

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE KULLANILAN ANALİTİK VE
YARI ANALİTİK METOTLAR

DOKTORA TEZİ
Zeliha SARIATEŞ KÖRPİNAR
(101121207)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Danışman: Yrd.Doç.Dr. Münevver TUZ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 18 Mart 2015

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE KULLANILAN ANALİTİK VE
YARI ANALİTİK METOTLAR

DOKTORA TEZİ
Zeliha SARIATEŞ KÖRPİNAR
(101121207)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 18 Mart 2015

Tezin Savunulduğu Tarih : 10 Nisan 2015

Tez Danışmanı : **Yrd. Doç. Dr. Münevver TUZ**

Diğer Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Etibar PENAHLI**

Prof. Dr. Alaattin ESEN

Doç. Dr. Hasan BULUT

Yrd. Doç. Dr. Sibel ÖZER

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın planlanması ve yürütülmesinde bana gerekli imkanları sağlayan, çalışmalarım süresince benden destek ve ilgilerini esirgemeyen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Münevver TUZ 'a ve çalışmalarım boyunca çeşitli sorularımı yanıtlayan ve benden yardımlarını, desteğini ve bilgisini esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. İbrahim Enam İNAN hocama en içten teşekkürlerimi sunarım.

Zeliha SARIATEŞ KÖRPINAR

ELAZIĞ-2015

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

İÇİNDEKİLER.....	I
ÖZET	IV
SUMMARY	V
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	VI
TABLOLAR LİSTESİ.....	IX
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	X
1. BÖLÜM	1
Giriş.....	1
2. BÖLÜM.....	6
Temel Kavramlar.....	6
3. BÖLÜM	12
Lineer Olmayan Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Çözümünde Kullanılan Bazı Analitik Ve Yarı Analitik Metotlar	12
3.1. Tanh Metodu.....	12
3.2. Genişletilmiş Tanh Metodu.....	13
3.3. Genelleştirilmiş Tanh Metodu.....	14
3.4. Genelleştirilmiş Riccati Denklemi Dönüşüm Metodu	15
3.5. Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM)	19
4. BÖLÜM	21
Bazı Lineer Olmayan Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Analitik Ve Yarı Analitik Çözümleri için Uygulamalar	21
4.1. Genişletilmiş Tanh Metodu İçin Uygulamalar	21
4.1.1.Kaup–Kupersmidt Denkleminin Genişletilmiş Tanh Metodu İle Analitik Çözümleri	21

4.1.2. DSW Denklem Sisteminin Genişletilmiş Tanh Metodu İle Analitik Çözümleri	26
4.1.3. Hirota-Satsuma Denklem Sisteminin Genişletilmiş Tanh Metodu İle Analitik Çözümleri	32
4.2. Genelleştirilmiş Tanh Metodu İçin Uygulamalar	38
4.2.1. Kaup–Kupershmidt Denkleminin Genelleştirilmiş Tanh Metodu İle Analitik Çözümleri	38
4.2.2. DSW Denklem Sisteminin Genelleştirilmiş Tanh Metodu İle Analitik Çözümleri	42
4.2.3. Hirota-Satsuma Denklem Sisteminin Genelleştirilmiş Tanh Metodu İle Analitik Çözümleri	48
4.2.4. Benjamin-Bona-Mahony Denkleminin Genelleştirilmiş Tanh Metodu İle Analitik Çözümleri	54
4.2.5. Beşinci Mertebeden Lax KdV Denkleminin Genelleştirilmiş Tanh Metodu İle Analitik Çözümleri	57
4.3. Genelleştirilmiş Riccati Denklemi Dönüşüm Metodu İçin Uygulamalar	62
4.3.1. Kaup–Kupershmidt denkleminin Genelleştirilmiş Riccati Denklemi Dönüşüm Metodu İle Analitik Çözümleri	62
4.3.2. DSW Denklem Sisteminin Genelleştirilmiş Riccati Denklemi Dönüşüm Metodu İle Analitik Çözümleri	70
4.3.3. Hirota-Satsuma Denklem Sisteminin Genelleştirilmiş Riccati Denklemi Dönüşüm Metodu İle Analitik Çözümleri	80
4.4. Homotopi Pertürbasyon Metodu İçin Uygulamalar	90
4.4.1. Kaup–Kupershmidt Denkleminin HPM İle Yaklaşık Çözümü	90
4.4.2. DSW Denklem Sisteminin HPM İle Yaklaşık Çözümü	92
4.4.3. Hirota-Satsuma Denklem Sisteminin HPM İle Yaklaşık Çözümü	95
5. BÖLÜM	98

Genelleştirilmiş Riccati Denklemi Dönüştürme Metodu Ve HPM İle Elde Edilen Değerlerin Karşılaştırılması	98
6. BÖLÜM	105
Sonuç	105
KAYNAKLAR	108

ÖZET

BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE KULLANILAN ANALİTİK VE YARI ANALİTİK METOTLAR

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm çalışmanın giriş kısmıdır. Bu bölümde dalgalar hakkında temel bilgiler verilip çalışmada kullanılan denklemler tanımlandı.

İkinci bölümde; çalışmada kullanılan temel tanımlar verildi.

Üçüncü bölümde; bazı lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılan analitik ve yarı analitik metotlar incelendi.

Dördüncü ve beşinci bölüm ise çalışmanın orijinal kısmını kapsamaktadır.

Dördüncü bölümde; üçüncü bölümde analizleri yapılan genişletilmiş tanh metodu, genelleştirilmiş tanh metodu, genelleştirilmiş Riccati denklemi dönüşüm metodu ve homotopi perturbasyon metodu kullanılarak birinci bölümde verilen kısmi diferensiyel denklemlerin hareketli dalga çözümleri ve seri çözümleri elde edildi.

Beşinci bölümde; Kaup-Kupershmidt denkleminin, Drinfeld-Sokolov-Wilson denklem sisteminin ve Hirota-Satsuma denklem sisteminin genelleştirilmiş Riccati denklemi dönüşüm metodu ile dördüncü bölümde elde edilen hareketli dalga çözümleri ve seri çözümlerinin sayısal sonuçları irdelendi.

Altıncı bölüm ise; çalışmanın sonuç kısmı olup elde edilen sonuçlar literatürde bulunan çalışmalarla desteklenerek genel bir değerlendirme yapıldı.

Anahtar Kelimeler: Dalgalar, Dengeleme terimi, Analitik çözüm, Seri çözüm, Hareketli dalga çözümü, Genişletilmiş tanh metodu, Genelleştirilmiş tanh metodu, Genelleştirilmiş Riccati denklemi dönüşüm metodu, Homotopi perturbasyon metodu, Kaup-Kupershmidt denklemi, Drinfeld-Sokolov-Wilson denklem sistemi, Hirota-Satsuma denklem sistemi.

SUMMARY
ANALYTICAL AND SEMI ANALYTICAL METHODS USED IN
THE SOLUTIONS OF SOME NONLINEAR PARTIAL
DIFFERENTIAL EQUATIONS

This study is constructed in six chapters.

The first chapter has been devoted to the introduction and in this chapter fundamental informations of the waves and equations which are used to this study are given.

In the second chapter; fundamental definitions which are used to study are given.

In the third chapter; it is made analyze of analytical and semi analytical methods which are used to solve of some nonlinear partial differential equations.

The fourth and fifth chapters contain original part of this study.

In the fourth chapter; it is obtained travelling wave solutions and series solutions for equations which are considered in the first chapter by using the generalized tanh method, the extended tanh method, the generalizing Riccati equation mapping method and homotopy analysis method which are given in chapter three.

In the fifth chapter; it is discussed numerical results of series solutions and travelling wave solutions for Kaup–Kupershmidt equation, Drinfeld-Sokolov-Wilson equations, Hirota-Satsuma equations which are obtained in chapter four.

The sixth chapter has been devoted to the conclusion. In this chapter, it is made a generalized assessment by supporting results which are obtained in this study with some studies in literature.

Keywords: Waves, Balance term, Analytical solution, Series solution, Travelling wave solution, Extended tanh method, Generalized tanh method, Generalizing Riccati equation mapping method, Homotopy perturbation method, Kaup–Kupershmidt equation, Drinfeld-Sokolov-Wilson equations, Hirota-Satsuma equations.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1. Bir periyodik dalga	2
Şekil 2. Bir dalga ve özellikleri	2
Şekil 3. Kaup–Kupersmidt denkleminin $u_1(x, t)$ ve $u_4(x, t)$ çözümü için üç boyutlu periyodik dalga görünümü	24
Şekil 4. Kaup–Kupersmidt denkleminin $u_4(x, t)$ çözümü için iki boyutlu periyodik dalga grafiği	25
Şekil 5. DSW denklem sisteminin $u_2(x, t), w_2(x, t)$ ve $u_4(x, t), w_4(x, t)$ çözümleri için üç boyutlu periyodik dalga görünümü	30
Şekil 6. DSW denklem sisteminin $u_4(x, t), w_4(x, t)$ çözümü için iki boyutlu periyodik dalga grafiği	31
Şekil 7. Hirota-Satsuma denklem sisteminin $u_1(x, t), w_1(x, t)$ ve $u_5(x, t), w_5(x, t)$ çözümleri için üç boyutlu periyodik dalga görünümü	36
Şekil 8. Hirota-Satsuma denklem sisteminin $u_5(x, t)$ ve $w_5(x, t)$ çözümü için iki boyutlu periyodik dalga grafiği	37
Şekil 9. Kaup–Kupersmidt denkleminin $u_1(x, t)$ ve $u_{12}(x, t)(\text{Im})$ çözümleri için üç boyutlu periyodik dalga görünümü	41
Şekil 10. Kaup–Kupersmidt denkleminin $u_{12}(x, t)(\text{Im})$ çözümü için iki boyutlu periyodik dalga grafiği	41
Şekil 11. DSW denklem sisteminin $u_{12}(x, t)(\text{Im}), w_{12}(x, t)(\text{Im})$ ve $u_{14}(x, t)(\text{Re}), w_{14}(x, t)(\text{Re})$ çözümleri için üç boyutlu periyodik dalga görünümü	46
Şekil 12. DSW denklem sisteminin $u_{12}(x, t)(\text{Im})$ ve $w_{12}(x, t)(\text{Im})$ çözümü için iki boyutlu periyodik dalga grafiği	47

Şekil 13. Hirota-Satsuma denklem sisteminin $u_8(x, t), w_8(x, t)$ ve $u_{12}(x, t)(\text{Re}), w_{12}(x, t)(\text{Re})$ çözümleri için üç boyutlu periyodik dalga görünümü . . .	52
Şekil 14. Hirota-Satsuma denklem sisteminin $u_{12}(x, t)$ ve $w_{12}(x, t)$ çözümleri için iki boyutlu periyodik dalga grafiği	53
Şekil 15. Benjamin-Bona-Mahony denkleminin $u_5(x, t)$ ve $u_{13}(x, t)$ çözümleri için üç boyutlu periyodik dalga görünümü	56
Şekil 16. Benjamin-Bona-Mahony denkleminin $u_5(x, t)$ çözümleri için iki boyutlu periyodik dalga grafiği	56
Şekil 17. Beşinci mertebeden Lax KdV denkleminin $u_4(x, t)$ ve $u_{18}(x, t)$ çözümleri için üç boyutlu periyodik dalga görünümü	61
Şekil 18. Beşinci mertebeden Lax KdV denkleminin $u_4(x, t)$ çözümleri için iki boyutlu periyodik dalga görünümü	61
Şekil 19. Kaup–Kupershmidt denkleminin $u_3(x, t)(\text{Im}), u_3(x, t)(\text{Re}), u_{13}(x, t)$ ve $u_{21}(x, t)$ çözümleri için üç boyutlu periyodik dalga görünümü	68
Şekil 20. Kaup–Kupershmidt denkleminin $u_3(x, t)(\text{Re})$ çözümleri için iki boyutlu periyodik dalga grafiği	69
Şekil 21. DSW denklem sisteminin $u_{20}(x, t), w_{20}(x, t)$ ve $u_{25}(x, t), w_{25}(x, t)$ çözümleri için üç boyutlu periyodik dalga görünümü	78
Şekil 22. DSW denklem sisteminin $u_{20}(x, t)$ ve $w_{20}(x, t)$ çözümleri için iki boyutlu periyodik dalga grafiği	79
Şekil 23. Hirota-Satsuma denklem sisteminin $u_{17}(x, t), w_{17}(x, t)$ ve $u_{26}(x, t), w_{26}(x, t)$ çözümleri için üç boyutlu periyodik dalga görünümü	88
Şekil 24. Hirota-Satsuma denklem sisteminin $u_{26}(x, t)$ ve $w_{26}(x, t)$ çözümleri için iki boyutlu periyodik dalga grafiği	89

Şekil 25. Genelleştirilmiş Riccati denklemi dönüşüm metodu ile elde edilen analitik çözüm ve HPM ile elde edilen yaklaşık çözümün üç boyutlu görünümü	98
Şekil 26. Genelleştirilmiş Riccati denklemi dönüşüm metodu ile elde edilen analitik çözüm ve HPM ile elde edilen yaklaşık çözümün karşılaştırılması	100

TABLÖLAR LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 1. Kaup–Kupersmidt denkleminin $u_{25}(x, t)$ analitik çözümü ile HPM ile elde edilen yaklaşık çözümünün karşılaştırılması.....	101
Tablo 2. DSW denklem sisteminin $u_{25}(x, t)$ analitik çözümü ile HPM ile elde edilen yaklaşık çözümünün karşılaştırılması.....	102
Tablo 3. DSW denklem sisteminin $w_{25}(x, t)$ analitik çözümü ile HPM ile elde edilen yaklaşık çözümünün karşılaştırılması.....	102
Tablo 4. Hirota Satsuma denklem sisteminin $u_{25}(x, t)$ analitik çözümü ile HPM ile elde edilen yaklaşık çözümünün karşılaştırılması.....	103
Tablo 5. Hirota Satsuma denklem sisteminin $w_{25}(x, t)$ analitik çözümü ile HPM ile elde edilen yaklaşık çözümünün karşılaştırılması.....	103

SİMGELER LİSTESİ

- M : Dengeleme terimi
 L : Lineer Operatör
 L^{-1} : İntegral Operatörü
 ϕ_n : n -terim yaklaşımı

KISALTMALAR LİSTESİ

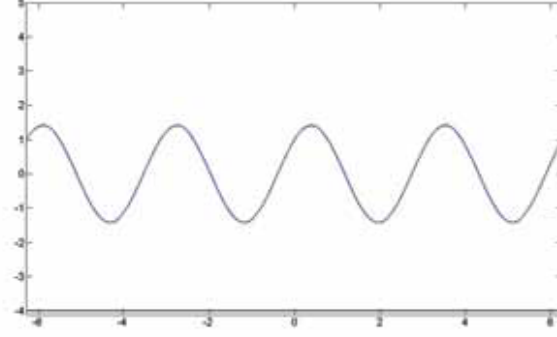
- HPM : Homotopi Perturbasyon Metot
KdV : Korteweg-de Vries denklemi
DSW : Drinfeld-Sokolov-Wilson denklem sistemi

1. BÖLÜM

GİRİŞ

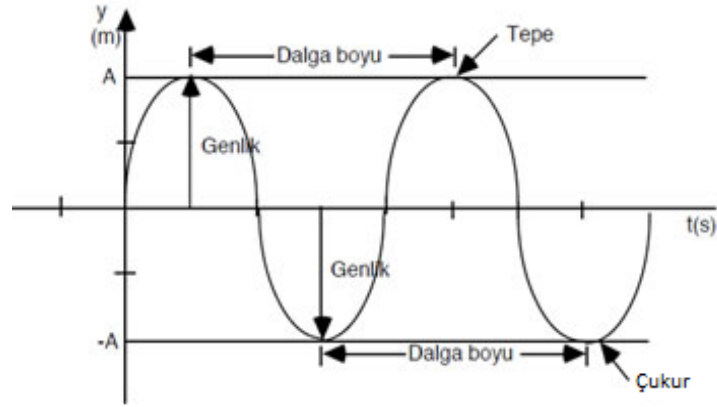
Doğada meydana gelen olayların matematiksel modellenmesi genellikle lineer ve lineer olmayan diferensiyel denklemler ile açıklanır. Bu denklemlerin özellikleri hakkında bilgi veren analitik çözümler büyük bir öneme sahiptir. Bu nedenle son zamanlarda özellikle uygulamalı matematik alanında lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin hareket eden dalga çözümleri üzerine odaklanılmıştır. Bu dalga çözümleri, dalganın yapısı ve dalgaların birbirleri ile olan etkileşimleri gibi birçok konuda uygulama sahasında çalışan bilim adamlarına ilham vermektedir. Bu çözümlerin elde edilmesi için lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin analitik çözümlerini veren birçok etkili metot geliştirilmiştir. Bu metotların çoğu sadece lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlere uygulanabilir. Çünkü bu metotların işleyişi “dengeleme terimi” olarak adlandırılan ve en yüksek mertebeden lineer terim ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terimin karşılaştırılmasına dayanır.

Dalga ifadesi 19. yüzyıldan itibaren daha çok önem kazanmış ve çeşitli çalışmalara konu olmuştur. Cisimlerin bir nokta etrafında, o noktaya eşit uzaklıktaki iki nokta arasında gidip gelme hareketine *titreşim*, bu titreşim hareketi ile enerjinin esnek bir ortamda iletilmesine *dalga* denir. Hareketi eşit zaman aralıkları ile tekrarlanan dalgalara *periyodik dalga* denir ve bir tam dalganın oluşum süreci dalganın periyodudur. Periyot birimi saniye olarak alınır. Şekil 1 de bir periyodik dalga grafiği gösterilmektedir [1].



Şekil 1. Bir periyodik dalga

Dalgaların tanımlanmasında dalgaların *boyu*, *frekansı*, *hızı*, *genliği* ve *uzanımı* önemli rol oynar. Ardışık iki dalga tepesi ya da çukuru arasındaki uzaklığa *dalga boyu*, 1 saniyede oluşturulan dalga sayısına *dalganın frekansı*, dalganın birim zamandaki yer değiştirmesine *dalga hızı*, dalga çukuru ya da tepesinin denge konumuna uzaklığına *dalganın genliği*, dalga üzerindeki bir noktanın denge konumuna uzaklığına *dalganın uzanımı* denir. Bir dalga ve özellikleri şekil 2 de gösterilmektedir [1].



Şekil 2. Bir dalga ve özellikleri

Dalgalar titreşim yönlerine göre *enine dalga* ve *boyuna dalga* olarak isimlendirilirler. Titreşim doğrultusu yayılma doğrultusuna dik olan dalgalara *enine dalga*, titreşim doğrultusu yayılma doğrultusuna paralel olan dalgalara *boyuna dalga* denir [1].

Bir kısmi diferensiyel denklemde bulunan bağımlı u değişkeninin fiziksel özelliklerini irdelemek oldukça önemlidir. Bu nedenle bu tezde, bazı lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin fiziksel özelliklerini irdelemek amacıyla periyodik dalga çözümlerini elde etmek için kullanılan ve literatürde var olan analitik metotların tarihsel olarak analizi yapıp bu metotlardan üçü kullanılarak Koup-Kupershmidt denklemi, Drinfeld-Sokolov-Wilson (DSW) denklem sistemi, Hirota-Satsuma denklem sistemi, Benjamin-Bona-Mahony denklemi ve beşinci mertebeden Lax KdV denkleminin hareket eden dalga çözümleri elde edilmiştir.

Beşinci mertebeden lineer olmayan

$$u_t + 45u^2u_x - 15\gamma u_x u_{xx} - 15uu_{3x} + u_{5x} = 0 \quad (1.1)$$

denkleminde γ reel sabiti farklı değerler aldıkça (1.1) denkleminin özellikleri değişim gösterir. Örneğin (1.1) denklemi $\gamma = \frac{5}{2}$ alınrsa

$$u_t + 45u^2u_x - \frac{75}{2}u_x u_{xx} - 15uu_{3x} + u_{5x} = 0 \quad (1.2)$$

şeklindeki Koup-Kupershmidt denklemi elde edilir. $\gamma = 1$ alınrsa (1.1) denklemi Sawada-Kotera denklemi olarak adlandırılır [2]. Hereman ve Nuseir, Koup-Kupershmidt denkleminin iki ve üç-soliton çözümlerini elde etmiş ve buna bağlı olarak çoklu soliton çözümlerinin analitik formlarının oldukça farklı olduğunu ve Sawada-Kotera denklemindekinden daha karışık yapıya sahip olduğunu ispatlamıştır [3]. Micheline Musette ve Caroline Verhoeven Koup-Kupershmidt denkleminin N -soliton çözümlerini tanımlamıştır [4]. Parker, Hirota metodunu kullanarak Koup-Kupershmidt denklemini bilineerleştirmiş, tekli soliton çözümünü oluşturmuş ve çoklu soliton çözümlerini elde etmek için bilineer dönüşüm metodunu uygulamıştır [5]. Koup-

Kupershmidt denklemi kuantum mekaniğinde ve nonlinear optikte yaygın olarak kullanılmaktadır.

Genelleştirilmiş Drinfeld-Sokolov-Wilson(DSW) denklem sistemi

$$\begin{aligned} u_t + \alpha w w_x &= 0, \\ w_t + \beta w_{xxx} + \gamma u w_x + \varepsilon w u_x &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

şekindedir [6,7]. Geng Xian-Guo ve Wu Li-Hua, genelleştirilmiş DSW denklem sisteminde $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ sabitlerini $\alpha = -3, \beta = \gamma = -2, \varepsilon = -1$ alarak aşağıdaki DSW denklem sistemini geliştirmiştir [8].

$$\begin{aligned} u_t - 3w w_x &= 0, \\ w_t - 2w_{xxx} - 2u w_x - w u_x &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Genelleştirilmiş DSW denklem sisteminde $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ sabitlerinin farklı değerleri için Wei-Min Zhang semi-invers metodu ile varyasyonel esasları kullanarak tam singüler periyodik dalga çözümlerini ve solitary çözümlerini elde etmiş [9], Esmail Alibeiki ve Ahmad Neyrameh homotopi pertürbasyon metodu ile yaklaşık çözümlerini elde etmiş [10] ve İnç ayrışım metodu ile yaklaşık çözümlerini oluşturmuştur [11]. DSW denklem sistemi, topolojik alan teorilerinin modellenmesinde, fiber optik, plazma ve akışkanların hareketlerinde yaygın olarak kullanılmaktadır.

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{2} u_{xxx} + 3u u_x - 3w w_x \\ w_t &= -w_{xxx} - 3u w_x \end{aligned} \quad (1.5)$$

denklem sistemi ile verilen Hirota-Satsuma denklem sistemi bilimin çeşitli alanlarında kompleks fiziksel olgularda özellikle plazma fiziğinde ve akışkanların hareket biliminde yaygın olarak kullanılmaktadır. A.A. Mohammad ve M. Can, Hirota-Satsuma denklem sistemine painleve analizi uygulayıp tam çözümlerini elde etmiştir [12].

Benjamin-Bona-Mahony denklemi,

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0 \quad (1.6)$$

şeklinde verilir. I. E.Inan ve arkadaşları, Benjamin-Bona-Mahony denkleminin tam çözümlerini cebirsel bir metot ile elde etmişlerdir [13]. P.G. Estevez ve arkadaşları bu denklemin genel şekli için hareketli dalga çözümlerini elde etmişlerdir [14] ve A. S. Alofi bu denkleme Jacobi eliptik fonksiyon açılım metodunu uygulamıştır [15].

Beşinci mertebeden KdV denkleminin genel formu a , b , c ve d sabitler olmak üzere,

$$u_t + au^2u_x + bu_xu_{xx} + cuu_{xxx} + du_{xxxxx} = 0 \quad (1.7)$$

şeklindedir. $a = 30$, $b = 30$, $c = 10$ ve $d = 1$ alınırsa (1.7) denklemi Lax KdV denklemi olarak adlandırılır ve aşağıdaki gibi yazılır [16];

$$u_t + 30u^2u_x + 30u_xu_{xx} + 10uu_{xxx} + u_{xxxxx} = 0.$$

Bu denkleme M. Ghasemia ve arkadaşları homotopi pertürbasyon metodunu uygulayıp yaklaşık çözümlerini elde etmişlerdir [16].

2. BÖLÜM

2.1. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1.1. Bir fonksiyonu ve onun çeşitli mertebeden türevlerini içeren matematiksel denklemler *diferensiyel denklemler* olarak isimlendirilir. Tek bir bağımsız değişkene göre türev içeren diferensiyel denklemlere *adi türevli diferensiyel denklemler* denir. Bir diferensiyel denklemin mertebesi denklemden görülen en yüksek mertebeden türevin mertebesidir. n . mertebeden bir adi türevli diferensiyel denklem genel olarak,

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

kapalı formunda gösterilebilir [17].

Bir $a < x < b$ aralığında tanımlı bir Φ fonksiyonunun $a < x < b$ aralığında bulunan her x için tanımlı ve ilk n . mertebeden türeve sahip fonksiyonu,

$$F(x, \Phi(x), \Phi'(x), \dots, \Phi^{(n)}(x)) = 0$$

ise Φ fonksiyonuna $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ denkleminin *çözümüdür* denir.

Bir adi türevli diferensiyel denklemin *genel çözümü*, denklemin mertebesi kadar sabit değeri parametre olarak kabul eden bir eğri ailesi olarak ortaya çıkar. Çözüm fonksiyonundaki sabitlere verilen herbir değere karşılık bulunan çözüme de *özel çözüm* denir [17].

Tanım 2.1.2. İçinde en az iki bağımsız ve bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre çeşitli basamaktan kısmi türevlerini kapsayan denklemlere *kısmi türevli diferensiyel denklemler* denir. z bağımlı; x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere bir kısmi türevli diferensiyel denklem genel olarak

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots) = 0 \quad (2.2)$$

şeklinde ifade edilir. Burada,

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, z_y = \frac{\partial z}{\partial y}, z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots$$

şeklinde [18].

n tane bağımsız ve bir tane bağımlı değişkene sahip kısmi türevli denklemlerin genel şekli

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), z = z(x)$$

olmak üzere

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, z_{x_1}, z_{x_2}, \dots, z_{x_n}, z_{x_1 x_1}, z_{x_1 x_2}, \dots) = 0$$

formundadır. Burada x_1, x_2, \dots, x_n bağımsız değişkenleri; z ise bağımlı değişkeni göstermekte ve

$$z_{x_i} = \frac{\partial z}{\partial x_i}, z_{x_i y_j} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial y_j}; i, j = 1, 2, \dots, n$$

dir.

Bir kısmi türevli diferensiyel denklemi özdeş olarak sağlayan ve keyfi fonksiyon veya keyfi parametre içermeyen bir fonksiyona bu kısmi türevli denklemin bir *özel çözüm*ü denir. Diğer taraftan bir kısmi türevli denklemin mertebesi kadar (sürekli türetilebilir) keyfi fonksiyon kapsayan ve denklemi özdeş olarak sağlayan bir yüzey ailesine bu kısmi türevli denklemin *genel çözüm*ü denir [18].

Tanım 2.1.3. Eğer bir kısmi türevli diferensiyel denklemdeki bağımlı değişken (veya bağımlı değişkenler) ve bunların denklemdeki bütün kısmi türevleri birinci dereceden ve denklem, bağımlı değişken ile onun türevleri parantezinde yazıldığında katsayılar yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonu oluyorsa bu denkleme *lineer diferensiyel denklemdir* denir. Aksi halde *lineer olmayan diferensiyel denklem* denir [18].

Tanım 2.1.4. Bir kısmi türevli diferensiyel denklemin genel çözümü, denklemin mertebesi kadar keyfi fonksiyon içerir. Bu nedenle, adi diferensiyel denklemlere kıyasla kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümlerini bulmak daha zordur. Başlangıçta modellenen probleme uygun çözümün bulunabilmesi için problem oluşturulurken bazı yardımcı şartlar gerekir. Bu şartlar genel olarak iki başlık altında toplanabilir [19].

(i) *Sınır şartları* : Sınır şartları kısmi türevli diferensiyel denklemin sağlandığı Ω bölgesinin Γ sınırı boyunca sağlanması gereken şartlardır. Sınır şartlarının üç farklı şekli α , β ve g fonksiyonları Γ üzerinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere özel isimleriyle şu şekildedir:

$$\text{Dirichlet şartı} : u_{\Gamma} = g,$$

$$\text{Neumann şartı} : \frac{\partial u}{\partial n_{\Gamma}} = g,$$

$$\text{Karışık (mixed) veya Robin şartı} : \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g.$$

(ii) *Başlangıç Şartları* : Başlangıç şartları sistemin başlangıcında Ω bölgesi boyunca sağlanması gereken şartlardır. Genel olarak, başlangıç şartları fonksiyonun ve zamana göre türevinin kombinasyonu şeklindedir.

Başlangıç şartlarıyla birlikte verilmiş kısmi türevli diferensiyel denkleme '*Cauchy problemi*' denir.

İkinci mertebeden, iki bağımsız değişkenli bir kısmi türevli diferensiyel denklem

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0$$

genel şekliyle verilebilir. Burada A, B, C, D, E, F katsayı fonksiyonları ve G fonksiyonu da sabit veya değişken içeren fonksiyondur. Bu denklem, $\Delta = B^2 - 4AC$ diskriminantının işaretine göre,

$\Delta > 0$ ise Hiperbolik,

$\Delta = 0$ ise Parabolik,

$\Delta < 0$ ise Eliptik

olarak isimlendirilir [19].

$u_t + c^2 u_{xx} = 0$ şeklindeki difüzyon (ısı) denklemi parabolik tipte bir kısmi türevli diferensiyel denklem, $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ şeklindeki dalga denklemi hiperbolik tipte bir kısmi türevli diferensiyel denklem ve $u_{xx} + u_{yy} = 0$ şeklindeki laplace denklemi eliptik tipte bir kısmi türevli diferensiyel denklemdir [19].

Tanım 2.1.5. Herhangi bir tipteki problemin çözümü, aşağıdaki üç şartı sağlarsa problem, "*iyi durumlu*", en az bir şartı sağlamaz ise "*kötü durumlu*" olarak adlandırılır. Bu şartlar aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir;

- 1) *Varlık*,
- 2) *Teklilik*,
- 3) *Kararlılık*.

Pratikte bir denklemin çözümünün varlığını ifade etmenin en iyi yolu problemdeki bütün şartları sağlayan ve problemde yerine konulduğunda denklemi sağlayan bir çözüm yapılandırmasıdır. Eğer çözümün tekliliği gösterilirse denklemin çözümü bulunmuş demektir. Adi diferensiyel denklemlere göre kısmi diferensiyel denklemlerde çözüm tasvirleri seri veya integraller gibi limit yöntemleri içerir ve çözümler her zaman elementer fonksiyonların kapalı şekillerinde ifade edilemez. Bu durumda, bir yaklaşık çözüm ele alınır, eğer başlangıç şartındaki küçük bir değişim, çözüme küçük bir değişiklik olarak yansırsa bu çözüme *kararlıdır* denir ve çözüm kararlı kabul edilir [20].

Tanım 2.1.6. Diferensiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin aynı değerleri için verilen şartlar altında çözümlerinin problemine *başlangıç değer problemi*, verilen şartlara da *başlangıç şartları* adı verilir [20].

Diferensiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin farklı değerleri için verilen şartlar altında çözümlerinin problemine *sınır değer problemi*, verilen şartlara da *sınır şartları* adı verilir [20].

Tanım 2.1.7. Kompleks değişkenli bir f fonksiyonu, bir z_0 noktasının belli bir $D(z_0, \delta)$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferensiyellenebiliyorsa f , z_0 noktasında *analitiktir* denir [21].

Eğer kompleks değişkenli bir f fonksiyonu, bir S kümesinin bütün noktalarında analitikse f , S üzerinde *analitiktir* denir. Bir f fonksiyonu, C kompleks sayılar kümesinin tüm noktalarında analitikse, f 'e *tam fonksiyon* denir [21].

Tanım 2.1.8. D kapalı bölgesinde $f(x, y)$ fonksiyonu tanımlı olsun. Eğer her $(x, y_1) \in D$ ve $(x, y_2) \in D$ çiftleri için

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K |y_1 - y_2| \quad (2.7)$$

olacak şekilde bir K sayısı bulunabiliyorsa, $f(x, y)$ fonksiyonu D üzerinde *Lipschitz koşulunu* sağlıyor denir [17].

Tanım 2.1.9. Diferensiyel denklemler için *varlık ve teklilik teoremi* aşağıdaki şekilde ifade edilebilir [17]:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (2.8)$$

başlangıç değer problemini ele alalım. D bölgesi, merkezi (x_0, y_0) noktasında olan

$$|x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlanan bir dikdörtgensel bölge olsun.

$$\max |f(x, y)| = M$$

ve (2.8) denklemindeki f fonksiyonu ve $\frac{\partial f}{\partial y}$ kısmi türevi D de y 'ye göre Lipschitz koşulunu sağlasın. Bu durumda $h = \min(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{K})$ olmak üzere aşağıdaki özelliklere sahip olan bir $F(x)$ fonksiyonu ve $|x - x_0| \leq h$ aralığı vardır.

- i) $y = F(x)$, (2.8) denkleminin $|x - x_0| \leq h$ aralığında bir çözümüdür.
- ii) $F(x)$ fonksiyonu $|x - x_0| \leq h$ aralığında $|F(x) - y_0| \leq b$ eşitsizliğini sağlar.

iii) $F(x_0) = y_0$ dır.

iv) (i), (ii), (iii) özelliklerinin hepsini birden sağlayan, $|x - x_0| \leq h$ aralığında tanımlı olan $F(x)$ fonksiyonu bir tanedir.

Tanım 2.1.10. X ve Y boş olmayan kümeler ve $D \subset X$ olsun. D 'nin her elemanına Y 'nin bir elemanını karşılık getiren bir kurala D 'den Y 'ye bir *operatör* veya *dönüşüm* denir [20].

Tanım 2.1.11. X ve Y aynı bir K cismi üzerinde iki lineer uzay ve $A : X \rightarrow Y$ operatörü verilsin. X_0 cümlesi X uzayının bir alt uzayı olsun. Eğer $\forall x, y \in X_0$ ve $\forall \alpha, \beta \in K$ için

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

ise A operatörüne *lineer operatör* denir [20].

Tanım 2.1.12. $L, D(L)$ tanım bölgesinde sınırlı lineer bir operatör olmak üzere, $Ly = \lambda y$ eşitliğini sağlayan $y(x) \neq 0$ fonksiyonu mevcut ise λ 'ya L operatörünün *özdeğeri*, $y(x, \lambda)$ fonksiyonuna ise λ 'ya karşılık gelen *özfonksiyon* denir [20].

Tanım 2.1.13. $f : A \subset R \rightarrow R$ olsun. k pozitif bir reel sayı olmak üzere $\forall x \in A$ için $f(x+k) = f(x)$ eşitliği sağlanıyor ise f fonksiyonuna *periyodiktir* denir ve k 'ya da f fonksiyonunun periyodudur denir [20].

Tanım 2.1.14. Lineer olmayan herhangi bir diferensiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer olan terim $\frac{\partial^a u}{\partial \xi^a}$ ve en yüksek mertebeden lineer olmayan terim $u^p (\frac{\partial^r u}{\partial \xi^r})^s$ ile verilsin. M dengeleme terimi olmak üzere $M + q = Mp + s(M + r)$ eşitliği yazılabilir [22].

Tanım 2.1.15. X ve Y iki uzay ve $I = \{t : 0 \leq t \leq 1\}$ olsun. $\phi : X \times I \rightarrow Y$ sürekli bir dönüşümü $\forall x \in X$ için $\phi(x, 0) = f(x)$ ve $\phi(x, 1) = g(x)$ oluyor ise $f, g : X \rightarrow Y$ dönüşümlerine *homotopiktirler* denir ve $f \approx g$ ile gösterilir. $\phi : f \rightarrow g$ ise ϕ, f 'den g 'ye bir homotopi kurar şeklinde ifade edilir [21].

3. BÖLÜM

LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE KULLANILAN BAZI ANALİTİK VE YARI ANALİTİK METOTLAR

Bu bölümde lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılan tanh metodu, genişletilmiş tanh metodu, genelleştirilmiş tanh metodu, genelleştirilmiş Riccati denklemi dönüşüm metodu ve homotopi pertürbasyon metodu (HPM) olarak bilinen metodların analizi yapıp bu metotların işleyişi hakkında bilgi verilecektir.

