FOURIER DÖNÜŞÜMLERİ

VE

KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER

Özcan DÖNMEZER

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

2005

FOURIER TRANSFORMS

AND

PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Özcan DÖNMEZER

Department of Mathematics

Thesis for Master Degree

2005

FOURIER DÖNÜŞÜMLERİ
VE
KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER

Özcan DÖNMEZER

Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Doç Dr. M. Naci Özer

Temmuz 2005

Özcan DÖNMEZER in yüksek lisans tezi olarak hazırladığı

“**FOURIER DÖNÜŞÜMLERİ**
VE KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER”

başlıklı bu çalışma jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye: Doç. Dr. M. Naci ÖZER

Üye: Yrd. Doç. Dr. Bülent SAKA

Üye: Yrd. Doç. Dr. Filiz TAŞCAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu′ nun .... gün ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU
Enstitü Müdürü

ÖZET

Fourier in yapmış olduğu çalışmalar, uygulamalı matematik alanında önemli bir yer tutar. Fourier serileri, adi ve kısmi türevli denklemleri içeren problemlerin çözümünde, elektromagnetik teorisinde, akustikte, ısı akımında, mate- matik ve fiziğin bir çok alanında kullanılmaktadır.

Bugün uygulamalı Matematik, Fizik ve Mühendislik problemlerinde çok kullanılan bir yöntem de integral dönüşümleridir. Bunların önemli bir bölümünü Fourier dönüşümleri oluşturur. Fourier dönüşümü, integrallerin hesabı, serilerin toplanması, kısmi türevli diferensiyel denklemlerin sınır değer problemlerinin çözümleri gibi modern bilimin uygulamalarında sıkça kullanılmaktadır.

Bu tez çalışmasının 1. bölümünde periyodik fonksiyonların tanımı ve özelikleri, Fourier serileri, Fourier kosinüs ve Fourier sinüs serileri ve kompleks fourier serilerinin tanımları verilmiş ve bunlarla ilgili örnekler çözülmüştür. Ayrıca Mathematica paket programı ile, verilen bir fonksiyonun Fourier katsayıları ve Fourier seri açılımı bulunmuştur

2. bölümde ise, Fourier İntegralinin bulunması, Fourier integralinin komp- leks şekli, tek ve çift fonksiyonlar için Fourier integrali incelenmiştir. Ayrıca Fourier dönüşümlerinin, Fourier sinüs ve Fourier kosinüs dönüşümlerinin tanım ve özellikleri örneklerle açıklanmıştır. Mathematica programı ile de Fourier dönüşümleri yapılmıştır.

Son bölümde, kısmi diferensiyel denklemlerin sınır değer problemlerinin Fourier dönüşümü ile çözümleri bulunmaktadır.

Tezde Mathematica5.0 versiyonu kullanılmıştır. Tezin içeriğinde kullanılan Mathematica hesapları bir disket halinde arka kapaktadır..

SUMMARY

The studies that Fourier had done takes important place in applied mathematics. Fourier series are used in the problems which contain ordinary and partial differential equations, electromagnetic theory, acoustic, heat problems and also most part of mathematics and physics.

In current time, another method which used in applied mathematics and physics is integral transformations. The Fourier transforms are big part of them. Fourier tranforms are being used, frequently in calculation integrals, sum of series, solving boundary value problems of partial differential equations.

In the first chapter of this thesis study, description and properties of periodic functions, Fourier series, Fourier cosinüs and Fourier sinüs series and description of complex Fourier series are given and examples about these are solved. Furthermore, Fourier coefficients and Fourier series expansions of a function that is given with Mathematica program has been found.

In the second chapter, finding Fourier integrals, complex forms of Fourier integrals, odd and even functions for Fourier integrals are examined. Also, Fourier transforms, Fourier sinüs and Fourier cosinüs transforms, description and properties are explained with examples. And also Fourier transform calculations have been done by Mathematica program.

In the last chapter, boundary value problems have solved by Fourier transforms.

In thesis, Mathematica5.0 has been used. The mathematica calculations which have been used in this thesis were given as a disk at the back front of the material.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarımın her aşamasında bana rehberlik eden, büyük yardımlarını ve desteklerini gördüğüm değerli tez danışmanım;

Doç.Dr.M. Naci ÖZER'e

sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Eskişehir, 2005

Özcan DÖNMEZER

Fourier Serileri

Giriş

Bu bölümde, Fourier serileri hakkında genel bilgilerle bazı temel özellikler verilecek, Fourier katsayılarının bulunması, Fourier sinüs ve kosinüs serileri ve kompleks Fourier serileri incenelecektir. Ayrıca Mathematica paket programı yardımıyla örneklerde verilen fonksiyonların Fourier katsayıları bulunup seri açılımları yapılacaktır.

Fourier serilerine geçmeden önce periyodik fonksiyonları tanımlayarak bazı özelliklerini verelim.

Periyodik Fonksiyonlar

Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunda, her x için,

$$f(x+L) = f(x)$$

eşitliği sağlanıyorsa, $f(x)$ fonksiyonuna periyodik fonksiyon ve L değerine de periyod denir.

Örnek 1.1: $\sin x = \sin(x+2\pi) = \sin(x+4\pi) = \sin(x+6\pi) = \ldots$ olduğundan "$\sin x$" fonksiyonu $k = 1, 2, ..$ için $2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots, 2k\pi$ periyodlarına sahip olan periyodik bir fonksiyondur.

Periyodik Fonksiyonların Bazı Özellikleri

f periyodik bir fonksiyon $f(x+L) = f(x)$ olsun.

1) $$\int_{a-L/2}^{a+L/2} f(x)dx = \int_{-L/2}^{L/2} f(x)dx$$

dir. $a = L/2$ alınısa,

$$\int_{0}^{L} f(x)dx = \int_{-L/2}^{L/2} f(x)dx$$

bulunur.

2) $$\int_{L}^{L+x} f(x)dx = \int_{0}^{x} f(x)dx,$$

3) $g(x) = \int_{0}^{x} f(u)du$ ise $\int_{-L/2}^{L/2} f(x)dx = 0$ olduğunda

$g(x+L) = g(x)$ dir.

4) $\int_{c}^{c+L} f(x)dx = \int_{0}^{L} f(x)dx$ dir.

Fourier Serileri

$2L$ periyodlu bir $f(x)$ fonksiyonunun, Fourier serileri veya Fourier açılımları,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad 1.2.1$$

şeklindeki bir trigonometrik seri ile tanımlanır, a_0, a_n ve b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ Fourier katsayıları olarak adlandırılır.

$f(x)$ fonksiyonu $2L$ periyodlu, $(-L, L)$ aralığında tanımlanmış bir fonksiyon olsun. $f(x)$ fonksiyonunun (1.2.1)şeklinde bir Fourier serisine açılabilmesi için aşağıdaki **Dirichlet şartlarını** sağlaması gerekir:

a) $f(x)$ fonksiyonu, $(-L, L)$ aralığında sürekli veya parçalı süreklidir.

b) $f(x)$ fonksiyonunun bir periyod içindeki maksimum ve minimumları sonlu sayıda olmalıdır ($f'(x)$ türevi parçalı sürekli olabilir).

c) $f(x)$ fonksiyonunun bir periyod aralığındaki mutlak integrali,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx = sonlu < \infty$$

olmalıdır.

Dirichlet Teoremi

$(-\pi,\pi)$ aralığında tanımlanan 2π periyodlu $f(x)$ fonksiyonu , Dirichlet şartlarını sağlıyorsa, $(-\pi,\pi)$ aralığında (1.2.1) Fourier serisine açılabilir ve Fourier serisi,

1) $f(x)$ fonksiyonunun sürekli olduğu noktalarda (aralığın içinde) $f(x)$ fonksiyonuna yakınsak,

2) $f(x)$ fonksiyonunun süreksiz olduğu noktalarda,

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

değerine yakınsak,

3) Aralığın $x = -\pi$, $x = \pi$ uç noktalarında,

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$$

değerine eşit olur.

Böylece $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisi,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad 1.2.2$$

şeklinde gösterilir.

Fourier Katsayılarının Hesaplanması

Bu kısımda Fourier katsayılarını hesaplayacağız.

a_0 Katsayısının Hesabı

(1.2.2) serisinin her iki tarafının $[-\pi,\pi]$ aralığında integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx \\ &= \frac{a_0}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= a_0 \pi\end{aligned}$$

olduğundan, a_0 katsayısı,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad 1.2.3$$

olarak bulunur.

a_n Katsayısının Hesabı

(1.2.2) serisinin her iki tarafını $\cos nx$ ile çarpar ve $[-\pi,\pi]$ aralığında integ- ralini alırsak,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \cos nxdx$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos nxdx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \cos nxdx$$
$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \cos nxdx$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos nxdx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cos nxdx$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx \cos nxdx}_{0}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cos nxdx$$
$$= \frac{a_n}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi}$$
$$= a_n \pi$$

olduğundan, a_n katsayısını,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx \qquad 1.2.4$$

olarak buluruz.

b$_n$ Katsayısının Hesabı

Benzer şekilde, (1.2.2) serisinin her iki tarafını $\sin nx$ ile çarpar ve $[-\pi, \pi]$ aralığında integralini alırsak, b_n katsayısı,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx \qquad 1.2.5$$

olarak bulunur. Böylece (1.2.2) Fourier serisinde, katsayılar $n = 0, 1, 2, \ldots$ için,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \quad , \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx \,, \qquad 1.2.6$$

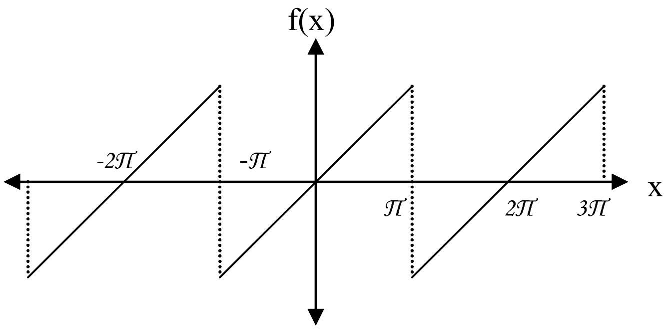
olarak bulunur.

Ayrıca Fourier katsayılarını ve Fourier serisini Mathematica paket programı yardımı ile de bulabiliriz. Fourier katsayıları ve Fourier serisinin bulunması için kullanılan Mathematica komutları şu şekildedir.

FourierCoefficient[expr,x,n]	$x = -\frac{1}{2}$ ile $x = \frac{1}{2}$ aralığında, $\exp r$ periyodik fonksiyonunun üstel seri açılımında n. katsayı

FourierSinCoefficient[expr,x,n]	sinüs seri açılımında n. katsayı
FourierCosCoefficient[expr,x,n]	kosinüs seri açılımında n. katsayı
FourierSeries[expr,x,k]	$x = -\frac{1}{2}$ ile $x = \frac{1}{2}$ aralığında, *expr* periyodik fonksiyonunun k.mertebeden üstel seri açılımı
FourierTrigSeries[expr,x,k]	k.mertebeden trigonometrik seri açılımı
FourierParameters->{a,b}	fonksiyonun periyodu $\sqrt{\frac{\lvert b\rvert}{(2\pi)^{1-a}}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ibux}dx$

Örnek 1.2: *(Şekil 1.1)* de verilen $(-\pi,\pi)$ aralığında tanımlanmış 2π periyodlu $f(x) = x$ fonksiyonunun Fourier serisini bulunuz.



$(Sekil 1.1)$

Çözüm 1.2: Verilen fonksiyon $(-\pi,\pi)$ aralığında sürekli, fakat uç noktalarda süreksizdir. Bu noktalarda $f(x)$ fonksiyonu,

$$f(-\pi) = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0$$

$$f(\pi) = 0$$

değerlerini alır ve Fourier katsayıları,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = 0 \quad , \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nxdx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nxdx = -\frac{2}{n}\cos n\pi = -(-1)^n\frac{2}{n}$$

dir. Böylece, $f(x)$ fonksiyonunun Fourier seri açılımı,

$$f(x) = x = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots\right) \quad , \quad (-\pi < x < \pi)$$

olarak bulunur. $x = \pm\pi$ için seri $f(x)$ fonksiyonunun değerine değil de, $f(x)$ fonksiyonunun sağdan ve soldan aldığı değerlerin aritmetik ortalamasına, yani yukarıda bulduğumuz gibi sıfıra yaklaşır. $x = \pm\pi$ için serinin her terimi sıfırdır. $f(-\pi) = f(\pi) = 0$

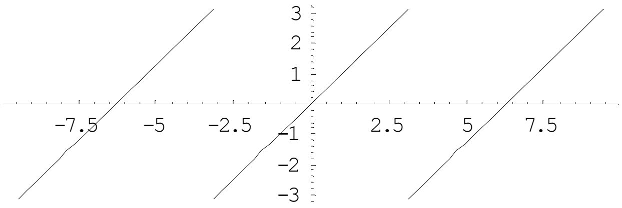
Şimdi $(-\pi,\pi)$ aralığında tanımlanmış 2π periyodlu $f(x) = x$ fonksiyonunun Fourier katsayılarını ve trigonometrik Fourier serisini Mathematica programı ile bulalım.

Önce **<< Calculus‘FourierTransform‘** komut paketi yüklenmelidir.

