	98.9967	112.989
	2/5	ANSYS	31.9423	71.7857	79.8247	118.216	123.977
		DQEM	31.9951	71.8171	79.9173	118.296	124.089
	3/5	ANSYS	42.8191	81.5151	112.638	120.276	142.328
		DQEM	42.9054	81.5620	112.852	120.555	142.407
	4/5	ANSYS	97.2547	101.429	110.152	131.622	146.463
		DQEM	97.3172	101.536	110.373	131.747	146.797



Şekil 4.19 E plaka

Çizelge 4.20 E plakada frekans parametreleri ($\varpi = \omega L^2 \sqrt{\rho h / D}$)

L_1/L		ϖ_1	ϖ_2	ϖ_3	ϖ_4	ϖ_5
B-B-B-B						
1/5	ANSYS	18.9204	46.8830	48.3475	76.9044	93.4055
	DQEM	18.9379	46.9345	48.3797	77.0036	93.4764
2/5	ANSYS	18.1404	46.8592	47.1048	72.1956	80.0240
	DQEM	18.1636	46.9146	47.1634	72.5152	80.1951
3/5	ANSYS	16.9610	38.5896	43.5102	57.9461	71.1136
	DQEM	16.9937	38.6744	43.6238	58.1904	71.3317
4/5	ANSYS	14.1520	35.0808	38.1152	47.1456	68.7599
	DQEM	14.1845	35.1546	38.2472	47.2958	68.9823
A-A-A-A						
1/5	ANSYS	34.2922	69.1354	71.5956	103.269	125.726
	DQEM	34.3012	69.1947	71.6181	103.368	125.831
2/5	ANSYS	33.7833	70.7173	73.1796	113.708	117.659
	DQEM	33.8176	70.7895	73.2186	113.990	117.758
3/5	ANSYS	31.3236	63.3551	78.7529	112.330	115.265
	DQEM	31.4023	63.4209	78.8650	112.645	115.872
4/5	ANSYS	25.3922	65.8097	80.2931	102.009	102.151
	DQEM	25.4459	65.8863	80.6668	102.173	102.324



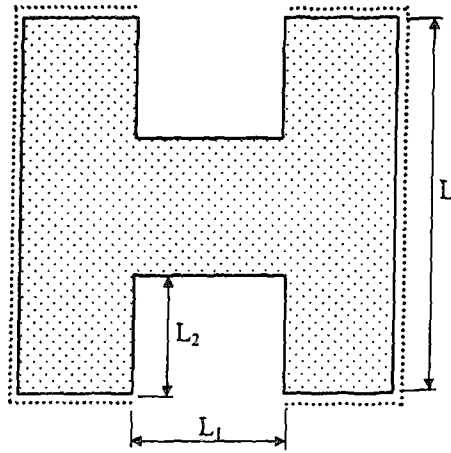
Şekil 4.20 T plaka

Çizelge 4.21 T plakada frekans parametreleri (Basit mesnetli)($\varpi = \omega L^2 \sqrt{\rho h / D}$)

L_1/L	L_2/L		ϖ_1	ϖ_2	ϖ_3	ϖ_4	ϖ_5
1/5	1/5	ANSYS	18.4527	47.2857	47.4720	75.1555	95.6626
		DQEM	18.4604	47.3006	47.4872	75.2043	95.6914
	2/5	ANSYS	17.3163	43.1939	46.0071	72.2485	93.1748
		DQEM	17.3284	43.2490	46.0375	72.3476	93.2616
	3/5	ANSYS	15.4412	35.4599	42.7837	66.8998	86.9039
		DQEM	15.4635	35.5531	42.8026	66.9497	87.0289
	4/5	ANSYS	12.6867	28.2960	41.7282	64.0996	80.7866
		DQEM	12.7088	28.3741	41.7461	64.1882	80.9218
3/5	1/5	ANSYS	16.9818	43.7720	45.3219	72.2211	92.0063
		DQEM	16.9949	43.8166	45.3589	72.3255	92.0593
	2/5	ANSYS	15.8776	46.4637	46.5455	81.1016	90.7569
		DQEM	15.8867	46.4986	46.5824	81.3192	90.8715
	3/5	ANSYS	15.4471	39.4157	51.2042	88.8258	103.939
		DQEM	15.4619	39.4776	51.2584	88.9236	104.050
	4/5	ANSYS	13.5038	39.7467	65.2197	78.9182	92.5029
		DQEM	13.5221	39.7719	65.3653	79.0986	92.8631

Çizelge 4.22 T plakada frekans parametreleri (Ankastre mesnetli)($\varpi = \omega L^2 \sqrt{\rho h / D}$)

L_1/L	L_2/L		ϖ_1	ϖ_2	ϖ_3	ϖ_4	ϖ_5
1/5	1/5	ANSYS	35.5126	72.3196	72.3675	105.249	129.278
		DQEM	35.5155	72.3265	72.3740	105.267	129.302
	2/5	ANSYS	33.6918	65.2081	69.6119	98.2174	117.814
		DQEM	33.6999	65.2833	69.6402	98.2995	118.015
	3/5	ANSYS	28.9265	48.6026	65.4357	92.2931	99.4216
		DQEM	28.9522	48.7312	65.4620	92.3292	99.6256
	4/5	ANSYS	23.8150	36.4867	63.5284	83.3747	86.2131
		DQEM	23.8379	36.5723	63.5523	83.4874	86.3677
3/5	1/5	ANSYS	33.4813	66.1973	68.6966	96.7418	120.605
		DQEM	33.4919	66.2622	68.7355	96.8473	120.759
	2/5	ANSYS	31.3278	69.2307	69.8772	113.345	117.142
		DQEM	31.3391	69.2724	69.9152	113.655	117.240
	3/5	ANSYS	29.1397	62.0045	74.0189	119.058	120.168
		DQEM	29.1656	62.0874	74.1024	119.640	120.335
	4/5	ANSYS	25.1947	65.2077	79.8025	117.528	136.345
		DQEM	25.2349	65.2531	80.0787	117.617	136.561