3.1. Tanh Metodu

Tanh metodu 1992 yılında Malfliet tarafından oluşturulmuştur [23]. Bu çalışmada Malfliet,

$$U(u, u_t, u_x, u_{xx}, \dots) = 0 \quad (3.1)$$

şeklinde verilen bir kısmi diferensiyel denklemin hareket eden dalga çözümünü bulmak için $u(x, t) = q(\phi)$ olmak üzere $\phi = \phi(x, t) = x - Qt$ gibi bir koordinat gözönüne alarak bu koordinata göre (3.1) denklemini adi diferensiyel denkleme dönüştürerek yeniden yazmıştır. Burada Q dalga hızını göstermektedir.

Adi diferensiyel denklem elde edildikten sonra $G(\phi) = \tanh \phi$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi} &= (1 - G^2) \frac{d}{dG}, \\ \frac{d^2}{d\phi^2} &= (1 - G^2) \left(-2G \frac{d}{dG} + (1 - G^2) \frac{d^2}{dG^2} \right), \\ \frac{d^3}{d\phi^3} &= (1 - G^2) \left((6G^2 - 2) \frac{d}{dG} - 6G(1 - G^2) \frac{d^2}{dG^2} + (1 - G^2)^2 \frac{d^3}{dG^3} \right) \end{aligned}$$

türevleri ile (3.1) denklemini için aranan

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^n a_i G^i(\phi) \quad (3.2)$$

çözümünün elde edilen adi diferensiyel denklemde yerine yazılmasıyla $G^i(\phi)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) katsayılarının eşitliğinden bir cebirsel denklem sistemi bulunur. Bulunan bu cebirsel denklem sisteminde a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) katsayıları elde edilir ve bu katsayılar (3.2) serisinde yerlerine yazılarak (3.1) denkleminin dalga çözümü bulunmuş olur. Burada n , en yüksek mertebeden lineer olan terim ile lineer olmayan terimlerin dengelenmesiyle bulunabilen parametredir ve $a_n \neq 0$ dir.

Bu metot yardımıyla bazı kısmi diferensiyel denklemlerin hareketli dalga çözümleri elde edilmiştir [24–27].

3.2. Genişletilmiş Tanh Metodu

Genişletilmiş tanh metodu 2000 yılında Fan tarafından oluşturulmuştur [28]. Bu metotla *tanh* metodu arasındaki tek fark şudur; *tanh metot* ile (3.1) denklemini için sadece $G(\phi) = \tanh \phi$ fonksiyonu kullanılırken genişletilmiş tanh metodunda ise

$$G'(\phi) = A + G^2(\phi) \quad (3.4)$$

Riccati diferensiyel denkleminin çözümleri olarak elde edilen

$A < 0$ iken,

$$G(\phi) = -\sqrt{-A} \tanh(\sqrt{-A}\phi), \quad (3.5)$$

$$G(\phi) = -\sqrt{-A} \coth(\sqrt{-A}\phi)$$

$A = 0$ iken,

$$G(\phi) = -\frac{1}{\phi} \quad (3.6)$$

$A > 0$ iken,

$$G(\phi) = \sqrt{A} \tan(\sqrt{A}\phi), \quad (3.7)$$

$$G(\phi) = -\sqrt{A} \cot(\sqrt{A}\phi)$$

fonksiyonları ile (3.1) denkleminin hareketli dalga çözümleri elde edilir. Burada hareketli dalga çözümünün tipi, A nın durumuna göre (3.5)–(3.7) eşitliklerinde görüldüğü gibi belirlenebilir [29–32].

3.3. Genelleştirilmiş Tanh Metodu

2004 yılında Chen ve Zhang, (3.1) denkleminin hareketli dalga çözümlerini elde etmek için yukarıda bahsedilen tanh metotlarında kullanılan Riccati diferensiyel denklemlerinden farklı olarak

$$G'(\phi) = A + BG(\phi) + CG^2(\phi) \quad (3.8)$$

şeklinde bir Riccati diferensiyel denklemi olarak *genelleştirilmiş tanh fonksiyon metodunu* sunmuşlardır [33]. Burada $' = \frac{d}{d\phi}$, $\phi = \phi(x, t) = x - Qt$ ve $A; B; C$ sabitlerdir. (3.8) denkleminin çözümleri olarak göz önüne alınan aşağıdaki fonksiyonlar ile (3.1) denkleminin hareketli dalga çözümleri yazılabilir.

1. $A = C = 1, B = 0$ ise

$$G(\phi) = \tan \phi,$$

2. $A = C = -1, B = 0$ ise

$$G(\phi) = \cot \phi,$$

3. $A = 1, C = -1, B = 0$ ise

$$G(\phi) = \tanh \phi, G(\phi) = \coth \phi,$$

4. $A = C = \frac{1}{2}, B = 0$ ise

$$G(\phi) = \tan \phi \pm \sec \phi, G(\phi) = \csc \phi - \cot \phi, G(\phi) = \frac{\tan \phi}{1 \pm \sec \phi},$$

5. $A = C = -\frac{1}{2}, B = 0$ ise

$$G(\phi) = \cot \phi \pm \csc \phi, G(\phi) = \sec \phi - \tan \phi, G(\phi) = \frac{\cot \phi}{1 \pm \csc \phi},$$

6. $A = \frac{1}{2}, C = -\frac{1}{2}, B = 0$ ise

$$G(\phi) = \coth \phi \pm \csc h\phi, G(\phi) = \tanh \phi \pm i \sec h\phi (i^2 = -1), G(\phi) = \frac{\tanh \phi}{1 \pm \sec h\phi},$$

$$G(\phi) = \frac{\coth \phi}{1 \pm i \csc h\phi},$$

7. $A = 1, B = -2, C = 2$ ise

$$G(\phi) = \frac{\tan \phi}{1 + \tan \phi},$$

8. $A = 1, B = 2, C = 2$ ise

$$G(\phi) = \frac{\tan \phi}{1 - \tan \phi},$$

9. $A = -1, B = 2, C = -2$ ise

$$G(\phi) = \frac{\cot \phi}{1 + \cot \phi},$$

10. $A = -1, B = -2, C = -2$ ise

$$G(\phi) = \frac{\cot \phi}{1 - \cot \phi},$$

11. $A = B = 0, C \neq 0$ ise

$$G(\phi) = \frac{-1}{C\phi + c_0},$$

12. $C = 0, B \neq 0$ ise

$$G(\phi) = \frac{\exp(B\phi) - A}{B}$$

Bu metot ile (3.1) denklemini için aranan çözüm $a_n \neq 0$ olmak üzere,

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^n a_i G^i(\phi) \quad (3.9)$$

şeklinindedir. Bu metot yardımı ile İ.E. İnan lineer olmayan fiziksel bir modelin hareketli dalga çözümlerini elde etmiştir [34].

3.4. Genelleştirilmiş Riccati Denklemi Dönüşüm Metodu

$u = u(x, t)$ bilinmeyen fonksiyon, $U, u = u(x, t)$ fonksiyonunun bir polinomu olmak üzere genel formda lineer olmayan bir kısmi diferensiyel denklem

$$U(u, u_t, u_x, u_{xx}, \dots) = 0 \quad (3.10)$$

şeklinde verilsin. Bu metodun en önemli adımları (G'/G) -açılım metodu [35,36] ile birlikte aşağıdaki şekilde açıklanabilir [37-39]:

1. Adım:

$$u(x, t) = q(\phi), \quad \phi = x - Qt \quad (3.11)$$

hareketli dalga değişkeni olsun. (3.11) denklemi (3.10) denklemine yazılırsa, $q(\phi)$ için ϕ ye göre adi türevler içeren

$$V(q, q_\phi, q_{\phi\phi}, q_{\phi\phi\phi}, \dots) = 0. \quad (3.12)$$

adi diferensiyel denklemini elde edilir.

2. Adım:(3.12) denklemini mümkün olduğunca terim terim integrallenip, integral sabitleri elde edilir. Bu sabitler kolaylık açısından sıfır alınabilir.

3. Adım: $a_n \neq 0$ olmak üzere

$$q(\phi) = \sum_{i=0}^n a_i \left(\frac{G'(\phi)}{G(\phi)} \right)^i \quad (3.13)$$

yazılabilir. Buradaki $G(\phi)$; A, B, C belirli sabitler ve $C \neq 0$ olmak üzere aşağıdaki genelleştirilmiş riccati denkleminin çözümüdür:

$$G'(\phi) = A + BG(\phi) + CG^2(\phi). \quad (3.14)$$

4. Adım: (3.12) denklemindeki en yüksek mertebeden lineer terimler ile lineer olmayan terimler arasında dengeleme yapıp pozitif n tamsayısı elde edilir.

5. Adım: (3.14) denklemini (3.13) denkleminde yerine yazılıp daha sonra (3.12) denkleminde yerine yazılır. (3.12) denkleminde aynı mertebedeki terimlerin katsayılarının eşitliğinden $G^m(\phi)$ ve $G^{-m}(\phi)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) terimlerinin katsayıları sıfıra eşitlenir. Böylece a_i ($i = 1, 2, \dots, n$), A, B, C ve Q için cebirsel denklem sistemleri elde edilir.

6. Adım: Mathematica programı yardımıyla 5. adımda elde edilen denklem sistemleri çözümlenip a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ve Q değerleri elde edilir. Böylece n değeri ile 5. adımda bulunan değerler (3.14) denklemini ile birlikte (3.13) denkleminde yerine yazılıp (3.10) denkleminin tam çözümleri elde edilir.

(3.14) denkleminin yirmi yedi çözüm içeren dört farklı tipi aşağıdaki şekildedir [38]:

1. Tip: $B^2 - 4AC > 0$ ve $BC \neq 0$ veya $AC \neq 0$ iken, (3.14) denkleminin çözümü aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
G_1 &= \frac{-1}{2C}(B + \sqrt{B^2 - 4AC} \tanh(\frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2} \phi)), \\
G_2 &= \frac{-1}{2C}(B + \sqrt{B^2 - 4AC} \coth(\frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2} \phi)), \\
G_3 &= \frac{-1}{2C}(B + \sqrt{B^2 - 4AC}(\tanh(\sqrt{B^2 - 4AC} \phi) \pm i \operatorname{sech}(\sqrt{B^2 - 4AC} \phi))), \\
G_4 &= \frac{-1}{2C}(B + \sqrt{B^2 - 4AC}(\coth(\sqrt{B^2 - 4AC} \phi) \pm \operatorname{csc} h(\sqrt{B^2 - 4AC} \phi))), \\
G_5 &= \frac{-1}{4C}(2B + \sqrt{B^2 - 4AC}(\tanh(\frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{4} \phi) + \coth(\frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{4} \phi))), \\
G_6 &= \frac{1}{2C}(-B + \frac{\sqrt{(R^2 + P^2)(B^2 - 4AC)} - P\sqrt{B^2 - 4AC} \cosh(\sqrt{B^2 - 4AC}\phi)}{P \sinh(\sqrt{B^2 - 4AC}\phi) + R}), \\
G_7 &= \frac{1}{2C}(-B + \frac{\sqrt{(R^2 - P^2)(B^2 - 4AC)} + P\sqrt{B^2 - 4AC} \sinh(\sqrt{B^2 - 4AC}\phi)}{P \cosh(\sqrt{B^2 - 4AC}\phi) + R}), \\
G_8 &= \frac{2A \cosh(\frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2} \phi)}{\sqrt{B^2 - 4AC} \sinh(\frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2} \phi) - B \cosh(\frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2} \phi)}, \\
G_9 &= \frac{-2A \sinh(\frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2} \phi)}{B \sinh(\frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2} \phi) - \sqrt{B^2 - 4AC} \cosh(\frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2} \phi)}, \\
G_{10} &= \frac{2A \cosh(\sqrt{B^2 - 4AC}\phi)}{\sqrt{B^2 - 4AC} \sinh(\sqrt{B^2 - 4AC}\phi) - B \cosh(\sqrt{B^2 - 4AC}\phi) \pm i\sqrt{B^2 - 4AC}}, \\
G_{11} &= \frac{2A \sinh(\sqrt{B^2 - 4AC}\phi)}{-B \sinh(\sqrt{B^2 - 4AC}\phi) + \sqrt{B^2 - 4AC} \cosh(\sqrt{B^2 - 4AC}\phi) \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}, \\
G_{12} &= \frac{4A \sinh(\frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{4} \phi) \cosh(\frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{4} \phi)}{-2B \sinh(\frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{4} \phi) \cosh(\frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{4} \phi) + 2\sqrt{B^2 - 4AC} \cosh^2(\frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{4} \phi) - \sqrt{B^2 - 4AC}}
\end{aligned}$$

Burada P ve R , $R^2 - P^2 > 0$ eşitsizliğini sağlayan sıfırdan farklı reel sabitlerdir.

2. Tip: $B^2 - 4AC < 0$ ve $BC \neq 0$ veya $AC \neq 0$ iken, (3.14) denkleminin çözümü aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
G_{13} &= \frac{1}{2C}(-B + \sqrt{4AC - B^2} \tan(\frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2} \phi)), \\
G_{14} &= \frac{-1}{2C}(B + \sqrt{4AC - B^2} \cot(\frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2} \phi)), \\
G_{15} &= \frac{1}{2C}(-B + \sqrt{4AC - B^2}(\tan(\sqrt{4AC - B^2} \phi) \pm \sec(\sqrt{4AC - B^2} \phi))), \\
G_{16} &= \frac{-1}{2C}(B + \sqrt{4AC - B^2}(\cot(\sqrt{4AC - B^2} \phi) \pm \csc(\sqrt{4AC - B^2} \phi))), \\
G_{17} &= \frac{1}{4C}(-2B + \sqrt{4AC - B^2}(\tan(\frac{\sqrt{4AC - B^2}}{4} \phi) - \cot(\frac{\sqrt{4AC - B^2}}{4} \phi))), \\
G_{18} &= \frac{1}{2C}(-B + \frac{\pm \sqrt{(P^2 - R^2)(4AC - B^2)} - P\sqrt{4AC - B^2} \cos(\sqrt{4AC - B^2} \phi)}{P \sin(\sqrt{4AC - B^2} \phi) + R}), \\
G_{19} &= \frac{1}{2C}(-B - \frac{\pm \sqrt{(P^2 - R^2)(4AC - B^2)} + P\sqrt{4AC - B^2} \cos(\sqrt{4AC - B^2} \phi)}{P \sin(\sqrt{4AC - B^2} \phi) + R}).
\end{aligned}$$

Burada P ve R , $P^2 - R^2 > 0$ eşitsizliğini sağlayan sıfırdan farklı reel sabitlerdir.

$$\begin{aligned}
G_{20} &= \frac{-2A \cos(\frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2} \phi)}{\sqrt{4AC - B^2} \sin(\frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2} \phi) + B \cos(\frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2} \phi)}, \\
G_{21} &= \frac{2A \sin(\frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2} \phi)}{-B \sin(\frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2} \phi) + \sqrt{4AC - B^2} \cos(\frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2} \phi)}, \\
G_{22} &= \frac{-2A \cos(\sqrt{4AC - B^2} \phi)}{\sqrt{4AC - B^2} \sin(\sqrt{4AC - B^2} \phi) + B \cos(\sqrt{4AC - B^2} \phi) \pm \sqrt{4AC - B^2}}, \\
G_{23} &= \frac{2A \sin(\sqrt{4AC - B^2} \phi)}{-B \sin(\sqrt{4AC - B^2} \phi) + \sqrt{4AC - B^2} \cos(\sqrt{4AC - B^2} \phi) \pm \sqrt{4AC - B^2}}, \\
G_{24} &= \frac{4A \sin(\frac{\sqrt{4AC - B^2}}{4} \phi) \cos(\frac{\sqrt{4AC - B^2}}{4} \phi)}{-2B \sin(\frac{\sqrt{4AC - B^2}}{4} \phi) \cos(\frac{\sqrt{4AC - B^2}}{4} \phi) + 2\sqrt{4AC - B^2} \cos^2(\frac{\sqrt{4AC - B^2}}{4} \phi) - \sqrt{4AC - B^2}}.
\end{aligned}$$

3. Tip: $A = 0$ ve $BC \neq 0$ iken, d_1 belirli bir sabit olmak üzere (3.14) denkleminin çözümü

$$\begin{aligned}
G_{25} &= \frac{-Bd_1}{C(d_1 + \cosh(B\phi) - \sinh(B\phi))}, \\
G_{26} &= \frac{-B(\cosh(B\phi) + \sinh(B\phi))}{C(d_1 + \cosh(B\phi) + \sinh(B\phi))}
\end{aligned}$$

şeklindedir.

4. Tip: $C \neq 0$ ve $B = A = 0$ iken, c_1 belirli bir sabit olmak üzere (3.14) denkleminin çözümü

$$G_{27} = \frac{-1}{C\phi + c_1}$$

şeklindedir.

3.5. Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM)

Bu metodun temel kavramlarını tanımlamak için

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega \quad (3.15)$$

lineer olmayan diferensiyel denklemi

$$B(u, \partial u / \partial n) = 0, \quad r \in \Gamma \quad (3.16)$$

sınır koşulları ile verilsin [40].

Burada A bir genel diferensiyel operatörü, B sınır operatörü, $f(r)$ bilinen bir analitik fonksiyon ve Γ, Ω tanım kümesinin sınıdır.

Burada A operatörü, lineer terim L ve lineer olmayan terim N olarak iki bölüme ayrılabilir. Bu nedenle (3.15) denklemi

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \quad (3.17)$$

şeklinde yazılabilir. $p \in [0, 1]$ ve $r \in \Omega$ olmak üzere

$$H(V, p) = (1 - p) [L(V) - L(u_0)] + p [A(V) - f(r)] = 0 \quad (3.18)$$

veya

$$H(V, p) = L(V) - L(u_0) + pL(u_0) + p [N(V) - f(r)] = 0 \quad (3.19)$$

şartlarını sağlayan bir

$$V(r, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow R \quad (3.20)$$

homotopisi kurulsun. Burada u_0 , (3.16) sınır şartlarını sağlayan (3.15) denkleminin başlangıç yaklaşımıdır.

(3.18) ve (3.19) denklemlerinden p parametresi 0'dan 1'e değişirken

$$H(V, 0) = L(V) - L(u_0) = 0$$

$$H(V, 1) = L(V) + N(V) - f(r) = 0$$

eşitlikleri yazılır. Burada $H(V, 0)$ ve $H(V, 1)$ homotopiktirler.

(3.18) ve (3.19) denklemlerinin çözümünün, p nin bir kuvvet serisi olarak yazılabildiği varsayılırsa

$$V = V_0 + pV_1 + p^2V_2 + \dots, \quad (3.21)$$

olur.

(3.21) eşitliğinde $p \rightarrow 1$ için limit alınırsa (3.15) denkleminin yaklaşık çözümü

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} V = V_0 + V_1 + V_2 + \dots \quad (3.22)$$

şeklinde bulunur. (3.22) serisi pek çok durum için yakınsaktır. Bununla beraber, yakınsaklık aralığı lineer olmayan operatör $A(v)$ ye bağlıdır [41,42].

4. BÖLÜM

BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ANALİTİK VE YARI ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ İÇİN UYGULAMALAR

Bu bölümde üçüncü bölümde analizleri yapılan genişletilmiş tanh metodu, geliştirilmiş tanh metodu, genelleştirilmiş Riccati denklemi dönüşüm metodu ve HPM kullanılarak bazı lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin analitik ve yarı analitik çözümleri elde edilecektir.

4. 1. Genişletilmiş Tanh Metodu İçin Uygulamalar

4.1.1. Kaup–Kupershmidt Denkleminin Genişletilmiş Tanh Metodu İle Analitik Çözümleri

$$u_t + 45u^2u_x - \frac{75}{2}u_xu_{xx} - 15uu_{xxx} + u_{xxxx} = 0 \quad (4.1)$$

Kaup–Kupershmidt denklemini ele alalım [2]. u^2u_x , u_xu_{xx} , uu_{xxx} terimlerinden biri ile u_{xxxx} arasında dengeleme yapılırsa dengeleme terimi $m = 2$ olur.

Böylece $\phi = \phi(x, t) = x - Qt$ olmak üzere, $u(x, t) = q(\phi)$ dönüşümü yapılsa

$$-Qq' + 45q^2q' - \frac{75}{2}q'q'' - 15qq'' + q'''' = 0 \quad (4.2)$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklem ϕ ye göre bir kez integrallenirse

$$-Qq + 15q^3 - \frac{45}{4}(q')^2 - 15qq'' + q'''' + K = 0 \quad (4.3)$$

denklemi elde edilir. Burada K daha sonra belirlenecek olan bir integral sabitidir.

Dengeleme terimi $m = 2$ olduğundan $a_2 \neq 0$ olmak üzere

$$q = a_0 + a_1G(\phi) + a_2G^2(\phi) \quad (4.4)$$

dönüşümü yapıp

$$G'(\phi) = A + G^2(\phi)$$

Riccati diferensiyel denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} & -Qa_0 + 15a_0^3 + 16A^2a_1G(\phi) - Qa_1G(\phi) + 40Aa_1G^3(\phi) \\ & + 24a_1G^5(\phi) - 30Aa_0a_1G(\phi) - 30a_0a_1G^3(\phi) \\ & + 45a_0^2a_1G(\phi) - \frac{45}{4}A^2a_1^2 - \frac{105}{2}Aa_1^2G^2(\phi) - \frac{165}{4}a_1^2G^4(\phi) \\ & + 45a_0a_1^2G^2(\phi) + 15a_1^3G^3(\phi) + 16A^3a_2 - Qa_2G^2(\phi) \\ & + 136A^2a_2G^2(\phi) + 240Aa_2G^4(\phi) + 120a_2G^6(\phi) - 30A^2a_2a_0 \\ & - 120Aa_0a_2G^2(\phi) - 90a_0a_2G^4(\phi) + 45a_0^2a_2G^2(\phi) \\ & - 75A^2a_1a_2G(\phi) - 240Aa_1a_2G^3(\phi) - 165a_1a_2G^5(\phi) \\ & + 90a_0a_1a_2G^3(\phi) + 45a_1^2a_2G^4(\phi) - 75A^2a_2^2G^2(\phi) - 210Aa_2^2G^4(\phi) \\ & - 135a_2^2G^6(\phi) + 45a_0a_2^2G^4(\phi) + 45a_1a_2^2G^5(\phi) + 15a_2^3G^6(\phi) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $G(\phi)$ 'nin aynı kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse a_0 , a_1 , a_2 , Q ve K için cebirsel denklem sistemleri elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemlerinden

$$\begin{aligned} i) \quad a_0 &= \frac{2A}{3}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad Q = A^2, \quad K = \frac{2A^3}{9}, \\ ii) \quad a_0 &= \frac{16A}{3}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 8, \quad Q = 176A^2, \quad K = -\frac{1664A^3}{9}, \end{aligned}$$

elde edilir.

i) $A < 0$ iken

$$\begin{aligned} G(\phi) &= -\sqrt{-A} \tanh(\sqrt{-A}\phi), \\ G(\phi) &= -\sqrt{-A} \coth(\sqrt{-A}\phi) \end{aligned}$$

olduğundan

$$u_1(x, t) = \frac{2A}{3} - A \tanh^2(\sqrt{-A}(-A^2t + x)),$$

$$u_2(x, t) = \frac{2A}{3} - A \coth^2(\sqrt{-A}(-A^2t + x))$$

$A = 0$ iken

$$G(\phi) = -\frac{1}{\phi}$$

olduğundan

$$u_3(x, t) = \frac{1}{x^2}$$

$A > 0$ iken

$$G(\phi) = \sqrt{A} \tan(\sqrt{A}\phi),$$

$$G(\phi) = -\sqrt{A} \cot(\sqrt{A}\phi)$$

olduğundan

$$u_4(x, t) = \frac{2A}{3} + A \tan^2(\sqrt{A}(-A^2t + x)),$$

$$u_5(x, t) = \frac{2A}{3} + A \cot^2(\sqrt{A}(-A^2t + x))$$

ve

ii) $A < 0$ iken

$$G(\phi) = -\sqrt{-A} \tanh(\sqrt{-A}\phi),$$

$$G(\phi) = -\sqrt{-A} \coth(\sqrt{-A}\phi)$$

olduğundan

$$u_6(x, t) = \frac{16A}{3} - 8A \tanh^2(\sqrt{-A}(-176A^2t + x)),$$

$$u_7(x, t) = \frac{16A}{3} - 8A \coth^2(\sqrt{-A}(-176A^2t + x))$$

$A = 0$ iken

$$G(\phi) = -\frac{1}{\phi}$$

olduğundan

$$u_8(x, t) = \frac{8}{x^2}$$

$A > 0$ iken

$$G(\phi) = \sqrt{A} \tan(\sqrt{A}\phi),$$

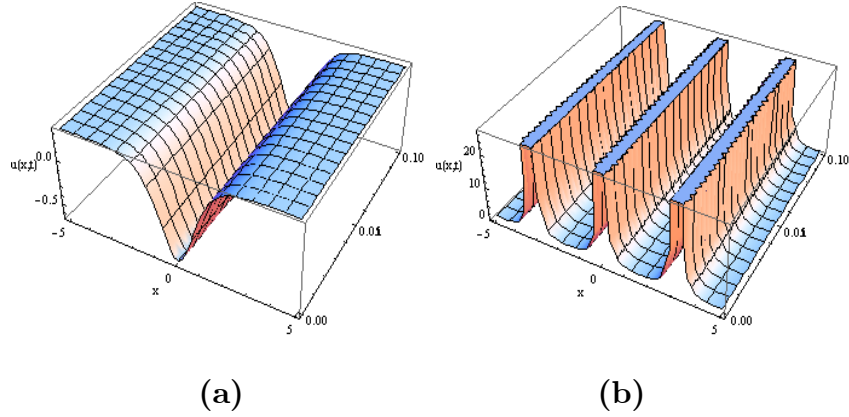
$$G(\phi) = -\sqrt{A} \cot(\sqrt{A}\phi)$$

olduğundan

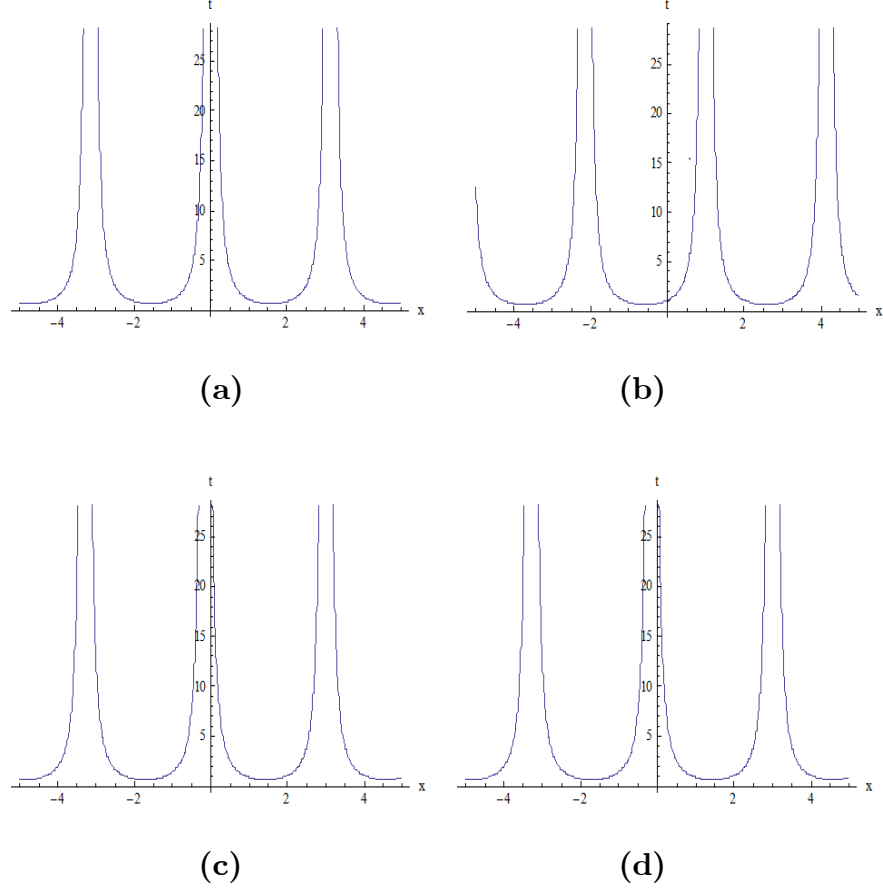
$$u_9(x, t) = \frac{16A}{3} + 8A \tan^2(\sqrt{A}(-176A^2t + x)),$$

$$u_{10}(x, t) = \frac{16A}{3} + 8A \cot^2(\sqrt{A}(-176A^2t + x))$$

fonksiyonları ile (4.1) Kaup–Kupershmidt denkleminin hareketli dalga çözümleri elde edilir.



Şekil 3. Kaup–Kupershmidt denkleminin $u_1(x, t)$ ve $u_4(x, t)$ çözümü için üç boyutlu periyodik dalga görünümü, **a)** $u_1(x, t)$ ($A = -1$) **b)** $u_4(x, t)$ ($A = 1$)



Şekil 4. Kaup–Kupershmidt denkleminin $u_4(x, t)$ çözümü için iki boyutlu periyodik dalga grafiği, **a)** $t = 0$, **b)** $t = 1$, **c)** $t = 3$, **d)** $t = 5$.

Yukarıda Şekil 4 de zaman ilerledikçe Kaup–Kupershmidt denkleminin $u_1(x, t)$ çözümü için sağa doğru hareket eden periyodik dalga grafikleri görülmektedir.

4.1.2. Drinfeld-Sokolov-Wilson Denklem Sisteminin Genişletilmiş Tanh Metodu İle Analitik Çözümleri

$$u_t - 3ww_x = 0, \quad (4.5)$$

$$w_t - 2w_{xxx} - 2ww_x - wu_x = 0$$

Drinfeld-Sokolov-Wilson denklem sistemini ele alalım [8]. u_t ile $3ww_x$ ve w_{xxx} ile wu_x arasında dengeleme yapılırsa dengeleme terimi $m = 2$ ve $n = 1$ olur. Böylece $\phi = \phi(x, t) = x - Qt$ olmak üzere, $u(x, t) = q(\phi)$ ve $w(x, t) = s(\phi)$ dönüşümü yapılırsa

$$-Qq' - 3ss' = 0, \quad (4.6)$$

$$-sq' - Qs' - 2qs' - 2s''' = 0 \quad (4.7)$$

diferensiyel denklem sistemi elde edilir. Dengeleme terimi $m = 2$ ve $n = 1$ olduğundan $a_2 \neq 0$ olmak üzere

$$q = a_0 + a_1G(\phi) + a_2G^2(\phi), \quad (4.8)$$

$$s = b_0 + b_1G(\phi) \quad (4.9)$$

dönüşümü yapıp

$$G'(\phi) = A + G^2(\phi)$$

Riccati diferensiyel denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} & -AQa_1 - Qa_1G^2(\phi) - 2AQa_2G(\phi) - 2Qa_2G^3(\phi) - 3Ab_0b_1 \\ & -3b_0b_1G^2(\phi) - 3Ab_1^2G(\phi) - 3b_1^2G^3(\phi) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -Aa_1b_0 - a_1b_0G^2(\phi) - 2Aa_2b_0G(\phi) - 2a_2b_0G^3(\phi) - AQb_1 - 4A^2b_1 \\ & -Qb_1G^2(\phi) - 16Ab_1G^2(\phi) - 12b_1G^4(\phi) - 2Aa_0b_1 - 2a_0b_1G^2(\phi) \\ & -3Aa_1b_1G(\phi) - 3a_1b_1G^3(\phi) - 4Aa_2b_1G^4(\phi) - 4a_2b_1G^4(\phi) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $G(\phi)$ 'nin aynı kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse a_0 , a_1 , a_2 , b_0 , b_1 ve Q için cebirsel denklem sistemleri elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemlerinden

$$\begin{aligned} i) \quad a_0 &= \frac{-Q - 4A}{2}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -3, \\ b_0 &= 0, \quad b_1 = \sqrt{2Q}, \\ ii) \quad a_0 &= \frac{-Q - 4A}{2}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -3, \\ b_0 &= 0, \quad b_1 = -\sqrt{2Q} \end{aligned}$$

elde edilir.

i) $A < 0$ iken,

$$\begin{aligned} G(\phi) &= -\sqrt{-A} \tanh(\sqrt{-A}\phi), \\ G(\phi) &= -\sqrt{-A} \coth(\sqrt{-A}\phi) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \frac{-Q - 4A}{2} + 3A \tanh^2(\sqrt{-A}(-Qt + x)), \\ w_1(x, t) &= -\sqrt{-2AQ} \tanh(\sqrt{-A}(-Qt + x)), \\ u_2(x, t) &= \frac{-Q - 4A}{2} + 3A \coth^2(\sqrt{-A}(-Qt + x)), \\ w_2(x, t) &= -\sqrt{-2AQ} \coth(\sqrt{-A}(-Qt + x)) \end{aligned}$$

$A = 0$ iken

$$G(\phi) = -\frac{1}{\phi},$$

olduğundan

$$\begin{aligned} u_3(x, t) &= -\frac{Q}{2} - \frac{3}{(-Qt + x)^2}, \\ w_3(x, t) &= -\frac{\sqrt{2Q}}{-Qt + x} \end{aligned}$$

$A > 0$ iken

$$G(\phi) = \sqrt{A} \tan(\sqrt{A}\phi),$$

$$G(\phi) = -\sqrt{A} \cot(\sqrt{A}\phi)$$

olduğundan

$$u_4(x, t) = \frac{-Q - 4A}{2} - 3A \tan^2(\sqrt{A}(-Qt + x)),$$

$$w_4(x, t) = \sqrt{2AQ} \tan(\sqrt{A}(-Qt + x)),$$

$$u_5(x, t) = \frac{-Q - 4A}{2} - 3A \cot^2(\sqrt{A}(-Qt + x)),$$

$$w_5(x, t) = -\sqrt{2AQ} \cot(\sqrt{A}(-Qt + x))$$

ve

ii) $A < 0$ iken,

$$G(\phi) = -\sqrt{-A} \tanh(\sqrt{-A}\phi),$$

$$G(\phi) = -\sqrt{-A} \coth(\sqrt{-A}\phi)$$

olduğundan

$$u_6(x, t) = \frac{-Q - 4A}{2} + 3A \tanh^2(\sqrt{-A}(-Qt + x)),$$

$$w_6(x, t) = \sqrt{-2AQ} \tanh(\sqrt{-A}(-Qt + x)),$$

$$u_7(x, t) = \frac{-Q - 4A}{2} + 3A \coth^2(\sqrt{-A}(-Qt + x)),$$

$$w_7(x, t) = \sqrt{-2AQ} \coth(\sqrt{-A}(-Qt + x))$$

$A = 0$ iken

$$G(\phi) = -\frac{1}{\phi},$$

olduğundan

$$u_8(x, t) = -\frac{Q}{2} - \frac{3}{(-Qt + x)^2},$$

$$w_8(x, t) = \frac{\sqrt{2Q}}{-Qt + x}$$

$A > 0$ iken

$$G(\phi) = \sqrt{A} \tan(\sqrt{A}\phi),$$

$$G(\phi) = -\sqrt{A} \cot(\sqrt{A}\phi)$$

olduğundan

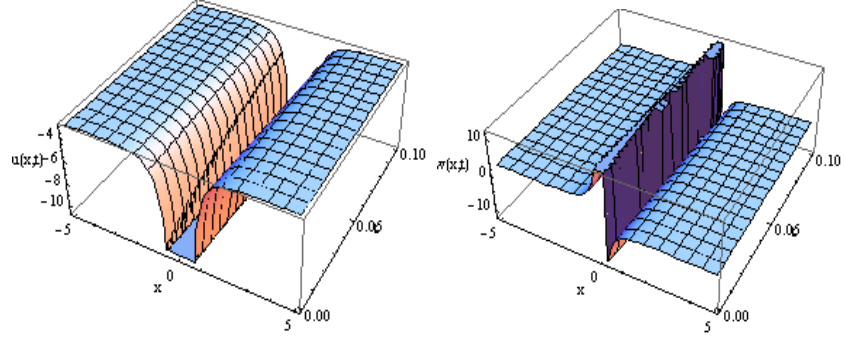
$$u_9(x, t) = \frac{-Q - 4A}{2} - 3A \tan^2(\sqrt{A}(-Qt + x)),$$

$$w_9(x, t) = -\sqrt{2AQ} \tan(\sqrt{A}(-Qt + x)),$$

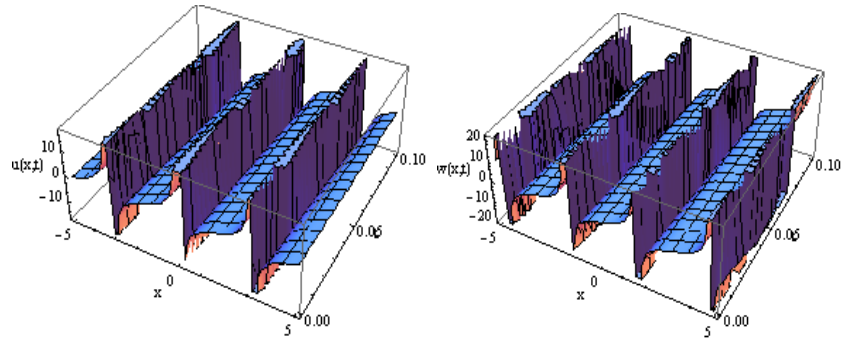
$$u_{10}(x, t) = \frac{-Q - 4A}{2} - 3A \cot^2(\sqrt{A}(-Qt + x)),$$

$$w_{10}(x, t) = \sqrt{2AQ} \cot(\sqrt{A}(-Qt + x))$$

fonksiyonları ile (4.5) DSW denklem sisteminin hareketli dalga çözümleri elde edilir.