<< Calculus‘FourierTransform‘

f = x

x
Fonksiyonun grafiğini **Plot** komutu ile çizdirelim.
a1 = Plot[x + 2 Pi, {x, -3 Pi, -Pi}, DisplayFunction -> Identity];
a2 = Plot[x, {x, -Pi, Pi}, DisplayFunction -> Identity];
a3 = Plot[x - 2Pi, {x, Pi, 3Pi}, DisplayFunction -> Identity];
grfk = Show[a1, a2, a3, DisplayFunction -> $DisplayFunction, AspectRatio -> Automatic];



$f(x) = x$ fonksiyonunun ilk katsayılarını **FourierCoefficient, FourierCosCoefficient, FourierSinCoefficient** komutları yardımıyla bulalım.
FourierCoefficient[f, x, 0, FourierParameters -> {0, 1/(2Pi)}]
0
FourierCosCoefficient[f, x, 0, FourierParameters -> {-1, 1/(2Pi)}]
0
FourierCosCoefficient[f, x, 1, FourierParameters -> {-1, 1/(2Pi)}]
0
FourierCosCoefficient[f, x, 2, FourierParameters -> {-1, 1/(2Pi)}]
0
a_n katsayısı,
FourierCosCoefficient[f, x, n, FourierParameters -> {-1, 1/(2Pi)}]
0
dır.
FourierSinCoefficient[f, x, 1, FourierParameters -> {-1, 1/(2Pi)}]
2
FourierSinCoefficient[f, x, 2, FourierParameters -> {-1, 1/(2Pi)}]
-1
b_n katsayısı,
FourierSinCoefficient[f, x, n, FourierParameters -> {-1, 1/(2Pi)}]

$$-\frac{2\,(-1)^n}{n}$$

bulunur. $f(x) = x$ fonksiyonunun trigonometrik Fourier serisini bulabilmek için **FourierTrigSeries** komutunu kullanacağız. Seri açılımının ilk terimi,
FourierTrigSeries[f, x, 0, FourierParameters -> {-1, 1/(2Pi)}]
0
bulunur. İlk iki terim toplamı,
FourierTrigSeries[f, x, 1, FourierParameters -> {-1, 1/(2Pi)}]
2 Sin[x]
şeklindedir. $n = 1, 2, \ldots$ için seri toplamını elde edebiliriz
FourierTrigSeries[f, x, 2, FourierParameters -> {-1, 1/(2Pi)}]
2 Sin[x] - Sin[2 x]
FourierTrigSeries[f, x, 3, FourierParameters -> {-1, 1/(2Pi)}]

$$2\,\mathrm{Sin}[x] - \mathrm{Sin}[2\,x] + \frac{2}{3}\,\mathrm{Sin}[3\,x]$$

Fourier Kosinüs Ve Fourier Sinüs Serileri

Tek Ve Çift Fonksiyonlar

Bir $f(x)$ fonksiyonu $(-a, a)$ aralığında

1. $f(-x) = -f(x)$ ise, $f(x)$ fonksiyonuna tek fonksiyon denir ve

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

dir. Örneğin, $x^3,\ x^3 - 3x^3, \sin x, \tan 3x\ldots$ fonksiyonları tek fonksiyondur.

2. $f(-x) = f(x)$ ise, $f(x)$ fonksiyonuna çift fonksiyon denir ve

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

dir. Örneğin, $x^4,\ 2x^6 + 4x^2 + 5, \cos x, e^x + e^{-x},\ \ldots$ fonksiyonları çift fonksiyondur.

Fourier Kosinüs Serisi

$f(x)$ fonksiyonu çift fonksiyon ise, Fourier katsayıları,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx \quad , \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad , \quad b_n = 0$$

olarak bulunur. Çift fonksiyonun Fourier serisi,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad 1.3.1$$

şeklindedir. Bu seriye Fourier kosinüs serisi denir. Çift fonksiyonun Fourier serisinde yalnız kosinüs terimleri (veya kosinüs terimi olarak alabileceğimiz bir sabit) bulunur.

Fourier Sinüs Serisi

$f(x)$ fonksiyonu tek fonksiyon ise, Fourier katsayıları,

$$a_0 = 0 \quad , \quad a_n = 0 \quad , \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

olarak bulunur. Tek fonksiyonun Fourier serisi,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \qquad 1.3.2$$

şeklindedir. Bu seriye Fourier sinüs serisi denir. Tek fonksiyonun Fourier serisinde yalnız sinüs terimleri bulunur.

Örnek 1.3: $(-\pi, \pi)$ aralığında,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \\ 0, & x = 0, x = \pm\pi \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan 2π periyodlu fonksiyonun Fourier serisini bulunuz.

Çözüm 1.3: $f(-x) = -f(x)$ eşitliği sağlandığından, $f(x)$ fonksiyonu tek fonksiyondur (orijine göre simetrik). Buna göre Fourier serisi,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

şeklinde olmalıdır. Fourier katsayıları,

$$a_0 = 0 \quad , \quad a_n = 0$$

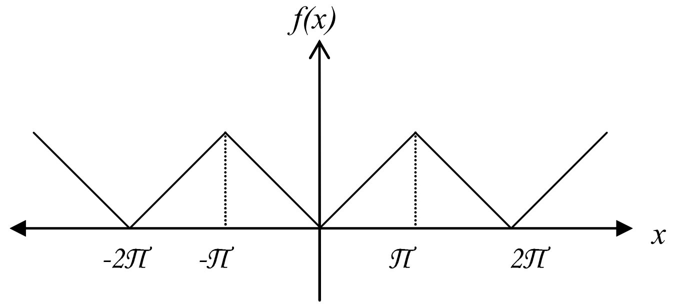
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1.\sin nx dx = \frac{2}{\pi}(1-(-1)^n) = \begin{cases} 0, & n \text{ çift ise} \\ \frac{4}{\pi}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

olarak bulunur. O halde $f(x)$ fonksiyonunun Fourier seri açılımı,

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \ldots\right)$$

bulunur.

Örnek 1.4: *(Şekil 1.2)* de verilen $(-\pi, \pi)$ aralığında tanımlanmış 2π peryodlu $f(x) = |x|$ fonksiyonunun Fourier serisini bulunuz.



$(Sekil\ 1.2)$

Çözüm 1.4: $f(-x) = f(x)$ olduğundan, $f(x)$ fonksiyonu çift fonksiyondur (O_y eksenine göre simetrik). $f(x) = x$ fonksiyonunu $(0, \pi)$ aralığında kosinüs serisine açalım.

$$|x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

olacaktır. Fourier katsayıları,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0, & n \text{ çift ise} \\ \frac{-4}{\pi(2k+1)^2} & n = 2k+1 \\ & k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

olarak hesaplanır. Böylece;

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + \ldots\right)$$

elde edilir. Bu seride $x = 0$ için $f(0) = 0$ olduğundan,

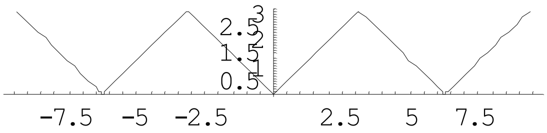
$$\pi^2 = 8\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots\right)$$

eşitliği bulunur.

$f(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizerek, Fourier katsayılarını ve trigonometrik Fourier serisini Mathematica paket programı ile hesaplayalım.

```
<< Calculus`FourierTransform`
f = Abs[x]
Abs[x]
b1 = Plot[Abs[x + 2 Pi], {x, -3 Pi, -Pi}, DisplayFunction -> Identity];
b2 = Plot[Abs[x], {x, -Pi, Pi}, DisplayFunction -> Identity];
```

b3 = Plot[Abs[x - 2 Pi], {x, Pi, 3Pi}, DisplayFunction -> Identity];
grfk = Show[b1, b2, b3, DisplayFunction -> $DisplayFunction, AspectRatio -> Automatic];



Sinüs seri açılımındaki katsayılar sıra ile,
FourierSinCoefficient[f, x, 1, FourierParameters -> {-1, 1/(2Pi)}]
0
FourierSinCoefficient[f, x, 2, FourierParameters -> {-1, 1/(2Pi)}]
0
FourierSinCoefficient[f, x, n, FourierParameters -> {-1, 1/(2Pi)}]
0
şeklindedir. Görüldüğü gibi b_n katsayıları 0 dır. Buradan seri açılımında sinüslü terim olmadığını anlıyoruz. Kosinüs seri açılımındaki katsayılar sıra ile,
FourierCosCoefficient[f, x, 0, FourierParameters -> {-1, 1/(2Pi)}]

$$\frac{\pi}{2}$$

FourierCosCoefficient[f, x, 1, FourierParameters -> {-1, 1/(2Pi)}]

$$-\frac{4}{\pi}$$

FourierCosCoefficient[f, x, 2, FourierParameters -> {-1, 1/(2Pi)}]
0
FourierCosCoefficient[f, x, 3, FourierParameters -> {-1, 1/(2Pi)}]

$$-\frac{4}{9\pi}$$

dır. a_n katsayısı,
FourierCosCoefficient[f, x, n, FourierParameters -> {-1, 1/(2Pi)}]

$$\frac{2\,(-1+(-1)^n)}{n^2\,\pi}$$

olarak bulunur. Trigonometrik Fourier serisinin terim terim toplamı aşağıdaki gibidir.
FourierTrigSeries[f, x, 0, FourierParameters -> {-1, 1/(2Pi)}]

$$\frac{\pi}{2}$$

FourierTrigSeries[f, x, 1, FourierParameters -> {-1, 1/(2Pi)}]

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4\,\mathrm{Cos}[x]}{\pi}$$

FourierTrigSeries[f, x, 2, FourierParameters -> {-1, 1/(2Pi)}]

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4\,\mathrm{Cos}[x]}{\pi}$$

FourierTrigSeries[f, x, 3, FourierParameters -> {-1, 1/(2Pi)}]

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4\,\mathrm{Cos}[x]}{\pi} - \frac{4\,\mathrm{Cos}[3\,x]}{9\,\pi}$$

FourierTrigSeries[f, x, 5, FourierParameters -> {-1, 1/(2Pi)}]

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4\,\mathrm{Cos}[x]}{\pi} - \frac{4\,\mathrm{Cos}[3\,x]}{9\,\pi} - \frac{4\,\mathrm{Cos}[5\,x]}{25\,\pi}$$

Yarım Aralıkta Fourier Sinüs ve Fourier Kosinüs Serileri

Bir yarım aralıkta Fourier sinüs veya kosinüs serisinde sadece sinüs terimleri veya sadece kosinüs terimleri bulunur. Bir fonksiyona yarım aralıkta karşılık gelen Fourier serisi istenirse, fonksiyon genel olarak $(0,\pi)$ aralığında tanımlanır ve tek veya çift olarak sınıflandırılır. Böylece aralığın diğer yarısı olan $(-\pi,0)$ aralığında da tanımlanmış olur. Verilen aralığa göre Fourier katsayılarını bulalım.

I. $(-\pi,\pi)$ aralığında Fourier açılımı için Fourier katsayıları,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx$$

formülleri ile hesaplanır. Eğer $f(x)$ çift fonksiyon ise, yine $(-\pi,\pi)$ aralığında $n = 1,2,\ldots$ için Fourier katsayıları ,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx,$$

$$b_n = 0,$$

olacaktır.

Eğer $f(x)$ tek fonksiyon ise , $(-\pi,\pi)$ aralığında $n = 1,2,\ldots$ için Fourier katsayıları,

$$a_0 = 0,$$

$$a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx,$$

olacaktır.

II. Eğer verilen fonksiyonun $(0,2\pi)$ aralığındaki Fourier seri açılımı isteniyorsa, Fourier katsayıları,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx$$

olarak bulunur.

III. Aralık $(0, 2L)$ olduğu zaman, Fourier katsayılarını bulmak için $\xi = \frac{\pi x}{L}$ değişken değiştirmesi yapılır. Bu durumda $\phi(\xi) = f(x)$ ve $0 \le \xi \le 2\pi$ alınarak,

$$\phi(\xi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\xi + b_n \sin n\xi) \tag{1.3.3}$$

bulunur. Burada,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \phi(\xi).\cos(n\xi).d\xi$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \phi(\xi).\sin(n\xi).d\xi$$

şeklinde tanımlanmaktadır. $\xi = \frac{\pi x}{L}$ ifadesini (1.3.3) denkleminde yerine yazdığımızda, Fourier katsayıları,

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_0^{2L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x).\cos\frac{n\pi x}{L}.dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x).\sin\frac{n\pi x}{L}.dx$$

ve böylece Fourier serisi ,

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

olarak bulunur.

IV. Aralık $(-L, L)$ olduğu zaman, Fourier katsayılarını bulmak için yine $\xi = \frac{\pi x}{L}$ değişken değiştirmesi yapılır. Bu durumda Fourier katsayıları,

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,$$

bulunur. Eğer fonksiyon çift ise, Fourier katsayıları,

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,$$

$$b_n = 0,$$

fonksiyon tek ise, Fourier katsayıları,

$$a_0 = 0,$$

$$a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,$$

olarak bulunur.

V. Aralık $(C, C+2L)$ ise, Fourier katsayıları,

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{C}^{C+2L} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{C}^{C+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{C}^{C+2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 1.5: $(0,\pi)$ aralığındaki $f(x) = x^2$ fonksiyonunun Fourier sinüs ve Fourier kosinüs seri açılımlarını bulunuz.