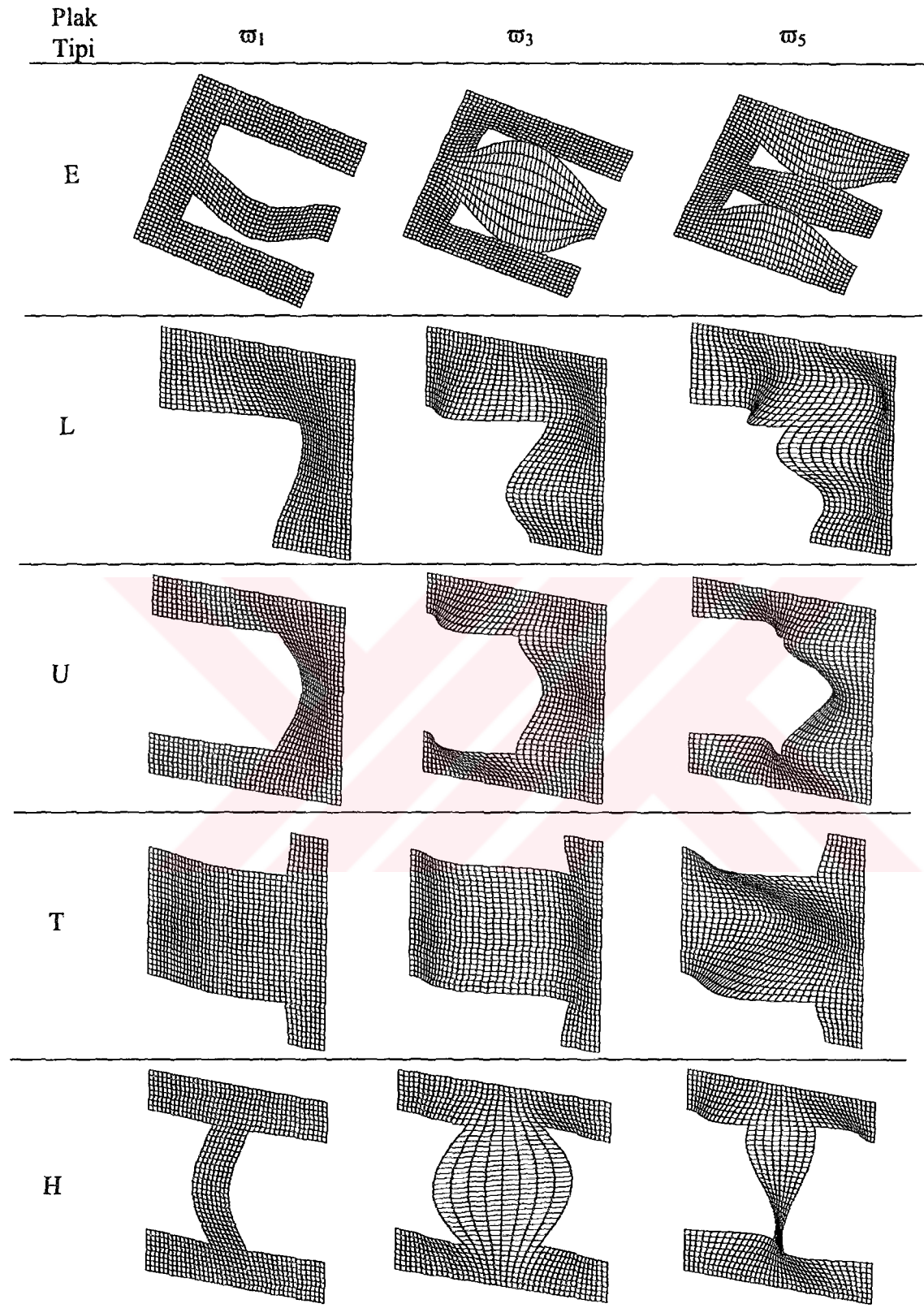


Şekil 4.21 H plaka

Çizelge 4.23 H plakanın frekans parametreleri ($\varpi = \omega L^2 \sqrt{\rho h / D}$)

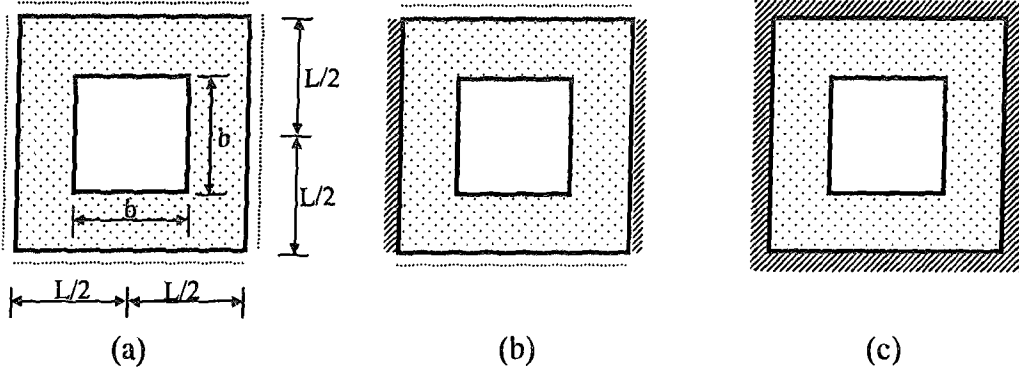
L_1/L	L_2/L	Metod	ϖ_1	ϖ_2	ϖ_3	ϖ_4	ϖ_5
B-B-B-B							
		Avalos,2003	19.332	46.972	47.058	74.066	-
1/5	1/5	ANSYS	19.2921	46.7362	46.9650	73.8470	95.3230
		DQEM	19.3105	46.8045	46.9950	73.9171	95.4001
	2/5	ANSYS	18.8329	39.9992	50.0122	60.3681	90.9887
		DQEM	18.8540	40.1334	50.0600	60.5618	91.1198
3/5	1/5	ANSYS	15.7274	34.0028	44.7418	69.4631	83.4941
		DQEM	15.7680	34.1397	44.7724	69.5668	83.6828
	2/5	ANSYS	17.3946	41.0405	65.3273	74.2028	80.2772
		DQEM	17.4316	41.0860	65.4746	74.4610	80.4792
A-A-A-A							
1/5	1/5	ANSYS	33.6132	66.6189	71.5633	103.934	121.069
		DQEM	33.6244	66.7141	71.5742	103.956	121.300
	2/5	ANSYS	34.4423	63.2895	74.3779	89.3074	121.717
		DQEM	34.4620	63.4374	74.4364	89.5539	121.922
3/5	1/5	ANSYS	25.6055	41.2564	66.6587	89.7175	90.2343
		DQEM	25.6449	41.4167	66.6979	89.9537	90.3867
	2/5	ANSYS	29.0864	69.9594	88.0618	117.236	133.054
		DQEM	29.1621	70.0102	88.4528	117.355	133.238

Şekil 4.17-21'de görülen şekiller için, elde edilen üç modun görüntüleri Şekil 4.22'de verilmiştir. Şekil 4.22'de yer alan mod şekilleri her kesilmiş plaka için yalnızca bir adet seçilmiştir. E biçimdeki plaka için $L_1/L=0.2$, L biçimdeki plaka için $L_1/L=0.2$, U biçimdeki plaka için $L_1/L=0.4$ ve $L_2/L=0.2$, T biçimdeki plaka için $L_1/L=0.6$ ve $L_2/L=0.2$, H biçimdeki plaka için $L_1/L=0.6$ ve $L_2/L=0.6$ durumları ele alınmıştır.



Şekil 4.22 Değişik şekillerde kesilmiş plakaların mod şekilleri

4.3.6 Ortası açık plakalar



Şekil 4.23 Ortası açık plaka

Plakalar üzerindeki değişik çalışmalardan biri de ortasında değişik tipte boşluklar bulunan plakalardır. Özellikle kolay tanımlanabilmesi diğer kesik plakalara göre kolaylığı bakımından tercih edilmiştir. Bu çalışmalarda Nallim, Rayleigh-Ritz ve Rayleigh-Schmidt metodunu, Laura Rayleigh-Ritz metodunu, Sakiyama Green fonksiyonunu, Liew, Ritz ayırıştırma metodunu, Sheikh sonlu elemanlar metodunu kullanmıştır. Aynı zaman da Laura ve Sakiyama'nın aynı çalışmalarında, karşılaştırmak için kullandığı diğer metodlarla, Ansys ve DQEM kullanarak elde edilen çözüm değerleri Çizelge 4.24'te verilmiştir (Laura, 1997; Liew, 2003; Nallim, 2001; Sakiyama, 2003; Sheikh, 2002).