(a)

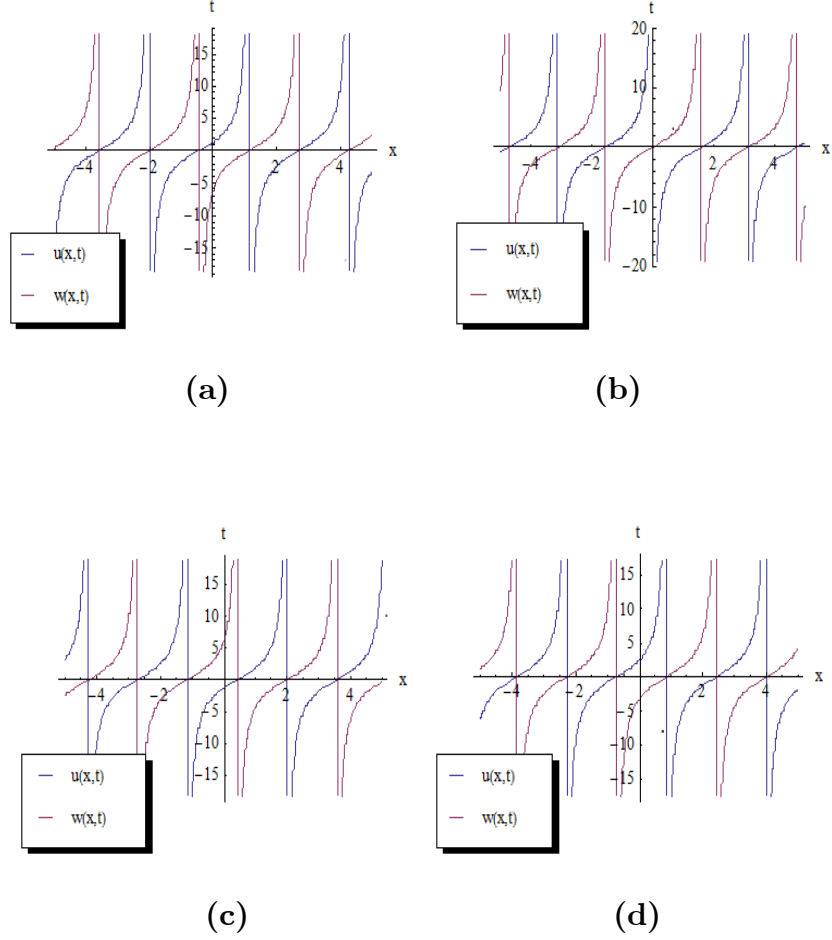


(b)

Şekil 5. DSW denklem sisteminin $u_2(x, t)$, $w_2(x, t)$ ve $u_4(x, t)$, $w_4(x, t)$ çözümleri için üç boyutlu periyodik dalga görünümü,

a) $u_2(x, t)$, $w_2(x, t)$ ($A = -1, Q = 4$) **b)** $u_4(x, t)$, $w_4(x, t)$ ($A = 1, Q = 4$).

Burada sol taraftaki üç boyutlu dalga görünümleri $u(x, t)$ çözümleri için, sağ taraftaki üç boyutlu dalga görünümleri $w(x, t)$ çözümleri için çizilmiştir.



Şekil 6. DSW denklem sisteminin $u_4(x, t), w_4(x, t)$ çözümü için iki boyutlu periyodik dalga grafiği, **a)** $t = -0.5$, **b)** $t = 0$, **c)** $t = 0.5$, **d)** $t = 1$.

Yukarıda Şekil 6 da zaman ilerledikçe DSW denklem sisteminin $u_4(x, t)$ ve $w_4(x, t)$ çözümü için sağa doğru hareket eden periyodik dalga grafikleri görülmektedir.

4.1.3. Hirota-Satsuma Denklem Sisteminin Genişletilmiş Tanh Metodu İle Analitik Çözümleri

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{2}u_{xxx} + 3uu_x - 3ww_x, \\ w_t &= -w_{xxx} - 3uw_x \end{aligned} \quad (4.10)$$

Hirota-Satsuma denklem sistemini ele alalım [12]. $\phi = \phi(x, t) = x - Qt$ olmak üzere, $u(x, t) = q(\phi)$ ve $w(x, t) = s(\phi)$ dönüşümü yapılırsa

$$-Qq' - 3qq' + 3ss' - \frac{1}{2}q''' = 0, \quad (4.11)$$

$$-Qs' + 3qs' + s''' = 0 \quad (4.12)$$

diferensiyel denklem sistemi elde edilir. w_{xxx} ile uw_x ve u_{xxx} ile uu_x , ww_x terimlerinden biri arasında dengeleme yapılırsa dengeleme terimi $m = 2$ ve $n = 2$ olur.

Dengeleme terimi $m = 2$ ve $n = 2$ olduğundan $a_2 \neq 0$ olmak üzere

$$q = a_0 + a_1G(\phi) + a_2G^2(\phi), \quad (4.13)$$

$$s = b_0 + b_1G(\phi) + b_2G^2(\phi) \quad (4.14)$$

dönüşümü yapıp

$$G'(\phi) = A + G^2(\phi)$$

Riccati diferensiyel denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} &-AQa_1 - A^2a_1 - Qa_1G^2(\phi) - 4Aa_1G^2(\phi) - 3a_1G^4(\phi) \\ &- 3Aa_0a_1 - 3a_0a_1G^2(\phi) - 3Aa_1^2G(\phi) - 3a_1^2G^3(\phi) - 2AQa_2G(\phi) \\ &- 8A^2a_2G(\phi) - 2Qa_2G^3(\phi) - 20Aa_2G^3(\phi) - 12a_2G^5(\phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -6Aa_0a_2G(\phi) - 6a_0a_2G^3(\phi) - 9Aa_1a_2G^2(\phi) - 9a_1a_2G^4(\phi) - 6Aa_2^2G^3(\phi) \\
& - 6a_2^2G^5(\phi) + 3Ab_0b_1 + 3b_0b_1G^2(\phi) + 3Ab_1^2G(\phi) + 3b_1^2G^3(\phi) + 6Ab_0b_2G(\phi) \\
& + 6b_0b_2G^3(\phi) + 9Ab_1b_2G^2(\phi) + 9b_1b_2G^4(\phi) + 6Ab_2^2G^3(\phi) + 6b_2^2G^5(\phi) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -AQb_1 + 2A^2b_1 - Qb_1G^2(\phi) + 8Ab_1G^2(\phi) + 6b_1G^4(\phi) + 3Aa_0b_1 \\
& + 3a_0b_1G^2(\phi) + 3Aa_1b_1G(\phi) + 3a_1b_1G^3(\phi) + 3Aa_2b_1G^2(\phi) \\
& + 3a_2b_1G^4(\phi) + 2AQb_2G(\phi) + 16A^2b_2G(\phi) - 2AQb_2G(\phi) \\
& + 40Ab_2G^3(\phi) + 24b_2G^5(\phi) + 6Aa_0b_2G(\phi) + 6a_0b_2G^3(\phi) \\
& + 6Aa_1b_2G^2(\phi) + 6a_1b_2G^4(\phi) + 6Aa_2b_2G^3(\phi) + 6a_2b_2G^5(\phi) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Burada $G(\phi)$ 'nin aynı kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ ve Q için cebirsel denklem sistemleri elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemlerinden

$$\begin{aligned}
i) \quad a_0 &= \frac{Q - 8A}{3}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -4, \\
b_0 &= \frac{2(-\sqrt{2}Q + 2\sqrt{2}A)}{3}, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 2\sqrt{2}, \\
ii) \quad a_0 &= \frac{Q - 8A}{3}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -4, \\
b_0 &= -\frac{2(-\sqrt{2}Q + 2\sqrt{2}A)}{3}, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

i) $A < 0$ iken

$$\begin{aligned}
G(\phi) &= -\sqrt{-A} \tanh(\sqrt{-A}\phi), \\
G(\phi) &= -\sqrt{-A} \coth(\sqrt{-A}\phi)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
u_1(x, t) &= \frac{Q - 8A}{3} + 4A \tanh^2(\sqrt{-A}(-Qt + x)), \\
w_1(x, t) &= \frac{2(-\sqrt{2}Q + 2\sqrt{2}A)}{3} - 2\sqrt{2}A \tanh^2(\sqrt{-A}(-Qt + x)), \\
u_2(x, t) &= \frac{Q - 8A}{3} + 4A \coth^2(\sqrt{-A}(-Qt + x)), \\
w_2(x, t) &= \frac{2(-\sqrt{2}Q + 2\sqrt{2}A)}{3} - 2\sqrt{2}A \coth^2(\sqrt{-A}(-Qt + x))
\end{aligned}$$

$A = 0$ iken

$$G(\phi) = -\frac{1}{\phi}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
u_3(x, t) &= \frac{Q}{3} - \frac{4}{(-Qt + x)^2}, \\
w_3(x, t) &= -\frac{2\sqrt{2}Q}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{(-Qt + x)^2}
\end{aligned}$$

$A > 0$ iken

$$\begin{aligned}
G(\phi) &= \sqrt{A} \tan(\sqrt{A}\phi), \\
G(\phi) &= -\sqrt{A} \cot(\sqrt{A}\phi)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
u_4(x, t) &= \frac{Q - 8A}{3} - 4A \tan^2(\sqrt{A}(-Qt + x)), \\
w_4(x, t) &= \frac{2(-\sqrt{2}Q + 2\sqrt{2}A)}{3} + 2\sqrt{2}A \tan^2(\sqrt{A}(-Qt + x)), \\
u_5(x, t) &= \frac{Q - 8A}{3} - 4A \cot^2(\sqrt{A}(-Qt + x)), \\
w_5(x, t) &= -\frac{2(-\sqrt{2}Q + 2\sqrt{2}A)}{3} - 2\sqrt{2}A \cot^2(\sqrt{A}(-Qt + x))
\end{aligned}$$

ii) $A < 0$ iken

$$\begin{aligned}
G(\phi) &= -\sqrt{-A} \tanh(\sqrt{-A}\phi), \\
G(\phi) &= -\sqrt{-A} \coth(\sqrt{-A}\phi)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
u_6(x, t) &= \frac{Q - 8A}{3} + 4A \tanh^2(\sqrt{-A}(-Qt + x)), \\
w_6(x, t) &= -\frac{2(-\sqrt{2}Q + 2\sqrt{2}A)}{3} + 2\sqrt{2}A \tanh^2(\sqrt{-A}(-Qt + x)), \\
u_7(x, t) &= \frac{Q - 8A}{3} + 4A \coth^2(\sqrt{-A}(-Qt + x)), \\
w_7(x, t) &= -\frac{2(-\sqrt{2}Q + 2\sqrt{2}A)}{3} + 2\sqrt{2}A \coth^2(\sqrt{-A}(-Qt + x))
\end{aligned}$$

$A = 0$ iken

$$G(\phi) = -\frac{1}{\phi}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
u_8(x, t) &= \frac{Q}{3} - \frac{4}{(-Qt + x)^2}, \\
w_8(x, t) &= \frac{2\sqrt{2}Q}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{(-Qt + x)^2}
\end{aligned}$$

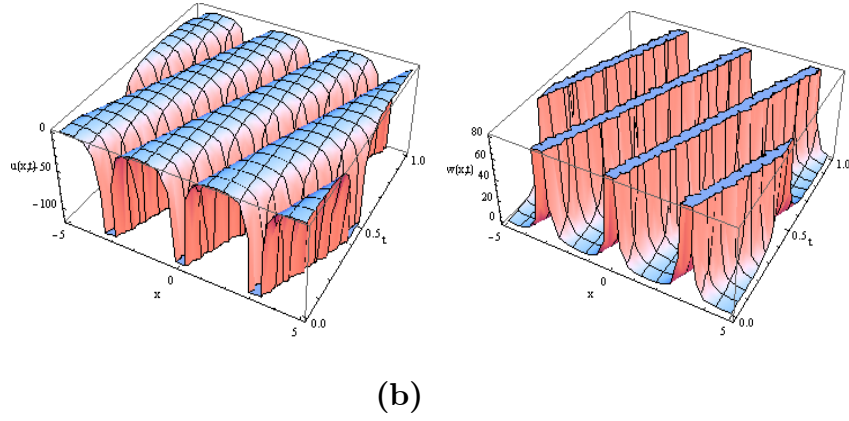
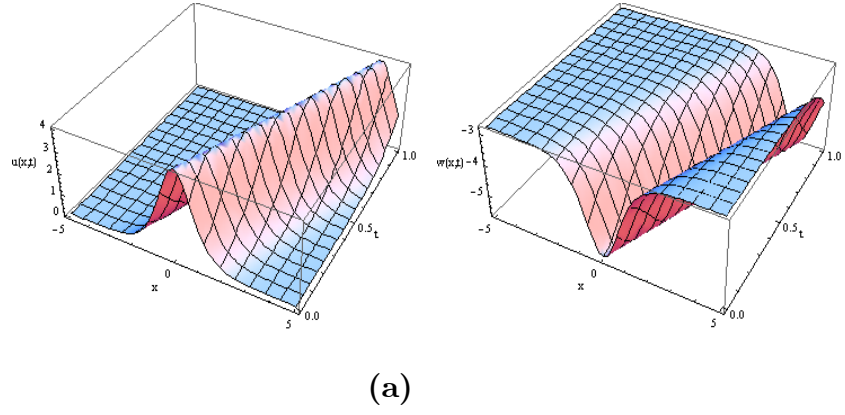
$A > 0$ iken

$$\begin{aligned}
G(\phi) &= \sqrt{A} \tan(\sqrt{A}\phi), \\
G(\phi) &= -\sqrt{A} \cot(\sqrt{A}\phi)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
u_9(x, t) &= \frac{Q - 8A}{3} - 4A \tan^2(\sqrt{A}(-Qt + x)), \\
w_9(x, t) &= -\frac{2(-\sqrt{2}Q + 2\sqrt{2}A)}{3} - 2\sqrt{2}A \tan^2(\sqrt{A}(-Qt + x)), \\
u_{10}(x, t) &= \frac{Q - 8A}{3} - 4A \cot^2(\sqrt{A}(-Qt + x)), \\
w_{10}(x, t) &= -\frac{2(-\sqrt{2}Q + 2\sqrt{2}A)}{3} - 2\sqrt{2}A \cot^2(\sqrt{A}(-Qt + x))
\end{aligned}$$

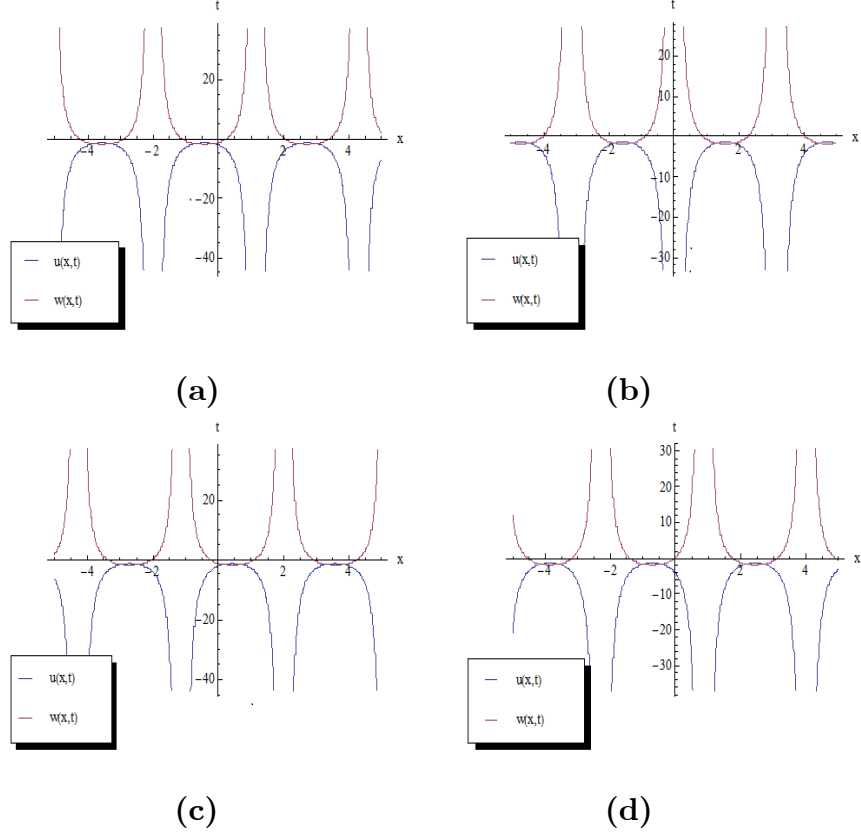
fonksiyonları ile Hirota-Satsuma denklem sisteminin hareketli dalga çözümleri elde edilir.



Şekil 7. Hirota-Satsuma denklem sisteminin $u_1(x, t), w_1(x, t)$ ve $u_5(x, t), w_5(x, t)$ çözümleri için üç boyutlu periyodik dalga görünümü,

a) $u_1(x, t), w_1(x, t)$ ($A = -1, Q = 4$), **b)** $u_5(x, t), w_5(x, t)$ ($A = 1, Q = 4$)

Burada sol taraftaki üç boyutlu dalga görünümüleri $u(x, t)$ çözümleri için, sağ taraftaki üç boyutlu dalga görünümüleri $w(x, t)$ çözümleri için çizilmiştir.



Şekil 8. Hirota-Satsuma denklem sisteminin $u_5(x, t)$ ve $w_5(x, t)$ çözümü için iki boyutlu periyodik dalga grafiği, **a)** $t = -0.5$, **b)** $t = 0$, **c)** $t = 0.5$, **d)** $t = 1$.

Yukarıda Şekil 8 de zaman ilerledikçe Hirota-Satsuma denklem sisteminin $u_5(x, t)$ ve $w_5(x, t)$ çözümü için sağa doğru hareket eden periyodik dalga grafikleri görülmektedir.

4. 2. Genelleştirilmiş Tanh Metodu İçin Uygulamalar

4.2.1. Kaup–Kupershmidt Denkleminin Genelleştirilmiş Tanh Metodu İle Analitik Çözümleri

$$u_t + 45u^2u_x - \frac{75}{2}u_xu_{xx} - 15uu_{xxx} + u_{xxxx} = 0 \quad (4.15)$$

Kaup–Kupershmidt denklemini ele alalım [2]. $\phi = \phi(x, t) = x - Qt$ olmak üzere $u(x, t) = q(\phi)$ dönüşümü yapılırsa

$$-Qq' + 45q^2q' - \frac{75}{2}q'q'' - 15qq''' + q'''' = 0,$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklem ϕ ye göre bir kez integrallenirse

$$-Qq + 15q^3 - \frac{45}{4}(q')^2 - 15qq'' + q'''' + K = 0 \quad (4.16)$$

denklemini elde edilir. Burada K daha sonra belirlenecek olan bir integral sabitidir.

u_{xxxx} ile u^2u_x , u_xu_{xx} , uu_{xxx} terimlerinden biri arasında dengeleme yapılırsa dengeleme terimi $m = 2$ olur.

$$G'(\phi) = A + BG(\phi) + CG^2(\phi) \quad (4.17)$$

olmak üzere $a_2 \neq 0$ için

$$q = a_0 + a_1G(\phi) + a_2G^2(\phi) \quad (4.18)$$

seçilebilir.

(4.18) denklemini (4.16) denkleminde yerine yazılır ve a_0 , a_1 , a_2 , Q ve K için elde edilen denklemde Mathematica yardımıyla $G(\phi)'$ nin kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse, bu sistemin çözümünden

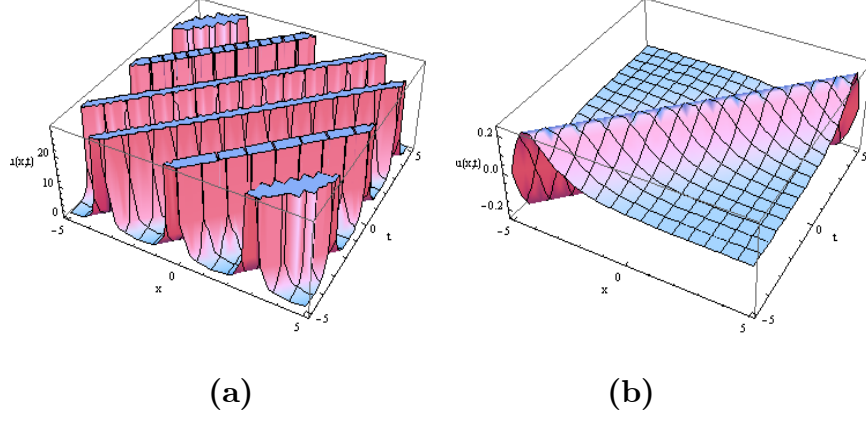
$$\begin{aligned}
i) \quad a_0 &= \frac{B^2 + 8AC}{12}, \quad a_1 = BC, \quad a_2 = C^2, \\
Q &= \frac{B^4 - 8AB^2C + 16A^2C^2}{16}, \\
K &= \frac{-B^6 + 12AB^4C - 48A^2B^2C^2 + 64A^3C^3}{288}, \\
ii) \quad a_0 &= \frac{2(B^2 + 8AC)}{3}, \quad a_1 = 8BC, \quad a_2 = 8C^2, \\
Q &= 11(B^4 - 8AB^2C + 16A^2C^2), \\
K &= \frac{26(B^6 - 12AB^4C + 48A^2B^2C^2 - 64A^3C^3)}{9}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

elde edilir.

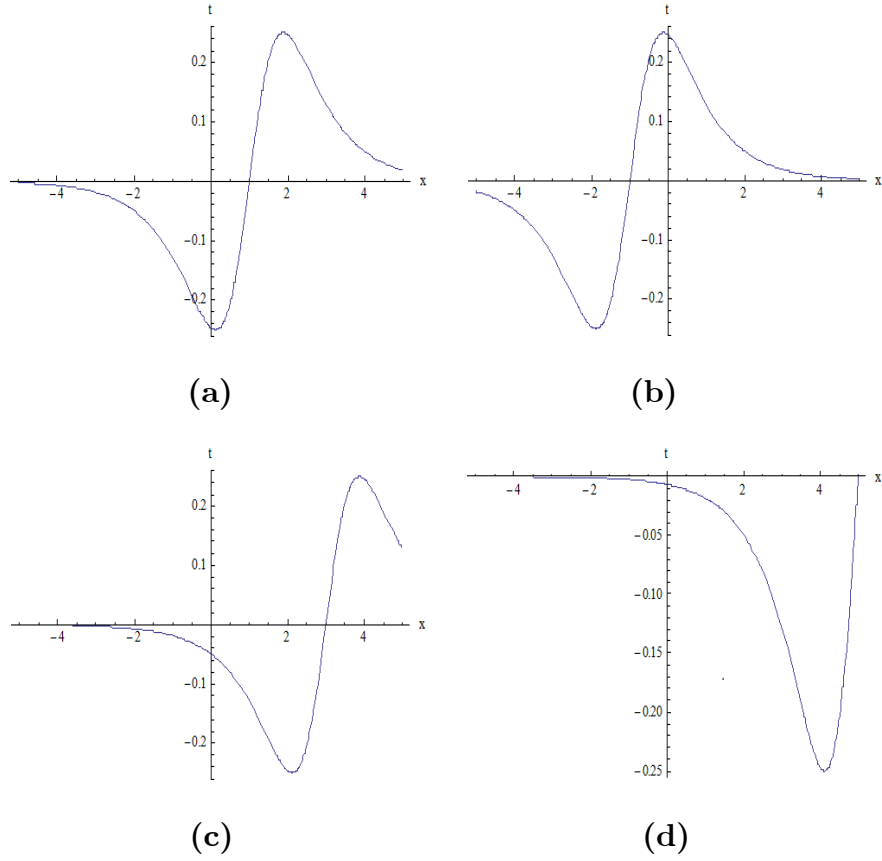
(4.19) (i) durumu için bu denklemler (4.18) denkleminde yerine yazılır ve (4.17) denkleminin özel çözümleri kullanılırsa (4.15) denkleminin aşağıdaki hareketli dalga çözümleri elde edilir:

$$\begin{aligned}
u_1(x, t) &= \frac{2}{3} + \tan^2(t - x), \\
u_2(x, t) &= \frac{2}{3} + \cot^2(t - x), \\
u_3(x, t) &= -\frac{2}{3} + \tanh^2(t - x), \\
u_4(x, t) &= -\frac{2}{3} + \coth^2(t - x), \\
u_5(x, t) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \left(\tan\left(\frac{t}{16} - x\right) \pm \sec\left(\frac{t}{16} - x\right) \right)^2, \\
u_6(x, t) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \left(-\csc\left(\frac{t}{16} - x\right) + \cot\left(\frac{t}{16} - x\right) \right)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_7(x, t) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \left(\frac{\tanh(\frac{t}{16} - x)}{1 \pm \operatorname{sech}(\frac{t}{16} - x)} \right)^2, \\
u_8(x, t) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \left(-\cot(\frac{t}{16} - x) \pm \operatorname{csc}(\frac{t}{16} - x) \right)^2, \\
u_9(x, t) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \left(\sec(\frac{t}{16} - x) + \tan(\frac{t}{16} - x) \right)^2, \\
u_{10}(x, t) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \frac{(\cot(\frac{t}{16} - x))^2}{(1 \pm \operatorname{csc}(\frac{t}{16} - x))^2}, \\
u_{11}(x, t) &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} \left(-\coth(\frac{t}{16} - x) \pm \operatorname{csc} h(\frac{t}{16} - x) \right)^2, \\
u_{12}(x, t) &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} \left(-\tanh(\frac{t}{16} - x) \pm i \operatorname{sech}(\frac{t}{16} - x) \right)^2, \\
u_{13}(x, t) &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} \left(\frac{\tanh(\frac{t}{16} - x)}{1 \pm \operatorname{sech}(\frac{t}{16} - x)} \right)^2, \\
u_{14}(x, t) &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} \left(\frac{\coth(\frac{t}{16} - x)}{1 \pm i \operatorname{csc} h(\frac{t}{16} - x)} \right)^2, \\
u_{15}(x, t) &= \frac{5}{3} + 4 \frac{\tan(t-x)}{1 - \tan(t-x)} + 4 \left(\frac{\tan(t-x)}{1 - \tan(t-x)} \right)^2, \\
u_{16}(x, t) &= \frac{5}{3} + 4 \frac{\tan(t-x)}{1 + \tan(t-x)} - 4 \left(\frac{\tan(t-x)}{1 + \tan(t-x)} \right)^2, \\
u_{17}(x, t) &= \frac{5}{3} + 4 \frac{\cot(t-x)}{1 - \cot(t-x)} + 4 \left(\frac{\cot(t-x)}{1 - \cot(t-x)} \right)^2, \\
u_{18}(x, t) &= \frac{5}{3} - 4 \frac{\cot(t-x)}{1 + \cot(t-x)} + 4 \left(\frac{\cot(t-x)}{1 + \cot(t-x)} \right)^2, \\
u_{19}(x, t) &= C^2 \left(\frac{-1}{Cx + c_0} \right)^2.
\end{aligned} \tag{4.20}$$



Şekil 9. Kaup–Kupershmidt denkleminin $u_1(x, t)$ ve $u_{12}(x, t)$ (Im) çözümleri için üç boyutlu periyodik dalga görünümü, **a)** $u_1(x, t)$, **b)** $u_{12}(x, t)$ (Im)



Şekil 10. Kaup–Kupershmidt denkleminin $u_{12}(x, t)$ (Im) çözümü için iki boyutlu periyodik dalga grafiği, **a)** $t = -1$, **b)** $t = 1$, **c)** $t = 3$, **d)** $t = 5$.

Yukarıda Şekil 10 da zaman ilerledikçe Kaup–Kupershmidt denkleminin $u_{12}(x, t)$ (Im) çözümü için sağa doğru hareket eden periyodik dalga grafikleri görülmektedir.

4.2.2. Drinfeld-Sokolov-Wilson Denklem Sisteminin Genelleştirilmiş Tanh Metodu İle Analitik Çözümleri

$$\begin{aligned} u_t - 3ww_x &= 0, \\ w_t - 2w_{xxx} - 2uw_x - wu_x &= 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Drinfeld-Sokolov-Wilson denklem sistemini ele alalım [8]. $\phi = \phi(x, t) = x - Qt$ olmak üzere $u(x, t) = q(\phi)$ ve $w(x, t) = s(\phi)$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} -Qq' - 3ss' &= 0, \\ -sq' - Qs' - 2qs' - 2s''' &= 0, \end{aligned} \quad (4.22)$$

denklem sistemi elde edilir.

u_t ile $3ww_x$ ve w_{xxx} ile uw_x arasında dengeleme yapılırsa dengeleme terimi $m = 2$ ve $n = 1$ olur.

$$G'(\phi) = A + BG(\phi) + CG^2(\phi) \quad (4.23)$$

olmak üzere $a_2 \neq 0$ için

$$\begin{aligned} q &= a_0 + a_1G(\phi) + a_2G^2(\phi), \\ s &= b_0 + b_1G(\phi) \end{aligned} \quad (4.24)$$

seçilebilir. (4.24) denklemleri (4.22) denklemlerinde yerine yazılırsa a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 ve Q için cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemde Mathematica yardımıyla $G(\phi)$ 'nin kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse, bu sistemin çözümünden

$$\begin{aligned}
i) \quad a_0 &= \frac{-B^2 - 8AC - 2Q}{4}, \quad a_1 = -3BC, \quad a_2 = -3C^2, \\
b_0 &= \frac{B\sqrt{Q}}{\sqrt{2}}, \quad b_1 = C\sqrt{2Q}, \\
ii) \quad a_0 &= \frac{-B^2 - 8AC - 2Q}{4}, \quad a_1 = -3BC, \quad a_2 = -3C^2, \\
b_0 &= -\frac{B\sqrt{Q}}{\sqrt{2}}, \quad b_1 = -C\sqrt{2Q}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

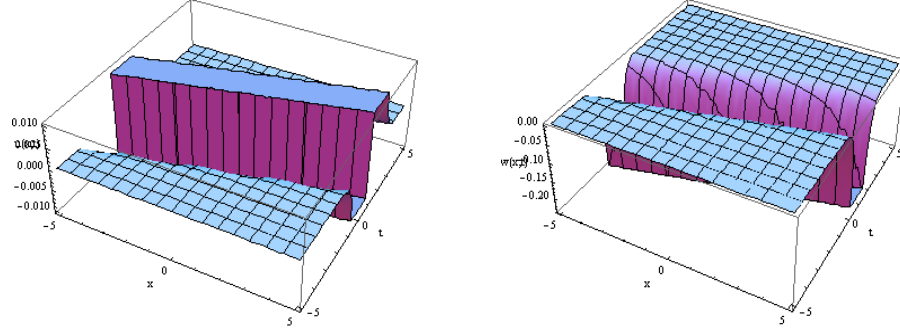
elde edilir.

$\phi = \phi(x, t) = x - Qt$ olmak üzere (4.25) (i) eşitlikleri (4.24) denkleminde yerlerine yazılır ve (4.23) denkleminin özel çözümleri kullanılırsa (4.21) denklem sisteminin aşağıdaki hareketli dalga çözümleri elde edilir:

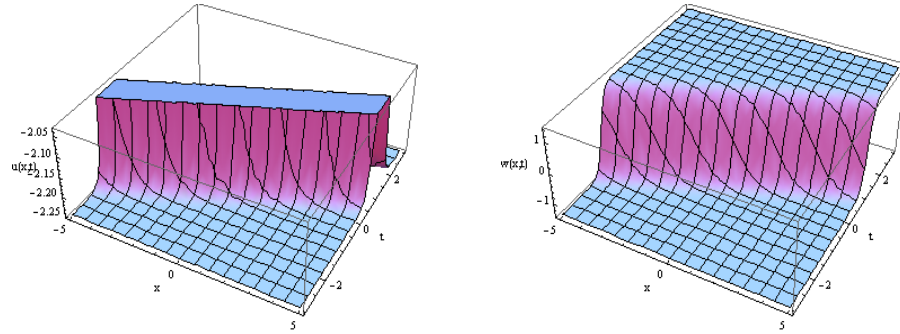
$$\begin{aligned}
u_1(x, t) &= \frac{-8 - 2Q}{4} - 3 \tan^2 \phi, \\
w_1(x, t) &= \sqrt{2Q} \tan \phi, \\
u_2(x, t) &= \frac{-8 - 2Q}{4} - 3 \cot^2 \phi, \\
w_2(x, t) &= \sqrt{2Q} \cot \phi, \\
u_3(x, t) &= \frac{8 - 2Q}{4} - 3 \tanh^2 \phi, \\
w_3(x, t) &= \sqrt{2Q} \tanh \phi, \\
u_4(x, t) &= \frac{8 - 2Q}{4} - 3 \coth^2 \phi, \\
w_4(x, t) &= \sqrt{2Q} \coth \phi, \\
u_5(x, t) &= \frac{-2 - 2Q}{4} - \frac{3}{4} (-\tan \phi \pm \sec \phi)^2, \\
w_5(x, t) &= \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{2}} (-\tan \phi \pm \sec \phi),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_6(x, t) &= \frac{-2 - 2Q}{4} - \frac{3}{4} (-\csc \phi + \cot \phi)^2, \\
w_6(x, t) &= \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{2}} (-\csc \phi + \cot \phi), \\
u_7(x, t) &= \frac{-2 - 2Q}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{\tan \phi}{1 \pm \sec \phi} \right)^2, \\
w_7(x, t) &= \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{2}} \left(\frac{\tan \phi}{1 \pm \sec \phi} \right), \\
u_8(x, t) &= \frac{-2 - 2Q}{4} - \frac{3}{4} (-\cot \phi \pm \csc \phi)^2, \\
w_8(x, t) &= \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{2}} (-\cot \phi \pm \csc \phi), \\
u_9(x, t) &= \frac{-2 - 2Q}{4} - \frac{3}{4} (\sec \phi + \tan \phi)^2, \\
w_9(x, t) &= -\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{2}} (\sec \phi + \tan \phi), \\
u_{10}(x, t) &= \frac{-2 - 2Q}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{\cot \phi}{1 \pm \csc \phi} \right)^2, \\
w_{10}(x, t) &= \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{2}} \left(\frac{\cot \phi}{1 \pm \csc \phi} \right), \\
u_{11}(x, t) &= \frac{2 - 2Q}{4} - \frac{3}{4} (-\coth \phi \pm \csc h\phi)^2, \\
w_{11}(x, t) &= \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{2}} (-\coth \phi \pm \csc h\phi), \\
u_{12}(x, t) &= \frac{2 - 2Q}{4} - \frac{3}{4} (-\tanh \phi \pm i \sec h\phi)^2, \\
w_{12}(x, t) &= \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{2}} (-\tanh \phi \pm i \sec h\phi),
\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}
u_{13}(x, t) &= \frac{2 - 2Q}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{\tanh \phi}{1 \pm \sec h\phi} \right)^2, \\
w_{13}(x, t) &= \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{2}} \left(\frac{\tanh \phi}{1 \pm \sec h\phi} \right), \\
u_{14}(x, t) &= \frac{2 - 2Q}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{\coth \phi}{1 \pm i \csc h\phi} \right)^2, \\
w_{14}(x, t) &= \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{2}} \left(\frac{\coth \phi}{1 \pm i \csc h\phi} \right), \\
u_{15}(x, t) &= \frac{-20 - 2Q}{4} - 12 \frac{\tan \phi}{1 - \tan \phi} - 12 \left(\frac{\tan \phi}{1 - \tan \phi} \right)^2, \\
w_{15}(x, t) &= \sqrt{2Q} - 2\sqrt{2Q} \left(\frac{\tan \phi}{1 - \tan \phi} \right), \\
u_{16}(x, t) &= \frac{-20 - 2Q}{4} + 12 \frac{\tan \phi}{1 + \tan \phi} - 12 \left(\frac{\tan \phi}{1 + \tan \phi} \right)^2, \\
w_{16}(x, t) &= -\sqrt{2Q} - 2\sqrt{2Q} \left(\frac{\tan \phi}{1 + \tan \phi} \right), \\
u_{17}(x, t) &= \frac{-20 - 2Q}{4} - 12 \left(\frac{\cot \phi}{1 - \cot \phi} \right) - 12 \left(\frac{\cot \phi}{1 - \cot \phi} \right)^2, \\
w_{17}(x, t) &= -\sqrt{2Q} + 2\sqrt{2Q} \left(\frac{\cot \phi}{1 - \cot \phi} \right), \\
u_{18}(x, t) &= \frac{-20 - 2Q}{4} + 12 \left(\frac{\cot \phi}{1 + \cot \phi} \right) - 12 \left(\frac{\cot \phi}{1 + \cot \phi} \right)^2, \\
w_{18}(x, t) &= -\sqrt{2Q} + 2\sqrt{2Q} \left(\frac{\cot \phi}{1 + \cot \phi} \right), \\
u_{19}(x, t) &= \frac{-Q}{2} - \frac{3C^2}{(C\phi + c_0)^2}, \\
w_{19}(x, t) &= -\frac{2\sqrt{2\phi}}{c_0 + C\phi}.
\end{aligned}$$



(a)

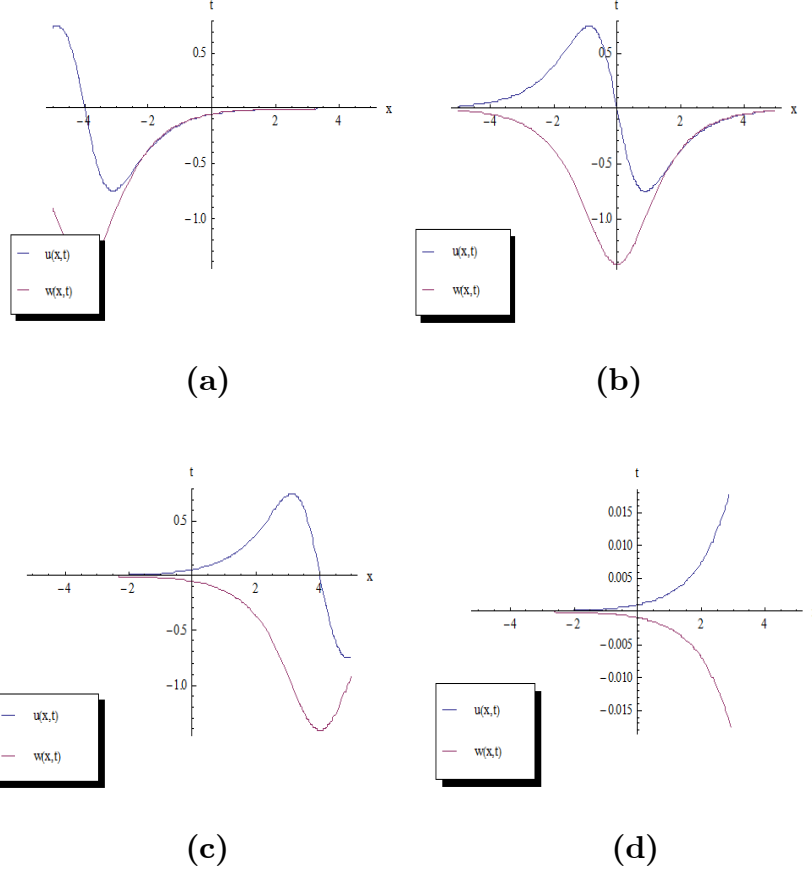


(b)

Şekil 11. DSW denklem sisteminin $u_{12}(x, t)(\text{Im})$, $w_{12}(x, t)(\text{Im})$ ve $u_{14}(x, t)(\text{Re})$, $w_{14}(x, t)(\text{Re})$ çözümleri için üç boyutlu periyodik dalga görünümü,

a) $u_{12}(x, t)(\text{Im})$, $w_{12}(x, t)(\text{Im})(Q = 4)$, **b)** $u_{14}(x, t)(\text{Re})$, $w_{14}(x, t)(\text{Re})(Q = 4)$.