Çözüm 1.5:

i) $f(x) = x^2$ fonksiyonunun orijine göre simetriğini alarak $(-\pi, 0)$ aralığına uzatırsak, $(-\pi,\pi)$ aralığında 2π periyodlu tek fonksiyon elde etmiş oluruz. Bu fonksiyonun Fourier katsayıları,

$$a_0 = 0\,, \quad a_n = 0\,, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \sin nx dx = \frac{2(-1)^n\pi}{n} + \frac{4[(-1)^n - 1]}{n^3\pi}$$

olduğundan, Fourier sinüs serisi,

$$x^2 = 2\pi\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right) - \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3} - \frac{\sin 3x}{3^3} + \ldots\right)$$

şeklindedir. Görüldüğü gibi $x = 0$, $x = \pi$ de fonksiyonun ve serinin değeri sıfırdır. ($x = \pi$

süreksizlik noktası)

ii) $f(x) = x^2$ fonksiyonunun Oy eksenine göre simetriğini alarak $(-\pi, 0)$ aralığına uzatalım. Fonksiyon çift olduğundan, Fourier kosinüs serisine açılır. Fourier katsayıları,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3} \quad , \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = (-1)^n \frac{4}{n^2} \quad , \quad b_n = 0$$

şeklinde bulunur ve Fourier serisi,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$$

olarak elde edilir. $x = 0$ için serinin toplamı $f(0) = 0$ olduğundan,

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots$$

olarak bulunur.

Kompleks Fourier Serileri

Fourier serisinde, trigonometrik fonksiyonlar yerine üstel kompleks eşlenik fonksiyonları kullanarak seri açılımlarını basitleştirebiliriz.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.4.1}$$

Fourier serisini üstel şekle getirmek için,

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx \tag{1.4.2}$$

$$e^{-inx} = \cos nx - i \sin nx \tag{1.4.3}$$

değerlerini kullanalım. (1.4.2) ve (1.4.3) denklemlerini taraf tarafa toplar ve 2 ile bölersek,

$$\cos nx = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) \tag{1.4.4}$$

elde ederiz. (1.4.2) ve (1.4.3) denklemlerini taraf tarafa çıkarır ve $2i$ ile bölersek,

$$\sin nx = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}) \tag{1.4.5}$$

buluruz. Buradan $\frac{1}{i} = -i$ ifadesini kullanarak,

$$\begin{aligned} a_n \cos nx + b_n \sin x &= \frac{1}{2} a_n (e^{inx} + e^{-inx}) + \frac{1}{2i} b_n (e^{inx} - e^{-inx}) \\ &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx} \end{aligned}$$

buluruz. Burada,

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \text{ ve } c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \tag{1.4.6}$$

yazarsak,

$$a_n \cos nx + b_n \sin x = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece $c_0 = \frac{a_0}{2}$ diyerek, (1.4.1) trigonometrik Fourier serisinin kompleks şekli,

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) \tag{1.4.7}$$

haline gelir. Burada c_n ve c_{-n}, (1.4.6) ile verilen a_n, b_n değerlerine bağlı katsayılardır. Son olarak, (1.4.7) serisi,

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_{-n} e^{inx} \tag{1.4.8}$$

şeklinde yazılarak,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad 1.4.9$$
$$c_n = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

elde edilir. Burada $f(x)$ fonksiyonuna, kompleks Fourier serisi ve c_n ye ise $f(x)$ fonksiyonunun kompleks Fourier katsayısı denir.

2L periyodlu bir fonksiyon için kompleks Fourier serisi ve kompleks Fourier katsayısı,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad 1.4.10$$
$$c_n = \tfrac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-in\pi x/L} dx$$

şeklindedir.

Örnek 1.7: $f(x) = e^x, -\pi < x < \pi$ ve $f(x + 2\pi) = f(x)$ olarak tanımlanan $f(x)$ fonksiyonunun kompleks Fourier serisini bulunuz.

Çözüm 1.7: (1.4.9) formüllerinden kompleks Fourier katsayısı,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 - in} e^{(1-in)x} \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

bulunur. Burada c_n katsayısının pay ve paydasını $1 + in$ le çarpar ve

$$e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n$$

eşitliğini kullanırsak,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \frac{1 + in}{1 + n^2} (-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})$$

buluruz. Son olarak $2\sinh\pi$ ifadesini kullanarak $f(x)$ fonksiyonunun kompleks Fourier serisini,

$$e^x = \frac{\sinh\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + in}{1 + in^2} e^{inx} \qquad (-\pi < x < \pi)$$

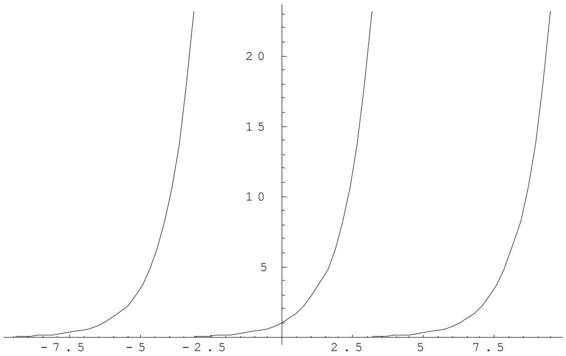
şeklinde elde ederiz.

$f(x)$ fonksiyonunun kompleks Fourier katsayılarını ve üstel Fourier seri açılımını Mathematica paket programı ile bulalım.

<< Calculus‘FourierTransform‘
f = Exp[x]

e^x

c1 = Plot[Exp[x + 2 Pi], {x, -3 Pi, -Pi}, DisplayFunction -> Identity];
c2 = Plot[Exp[x], {x, -Pi, Pi}, DisplayFunction -> Identity];
c3 = Plot[Exp[x - 2Pi], {x, Pi, 3Pi}, DisplayFunction -> Identity];
grfk = Show[c1, c2, c3, DisplayFunction -> $DisplayFunction, AspectRatio -> Automatic];



$n = 0, 1, 2, \ldots$ için kompleks Fourier katsayıları,

FourierCoefficient[f, x, 0, FourierParameters -> {-1, 1/(2Pi)}]

$$\frac{-e^{-\pi} + e^{\pi}}{2\pi}$$

FourierCoefficient[f, x, 1, FourierParameters -> {-1, 1/(2Pi)}]

$$-\frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right) \text{Sinh}[\pi]}{\pi}$$

FourierCoefficient[f, x, 2, FourierParameters -> {-1, 1/(2Pi)}]

$$\frac{\left(\frac{1}{5} - \frac{2i}{5}\right) \text{Sinh}[\pi]}{\pi}$$

FourierCoefficient[f, x, n, FourierParameters -> {-1, 1/(2Pi)}]

$$\frac{(-1)^n \text{Sinh}[\pi]}{(1 + i\, n)\, \pi}$$

şeklinde bulunur. Kompleks Fourier seri açılımını bulabilmek için **FourierSeries** komutunu kullanalım,

FourierSeries[f, x, 0, FourierParameters -> {-1, 1/(2Pi)}]

$$\frac{-e^{-\pi} + e^{\pi}}{2\pi}$$

FourierSeries[f, x, 1, FourierParameters -> {-1, 1/(2Pi)}]

$$\frac{-e^{-\pi} + e^{\pi}}{2\pi} - \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right) e^{-i x} \text{Sinh}[\pi]}{\pi} - \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) e^{i x} \text{Sinh}[\pi]}{\pi}$$

FourierSeries[f, x, 2, FourierParameters -> {-1, 1/(2Pi)}]

$$\frac{-e^{-\pi} + e^{\pi}}{2\pi} - \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right) e^{-i x} \text{Sinh}[\pi]}{\pi} - \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) e^{i x} \text{Sinh}[\pi]}{\pi} + \frac{\left(\frac{1}{5} - \frac{2i}{5}\right) e^{-2 i x} \text{Sinh}[\pi]}{\pi} + \frac{\left(\frac{1}{5} + \right.}{}$$

olarak bulunur.

Örnek 1.8: $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$ (periyod $2L = 2$) fonksiyonunun kompleks Fourier serisini bulunuz.

Çözüm 1.8: Fourier katsayıları,

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_c^{c+2L} f(x)e^{-in\pi x/L}dx$$

$L = 1$ ve $c = 0$ alınarak,

$$c_n = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 (1)e^{-in\pi x}dx + \int_1^2 (0)e^{-in\pi x}dx\right]$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-in\pi x}dx$$
$$= -\frac{1}{2in\pi}\left[e^{-in\pi x}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2in\pi}(1 - e^{-in\pi})$$

bulunur. c_n katsayısı , $n = 0$ için $c_0 = \frac{0}{0}$ şeklinde belirsiz bir ifade vermektedir. Bu bakımdan c_0 değeri için $n = 0$ verilerek yeniden hesaplanırsa,

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2L}\int_c^{c+2L} f(x)dx$$

olup , $L = 1$ ve $c = 0$ için

$$c_0 = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 (1)dx + \int_1^2 (0)dx\right]$$
$$= \frac{1}{2}x\,\Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{2}$$

bulunur. Öyleyse verilen $f(x)$ fonksiyonunun Kompleks Fourier serisi,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2in\pi}(1 - e^{-in\pi})e^{in\pi x}$$

olarak gösterilir veya,

$$e^{-in\pi} = \cos n\pi - i\sin n\pi = (-1)^n$$

eşitliği kullanılırsa,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2in\pi}[1 - (-1)^n]e^{in\pi x}$$

bulunur.($n = 0$ için $e^{in\pi x}$ in katsayısı olarak $c_0 = \frac{1}{2}$ alınacak)

$f(x)$ fonksiyonunun kompleks Fourier katsayılarını ve Fourier serisini Mathematica programı yardımı ile bulalım.

<< Calculus‘FourierTransform‘

f = If[0 < x < 1, 1, 0]

If[0 < x < 1, 1, 0]

FourierCoefficient[f, x, 0, FourierParameters -> {0, 1}]

$\frac{1}{2}$

FourierCoefficient[f, x, 1, FourierParameters -> {0, 1}]

$\frac{i}{\pi}$

FourierCoefficient[f, x, 2, FourierParameters -> {0, 1}]
0
FourierCoefficient[f, x, n, FourierParameters -> {0, 1}]

$$-\frac{i\,(-1+(-1)^n)}{2\,n\,\pi}$$

Fourier serisi,
FourierSeries[f, x, 0, FourierParameters -> {0, 1}]

$\frac{1}{2}$

FourierSeries[f, x, 1, FourierParameters -> {0, 1}]

$$\frac{1}{2}+\frac{i\,e^{-2 i \pi x}}{\pi}-\frac{i\,e^{2 i \pi x}}{\pi}$$

FourierSeries[f, x, 2, FourierParameters -> {0, 1}]

$$\frac{1}{2}+\frac{i\,e^{-2 i \pi x}}{\pi}-\frac{i\,e^{2 i \pi x}}{\pi}$$

şeklinde bulunur.

Fourier İntegralleri Ve Fourier Dönüşümleri

Fourier serileri, Dirichlet koşullarını sağlayan periyodik fonksiyonları içeren çeşitli problemlerin çözümünde güçlü bir araçtır. Birçok mekanik ve elektrik sistemlerde genel periyodik karışıklıklara yanıt bulmayı olanaklı kılar. Diğer yandan, güç ya da voltaj içeren birçok problem (mekanik - elektrik sistemleri v.s.) periyodik değildir. Bu tür fonksiyonlar için Fourier serisini kullanamayız. Fakat verilen bir periyodik fonksiyonun periyodu sonsuza gittiğinde, serinin yaklaştığı limitini (eğer varsa) inceleyerek, periyodik olmayan fonksi- yonların uygun bir gösterimini elde edebiliriz. Bu tür problemleri çözmek için Fourier integralini kullanacağız. Fourier integrali, elektrik kominikas- yonunda, bazı integrallerin hesaplanmasında ve kısmi diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılır. Bu bölümde Fourier integrallerinin bulunması, kompleks Fourier integrali, tek ve çift fonksiyonlar için Fourier integralleri incelenmiştir. Fourier dönüşümlerinin elde edilişine, Fourier sinüs ve kosinüs dönüşümlerine yer verilmiştir. Ayrıca verilen bir fonksiyonun Fourier dönüşümünün bulunmasında Mathematica paket programından da yararlanılmıştır.

Fourier İntegralinin Bulunması

$f(x+L) = f(x)$ fonksiyonunda, $L \to \infty$ için , yani (L peryodu sonsuza giderse) $f(x)$ fonksiyonunun periyodikliği ortadan kalkar. O halde Fourier serisini böyle problemlerin çözümünü içerecek şekilde genişletmeliyiz. Örneğin,

$-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}$ için $f(x) = e^{-|x|}$ ve $f(x+L) = f(x)$ ile tanımlanan L periyodlu fonksiyonda, L periyodu sonsuza giderse, bu fonksiyon periyodik olmaz.