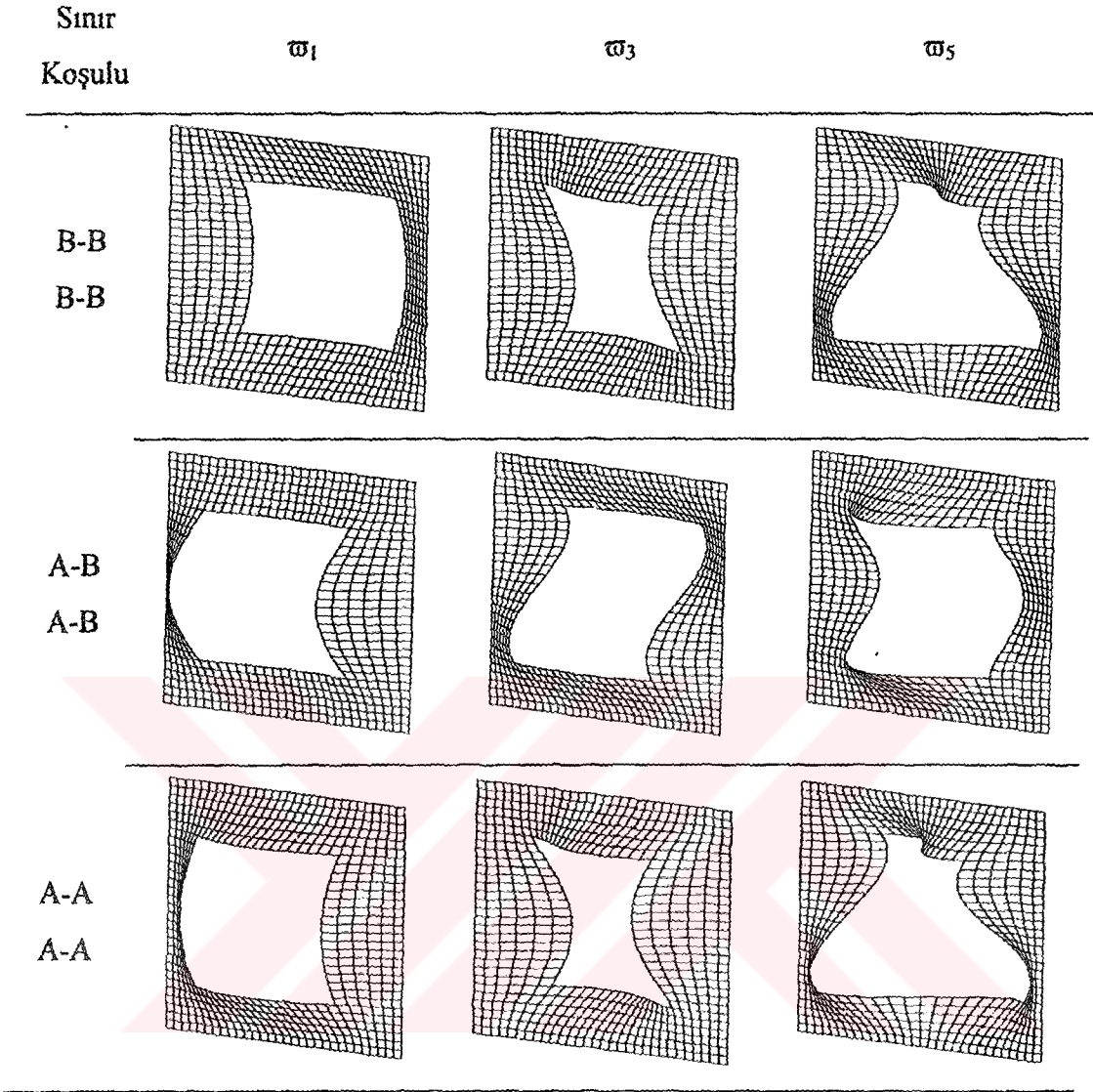
Bu tip plakaların problemlerinde de DQEM oldukça kolay uygulanabilir. Ortasındaki boşluğun boya oranı üç değişik şekilde ele alınarak çözümler yapıldı. Değişik çalışmalarda kullanılan, Şekil 4.23 a, b ve c'de görüldüğü gibi üç değişik mesnetlenme tipindeki şekiller, Ansys, 4x4 ve 5x5 Quadrature elemanı kullanılarak çözüldü. DQEM ile yapılan çalışmada hesaplanan frekans parametreleri ile gerek Ansys çözümleri gerekse diğer referans değerleri büyük uyum içindedir. Elde edilen üç değişik mesnet yapısı için mod şekilleri Şekil 4.24'te verilmiştir. Burada yer alan mod şekilleri için $b/L=0.6$ oranı seçilmiştir.

Çizelge 4.24 Ortası açık plakada frekans parametreleri ($\omega = \omega L^2 \sqrt{\rho h / D}$)

Şekil	$\frac{b}{L}$	Yöntem	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	
(a)	1/5	(Laura,1997)	19.634	-	-	-	-	-	
		(Laura,1997)*	19.147	-	-	-	-	-	
		(Liew,2003)	19.038	47.984	-	76.227	-	-	
		(Sheikh,2002)	19.13	47.67	47.67	76.34	-	-	
		(Nallim,2001)	19.11	47.78	-	76.02	-	-	
		ANSYS	19.120	47.653	47.653	76.350	95.664	103.36	
		DQEM	19.135	47.726	47.726	76.401	95.686	103.43	
	1/2	(Laura,1997)	23.473	-	-	-	-	-	
		(Laura,1997)*	23.841	-	-	-	-	-	
		(Sakiyama,2003)	22.839	42.576	42.602	75.273	85.451	126.00	
		(Sakiyama,2003)**	23.412	41.409	41.474	72.114	78.766	116.75	
		(Liew,2003)	23.441	41.779	-	71.737	-	-	
		ANSYS	23.429	40.138	40.138	71.195	73.294	111.48	
		DQEM	23.465	40.302	40.302	71.283	73.833	111.85	
	3/5	(Liew,2003)	28.526	41.302	-	-	-	-	
		(Sheikh,2002)	28.23	42.39	42.39	-	-	-	
		ANSYS	28.342	42.595	42.595	68.785	75.701	109.27	
		DQEM	28.386	42.734	42.734	69.191	75.801	109.61	
(b)	1/5	(Nallim,2001)	30.21	54.84	-	92.40	-	-	
		ANSYS	29.037	52.780	66.246	91.348	102.77	131.47	
		DQEM	29.047	52.856	66.361	91.378	102.8	131.53	
	1/2	ANSYS	42.294	46.827	70.294	89.299	92.593	124.07	
		DQEM	42.378	47.020	70.414	89.386	93.148	124.55	
	3/5	ANSYS	50.073	50.885	91.426	100.56	108.98	129.38	
		DQEM	50.233	51.075	91.493	100.68	109.27	129.84	
	(c)	1/5	(Nallim,2001)	36.67	69.90	-	104.15	-	-
			ANSYS	36.695	69.860	69.860	104.10	127.03	141.45
DQEM			36.703	69.985	69.985	104.12	127.05	141.53	
1/2		ANSYS	65.343	76.254	76.254	102.58	106.55	144.62	
		DQEM	65.378	76.425	76.425	103.25	106.64	145.11	
3/5		ANSYS	96.297	103.37	103.37	119.02	130.30	157.27	
		DQEM	96.345	103.49	103.49	119.42	130.40	157.66	

(Laura,1997)* aynı çalışmada SEM ile elde ettiği değerlerdir.

(Sakiyama,2003)** aynı çalışmada Richard Extrapolasyonu yöntemi ile elde ettiği değerlerdir.