Burada sol taraftaki üç boyutlu dalga görünümüleri $u(x, t)$ çözümleri için, sağ taraftaki üç boyutlu dalga görünümüleri $w(x, t)$ çözümleri için çizilmiştir.



Şekil 12. DSW denklem sisteminin $u_{12}(x,t)(\text{Im})$ ve $w_{12}(x,t)(\text{Im})$ çözümü için iki boyutlu periyodik dalga grafiği, **a)** $t = -1$, **b)** $t = 0$, **c)** $t = 1$, **d)** $t = 2$.

Yukarıda Şekil 12 de zaman ilerledikçe DSW denklem sisteminin $u_{12}(x,t)(\text{Im})$ ve $w_{12}(x,t)(\text{Im})$ çözümü için sağa doğru hareket eden periyodik dalga grafikleri görülmektedir.

4.2.3. Hirota-Satsuma Denklem Sisteminin Genelleştirilmiş Tanh Metodu İle Analitik Çözümleri

$$\begin{aligned}u_t &= \frac{1}{2}u_{xxx} + 3uu_x - 3ww_x, \\w_t &= -w_{xxx} - 3uw_x\end{aligned}\tag{4.27}$$

Hirota-Satsuma denklem sistemini ele alalım [12]. $\phi = \phi(x, t) = x - Qt$ olmak üzere $u(x, t) = q(\phi)$ ve $w(x, t) = s(\phi)$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}-Qq' - 3qq' + 3ss' - \frac{1}{2}q''' &= 0 \\-Qs' + 3qs' + s''' &= 0,\end{aligned}\tag{4.28}$$

denklem sistemi elde edilir.

w_{xxx} ile uw_x ve u_{xxx} ile uu_x , ww_x terimlerinden biri arasında dengeleme yapılırsa dengeleme terimi $m = 2$ ve $n = 2$ olur.

$$G'(\phi) = A + BG(\phi) + CG^2(\phi)\tag{4.29}$$

olmak üzere $a_2 \neq 0$ için

$$\begin{aligned}q &= a_0 + a_1G(\phi) + a_2G^2(\phi), \\s &= b_0 + b_1G(\phi) + b_2G^2(\phi)\end{aligned}\tag{4.30}$$

seçilebilir.

(4.30) denklemleri (4.28) denklemlerinde yerine yazılır ve $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ ve Q için elde edilen cebirsel denklem sisteminden Mathematica yardımıyla $G(\phi)$ 'nin

kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse, bu sistemin çözümünden

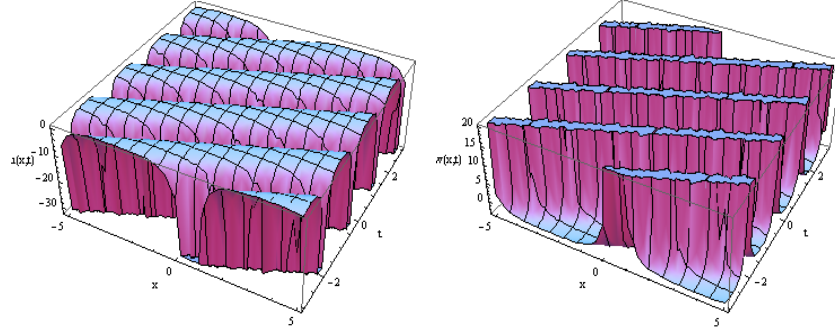
$$\begin{aligned}
i) \quad a_0 &= \frac{-B^2 - 8AC + Q}{3}, \quad a_1 = -4BC, \quad a_2 = -4C^2, \\
b_0 &= \frac{\sqrt{2}B^2 + 8\sqrt{2}AC - 4\sqrt{2}Q}{6}, \quad b_1 = 2\sqrt{2}BC, \quad b_2 = 2\sqrt{2}C^2, \\
ii) \quad a_0 &= -\frac{B^2 + 8AC - Q}{3}, \quad a_1 = -4BC, \quad a_2 = -4C^2, \\
b_0 &= -\frac{\sqrt{2}B^2 + 8\sqrt{2}AC - 4\sqrt{2}Q}{6}, \quad b_1 = -2\sqrt{2}BC, \quad b_2 = -2\sqrt{2}C^2
\end{aligned} \tag{4.31}$$

elde edilir. (4.31) (i) eşitlikleri (4.30) denkleminde yerlerine yazılırsa (4.27) denklem sisteminin aşağıdaki hareketli dalga çözümleri elde edilir:

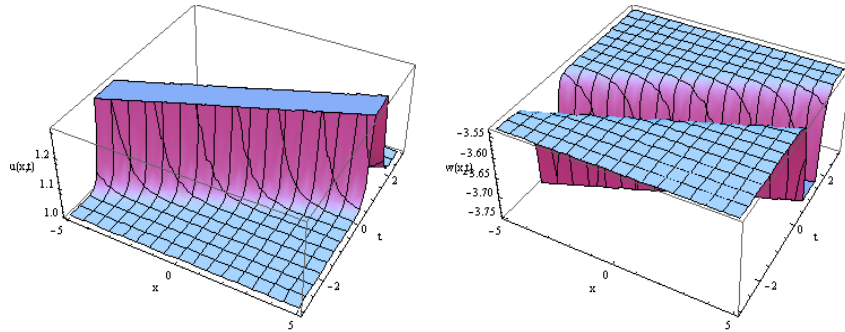
$$\begin{aligned}
u_1(x, t) &= -\frac{8 - Q}{3} - 4 \tan^2 \phi, \\
w_1(x, t) &= -\frac{-8\sqrt{2} + 4\sqrt{2}Q}{6} + 2\sqrt{2} \tan^2 \phi, \\
u_2(x, t) &= \frac{-8 + Q}{3} - 4 \cot^2 \phi, \\
w_2(x, t) &= \frac{8\sqrt{2} - 4\sqrt{2}Q}{6} + 2\sqrt{2} \cot^2 \phi, \\
u_3(x, t) &= \frac{8 + Q}{3} - 4 \tanh^2 \phi, \\
w_3(x, t) &= -\frac{8\sqrt{2} + 4\sqrt{2}Q}{6} + 2\sqrt{2} \tanh^2 \phi, \\
u_4(x, t) &= \frac{8 + Q}{3} - 4 \coth^2 \phi, \\
w_4(x, t) &= -\frac{8\sqrt{2} + 4\sqrt{2}Q}{6} + 2\sqrt{2} \coth^2 \phi, \\
u_5(x, t) &= \frac{-2 + Q}{3} - (-\tan \phi \pm \sec \phi)^2, \\
w_5(x, t) &= \frac{2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}Q}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2} (-\tan \phi \pm \sec \phi)^2, \\
u_6(x, t) &= \frac{-2 + Q}{3} - (-\csc \phi + \cot \phi)^2, \\
w_6(x, t) &= \frac{2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}Q}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2} (-\csc \phi + \cot \phi)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_7(x, t) &= \frac{-2 + Q}{3} - \left(\frac{\tan \phi}{1 \pm \sec \phi} \right)^2, \\
w_7(x, t) &= \frac{2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}Q}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\tan \phi}{1 \pm \sec \phi} \right)^2, \\
u_8(x, t) &= \frac{-2 + Q}{3} - (-\cot \phi \pm \csc \phi)^2, \\
w_8(x, t) &= \frac{2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}Q}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2} (-\cot \phi \pm \csc \phi)^2, \\
u_9(x, t) &= \frac{-2 + Q}{3} - (\sec \phi + \tan \phi)^2, \\
w_9(x, t) &= \frac{2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}Q}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2} (\sec \phi + \tan \phi)^2, \\
u_{10}(x, t) &= \frac{-2 + Q}{3} - \left(\frac{\cot \phi}{1 \pm \csc \phi} \right)^2, \\
w_{10}(x, t) &= \frac{2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}Q}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\cot \phi}{1 \pm \csc \phi} \right)^2, \\
u_{11}(x, t) &= \frac{2 + Q}{3} - (\coth \phi \pm \csc h\phi)^2, \\
w_{11}(x, t) &= -\frac{2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}Q}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2} (-\coth \phi \pm \csc h\phi)^2, \\
u_{12}(x, t) &= \frac{2 + Q}{3} - (-\tanh \phi \pm i \sec h\phi)^2, \\
w_{12}(x, t) &= -\frac{2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}Q}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2} (-\tanh \phi \pm i \sec h\phi)^2, \\
u_{13}(x, t) &= \frac{2 + Q}{3} - \left(\frac{\tanh \phi}{1 \pm \sec h\phi} \right)^2, \\
w_{13}(x, t) &= -\frac{2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}Q}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\tanh \phi}{1 \pm \sec h\phi} \right)^2, \\
u_{14}(x, t) &= \frac{2 + Q}{3} - \left(\frac{\coth \phi}{1 \pm i \csc h\phi} \right)^2, \\
w_{14}(x, t) &= -\frac{2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}Q}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\coth \phi}{1 \pm i \csc h\phi} \right)^2, \\
u_{15}(x, t) &= \frac{-20 + Q}{3} - 16 \frac{\tan \phi}{1 - \tan \phi} - 16 \left(\frac{\tan \phi}{1 - \tan \phi} \right)^2, \\
w_{15}(x, t) &= \frac{20\sqrt{2} - 4\sqrt{2}Q}{6} + 8\sqrt{2} \frac{\tan \phi}{1 - \tan \phi} + 8\sqrt{2} \left(\frac{\tan \phi}{1 - \tan \phi} \right)^2,
\end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}
u_{16}(x, t) &= \frac{-20 + Q}{3} + 16 \frac{\tan \phi}{1 + \tan \phi} - 16 \left(\frac{\tan \phi}{1 + \tan \phi} \right)^2, \\
w_{16}(x, t) &= \frac{20\sqrt{2} - 4\sqrt{2}Q}{6} - 8\sqrt{2} \frac{\tan \phi}{1 - \tan \phi} + 8\sqrt{2} \left(\frac{\tan \phi}{1 - \tan \phi} \right)^2, \\
u_{17}(x, t) &= \frac{-20 + Q}{3} - 16 \frac{\cot \phi}{1 - \cot \phi} - 16 \left(\frac{\cot \phi}{1 - \cot \phi} \right)^2, \\
w_{17}(x, t) &= \frac{20\sqrt{2} - 4\sqrt{2}Q}{6} + 8\sqrt{2} \frac{\cot \phi}{1 - \cot \phi} + 8\sqrt{2} \left(\frac{\cot \phi}{1 - \cot \phi} \right)^2, \\
u_{18}(x, t) &= \frac{-20 + Q}{3} + 16 \frac{\cot \phi}{1 + \cot \phi} - 16 \left(\frac{\cot \phi}{1 + \cot \phi} \right)^2, \\
w_{18}(x, t) &= \frac{20\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}{6} - 8\sqrt{2} \frac{\cot \phi}{1 - \cot \phi} + 8\sqrt{2} \left(\frac{\cot \phi}{1 - \cot \phi} \right)^2, \\
u_{19}(x, t) &= \frac{Q}{3} - 4C^2 \left(\frac{-1}{C\phi + c_0} \right)^2, \\
w_{19}(x, t) &= -\frac{4\sqrt{2}Q}{6} + 2\sqrt{2}C^2 \left(\frac{-1}{C\phi + c_0} \right)^2.
\end{aligned}$$



(a)

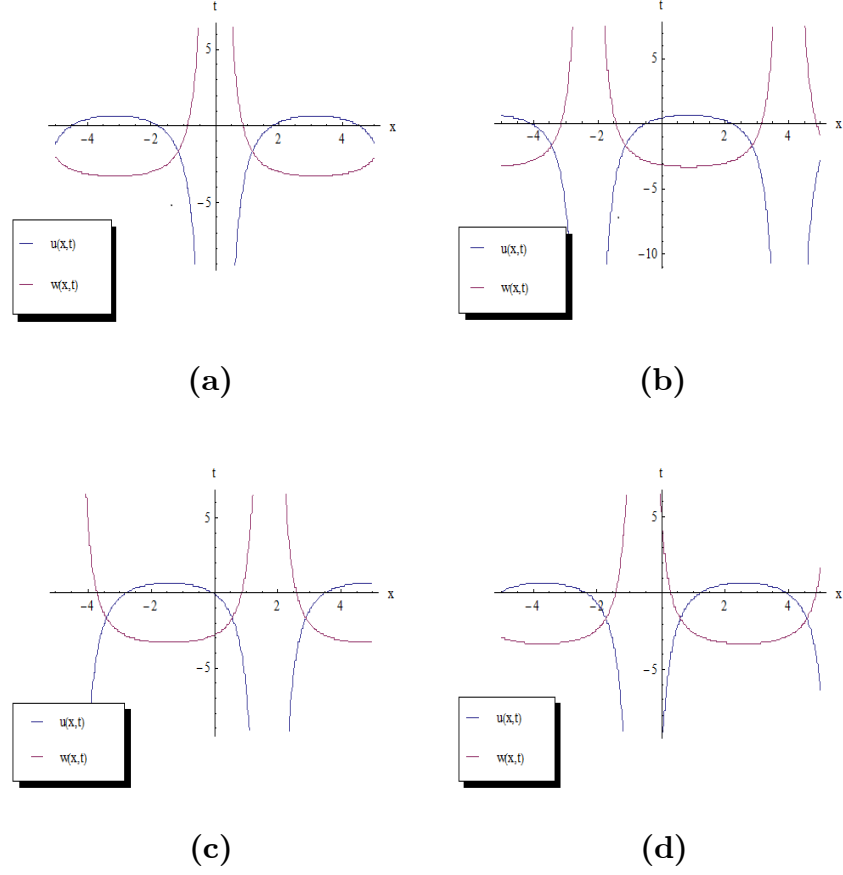


(b)

Şekil 13. Hirota-Satsuma denklem sisteminin $u_8(x, t)$, $w_8(x, t)$ ve $u_{12}(x, t)(Re)$, $w_{12}(x, t)(Re)$ çözümleri için üç boyutlu periyodik dalga görünümü ($Q = 4$)

a) $u_8(x, t)$, $w_8(x, t)$, **b)** $u_{12}(x, t)(Re)$, $w_{12}(x, t)(Re)$.

Burada sol taraftaki üç boyutlu dalga görünümüleri $u(x, t)$ çözümleri için, sağ taraftaki üç boyutlu dalga görünümüleri $w(x, t)$ çözümleri için çizilmiştir.



Şekil 14. Hirota-Satsuma denklem sisteminin $u_{12}(x, t)$ ve $w_{12}(x, t)$ çözümü için iki boyutlu periyodik dalga grafiği, **a)** $t = 0$, **b)** $t = 1$, **c)** $t = 2$, **d)** $t = 3$.

Yukarıda Şekil 14 de zaman ilerledikçe Hirota-Satsuma denklem sisteminin $u_{12}(x, t)$ ve $w_{12}(x, t)$ çözümü için sağa doğru hareket eden periyodik dalga grafikleri görülmektedir.

4. 2. 4. Benjamin-Bona-Mahony Denkleminin Genelleştirilmiş Tanh Metodu İle Analitik Çözümleri

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0 \quad (4.33)$$

Benjamin-Bona-Mahony denklemini ele alalım [13]. $\phi = \phi(x, t) = x - Qt$ olmak üzere $u(x, t) = q(\phi)$ dönüşümü yapılsa

$$-Qq' + q' + qq' + Qq''' = 0$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklem ϕ ye göre bir kez integrallenirse

$$q - Qq + \frac{q^2}{2} + Qq'' + K = 0 \quad (4.34)$$

denklemi elde edilir. Burada K daha sonra belirlenecek olan bir integral sabitidir. uu_x ile u_{xxt} arasında dengeleme yapılsa dengeleme terimi $m = 2$ olur.

$$G'(\phi) = A + BG(\phi) + CG^2(\phi) \quad (4.35)$$

olmak üzere, $a_2 \neq 0$ için

$$q = a_0 + a_1G(\phi) + a_2G^2(\phi) \quad (4.36)$$

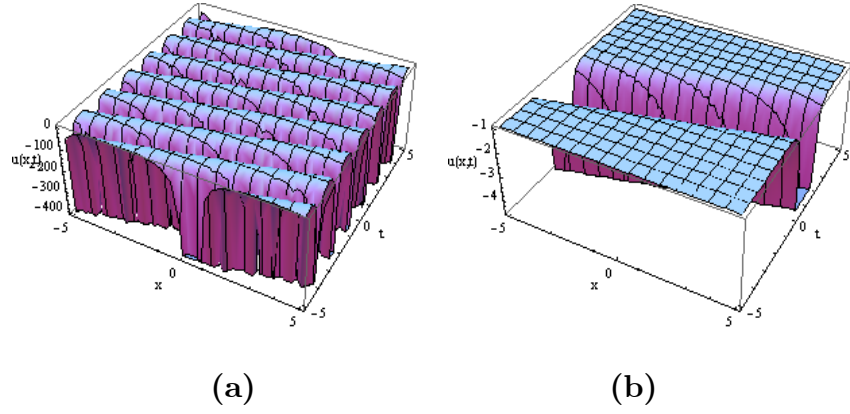
seçilebilir. (4.36) denklemi (4.34) denkleminde yerine yazılır ve a_0 , a_1 , a_2 ve Q için elde edilen cebirsel denklemde Mathematica yardımıyla $G(\phi)$ 'nin kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse, bu sistemin çözümünden,

$$\begin{aligned} a_0 &= -1 + Q - B^2Q - 8ACQ, \\ a_1 &= -12QBC, \quad a_2 = -12QC^2, \\ K &= \frac{1}{2}(-1 + 2Q + Q^2 - B^4Q^2 + 8AB^2CQ^2 - 16A^2C^2Q^2) \end{aligned} \quad (4.37)$$

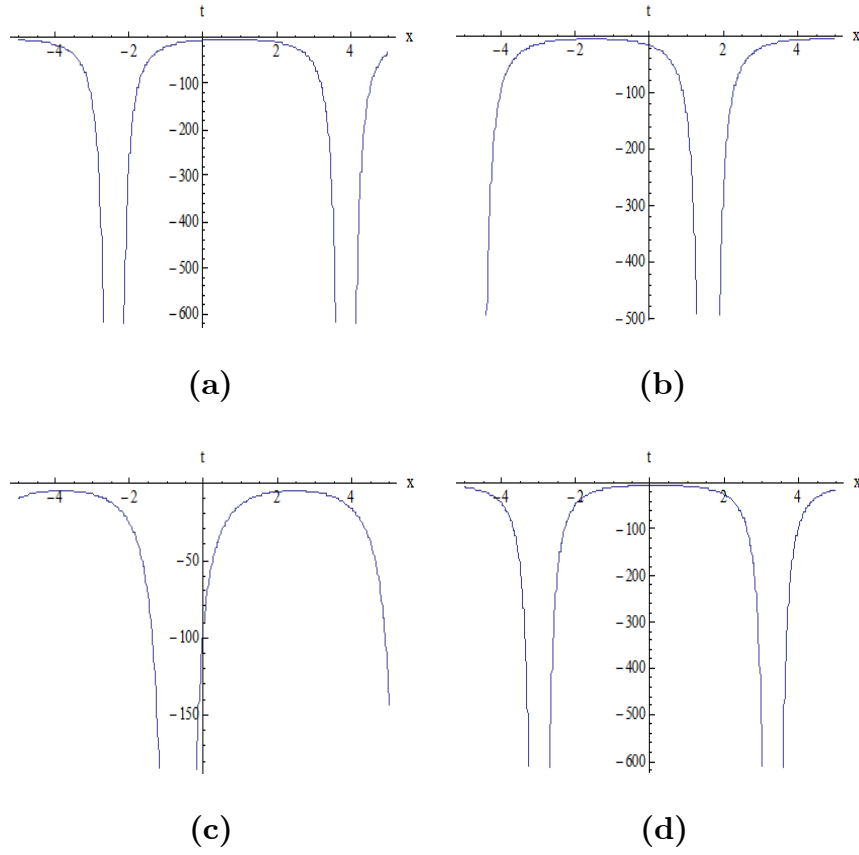
elde edilir. (4.37) denklemleri (4.36) denkleminde yerine yazılır ve (4.35) denkleminin özel çözümleri kullanılırsa (4.33) denkleminin aşağıdaki hareketli dalga çözüm-

leri elde edilir:

$$\begin{aligned}
u_1(x, t) &= -1 - 7Q - 12Q \tan^2 \phi, \\
u_2(x, t) &= -1 - 7Q - 12Q \cot^2 \phi, \\
u_3(x, t) &= -1 + 9Q - 12Q \tanh^2 \phi, \\
u_4(x, t) &= -1 + 9Q - 12Q \coth^2 \phi, \\
u_5(x, t) &= -1 - Q - 3Q (-\tan \phi \pm \sec \phi)^2, \\
u_6(x, t) &= -1 - Q - 3Q (-\csc \phi - \cot \phi)^2, \\
u_7(x, t) &= -1 - Q - 3Q \frac{\tan^2 \phi}{(1 \pm \sec \phi)^2}, \\
u_8(x, t) &= -1 - Q - 3Q (-\cot \phi \pm \csc \phi)^2, \\
u_9(x, t) &= -1 - Q - 3Q (\sec \phi + \tan \phi)^2, \\
u_{10}(x, t) &= -1 - Q - 3Q \frac{\cot^2 \phi}{(1 \pm \csc \phi)^2}, \\
u_{11}(x, t) &= -1 + 3Q - 3Q (-\coth \phi \pm \csc h\phi)^2, \\
u_{12}(x, t) &= -1 + 3Q - 3Q (-\tanh \phi \pm i \sec h\phi)^2, \\
u_{13}(x, t) &= -1 + 3Q - 3Q \left(\frac{\tanh \phi}{1 \pm \sec h\phi} \right)^2, \\
u_{14}(x, t) &= -1 + 3Q - 3Q \left(\frac{\coth \phi}{1 \pm i \csc h\phi} \right)^2, \\
u_{15}(x, t) &= -1 - 19Q - 48 \frac{\tan \phi}{1 + \tan \phi} - 48 \left(\frac{\tan \phi}{1 + \tan \phi} \right)^2, \\
u_{16}(x, t) &= -1 - 19Q - 48 \frac{\tan \phi}{1 - \tan \phi} + 48 \left(\frac{\tan \phi}{1 - \tan \phi} \right)^2, \\
u_{17}(x, t) &= -1 - 19Q - 48 \frac{\cot \phi}{1 + \cot \phi} - 48 \left(\frac{\cot \phi}{1 + \cot \phi} \right)^2, \\
u_{18}(x, t) &= -1 - 19Q - 48 \frac{\cot \phi}{1 - \cot \phi} - 48 \left(\frac{\cot \phi}{1 - \cot \phi} \right)^2, \\
u_{19}(x, t) &= -1 + Q - B^2 Q.
\end{aligned} \tag{4.38}$$



Şekil 15. Benjamin-Bona-Mahony denkleminin $u_5(x, t)$ ve $u_{13}(x, t)$ çözümleri için üç boyutlu periyodik dalga görünümü ($Q = 4$) **a)** $u_5(x, t)$, **b)** $u_{13}(x, t)$



Şekil 16. Benjamin-Bona-Mahony denkleminin $u_5(x, t)$ çözümü için iki boyutlu periyodik dalga grafiği, **a)** $t = -1$, **b)** $t = 0$, **c)** $t = 1$, **d)** $t = 2$.

Yukarıda Şekil 16 da zaman ilerledikçe Benjamin-Bona-Mahony denkleminin $u_5(x, t)$ çözümü için sağa doğru hareket eden periyodik dalga grafikleri görülmektedir.

4. 2. 5. Beşinci Mertebeden Lax KdV Denkleminin Genelleştirilmiş Tanh Metodu İle Analitik Çözümleri

$$u_t + 30u^2u_x + 30u_xu_{xx} + 10uu_{xxx} + u_{xxxxx} = 0 \quad (4.39)$$

Lax KdV denkleminde [16], $\phi = \phi(x, t) = x - Qt$ olmak üzere $u(x, t) = q(\phi)$ dönüşümü yapılırsa

$$-Qq' + 30q^2q' + 30q'q'' + 10qq''' + q'''' = 0,$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklem ϕ ye göre bir kez integrallenirse

$$-Qq + 10q^3 + 10(q')^2 + 10qq'' + q'''' + K = 0 \quad (4.40)$$

denklemi elde edilir. Burada K daha sonra belirlenecek olan bir integral sabitidir.

u^2u_x , u_xu_{xx} veya uu_{xxx} ile u_{xxxxx} arasında dengeleme yapılırsa $m = 2$ olur. $\phi = \phi(x, t) = x - Qt$ ve

$$G'(\phi) = A + BG(\phi) + CG^2(\phi), \quad (4.41)$$

olmak üzere, $a_2 \neq 0$ için

$$q = a_0 + a_1G(\phi) + a_2G^2(\phi) \quad (4.42)$$

seçilebilir.

(4.42) denklemi (4.40) denkleminde yerine yazılır ve a_0 , a_1 , a_2 , Q ve K için elde edilen denklemde Mathematica yardımıyla $G(\phi)$ 'nin kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse, bu sistemin çözümünden a_0 , a_1 , a_2 , Q ve K değerleri elde edilir:

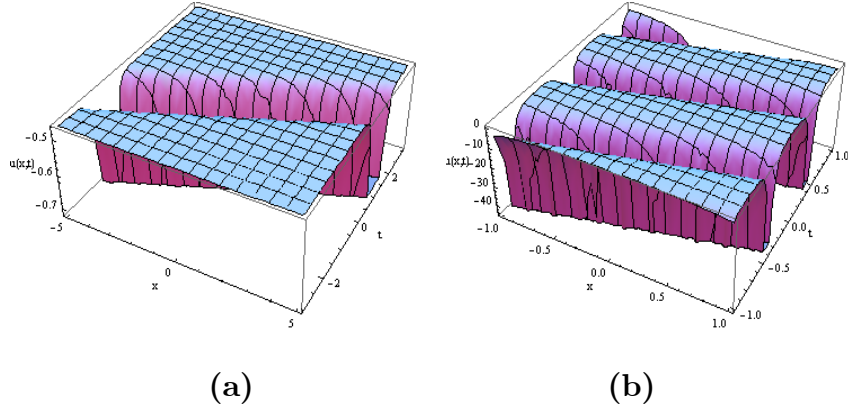
$$\begin{aligned}
i) \quad a_0 &= \frac{1}{12} \left(-5B^2 + \sqrt{13}B^2 - 40AC + 8\sqrt{13}AC \right), \\
a_1 &= (-5 + \sqrt{13})BC, \quad a_2 = (-5 + \sqrt{13})C^2, \\
Q &= \frac{1}{4} \left(19B^4 - 5\sqrt{13}B^4 - 152AB^2C + 40\sqrt{13}AB^2C + 304A^2C^2 - 80\sqrt{13}A^2C^2 \right), \\
K &= \frac{1}{27} (40B^6 + 11\sqrt{13}B^6 + 480AB^4C - 132\sqrt{13}AB^4C - 1920A^2B^2C^2 \\
&\quad + 528\sqrt{13}A^2B^2C^2 + 2560A^3C^3 - 704\sqrt{13}A^3C^3) \tag{4.43} \\
ii) \quad a_0 &= \frac{1}{12} \left(-5B^2 - \sqrt{13}B^2 - 40AC - 8\sqrt{13}AC \right), \\
a_1 &= (-5 - \sqrt{13})BC, \quad a_2 = (-5 - \sqrt{13})C^2, \\
Q &= \frac{1}{4} \left(19B^4 + 5\sqrt{13}B^4 - 152AB^2C - 40\sqrt{13}AB^2C + 304A^2C^2 + 80\sqrt{13}A^2C^2 \right), \\
K &= \frac{1}{27} (40B^6 + 11\sqrt{13}B^6 + 480AB^4C - 132\sqrt{13}AB^4C - 1920A^2B^2C^2 \\
&\quad + 528\sqrt{13}A^2B^2C^2 + 2560A^3C^3 - 704\sqrt{13}A^3C^3)
\end{aligned}$$

(4.43) (i) eşitlikleri (4.42) denkleminde yerine yazılır ve (4.41) denkleminin özel çözümleri kullanılırsa (4.39) denkleminin aşağıdaki hareketli dalga çözümleri elde edilir:

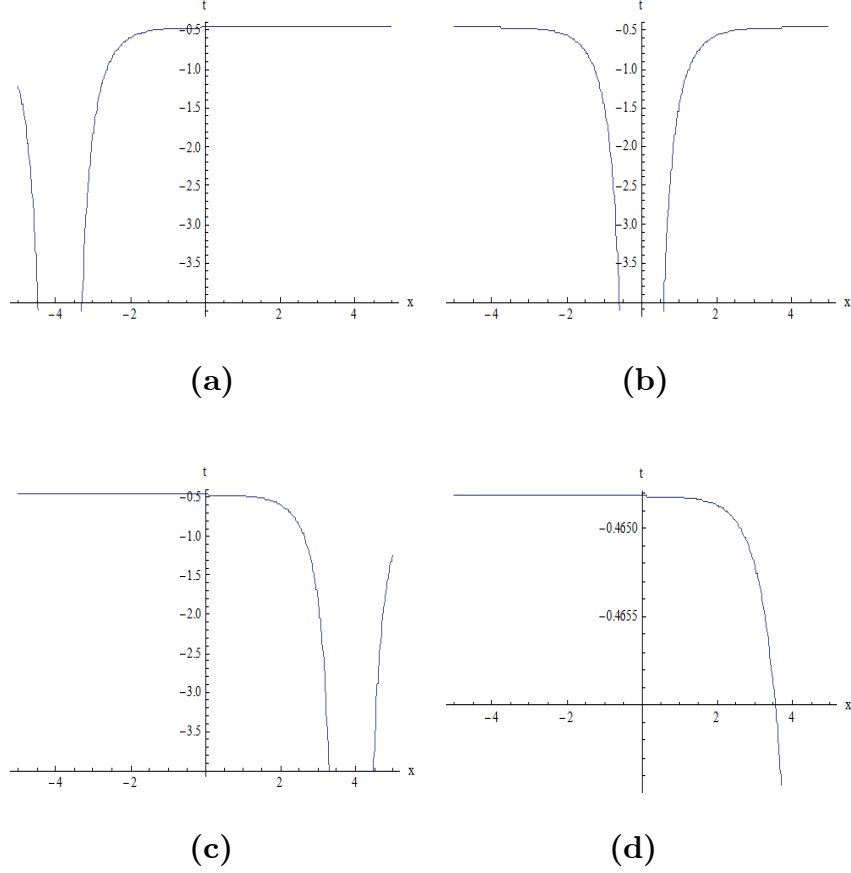
$$\begin{aligned}
u_1(x, t) &= \frac{1}{12}(-40 + 8\sqrt{13}) + (-5 + \sqrt{13}) \tan^2\left(\frac{1}{4}(304 - 80\sqrt{13})t - x\right), \\
u_2(x, t) &= \frac{1}{12}(-40 + 8\sqrt{13}) + (-5 + \sqrt{13}) \cot^2\left(\frac{1}{4}(304 - 80\sqrt{13})t - x\right), \\
u_3(x, t) &= \frac{1}{12}(-40 + 8\sqrt{13}) + (-5 + \sqrt{13}) \tanh^2\left(\frac{1}{4}(304 - 80\sqrt{13})t - x\right), \\
u_4(x, t) &= \frac{1}{12}(-40 + 8\sqrt{13}) + (-5 + \sqrt{13}) \coth^2\left(\frac{1}{4}(304 - 80\sqrt{13})t - x\right), \\
u_5(x, t) &= \frac{1}{12}(-10 + 2\sqrt{13}) + \frac{1}{4}(-5 + \sqrt{13}) \left(-\tan\left(\frac{1}{4}(19 - 5\sqrt{13})t - x\right) \right. \\
&\quad \left. \pm \sec\left(\frac{1}{4}(19 - 5\sqrt{13})t - x\right) \right)^2, \\
u_6(x, t) &= \frac{1}{12}(-10 + 2\sqrt{13}) + \frac{1}{4}(-5 + \sqrt{13}) \left(\cot\left(\frac{1}{4}(19 - 5\sqrt{13})t - x\right) \right. \\
&\quad \left. - \csc\left(\frac{1}{4}(19 - 5\sqrt{13})t - x\right) \right)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_7(x, t) &= \frac{1}{12}(-10 + 2\sqrt{13}) + \frac{\frac{1}{4}(-5 + \sqrt{13}) \tan^2(\frac{1}{4}(19 - 5\sqrt{13})t - x)}{(1 \pm \sec(\frac{1}{4}(19 - 5\sqrt{13})t - x))^2}, \\
u_8(x, t) &= \frac{1}{12}(-10 + 2\sqrt{13}) + \frac{1}{4}(-5 + \sqrt{13})(-\cot(\frac{1}{4}(19 - 5\sqrt{13})t - x) \\
&\quad \pm \csc(\frac{1}{4}(19 - 5\sqrt{13})t - x))^2, \\
u_9(x, t) &= \frac{1}{12}(-10 + 2\sqrt{13}) + \frac{1}{4}(-5 + \sqrt{13})(\sec(\frac{1}{4}(19 - 5\sqrt{13})t - x) \\
&\quad + \tan(\frac{1}{4}(19 - 5\sqrt{13})t - x))^2, \\
u_{10}(x, t) &= \frac{1}{12}(-10 + 2\sqrt{13}) + \frac{\frac{1}{4}(-5 + \sqrt{13}) \cot^2(\frac{1}{4}(19 - 5\sqrt{13})t - x)}{(1 \pm \csc(\frac{1}{4}(19 - 5\sqrt{13})t - x))^2}, \\
u_{11}(x, t) &= \frac{1}{12}(10 - 2\sqrt{13}) + \frac{1}{4}(-5 + \sqrt{13})(-\coth(\frac{1}{4}(19 - 5\sqrt{13})t - x) \\
&\quad \pm \csc h(\frac{1}{4}(19 - 5\sqrt{13})t - x))^2, \\
u_{12}(x, t) &= \frac{1}{12}(10 - 2\sqrt{13}) + \frac{1}{4}(-5 + \sqrt{13})(\pm i \sec h(\frac{1}{4}(19 - 5\sqrt{13})t - x) \\
&\quad - \tanh(\frac{1}{4}(19 - 5\sqrt{13})t - x))^2, \\
u_{13}(x, t) &= \frac{1}{12}(10 - 2\sqrt{13}) + \frac{\frac{1}{4}(-5 + \sqrt{13}) \tanh^2(\frac{1}{4}(19 - 5\sqrt{13})t - x)}{(1 \pm \sec h(\frac{1}{4}(19 - 5\sqrt{13})t - x))^2}, \\
u_{14}(x, t) &= \frac{1}{12}(10 - 2\sqrt{13}) + \frac{\frac{1}{4}(-5 + \sqrt{13}) \coth^2(\frac{1}{4}(19 - 5\sqrt{13})t - x)}{(1 \pm i \csc h(\frac{1}{4}(19 - 5\sqrt{13})t - x))^2}, \\
u_{15}(x, t) &= \frac{1}{12}(-100 + 20\sqrt{13}) - \frac{(20 - 4\sqrt{13}) \tan(\frac{1}{4}(304 - 80\sqrt{13})t - x)}{1 - \tan(\frac{1}{4}(304 - 80\sqrt{13})t - x)} \\
&\quad + \frac{(-20 + 4\sqrt{13}) \tan^2(\frac{1}{4}(304 - 80\sqrt{13})t - x)}{(1 - \tan(\frac{1}{4}(304 - 80\sqrt{13})t - x))^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{16}(x, t) &= -\frac{1}{12}(100 - 20\sqrt{13}) + \frac{(20 - 4\sqrt{13}) \tan(\frac{1}{4}(304 - 80\sqrt{13})t - x)}{1 + \tan(\frac{1}{4}(304 - 80\sqrt{13})t - x)} \\
&\quad + \frac{(-20 + 4\sqrt{13}) \tan^2(\frac{1}{4}(304 - 80\sqrt{13})t - x)}{(1 + \tan(\frac{1}{4}(304 - 80\sqrt{13})t - x))^2}, \\
u_{17}(x, t) &= \frac{1}{12}(-100 + 20\sqrt{13}) - \frac{(20 - 4\sqrt{13}) \cot(\frac{1}{4}(304 - 80\sqrt{13})t - x)}{1 - \cot(\frac{1}{4}(304 - 80\sqrt{13})t - x)} \\
&\quad + \frac{(-20 + 4\sqrt{13}) \cot^2(\frac{1}{4}(304 - 80\sqrt{13})t - x)}{(1 - \cot(\frac{1}{4}(304 - 80\sqrt{13})t - x))^2}, \\
u_{18}(x, t) &= \frac{1}{12}(-100 + 20\sqrt{13}) - \frac{(-20 + 4\sqrt{13}) \cot(\frac{1}{4}(304 - 80\sqrt{13})t - x)}{1 + \cot(\frac{1}{4}(304 - 80\sqrt{13})t - x)} \\
&\quad + \frac{(-20 + 4\sqrt{13}) \cot^2(\frac{1}{4}(304 - 80\sqrt{13})t - x)}{(1 + \cot(\frac{1}{4}(304 - 80\sqrt{13})t - x))^2}, \\
u_{19}(x, t) &= \frac{(-5 + \sqrt{13})C^2}{(Cx + c_0)^2}.
\end{aligned}$$



Şekil 17. Beşinci mertebeden Lax KdV denkleminin $u_4(x, t)$ ve $u_{18}(x, t)$ çözümleri için üç boyutlu periyodik dalga görüntümü, **a)** $u_4(x, t)$, **b)** $u_{18}(x, t)$



Şekil 18. Beşinci mertebeden Lax KdV denkleminin $u_4(x, t)$ çözümü için iki boyutlu periyodik dalga grafiği, **a)** $t = -1$, **b)** $t = 0$, **c)** $t = 1$, **d)** $t = 2$.