O halde $f(x+L) = f(x)$ periyodik fonksiyonunun

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{2n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{2n\pi x}{L}\right) \qquad 2.1.1$$

Fourier serisini gözönüne alalım. Burada,

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_{C}^{C+L} f(x)dx \tag{2.1.2}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{C}^{C+L} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{L}dx \tag{2.1.3}$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{C}^{C+L} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{L}dx \tag{2.1.4}$$

katsayılarında C yi $-\frac{L}{2}$ alırsak,

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)dx \tag{2.1.5}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{L}dx \tag{2.1.6}$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{L}dx \tag{2.1.7}$$

elde ederiz, $U_n = \frac{2n\pi}{L}$ alır ve a_0, a_n , b_n katsayılarını $f(x)$ fonksiyonunda yerine yazarsak,

$$f(x) = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(v)dv + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos U_n x\int_{-L/2}^{L/2} f(v)\cos U_n v dv \right.$$
$$\left. + \sin U_n x\int_{-L/2}^{L/2} f(v)\sin U_n v dv\right] \tag{2.1.8}$$

buluruz. $U_{n+1} - U_n = \Delta U_n$ dersek, $\Delta U_n = \frac{2\pi}{L}$ yazılır. Böylece istediğimiz formül,

$$f(x) = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(v)dv + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos U_n x\Delta U_n\int_{-L/2}^{L/2} f(v)\cos U_n v dv \right.$$
$$\left. + \sin U_n x\Delta U_n\int_{-L/2}^{L/2} f(v)\sin U_n v dv\right] \tag{2.1.9}$$

şeklinde elde edilir. Bu formül sonlu istenildiği kadar büyük L ler için geçerlidir. L yi sonsuza götürürsek, $f(x)$ fonksiyonunun periyodikliği ortadan kalkar. O halde,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx \text{ integrali varsa (} L \text{ sonsuz için)}$$

$\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(v)dv$ integrali sıfıra gider. Aynı zamanda $\Delta U_n = \frac{2\pi}{L}$ de sıfıra yaklaşacağından (2.1.9) daki integralin sınırları $0 \to \infty$ a olup belirli bir integrali gösterecektir. O halde aradığımız formül,

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\cos ux\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos uv dv + \sin ux\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin uv dv\right]du \tag{2.1.10}$$

şeklinde olur. Burada ,

$$A(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos uv dv \qquad 2.1.11$$

ve

$$B(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin uv dv \qquad 2.1.12$$

alınırsa,

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} [A(u)\cos ux + B(u)\sin ux]du \qquad 2.1.13$$

integrali elde edilir. Bu integrale $f(x)$ fonksiyonunun *Fourier İntegrali* denir.

Fourier İntegralinin Kompleks Şekli

Fourier integralini kompleks formda yazabilmek için (2.1.10),

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\cos ux\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos uv dv + \sin ux\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin uv dv\right]du \qquad 2.2.1$$

has olmayan integralini,

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)[\cos ux\cos uv + \sin ux\sin uv]dvdu \qquad 2.2.2$$

biçiminde çift katlı has olmayan integral şeklinde yazabiliriz. Burada,

$$\cos(ux - uv) = \cos u(x - v) = \cos ux\cos uv + \sin ux\sin uv$$

eşitliğini (2.2.2) denkleminde kullanırsak,

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos u(x - v)dv\right]du \qquad 2.2.3$$

formülünü elde ederiz. Burada $\cos u(x - v)$ u değişkenine göre çift fonksiyon olduğundan ,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos u(x - v)dv\right]du \qquad 2.2.4$$

yazılabilir. Benzer olarak $\sin u(x - v)$ tek fonksiyon olduğundan,

$$f(x) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin u(x - v)dv\right]du = 0 \qquad 2.2.5$$

yazılabilir. (2.2.4) ve (2.2.5) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{iu(x-v)}dv\right]du \qquad 2.2.6$$

elde edilir. Buna $f(x)$ fonksiyonunun Fourier integralinin kompleks şekli denir.

(2.2.6) ya eşdeğer olarak, $e^{iu(x-v)}$ yerine trigonometrik değeri yazılırsa, $f(x)$ fonksiyonunun trigonometrik ifadesi,

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos u(x - v)dv\right]du \qquad 2.2.7$$

şeklinde elde edilir.

Fourier Teoremi

$f(x)$ fonksiyonu, herhangi sonlu bir aralıkta parçalı sürekli, aralığın her noktasında sağdan ve soldan türevlenebilir olsun ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$$

integrali bulunsun. Bu durumda, $f(x)$ fonksiyonu (2.2.7) Fourier İntegrali ile gösterilebilir.

Buna karşılık $f(x)$ fonksiyonunun süreksizlik noktalarında , $f(x)$ fonksi- yonunun (2.2.7) Fourier İntegrali, $f(x)$ fonksiyonunun sağdan ve soldan li- mitlerinin aritmetik ortalamasına yakınsar.

Bu teoremi daha açık şöyle ifade edebiliriz:

$f(x)$ fonksiyonu her sonlu aralıkta Dirichlet şartları sağlıyor ve $(-\infty, \infty)$ aralığında mutlak integrallenebilir bir fonksiyon ise (2.2.7) Fourier integrali, $f(x)$ fonksiyonunun sürekli olduğu her yerde $f(x)$ değerine ve süreksiz olduğu noktalarda ise sağ ve sol limitlerinin aritmetik ortalamasına eşittir. Yani her x için,

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos u(x-v)dvdu$$

eşitliği sağlanır. Bu teoreme *Fourier teoremi* denir.

Örnek 2.1:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ , & |x| < 1 \\ 0 \ , & |x| > 1 \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyonun Fourier İntegralini bulunuz.

Çözüm 2.1: Önce genel formüldeki $A(u)$ ve $B(u)$ değerlerini hesapla- yalım. Bunun için ,

$$A(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos uv dv = \int_{-1}^{1} \cos uv dv = \frac{1}{u}\sin uv \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{u}(\sin u - \sin(-u)) = \frac{1}{u}(\sin u - (-\sin u)) = 2\frac{\sin u}{u}$$

ve benzer olarak,

$$B(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin uv dv = \int_{-1}^{1} \sin uv dv = 0$$

elde edilir. Bu değerler,

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} [A(u)\cos ux + B(u)\sin ux]du$$

formülünde yerine yazılırsa,

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[2\frac{\sin u}{u}\cos ux + 0\sin ux\right]du$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin u \cos ux}{u}du$$

bulunur.

$f(x)$ fonksiyonunun $x = \pm 1$ noktasındaki ortalama değeri,

$$f(1) = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

olur. Böylece *Fourier integrali teoremi*ne göre,

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin u \cos ux}{u}\,du$$

formülünde $f(x)$ fonksiyonunun yukarıdaki değerini yerine yazarsak,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin u \cos ux}{u}\,du = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & , \quad -1 < x < 1 \text{ için} \\ \frac{\pi}{4} & , \quad x = \pm 1 \text{ için} \\ 0 & , \quad x < -1, x > 1 \text{ için} \end{cases}$$

integralinin değeri bulunmuş olur. Bu integrale *Dirichletin Süreksizlik Faktörü* denilmektedir.

Örnek 2.2: Örnek (2.1) i şu şekilde çözülebiliriz. (2.2.7) formülünden,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos u(x-v)\,dv\right]du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-1}^{1} \cos u(x-v)\,dv\right]du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{u}(\sin u(x+1) - \sin u(x-1))\,du \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin u \cos ux}{u}\,du \end{aligned}$$

bulunur. Verilen $f(x)$ fonksiyonunun, $x = \mp 1$ noktasındaki ortalama değeri,

$$f(1) = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

olduğundan Fourier teoremine göre $f(x)$ fonksiyonunun Fourier integralinde aynı sonucu buluruz.

Örnek 2.3: (2.1) örneğinden faydalanarak

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm 2.3: Bunun için, Örnek 2.1. de bulduğumuz,

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin u \cos ux}{u}\,du$$

formülünde, özel olarak $x = 0$ alırsak,

$$f(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$$

buluruz. $f(0)$, $f(x)$ fonksiyonunun tanımından,

$$f(0) = \frac{1+1}{2} = 1$$

dir.O halde aradığımız çözüm,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u}\,du = 1$$

veya

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}du = \frac{\pi}{2}$$

olarak bulunur.

Tek ve Çift Fonksiyonlar İçin Fourier İntegrali

Çift Fonksiyonun Fourier İntegrali

$f(x)$ fonksiyonunun çift olması halinde,

$$A(u) = 2\int_0^\infty f(v)\cos uv dv \qquad 2.4.1$$

ve

$$B(u) = 0 \qquad 2.4.2$$

olur. Buna bağlı olarak Fourier İntegrali de,

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(u)\cos ux dx \qquad 2.4.3$$

olarak bulunur.

Örnek 2.4: $f(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$ fonksiyonunun Fourier integralini hesaplayınız.

Çözüm 2.4: $f(x) = e^{-a|x|} \Rightarrow f(-x) = e^{-a|x|} \Rightarrow f(x) = f(-x)$ olduğundan, fonksiyon çift fonksiyondur. O halde $B(u) = 0$ dır.

$$A(u) = 2\int_0^\infty e^{-av}\cos uv dv$$

ifadesine iki kez kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$A(u) = 2\int_0^\infty e^{-av}\cos uv dv \Rightarrow 2\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-av}\cos uv dv$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{-av} = \zeta \Rightarrow -e^{-av}dv = d\zeta \\ \cos uv du v = dw \Rightarrow w = \frac{1}{u}\sin uv \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-av}\cos uv dv = 2\lim_{t\to\infty}\left[\frac{e^{-av}}{u}\sin uv \Big|_0^t + \frac{a}{u}\int_0^t e^{-av}\sin uv dv\right]$$

II. kısmi integrasyonla ,

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{-av} = \zeta \Rightarrow -e^{-av}dv = d\zeta \\ \sin uv dv = dw \Rightarrow w = -\frac{1}{u}\cos uv \end{cases}$$

$$= 2\lim_{t\to\infty}\left[\frac{e^{-av}}{u}\sin uv - \frac{ae^{-av}}{u^2}\cos uv \Big|_0^t - \frac{a^2}{u^2}\int_0^t \cos uv e^{-av} dv\right]$$

$$2\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-av}\cos uv dv = 2\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{u^2}{u^2+a^2}\left[\frac{e^{-av}}{u}\sin uv - \frac{ae^{-av}\cos uv}{u^2}\right]\right\}\Big|_0^t$$

$$A(u) = \frac{2a}{u^2+a^2}$$

bulunur. Bu değer $f(x)$ fonksiyonunun Fourier integralinde yerine yazılırsa,

$$f(x) = e^{-a|x|} = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos ux}{u^2 + a^2} du$$

elde edilir. Böylece,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ux}{u^2 + a^2} du = \frac{\pi}{2a} e^{-a|x|}$$

integralinin değeri bulunmuş olur.

Tek Fonksiyonların Fourier İntegrali

$f(x)$ fonksiyonunun tek fonksiyon olması halinde,

$$A(u) = 0 \tag{2.4.4}$$

ve

$$B(u) = 2 \int_0^{\infty} f(v) \sin uv dv \tag{2.4.5}$$

olup buna bağlı olarak da $f(x)$ fonksiyonunun Fourier integrali de,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(u) \sin uxdx \tag{2.4.6}$$

olarak bulunur.

Örnek 2.5: Örnek(2.4)teki $f(x) = e^{-ax}$ $\left(x > 0 \text{ için}\right)$ fonksiyonun $f(-x) = -f(x)$ tek fonksiyon olarak tanımlanması halinde,

$$A(u) = 0$$

olur ve

$$B(u) = 2 \int_0^{\infty} e^{-av} \sin uv dv$$

has olmayan integralden iki kez kısmi integrasyon uygulamakla,

$$B(u) = \frac{2u}{u^2 + a^2}$$

bulunur. Bu değer,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(u) \sin uxdu$$

formülünde yerine yazılırsa,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2u}{u^2 + a^2} \sin uxdu$$

elde edilir. Buradan da,

$$\int_0^{\infty} \frac{u \sin ux}{u^2 + a^2} du = \frac{\pi}{2} e^{-ax}$$

integralinin değeri hesaplanmış olur. Burada elde edilen,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ux}{u^2 + a^2} du = \frac{\pi}{2a} e^{-a|x|}$$

ve

$$\int_0^{\infty} \frac{u\ \sin ux}{u^2+a^2}du = \frac{\pi}{2}e^{-ax}$$

integrallerine *Laplace integralleri* denir.

Fourier Dönüşümleri

Fourier dönüşümleri belirli integralin hesabında, serilerin toplanmasında, frekans spektrumun belirlenmesinde (elektrik tekniğinde) ve diferensiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılır. Biz burada sadece serilerin toplanması ve belirli integrallerin hesaplanması üzerinde duracağız. Ayrıca Fourier dönüşümlerinin Mathematica paket programı ile hesabına yer vereceğiz.

Fourier Dönüşümlerinin Bulunması

Fourier integralinin kompleks şekli,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{iu(x-v)}dv\right]du \tag{2.5.1}$$

dir. Bu integrali aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{iux}e^{-iuv}dvdu$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-iuv}dv\right]du \tag{2.5.2}$$

Burada,

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-iuv}dv = \mathcal{F}[f(x)] \tag{2.5.3}$$

şeklinde tanımlanan $F(u)$ fonksiyonuna , $f(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü denir ve bu integral dönüşümü $\mathcal{F}[f(x)]$ ile gösterilir. x değişkeninin tüm reel değerleri için tanımlanan $f(x)$ ana fonksiyonu (orijinal fonksiyon), reel veya kompleks olabilir.

$\mathcal{F}^{-1}[F(u)]$ sembolü ise, ters operatördür.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{iux}du = \mathcal{F}^{-1}[F(u)] \tag{2.5.4}$$

$f(x)$ fonksiyonuna da $F(u)$ fonksiyonunun Ters Fourier Dönüşümü denir. (2.5.3) ve (2.5.4) formüllerine *Fourier dönüşüm çifti* denir.

Örneklere geçmeden önce Mathematica programında Fourier dönüşümü, Fourier sinüs ve Fourier kosinüs dönüşümü ve ters Fourier dönüşümü için kullanılan komutları verelim.

FourierTransform[expr,x,u]	expr nin Fourier dönüşümü
InverseFourierTransform[expr,u,x]	expr nin ters Fourier dönüşümü
FourierSinTransform[expr,x,u]	Fourier sinüs dönüşümü
FourierCosTransform[expr,x,u]	Fourier kosinüs dönüşümü
InverseFourierSinTransform[expr,u,x]	Ters Fourier sinüs dönüşümü
InverseFourierCosTransform[expr,u,x]	Ters Fourier kosinüs dönüşümü

Örnek 2.6: $f(x) = k$ fonksiyonunun $0 < x < a$ ve $f(x) = 0$ iken Fourier dönüşümünü bulunuz.