Şekil 4.24 Ortası açık plakların mod şekilleri

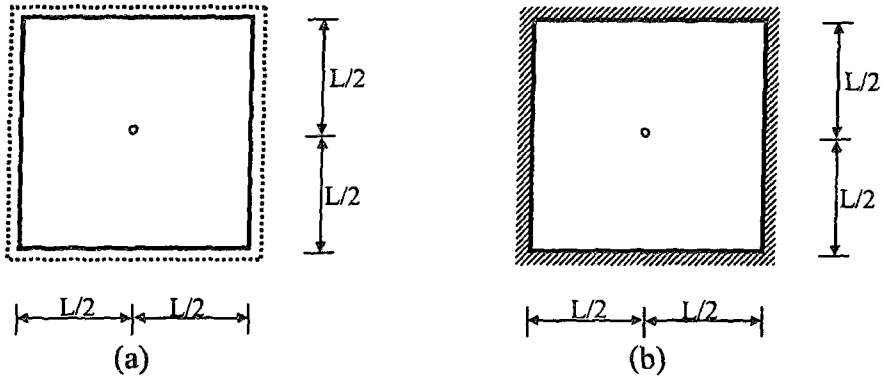
4.3.7 Nokta mesnetli plakalar

Nokta mesnetli plakaların titreşim analizleri bir çok araştırmacı tarafından mühendislik problemi olarak uzun yıllardır incelenmektedir. Yer döşemeleri, köprüler, güneş panelleri ve özellikle gemi ve uçak sanayinde kullanılan plakaların cıvata, perçin ve nokta kaynak birleştirmeleri gibi modern yapı uygulamalarında yapıların dinamik karakteristiklerinin nokta mesnetlerin durumları ile nasıl değiştiğinin bilinmesi gerekir. Bu nedenle bu tip problemler üzerine bir çok nümerik ve analitik çalışmalar yapılmıştır.

Fan ve Cheung spline finite strip metodunu, Guiterez ve Laura diferansiyel quadrature metodunu bir çok nokta mesnetli plak problemleri için kullanmışlardır. Gorman superpozisyon ve Bapat flexibility function yaklaşımları ile plakaların nokta mesnetlenmesi problemlerinde analitik yaklaşımlar kurmuşlardır. Özellikle burada Narita ve Vankateswara'nın kullandığı Rayleigh Ritz yöntemi analitik çalışmalarda yüksek doğruluğu yüzünden en çok başvurulan yöntemlerden biridir. Mizusawa ve Kajita B-spline fonksiyonunu, Kim ve Dickinson, Ortogonal polinom metodunu, Kitipornachi, Lagrange multiplier metodu ve Liew, Constrains fonksiyon metodunu, Lee, Sonlu elemanlar metodunu bu tip plakaların çözümleri için kullanmışlardır (Bapat, 1989; Gorman, 1981; Kim, 1987; Vankateswara, 1973; Lee, 1997; Fan, 1984; Huang, 2001; Kajita, 1987; Guiterez, 1981; Narita, 1984 ; Kitipornchai, 1994; Liew, 1993; Cheung, 1999).

Öncelikle değişik araştırmacılar tarafından yapılan nokta mesnetli plakalar ile ilgili çalışmaların DQEM çözümleri ile direkt olarak karşılaştırılması için daha önce yapılan çalışmalar üzerinde durulmuştur. Böylece DQEM'in daha önceki çalışmalarda nasıl sonuçlar elde edebildiği görülebilecektir. Bunun için Şekil 4.25'te görüldüğü gibi, plakanın ortada noktasında mesnet bulunan her tarafı basit ve ankastre mesnetli kare plakanın çözümleri Çizelge 4.25'te verilmiştir. Değişik çalışmalarda hesaplanan ilk 5 frekans parametresi 2×2 ve 4×4 DQEM plaka elemanı kullanılarak hesaplanan değerler ile beraber verilmiştir.

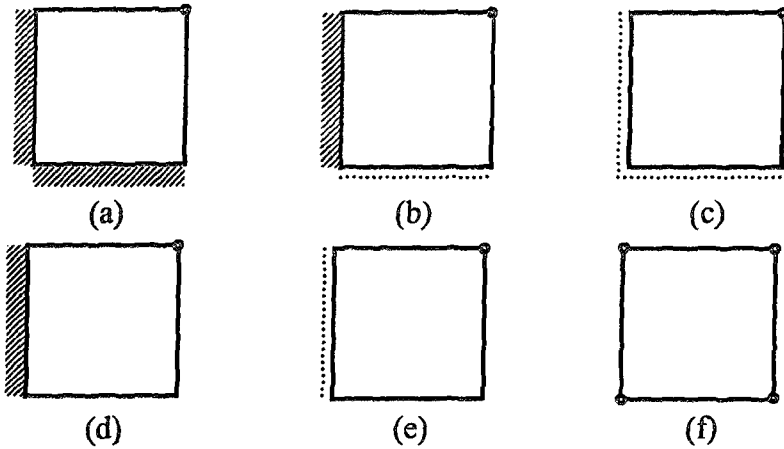
Nokta mesnetli plakalarla ilgili ikinci olarak Şekil 4.26'de görüldüğü gibi köşe noktalarında bir veya birden fazla nokta mesnetin bulunduğu, değişik mesnetlere sahip kare plakaların çözümleri Çizelge 4.26'te sunulmuştur. Bu konuda daha önce yapılmış çalışmalarda elde edilen basit, ankastre ve serbest mesnet varyasyonlarına sahip altı çeşit plaka, bir veya birkaç köşe noktalardan mesnetlenmiş ve elde edilen ilk altı frekans parametresi Çizelge 4.26'de DQEM ve Ansys çözümleri ile beraber verilmiştir. Çizelgede görülen değerlerle DQEM çözümleri büyük uyum göstermektedir.



Şekil 4.25 Ortasında nokta mesnet bulunan kare plakalar

Çizelge 4.25 Ortasında nokta mesnet bulunan ankastre ve basit mesnetli kare plakalarda frekans parametreleri ($\varpi = \omega L^2 \sqrt{\rho h / D}$)

Şekil	Yöntem	ϖ_1	ϖ_2	ϖ_3	ϖ_4	ϖ_5
(a)	(Venkateswara, 1973)	-	-	52.62	-	-
	(Lee ve Lee, 1997)	-	-	53.09	-	-
	(Leissa, 1969)	49.3	-	-	-	-
	(Fan ve Cheung, 1984)	49.35	49.35	52.78	78.96	98.71
	(Kim ve Dickinson, 1987)	49.348	49.348	53.170	78.959	98.696
	(Huang, 2001)	49.348	49.351	52.667	78.959	98.711
	ANSYS	49.328	49.328	52.607	78.908	98.672
	DQEM (2x2)	49.348	49.348	52.851	78.957	98.711
	DQEM (4x4)	49.348	49.348	52.677	78.957	98.696
(b)	ANSYS	73.391	73.391	78.577	108.21	131.57
	DQEM (2x2)	73.397	73.397	78.997	108.23	131.60
	DQEM (4x4)	73.394	73.394	78.678	108.22	131.58



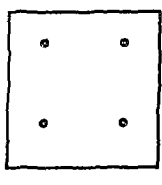
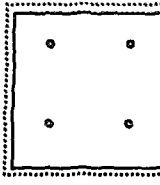
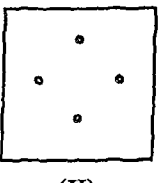
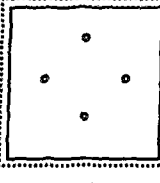
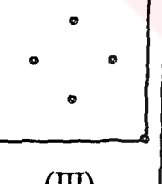
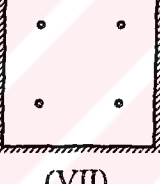
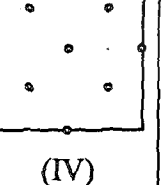
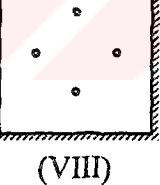
Şekil 4.26 Farklı sınır şartlarında ve farklı noktalarında nokta mesnet bulunan plakalar

Özellikle Huang ve Thambiratnam'ın finite strip element metodu ile Fan ve Cheung'un spline finite strip metodunu kullanarak elde ettikleri, sadece ortasında nokta mesnet bulunan ve her tarafı basit mesnetli kare plaka için çözümleri ile DQEM çözümleri büyük bir benzerlik göstermektedir.