Yukarıda Şekil 18 de zaman ilerledikçe beşinci mertebeden Lax KdV denkleminin $u_4(x, t)$ çözümü için sağa doğru hareket eden periyodik dalga grafikleri görülmektedir.

4. 3. Genelleştirilmiş Riccati Denklemi Dönüşüm Metodu İçin Uygulamalar

4.3.1. Kaup–Kupersmidt Denklemi Genelleştirilmiş Riccati Denklemi Dönüşüm Metodu İle Analitik Çözümleri

$$u_t + 45u^2u_x - \frac{75}{2}u_xu_{xx} - 15uu_{xxx} + u_{xxxx} = 0 \quad (4.45)$$

Kaup–Kupersmidt denklemini ele alalım [2]. Bu denkleme

$$u(x, t) = q(\phi), \quad \phi = x - Qt \quad (4.46)$$

dönüşümü uygulanırsa (4.45) denklemi

$$-Qq' + 45q^2q' - \frac{75}{2}q'q'' - 15qq''' + q'''' = 0 \quad (4.47)$$

olur. (4.47) denklemi ϕ ye göre bir kez integrallenirse

$$-Qq + 15q^3 - \frac{45}{4}(q')^2 - 15qq'' + q'''' + K = 0 \quad (4.48)$$

elde edilir. Burada K daha sonra belirlenecek olan bir integral sabitidir.

u_{xxxx} ile u^2u_x , u_xu_{xx} , uu_{xxx} terimlerinden biri arasında dengeleme yapılırsa dengeleme terimi $m = 2$ olur.

O halde (4.48) denkleminin çözümü,

$$G'(\phi) = A + BG(\phi) + CG^2(\phi) \quad (4.49)$$

olmak üzere,

$$q = a_0 + a_1\left(\frac{G'(\phi)}{G(\phi)}\right) + a_2\left(\frac{G'(\phi)}{G(\phi)}\right)^2, \quad (4.50)$$

şeklinde düşünülebilir.

(4.50) denklemini (4.48) denkleminde yerine yazılıp, $G^k(\phi)$ ve $G^{-k}(\phi)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) terimlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse elde edilen cebirsel denklem sisteminden Mathematica yardımıyla a_0 , a_1 , a_2 , K ve Q terimleri elde edilir.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{12} (B^2 - 16AC), \\
a_1 &= -B, \\
a_2 &= 1, \\
Q &= \frac{1}{16} (B^4 + 112B^2AC + 256C^2A^2), \\
K &= \frac{1}{288} (-B^6 + 264B^4AC - 4224B^2C^2A^2 + 4096C^3A^3).
\end{aligned} \tag{4.51}$$

(4.51) eşitlikleri kullanılarak (4.45) denkleminin çözümleri aşağıdaki gibi bulunur:

1. Tip: $B^2 - 4AC > 0$ ve $BC \neq 0$ veya $AC \neq 0$ iken,

$$\psi = \sqrt{B^2 - 4AC}, \xi = \sqrt{4AC - B^2} \text{ ve } \phi = x - \frac{1}{16} (B^4 + 112B^2AC + 256C^2A^2)t$$

olmak üzere, (4.45) denkleminin çözümü aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned}
u_1(x, t) &= \left(\frac{\psi^2 \sec h^2(\frac{\psi}{2}\phi)}{2(B + \psi \tanh(\frac{\psi}{2}\phi))} \right)^2 - B \left(\frac{\psi^2 \sec h^2(\frac{\psi}{2}\phi)}{2(B + \psi \tanh(\frac{\psi}{2}\phi))} \right) + \frac{1}{12} (B^2 - 16AC), \\
u_2(x, t) &= \left(-\frac{\psi^2 \csc h^2(\frac{\psi}{2}\phi)}{2(B + \psi \coth(\frac{\psi}{2}\phi))} \right)^2 - B \left(-\frac{\psi^2 \csc h^2(\frac{\psi}{2}\phi)}{2(B + \psi \coth(\frac{\psi}{2}\phi))} \right) + \frac{1}{12} (B^2 - 16AC), \\
u_3(x, t) &= \left(-\frac{\psi^2 (-1 + (\tanh(\psi\phi) \pm i \sec h(\psi\phi)))^2}{2(B + \psi(\tanh(\psi\phi) \pm i \sec h(\psi\phi)))} \right)^2 \\
&\quad - B \left(-\frac{\psi^2 (-1 + (\tanh(\psi\phi) \pm i \sec h(\psi\phi)))^2}{2(B + \psi(\tanh(\psi\phi) \pm i \sec h(\psi\phi)))} \right) + \frac{1}{12} (B^2 - 16AC), \\
u_4(x, t) &= \left(-\frac{\psi^2 (-1 + (\coth(\psi\phi) \pm \csc h(\psi\phi)))^2}{2(B + \psi(\coth(\psi\phi) \pm \csc h(\psi\phi)))} \right)^2 \\
&\quad - B \left(-\frac{\psi^2 (-1 + (\coth(\psi\phi) \pm \csc h(\psi\phi)))^2}{2(B + \psi(\coth(\psi\phi) \pm \csc h(\psi\phi)))} \right) + \frac{1}{12} (B^2 - 16AC),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_5(x, t) &= \left(-\frac{\psi^2 \csc h^2(\frac{\psi}{2}\phi)}{2B + \psi(\coth(\frac{\psi}{4}\phi) + \tanh(\frac{\psi}{4}\phi))} \right)^2 - B \left(-\frac{\psi^2 \csc h^2(\frac{\psi}{2}\phi)}{2B + \psi(\coth(\frac{\psi}{4}\phi) + \tanh(\frac{\psi}{4}\phi))} \right) \\
&\quad + \frac{1}{12} (B^2 - 16AC), \\
u_6(x, t) &= \left(\frac{P(\psi^2 \sqrt{P^2 + R^2} \cosh(\psi\phi) - \psi^2(P - R \sinh(\psi\phi)))}{(R + P \sinh(\psi\phi))(BR - \psi \sqrt{P^2 + R^2} + \psi P \cosh(\psi\phi) + BP \sinh(\psi\phi))} \right)^2 \\
&\quad - B \left(\frac{P(\psi^2 \sqrt{P^2 + R^2} \cosh(\psi\phi) - \psi^2(P - R \sinh(\psi\phi)))}{(R + P \sinh(\psi\phi))(BR - \psi \sqrt{P^2 + R^2} + \psi P \cosh(\psi\phi) + BP \sinh(\psi\phi))} \right) \\
&\quad + \frac{1}{12} (B^2 - 16AC), \\
u_7(x, t) &= \left(\frac{P\psi^2(P + R \cosh(\psi\phi) - \sqrt{R^2 - P^2} \sinh(\psi\phi))}{(R + P \cosh(\psi\phi))(BR - \psi \sqrt{R^2 - P^2} + BP \cosh(\psi\phi) - \psi P \sinh(\psi\phi))} \right)^2 \\
&\quad - B \left(\frac{P\psi^2(P + R \cosh(\psi\phi) - \sqrt{R^2 - P^2} \sinh(\psi\phi))}{(R + P \cosh(\psi\phi))(BR - \psi \sqrt{R^2 - P^2} + BP \cosh(\psi\phi) - \psi P \sinh(\psi\phi))} \right) \\
&\quad + \frac{1}{12} (B^2 - 16AC).
\end{aligned}$$

Burada P ve R , $R^2 - P^2 > 0$ eşitsizliğini sağlayan sıfırdan farklı reel sabitlerdir.

$$\begin{aligned}
u_8(x, t) &= \left(\frac{\psi^2 \sec h(\frac{\psi}{2}\phi)}{2B \cosh(\frac{\psi}{2}\phi) - 2\psi \sinh(\frac{\psi}{2}\phi)} \right)^2 - B \left(\frac{\psi^2 \sec h(\frac{\psi}{2}\phi)}{2B \cosh(\frac{\psi}{2}\phi) - 2\psi \sinh(\frac{\psi}{2}\phi)} \right) \\
&\quad + \frac{1}{12} (B^2 - 16AC), \\
u_9(x, t) &= \left(\frac{\psi^2 \csc h(\frac{\psi}{2}\phi)}{2\psi \cosh(\frac{\psi}{2}\phi) - 2B \sinh(\frac{\psi}{2}\phi)} \right)^2 - B \left(\frac{\psi^2 \csc h(\frac{\psi}{2}\phi)}{2\psi \cosh(\frac{\psi}{2}\phi) - 2B \sinh(\frac{\psi}{2}\phi)} \right) \\
&\quad + \frac{1}{12} (B^2 - 16AC), \\
u_{10}(x, t) &= \left(\frac{1}{2} \sec h(\psi\phi) (-B \cosh(\psi\phi) \pm i\psi) + \psi \sinh(\psi\phi) \right) \left(1 \right. \\
&\quad \left. + \frac{4AC \cosh^2(\psi\phi)}{((B \cosh(\psi\phi) \pm i\psi) - \psi \sinh(\psi\phi))^2} + \frac{2B \cosh(\psi\phi)}{-(B \cosh(\psi\phi) \pm i\psi) + \psi \sinh(\psi\phi)} \right)^2 \\
&\quad - B \left(\frac{1}{2} \sec h(\psi\phi) (-B \cosh(\psi\phi) \pm i\psi) + \psi \sinh(\psi\phi) \right) \\
&\quad \left(1 + \frac{4AC \cosh^2(\psi\phi)}{((B \cosh(\psi\phi) \pm i\psi) - \psi \sinh(\psi\phi))^2} + \frac{2B \cosh(\psi\phi)}{-(B \cosh(\psi\phi) \pm i\psi) + \psi \sinh(\psi\phi)} \right) \\
&\quad + \frac{1}{12} (B^2 - 16AC),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{11}(x, t) &= \left(\frac{\csc h(\psi\phi)(\psi \cosh(\psi\phi) \pm \psi)^2 - \psi^2 \sinh(\psi\phi)}{2((\psi \cosh(\psi\phi) \pm \psi) - B \sinh(\psi\phi))} \right)^2 \\
&\quad - B \left(\frac{\csc h(\psi\phi)(\psi \cosh(\psi\phi) \pm \psi)^2 - \psi^2 \sinh(\psi\phi)}{2((\psi \cosh(\psi\phi) \pm \psi) - B \sinh(\psi\phi))} \right) \\
&\quad + \frac{1}{12} (B^2 - 16AC), \\
u_{12}(x, t) &= \left(\frac{\psi^2 \csc h(\frac{\psi}{2}\phi)}{2\psi \cosh(\frac{\psi}{2}\phi) - 2B \sinh(\frac{\psi}{2}\phi)} \right)^2 - B \left(\frac{\psi^2 \csc h(\frac{\psi}{2}\phi)}{2\psi \cosh(\frac{\psi}{2}\phi) - 2B \sinh(\frac{\psi}{2}\phi)} \right) \\
&\quad + \frac{1}{12} (B^2 - 16AC).
\end{aligned}$$

2. Tip: $B^2 - 4AC < 0$ ve $BC \neq 0$ veya $AC \neq 0$ iken,

$$\xi = \sqrt{4AC - B^2}$$

olmak üzere, (4.45) denklemlerinin çözümü aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned}
u_{13}(x, t) &= \left(\frac{\xi^2 \sec^2(\frac{\xi}{2}\phi)}{2(B - \xi \tan(\frac{\xi}{2}\phi))} \right)^2 - B \left(\frac{\xi^2 \sec^2(\frac{\xi}{2}\phi)}{2(B - \xi \tan(\frac{\xi}{2}\phi))} \right) + \frac{1}{12} (B^2 - 16AC), \\
u_{14}(x, t) &= \left(\frac{\xi^2 \csc^2(\frac{\xi}{2}\phi)}{2(B + \xi \cot(\frac{\xi}{2}\phi))} \right)^2 - B \left(\frac{\xi^2 \csc^2(\frac{\xi}{2}\phi)}{2(B + \xi \cot(\frac{\xi}{2}\phi))} \right) + \frac{1}{12} (B^2 - 16AC), \\
u_{15}(x, t) &= \left(\frac{\xi^2 (1 + (\tan(\xi\phi) \pm \sec(\xi\phi))^2)}{2(B - \xi(\tan(\xi\phi) \pm \sec(\xi\phi)))} \right)^2 - B \left(\frac{\xi^2 (1 + (\tan(\xi\phi) \pm \sec(\xi\phi))^2)}{2(B - \xi(\tan(\xi\phi) \pm \sec(\xi\phi)))} \right) \\
&\quad + \frac{1}{12} (B^2 - 16AC),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{16}(x, t) &= \left(\frac{\xi^2(1 + (\cot(\xi\phi) \pm \csc(\xi\phi))^2)}{2(B + \xi(\cot(\xi\phi) \pm \csc(\xi\phi)))} \right)^2 - B \left(\frac{\xi^2(1 + (\cot(\xi\phi) \pm \csc(\xi\phi))^2)}{2(B + \xi(\cot(\xi\phi) \pm \csc(\xi\phi)))} \right) \\
&\quad + \frac{1}{12} (B^2 - 16AC), \\
u_{17}(x, t) &= \left(\frac{\xi^2 \csc^2(\frac{\xi}{2}\phi)}{2B + \xi(\cot(\frac{\xi}{4}\phi) - \tan(\frac{\xi}{4}\phi))} \right)^2 - B \left(\frac{\xi^2 \csc^2(\frac{\xi}{2}\phi)}{2B + \xi(\cot(\frac{\xi}{4}\phi) - \tan(\frac{\xi}{4}\phi))} \right) \\
&\quad + \frac{1}{12} (B^2 - 16AC), \\
u_{18}(x, t) &= \left(\frac{P(\xi^2 \sqrt{-P^2 + R^2} \cos(\xi\phi) + \xi^2(P + R \sin(\xi\phi)))}{(R + P \sin(\xi\phi))(BR \pm \xi \sqrt{-P^2 + R^2} + \xi P \cos(\xi\phi) + BP \sin(\xi\phi))} \right)^2 \\
&\quad - B \left(\frac{P(\xi^2 \sqrt{-P^2 + R^2} \cos(\xi\phi) + \xi^2(P + R \sin(\xi\phi)))}{(R + P \sin(\xi\phi))(BR \pm \xi \sqrt{-P^2 + R^2} + \xi P \cos(\xi\phi) + BP \sin(\xi\phi))} \right) \\
&\quad + \frac{1}{12} (B^2 - 16AC), \\
u_{19}(x, t) &= \left(\frac{P(-\xi^2 \sqrt{P^2 - R^2} \cos(\xi\phi) + \xi^2(P + R \sin(\xi\phi)))}{(R + P \sin(\xi\phi))(BR \pm \xi \sqrt{P^2 - R^2} + \xi P \cos(\xi\phi) + BP \sin(\xi\phi))} \right)^2 \\
&\quad - B \left(\frac{P(-\xi^2 \sqrt{P^2 - R^2} \cos(\xi\phi) + \xi^2(P + R \sin(\xi\phi)))}{(R + P \sin(\xi\phi))(BR \pm \xi \sqrt{P^2 - R^2} + \xi P \cos(\xi\phi) + BP \sin(\xi\phi))} \right) \\
&\quad + \frac{1}{12} (B^2 - 16AC).
\end{aligned}$$

Burada P ve R , $P^2 - R^2 > 0$ eşitsizliğini sağlayan sıfırdan farklı reel sabitlerdir.

$$\begin{aligned}
u_{20}(x, t) &= \left(\frac{\xi^2 \sec(\frac{\xi}{2}\phi)}{2(B \cos(\frac{\xi}{2}\phi) + \xi \sin(\frac{\xi}{2}\phi))} \right)^2 - B \left(\frac{\xi^2 \sec(\frac{\xi}{2}\phi)}{2(B \cos(\frac{\xi}{2}\phi) + \xi \sin(\frac{\xi}{2}\phi))} \right) \\
&\quad + \frac{1}{12} (B^2 - 16AC), \\
u_{21}(x, t) &= \left(-\frac{\xi^2 \csc(\frac{\xi}{2}\phi)}{2\xi \cos(\frac{\xi}{2}\phi) - 2B \sin(\frac{\xi}{2}\phi)} \right)^2 - B \left(-\frac{\xi^2 \csc(\frac{\xi}{2}\phi)}{2\xi \cos(\frac{\xi}{2}\phi) - 2B \sin(\frac{\xi}{2}\phi)} \right) \\
&\quad + \frac{1}{12} (B^2 - 16AC),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{22}(x, t) &= \left(-\frac{1}{2} \sec(\xi\phi) ((B \cos(\xi\phi) \pm \xi) + \xi \sin(\xi\phi)) \left(1 + \frac{4AC \cos^2(\xi\phi)}{((B \cos(\xi\phi) \pm \xi) + \xi \sin(\xi\phi))^2}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \frac{2B \cos(\xi\phi)}{(B \cos(\xi\phi) \pm \xi) + \xi \sin(\xi\phi)}\right)^2 - B \left(-\frac{1}{2} \sec(\xi\phi) ((B \cos(\xi\phi) \pm \xi) + \xi \sin(\xi\phi))\right.\right. \\
&\quad \left.\left(1 + \frac{4AC \cos^2(\xi\phi)}{((B \cos(\xi\phi) \pm \xi) + \xi \sin(\xi\phi))^2} - \frac{2B \cos(\xi\phi)}{(B \cos(\xi\phi) \pm \xi) + \xi \sin(\xi\phi)}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{12} (B^2 - 16AC),\right. \\
u_{23}(x, t) &= \left(\frac{\csc(\xi\phi) (\xi \cos(\xi\phi) \pm \xi)^2 - \xi^2 \sin(\xi\phi)}{2((\xi \cos(\xi\phi) \pm \xi) - B \sin(\xi\phi))}\right)^2 - B \left(\frac{\csc(\xi\phi) (\xi \cos(\xi\phi) \pm \xi)^2 - \xi^2 \sin(\xi\phi)}{2((\xi \cos(\xi\phi) \pm \xi) - B \sin(\xi\phi))}\right) \\
&\quad + \frac{1}{12} (B^2 - 16AC), \\
u_{24}(x, t) &= \left(-\frac{2\xi^2 \csc(\frac{\xi}{2}\phi)}{4\xi \cos(\frac{\xi}{2}\phi) - 4B \sin(\frac{\xi}{2}\phi)}\right)^2 - B \left(-\frac{2\xi^2 \csc(\frac{\xi}{2}\phi)}{4\xi \cos(\frac{\xi}{2}\phi) - 4B \sin(\frac{\xi}{2}\phi)}\right) + \frac{1}{12} (B^2 - 16AC).
\end{aligned}$$

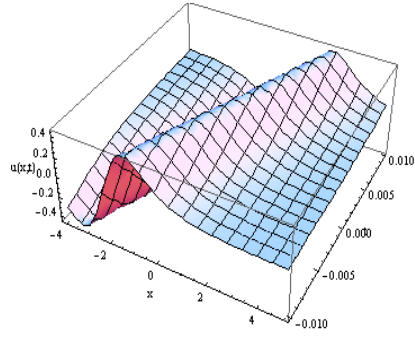
3. Tip: $A = 0$ ve $BC \neq 0$ iken, d_1 belirli bir sabit olmak üzere (4.45) denklemlerinin çözümü aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned}
u_{25}(x, t) &= \left(\frac{B(\cosh(B\phi) - \sinh(B\phi))}{\cosh(B\phi) - \sinh(B\phi) + d_1}\right)^2 - B \left(\frac{B(\cosh(B\phi) - \sinh(B\phi))}{\cosh(B\phi) - \sinh(B\phi) + d_1}\right) + \frac{1}{12} B^2, \\
u_{26}(x, t) &= \left(\frac{Bd_1}{\cosh(B\phi) + \sinh(B\phi) + d_1}\right)^2 - B \left(\frac{Bd_1}{\cosh(B\phi) + \sinh(B\phi) + d_1}\right) + \frac{1}{12} B^2.
\end{aligned}$$

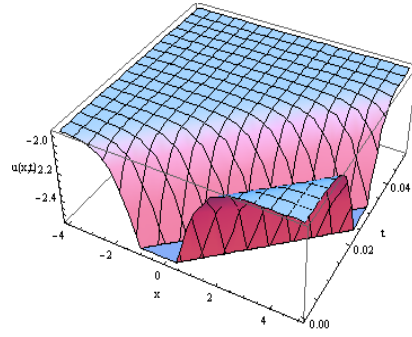
4. Tip: $C \neq 0$ ve $A = B = 0$ iken, c_1 belirli bir sabit olmak üzere (4.45) denklemlerinin çözümü,

$$u_{27}(x, t) = \left(-\frac{C}{C\phi + c_1}\right)^2$$

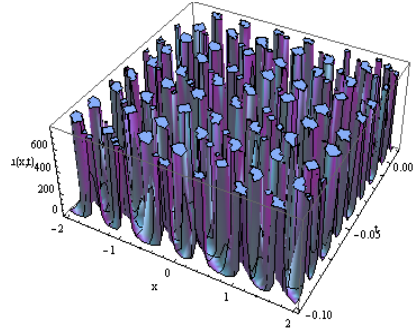
şeklinde elde edilir.



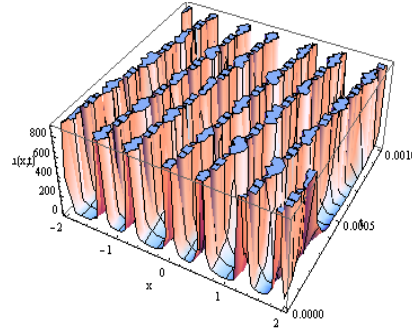
(a)



(b)



(c)

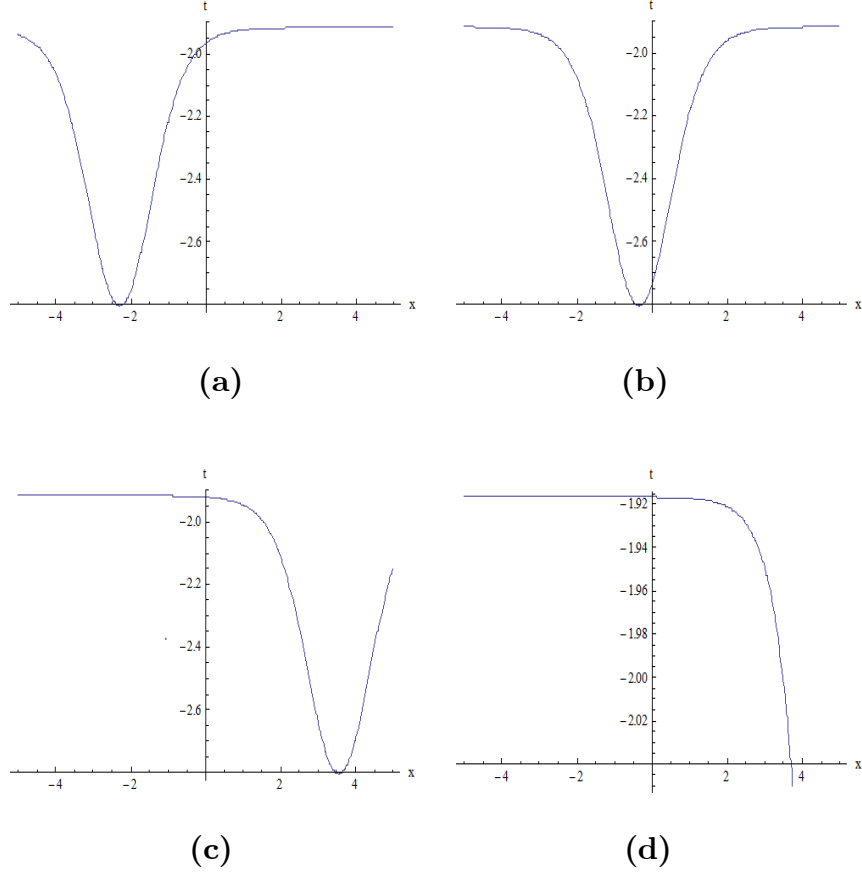


(d)

Şekil 19. Kaup–Kupershmidt denkleminin $u_3(x, t)(\text{Im})$, $u_3(x, t)(\text{Re})$, $u_{13}(x, t)$ ve $u_{21}(x, t)$ çözümleri için üç boyutlu periyodik dalga görünümü,

a) $u_3(x, t)(\text{Im})(A = 1, B = 3, C = 2)$, **b)** $u_3(x, t)(\text{Re})(A = 1, B = 3, C = 2)$,

c) $u_{13}(x, t)(A = 3, B = 1, C = 2)$, **d)** $u_{21}(x, t)(A = 3, B = 1, C = 2)$.



Şekil 20. Kaup–Kupershmidt denkleminin $u_3(x, t)(\text{Re})$ çözümü için iki boyutlu periyodik dalga grafiği, **a)** $t = -0.01$, **b)** $t = 0$, **c)** $t = 0.02$, **d)** $t = 0.05$.

Yukarıda Şekil 20 de zaman ilerledikçe Kaup–Kupershmidt denkleminin $u_3(x, t)$ çözümü için sağa doğru hareket eden periyodik dalga grafikleri görülmektedir.

4.3.2. Drinfeld-Sokolov-Wilson Denklem Sisteminin Genelleştirilmiş Riccati Denklemi Dönüşüm Metodu İle Analitik Çözümleri

$$\begin{aligned} u_t - 3ww_x &= 0, \\ w_t - 2w_{xxx} - 2uw_x - wu_x &= 0 \end{aligned} \quad (4.52)$$

Drinfeld-Sokolov-Wilson denklem sistemini ele alalım [8]. $\phi = x - Qt$ olmak üzere

$$\begin{aligned} u(x, t) &= q(\phi), \\ v(x, t) &= s(\phi) \end{aligned} \quad (4.53)$$

dönüşümü (4.52) denkleminde uygulanırsa

$$\begin{aligned} -Qq' - 3ss' &= 0, \\ -sq' - Qs' - 2qs' - 2s''' &= 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

elde edilir. (4.52) denkleminde u_t ile ww_x ve w_{xxx} ile wu_x , uw_x terimlerinden biri arasında dengeleme yapılırsa $m = 2$ ve $n = 1$ elde edilir.

Böylece (4.52) denkleminin çözümü,

$$G'(\phi) = A + BG(\phi) + CG^2(\phi) \quad (4.55)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} q &= a_0 + a_1 \left(\frac{G'(\phi)}{G(\phi)} \right) + a_2 \left(\frac{G'(\phi)}{G(\phi)} \right)^2, \\ s &= b_0 + b_1 \left(\frac{G'(\phi)}{G(\phi)} \right), \end{aligned} \quad (4.56)$$

şeklinde dir.