Çözüm 2.6: (2.5.3) Fourier dönüşümü formülünde, verilen aralıkların kullanırsak,

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a ke^{-iux}dx = \frac{k}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{-iua}-1}{-iu}\right) = \frac{k(1-e^{-iua})}{iu\sqrt{2\pi}}$$

elde ederiz. Bu ise bize Fourier dönüşümünün genelde kompleks değerli bir fonksiyon olacağını gösterir.

Örnek 2.7:

$$P_T(x) = \begin{cases} 1 \ , & |x| < T \\ 0 \ , & |x| > T \end{cases}$$

fonksiyonunda özel olarak $T = 1$ alınarak bulunan,

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ , & |x| < 1 \\ 0 \ , & |x| > 1 \end{cases}$$

fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulunuz.

Çözüm 2.7: (2.5.3) Fourier dönüşümü formülünden,

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-iuv}dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-iuv}dv$$

bulunur ve $e^{-iuv} = \cos uv - i\sin uv$ olduğundan,

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \cos uv dv - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \sin uv dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{u} \sin uv \Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{u} \cos uv \Big|_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin u}{u} - \frac{\sin(-u)}{u} + \frac{i}{u}(\cos u - (\cos(-u)) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin u}{u} + \frac{\sin u}{u} + 0 \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2 \frac{\sin u}{u} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin u}{u} \end{aligned}$$

elde edilir. Özel olarak $u = 0$ alınırsa,

$$F(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

bulunur.

$f(x)$ fonksiyonuna uyguladığımız Fourier dönüşümünü Mathematica paket programi ile de bulalım. Önce fonksiyonu tanımlayalım.

<< Calculus‘FourierTransform‘

f = If[-1 < x < 1, 1, 0]

If[-1 < x < 1, 1, 0]

$f(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü **FourierTransform** komutu ile,

FourierTransform[f, x, u]

$$\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \texttt{Sin[u]}}{\texttt{u}}$$

olarak buluruz.

Örnek 2.8: $u(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$ birim basamak fonksiyonu olmak üzere, $f(x) = e^{-ax}u(x)$, $a > 0$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulunuz.

Çözüm 2.8:

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-iux} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(a+iu)x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a+iu}\right)$$

veya

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{a}{a^2+u^2} - i\frac{u}{a^2+u^2}\right)$$

elde edilir.

Örnek 2.9: $f(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$ olarak tanımlanan Gauss fonksiyonun Fourier dönüşümünü bulunuz.

Çözüm 2.9: $F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-iux} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x^2+iux/a\right)} dx$ integralini $\left(e^{-u^2/4a} e^{u^2/4a}\right)$ ile çarparak,

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/4a} e^{-a\left(x^2+i\frac{ux}{a}-\frac{u^2}{4a^2}\right)} dx$$

$$= e^{-u^2/4a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x+\frac{iu}{2a}\right)^2} dx$$

buluruz. Burada $\sqrt{a}\left(x+\frac{iu}{2a}\right) = t$ dönüşümü yapılırsa,

$$F(u) = e^{-u^2/4a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt/\sqrt{a}$$

Euler integrali elde edilir. Bu integralin değeri $\sqrt{\pi}$ dir. Böylece Gauss fonksi- yonunun Fourier dönüşümü,

$$\mathcal{F}\left[e^{-ax^2}\right] = F(u) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-u^2/4a}$$

olarak bulunur.

FourierTransform komutu ile $f(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulalım,

<< Calculus‘FourierTransform‘

FourierTransform[Exp[-a*x^2], x, u]

$$\frac{e^{-\frac{u^2}{4a}}}{\sqrt{2}\ \sqrt{a}}$$

Bulduğumuz sonuca **InverseFourierTransform** komutu ile ters dönüşüm uygulayarak fonksiyonun kendisini elde edelim.

InverseFourierTransform[%, u, x]

$$e^{-a x^2}$$

Fourier Kosinüs ve Fourier Sinüs Dönüşümleri

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{iu(x-v)} dv \right] du$$

Fourier integralini alalım,

I. Eğer $f(x)$ çift fonksiyon ise ,

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos uxdu \int_0^\infty f(v)\cos uvdv \qquad 2.5.5$$

yazılabililir.Burada,

$$F_c(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(v)\cos uvdv \qquad 2.5.6$$

olarak alınırsa,

$$\mathcal{F}^{-1}[F_c(u)] = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(u)\cos uxdu \qquad 2.5.7$$

bulunur. (2.5.6) eşitliğine Fourier kosinüs dönüşümü, (2.5.6) ve (2.5.7) eşitliklerinin ikisine birden *Fourier kosinüs dönüşüm formülleri* denir.

Örnek 2.10: $f(x) = \begin{cases} 1 \quad , & 0 \le x < 1 \\ 0 \quad , & x \ge 1 \end{cases}$ olarak tanımlanan fonksiyonun, Fourier kosinüs dönüşümünü bulunuz.

Çözüm 2.10:

$$F_c(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(v)\cos uvdv$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 \cos uvdv = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{u}\sin uv\Big|_0^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin u}{u}$$

olarak bulunur.

Verilen fonksiyona Fourier kosinüs dönüşümü uygulamak için **FourierCosTransform** komutunu kullanalım.

f = If[0 < x < 1, 1, 0]

If[0 < x < 1, 1, 0]

FourierCosTransform[f, x, u]

$$\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \mathrm{Sin[u]}}{\mathrm{u}}$$

II. Eğer $f(x)$ tek fonksiyon ise ,

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin uxdu \int_0^\infty f(v)\sin uvdv \qquad 2.5.8$$

yazılabilir. Burada,

$$F_s(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(v)\sin uvdv \qquad 2.5.9$$

olarak alınırsa,

$$\mathcal{F}^{-1}[F_s(u)] = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_s(u)\sin uxdu \qquad 2.5.10$$

bulunur. (2.5.9) eşitliğine Fourier Sinüs dönüşümü, (2.5.9) ve (2.5.10) eşitliklerinin ikisine birden *Fourier Sinüs dönüşüm formülleri* denir.

Örnek 2.11: $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$ olarak tanımlanan fonksi- yonun, Fourier sinüs dönüşümünü bulunuz.

Çözüm 2.11: (2.5.9) eşitliğindeki formülden, $f(x)$ fonksiyonunun Fourier sinüs dönüşümü,

$$F_s(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(v)\sin uv dv$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \sin uv dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(-\frac{1}{u} \cos uv \Big|_0^1 \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1-\cos u}{u} \right)$$

olarak bulunur.

$f(x)$ fonksiyonuna **FourierSinTransform** komutu ile Fourier sinüs dönüşümü uygulayalım.

f = If[0 < x < 1, 1, 0]

If[0 < x < 1, 1, 0]

FourierSinTransform[f, x, u]

$$\frac{2 - 2\,\mathrm{Cos}[u]}{\sqrt{2\pi}\ u}$$

Fourier Dönüşümünün Özelikleri

1) Lineerlik özeliği:

a, b sabitler ve $\mathcal{F}[f_1(x)] = F_1(u)$, $\mathcal{F}[f_2(x)] = F_2(u)$ olmak üzere,

$$\mathcal{F}[af_1(x) + bf_2(x)] = aF_1(u) + bF_2(u) \qquad 2.5.11$$

dir. Gerçekten,

$$\mathcal{F}[af_1(x) + bf_2(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [af_1(x) + bf_2(x)]e^{-iux}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} af_1(x)e^{-iux}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} bf_2(x)e^{-iux}dx$$

$$= aF_1(u) + bF_2(u)$$

bulunur.

2) $a \neq 0, a \in R$ olmak üzere, $\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|}F(\frac{u}{a})$ dir.

Gerçekten,

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-iux}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-i(\frac{u}{a})ax}dx \qquad 2.5.12$$

$ax = v$ dönüşümü yapalım.

$a > 0$ ise,

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-i(\frac{u}{a})v}dv$$

$a < 0$ ise (2.5.12) integrali,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-i(\frac{u}{a})v}\frac{dv}{a} = -\frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-i(\frac{u}{a})v}dv$$

olur. Böylece,

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{u}{a}\right) \qquad 2.5.13$$

elde edilir.

3) Öteleme özeliği: $\mathcal{F}[f(x)] = F(u)$ ise, $\mathcal{F}[f(x-a)] = e^{-iau}F(u)$ dir.

Bu özeliğin doğruluğunu şu şekilde göstebiliriz.

$$\mathcal{F}[f(x-a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-iux}dx$$

Burada $x - a = v$ dersek,

$$\mathcal{F}[f(x-a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-iu(v+a)}dv$$

$$= e^{-iau}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-iuv}dv$$

bulunur. Böylece

$$\mathcal{F}[f(x-a)] = e^{-iau}F(u) \qquad 2.5.14$$

elde edilir.

5) Türevlerin Fourier dönüşümü:

$f(x)$ n defa türetilebilir, $f(x)$ ve $f^{(n)}(x)$ mutlak integrali olan fonksiyonlar olsun. Ayrıca $f(x)$ ve ilk $(n-1)$ ci mertebeye kadar türevleri $x \to \pm\infty$ için sıfır ise yani,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f^{(v)}(x) = 0 \qquad (v = 0, 1, \ldots (n-1)) \qquad 2.5.15$$

dir. Bundan başka, $\mathcal{F}[f(x)] = F(u)$ ise $f^{\wedge(n)}(x)$ in Fourier dönüşümü,

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (iu)^n F(u)$$

dir.

a) Önce $f'(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü gösterelim.

$$\mathcal{F}[f'(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-iux}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)e^{-iux}\Big|_{-\infty}^{\infty} + iu\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}dx$$

olur. (2.5.15) gereğince, ilk terim sıfır olup,

$$\mathcal{F}[f'(x)] = iu\,F(u) \qquad 2.5.16$$

bulunur.

b)

$$\mathcal{F}[f''(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f''(x)e^{-iux}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f'(x)e^{-iux}\Big|_{-\infty}^{\infty} + iu\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-iux}dx$$

$$= iu\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-iux}dx$$

$$= iu[iu\,F(u)]$$

$$\mathcal{F}[f''(x)] = (iu)^2F(u)$$

olur. Buradan $n.$ mertebeden türevin Fourier dönüşümü,

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (iu)^n F(u) \qquad 2.5.17$$

elde edilir.

c)$f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ düzgün parçalı sürekli ve $x \to \infty$ için $f(x)$, $f'(x) \to 0$ fonksiyonlar olsunlar. $f''(x)$ nin kosinüs ve sinüs Fourier dönüşümünü $f(x)$ ve $f'(x)$ değerlerine bağlı olarak hesaplayalım:

$f''(x)$ fonksiyonuna Fourier kosinüs dönüşümü uygulanırsa,

$$\mathcal{F}_c[f''(x)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f''(x) \cos ux dx$$

olur. Burada kısmi integral alırsak,

$$\mathcal{F}_c[f''(x)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(x) \cos ux \Big|_0^\infty + u\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f'(x) \sin ux dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(x) \cos ux \Big|_0^\infty + \sqrt{\frac{2}{\pi}} uf(x) \sin ux \Big|_0^\infty - u^2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos ux dx$$

veya $f(x)$ ve $f'(x)$ fonksiyonlarının her ikisi de $x \to \infty$ için sıfıra yaklaşacağından,

$$\mathcal{F}_c[f''(x)] = -[f'(x)]_{x=0} - u^2 F_c(u) \qquad 2.5.18$$

buluruz. Benzer işlemlerle $f''(x)$ fonksiyonunun Fourier sinüs dönüşümü,

$$\mathcal{F}_s[f''(x)] = u[f(x)]_{x=0} - u^2 F_s(u) \qquad 2.5.19$$

olarak bulunur.

6) İntegralin Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{x} f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(u)}{iu} \qquad 2.5.20$$

Faltung İntegrali

$f_1(x)$,$f_2(x)$ fonksiyonları ile tanımlanan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(x-\tau) d\tau = f(x) \qquad 2.5.21$$

integraline, $(-\infty, \infty)$ aralığında $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ fonksiyonlarının *Faltungu* denir. Simgesel olarak

$$f_1 * f_2 = f(x)$$

şeklinde gösterilir.

Eğer $f_1(x)$, $f_2(x)$ fonksiyonları,mutlak integrallenebilir ve integral, Lebesgue anlamında ise $f_1 * f_2$ Faltungu var olup, mutlak integrallenebilirdir (bütün x değerleri için). İntegral Riemann anlamında ise $f_1(x)$ fonksiyonunun bütün x değerleri için sınırlı, $f_2(x)$ fonksiyonunun mutlak integrallenebilir olması Faltungun varlığı için yeterlidir. O halde $f_1 * f_2$ Faltungu bütün x değerleri için süreklidir.

$$f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(x-\tau) d\tau \qquad 2.5.22$$

Faltung Teoremi

$f_1(x)$, $f_2(x)$ fonksiyonları,mutlak integrallenebilir ve $F_1(u)$,$f_1(x)$ fonksiyonunun, $F_2(u)$ da $f_2(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü ise

$$\mathcal{F}[f_1(x) * f_2(x)] = F_1(u) F_2(u)$$

dır.