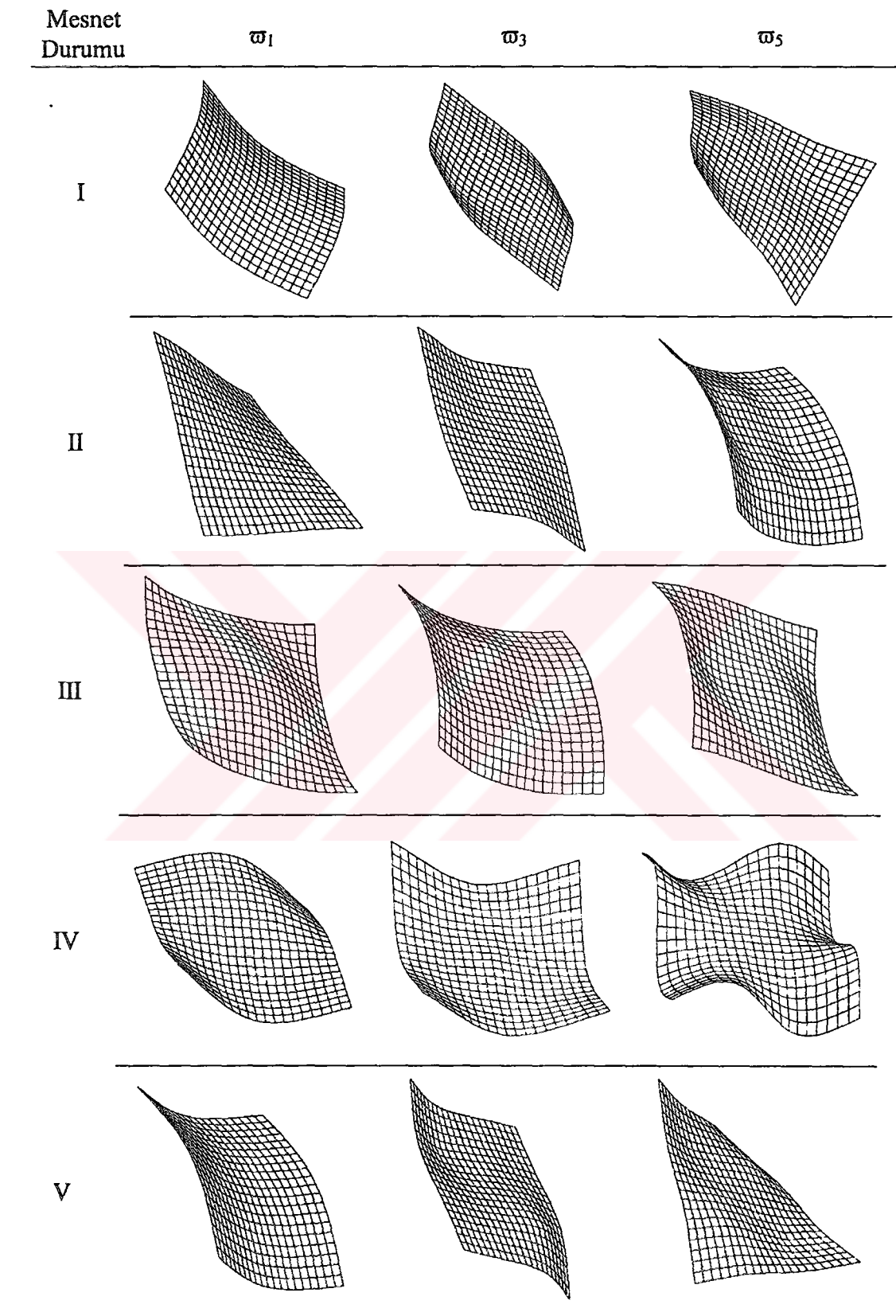
Çizelge 4.26 Farklı sınır şartlarında ve noktalarda, nokta mesnetli kare plaka için doğal frekans parametreleri $\omega = \omega L^2 \sqrt{\rho h / D}$

Şekil	Yöntem	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
	(Cheung,1999)	15.272	24.100	39.495	54.703	63.511	77.688
	(Mizusawa, 1987)	15.12	23.70	39.37	53.53	62.54	-
	(Kim,1987)	15.172	23.923	39.392	54.157	62.850	77.418
	ANSYS	15.158	23.892	39.365	54.056	62.677	77.278
	DQEM (2x2)	15.169	23.915	39.389	54.112	62.718	77.326
	DQEM (4x4)	15.166	23.906	39.388	54.094	62.708	77.322
	(b)	(Cheung,1999)	12.021	21.348	35.140	47.916	58.903
(Mizusawa, 1987)		11.94	21.06	35.01	47.24	57.92	-
(Kim,1987)		11.940	21.175	35.015	47.398	58.144	70.827
ANSYS		11.932	21.155	34.990	47.356	58.039	70.715
DQEM (2x2)		11.939	21.172	35.014	47.393	58.076	70.767
DQEM (4x4)		11.939	21.167	35.014	47.388	58.069	70.762
(c)		(Cheung,1999)	9.6801	17.496	30.713	44.178	51.873
	(Mizusawa, 1987)	9.608	17.32	30.60	43.65	51.04	-
	(Kim,1987)	9.6079	17.316	30.596	43.652	51.041	64.364
	ANSYS	9.6020	17.305	30.571	43.621	51.012	64.296
	DQEM (2x2)	9.6079	17.316	30.596	43.652	51.036	64.345
	DQEM (4x4)	9.6079	17.316	30.596	43.652	51.035	64.344
	(d)	(Cheung,1999)	5.3351	16.054	22.000	29.536	43.894
(Mizusawa, 1987)		5.312	15.86	21.71	29.29	43.39	-
ANSYS		5.3241	15.903	21.801	29.384	43.458	57.088
DQEM (2x2)		5.3277	15.915	21.817	29.407	43.497	57.146
DQEM (4x4)		5.3267	15.912	21.812	29.403	43.494	57.133
(e)	(Cheung,1999)	3.3395	12.033	17.419	25.886	38.982	48.989
	(Mizusawa, 1987)	3.336	11.93	17.29	25.68	38.56	-
	ANSYS	3.3332	11.920	17.281	25.662	38.523	48.441
	DQEM (2x2)	3.3361	11.927	17.293	25.680	38.555	48.473
	DQEM (4x4)	3.3361	11.927	17.293	25.679	38.555	48.472
(f)	(Cheung,1999)	7.136	15.800	15.805	19.710	38.710	44.300
	(Mizusawa, 1987)	7.111	15.77	15.77	19.60	38.43	-
	(Narita, 2004)	7.112	15.77	15.77	19.60	-	-
	ANSYS	7.1075	15.753	15.753	19.589	38.397	77.931
	DQEM (2x2)	7.1109	15.770	15.770	19.596	38.432	44.370
	DQEM (4x4)	7.1109	15.770	15.770	19.596	38.432	44.370