(4.56) denklemi (4.54) denkleminde yerine yazılıp, $G^k(\phi)$ ve $G^{-k}(\phi)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) terimlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse elde edilen cebirsel denklem sisteminden

Mathematica yardımıyla a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 ve Q terimleri elde edilir:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{4}(-B^2 + 16AC - b_1^2), \\
a_1 &= 3B, \\
a_2 &= -3, \\
b_0 &= -\frac{Bb_1}{2}, \\
Q &= \frac{b_1^2}{2}.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

(4.57) eşitlikleri kullanılarak (4.52) denkleminin çözümleri aşağıdaki gibi bulunur:

1. Tip: $B^2 - 4AC > 0$ ve $BC \neq 0$ veya $AC \neq 0$ iken

$$\psi = \sqrt{B^2 - 4AC}, \xi = \sqrt{4AC - B^2} \text{ ve } \phi = x - \frac{tb_1^2}{2}$$

olmak üzere, (4.52) denklemlerinin çözümü aşağıdaki şekildedir:

$$u_1(x, t) = \frac{1}{4}(-B^2 + 16AC - b_1^2) - \frac{3\psi^4 \sec h^4(\frac{\psi}{2}\phi)}{2(B + \psi \tanh(\frac{\psi}{2}\phi))^2} + 3\frac{B\psi^2 \sec h^2(\frac{\psi}{2}\phi)}{2(B + \psi \tanh(\frac{\psi}{2}\phi))},$$

$$w_1(x, t) = -\frac{Bb_1}{2} + \frac{\psi^2 \sec h^2(\frac{\psi}{2}\phi)b_1}{2(B + \psi \tanh(\frac{\psi}{2}\phi))},$$

$$u_2(x, t) = -\frac{3B\psi^2 \csc h^2(\frac{\psi}{2}\phi)}{2(B + \psi \coth(\frac{\psi}{2}\phi))} - \frac{3\psi^4 \csc h^4(\frac{\psi}{2}\phi)}{4(B + \psi \coth(\frac{\psi}{2}\phi))^2} + \frac{1}{4}(-B^2 + 16AC - b_1^2),$$

$$w_2(x, t) = -\frac{Bb_1}{2} - \frac{\psi^2 \csc h^2(\frac{\psi}{2}\phi)b_1}{2(B + \psi \coth(\frac{\psi}{2}\phi))},$$

$$u_3(x, t) = \frac{1}{4}(-B^2 + 16AC - b_1^2) - \frac{3B\psi^2(-1 + (\tanh(\psi\phi) \pm i \sec h(\psi\phi))^2)}{2(B + \psi(\tanh(\psi\phi) \pm i \sec h(\psi\phi)))} - \frac{3\psi^4(-1 + (\tanh(\psi\phi) \pm i \sec h(\psi\phi))^2)}{4(B + \psi(\tanh(\psi\phi) \pm i \sec h(\psi\phi)))^2},$$

$$w_3(x, t) = -\frac{Bb_1}{2} - b_1 \frac{\psi^2(-1 + (\tanh(\psi\phi) \pm i \sec h(\psi\phi))^2)}{2(B + \psi(\tanh(\psi\phi) \pm i \sec h(\psi\phi)))},$$

$$\begin{aligned}
u_4(x, t) &= -\frac{3B\psi^2(-1 + (\coth(\psi\phi) \pm \csc h(\psi\phi))^2)}{2(B + \psi(\coth(\psi\phi) \pm \csc h(\psi\phi)))} - \frac{3\psi^4(-1 + (\coth(\psi\phi) \pm \csc h(\psi\phi))^2)^2}{4(B + \psi(\coth(\psi\phi) \pm \csc h(\psi\phi)))^2} \\
&\quad + \frac{1}{4}(-B^2 + 16AC - b_1^2), \\
w_4(x, t) &= -\frac{Bb_1}{2} - b_1 \frac{\psi^2(-1 + (\coth(\psi\phi) \pm \csc h(\psi\phi))^2)}{2(B + \psi(\coth(\psi\phi) \pm \csc h(\psi\phi)))}, \\
u_5(x, t) &= \frac{1}{4}(-B^2 + 16AC - b_1^2) - \frac{3\psi^4 \csc h^4(\frac{\psi}{2}\phi)}{2B + \psi(\coth(\frac{\psi}{4}\phi) + \tanh(\frac{\psi}{4}\phi))^2} \\
&\quad - \frac{3B\psi^2 \csc h^2(\frac{\psi}{2}\phi)}{2B + \psi(\coth(\frac{\psi}{4}\phi) + \tanh(\frac{\psi}{4}\phi))}, \\
w_5(x, t) &= -\frac{Bb_1}{2} - b_1 \frac{\psi^2 \csc h^2(\frac{\psi}{2}\phi)}{2B + \psi(\coth(\frac{\psi}{4}\phi) + \tanh(\frac{\psi}{4}\phi))}, \\
u_6(x, t) &= \frac{3BP(\psi^2\sqrt{P^2 + R^2} \cosh(\psi\phi) - \psi^2(P - R \sinh(\psi\phi)))}{(R + P \sinh(\psi\phi))(BR - \psi\sqrt{P^2 + R^2} + \psi P \cosh(\psi\phi) + BP \sinh(\psi\phi))} \\
&\quad - \frac{3P^2(\psi^2\sqrt{P^2 + R^2} \cosh(\psi\phi) - \psi^2(P - R \sinh(\psi\phi)))^2}{(R + P \sinh(\psi\phi))^2(BR - \psi\sqrt{P^2 + R^2} + \psi P \cosh(\psi\phi) + BP \sinh(\psi\phi))^2} \\
&\quad + \frac{1}{4}(-B^2 + 16AC - b_1^2), \\
w_6(x, t) &= -\frac{Bb_1}{2} + b_1 \frac{P(\psi^2\sqrt{P^2 + R^2} \cosh(\psi\phi) - \psi^2(P - R \sinh(\psi\phi)))}{(R + P \sinh(\psi\phi))(BR - \psi\sqrt{P^2 + R^2} + \psi P \cosh(\psi\phi) + BP \sinh(\psi\phi))}, \\
u_7(x, t) &= \frac{3BP\psi^2(P + R \cosh(\psi\phi) - \sqrt{R^2 - P^2} \sinh(\psi\phi))}{(R + P \cosh(\psi\phi))(BR - \psi\sqrt{R^2 - P^2} + BP \cosh(\psi\phi) - \psi P \sinh(\psi\phi))} \\
&\quad - \frac{3P^2\psi^2(P + R \cosh(\psi\phi) - \sqrt{R^2 - P^2} \sinh(\psi\phi))}{(R + P \cosh(\psi\phi))^2(BR - \psi\sqrt{R^2 - P^2} + BP \cosh(\psi\phi) - \psi P \sinh(\psi\phi))^2} \\
&\quad + \frac{1}{4}(-B^2 + 16AC - b_1^2), \\
w_7(x, t) &= -\frac{Bb_1}{2} + b_1 \frac{P\psi^2(P + R \cosh(\psi\phi) - \sqrt{R^2 - P^2} \sinh(\psi\phi))}{(R + P \cosh(\psi\phi))(BR - \psi\sqrt{R^2 - P^2} + BP \cosh(\psi\phi) - \psi P \sinh(\psi\phi))}.
\end{aligned}$$

Burada P ve R , $R^2 - P^2 > 0$ eşitsizliğini sağlayan sıfırdan farklı reel sabitlerdir.

$$u_8(x, t) = -\frac{3\psi^4 \sec h^2(\frac{\psi}{2}\phi)}{2B \cosh(\frac{\psi}{2}\phi) - 2\psi \sinh(\frac{\psi}{2}\phi)} + \frac{3B\psi^2 \sec h(\frac{\psi}{2}\phi)}{2B \cosh(\frac{\psi}{2}\phi) - 2\psi \sinh(\frac{\psi}{2}\phi)} + \frac{1}{4}(-B^2 + 16AC - b_1^2),$$

$$w_8(x, t) = -\frac{Bb_1}{2} + b_1 \frac{\psi^2 \sec h(\frac{\psi}{2}\phi)}{2B \cosh(\frac{\psi}{2}\phi) - 2\psi \sinh(\frac{\psi}{2}\phi)},$$

$$u_9(x, t) = -\frac{3\psi^4 \csc h^2(\frac{\psi}{2}\phi)}{(2\psi \cosh(\frac{\psi}{2}\phi) - 2B \sinh(\frac{\psi}{2}\phi))^2} + \frac{3B\psi^2 \csc h(\frac{\psi}{2}\phi)}{2\psi \cosh(\frac{\psi}{2}\phi) - 2B \sinh(\frac{\psi}{2}\phi)} + \frac{1}{4}(-B^2 + 16AC - b_1^2),$$

$$w_9(x, t) = -\frac{Bb_1}{2} + b_1 \frac{\psi^2 \csc h(\frac{\psi}{2}\phi)}{2\psi \cosh(\frac{\psi}{2}\phi) - 2B \sinh(\frac{\psi}{2}\phi)},$$

$$u_{10}(x, t) = \left(\frac{3}{2}B \sec h(\psi\phi)(-B \cosh(\psi\phi) \pm i\psi) + \psi \sinh(\psi\phi) \right) \left(1 + \frac{4AC \cosh^2(\psi\phi)}{((B \cosh(\psi\phi) \pm i\psi) - \psi \sinh(\psi\phi))^2} + \frac{2B \cosh(\psi\phi)}{-(B \cosh(\psi\phi) \pm i\psi) + \psi \sinh(\psi\phi)} \right) + \frac{3}{4} \sec h^2(\psi\phi)(-B \cosh(\psi\phi) \pm i\psi) + \psi \sinh(\psi\phi))^2$$

$$w_{10}(x, t) = -\frac{Bb_1}{2} + b_1 \left(\frac{1}{2} \sec h(\psi\phi)(-B \cosh(\psi\phi) \pm i\psi) + \psi \sinh(\psi\phi) \right) \left(1 + \frac{4AC \cosh^2(\psi\phi)}{((B \cosh(\psi\phi) \pm i\psi) - \psi \sinh(\psi\phi))^2} + \frac{2B \cosh(\psi\phi)}{-(B \cosh(\psi\phi) \pm i\psi) + \psi \sinh(\psi\phi)} \right),$$

$$u_{11}(x, t) = \frac{3B \csc h(\psi\phi)(\psi \cosh(\psi\phi) \pm \psi)^2 - \psi^2 \sinh(\psi\phi)}{2((\psi \cosh(\psi\phi) \pm \psi) - B \sinh(\psi\phi))} - 3 \frac{(\csc h(\psi\phi)(\psi \cosh(\psi\phi) \pm \psi)^2 - \psi^2 \sinh(\psi\phi))^2}{4((\psi \cosh(\psi\phi) \pm \psi) - B \sinh(\psi\phi))^2} + \frac{1}{4}(-B^2 + 16AC - b_1^2),$$

$$w_{11}(x, t) = -\frac{Bb_1}{2} + b_1 \frac{\csc h(\psi\phi)(\psi \cosh(\psi\phi) \pm \psi)^2 - \psi^2 \sinh(\psi\phi)}{2((\psi \cosh(\psi\phi) \pm \psi) - B \sinh(\psi\phi))},$$

$$\begin{aligned}
u_{12}(x, t) &= -3 \frac{\psi^4 \csc h^2(\frac{\psi}{2}\phi)}{(2\psi \cosh(\frac{\psi}{2}\phi) - 2B \sinh(\frac{\psi}{2}\phi))^2} + \frac{3B\psi^2 \csc h(\frac{\psi}{2}\phi)}{2\psi \cosh(\frac{\psi}{2}\phi) - 2B \sinh(\frac{\psi}{2}\phi)} \\
&\quad + \frac{1}{4}(-B^2 + 16AC - b_1^2), \\
w_{12}(x, t) &= -\frac{Bb_1}{2} + b_1 \frac{\psi^2 \csc h(\frac{\psi}{2}\phi)}{2\psi \cosh(\frac{\psi}{2}\phi) - 2B \sinh(\frac{\psi}{2}\phi)}.
\end{aligned}$$

2. Tip: $B^2 - 4AC < 0$ ve $BC \neq 0$ veya $AC \neq 0$ iken

$$\xi = \sqrt{4AC - B^2}$$

olmak üzere, (4.52) denklemlerinin çözümü aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned}
u_{13}(x, t) &= \frac{1}{4}(-B^2 + 16AC - b_1^2) - \frac{3\xi^4 \sec^4(\frac{\xi}{2}\phi)}{4(B - \xi \tan(\frac{\xi}{2}\phi))^2} + \frac{3B\xi^2 \sec^2(\frac{\xi}{2}\phi)}{2(B - \xi \tan(\frac{\xi}{2}\phi))}, \\
w_{13}(x, t) &= -\frac{Bb_1}{2} + b_1 \frac{\xi^2 \sec^2(\frac{\xi}{2}\phi)}{2(B - \xi \tan(\frac{\xi}{2}\phi))}, \\
u_{14}(x, t) &= \frac{3B\xi^2 \csc^2(\frac{\xi}{2}\phi)}{2(B + \xi \cot(\frac{\xi}{2}\phi))} - \frac{3\xi^4 \csc^4(\frac{\xi}{2}\phi)}{4(B + \xi \cot(\frac{\xi}{2}\phi))^2} + \frac{1}{4}(-B^2 + 16AC - b_1^2), \\
w_{14}(x, t) &= -\frac{Bb_1}{2} + b_1 \frac{\xi^2 \csc^2(\frac{\xi}{2}\phi)}{2(B + \xi \cot(\frac{\xi}{2}\phi))}, \\
u_{15}(x, t) &= \frac{3B\xi^2(1 + (\tan(\xi\phi) \pm \sec(\xi\phi))^2)}{2(B - \xi(\tan(\xi\phi) \pm \sec(\xi\phi)))} - \frac{3\xi^4(1 + (\tan(\xi\phi) \pm \sec(\xi\phi)))^2}{4(B - \xi(\tan(\xi\phi) \pm \sec(\xi\phi)))^2} \\
&\quad + \frac{1}{4}(-B^2 + 16AC - b_1^2), \\
w_{15}(x, t) &= -\frac{Bb_1}{2} + b_1 \frac{\xi^2(1 + (\tan(\xi\phi) \pm \sec(\xi\phi))^2)}{2(B - \xi(\tan(\xi\phi) \pm \sec(\xi\phi)))}, \\
u_{16}(x, t) &= \frac{3B\xi^2(1 + (\cot(\xi\phi) \pm \csc(\xi\phi))^2)}{2(B + \xi(\cot(\xi\phi) \pm \csc(\xi\phi)))} - 3 \frac{\xi^4(1 + (\cot(\xi\phi) \pm \csc(\xi\phi))^2)^2}{4(B + \xi(\cot(\xi\phi) \pm \csc(\xi\phi)))} \\
&\quad + \frac{1}{4}(-B^2 + 16AC - b_1^2), \\
w_{16}(x, t) &= -\frac{Bb_1}{2} + b_1 \frac{\xi^2(1 + (\cot(\xi\phi) \pm \csc(\xi\phi))^2)}{2(B + \xi(\cot(\xi\phi) \pm \csc(\xi\phi)))},
\end{aligned}$$

$$u_{17}(x, t) = \frac{1}{4}(-B^2 + 16AC - b_1^2) - \frac{3\xi^4 \csc^4\left(\frac{\xi}{2}\phi\right)}{2B + \xi(\cot\left(\frac{\xi}{4}\phi\right) - \tan\left(\frac{\xi}{4}\phi\right))^2} + \frac{3B\xi^2 \csc^2\left(\frac{\xi}{2}\phi\right)}{2B + \xi(\cot\left(\frac{\xi}{4}\phi\right) - \tan\left(\frac{\xi}{4}\phi\right))}$$

$$w_{17}(x, t) = -\frac{Bb_1}{2} + b_1 \frac{\xi^2 \csc^2\left(\frac{\xi}{2}\phi\right)}{2B + \xi(\cot\left(\frac{\xi}{4}\phi\right) - \tan\left(\frac{\xi}{4}\phi\right))},$$

$$u_{18}(x, t) = \frac{3BP(-\xi^2\sqrt{P^2 - R^2} \cos(\xi\phi) + \xi^2(P + R \sin(\xi\phi)))}{(R + P \sin(\xi\phi))(BR \pm \xi\sqrt{-P^2 + R^2} + \xi P \cos(\xi\phi) + BP \sin(\xi\phi))} - \frac{3P^2(-\xi^2\sqrt{P^2 - R^2} \cos(\xi\phi) + \xi^2(P + R \sin(\xi\phi))^2)}{(R + P \sin(\xi\phi))^2(BR \pm \xi\sqrt{-P^2 + R^2} + \xi P \cos(\xi\phi) + BP \sin(\xi\phi))} + \frac{1}{4}(-B^2 + 16AC - b_1^2),$$

$$w_{18}(x, t) = -\frac{Bb_1}{2} + b_1 \frac{P(-\xi^2\sqrt{-P^2 + R^2} \cos(\xi\phi) + \xi^2(P + R \sin(\xi\phi)))}{(R + P \sin(\xi\phi))(BR \pm \xi\sqrt{-P^2 + R^2} + \xi P \cos(\xi\phi) + BP \sin(\xi\phi))},$$

$$u_{19}(x, t) = \frac{3BP(-\xi^2\sqrt{P^2 - R^2} \cos(\xi\phi) + \xi^2(P + R \sin(\xi\phi)))}{(R + P \sin(\xi\phi))(BR \pm \xi\sqrt{P^2 - R^2} + \xi P \cos(\xi\phi) + BP \sin(\xi\phi))} - \frac{3P^2(-\xi^2\sqrt{P^2 - R^2} \cos(\xi\phi) + \xi^2(P + R \sin(\xi\phi))^2)}{(R + P \sin(\xi\phi))^2(BR \pm \xi\sqrt{P^2 - R^2} + \xi P \cos(\xi\phi) + BP \sin(\xi\phi))} + \frac{1}{4}(-B^2 + 16AC - b_1^2),$$

$$w_{19}(x, t) = -\frac{Bb_1}{2} + b_1 \frac{P(-\xi^2\sqrt{P^2 - R^2} \cos(\xi\phi) + \xi^2(P + R \sin(\xi\phi)))}{(R + P \sin(\xi\phi))(BR \pm \xi\sqrt{P^2 - R^2} + \xi P \cos(\xi\phi) + BP \sin(\xi\phi))}.$$

Burada P ve R , $P^2 - R^2 > 0$ eşitsizliğini sağlayan sıfırdan farklı reel sabitlerdir.

$$u_{20}(x, t) = -3 \frac{\xi^4 \sec^2\left(\frac{\xi}{2}\phi\right)}{4(B \cos\left(\frac{\xi}{2}\phi\right) + \xi \sin\left(\frac{\xi}{2}\phi\right))^2} + \frac{3B\xi^2 \sec\left(\frac{\xi}{2}\phi\right)}{2(B \cos\left(\frac{\xi}{2}\phi\right) + \xi \sin\left(\frac{\xi}{2}\phi\right))} + \frac{1}{4}(-B^2 + 16AC - b_1^2),$$

$$w_{20}(x, t) = -\frac{Bb_1}{2} + b_1 \frac{\xi^2 \sec\left(\frac{\xi}{2}\phi\right)}{2(B \cos\left(\frac{\xi}{2}\phi\right) + \xi \sin\left(\frac{\xi}{2}\phi\right))},$$

$$u_{21}(x, t) = -3 \frac{\xi^4 \csc^2(\frac{\xi}{2}\phi)}{(2\xi \cos(\frac{\xi}{2}\phi) - 2B \sin(\frac{\xi}{2}\phi))^2} - \frac{3B\xi^2 \csc(\frac{\xi}{2}\phi)}{2\xi \cos(\frac{\xi}{2}\phi) - 2B \sin(\frac{\xi}{2}\phi)} + \frac{1}{4}(-B^2 + 16AC - b_1^2),$$

$$w_{21}(x, t) = -\frac{Bb_1}{2} - b_1 \frac{\xi^2 \csc(\frac{\xi}{2}\phi)}{2\xi \cos(\frac{\xi}{2}\phi) - 2B \sin(\frac{\xi}{2}\phi)},$$

$$u_{22}(x, t) = -\frac{3}{2}B \sec(\xi\phi)((B \cos(\xi\phi) \pm \xi) + \xi \sin(\xi\phi))(1 + \frac{4AC \cos^2(\xi\phi)}{((B \cos(\xi\phi) \pm \xi) + \xi \sin(\xi\phi))^2}) - \frac{2B \cos(\xi\phi)}{(B \cos(\xi\phi) \pm \xi) + \xi \sin(\xi\phi)} + \frac{3}{4} \sec^2(\xi\phi)((B \cos(\xi\phi) \pm \xi) + \xi \sin(\xi\phi))^2 (1 + \frac{4AC \cos^2(\xi\phi)}{((B \cos(\xi\phi) \pm \xi) + \xi \sin(\xi\phi))^2} - \frac{2B \cos(\xi\phi)}{(B \cos(\xi\phi) \pm \xi) + \xi \sin(\xi\phi)}) + \frac{1}{4}(-B^2 + 16AC - b_1^2),$$

$$w_{22}(x, t) = -\frac{Bb_1}{2} - \frac{1}{2}b_1 \sec(\xi\phi)((B \cos(\xi\phi) \pm \xi) + \xi \sin(\xi\phi)) (1 + \frac{4AC \cos^2(\xi\phi)}{((B \cos(\xi\phi) \pm \xi) + \xi \sin(\xi\phi))^2} - \frac{2B \cos(\xi\phi)}{(B \cos(\xi\phi) \pm \xi) + \xi \sin(\xi\phi)}),$$

$$u_{23}(x, t) = \frac{3B \csc(\xi\phi)(\xi \cos(\xi\phi) \pm \xi)^2 - \xi^2 \sin(\xi\phi)}{2((\xi \cos(\xi\phi) \pm \xi) - B \sin(\xi\phi))} - \frac{3 \csc(\xi\phi)(\xi \cos(\xi\phi) \pm \xi)^2 - \xi^2 \sin(\xi\phi)}{4((\xi \cos(\xi\phi) \pm \xi) - B \sin(\xi\phi))^2} + \frac{1}{4}(-B^2 + 16AC - b_1^2),$$

$$w_{23}(x, t) = -\frac{Bb_1}{2} + b_1 \frac{\csc(\xi\phi)(\xi \cos(\xi\phi) \pm \xi)^2 - \xi^2 \sin(\xi\phi)}{2((\xi \cos(\xi\phi) \pm \xi) - B \sin(\xi\phi))},$$

$$u_{24}(x, t) = -\frac{12\xi^4 \csc^2(\frac{\xi}{2}\phi)}{(4\xi \cos(\frac{\xi}{2}\phi) - 4B \sin(\frac{\xi}{2}\phi))^2} - \frac{6B\xi^2 \csc(\frac{\xi}{2}\phi)}{4\xi \cos(\frac{\xi}{2}\phi) - 4B \sin(\frac{\xi}{2}\phi)} + \frac{1}{4}(-B^2 + 16AC - b_1^2),$$

$$w_{24}(x, t) = -\frac{Bb_1}{2} - b_1 \frac{2\xi^2 \csc(\frac{\xi}{2}\phi)}{4\xi \cos(\frac{\xi}{2}\phi) - 4B \sin(\frac{\xi}{2}\phi)}.$$

3. Tip: $A = 0$ ve $BC \neq 0$ iken, d_1 belirli bir sabit olmak üzere (4.52) denklemlerinin çözümü aşağıdaki şekildedir:

$$u_{25}(x, t) = \frac{1}{4}(-B^2 - b_1^2) - \frac{3B^2(\cosh(B\phi) - \sinh(B\phi))^2}{(\cosh(B\phi) - \sinh(B\phi) + d_1)^2} + \frac{3B^2(\cosh(B\phi) - \sinh(B\phi))}{\cosh(B\phi) - \sinh(B\phi) + d_1},$$

$$w_{25}(x, t) = -\frac{Bb_1}{2} + b_1 \frac{B(\cosh(B\phi) - \sinh(B\phi))}{\cosh(B\phi) - \sinh(B\phi) + d_1},$$

$$u_{26}(x, t) = \frac{1}{4}(-B^2 - b_1^2) - \frac{3B^2d_1^2}{(\cosh(B\phi) + \sinh(B\phi) + d_1)^2} + \frac{3B^2d_1}{\cosh(B\phi) + \sinh(B\phi) + d_1},$$

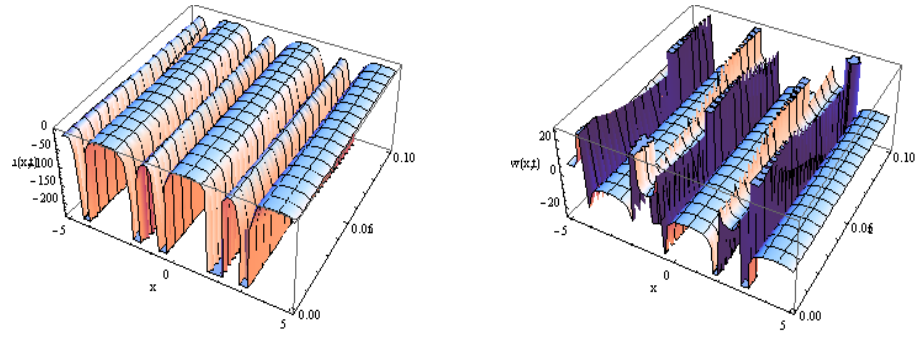
$$w_{26}(x, t) = -\frac{Bb_1}{2} + b_1 \frac{Bd_1}{\cosh(B\phi) + \sinh(B\phi) + d_1}.$$

4. Tip: $C \neq 0$ ve $A = B = 0$ iken, c_1 belirli bir sabit olmak üzere (4.52) denklemlerinin çözümü,

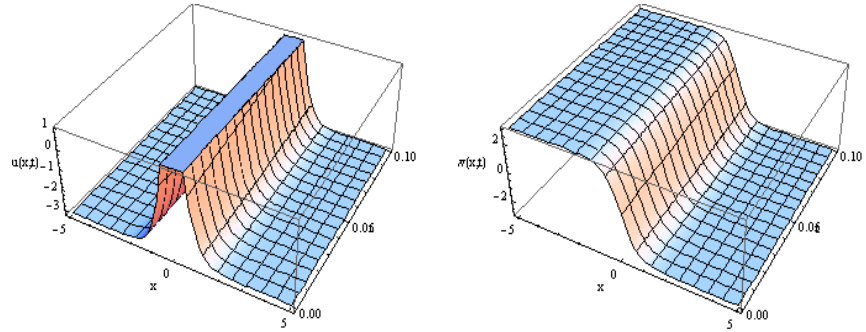
$$u_{27}(x, t) = -\frac{b_1^2}{4} - \frac{3C^2}{(C\phi + c_1)^2},$$

$$w_{27}(x, t) = -b_1 \frac{C}{C\phi + c_1}$$

şekindedir.



(a)

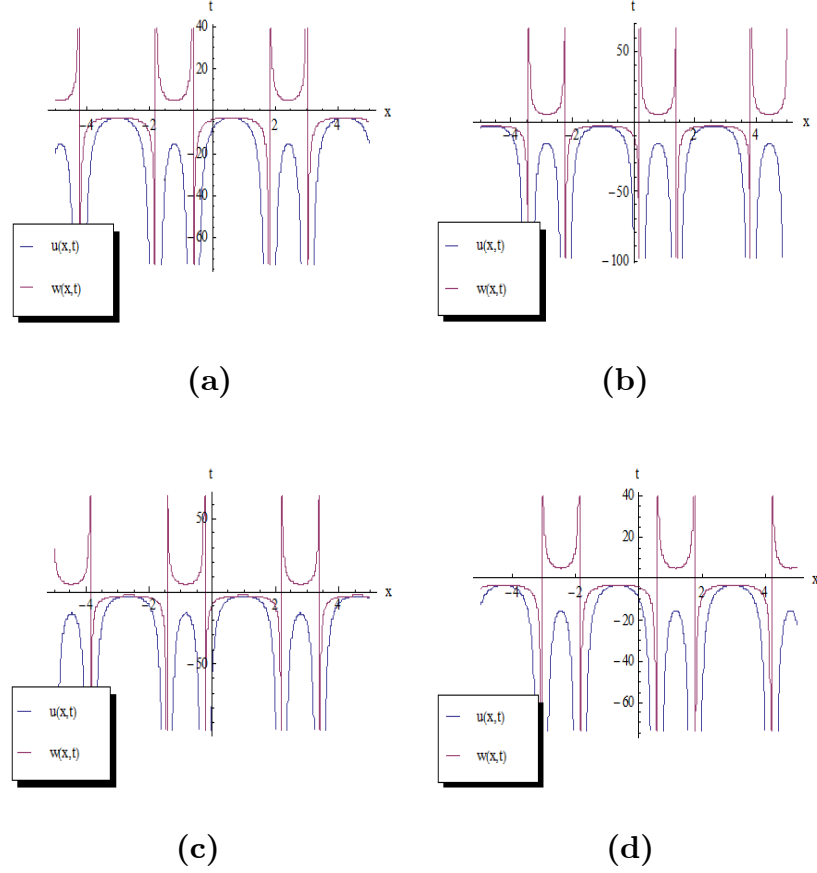


(b)

Şekil 21. DSW denklem sisteminin $u_{20}(x, t)$, $w_{20}(x, t)$ ve $u_{25}(x, t)$, $w_{25}(x, t)$ çözümleri için üç boyutlu periyodik dalga görünümü

a) ($A = 1, B = 1, C = 1, b_1 = 2$), **b)** ($A = 0, B = 3, b_1 = 2, d_1 = 1$).

Burada sol taraftaki üç boyutlu dalga görünümüleri $u(x, t)$ çözümleri için, sağ taraftaki üç boyutlu dalga görünümüleri $w(x, t)$ çözümleri için çizilmiştir.



Şekil 22. DSW denklem sisteminin $u_{20}(x, t)$ ve $w_{20}(x, t)$ çözümü için iki boyutlu periyodik dalga grafiği ($A = 1, B = 1, C = 1, b_1 = 2$), **a)** $t = 0$, **b)** $t = 1$, **c)** $t = 2$, **d)** $t = 3$.

Yukarıda Şekil 22 de zaman ilerledikçe DSW denklem sisteminin $u_{20}(x, t)$ ve $w_{20}(x, t)$ çözümü için sağa doğru hareket eden periyodik dalga grafikleri görülmektedir.

4.3.3. Hirota-Satsuma Denklem Sisteminin Genelleştirilmiş Riccati Denklemi Dönüşüm Metodu İle Analitik Çözümleri

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{2}u_{xxx} + 3uu_x - 3ww_x, \\ w_t &= -w_{xxx} - 3uw_x \end{aligned} \quad (4.58)$$

Hirota-Satsuma denklem sistemini ele alalım [12]. $\phi = x - Qt$ olmak üzere

$$\begin{aligned} u(x, t) &= q(\phi), \\ v(x, t) &= s(\phi), \end{aligned}$$

dönüşümü (4.58) denkleme uygulanırsa

$$\begin{aligned} -Qq' - 3qq' + 3ss' - \frac{1}{2}q''' &= 0, \\ -Qs' + 3qs' + 3s''' &= 0. \end{aligned} \quad (4.59)$$

(4.58) denkleminde w_{xxx} ile uw_x ve u_{xxx} ile $uu_x, 3ww_x$ terimlerinden biri arasında dengeleme yapılırsa $m = 2$ ve $n = 2$ elde edilir. Böylece (4.58) denkleminin çözümü,

$$G'(\phi) = A + BG(\phi) + CG^2(\phi) \quad (4.60)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} q &= a_0 + a_1 \left(\frac{G'(\phi)}{G(\phi)} \right) + a_2 \left(\frac{G'(\phi)}{G(\phi)} \right)^2, \\ s &= b_0 + b_1 \left(\frac{G'(\phi)}{G(\phi)} \right) + b_2 \left(\frac{G'(\phi)}{G(\phi)} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.61)$$

şeklinde dir.

(4.61) denklemi (4.59) denkleminde yerine yazılıp, $G^k(\phi)$ ve $G^{-k}(\phi)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) terimlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse elde edilen cebirsel denklem sisteminden Mathematica yardımıyla $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ ve Q terimleri elde edilir:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{8} (-2B^2 + 16AC - b_1^2), \\
a_1 &= 2B, \\
a_2 &= -2, \\
b_0 &= -\frac{B(-8AC + b_1^2)}{2b_1}, \\
b_2 &= 0, \\
Q &= \frac{1}{8} (2B^2 + 16AC - 3b_1^2).
\end{aligned} \tag{4.62}$$

1. Tip: $B^2 - 4AC > 0$ ve $BC \neq 0$ veya $AC \neq 0$ iken

$$\psi = \sqrt{B^2 - 4AC} \text{ ve } \xi = \sqrt{4AC - B^2}$$

olmak üzere, (4.58) denklemlerinin çözümünü aşağıdaki şekildedir:

$$u_1(x, t) = -2 \left(\frac{\psi^2 \sec h^2(\frac{\psi}{2}\phi)}{2(B + \psi \tanh(\frac{\psi}{2}\phi))} \right)^2 + 2B \frac{\psi^2 \sec h^2(\frac{\psi}{2}\phi)}{2(B + \psi \tanh(\frac{\psi}{2}\phi))} + \frac{1}{8} (-2B^2 + 16AC - b_1^2),$$

$$w_1(x, t) = b_1 \frac{\psi^2 \sec h^2(\frac{\psi}{2}\phi)}{2(B + \psi \tanh(\frac{\psi}{2}\phi))} - \frac{B(-8AC + b_1^2)}{2b_1},$$

$$u_2(x, t) = -2 \left(-\frac{\psi^2 \csc h^2(\frac{\psi}{2}\phi)}{2(B + \psi \coth(\frac{\psi}{2}\phi))} \right)^2 - 2B \frac{\psi^2 \csc h^2(\frac{\psi}{2}\phi)}{2(B + \psi \coth(\frac{\psi}{2}\phi))} + \frac{1}{8} (-2B^2 + 16AC - b_1^2),$$

$$w_2(x, t) = -b_1 \frac{\psi^2 \csc h^2(\frac{\psi}{2}\phi)}{2(B + \psi \coth(\frac{\psi}{2}\phi))} - \frac{B(-8AC + b_1^2)}{2b_1},$$

$$\begin{aligned}
u_3(x, t) &= -2 \left(-\frac{\psi^2 (-1 + (\tanh(\psi\phi) \pm i \sec h(\psi\phi))^2)}{2(B + \psi(\tanh(\psi\phi) \pm i \sec h(\psi\phi)))} \right)^2 - 2B \frac{\psi^2 (-1 + (\tanh(\psi\phi) \pm i \sec h(\psi\phi))^2)}{2(B + \psi(\tanh(\psi\phi) \pm i \sec h(\psi\phi)))} \\
&\quad + \frac{1}{8} (-2B^2 + 16AC - b_1^2),
\end{aligned}$$

$$w_3(x, t) = -b_1 \frac{\psi^2 (-1 + (\tanh(\psi\phi) \pm i \sec h(\psi\phi))^2)}{2(B + \psi(\tanh(\psi\phi) \pm i \sec h(\psi\phi)))} - \frac{B(-8AC + b_1^2)}{2b_1},$$

$$\begin{aligned}
u_4(x, t) &= -2\left(-\frac{\psi^2(-1 + (\coth(\psi\phi) \pm \csc h(\psi\phi))^2)}{2(B + \psi(\coth(\psi\phi) \pm \csc h(\psi\phi)))}\right)^2 - 2B\frac{\psi^2(-1 + (\coth(\psi\phi) \pm \csc h(\psi\phi))^2)}{2(B + \psi(\coth(\psi\phi) \pm \csc h(\psi\phi)))} \\
&\quad + \frac{1}{8}(-2B^2 + 16AC - b_1^2), \\
w_4(x, t) &= -b_1\frac{\psi^2(-1 + (\coth(\psi\phi) \pm \csc h(\psi\phi))^2)}{2(B + \psi(\coth(\psi\phi) \pm \csc h(\psi\phi)))} - \frac{B(-8AC + b_1^2)}{2b_1}, \\
u_5(x, t) &= -2\left(-\frac{\psi^2 \csc h^2(\frac{\psi}{2}\phi)}{2B + \psi(\coth(\frac{\psi}{4}\phi) + \tanh(\frac{\psi}{4}\phi))}\right)^2 - 2B\frac{\psi^2 \csc h^2(\frac{\psi}{2}\phi)}{2B + \psi(\coth(\frac{\psi}{4}\phi) + \tanh(\frac{\psi}{4}\phi))} \\
&\quad + \frac{1}{8}(-2B^2 + 16AC - b_1^2), \\
w_5(x, t) &= -b_1\frac{\psi^2 \csc h^2(\frac{\psi}{2}\phi)}{2B + \psi(\coth(\frac{\psi}{4}\phi) + \tanh(\frac{\psi}{4}\phi))} - \frac{B(-8AC + b_1^2)}{2b_1}, \\
u_6(x, t) &= -2\left(\frac{P(\psi^2\sqrt{P^2 + R^2} \cosh(\psi\phi) - \psi^2(P - R \sinh(\psi\phi)))}{(R + P \sinh(\psi\phi))(BR - \psi\sqrt{P^2 + R^2} + \psi P \cosh(\psi\phi) + BP \sinh(\psi\phi))}\right)^2 \\
&\quad + 2B\frac{P(\psi^2\sqrt{P^2 + R^2} \cosh(\psi\phi) - \psi^2(P - R \sinh(\psi\phi)))}{(R + P \sinh(\psi\phi))(BR - \psi\sqrt{P^2 + R^2} + \psi P \cosh(\psi\phi) + BP \sinh(\psi\phi))} \\
&\quad + \frac{1}{8}(-2B^2 + 16AC - b_1^2), \\
w_6(x, t) &= b_1\frac{P(\psi^2\sqrt{P^2 + R^2} \cosh(\psi\phi) - \psi^2(P - R \sinh(\psi\phi)))}{(R + P \sinh(\psi\phi))(BR - \psi\sqrt{P^2 + R^2} + \psi P \cosh(\psi\phi) + BP \sinh(\psi\phi))} \\
&\quad - \frac{B(-8AC + b_1^2)}{2b_1}, \\
u_7(x, t) &= -2\left(\frac{P\psi^2(P + R \cosh(\psi\phi) - \sqrt{R^2 - P^2} \sinh(\psi\phi))}{(R + P \cosh(\psi\phi))(BR - \psi\sqrt{R^2 - P^2} + BP \cosh(\psi\phi) - \psi P \sinh(\psi\phi))}\right)^2 \\
&\quad + 2B\frac{P\psi^2(P + R \cosh(\psi\phi) - \sqrt{R^2 - P^2} \sinh(\psi\phi))}{(R + P \cosh(\psi\phi))(BR - \psi\sqrt{R^2 - P^2} + BP \cosh(\psi\phi) - \psi P \sinh(\psi\phi))} \\
&\quad + \frac{1}{8}(-2B^2 + 16AC - b_1^2), \\
w_7(x, t) &= b_1\frac{P\psi^2(P + R \cosh(\psi\phi) - \sqrt{R^2 - P^2} \sinh(\psi\phi))}{(R + P \cosh(\psi\phi))(BR - \psi\sqrt{R^2 - P^2} + BP \cosh(\psi\phi) - \psi P \sinh(\psi\phi))} \\
&\quad - \frac{B(-8AC + b_1^2)}{2b_1}.
\end{aligned}$$

Burada P ve R , $R^2 - P^2 > 0$ eşitsizliğini sağlayan sıfırdan farklı reel sabitlerdir.