İspat: $f_1(x) * f_2(x)$ Faltunguna Fourier dönüşümü uygulayalım.

$$\mathcal{F}[f_1(x) * f_2(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(x) * f_2(x)] e^{-iux} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(x-\tau) d\tau \right] e^{-iux} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-\tau) e^{-iux} dx \right] d\tau$$

İçteki integral yerine öteleme özeliğini kullanarak,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-\tau) e^{-iux} dx = \mathcal{F}[f_2(x-\tau)] = e^{-iu\tau} F_2(u)$$

yazılır. Böylece,

$$\mathcal{F}[f_1(x) * f_2(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-iu\tau} F_2(u) d\tau$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-iu\tau} d\tau \right] F_2(u)$$

ve

$$\mathcal{F}[f_1(x) * f_2(x)] = F_1(u) F_2(u) \qquad 2.5.23$$

bulunur. Ters formül ise

$$f_1(x) * f_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u) F_2(u) e^{iux} du \qquad 2.5.24$$

şeklindedir.

Kısmi Diferensiyel Denklemler İçin Başlangıç Ve Sınır Değer Problemlerinin Fourier Dönüşümü İle Çözümleri

Giriş

Bu bölümde, kısmi türevli diferensiyel denklemler için başlangıç ve sınır değer problemlerini Fourier dönüşümü yardımıyla çözeceğiz. Buradaki amacımız, bazı bölgelerin sınırlarında diferensiyel denklemin çözüm fonksiyonu için çeşitli varsayımlar yaparak veya verilerle çözümü bulmaktır. Önce bu bölümde kullanacağımız iki değişkenli fonksiyonların Fourier dönüşümlerini ve özeliklerini verelim.

$v(x,y)$ fonksiyonunun,

Fourier dönüşümü,

$$\mathcal{F}[v(x,y)] = V(u,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(x,y) e^{-iux} dx \qquad 3.1.1$$

Bu dönüşümün ters dönüşümü,

$$v(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} V(u,y) e^{iux} du \qquad 3.1.2$$

şeklindedir.

Fourier sinüs dönüşümü,

$$V_s(u,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty v(x,y)\sin uxdx \qquad 3.1.3$$

Ters Fourier sinüs dönüşümü:

$$v(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty V_s(u,y)\sin uxdu \qquad 3.1.4$$

Fourier kosinüs dönüşümü,

$$V_c(u,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty v(x,y)\cos uxdx \qquad 3.1.5$$

Ters Fourier kosinüs dönüşümü:

$$v(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty V_c(u,y)\cos uxdu \qquad 3.1.6$$

$v(x,y)$ **Fonksiyonunun Fourier Dönüşümünün Özelikleri:**

i)

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = iuF(v) \qquad 3.1.7$$

olduğunu gösterelim.

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v}{\partial x} e^{-iux}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{e^{-iux}v\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{0} + iu\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ve^{-iux}dx$$

$$= iuF(v)$$

ii)

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = -u^2F(v) \qquad 3.1.8$$

olduğunu gösterelim.

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} e^{-iux}dx = \underbrace{e^{-iux} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{0} + iu\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v}{\partial x} e^{-iux}dx$$

$$= iu \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v}{\partial x} e^{-iux}dx}_{iuF(v)}$$

$$= (iu)^2F(v)$$

$$= -u^2F(v)$$

olur. Buradan n. mertebeden türevin Fourier dönüşümü,

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^n v}{\partial x^n}\right) = (iu)^nF(v) \qquad 3.1.9$$

olarak bulunur.

iii)

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(v) \qquad 3.1.10$$

olduğunu gösterelim.

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v}{\partial t} e^{-iux} dx = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v e^{-iux} dx$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}(v)$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^n v}{\partial t^n}\right) = \frac{\partial}{\partial t^n} \mathcal{F}(v) \qquad 3.1.11$$

Fourier Dönüşümünün Kısmi Türevli Denk- lemlere Uygulanması

a ve b sabitler olmak üzere, ikinci mertebeden iki değişkenli kısmi türevli diferensiyel denklemi,

$$a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + bv + f_1(y) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + f_2(y) \frac{\partial v}{\partial y} + f_3(y) v = f(x,y) \qquad 3.2.1$$

şeklinde alalım.

Bu denklemde $x \to \infty$ için $v \to 0$ olsun. Ayrıca $x = 0$ için v veya $\frac{\partial v}{\partial x}$ türevinin değeri verildiğinden, bu verilenler sınır koşullarını oluşturur. Böyle bir denkleme Fourier kosinüs veya sinüs dönüşümlerinin uygulaması genel bir çözüm yöntemi verir.

v , $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ fonksiyonlarının sürekli ve Fourier dönüşümünün gerektirdiği koşulları sağladığını varsayalım.

Daha önce gösterdiğimiz (2.5.18) ve (2.5.19) eşitliklerini kullanacağız

$$\mathcal{F}_c[f''(x)] = -[f'(x)]_{x=0} - u^2 F_c(u) \qquad 2.5.18$$

$$\mathcal{F}_s[f''(x)] = u[f(x)]_{x=0} - u^2 F_s(u) \qquad 2.5.19$$

Burada,

$$\mathcal{F}_c[v] = U_c \qquad \mathcal{F}_s[v] = U_s \qquad \mathcal{F}_c[f] = F_c \qquad \mathcal{F}_s[f] = F_s$$

gösterimlerini kullanır ve (3.2.1) denklemine Fourier kosinüs dönüşümünü uygularsak,

$$a\mathcal{F}_c\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] + b\mathcal{F}_c[v] + \mathcal{F}_c\left[f_1(y) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + f_2(y) \frac{\partial v}{\partial y} + f_3(y) v\right] = \mathcal{F}_c[f(x,y)] \qquad 3.2.2$$

buluruz. Ayrıca,

$$f_1(y) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + f_2(y) \frac{\partial v}{\partial y} + f_3(y) v = \left[f_1(y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + f_2(y) \frac{\partial}{\partial y} + f_3(y)\right] v$$

yazar ve

$$f_1(y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + f_2(y) \frac{\partial}{\partial y} + f_3(y) = L$$

diferensiyel operatörünü kullanırsak, (3.2.2) denklemini,

$$a\mathcal{F}_c\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] + b\mathcal{F}_c[v] + \mathcal{F}_c[Lv] = \mathcal{F}_c[f]$$

olarak yazarız. (2.5.18) denklemi kullanılırsa,

$$a\left[-\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=0} - u^2 U_c\right] + bU_c + \int_0^\infty Lv \cos ux dx = F_c$$

olur. y değişkenine göre olan türev alma işlemi ile x değişkenine göre olan in- tegrasyon işlemi yer değiştirebileceğinden,

$$a\left[-\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=0} - u^2 U_c\right] + bU_c + LU_c = F_c \qquad 3.2.3$$

yazılabilir. Benzer şekilde, sinüs dönüşümünün ve (2.5.19) eşitliğinin (3.2.1) denklemine uygulanmasıyla,

$$a[-u^2 U_s + u(v)_{x=0}] + bU_s + LU_s = F_s \qquad 3.2.4$$

elde edilir.

Böylece $x = 0$ noktasında $\frac{\partial v}{\partial x}$ değerinin bilinmesi ile $(3.2.3)$ denklemi U_c ye göre y değişkenli bir diferensiyel denklem, aynı şekilde $x = 0$ noktasında v değerinin bilinmesi ile de $(3.2.4)$ denklemi, U_s ye göre adi bir diferensiyel denklem olur.

U_s veya U_c den biri bulununca, ters dönüşüme geçerek $v(x,y)$ çözümü elde edilir. Eğer x, $(-\infty,\infty)$ aralığında değişirse, $x \to \mp\infty$ için $v \to 0$ koşulu ile üstel Fourier dönüşümü kullanılır. Bu durumda diferensiyel denklem daha genel şekli ile alınabilir.

a , b ve c sabitler, L ise y değişkenine göre lineer diferensiyel operatörü olmak üzere,

$$a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b\frac{\partial v}{\partial x} + cv + Lv = f \qquad 3.2.5$$

denklemine Fourier dönüşümünün uygulanması ve $(3.1.9)$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^n v}{\partial x^n}\right] = (iu)^n F(v)$$

eşitliğinin kullanılması ile $\mathcal{F}[v] = U$ olmak üzere $(3.2.5)$ denkleminden,

$$-au^2 U + ibuU + cU + LU = F \qquad 3.2.6$$

şeklinde U ya göre y değişkenli diferensiyel denklem bulunur. Bu denklem çözülerek U ve sonra da ters dönüşüme geçerek $v(x,y)$ bulunur.

Eğer diferensiyel denklemde v nin x değişkenine göre birinci mertebeden türevi bulunuyorsa, sinüs veya kosinüs dönüşümü uygulanmasıyla bulunan denklemde, hem U_c hem de U_s bulunacaktır.

Şimdi mühendislikte çok kullanılan bazı kısmi diferensiyel denklemler için sınır değer problemlerini Fourier dönüşümü yardımı ile çözelim.

Örnekler

Örnek 3.1: Yarım sonsuz bir ortamda lineer ısı akımı denklemi olan

$$\frac{\partial v}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad 3.3.1$$

için başlangıç ve sınır koşulları,

$$t > 0 \quad , \quad x = 0 \quad \text{için} \quad v = v_0$$

$$t = 0 \quad , \quad x = 0 \quad \text{için} \quad v = 0$$

olup, $x \to \infty$ iken v , $\frac{\partial v}{\partial x} \to \infty$ varsayılıyor. Bu koşullar altında diferensiyel denklemin çözümünü bulunuz.

Çözüm 3.1: $v(x,t)$ fonksiyonunun Fourier sinüs dönüşümünü,

$$\mathcal{F}_s[v(x,t)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty v(x,t)\sin ux dx = V_s(u,t)$$

ile gösterir ve $(3.3.1)$ denklemine Fourier sinüs dönüşümü uygularsak,

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\partial v}{\partial t}\sin ux dx = c^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\sin ux dx \qquad 3.3.2$$

buluruz. Burada eşitliğin sol tarafı $(3.1.10)$ a göre,

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty v\sin ux dx = \frac{\partial V_s}{\partial t} = \frac{dV_s}{dt}$$

olacaktır. $(2.5.19)$ ve sınır koşullarına göre,

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\sin ux dx = u\sqrt{\frac{2}{\pi}}v_0 - u^2 V_s$$

olduğundan, (3.3.2) denklemi,

$$\frac{dV_s}{dt} + c^2u^2V_s = c^2u\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,v_0$$

şeklinde t değişkenine göre birinci mertebeden lineer diferensiyel denkleme dönüşür. Bu denklemin çözümünü **DSolve** komutunu kullanarak bulalım.

DSolve[V'[t] + c^2*u^2*V[t] == c^2*u*Sqrt[2/Pi]*v, V[t], t]

$$\left\{\left\{\mathrm{V[t]} \to \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{v}}{\mathrm{u}} + e^{-c^2 t u^2}\,\mathrm{C[1]}\right\}\right\}$$

$t = 0$ için $v(x,0) = 0$ olur. Buradan $C(1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{v_0}{u}$ bulunur. O halde bu denklemin çözümü olan V_s,

$$V_s = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{v_0}{u}(1 - e^{-c^2u^2t})$$

şeklindedir. Ters dönüşüm formülü (2.5.10) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \mathcal{F}_s^{-1}[V_s(u,t)] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{v_0}{u}(1 - e^{-c^2u^2t})\sin ux\,du \\ &= \frac{2v_0}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin ux}{u}du - \frac{2v_0}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin ux}{u}e^{-c^2u^2t}du \end{aligned}$$

bulunur. İlk integralin $\frac{\pi}{2}$ olduğunu biliyoruz (S:32 Örnek2.3). İkincisi ise,

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin ux}{u}e^{-c^2u^2t}du = \frac{\pi}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2ct^{1/2}}\right)$$

dir. Böylece ısı denkleminin çözümü,

$$v(x,t) = v_0\left(1 - \operatorname{erf}\frac{x}{2c\sqrt{t}}\right)$$

olarak bulunur. Aynı sonuca Mathematica paket programını kullanarak da ulaşabiliriz. V_s fonksiyonuna **InverseFourierSinTransform** komutu ile ters Fourier sinüs dönüşümü uygularsak,

InverseFourierSinTransform[{Sqrt[2 / Pi] $\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}}$ $\left(1 - e^{-c^2 t u^2}\right)$}, u, x]

$$\left\{-\mathrm{v}\left(-1 + \mathrm{Erf}\left[\frac{\mathrm{Abs[x]}}{2\sqrt{c^2\,t}}\right]\right)\mathrm{Sign[x]}\right\}$$

sonucunu elde ederiz.

Örnek 3.2: $c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial t}$ diferensiyel denkleminin $-\infty < x < \infty$, $t > 0$ aralığında

$$|x| \to \infty \text{ için } v \to 0$$

$$v(x,0) = e^{-x^2}$$

koşulu altındaki çözümünü Fourier dönüşümü uygulayarak bulunuz.

Çözüm 3.2: Bu kez diferensiyel denkleme, (3.1.1) üstel Fourier dönüşümü uygulanırsa,

$$c^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x^2}e^{-iux}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial v}{\partial t}e^{-iux}dx$$

olur, burada $\mathcal{F}[v] = V$ ile gösterip, (3.1.8)

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] = -u^2 F(v)$$

eşitliğini kullanırsak,

$$-c^2 u^2 V = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} v e^{-iux} dx$$

$$-c^2 u^2 V = \frac{dV}{dt}$$

t bağımsız değişkenli bir diferensiyel denklem buluruz. Bunun integrali alınırsa,

$$V = A(u) e^{-c^2 u^2 t}$$

olur. u nun fonksiyonu olan $A(u)$ integrasyon sabitini, başlangıç koşullarına göre belirlemek için önce bu koşullardaki V değerini, v nin dönüşümünden bulalım:

$t = 0$ iken $v = e^{-x^2}$ koşuluna göre

$$V = \mathcal{F}[v] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-iux} dx$$

yazılır. Bu ise *Gauss İntegrali* olup,

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{u^2}{4}} \qquad 3.3.3$$

şeklindedir. **FourierTransform** komutunu kullanarak aynı sonucu bulalım.