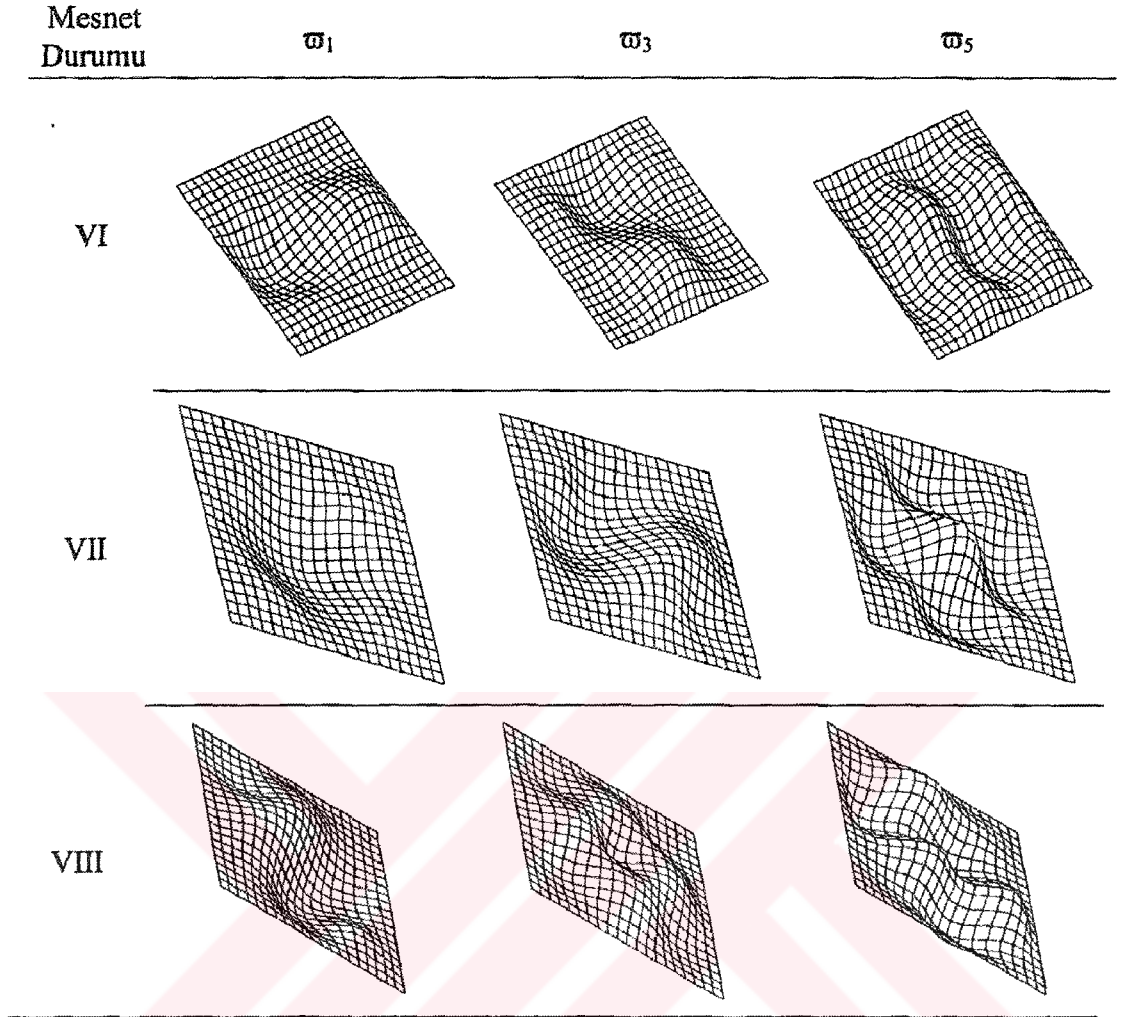
Çizelge 4.27 Nokta mesnetli plakalar için doğal frekans parametreleri $\omega = \omega L^2 \sqrt{\rho h / D}$

Mesnetlerin Durumu	Mod	ANSYS	DQEM	Mesnetlerin Durumu	Mod	ANSYS	DQEM
 (I)	ω_1	19.589	19.596	 (V)	ω_1	52.613	52.677
	ω_2	23.370	23.378		ω_2	91.168	91.269
	ω_3	32.560	32.597		ω_3	91.168	91.269
	ω_4	32.560	32.597		ω_4	98.672	98.696
	ω_5	34.960	35.013		ω_5	146.65	146.83
 (II)	ω_1	13.459	13.468	 (VI)	ω_1	78.907	78.957
	ω_2	17.024	17.030		ω_2	91.143	91.269
	ω_3	18.268	18.284		ω_3	91.143	91.269
	ω_4	18.268	18.284		ω_4	98.672	98.696
	ω_5	39.148	39.215		ω_5	104.53	104.81
 (III)	ω_1	36.909	36.963	 (VII)	ω_1	55.128	55.185
	ω_2	38.397	38.432		ω_2	105.48	105.57
	ω_3	39.147	39.215		ω_3	105.48	105.57
	ω_4	39.797	39.870		ω_4	131.57	131.58
	ω_5	39.797	39.870		ω_5	180.35	180.50
 (IV)	ω_1	32.996	33.031	 (VIII)	ω_1	104.37	104.58
	ω_2	32.996	33.031		ω_2	108.21	108.22
	ω_3	34.544	34.588		ω_3	121.15	121.28
	ω_4	34.960	35.013		ω_4	121.15	121.28
	ω_5	69.188	69.265		ω_5	141.98	142.09

Ortasında nokta mesnet bulunan plakalar gerçekte çok değişik sınır koşulları altında da bulunabilirler. Çizelge 4.27’de örnek olarak seçilmiş değişik sınır koşulları varyasyonlarında ortasında nokta mesnet bulunan plaka çözümleri yer almaktadır. Çizelgede, içinde ve dışında bir veya birden fazla nokta mesnet bulunan, değişik mesnetli plakalar için DQEM çözümleri ile Ansys çözümleri bulunmaktadır. Verilen değerler 4x4 plaka elemanı ile çözümlerdir ve noktalar arasındaki uzunluklar L/4’tür. İlk 5 frekans parametresi şekilleri ile beraber verilmiştir. DQEM çözümleri karşılaştırıldığında değerlerin birbirlerine çok yakın olduğu görülebilir. Burada elde edilen modlar için elde edilen şekilleri Şekil 4.27 verilmiştir.



Şekil 4.27 Nokta mesnetli plakaların mod şekilleri



Şekil 4.27 Nokta mesnetli plakaların mod şekilleri (Devam)

5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Diferansiyel Quadrature Metotlarının değişik versiyonları özellikle 2001 sonrası oldukça çoğalmış, değişik eklentiler ve matris düzenlemeleriyle problemleri giderilmiş, hemen her çeşit mühendislik problemde kullanılabilirliği sağlanmış, çözüme yakınsaması hızlandırılmış ve doğruluğu oldukça artırılmıştır. Özellikle element metoduna benzer değişik versiyonlarının geliştirilmesi ile her türlü şekillerin

oluşturulabilmesi, fiziksel büyüklüklerin kolaylıkla matris sistemine yerleştirilebilmesi, iç veya sınır bölgelerinde istenilen noktasal veya çizgisel mesnetleme koşulların kolayca sağlanabilmesi, sonlu elemanlar analizi sistemlerine benzetilmesi ile hem daha çok kullanıcının dikkatini çekmiş, hem de daha çok uygulama alanı bulmuştur.