$$u_8(x, t) = -2\left(\frac{\psi^2 \sec h(\frac{\psi}{2}\phi)}{2B \cosh(\frac{\psi}{2}\phi) - 2\psi \sinh(\frac{\psi}{2}\phi)}\right)^2 + 2B\frac{\psi^2 \sec h(\frac{\psi}{2}\phi)}{2B \cosh(\frac{\psi}{2}\phi) - 2\psi \sinh(\frac{\psi}{2}\phi)} + \frac{1}{8}(-2B^2 + 16AC - b_1^2),$$

$$w_8(x, t) = b_1\frac{\psi^2 \sec h(\frac{\psi}{2}\phi)}{2B \cosh(\frac{\psi}{2}\phi) - 2\psi \sinh(\frac{\psi}{2}\phi)} - \frac{B(-8AC + b_1^2)}{2b_1},$$

$$u_9(x, t) = -2\left(\frac{\psi^2 \csc h(\frac{\psi}{2}\phi)}{2\psi \cosh(\frac{\psi}{2}\phi) - 2B \sinh(\frac{\psi}{2}\phi)}\right)^2 + 2B\frac{\psi^2 \csc h(\frac{\psi}{2}\phi)}{2\psi \cosh(\frac{\psi}{2}\phi) - 2B \sinh(\frac{\psi}{2}\phi)} + \frac{1}{8}(-2B^2 + 16AC - b_1^2),$$

$$w_9(x, t) = b_1\frac{\psi^2 \csc h(\frac{\psi}{2}\phi)}{2\psi \cosh(\frac{\psi}{2}\phi) - 2B \sinh(\frac{\psi}{2}\phi)} - \frac{B(-8AC + b_1^2)}{2b_1},$$

$$u_{10}(x, t) = -2\left(\frac{1}{2} \sec h(\psi\phi)(-(B \cosh(\psi\phi) \pm i\psi) + \psi \sinh(\psi\phi))\right. \\ \left.(1 + \frac{4AC \cosh^2(\psi\phi)}{((B \cosh(\psi\phi) \pm i\psi) - \psi \sinh(\psi\phi))^2} + \frac{2B \cosh(\psi\phi)}{-(B \cosh(\psi\phi) \pm i\psi) + \psi \sinh(\psi\phi)})^2\right. \\ \left.+ 2B\left(\frac{1}{2} \sec h(\psi\phi)(-(B \cosh(\psi\phi) \pm i\psi) + \psi \sinh(\psi\phi))\right)\left(1 + \frac{4AC \cosh^2(\psi\phi)}{((B \cosh(\psi\phi) \pm i\psi) - \psi \sinh(\psi\phi))^2} + \frac{2B \cosh(\psi\phi)}{-(B \cosh(\psi\phi) \pm i\psi) + \psi \sinh(\psi\phi)}\right)\right) \\ \left.+ \frac{1}{8}(-2B^2 + 16AC - b_1^2),\right.$$

$$w_{10}(x, t) = b_1\left(\frac{1}{2} \sec h(\psi\phi)(-(B \cosh(\psi\phi) \pm i\psi) + \psi \sinh(\psi\phi))\right. \\ \left.(1 + \frac{4AC \cosh^2(\psi\phi)}{((B \cosh(\psi\phi) \pm i\psi) - \psi \sinh(\psi\phi))^2} + \frac{2B \cosh(\psi\phi)}{-(B \cosh(\psi\phi) \pm i\psi) + \psi \sinh(\psi\phi)})\right) - \frac{B(-8AC + b_1^2)}{2b_1},$$

$$\begin{aligned}
u_{11}(x, t) &= -2\left(\frac{\csc h(\psi\phi)(\psi \cosh(\psi\phi) \pm \psi)^2 - \psi^2 \sinh(\psi\phi)}{2((\psi \cosh(\psi\phi) \pm \psi) - B \sinh(\psi\phi))}\right)^2 \\
&\quad + 2B\frac{\csc h(\psi\phi)(\psi \cosh(\psi\phi) \pm \psi)^2 - \psi^2 \sinh(\psi\phi)}{2((\psi \cosh(\psi\phi) \pm \psi) - B \sinh(\psi\phi))} + \frac{1}{8}(-2B^2 + 16AC - b_1^2), \\
w_{11}(x, t) &= b_1\frac{\csc h(\psi\phi)(\psi \cosh(\psi\phi) \pm \psi)^2 - \psi^2 \sinh(\psi\phi)}{2((\psi \cosh(\psi\phi) \pm \psi) - B \sinh(\psi\phi))} - \frac{B(-8AC + b_1^2)}{2b_1}, \\
u_{12}(x, t) &= -2\left(\frac{\psi^2 \csc h(\frac{\psi}{2}\phi)}{2\psi \cosh(\frac{\psi}{2}\phi) - 2B \sinh(\frac{\psi}{2}\phi)}\right)^2 + 2B\frac{\psi^2 \csc h(\frac{\psi}{2}\phi)}{2\psi \cosh(\frac{\psi}{2}\phi) - 2B \sinh(\frac{\psi}{2}\phi)} \\
&\quad + \frac{1}{8}(-2B^2 + 16AC - b_1^2), \\
w_{12}(x, t) &= b_1\frac{\psi^2 \csc h(\frac{\psi}{2}\phi)}{2\psi \cosh(\frac{\psi}{2}\phi) - 2B \sinh(\frac{\psi}{2}\phi)} - \frac{B(-8AC + b_1^2)}{2b_1}.
\end{aligned}$$

2. Tip: $B^2 - 4AC < 0$ ve $BC \neq 0$ veya $AC \neq 0$ iken,

$$\xi = \sqrt{4AC - B^2}$$

olmak üzere, (4.58) denklemlerinin çözümü aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned}
u_{13}(x, t) &= -2\left(\frac{\xi^2 \sec^2(\frac{\xi}{2}\phi)}{2(B - \xi \tan(\frac{\xi}{2}\phi))}\right)^2 + 2B\frac{\xi^2 \sec^2(\frac{\xi}{2}\phi)}{2(B - \xi \tan(\frac{\xi}{2}\phi))} + \frac{1}{8}(-2B^2 + 16AC - b_1^2), \\
w_{13}(x, t) &= b_1\frac{\xi^2 \sec^2(\frac{\xi}{2}\phi)}{2(B - \xi \tan(\frac{\xi}{2}\phi))} - \frac{B(-8AC + b_1^2)}{2b_1}, \\
u_{14}(x, t) &= -2\left(\frac{\xi^2 \csc^2(\frac{\xi}{2}\phi)}{2(B + \xi \cot(\frac{\xi}{2}\phi))}\right)^2 + 2B\frac{\xi^2 \csc^2(\frac{\xi}{2}\phi)}{2(B + \xi \cot(\frac{\xi}{2}\phi))} + \frac{1}{8}(-2B^2 + 16AC - b_1^2), \\
w_{14}(x, t) &= b_1\frac{\xi^2 \csc^2(\frac{\xi}{2}\phi)}{2(B + \xi \cot(\frac{\xi}{2}\phi))} - \frac{B(-8AC + b_1^2)}{2b_1}, \\
u_{15}(x, t) &= -2\left(\frac{\xi^2(1 + (\tan(\xi\phi) \pm \sec(\xi\phi))^2)}{2(B - \xi(\tan(\xi\phi) \pm \sec(\xi\phi)))}\right)^2 + 2B\frac{\xi^2(1 + (\tan(\xi\phi) \pm \sec(\xi\phi))^2)}{2(B - \xi(\tan(\xi\phi) \pm \sec(\xi\phi)))} \\
&\quad + \frac{1}{8}(-2B^2 + 16AC - b_1^2), \\
w_{15}(x, t) &= b_1\frac{\xi^2(1 + (\tan(\xi\phi) \pm \sec(\xi\phi))^2)}{2(B - \xi(\tan(\xi\phi) \pm \sec(\xi\phi)))} - \frac{B(-8AC + b_1^2)}{2b_1},
\end{aligned}$$

$$u_{16}(x, t) = -2\left(\frac{\xi^2(1 + (\cot(\xi\phi) \pm \csc(\xi\phi))^2)}{2(B + \xi(\cot(\xi\phi) \pm \csc(\xi\phi)))}\right)^2 + 2B\frac{\xi^2(1 + (\cot(\xi\phi) \pm \csc(\xi\phi))^2)}{2(B + \xi(\cot(\xi\phi) \pm \csc(\xi\phi)))}$$

$$+ \frac{1}{8}(-2B^2 + 16AC - b_1^2),$$

$$w_{16}(x, t) = b_1\frac{\xi^2(1 + (\cot(\xi\phi) \pm \csc(\xi\phi))^2)}{2(B + \xi(\cot(\xi\phi) \pm \csc(\xi\phi)))} - \frac{B(-8AC + b_1^2)}{2b_1},$$

$$u_{17}(x, t) = -2\left(\frac{\xi^2 \csc^2\left(\frac{\xi}{2}\phi\right)}{2B + \xi(\cot\left(\frac{\xi}{4}\phi\right) - \tan\left(\frac{\xi}{4}\phi\right))}\right)^2 + 2B\frac{\xi^2 \csc^2\left(\frac{\xi}{2}\phi\right)}{2B + \xi(\cot\left(\frac{\xi}{4}\phi\right) - \tan\left(\frac{\xi}{4}\phi\right))}$$

$$+ \frac{1}{8}(-2B^2 + 16AC - b_1^2),$$

$$w_{17}(x, t) = b_1\frac{\xi^2 \csc^2\left(\frac{\xi}{2}\phi\right)}{2B + \xi(\cot\left(\frac{\xi}{4}\phi\right) - \tan\left(\frac{\xi}{4}\phi\right))} - \frac{B(-8AC + b_1^2)}{2b_1},$$

$$u_{18}(x, t) = -2\left(\frac{P(\xi^2\sqrt{-P^2 + R^2}\cos(\xi\phi) + \xi^2(P + R\sin(\xi\phi)))}{(R + P\sin(\xi\phi))(BR \pm \xi\sqrt{-P^2 + R^2} + \xi P\cos(\xi\phi) + BP\sin(\xi\phi))}\right)^2$$

$$+ 2B\frac{P(\xi^2\sqrt{-P^2 + R^2}\cos(\xi\phi) + \xi^2(P + R\sin(\xi\phi)))}{(R + P\sin(\xi\phi))(BR \pm \xi\sqrt{-P^2 + R^2} + \xi P\cos(\xi\phi) + BP\sin(\xi\phi))}$$

$$+ \frac{1}{8}(-2B^2 + 16AC - b_1^2),$$

$$w_{18}(x, t) = \frac{P(\xi^2\sqrt{-P^2 + R^2}\cos(\xi\phi) + \xi^2(P + R\sin(\xi\phi)))}{(R + P\sin(\xi\phi))(BR \pm \xi\sqrt{-P^2 + R^2} + \xi P\cos(\xi\phi) + BP\sin(\xi\phi))} - \frac{B(-8AC + b_1^2)}{2b_1},$$

$$u_{19}(x, t) = -2\left(\frac{P(-\xi^2\sqrt{P^2 - R^2}\cos(\xi\phi) + \xi^2(P + R\sin(\xi\phi)))}{(R + P\sin(\xi\phi))(BR \pm \xi\sqrt{P^2 - R^2} + \xi P\cos(\xi\phi) + BP\sin(\xi\phi))}\right)^2$$

$$+ 2B\frac{P(-\xi^2\sqrt{P^2 - R^2}\cos(\xi\phi) + \xi^2(P + R\sin(\xi\phi)))}{(R + P\sin(\xi\phi))(BR \pm \xi\sqrt{P^2 - R^2} + \xi P\cos(\xi\phi) + BP\sin(\xi\phi))}$$

$$+ \frac{1}{8}(-2B^2 + 16AC - b_1^2),$$

$$w_{19}(x, t) = b_1\frac{P(-\xi^2\sqrt{P^2 - R^2}\cos(\xi\phi) + \xi^2(P + R\sin(\xi\phi)))}{(R + P\sin(\xi\phi))(BR \pm \xi\sqrt{P^2 - R^2} + \xi P\cos(\xi\phi) + BP\sin(\xi\phi))} - \frac{B(-8AC + b_1^2)}{2b_1},$$

Burada P ve R , $P^2 - R^2 > 0$ eşitsizliğini sağlayan sıfırdan farklı reel sabitlerdir.

$$\begin{aligned}
u_{20}(x, t) &= -2\left(\frac{\xi^2 \sec(\frac{\xi}{2}\phi)}{2(B \cos(\frac{\xi}{2}\phi) + \xi \sin(\frac{\xi}{2}\phi))}\right)^2 + 2B\frac{\xi^2 \sec(\frac{\xi}{2}\phi)}{2(B \cos(\frac{\xi}{2}\phi) + \xi \sin(\frac{\xi}{2}\phi))} \\
&\quad + \frac{1}{8}(-2B^2 + 16AC - b_1^2), \\
w_{20}(x, t) &= b_1\frac{\xi^2 \sec(\frac{\xi}{2}\phi)}{2(B \cos(\frac{\xi}{2}\phi) + \xi \sin(\frac{\xi}{2}\phi))} - \frac{B(-8AC + b_1^2)}{2b_1}, \\
u_{21}(x, t) &= -2\left(-\frac{\xi^2 \csc(\frac{\xi}{2}\phi)}{2\xi \cos(\frac{\xi}{2}\phi) - 2B \sin(\frac{\xi}{2}\phi)}\right)^2 - 2B\frac{\xi^2 \csc(\frac{\xi}{2}\phi)}{2\xi \cos(\frac{\xi}{2}\phi) - 2B \sin(\frac{\xi}{2}\phi)} \\
&\quad + \frac{1}{8}(-2B^2 + 16AC - b_1^2), \\
w_{21}(x, t) &= -b_1\frac{\xi^2 \csc(\frac{\xi}{2}\phi)}{2\xi \cos(\frac{\xi}{2}\phi) - 2B \sin(\frac{\xi}{2}\phi)} - \frac{B(-8AC + b_1^2)}{2b_1}, \\
u_{22}(x, t) &= -2\left(-\frac{1}{2} \sec(\xi\phi)((B \cos(\xi\phi) \pm \xi) + \xi \sin(\xi\phi))\left(1 + \frac{4AC \cos^2(\xi\phi)}{((B \cos(\xi\phi) \pm \xi) + \xi \sin(\xi\phi))^2}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \frac{2B \cos(\xi\phi)}{(B \cos(\xi\phi) \pm \xi) + \xi \sin(\xi\phi)}\right)\right)^2 + a_1\left(-\frac{1}{2} \sec(\xi\phi)((B \cos(\xi\phi) \pm \xi) + \xi \sin(\xi\phi))\right. \\
&\quad \left.\left(1 + \frac{4AC \cos^2(\xi\phi)}{((B \cos(\xi\phi) \pm \xi) + \xi \sin(\xi\phi))^2} - \frac{2B \cos(\xi\phi)}{(B \cos(\xi\phi) \pm \xi) + \xi \sin(\xi\phi)}\right)\right) \\
&\quad + \frac{1}{8}(-2B^2 + 16AC - b_1^2), \\
w_{22}(x, t) &= b_1\left(-\frac{1}{2} \sec(\xi\phi)((B \cos(\xi\phi) \pm \xi) + \xi \sin(\xi\phi))\left(1 + \frac{4AC \cos^2(\xi\phi)}{((B \cos(\xi\phi) \pm \xi) + \xi \sin(\xi\phi))^2}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \frac{2B \cos(\xi\phi)}{(B \cos(\xi\phi) \pm \xi) + \xi \sin(\xi\phi)}\right)\right) - \frac{B(-8AC + b_1^2)}{2b_1}, \\
u_{23}(x, t) &= -2\left(\frac{\csc(\xi\phi)(\xi \cos(\xi\phi) \pm \xi)^2 - \xi^2 \sin(\xi\phi)}{2((\xi \cos(\xi\phi) \pm \xi) - B \sin(\xi\phi))}\right)^2 \\
&\quad + 2B\frac{\csc(\xi\phi)(\xi \cos(\xi\phi) \pm \xi)^2 - \xi^2 \sin(\xi\phi)}{2((\xi \cos(\xi\phi) \pm \xi) - B \sin(\xi\phi))} + \frac{1}{8}(-2B^2 + 16AC - b_1^2), \\
w_{23}(x, t) &= b_1\frac{\csc(\xi\phi)(\xi \cos(\xi\phi) \pm \xi)^2 - \xi^2 \sin(\xi\phi)}{2((\xi \cos(\xi\phi) \pm \xi) - B \sin(\xi\phi))} - \frac{B(-8AC + b_1^2)}{2b_1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{24}(x, t) &= -2\left(-\frac{2\xi^2 \csc(\frac{\xi}{2}\phi)}{4\xi \cos(\frac{\xi}{2}\phi) - 4B \sin(\frac{\xi}{2}\phi)}\right)^2 - 2B \frac{2\xi^2 \csc(\frac{\xi}{2}\phi)}{4\xi \cos(\frac{\xi}{2}\phi) - 4B \sin(\frac{\xi}{2}\phi)} \\
&\quad + \frac{1}{8} (-2B^2 + 16AC - b_1^2), \\
w_{24}(x, t) &= -b_1 \left(\frac{2\xi^2 \csc(\frac{\xi}{2}\phi)}{4\xi \cos(\frac{\xi}{2}\phi) - 4B \sin(\frac{\xi}{2}\phi)}\right) - \frac{B(-8AC + b_1^2)}{2b_1}.
\end{aligned}$$

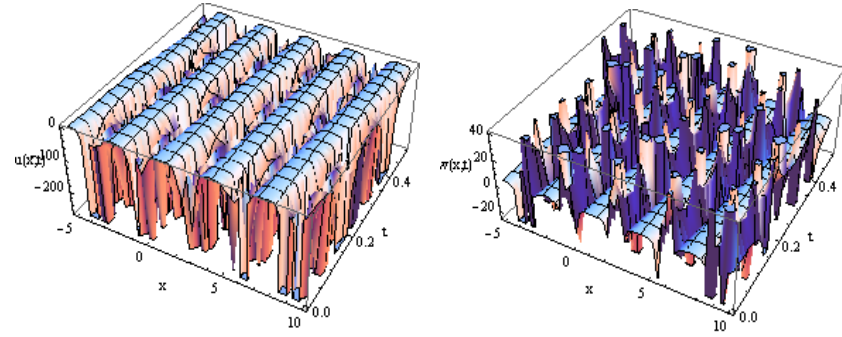
3. Tip: $A = 0$ ve $BC \neq 0$ iken, d_1 belirli bir sabit olmak üzere (4.58) denklemlerinin çözümünü aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned}
u_{25}(x, t) &= -2\left(\frac{B(\cosh(B\phi) - \sinh(B\phi))}{\cosh(B\phi) - \sinh(B\phi) + d_1}\right)^2 + 2B \frac{B(\cosh(B\phi) - \sinh(B\phi))}{\cosh(B\phi) - \sinh(B\phi) + d_1} + \frac{1}{8} (-2B^2 - b_1^2), \\
w_{25}(x, t) &= b_1 \frac{B(\cosh(B\phi) - \sinh(B\phi))}{\cosh(B\phi) - \sinh(B\phi) + d_1} - \frac{Bb_1^2}{2b_1}, \\
u_{26}(x, t) &= -2\left(\frac{Bd_1}{\cosh(B\phi) + \sinh(B\phi) + d_1}\right)^2 + 2B \frac{Bd_1}{\cosh(B\phi) + \sinh(B\phi) + d_1} + \frac{1}{8} (-2B^2 - b_1^2), \\
w_{26}(x, t) &= b_1 \frac{Bd_1}{\cosh(B\phi) + \sinh(B\phi) + d_1} - \frac{Bb_1^2}{2b_1}.
\end{aligned}$$

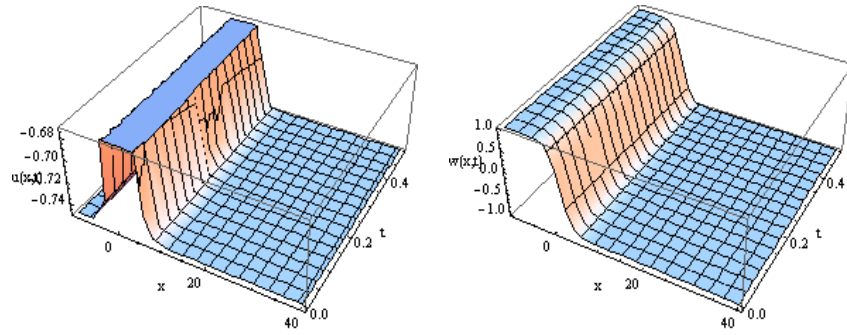
4. Tip: $C \neq 0$ ve $A = B = 0$ iken, c_1 belirli bir sabit olmak üzere (4.58) denklemlerinin çözümü

$$\begin{aligned}
u_{27}(x, t) &= -2\left(-\frac{C}{C\phi + c_1}\right)^2 + \frac{1}{8} (-b_1^2), \\
w_{27}(x, t) &= -b_1 \frac{C}{C\phi + c_1}
\end{aligned}$$

şekindedir.



(a)

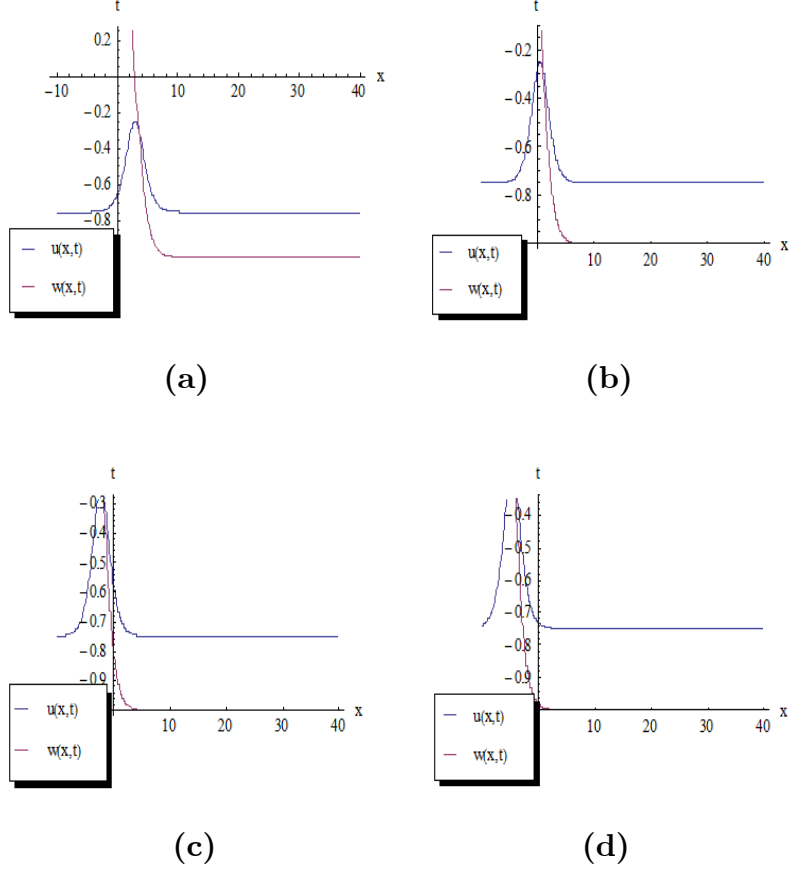


(b)

Şekil 23. Hirota-Satsuma denklem sisteminin $u_{17}(x, t)$, $w_{17}(x, t)$ ve $u_{26}(x, t)$, $w_{26}(x, t)$ çözümleri için üç boyutlu periyodik dalga görünümü

a) ($A = 2, B = 2, C = 1, b_1 = 2$), **b)** ($A = 0, B = 1, C = 1, b_1 = 2, d_1 = 5$).

Burada sol taraftaki üç boyutlu dalga görünümleri $u(x, t)$ çözümleri için, sağ taraftaki üç boyutlu dalga görünümleri $w(x, t)$ çözümleri için çizilmiştir.



Şekil 24. Hirota-Satsuma denklem sisteminin $u_{26}(x, t)$ ve $w_{26}(x, t)$ çözümü için iki boyutlu periyodik dalga grafiği ($A = 0, B = 1, C = 1, b_1 = 2, d_1 = 5$), **a)** $t = -1$, **b)** $t = 1$, **c)** $t = 3$, **d)** $t = 5$.

Yukarıda Şekil 24 de zaman ilerledikçe Hirota-Satsuma denklem sisteminin $u_{26}(x, t)$ ve $w_{26}(x, t)$ çözümü için sola doğru hareket eden periyodik dalga grafikleri görülmektedir.

4. 4. Homotopi Pertürbasyon Metodu İçin Uygulamalar

4.4.1. Kaup–Kupershmidt Denkleminin HPM İle Yaklaşık Çözümü

Kaup–Kupershmidt denklemi [2],

$$u_0 = u(x, 0) = u_{25}(x, 0) = \frac{1}{12} + \frac{(\cosh(x) - \sinh(x))^2}{(1 + \cosh(x) - \sinh(x))^2} - \frac{\cosh(x) - \sinh(x)}{1 + \cosh(x) - \sinh(x)}$$

başlangıç şartı ile verilsin. HPM kullanılarak (4.1) denklemini çözmek için aşağıdaki homotopi kurulabilir.

$$(1 - p) \left[\dot{Y} - \dot{u}_0 \right] + p \left[\dot{Y} + 45Y^2Y' - \frac{75}{2}Y'Y'' - 15YY''' + Y'''' \right] = 0. \quad (4.63)$$

Burada

$$\dot{Y} = \frac{\partial Y}{\partial t}, \quad Y' = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad Y'' = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} Y &= Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 + \dots \\ \dot{Y} &= \dot{Y}_0 + p\dot{Y}_1 + p^2\dot{Y}_2 + p^3\dot{Y}_3 + \dots \\ Y' &= Y'_0 + pY'_1 + p^2Y'_2 + p^3Y'_3 + \dots \\ Y'' &= Y''_0 + pY''_1 + p^2Y''_2 + p^3Y''_3 + \dots \end{aligned} \quad (4.64)$$

yazılabilir. (4.72), (4.73) denkleminde yerine yazılırsa p nin kuvvetlerinin katsayılarının eşitliğinden aşağıdaki Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 değerleri elde edilir.

$$\begin{aligned}
Y_0 &= \frac{1}{12} + \frac{(\cosh(x) - \sinh(x))^2}{(1 + \cosh(x) - \sinh(x))^2} - \frac{\cosh(x) - \sinh(x)}{1 + \cosh(x) - \sinh(x)}, \\
Y_1 &= -\frac{1}{8}t(\csc h(x))^3(\sinh(\frac{x}{2}))^4, \\
Y_2 &= -\frac{t^2(-2 + \cosh(x))(\sec h(\frac{x}{2}))^4}{4096}, \\
Y_3 &= \frac{1}{12582912}t^3(\sec h(\frac{x}{2}))^{10}(18235 - 19970 \cosh(x)) + 4640 \cosh(2x) - 350 \cosh(3x) \\
&\quad + 5 \cosh(4x) - 12904 \sinh(x) + 4664 \sinh(2x) - 264 \sinh(3x) + 4 \sinh(4x), \\
Y_4 &= \frac{1}{25769803776}t^4(\sec h(\frac{x}{2}))^{15}(11918212224 \cosh(\frac{x}{2}) - 16790641812 \cosh(\frac{3x}{2}) \\
&\quad + 5869742740 \cosh(\frac{5x}{2}) - 681935216 \cosh(\frac{7x}{2}) + 22175472 \cosh(\frac{9x}{2}) \\
&\quad - 108548 \cosh(\frac{11x}{2}) + 4 \cosh(\frac{13x}{2}) + 91872687180 \sinh(\frac{x}{2}) - 43336343115 \sinh(\frac{3x}{2}) \\
&\quad + 9251856475 \sinh(\frac{5x}{2}) - 812094730 \sinh(\frac{7x}{2}) + 24032970 \sinh(\frac{9x}{2}) \\
&\quad - 137525 \sinh(\frac{11x}{2}) + 5 \sinh(\frac{13x}{2})).
\end{aligned}$$

Bu değerler kullanılarak

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \lim_{p \rightarrow 1} Y = Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + \dots \\
&= \frac{1}{12} - \frac{t^2(-2 + \cosh(x)) \sec h^4(\frac{x}{2})}{4096} - \frac{t \csc h^3(x) \sinh^4(\frac{x}{2})}{8} \\
&\quad + \frac{\sec h^2(\frac{x}{2})(\cosh(x) - \sinh(x))}{4} + \frac{-\cosh(x) + \sinh(x)}{1 + \cosh(x) - \sinh(x)} \\
&\quad + \frac{1}{12582912}t^3 \sec h^{10}(\frac{x}{2})(18235 - 19970 \cosh(x) + 4640 \cosh(2x) \\
&\quad - 350 \cosh(3x) + 5 \cosh(4x) - 12904 \sinh(x) + 4664 \sinh(2x) \\
&\quad - 264 \sinh(3x) + 4 \sinh(4x) + \frac{1}{25769803776}t^4 \sec h^{15}(\frac{x}{2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (11918212224 \cosh(\frac{x}{2}) - 16790641812 \cosh(\frac{3x}{2}) \\
& + 5869742740 \cosh(\frac{5x}{2}) - 681935216 \cosh(\frac{7x}{2}) + 22175472 \cosh(\frac{9x}{2}) \\
& - 108548 \cosh(\frac{11x}{2}) + 4 \cosh(\frac{13x}{2}) + 91872687180 \sinh(\frac{x}{2}) \\
& - 43336343115 \sinh(\frac{3x}{2}) + 9251856475 \sinh(\frac{5x}{2}) - 812094730 \sinh(\frac{7x}{2}) \\
& + 24032970 \sinh(\frac{9x}{2}) - 137525 \sinh(\frac{11x}{2}) + 5 \sinh(\frac{13x}{2})) + \dots
\end{aligned} \tag{4.65}$$

elde edilir. Sayısal sonuçlar $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$ ve $d_1 = 1$ için elde edilmiştir.

4.4.2. Drinfeld-Sokolov-Wilson Denklem Sisteminin HPM İle Yaklaşık Çözümü

DSW denklem sistemi [8],

$$\begin{aligned}
u_0 &= u(x, 0) = u_{25}(x, 0) = \frac{5}{2} - \frac{27(\cosh(3x) - \sinh(3x))^2}{(2 + \cosh(3x) - \sinh(3x))^2} \\
&+ \frac{27(\cosh(3x) - \sinh(3x))}{2 + \cosh(3x) - \sinh(3x)}, \\
w_0 &= w(x, 0) = w_{25}(x, 0) = -\frac{3}{2} + \frac{3(\cosh(3x) - \sinh(3x))}{2 + \cosh(3x) - \sinh(3x)}
\end{aligned} \tag{4.66}$$

başlangıç şartları ile verilsin. HPM kullanılarak (4.5) denklem sistemini çözmek için

$$(1 - p) [\dot{Y} - \dot{u}_0] + p [\dot{Y} - 3ZZ'] = 0, \tag{4.67}$$

$$(1 - p) [\dot{Z} - \dot{w}_0] + p [\dot{Z} - 2Z''' - 2YZ' - ZY'] = 0. \tag{4.68}$$

homotopileri kurulabilir. Burada

$$\dot{Y} = \frac{\partial Y}{\partial t}, \quad Y' = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad Y'' = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, \quad \dot{Z} = \frac{\partial Z}{\partial t}, \quad Z' = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad Z'' = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
Y &= Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 + \dots \\
\dot{Y} &= \dot{Y}_0 + p \dot{Y}_1 + p^2 \dot{Y}_2 + p^3 \dot{Y}_3 + \dots \\
Y' &= Y'_0 + pY'_1 + p^2Y'_2 + p^3Y'_3 + \dots \\
Y'' &= Y''_0 + pY''_1 + p^2Y''_2 + p^3Y''_3 + \dots
\end{aligned} \tag{4.69}$$

$$\begin{aligned}
Z &= Z_0 + pZ_1 + p^2Z_2 + p^3Z_3 + \dots \\
\dot{Z} &= \dot{Z}_0 + p\dot{Z}_1 + p^2\dot{Z}_2 + p^3\dot{Z}_3 + \dots \\
Z' &= Z'_0 + pZ'_1 + p^2Z'_2 + p^3Z'_3 + \dots \\
Z'' &= Z''_0 + pZ''_1 + p^2Z''_2 + p^3Z''_3 + \dots
\end{aligned} \tag{4.70}$$

yazılabilir. (4.69) ve (4.70), (4.67) ve (4.68) denklemlerinde yerine yazılırsa p nin kuvvetlerinin katsayılarının eşitliğinden elde edilen denklemlerden aşağıdaki Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 ve Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 değerleri elde edilir.

$$\begin{aligned}
Y_0 &= \frac{5}{2} - \frac{27(\cosh(3x) - \sinh(3x))^2}{(2 + \cosh(3x) - \sinh(3x))^2}, \\
Y_1 &= \frac{81t(\cosh(\frac{3x}{2}) + 3\sinh(\frac{3x}{2}))}{(3\cosh(\frac{3x}{2}) + \sinh(\frac{3x}{2}))^3}, \\
Y_2 &= \frac{243e^{3x}(1 - 8e^{3x} + 4e^{6x})t^2}{4(1 + 2e^{3x})^4}, \\
Y_3 &= \frac{243e^{3x}(-1 + 22e^{3x} - 44e^{6x} + 8e^{9x})t^3}{8(1 + 2e^{3x})^5}, \\
Y_4 &= \frac{729e^{3x}(1 - 52e^{3x} + 264e^{6x} - 208e^{9x} + 16e^{12x})t^4}{64(1 + 2e^{3x})^6}, \\
Z_0 &= -\frac{3}{2} + \frac{3(\cosh(3x) - \sinh(3x))}{2 + \cosh(3x) - \sinh(3x)}, \\
Z_1 &= \frac{9t}{(3\cosh(\frac{3x}{2}) + \sinh(\frac{3x}{2}))^2}, \\
Z_2 &= \frac{27e^{3x}(1 + 2e^{3x})t^2}{4(1 + 2e^{3x})^3}, \\
Z_3 &= \frac{27e^{3x}(1 - 8e^{3x} + 4e^{6x})t^3}{8(1 + 2e^{3x})^4}, \\
Z_4 &= \frac{81e^{3x}(-1 + 22e^{3x} - 44e^{6x} + 8e^{9x})t^4}{64(1 + 2e^{3x})^5}.
\end{aligned}$$

Bu değerlerin kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \lim_{p \rightarrow 1} Y = Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + \dots \\
&= -\frac{5}{2} + \frac{243e^{3x}(1 - 8e^{3x} + 4e^{6x})t^2}{4(1 + 2e^{3x})^4} + \frac{243e^{3x}(-1 + 22e^{3x} - 44e^{6x} + 8e^{9x})t^3}{8(1 + 2e^{3x})^5} \\
&\quad + \frac{729e^{3x}(1 - 52e^{3x} + 264e^{6x} - 208e^{9x} + 16e^{12x})t^4}{64(1 + 2e^{3x})^6} \\
&\quad + \frac{81t(\cosh(\frac{3x}{2}) + 3\sinh(\frac{3x}{2}))}{(3\cosh(\frac{3x}{2}) + \sinh(\frac{3x}{2}))^3} + \frac{27(\cosh(3x) - \sinh(3x))}{2 + \cosh(3x) - \sinh(3x)} \\
&\quad + \frac{27(-\cosh(6x) + \sinh(6x))}{(2 + \cosh(3x) - \sinh(3x))^2} + \dots
\end{aligned} \tag{4.71}$$

ve

$$\begin{aligned}
w(x, t) &= \lim_{p \rightarrow 1} Z = Z_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + \dots \\
&= -\frac{3}{2} + \frac{27e^{3x}(1 + 2e^{3x})t^2}{4(1 + 2e^{3x})^3} + \frac{27e^{3x}(1 - 8e^{3x} + 4e^{6x})t^3}{8(1 + 2e^{3x})^4} \\
&\quad + \frac{81e^{3x}(-1 + 22e^{3x} - 44e^{6x} + 8e^{9x})t^4}{64(1 + 2e^{3x})^5} + \frac{9t}{(3\cosh(\frac{3x}{2}) + \sinh(\frac{3x}{2}))^3} \\
&\quad + \frac{3(\cosh(3x) - \sinh(3x))}{2 + \cosh(3x) - \sinh(3x)} + \dots
\end{aligned} \tag{4.72}$$

elde edilir. Sayısal sonuçlar $A = 0, B = 3, C = 1, d_1 = 2$ ve $b_1 = 1$ için elde edilmiştir.