FourierTransform[Exp[-x^2], x, u]

$$\frac{e^{-\frac{u^2}{4}}}{\sqrt{2}}$$

$V = A(u)e^{-c^2u^2t}$ denkleminin $t = 0$ için değerini, bulduğumuz (3.3.3) değerine eşitlersek,

$$A(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{u^2}{4}}$$

olur. Böylece,

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{u^2}{4}} e^{-c^2 u^2 t}$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{-(1+4c^2t)u^2}{4}} \qquad 3.3.3'$$

elde edilir. Buradan ters dönüşüme geçerek $v(x,t)$ fonksiyonu bulalım. (3.3.3') ve (2.5.13) $\mathcal{F}^{-1}[F(au)] = \frac{1}{a} f(\frac{t}{a})$ formüllerinden,

$$v = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{-(1+4c^2t)u^2}{4}}\right] = \frac{1}{\sqrt{1+4c^2t}} e^{-\frac{x^2}{(1+4c^2t)}}$$

elde edilir.

V denklemine ters Fourier dönüşümü uygulamak için **InverseFourierTransfom** komutunu kullanarak ısı denkleminin çözümünü kısaca bulabiliriz.

InverseFourierTransform$\left[e^{-c^2 t u^2}\dfrac{e^{-\frac{u^2}{4}}}{\sqrt{2}}, u, x\right]$

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{1+4c^2 t}}}{\sqrt{1+4c^2 t}}$$

Örnek 3.3: İki ucu belirlenmiş sonsuz uzunluktaki bir telin serbest titreşimleri:

$-\infty < x < \infty$ olmak üzere sonsuz uzunluktaki telin dış kuvvetlerin etkisinde kalmadan hareketini ele alacağız. Hareket, denge durumundan ayırarak (biraz çekmekle) ve belirli bir hız vererek başlar. Denklemi,

$$c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad 3.3.4$$

dir. Bu denklemin,

$$t = 0 \text{ için } v(x,0) = f(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = k_0(x)$$

başlangıç koşullarına uyan çözümlerini bulunuz.

Çözüm 3.3: $(3.3.4)$ denklemine üstel Fourier dönüşümü uygulayalım.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}e^{-iux}dx = c^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}e^{-iux}dx \qquad 3.3.5$$

olduğundan,

$$\mathcal{F}[v(x,t)] = U(u,t)$$

alınır ve $(3.1.8)$ $\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] = -u^2F(v)$ ve $(3.1.11)$ kullanılırsa,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-\infty}^{\infty}ve^{-iux}dx = c^2(-u^2U)$$

$$\frac{d^2U}{dt^2} = -c^2u^2U$$

$$\frac{d^2U}{dt^2} + c^2u^2U = 0 \qquad 3.3.6$$

t değişkenine göre lineer bir diferensiyel denklem elde edilir. $(3.3.6)$ denkleminin çözümünü **DSolve** komutu ile,

DSolve[U”[t] + c^2*u^2*U[t] == 0, U[t], t]

{{U[t] → C[1]Cos[ctu]+C[2]Sin[ctu]}}

şeklinde buluruz. Bu denklemi

$$\mathcal{F}[v(x,t)] = U(u,t) = C(1)\cos uct + C(2)\sin uct \qquad 3.3.7$$

olarak yazarbiliriz. Verilen koşullara göre, $C(1)$ ve $C(2)$ katsayılarını bulmak için,

$$t = 0 \text{ için } v(x,0) = f(x)$$

ve

$$\mathcal{F}[v(x,0)] = \mathcal{F}[f(x)] = F(u) \qquad 3.3.8$$

olduğu kullanılırsa, $(3.3.7)$ denkleminin $t = 0$ için değeri

$$U(u,0) = C(1)$$

ve $(3.3.8)$ denkleminden

$$F(u) = C(1)$$

olarak bulunur.

$C(2)$ katsayısı,

$$\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = k_0(x)$$

olduğundan,

$$U(u,t) = \int_{-\infty}^{\infty} v e^{-iux} dx$$

denkleminden türev alınarak bulunur, $t = 0$ için,

$$\frac{dU(u,0)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v(x,0)}{\partial t} e^{-iux} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} k_0(x) e^{-iux} dx$$

olduğundan,

$$\frac{dU(u,0)}{dt} = V_0(u) = \int_{-\infty}^{\infty} k_0(x) e^{-iux} dx \qquad 3.3.9$$

elde edilir. Diğer taraftan $(3.3.7)$ denkleminin t ye göre türevinin $t = 0$ için değeri ve $(3.3.9)$ denkleminden,

$$C(2) = \frac{V_0(u)}{uc}$$

olarak bulunur. Böylece $(3.3.6)$ denkleminin çözümü, $(3.3.7)$ denkleminden,

$$U(u,t) = F(u)\cos uct + \frac{V_0(u)}{uc}\sin uct$$

şeklinde bulunur. Bu eşitlikten ters dönüşüme geçersek,

$$v(v,t) = \mathcal{F}^{-1}[U(u,t)]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\cos uct e^{iux} du + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{V_0(u)}{uc}\sin uct e^{iux} du$$

buluruz. Burada $\cos uct$ ve $\sin uct$ için Euler formülleri kullanılırsa,

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)(e^{iuct} + e^{-iuct})e^{iux} du + \frac{1}{2c\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{V_0(u)}{iu}(e^{iuct} - e^{-iuct})e^{iux} du\right]$$

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)(e^{iu(x+ct)} + e^{iu(x-ct)}) du + \frac{1}{2c\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{V_0(u)}{iu}(e^{iu(x+ct)} - e^{iu(x-ct)}) du\right] \qquad 3.3.10$$

bulunur.

$$f(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{iuy} du$$

göre ilk integral,

$$f(x \mp ct) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{iu(x \mp ct)} du$$

olarak hesaplanır. İkinci integral, $(2.5.20)$ formülü,

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau \right] = \frac{F(u)}{iu} \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{F(u)}{iu} \right] = \int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau$$

yi anımsayarak,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V_0(u)}{iu} e^{iu(x-ct)} du = \int_{-\infty}^{\tau_1} k_0(\tau) d\tau \quad , \quad (x - ct = \tau)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V_0(u)}{iu} e^{iu(x+ct)} du = \int_{-\infty}^{\tau_2} k_0(\tau) d\tau \quad , \quad (x + ct = \tau)$$

eşitliklerini yazarsak,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V_0(u)}{iu} e^{iu(x+ct)} du - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V_0(u)}{iu} e^{iu(x-ct)} du = \int_{\tau_1}^{\tau_2} k_0(\tau) d\tau = \int_{x-ct}^{x+ct} k_0(\tau) d\tau$$

şeklinde bulunur. O halde $(3.3.10)$ denkleminin çözümü,

$$v(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} k_0(\tau) d\tau \qquad 3.3.11$$

olarak elde edilir.

İlk hızın $t = 0$ da $k_0 = 0$ olması halinde $(3.3.11)$ çözüm fonksiyonu,

$$v(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)]$$

olur.

Örnek 3.4: Yarım sonsuz telin serbest titreşimleri :

$(0,0)$ noktasına bağlı $0x$ ekseninin pozitif yönü doğrultusunda gerilmiş bir tel ele alalım. Bu durumda, transvers (yanlama) serbest titreşimler,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

dalga denklemini sağlar.

$$t = 0 \text{ için } v(x,0) = f(x), \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \quad (x > 0)$$

ve

$$v(0,t) = 0 \qquad \text{(bütün } t \text{ ler için)}$$

koşulları verilsin.Buna göre bu sınır değer probleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm 3.4: Diferensiyel denkleme Fourier sinüs dönüşümü uygulanırsa,

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \sin ux dx = c^2 \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sin ux dx$$

olduğundan,

$$\mathcal{F}_s[v] = U_s$$

alınır ve verilen koşullar kullanılırsa,

$$\frac{d^2U_s}{dt^2} = c^2[u(v)_{x=0} - u^2U_s]$$
$$= -c^2u^2U_s$$
$$\frac{d^2U_s}{dt^2} + c^2u^2U_s = 0$$
diferensiyel denklemi bulunur. Bu denklemin çözümü,
$$U_s(u,t) = A(u)\cos uct + B(u)\sin uct$$
şeklindedir. Başlangıç koşulları,
$$t = 0 \text{ iken } v(x,0) = f(x) \Rightarrow U_s(u,0) = F_s(u)$$
$$\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial U_s}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$
olduğundan,
$$A(u) = F_s(u) \quad , \quad B(u) = 0$$
bulunur. Bunlara göre,
$$U_s(u,t) = F_s(u)\cos uct$$
olur. Ters dönüşüm uygulanılırsa,
$$\mathcal{F}^{-1}[U_s(u,t)] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_s(u)\cos uct \sin uxdu$$
$$v(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty F_s(u)[\sin u(x+ct) + \sin u(x-ct)]du$$
yazılır.
$$\mathcal{F}^{-1}[F_s(u)] = f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_s(u)\sin uxdu$$
olduğundan, çözüm
$$v(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)]$$
olarak elde edilir.

Örnek 3.5: $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v^2}{\partial y^2} = 0$ Laplace denkleminin, $0 < x < \infty$, $0 < y < a$ aralıklarında değişmesi halinde,
$$v(x,0) = v(x,a) = 0 \qquad x > 0 \quad \text{(başlangıç)}$$
$$v(0,y) = 1 - \frac{y}{a} \qquad 0 < y < a \quad \text{(sınır)}$$
koşullarına uyan çözümünü bulunuz. Ayrıca $x \to \infty$ için $v \to 0$ olduğu varsayılıyor.

Çözüm 3.5: Diferensiyel denkleme Fourier sinüs dönüşümü uygular ve $\mathcal{F}_s[v] = U_s$ alırsak,
$$\mathcal{F}_s\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right] = 0$$
$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\sin uxdx + \int_0^\infty \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\sin uxdx = 0$$
$$u(v)_{x=0} - u^2U_s + \frac{\partial^2 U_s}{\partial y^2} = 0$$
veya sınır koşulunu kullanırsak

$$\frac{d^2U_s}{dy^2} - u^2U_s = -u\left(1 - \frac{y}{a}\right)$$

diferensiyel denklemini elde ederiz. y değişkenine göre lineer olan bu diferensiyel denklemin genel çözümünü **DSolve** komutunu kullanarak bulalım.

DSolve[U”[y] - u^2 U[y] == -u(1 - (y/a)), U[y], y]

$$\left\{\left\{\mathtt{U[y]} \to \frac{\mathtt{a-y}}{\mathtt{au}} + e^{\mathtt{uy}}\mathtt{C[1]} + e^{-\mathtt{uy}}\mathtt{C[2]}\right\}\right\}$$

$$U_s = C_1(u)e^{-yu} + C_2(u)e^{yu} + \frac{a-y}{au} \qquad 3.3.12$$

olduğundan sınır koşulu , $y = 0$ ve $y = a$ için $v = 0$ olacağından, $U_s = 0$ bulunur.

(3.3.12) denkleminde, $y = 0$, $y = a$ için $U_s = 0$ değerleri yazılarak,

$$0 = C_1 + C_2 + \frac{1}{u}$$

$$0 = C_1e^{-au} + C_2e^{au}$$

denklemlerinden C_1, C_2 katsayıları,

$$C_1 = \frac{-e^{au}}{u(e^{au} - e^{-au})} \quad , \quad C_2 = \frac{e^{-au}}{u(e^{au} - e^{-au})}$$

olarak bulunur.

C_1, C_2 değerleri (3.3.12) denkleminde yerine yazılırsa,

$$U_s = \frac{e^{u(y-a)} - e^{-u(y-a)}}{u(e^{au} - e^{-au})} + \frac{a-y}{au}$$

veya

$$U_s = \frac{\sinh u(y-a)}{u\ \sinh ua} + \frac{a-y}{au}$$

elde edilir. Ters dönüşüm uygulanırsa,

$$\mathcal{F}_s^{-1}[U_s] = v(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sinh u(y-a)}{u \sinh ua}\sin ux du + \frac{2(a-y)}{\pi a}\int_0^\infty \frac{\sin ux}{u}du$$

bulunur.

Sağ taraftaki birinci integralin F-sinüs tablosundan aldığımız **[9]** değeri ile ikinci integralin $\pi/2$ değerini denklemde yerlerine yazarsak,

$$v(x,y) = \frac{2}{\pi}\arctan\left(\tan\frac{\pi(y-a)}{2a}\tanh\frac{\pi x}{2a}\right) + \frac{a-y}{a}$$

buluruz.

Örnek 3.6: Yarım düzlemde,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \qquad (y \geq 0)$$

Laplace denklemi için,

Sınır koşulu : $v(x,0) = f(x) \qquad -\infty < x < \infty$

Başlangıç koşulu : $v(x,y) \to 0, p \to \infty$ burada $p = (x^2 + y^2)^{1/2} dir.$

olarak veriliyor. Problemin çözümünü bulunuz.