Yaptığımız çalışmalarda örneğin, kesik plakalar için ortalama %0.15, nokta mesnetlenmiş plakalarda ortalama %0.1, farklı kalınlıktaki plakalarda ortalama %0.07 fark gözlenmiş olması ve bu değerlerin hesaplanması için ANSYS programında yaklaşık 41000 serbestlik derecesinin kullanılması, bunun yanı sıra DQE Metodunda ise yalnızca 324 serbestlik derecesinin kullanılması da oldukça ilgi çekicidir. Bununla beraber hybrid şeması kullanarak yalnızca bir elemanla dahi kabul edilebilen doğrulukta çözüm değerlerinin yakalanması da, metodun oldukça iyi ve güvenilir olduğunun göstergesidir.

Her türlü dikdörtgenel şeklin kolayca elde edilebilmesi için küçük data dosyalarının kullanılabilmesi, programlanmasının oldukça kolay olması, daha küçük eleman sayısında daha doğru değerlerin elde edilebilmesi, bilgisayarda daha az kapasite ve zaman harcanması, sayısal analiz metodları için oldukça iyi bir alternatif olduğunu göstermektedir.

Benzer mühendislik problemlerinde öncelikle düşünülmesi gereken metodlardan biridir. Hem yapısal analizde hem de özellikle plakaların titreşim analizinde hızlı ve güvenilir çözümleri ile vazgeçilmez bir alternatif metottur.

6. KAYNAKLAR DİZİNİ

- Avalos D.R., Larrondo H.A., Laura P.A.A., 1999, Analysis of vibrating rectangular anisotropic plates with free-edge holes, *Journal of Sound and Vibration*, 222, 691–695.
- Avalos D.R., Laura P.A.A., 2003, Transverse vibration of simply supported rectangular plates with two rectangular cutouts, *Journal of Sound and Vibration*, 267, 967-977
- Bapat A.V. and Suryanarayan S., 1990, Importance of satisfaction of point support compatibility conditions in the simulation of point supports by the flexibility function approach *Journal of Sound and Vibration*, 137(2), 191-207
- Bapat, A.V., Suryanarayan, S., 1989. Free vibrations of rectangular plates with interior point supports. *Journal of Sound and Vibration* 134 (2), 291–313.
- Bellman R., Casti J., 1971, Differential quadrature and long-term integration., *J. Math. Anal. Appl.*,34, 235-238
- Bellman R., Kashef B.G., Casti J., 1972, Differential Quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equation, *Journal of Computer Physics*, 10, 40-50
- Bert C.W., 1984, Improved technique for estimating buckling loads, *J. Eng. Mech.*, 110, 1655-1665
- Bert C.W., Jang S.K., Striz A.G.,1987. Two new approximate methods for analyzing free vibration of structural components. *AIAA Journal*,26(5), 612-618
- Bert C.W., Newberry A.L., 1983, Improved finite element analysis of beam vibration, *Journal of Sound and Vibration*, 105,179-183

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

- Bhat R.B., 1984, Obtaining natural frequency of elastic system by using an improved strain energy formulation in the Rayleigh-Ritz method, *Journal of Sound and Vibration*, 93, 314-320
- Chen W., Wang X. and Zhong T., 1996, The structure of weighting coefficient matrices of harmonic differential quadrature and its application, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 12, 455-460 .
- Chen W.L., Striz A.G., Bert C.W., 2000, High-accuracy plane stress and plate elements in the quadrature element method. *International Journal of Solids and Structures*, 37, 627-647
- Chen W.L., 1994, A new approach for structural analysis: The quadrature element method, A Bell and Howell Comp.
- Cheung Y. K., Au F.T.K. and Zheng D.Y., 2000, Finite strip method for the free vibration and buckling analysis of plates with abrupt changes in thickness and complex support conditions, *Thin-Walled Structures*, 36(2), 89-110
- Cheung Y.K., Zhou D., 1999, The free vibrations of rectangular composite plates with point-supports using static beam functions, *Composite Structures*, 44, 145-154
- Chopra I., 1974, Vibration of stepped thickness plates, *International Journal of Mechanical Science*, 16, 337-344
- Civalek Ö., 2003, Application of differential quadrature and harmonic quadrature for buckling analysis of thin isotropic plates and elastic columns. *Engineering Structures*, 26, 171-186
- Du M.K., Lim K., Lin M., 1994, Application of generalized differential quadrature method to structural problems, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 37, 1881-1896,

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

- Fan S.C., Cheung Y.K., 1984, Flexural free vibrations of rectangular plates with complex support conditions, *Journal of Sound and Vibration*, 93, 81-94.
- Gorman, D.J., 1981, An analytical solution for the free vibration analysis of rectangular plates resting on symmetrically distributed point supports. *Journal of Sound and Vibration* 79, 561-574.
- Gorman D.J., 1984, An exact analytical approach to the free vibration analysis of rectangular plates with mixed boundary conditions, *Journal of Sound and Vibration* 93, 235-247.
- Grossi R.O, 2001, On the existence of weak solution in the study of anisotropic plates, *Journal of Sound and Vibration*, 242(3), 542-552
- Grossi R.O., Lebedev L., 2001, Static and dynamic analysis of anisotropic plates with corner points, *Journal of Sound and Vibration*, 243(5), 947-958
- Gutierrez RH, Laura PAA. Analysis of vibrating, thin, rectangular plates with point-supports by the method of differential quadrature. *Ocean Engineering* 1995;22;101-103.
- Guo S. J, Keane A. J. and Moshrefi-Torbati M., 1997, Vibration analysis of stepped thickness plates, *Journal of Sound and Vibration*, 204(4), 645-657
- Huang M.H., Thambiratnam D.P., 2001, Free vibration analysis of rectangular plates on elastic intermediate supports, *Journal of Sound and Vibration*, 240(3), 567-580.
- Jang S.K., Bert C.W., Srtiz A., 1989, Application of differential quadrature to static analysis of structural component, *Int. J. For Numerical Methods in Eng.*, 28, 561-567
- Keer L. M., Stahl B., 1972, Eigenvalue problems of rectangular plates with mixed edge conditions. *Journal of Applied Mechanics*, 39, 513-520.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

- Kim C. S. and Dickinson S. M., 1987, The flexural vibration of rectangular plates with point supports, *Journal of Sound and Vibration*, 117, 249-261
- Kitipornchai, S., Xiang, Y., Liew, K.M., 1994. Vibration of analysis of corner supported Mindlin plates of arbitrary shape using the Lagrange multiplier method. *Journal of Sound and Vibration* 173, 457-470
- Larrondo H.A., Avalos D.R., Laura P.A.A. and Rossi R., 2001 Vibrations of simply supported rectangular plates with varying thickness and same aspect ratio cutouts, *Journal of Sound and Vibration*, 244(4) 738-745
- Laura P.A.A, Avalos D.R., Larrondo H.A., Rossi R.E., 1998, Numerical experiments on the Rayleigh-Ritz method when applied to doubly connected plates in the case of free edge holes., *Ocean Eng.* 25(7),585-589
- Laura P.A.A., Gutierrez R. H., 1994, Analysis of vibrating rectangular plates with non-uniform boundary conditions by using the differential quadrature method , *Journal of Sound and Vibration*, 173, 702-706.
- Laura P.A.A., Romanelli E., Rossi R.E., 1987, Transverse vibrations of simply supported rectangular plates with rectangular cut-outs. *Journal of Sound and Vibration*, 202(2), 275-283.
- Lee L.T., Lee D.C., 1997, Free vibration of rectangular plates on elastic point supports with the application of a new type of admissible function, *Computers and Structures*, 65, 149-156
- Lee H.P. and Lee K.H. ,1995, Free vibration of plates with stepped variations in thickness on non-homogeneous elastic foundations, 183(3),533-545
- Leissa, A. W., 1969, *Vibration of plates*, Nasa Sp160, U.S. Government Printing Office.
- Leissa, A. W., 1973, The free vibration of rectangular plates, *J. Sound and Vibration*, 31, 3, 257-293