4.4.3. Hirota-Satsuma Denklem Sisteminin HPM İle Yaklaşık Çözümü

Hirota Satsuma denklem sistemi [12],

$$\begin{aligned}
 u_0 &= u(x, 0) = u_{25}(x, 0) = -\frac{3}{8} - \frac{2(\cosh(x) - \sinh(x))^2}{(2 + \cosh(x) - \sinh(x))^2} \\
 &\quad + \frac{2(\cosh(x) - \sinh(x))}{2 + \cosh(x) - \sinh(x)}, \\
 w_0 &= w(x, 0) = w_{25}(x, 0) = -\frac{1}{2} + \frac{\cosh(x) - \sinh(x)}{2 + \cosh(x) - \sinh(x)}
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

başlangıç şartları ile verilsin. HPM kullanılarak (4.10) denklemini çözmek için aşağıdaki homotopi kurulabilir:

$$(1 - p) \left[\dot{Y} - \dot{u}_0 \right] + p \left[\dot{Y} - \frac{1}{2} Y''' - 3YY' + 3ZZ' \right] = 0, \tag{4.74}$$

$$(1 - p) \left[\dot{Z} - \dot{w}_0 \right] + p \left[\dot{Z} + Z''' + 3YZ' \right] = 0. \tag{4.75}$$

Burada

$$\dot{Y} = \frac{\partial Y}{\partial t}, \quad Y' = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad Y'' = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, \quad \dot{Z} = \frac{\partial Z}{\partial t}, \quad Z' = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad Z'' = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2},$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
 Y &= Y_0 + pY_1 + p^2Y_2 + p^3Y_3 + \dots \\
 \dot{Y} &= \dot{Y}_0 + p\dot{Y}_1 + p^2\dot{Y}_2 + p^3\dot{Y}_3 + \dots \\
 Y' &= Y'_0 + pY'_1 + p^2Y'_2 + p^3Y'_3 + \dots \\
 Y'' &= Y''_0 + pY''_1 + p^2Y''_2 + p^3Y''_3 + \dots
 \end{aligned} \tag{4.76}$$

$$\begin{aligned}
 Z &= Z_0 + pZ_1 + p^2Z_2 + p^3Z_3 + \dots \\
 \dot{Z} &= \dot{Z}_0 + p\dot{Z}_1 + p^2\dot{Z}_2 + p^3\dot{Z}_3 + \dots \\
 Z' &= Z'_0 + pZ'_1 + p^2Z'_2 + p^3Z'_3 + \dots \\
 Z'' &= Z''_0 + pZ''_1 + p^2Z''_2 + p^3Z''_3 + \dots
 \end{aligned} \tag{4.77}$$

yazılabilir. (4.76) ve (4.77), (4.74) ve (4.75) denklemlerinde yerine yazılırsa p nin kuvvetlerinin katsayılarının eşitliğinden elde edilen denklemlerden aşağıdaki Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 ve Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 değerleri elde edilir.

$$\begin{aligned}
Y_0 &= -\frac{3}{8} - \frac{2(\cosh(x) - \sinh(x))^2}{(2 + \cosh(x) - \sinh(x))^2} + \frac{2(\cosh(x) - \sinh(x))}{2 + \cosh(x) - \sinh(x)}, \\
Y_1 &= \frac{t(-2 + \cosh(x) - \sinh(x))(\cosh(x) - \sinh(x))}{2(2 + \cosh(x) - \sinh(x))^3}, \\
Y_2 &= \frac{e^x(1 - 8e^x + 4e^{2x})t^2}{32(1 + 2e^x)^4}, \\
Y_3 &= -\frac{e^x(-1 + 22e^x - 44e^{2x} + 8e^{3x})t^3}{768(1 + 2e^x)^5}, \\
Y_4 &= \frac{e^x(1 - 52e^x + 264e^{2x} - 208e^{3x} + 16e^{4x})t^3}{24576(1 + 2e^x)^6}, \\
Z_0 &= -\frac{1}{2} + \frac{\cosh(x) - \sinh(x)}{2 + \cosh(x) - \sinh(x)}, \\
Z_1 &= -\frac{t}{4(3 \cosh(\frac{x}{2}) - \sinh(\frac{x}{2}))^2}, \\
Z_2 &= \frac{e^x(-1 + 2e^x)t^2}{64(1 + 2e^x)^3}, \\
Z_3 &= -\frac{e^x(1 - 8e^x + 4e^{2x})t^3}{1536(1 + 2e^x)^4}, \\
Z_4 &= \frac{e^x(-1 + 22e^x - 44e^{2x} + 8e^{3x})t^4}{49152(1 + 2e^x)^5}.
\end{aligned}$$

Bu değerler kullanılarak,

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \lim_{p \rightarrow 1} Y = Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + \dots \\
&= -\frac{3}{8} - \frac{e^x(1 - 8e^x + 4e^{2x})t^2}{32(1 + 2e^x)^4} - \frac{e^x(-1 + 22e^x - 44e^{2x} + 8e^{3x})t^3}{768(1 + 2e^x)^5} \\
&\quad + \frac{e^x(1 - 52e^x + 264e^{2x} - 208e^{3x} + 16e^{4x})t^3}{24576(1 + 2e^x)^6} \\
&\quad + \frac{t(-2 + \cosh(x) - \sinh(x))(\cosh(x) - \sinh(x))}{2(2 + \cosh(x) - \sinh(x))^3} \\
&\quad - \frac{2(\cosh(x) - \sinh(x))^2}{(2 + \cosh(x) - \sinh(x))^2} + \frac{2(\cosh(x) - \sinh(x))}{2 + \cosh(x) - \sinh(x)} + \dots
\end{aligned} \tag{4.78}$$

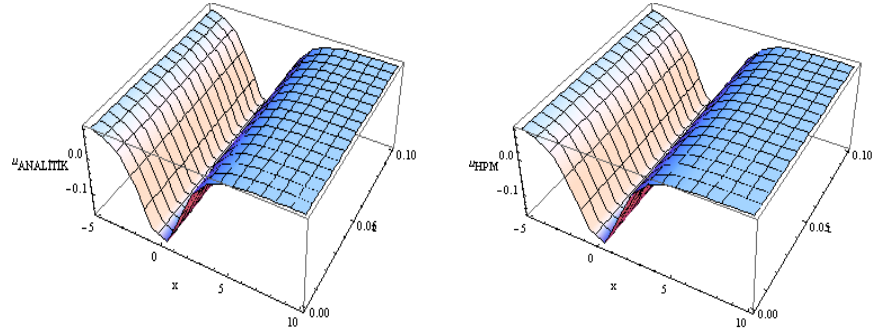
$$\begin{aligned}
w(x, t) &= \lim_{p \rightarrow 1} Z = Z_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + \dots \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{e^x(-1 + 2e^x)t^2}{64(1 + 2e^x)^3} - \frac{e^x(1 - 8e^x + 4e^{2x})t^3}{1536(1 + 2e^x)^4} \\
&\quad + \frac{e^x(-1 + 22e^x - 44e^{2x} + 8e^{3x})t^4}{49152(1 + 2e^x)^5} \\
&\quad - \frac{t}{4(3 \cosh(\frac{x}{2}) - \sinh(\frac{x}{2}))^2} + \frac{\cosh(x) - \sinh(x)}{2 + \cosh(x) - \sinh(x)} + \dots
\end{aligned} \tag{4.79}$$

elde edilir. Sayısal sonuçlar $A = 0, B = 1, C = 1, d_1 = 2$ ve $b_1 = 1$ için elde edilmiştir.

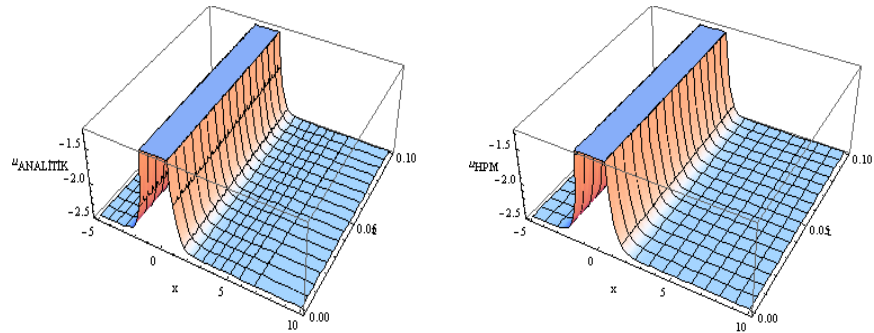
5. BÖLÜM

GENELLEŞTİRİLMİŞ RİCCATİ DENKLEMİ DÖNÜŞÜM METODU VE HPM İLE ELDE EDİLEN DEĞERLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

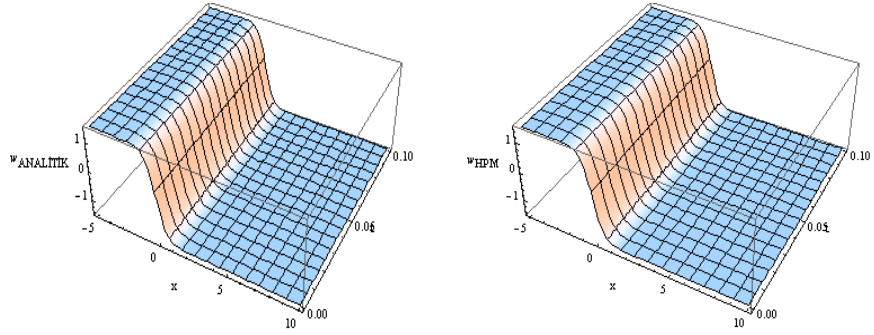
Bu bölümde Kaup–Kupershmidt denkleminin, DSW denklem sisteminin ve Hirota-Satsuma denklem sisteminin genelleştirilmiş Riccati denklemi dönüşüm metodu ile 4. bölümde elde edilen analitik çözümleri ile yaklaşık çözümlerini karşılaştırmak amacıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri oluşturulmuş, mutlak hatalarını görebilmek için tablolar çizilmiştir.



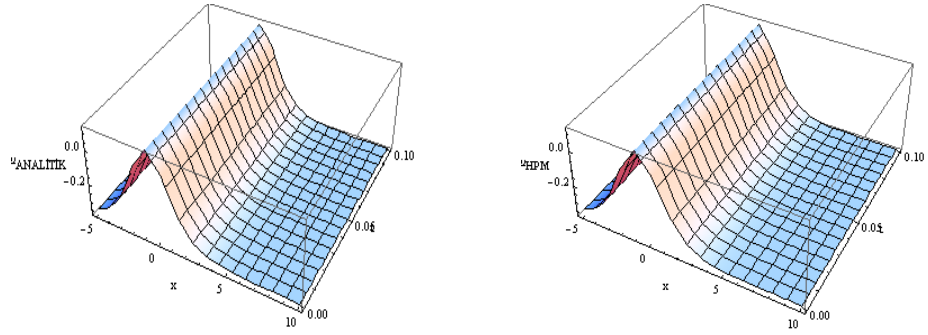
(a)



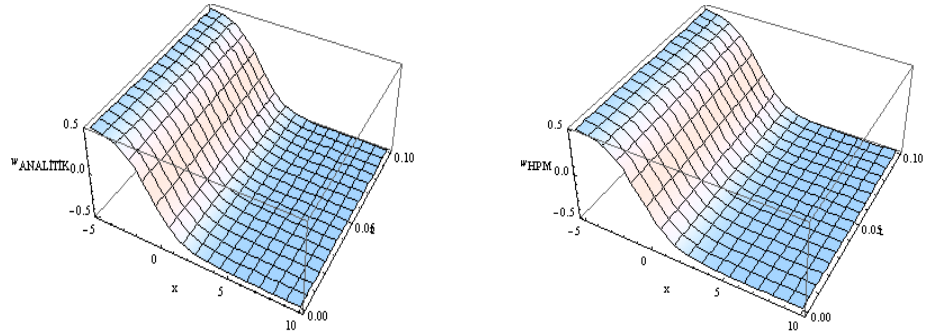
(b)



(c)



(d)

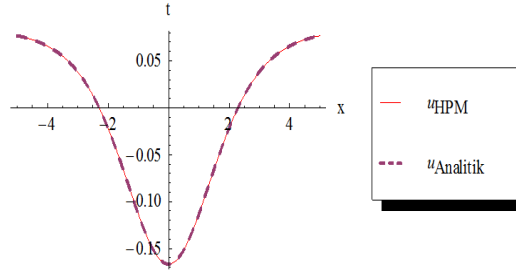


(e)

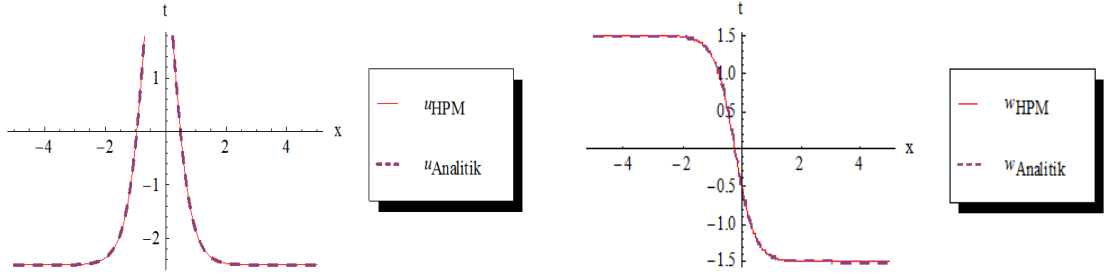
Şekil 25. Genelleştirilmiş Riccati denklemi dönüştürme metodu ile elde edilen analitik çözüm ve HPM ile elde edilen yaklaşık çözümün üç boyutlu görüntüleri **a)** Kaup-Kupershmidt denkleminin $u_{25}(x, t)$ çözüm fonksiyonu için analitik çözümün ve yaklaşık çözümünün üç boyutlu görüntüleri, **b)** DSW denklem sisteminin $u_{25}(x, t)$ çözüm

fonksiyonu için analitik çözümün ve yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü, **c)** DSW denklem sisteminin $w_{25}(x, t)$ çözüm fonksiyonu için analitik çözümün ve yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü, **d)** Hirota-Satsuma denklem sisteminin $u_{25}(x, t)$ çözüm fonksiyonu için analitik çözümün ve yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü, **e)** Hirota-Satsuma denklem sisteminin $w_{25}(x, t)$ çözüm fonksiyonu için analitik çözümün ve yaklaşık çözümünün üç boyutlu görünümü.

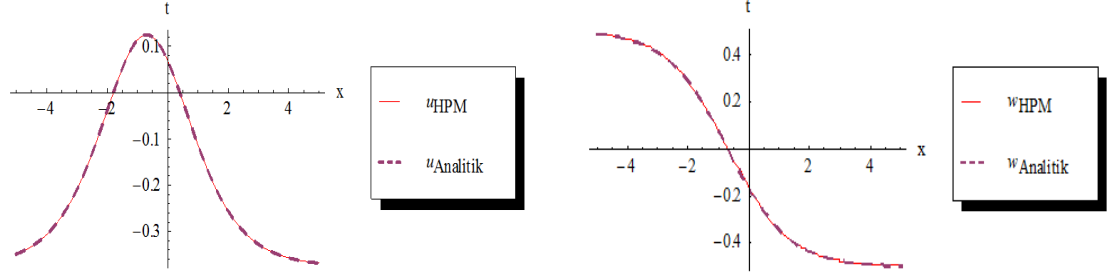
Burada sol taraftaki üç boyutlu dalga görünümüleri analitik çözümler için, sağ taraftaki üç boyutlu dalga görünümüleri yaklaşık çözümler için çizilmiştir.



(a)



(b)



(c)

Şekil 26. Genelleştirilmiş Riccati denklemi dönüşüm metodu ile elde edilen analitik çözüm ve HPM ile elde edilen yaklaşık çözümün karşılaştırılması **a)** Kaup–Kupershmidt denkleminin $u_{25}(x, t)$ çözüm fonksiyonu için analitik çözümün ve yaklaşık çözümünün karşılaştırılması, **b)** DSW denklem sisteminin $u_{25}(x, t)$ ve $w_{25}(x, t)$ çözüm fonksiyonu için analitik çözümün ve yaklaşık çözümünün karşılaştırılması, **c)** Hirota-Satsuma denklem sisteminin $u_{25}(x, t)$ ve $w_{25}(x, t)$ çözüm fonksiyonu için analitik çözümün ve yaklaşık çözümünün karşılaştırılması.

Tablo 1. Kaup–Kupershmidt denkleminin $u_{25}(x, t)$ analitik çözümü ile HPM ile elde edilen yaklaşık çözümünün karşılaştırılması

		$ u(x, t) - Y_4(x, t) $				
t	x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1		1.82631×10^{-6}	2.7907×10^{-5}	1.39062×10^{-4}	4.36001×10^{-4}	1.05932×10^{-3}
0.2		1.76211×10^{-6}	2.72265×10^{-5}	1.36202×10^{-4}	4.27886×10^{-4}	1.04086×10^{-3}
0.3		1.33492×10^{-6}	2.07323×10^{-5}	1.039×10^{-4}	3.26705×10^{-4}	7.95172×10^{-4}
0.4		6.60889×10^{-7}	1.02470×10^{-5}	5.1323×10^{-5}	1.61333×10^{-4}	3.92602×10^{-4}
0.5		8.29851×10^{-8}	1.42477×10^{-6}	7.37662×10^{-6}	2.35725×10^{-5}	5.79289×10^{-5}

Tablo 2. DSW denklem sisteminin $u_{25}(x, t)$ analitik çözümü ile HPM ile elde edilen yaklaşık çözümünün karşılaştırılması

$ u(x, t) - Y_4(x, t) $						
t	x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1		5.14014×10^{-6}	1.71351×10^{-4}	1.34796×10^{-3}	5.84989×10^{-3}	1.82736×10^{-2}
0.2		2.11921×10^{-6}	7.58932×10^{-5}	6.38226×10^{-4}	2.94856×10^{-3}	9.76937×10^{-3}
0.3		3.63999×10^{-7}	6.15542×10^{-6}	1.51325×10^{-6}	1.97637×10^{-4}	1.26043×10^{-3}
0.4		1.61998×10^{-6}	4.96841×10^{-5}	3.57517×10^{-4}	1.40828×10^{-3}	3.9512×10^{-3}
0.5		1.84×10^{-6}	5.9035×10^{-5}	4.47478×10^{-4}	1.87261×10^{-3}	5.64205×10^{-3}

Tablo 3. DSW denklem sisteminin $w_{25}(x, t)$ analitik çözümü ile HPM ile elde edilen yaklaşık çözümünün karşılaştırılması

$ w(x, t) - Z_4(x, t) $						
t	x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1		7.89991×10^{-8}	2.0407×10^{-6}	1.15759×10^{-5}	3.15006×10^{-5}	4.17026×10^{-5}
0.2		2.00499×10^{-7}	6.19242×10^{-6}	4.50302×10^{-5}	1.80119×10^{-4}	5.16626×10^{-4}
0.3		2.26713×10^{-7}	7.26351×10^{-6}	5.50056×10^{-5}	2.30152×10^{-4}	6.94086×10^{-4}
0.4		1.90208×10^{-7}	6.22154×10^{-6}	4.81729×10^{-5}	2.06413×10^{-4}	6.38524×10^{-4}
0.5		1.30321×10^{-7}	4.33465×10^{-6}	3.41597×10^{-5}	1.49108×10^{-4}	4.70336×10^{-4}

Tablo 4. Hirota Satsuma denklem sisteminin $u_{25}(x, t)$ analitik çözümü ile HPM ile elde edilen yaklaşık çözümünün karşılaştırılması

$ u(x, t) - Y_4(x, t) $						
t	x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1		1.92535×10^{-12}	6.14997×10^{-11}	4.66131×10^{-10}	1.96049×10^{-9}	5.97121×10^{-9}
0.2		1.71935×10^{-12}	5.48585×10^{-11}	4.1535×10^{-10}	1.74505×10^{-9}	5.3094×10^{-9}
0.3		1.45539×10^{-12}	4.6377×10^{-11}	3.50722×10^{-10}	1.47179×10^{-9}	4.47273×10^{-9}
0.4		1.15769×10^{-12}	3.68436×10^{-11}	2.78228×10^{-10}	1.1659×10^{-9}	3.53803×10^{-9}
0.5		8.49987×10^{-13}	2.6994×10^{-11}	2.03439×10^{-10}	8.50786×10^{-10}	2.57657×10^{-9}

Tablo 5. Hirota Satsuma denklem sisteminin $w_{25}(x, t)$ analitik çözümü ile HPM ile elde edilen yaklaşık çözümün karşılaştırılması

$ w(x, t) - Z_4(x, t) $						
t	x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1		4.45755×10^{-14}	1.36369×10^{-12}	9.87166×10^{-12}	3.95649×10^{-11}	1.14555×10^{-10}
0.2		4.67959×10^{-14}	1.55448×10^{-12}	1.22355×10^{-11}	5.33673×10^{-11}	1.68349×10^{-10}
0.3		1.26232×10^{-13}	4.09134×10^{-12}	3.14324×10^{-11}	1.33976×10^{-10}	4.1347×10^{-10}
0.4		1.91847×10^{-13}	6.17473×10^{-12}	4.71769×10^{-11}	2.00004×10^{-10}	6.13992×10^{-10}
0.5		2.41973×10^{-13}	7.77056×10^{-12}	5.92175×10^{-11}	2.50415×10^{-10}	7.66833×10^{-10}

Yukarıdaki tablolarda HPM kullanılarak n . mertebeden yaklaşık çözümün hata analizi için,

$$Y_n(x, t) = \sum_{j=0}^n Y_j,$$
$$Z_n(x, t) = \sum_{j=0}^n Z_j.$$

eşitlikleri kullanılmıştır.

Kaup–Kupershmidt denkleminin, DSW denklem sisteminin ve Hirota-Satsuma denklem sisteminin HPM ile elde edilen sayısal sonuçlarının analitik çözüm ile karşılaştırılması Tablo 1-5 de verilmiştir. Bu tablolarda görüldüğü gibi seri çözümlerinin sadece beş terimi göz önüne alınarak analitik çözüme yakın değerler elde edilmiştir. Ayrıca Şekil 26 da, HPM ile elde edilen seri çözümlerin gerçek çözüme yakın değerler aldığı görülmektedir.

6. BÖLÜM

SONUÇ

Lineer veya lineer olmayan adi ve kısmi türevli diferensiyel denklemlerin analitik çözümleri bu denklemlerin modellediği olayların özelliklerini belirlediğinden uygulamalı matematik alanında önemli bir yere sahiptir. Bu nedenle özellikle uygulamalı matematik alanında çalışan bilim adamları bu denklemlerin hareket eden dalga çözümleri üzerine çalışmışlar ve bu çözümleri elde edebilmek için birçok analitik metot geliştirmişlerdir. Bu metotlardan üçü bu çalışmada üçüncü bölümde incelenmiştir. İncelenen metotların işleyişi dengeleme terimine dayandığı için sadece lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlere uygulanabilir. Bu metotlarda dengeleme terimi kullanılarak oluşturulan bir değişken dönüşümü altında ele alınan kısmi diferensiyel denklem adi bir diferensiyel denkleme dönüştürülmüş, daha sonra bu adi diferensiyel denklem çözülerek kısmi diferensiyel denklemin analitik çözümüne ulaşılmıştır. Bu metotların birbirlerinden farklı olan tarafı seçilen Riccati diferensiyel denkleminin ve dolayısıyla kullanılan çözüm fonksiyonunun farklı olmasıdır.

Dördüncü bölümde genişletilmiş tanh metodu, geliştirilmiş tanh metodu ve geliştirilmiş Riccati denklemi dönüşüm metodu kullanılarak Kaup–Kupershmidt denklemi, Drinfeld-Sokolov-Wilson denklem sistemi ve Hirota-Satsuma denklem sisteminin hareket eden dalga çözümleri elde edilmiştir. Dalgaların hareketlerini inceleyebilmek için bazı çözümlerin belli zaman aralıklarında iki boyutlu grafikleri çizilmiştir. Dalgaların hangi yönde hareket ettiğini belirleyebilmek için animasyon grafiklerinden faydalanılmıştır. Yapılan literatür taramasında DSW denklem sisteminin Riccati denklemi dönüşüm metodu kullanılarak daha önce çözümlerinin bulunduğu ancak diğer çözümlerinin bu çalışma ile elde edilen yeni çözümler olduğu görülmüştür [43]. Benzer şekilde Kaup–Kupershmidt denkleminin, Hirota-Satsuma denklem sisteminin, Benjamin-Bona-Mahony denkleminin ve beşinci mertebeden Lax KdV denkleminin bu çalışmada kullanılan metotlarla daha önce çözümlerinin

elde edilmediği ve bu denklemlerin başka metotlarla bulunan çözümlerinin burada bulunan çözümlerden farklı olduğu görülmüştür. Bu nedenle bu yeni çözümler bu çalışma ile literatüre kazandırılmıştır. Ayrıca bu çalışmanın 4.2, 4.3.1 ve 4.3.3 bölümleri yayınlanmıştır [44-45].

İncelenen denklemlerin bu üç metotla elde edilen çözümlerinin birbiriyle ilişkisini görebilmek için seçilen Riccati diferensiyel denkleminde sabitlere belirli değerler verilerek incelemeler yapılmıştır. Genişletilmiş tanh metodu ile Genelleştirilmiş tanh metodundan elde edilen çözümleri inceleyebilmek için Genelleştirilmiş tanh metodunda $B = 0$ ve $C = 1$ alınarak elde edilen çözümler Genişletilmiş tanh metodunda bulunan çözümlerle karşılaştırılmıştır. Genişletilmiş tanh metodu ile Genelleştirilmiş Riccati denklemi dönüşüm metodundan elde edilen çözümleri inceleyebilmek için Genişletilmiş tanh metodunda $B = 0$ ve $C = 1$ olduğundan $A < 0$ iken elde edilen çözümler Genelleştirilmiş Riccati denklemi dönüşüm metodunda 1. tipte elde edilen çözümlerle, $A > 0$ iken elde edilen çözümler Genelleştirilmiş Riccati denklemi dönüşüm metodunda 2. tipte elde edilen çözümlerle, $A = 0$ iken elde edilen çözümler Genelleştirilmiş Riccati denklemi dönüşüm metodunda 4. tipte elde edilen çözümlerle karşılaştırılmıştır. Benzer şekilde Genelleştirilmiş tanh metodu ile Genelleştirilmiş Riccati denklemi dönüşüm metodundan elde edilen çözümleri inceleyebilmek için Genelleştirilmiş tanh metodunda $A = C = 1, B = 0$; $A = C = -1, B = 0$; $A = C = \frac{1}{2}, B = 0$; $A = C = -\frac{1}{2}, B = 0$; $A = 1, C = 2, B = -2$; $A = 1, C = 2, B = 2$; $A = -1, C = -2, B = 2$ ve $A = -1, C = -2, B = -2$ durumları Genelleştirilmiş Riccati denklemi dönüşüm metodunda 2. tipte elde edilen çözümlerle, $A = 1, C = -1, B = 0$ ve $A = \frac{1}{2}, C = -\frac{1}{2}, B = 0$ durumları Genelleştirilmiş Riccati denklemi dönüşüm metodunda 1. tipte elde edilen çözümlerle, $A = B = 0, C \neq 0$ durumu Genelleştirilmiş Riccati denklemi dönüşüm metodunda 4. tipte elde edilen çözümlerle karşılaştırılmıştır. Bu şekilde olabilecek bütün durumlar incelenmiş olup çözümlerin birbirlerinden farklı olduğu görülmüştür. Bu üç metot, bulunan çözüm sayısı da

farklılık göstermektedir. En fazla çözüm Genelleştirilmiş Riccati denklemi dönüşüm metodundan elde edilmiş olup bu durum bu metodun avantajı olarak gösterilebilir.

Bazı lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çözümleri analitik olarak elde edilemeyebilir. Bu durumda dördüncü bölümde verilen ve yarı analitik metotlar olarak bilinen HPM gibi seri çözüm bulma esasına dayanan metotlar yardımıyla bu denklemlerin yaklaşık çözümüne ulaşılmıştır [46]. Bu seri çözüm aranırken bir başlangıç şartından hareketle serinin diğer terimleri bulunmuştur. Bu nedenle bu bölümde bu denklemlerin genelleştirilmiş Riccati denklemi dönüşüm metodundan elde edilen analitik çözümlerinden herhangi biri alınarak $t = 0$ başlangıç şartı altında HPM uygulanmış ve yaklaşık çözümleri bulunmuştur. İncelenen problemin seri çözümünde bağımsız değişkenlere belirli bir aralıkta verilen değerlerden elde edilen sayısal sonuçlar ile analitik çözümü arasındaki farkın mutlak değerine bakılarak çözümlerin karşılaştırılması yapılabilir. Bu nedenle beşinci bölümde elde edilen analitik çözümleri ile yaklaşık çözümleri karşılaştırmak amacıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikler oluşturulmuş, mutlak hatalarını görebilmek için tablolar çizilmiştir. Tablolara bakıldığında mutlak hatanın sıfıra oldukça yakın değerler olarak yaklaşık çözümün analitik çözüme yaklaştığı görülmüştür.

KAYNAKLAR

- [1] **Kılıçkaya, M.S.**, 1996. Temel Fizik, T.C. Anadolu Üniversitesi Yayınları No: 674 (331).
- [2] **Parker, A.**, 2000. On soliton solutions of the Kaup–Kupershmidt equation.I. Direct bilinearisation and solitary wave, *Physica D*, 137, 25–33.
- [3] **Hereman, W., Nuseir, A.**, 1997. Symbolic methods to construct exact solutions of nonlinear partial differential equations, *Math. Comput. Sim.*, 43, 13-27.
- [4] **Musette, M., Verhoeven, C.**, 2000. Nonlinear superposition formula for the Kaup–Kupershmidt partial differential equation, *Physica D* 144, 211-220.
- [5] **Parker, A.**, 2000. On soliton solutions of the Kaup–Kupershmidt equation. II. ‘Anomalous’ N-soliton solutions, *Physica D* 137, 34-48.
- [6] **Golbabai, A., Kheiri, H.**, 2011. Homotopy Analysis and Padé Methods for Solving Two Nonlinear Equations, *Journal of Mathematical Extension*, 5 (2), 123-139
- [7] **Inc, M., Fendoglu, E., Triki, H. Biswas, A.**, 2014. Compactons and topological solitons of the Drinfel’d–Sokolov system, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 19(2), 209–224
- [8] **Xian-Guo, G., Li-Hua, W.**, 2010. Darboux Transformation and Explicit Solutions for Drinfel’d–Sokolov–Wilson Equation, *Commun. Theor. Phys. (Beijing, China)* 53, 1090–1096.
- [9] **Zhang, W.M.**, 2011. Solitary Solutions and Singular Periodic Solutions of the Drinfeld-Sokolov-Wilson Equation by Variational Approach, *Applied Mathematical Sciences*, 38 (5), 1887-1894
- [10] **Alibeiki, E., Neyrameh, A.**, 2011. Application of Homotopy Perturbation Method to Nonlinear Drinfeld-Sokolov-Wilson Equation, *Middle-East Journal of Scientific Research* 10 (4), 440-443.
- [11] **Inc, M.**, 2006. On numerical doubly periodic wave solutions of the coupled

Drinfel'd–Sokolov–Wilson equation by the decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*, 172 (1), 421-430.

[12] **Mohammad, A.A., Can, M.**, 1996. Painleve Analysis and Symmetries of the Hirota–Satsuma Equation, *Nonlinear Mathematical Physics*, 3 (1-2), 152-155.

[13] **Inan, I.E., Ugurlu, Y., Duran, S.**, 2011. Solutions of Some Nonlinear Equations by a Direct Algebraic Method, *Selçuk J. Appl. Math.* 12(1), 19-30.

[14] **Estevez, P.G., Kuru, S., Negro, J. Nieto, L.M.**, (2009). Travelling wave solutions of the generalized Benjamin–Bona–Mahony equation, *Chaos, Solitons and Fractals* 40, 2031-2040.

[15] **Alofi, A.S.**, 2012. Extended Jacobi Elliptic Function Expansion Method for Nonlinear Benjamin-Bona-Mahony Equations, *International Mathematical Forum*, 53 (7), 2639-2649

[16] **Ghasemia, M., Fardib, M., Kajanic, M.T., Ghaziania, R.K.**, 2011. Numerical solution of fth order KdV equations by homotopy perturbation method, *Mathematical Sciences*, 5(2), 169-181.

[17] **Ross, S.L.**, 1984. Differential Equations, J. Willey, New York.

[18] **Koca, K.**, 2001. Kısmi Türevli Denklemler, Gündüz Eğitim ve Yayıncılık, Ankara.

[19] **Duchateau, P., Zachmann, D.W.**, 1986. Kısmi Diferensiyel Denklemler, Nobel Yayıncılık, (Çeviri).

[20] **Myint-U, T., Debnath, L.**, 2007. Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Birkhauser Boston.

[21] **Başkan, T.**, 2000. Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Vipaş Yayıncılık.

[22] **Fan, E., Zhang, H.**, 1998. A note on the homogeneous balance method, *Physics Letters A* 246, 403-406.

[23] **Malfliet, W.**, 1992. Solitary Wave Solutions of Nonlinear Wave Equations, *American Journal of Physics*, 60 (7), 650-654.

- [24] **Wazwaz, A.M.**, 2005. The tanh method: solitons and periodic solutions for the Dodd–Bullough–Mikhailov and the Tzitzeica–Dodd–Bullough equations, *Chaos, Solitons and Fractals* 25, 55-63.
- [25] **Wazwaz, A.M.**, 2007. New solitary wave solutions to the modified Kawahara equation, *Physics Letters A* 360, 588-592.
- [26] **Zhang, W.**, 2010. The Extended Tanh Method and the Exp-Function Method to Solve a Kind of Nonlinear Heat Equation, *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 935873.
- [27] **Wazwaz, A.M.**, 2006. Solitons and periodic solutions for the fifth-order KdV equation, *Applied Mathematics Letters* 19, 1162-1167.
- [28] **Fan, E.**, 2000. Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations, *Physics Letters A*, 277, 212-218.
- [29] **Taghizadeh, N., Neirameh, A., Shokooh, S.**, 2012. New Complex Solutions for Nonlinear Wave Equation with the Fifth Order Nonlinear Term and Foam Drainage Equation, *Middle-East Journal of Scientific Research*, 11(4), 450-453.
- [30] **Taghizadeh, N., Mirzazadeh, M.**, 2012. The Modified Extended Tanh Method with the Riccati Equation for Solving Nonlinear Partial Differential Equations, *Mathematica Aeterna*, 2(2), 145-153.
- [31] **Fan, E., Hon, Y.C.**, 2002. Generalized tanh Method Extended to Special Types of Nonlinear Equations, *Z. Naturforsch.* 57a, 692-700.
- [32] **Zhang, H.**, 2009. A direct algebraic method applied to obtain complex solutions of some nonlinear partial differential equations, *Chaos, Solitons and Fractals* 39, 1020-1026.
- [33] **Chen, H., Zhang, H.**, 2004. New multiple soliton solutions to the general Burgers–Fisher equation and the Kuramoto–Sivashinsky equation, *Chaos, Solitons and Fractals* 19, 71-76.

- [34] **İnan, İ.E.**, 2007. Exact solutions for coupled KdV equation and KdV equations, *Physics Letters A* 371, 90-95.
- [35] **Zhang, S., Tong, J.-L., Wang, W.**, 2008. A generalized (G/G')-expansion method for the mKdV equation with variable coefficients, *Physics Letters A* 372, 2254-2257.
- [36] **Abazari, R.**, 2011. The solitary wave solutions of zoomeron equation, *Applied Mathematical Sciences* 5 (59), 2943-2949.
- [37] **Naher, H., Abdullah, F.A., Mohyud-Din, S.T.**, 2013. Extended generalized Riccati equation mapping method for the fifth-order Sawada-Kotera equation, *AIP Advances* 3, 052104; doi: 10.1063/1.4804433.
- [38] **Zhu, S-D.**, 2008. The generalizing Riccati equation mapping method in non-linear evolution equation: application to (2 + 1)-dimensional Boiti–Leon–Pempinelle equation, *Chaos, Solitons and Fractals* 37, 1335–1342.
- [39] **Kolebaje, O.T., Akinyemi, P., Obende, M.**, 2013. Travelling wave solutions of the generalized Zakharov-Kuznetsov equation via the extended generalized Riccati equation mapping method, *International Journal of Advanced Mathematical Sciences* 1 (1), 1-7.
- [40] **He, J.H.**, 1999. Homotopy perturbation technique, *Computer Methods in Applied mechanics and engineering*. 178 (3), 257-262.
- [41] **He, J.H.**, 2003. Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique, *Applied Mathematics and Computation*, 135, 73-79.
- [42] **Bulut, H.**, 2009. Comparing Numerical Methods for Boussinesq Equation Model Problem, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 25 (4), 783-796.
- [43] **Akbar, M.A., Ali, N.H.M., Mohyud-Din, S.T.**, 2013. The modified alternative (G'/G)-expansion method to nonlinear evolution equation: application to the (1+1)-dimensional Drinfel'd-Sokolov-Wilson equation, *Springer Plus*, 2 (1),

327.

[44] **Körpınar, Z.S., Tuz, M.**, 2013. Generalized tanh method extended with the Riccati equation for solving the some of nonlinear equations, *Life Science Journal*, 10(3), 830-838.

[45] **Körpınar, Z.S., Tuz, M.**, 2014. Generalized tanh method extended with the Riccati equation for solving the special types of nonlinear equations, *Prespacetime Journal*, 5(9), 852-866.

[46] **Körpınar, Z.S., Kaya, D., Ugurlu, Y.**, 2014. Three Semi-Analytical Methods for Ninth-Order Korteweg-de Vries Equation, *Prespacetime Journal*, 5(10), 959-975.

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Elazığ'da doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2005 yılında Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldum. 2007 yılında Milli Eğitim Bakanlığınca Matematik öğretmeni olarak atandım. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünün açmış olduğu Matematik Anabilim Dalının Uygulamalı Matematik programında tezli yüksek lisansa başladım ve 2010 yılında mezun oldum. 2010 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünün açmış olduğu Matematik Anabilim Dalının Uygulamalı Matematik programında doktora başladım. Şu anda Muş Anadolu Lisesinde Matematik öğretmeni olarak çalışmaktayım.