Çözüm 3.6: Denkleme Fourier dönüşümünü uygulanırsa,

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] + \mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right] = 0$$

olduğundan, (3.1.8) $\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] = -u^2F(v)$ ile

$$(iu)^2 U(u,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-\infty}^{\infty} v(x,y) e^{-iux} dx = 0$$

veya

$$\frac{d^2 U}{dy^2} - u^2 U = 0$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin genel çözümü,

$$U(u,y) = C_1 e^{-uy} + C_2 e^{uy} \qquad 3.3.13$$

olduğundan, verilen koşullara göre C_1, C_2 fonksiyonları belirlenmelidir.

Başlangıç koşulu,

$$v(x,y) \to 0 \text{ için,}$$

$$U(u,y) \to 0 \qquad y \to \infty$$

olur. $|x| \to \infty$ için de, $v(x,y) \to 0$ olacağından (Riemann-Lebesque lemması) $C_2 = 0$ olmasını gerektirir.

Sınır koşulundan,

$$v(x,0) = f(x), \qquad U(u,0) = F(u) \qquad 3.3.14$$

bulunur. Burada $F(u)$, $f(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümüdür. $(3.3.14)$ denkleminden,

$$U(u,y) = F(u) e^{-|u|y}$$

bulunur. $v(x,y)$ ifadesini bulmak için Faltung teoremini kullanacağız.

$$v(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(x-t) dt \qquad 3.3.15$$

dir. Burada $f_1(x)$ yi $F(u)$ nin tersi yani $f_1(x) = f(x)$ ve

$f_2(x) = \mathcal{F}^{-1}[e^{-|u|y}] = \frac{y/\pi}{x^2+y^2}$ alınır ve $(3.3.15)$ denkleminde yerine yazılırsa $v(x,y)$,

$$v(x,y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)dt}{(x-t)^2 + y^2}, \qquad (y > 0)$$

olarak bulunur.

Örnek 3.7: Sonsuz şeritte (band) Laplace diferensiyel denklemi:

Laplace denkleminin $0 \leq y \leq a$ bandında,

$$v(x,0) = f(x), \quad v(x,a) = g(x) \qquad 3.3.16$$

sınır koşulunu sağlayan çözümünü bulunuz.

Çözüm 3.7: Bu problem belirli sıcaklıkta tutulan iki duvar arasındaki sıcaklık dağılımını tanımlamaktadır.

$(3.3.16)$ sınır koşullarından,

$$U(u,0) = F(u), \quad U(u,a) = G(u)$$

koşulları bulunur. $F(u)$ ve $G(u)$, $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının Fourier dönüşümleridir.

Laplace denklemine Fourier dönüşümünü uygulayarak

$$U(u,y) = C_1(u) e^{-yu} + C_2(u) e^{yu} \qquad 3.3.17$$

denklemini bulmuştuk. C_1, C_2 sınır koşullarına göre belirtilecek keyfi fonksiyonlardır.

$(3.3.17)$ denklemi ve $U(u,0) = F(u)$, $U(u,a) = G(u)$ den elde edilen,

$$F(u) = C_1(u) + C_2(u)$$

$$G(u) = C_1(u) e^{-au} + C_2(u) e^{au}$$

sisteminden $C_1(u)$ ve $C_2(u)$ çözülerek, $(3.3.17)$ denkleminde yerine yazılırsa,

$$U(u,y) = F(u)\frac{\sinh(a-y)u}{\sinh(au)} + G(u)\frac{\sinh(yu)}{\sinh(au)} \qquad (0 < y < a)$$

bulunur. $U(u,y)$ fonksiyonunun ters dönüşümü olan $v(x,y)$ çözümünü bulmada Faltung Teoremininde $(2.5.22)$ ve $(2.5.23)$ eşitliklerini kullanacağız.

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sinh(yu)}{\sinh(au)}\right] = k(x,y) \qquad 3.3.18$$

alınarak $v(x,y)$ çözümü,

$$v(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)k(x-t,a-y)dt + \int_{-\infty}^{\infty} g(t)k(x-t,y)dt \qquad 3.3.19$$

elde edilir $(0 < y < a)$. Bu denklemin çekirdeği olan $k(x,y)$ fonksiyonunu bulmak için, $(3.3.18)$ yerine, $\frac{\sinh(yu)}{\sinh(au)}$ nin u değişkenine göre çift fonksiyon olması nedeniyle kosinüs dönüşümü kullanılırsa,

$$k(x,y) = \mathcal{F}_c^{-1}\left[\frac{\sinh(yu)}{\sinh(au)}\right] = \frac{1}{2a}\frac{\sin(\pi y/a)}{\cosh(\pi x/a)+\cos(\pi y/a)}$$

bulunur. Bu değeri $(3.3.19)$ denkleminde yerine yazarak,

$$v(x,y) = \frac{\sin(\pi y/a)}{2a}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)dt}{\cosh(\pi(x-t)/a)-\cos(\pi y/a)} + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t)dt}{\cosh(\pi(x-t)/a)+\cos(\pi y/a)}\right]$$

elde edilir.

Örnek 3.8: $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ dalga denkleminin $v(x,y,0) = f(x,y)$ ve $\left.\frac{\partial v(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$ şartlarına uyan çözümün,

$$v(x,y,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,\eta)\cos(ct\sqrt{u^2+\eta^2})e^{-i(ux+\eta y)}dud\eta$$

olduğunu ve burada

$$F(u,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{i(ux+\eta y)}dxdy$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm 3.8: Verilen denkleme önce x e göre, sonra y ye göre Fourier dönüşümü uygulayalım.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}e^{iux}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}e^{iux}dx = \frac{1}{c^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}e^{iux}dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}e^{iux}e^{i\eta y}dxdy$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}e^{iux}e^{i\eta y}dxdy = \frac{1}{c^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}e^{iux}e^{i\eta y}dxdy$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}e^{iux}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\eta y}dy$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}e^{i\eta y}dy\int_{-\infty}^{\infty}e^{iux}dx = \frac{1}{2\pi c^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}e^{i(ux+\eta y)}dxdy$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}e^{iux}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\eta y}dy &= \frac{1}{2\pi}\left(e^{iux}\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{-\infty}^{\infty} - iu\int_{-\infty}^{\infty}e^{iux}\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\eta y}dy \\
&= \begin{matrix}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\eta y}dy(-iu(e^{iux}v(x,y,t)))|_{-\infty}^{\infty} \\ \qquad -iu\int_{-\infty}^{\infty}e^{iux}v(x,y,t)dx\end{matrix} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(-u^2)e^{i\eta y}v(x,y,t)e^{iux}dxdy \\
&= \frac{-u^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}v(x,y,t)e^{iux}e^{i\eta y}dxdy \\
&= (-u^2)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}v(x,y,t)e^{i(ux+\eta y)}dxdy \\
&= -u^2V(u,\eta,t)
\end{aligned}$$

buluruz. Benzer yolla,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}e^{i(ux+\eta y)}dxdy = -\eta^2V(u,\eta,t)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}e^{i(ux+\eta y)}dxdy &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}v(x,y,t)e^{i(ux+\eta y)}dxdy \\
&= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V(u,\eta,t)}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}v(x,y,t)e^{i(ux+\eta y)}dxdy = V(u,\eta,t)$$

olduğu ortaya çıkar. Bu değerleri denklemde yerine yazarsak,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V(u,\eta,t)}{\partial t^2} = -u^2V(u,\eta,t) - \eta^2V(u,\eta,t)$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V(u,\eta,t)}{\partial t^2} + (u^2+\eta^2)V(u,\eta,t) = 0$$

denklemi bulunur.

$$\frac{r^2}{c^2} + (u^2 + \eta^2) = 0 \Rightarrow r = \pm ic\sqrt{u^2 + \eta^2}$$

olup,

$$V(u,\eta,t) = a_1 e^{ic\sqrt{u^2+\eta^2}\,t} + b_1 e^{-ic\sqrt{u^2+\eta^2}\,t}$$

bulunur. $v(x,y,0) = f(x,y)$ ye önce x sonra y ye göre Fourier dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} v(x,y,0)e^{i(ux+\eta y)}dxdy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{i(ux+\eta y)}dxdy$$

$$V(u,\eta,0) = F(u,\eta)$$

bulunur. Çözümde yerine yazarsak,

$$F(u,\eta) = a_1 + b_1$$

olur. Diğer şart $\left.\frac{\partial v(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} v(x,y,t)e^{i(ux+\eta y)}dxdy = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}V(u,\eta,t)|_{t=0} = 0$$

olur.

$$\left.\frac{\partial V(u,\eta,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = a_1 ic\sqrt{u^2+\eta^2}\,e^{ic\sqrt{u^2+\eta^2}\,t} - b_1 ic\sqrt{u^2+\eta^2}\,e^{-ic\sqrt{u^2+\eta^2}\,t} = 0$$

$$(a_1 - b_1)ic\sqrt{u^2+\eta^2} = 0 \Rightarrow a_1 - b_1 = 0 \Rightarrow a_1 = b_1 \Rightarrow F(u,\eta) = a_1$$

$$V(u,\eta,t) = \frac{1}{2}F(u,\eta)\left(e^{ic\sqrt{u^2+\eta^2}\,t} + e^{-ic\sqrt{u^2+\eta^2}\,t}\right)$$

$$= \frac{1}{2}F(u,\eta)2\cos\left(ct\sqrt{u^2+\eta^2}\right)$$

bulunur.Böylece ters dönüşümden,

$$v(x,y,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,\eta)\cos\left(ct\sqrt{u^2+\eta^2}\right)e^{-i(ux+\eta y)}dud\eta$$

elde edilir.

Örnek 3.9: $\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$ denkleminin $(-\infty < x < \infty\,,\ y \geq 0)$

i) $x \to \pm\infty$ için, $v(x,y) \to 0 = 0\,,\ \frac{\partial v}{\partial x} \to 0\,,\ \frac{\partial v}{\partial y} \to 0$

ii) $v(x,0) = f(x)\,,\ \left.\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$

şartlarına uyan çözümünü bulunuz.

Çözüm 3.9: $v(x,y)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü ,

$$\mathcal{F}[v(x,y)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} v(x,y)e^{iux}dx = V(u,y)$$

ile gösterip, verilen denkleme Fourier dönüşümü uygulayalım,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}e^{-iux}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}e^{-iux}dx = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}e^{-iux}dx + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} v(x,y)e^{-iux}dx = 0$$

T(3.1.9) $\mathcal{F}\left(\frac{\partial^n v}{\partial x^n}\right) = (iu)^n\mathcal{F}(v)$ ve (3.1.11) $\mathcal{F}\left(\frac{\partial^n v}{\partial t^n}\right) = \frac{\partial}{\partial t^n}\mathcal{F}(v)$ özeliklerinden yararlanarak

$$(iu)^4 V(u,y) + \frac{\partial^2 V(u,y)}{\partial y^2} = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin karakteristik polinomu $\alpha^2 + u^4 = 0$ dır. Buradan, $\alpha = \pm iu^2$ olur.

$$V(u,y) = A(u)e^{iu^2 y} + B(u)e^{-iu^2 y}$$

bulunur. Başlangıç şartlarından $v(x,0) = f(x)$ fonksiyonuna Fourier dönüşümü uygularsak,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(x,0)e^{-iux}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}dx \Rightarrow V(u,0) = \mathcal{F}(u)$$

bulunur. Diğer yandan,

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(x,y)e^{-iux}dx = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} V(x,y) = 0$$

olur. Buradan çözüm,

$$V(u,y) = A(u)e^{iu^2 y} + B(u)e^{-iu^2 y} \Rightarrow V(u,y) = A(u)\cos u^2 y + B(u)\sin u^2 y$$

yazılır. Başlangıç şartlarından, $V(u,0) = A(u) = \mathcal{F}(u)$ bulunur.

$$\frac{\partial V(u,y)}{\partial y} = -A(u)u^2 \sin u^2 y + B(u)u^2 \cos u^2 y \Rightarrow \frac{\partial V(u,y)}{\partial y} = B(u)u^2 = 0$$

$u \neq 0$ olduğundan, $B(u) = 0$ dır. O halde başlangıç şartlarına uyan çözüm,

$$V(u,y) = \mathcal{F}(u)\cos u^2 y$$

dir. Bu denkleme ters Fourier dönüşümü uygularsak,

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} V(u,y)e^{iux}du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(u)\cos u^2 y e^{iux}du \end{aligned}$$

bulunur.

KAYNAKLAR

[1] Abell, M. L.and Braselton, J.P.,1993, Differential Equations with Mathematica, Geoorgia Southern University Statesboro, Geoergia, 631p.
[2] Brown, J. W.,1993, Fourier Series And Boundary Value Problems, Ruel V. Churchill-5th ed-New York:McGraw-Hill, XVI, 348p.
[3] Çınar, M. ve Çalışkan, F., 1995, Mathematica ile programlama, Beta Basımevi, İstanbul, VI,261s.
[4] Dym, H., 1972, Fourier Series And Integrals, Academic Press, New York, X, 295p.
[5] Körner, T.W.,1988, Fourier Analysis, Cambridge University Press, XII,591p.
[6] Kreyszig, E., 1993, Advenced Engineering Mathematics,Ohio State University,Ohio,968p.
[7] Özer, N. ve Eser, D.,1996, Diferensiyel Denklemler(Teori ve Uygulamalar),Birlik Yay.,Eskişehir,501s.
[8] Uyan, B. , 1980, Çözümlü Problemlerle Diferensiyel Denklemler, İ.T.Ü., 1980,-VIII, 372s.
[9] Yarasa, R.,1976, Fourier Analizi, Çağlayan Basımevi, 1976,-VIII+224s.
[10] Yaşar, İ. B., 1988, Uygulamalı Matematik, Gazi Üniversitesi,Ankara,375s