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

- Liew K.M., Hung K.C. , Lam K.Y., 1993, On the use of substructure method for vibration analysis of rectangular plates with discontinuous boundary conditions, *Journal of Sound and Vibration*, 163, 451-462.
- Liew K.M., Kitopornchai S., Leung A.Y.T., Lim C. W., 2003, Analysis of the vibration of rectangular plates with central cut-outs using the discrete Ritz method, *Int., Journal of Mechanical Science* ,45,941-959.
- Liu F.L. and Liew K. M., 1999, Analysis of vibrating thick rectangular plates with mixed boundary constraints using differential quadrature element method, *Journal of Sound and Vibration*, 225(5), 915-934
- Liu F.L., Liew K. M., 1998, Static analysis of Reissner-Mindlin plates by differential quadrature element method, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 65, 705-710.
- Malhotra S. K., Ganesan N.and. Veluswami M. A.,1987, Vibrations of orthotropic square plates having variable thickness (parabolic variation)., *Journal of Sound and Vibration*, (1)119,22, 184-188.
- Malik M.,Bert C. W., 1996, implementing multiple boundary conditions in the DQ solution of higher-order PDE's: Application to free vibration of plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39, 1237-1258.
- Mizusawa T., Kajita T., 1987, Vibration of skew plates resting on point supports, *Journal of Sound and Vibration*, 115, 243-251
- Mizusawa T., Leonard J.W., 1990, Vibration and buckling of plates with mixed boundary conditions, *Engineering Structures*, 12, 285-90.
- Naadimuthu G., R. Bellmann, Wang K.M., Lee E. S., 1984 ,Differential quadrature and partial differential equations: Some numerical results, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 98, 220-235

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

- Nallim L.G., Grossi R.O., 2001, Natural frequencies of edge restrained tapered isotropic and orthotropic rectangular plates with a central free hole, *Applied Acoustics*, 62, 289-305
- Narita Y. and Hodgkinson J.M., 2004, Layerwise optimization for maximizing the fundamental frequencies of point-supported rectangular laminated composite plates, *Composite Structures*, 69(2), 127-135
- Narita, Y., 1981, Application of a series-type method to vibration of orthotropic rectangular plates with mixed boundary conditions, *J. of Sound and Vibration*, 72, 345-355
- Ota T., Hamada M., 1969, Fundamental frequencies of simply supported but partially clamped square plates, *Bulletin of the Japanese Society of Mechanical Engineering*, 6, 397-403.
- Quan, J.R., Chang, C.T., 1989. New insights in solving distributed system equations by the quadrature method -I *Analysis Computers Chem. Eng.* 13, 7, 779-788.
- Rossi R. E., 1999, Transverse vibrations of thin, orthotropic rectangular plates with rectangular cutouts with fixed boundaries, *Journal of Sound and Vibration*, 221(4), 733-736.
- Sakiyama T., Huang M., Matsuda H., Morita C., 2003, Free vibration of orthotropic square plates with square hole, *Journal of Sound and Vibration*, 259(1), 63-80.
- Sakiyama T., Matsuda H., 1987, Free vibration of rectangular Mindlin plates, *Journal of Sound and Vibration*, 113(1), 208-214.
- Schmidt R., 1981, A variant of Rayleigh-Ritz method, *Journal of the Industrial Mathematics Society*, 31, 37-46.
- Schmidt R., 1983, Technique for estimating natural frequency, *Journal of Eng. Mech.* 109, 654-657.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

- Sheikh A.H., Haldar S., and Sengupta D., 2002, Vibration of plates in different situations using a high-precision shear deformable element, *Journal of Sound and Vibration*, 253(2), 329-345.
- Shu C. and Wang C.M., 1999, Treatment of mixed and nonuniform boundary conditions in GDQ vibration analysis of rectangular plates, *Engineering Structures*, 21, 125-134.
- Shu C., Richards B.E., 1990, High resolution of natural convection in a square cavity by generalized differential Quadrature., *proc. 3rd. Int. conf. on advances in numerical methods in eng., theory and applications.*, 11, Swansea , UK., 978-985.
- Shu C., Richards B.E., 1992, Application of generalized differential quadrature to solve two-dimensional incompressible Navier-Stokes equation, *Int. J. Num. Math. Fluids*, 15, 791-798.
- Shu C., Xue H., 1997, Explicit computation of weighting coefficient in the harmonic quadrature method, *Journal of Sound and Vibration*, 204(3), 549-555.
- Striz A.G., Chen, W.L., Bert, C.W., 1994, Static analysis of structures by the quadrature element method. *Int.J.of Solid Structure*, 31, 2807-2818.
- Striz, A.G., Chen W.L., Bert C.W., 1997, Free vibration of plates by the high-accuracy quadrature element method, *J. Sound Vib.*, 202 (5), 689-702.
- Timoshenko S.P., 1964, *Theory of Elastic Stability*.
- Venkateswara R.G., Raju I.S., Murty G.K., 1973, Vibration of rectangular plates with mixed boundary conditions, *Journal of Sound and Vibration*, 30, 257-260
- Wang X., Bert C. W., 1992, A new approach in applying differential quadrature to static and free vibrational analysis of beams and plates, *Journal of Sound and Vibration*, 162 (3), 566-573.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

- Wang X.W., Gu H., 1997, Static analysis of frame structures by the differential quadrature method, *Int. J. for Num. Methods In Eng.* 40, 759-772.
- Wei G.W., Zhaoan Y.B., Xiang Y., 2001, The determination of natural frequencies of rectangular plates with mixed boundary conditions by discrete singular convolution, *International Journal of Mechanical Sciences*, 43, 1731-1746.
- Xiang Y., Wang C.M, 2002, Exact buckling and vibration solutions for stepped rectangular plates, *Journal of Sound and Vibration*, 250, 513-517.
- Yuan J., Dickinson S.M., 1975, The flexural vibration of rectangular plate systems approached by using artificial spring in the Rayleigh-Ritz method, *Journal of Sound and Vibration*, 159(1), 858-864.



ÖZGEÇMİŞ

1965 yılında İstanbul'da doğdu. İlk orta ve lise öğrenimin de aynı şehirde tamamladı. 1982 yılında İstanbul Sultanahmet Endüstri Meslek Lisesinden, 1990 yılında Uludağ Üniversitesi Balıkesir Mühendislik Fakültesinden mezun oldu. Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde 1998 yılında Yüksek Lisansını tamamladı.

2000-2001 yılında Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Makine Mühendisliği Ana Bilim Dalı, Konstrüksiyon-İmalat Bilim Dalında Doktora çalışmalarına başladı.

