STURM- LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN ÖZDEĞERLERİ İÇİN ASİMPTOTİK FORMÜLLER

İsmail ULUSOY

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Etibar PENAHLI
HAZİRAN-2015

T.C.

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STURM- LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN ÖZDEĞERLERİ İÇİN ASİMPTOTİK FORMÜLLER

DOKTORA TEZİ

İsmail ULUSOY

(111121209)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Danışman: Prof. Dr. EtibarPENAHLI

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih:09.06.2015

HAZİRAN–2015

T.C.

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STURM- LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN ÖZDEĞERLERİ İÇİN ASİMPTOTİK FORMÜLLER

DOKTORA TEZİ

İsmail ULUSOY

(111121209)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih:09.06.2015
Tezin Savunulduğu Tarih:30.06.2015

Tez Danışmanı:	Prof. Dr. EtibarPENAHLI (F.Ü.)
Diğer Jüri Üyeleri:	Prof. Dr. Manaf MANAFLI (A.Ü.)
Diğer Jüri Üyeleri:	Prof. Dr. Ömer Faruk TEMİZER (İ.Ü)
Diğer Jüri Üyeleri:	Doç.Dr. Hasan BULUT (F.Ü.)
Diğer Jüri Üyeleri:	Doç. Dr. Erdal BAŞ (F.Ü.)

HAZİRAN-2015

ÖNSÖZ

Doktora eğitimim süresince hem mesleğine hem de hayata yaklaşımıyla bizlere örnek olan, bilgisini ve deneyimlerini her zaman çok cömertce bizlerle paylaşan saygıdeğer hocam Prof. Dr. Etibar PENAHLI'ya şükranlarımı sunmayı bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Ayrıca bu süreçte beni her zaman desteklemiş olan değerli hocam Prof. Dr. Manaf MANAFLI'ya, bilgi ve birikimlerini esirgemeyen Doç Dr. Reşat YILMAZER, Doç. Dr. Erdal BAŞ ve Doç. Dr. Murat ŞAT'a, her konuda samimi ve içten bir destek sunan Dr. Tüba GÜLŞEN'e ve çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destekten dolayı ebeveynlerime ve eşime en içten teşekkürlerimi sunarım.

İsmail ULUSOY

ELAZIĞ–2015

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Sturm- Liouville Operatörünün Özdeğerleri İçin Asimptotik Formüller

Bu çalışma yedi bölümden oluşmuştur.

İlk bölümde; Sturm-Liouville operatörünün spektral teorisinin tarihçesi verilmiştir.

İkinci bölümde; diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde ve sunulan tezde sık sık kullanılan bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde; Sturm-Liouville operatörü için genel bilgiler, regüler ve singüler Sturm-Liouville problemi, Dirichlet sınır şartı altında özdeğerler için asimptotik formül incelenmiştir.

Dördüncü bölümde; singüler Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri için asimptotik formüller ve bu problemin spektral teorisi incelenmiştir.

Beşinci bölümde; Coulomb potansiyeline sahip Sturm-Liouville operatörünün Dirichlet sınır şartı altında çözüm fonksiyonu elde edilmiş ve özdeğerleri için asimptotik formül bulunmuştur.

Altıncı bölümde; Difüzyon operatörünün Dirichlet sınır şartı altında çözüm fonksiyonu elde edilmiş, bu operatör için Counting Lemma ispatlanmış ve özdeğerleri için asimptotik formül bulunmuştur.

Yedinci bölümde Hidrojen atom denkleminin çözüm fonksiyonları elde edilmiş ve özdeğerlerin asimptotik davranışı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Coulomb potansiyeli, Difüzyon operatörü, Hidrojen atom denklemi, Spektral Problem, Özdeğer, Özfonksiyon, Dirichlet sınır şartı.

SUMMARY

Asymptotic Formulas For Eigenvalues of Sturm- Liouville Operator

This thesis consists of seven chapters.

In the first chapter the history of spectral theory of Sturm-Liouville operator were given.

In the second chapter some fundemental definitions, often used is spectral theory of differential operators, were given.

In the third general informations for Sturm-Liouville operator , regular and singular Sturm-Liouville problem, asymptotic formula for eigenvalues with Dirichlet boundary condition were investigated.

In the fourth chapter asymptotic formula for eigenvalues of singular Sturm-Liouville problem and spectral theory of this problem is investigated.

In the fifth chapter solution functions of Sturm-Liouville operator with Coulomb potential under dirichlet boundary conditions are obtained and asymptotic formula for eigenvalues are found.

In the six chapter solution functions of Diffusion operator under dirichlet boundary conditions are obtained and Counting lemma for this operator is proved and asymptotic formula for eigenvalues is found.

In the seven chapter solution functions of Hydrogen atom equation under dirichlet boundary conditions are obtained and asymptotic behavior of eigenvalues is examined.

Keywords: Coulomb potential, Diffusion operator, Hydrogen atom equation, Spectral Problem, Eigenvalue, Eigenfunction, Dirichlet boundary condition.

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbf{L_2[a,b]}$	: Karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
H	: Hilbert uzayı
q(x)	: Potansiyel fonksiyon
$\boldsymbol{\lambda_n}$	: n. özdeğer
$\boldsymbol{\varphi_n}$	: n. özfonksiyon
$\boldsymbol{\rho(\lambda)}$	: Spektral fonksiyon
O	: Sınırlı değerler
o	: Sonsuz küçük değerler

1. GİRİŞ

Operatörlerin spektral teorisi matematik, fizik ve mekaniğin çeşitli alanlarında geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Lineer operatörlerin spektral teorisinin esas kaynakları bir yandan lineer cebir olmak üzere diğer yandan titreşim teorisinin problemleridir (telin titreşimi, zar titreşimi, vb.). Lineer cebir problemleri ve titreşim teorisi problemleri arasındaki benzerliklerin farkına varılması çok eskilere dayanır. İntegral denklemler teorisinde yapılan çalışmalarda bu benzerliklerden sürekli faydalanan ilk olarak D. Hilbert olmuştur. Bunların sonucu olarak önce l_2 uzayı daha sonraları ise genel Hilbert uzayı meydana gelmiştir.

Matematikte l_2 ve H soyut Hilbert uzayı tanımlandıktan sonra H ‘da lineer self-adjoint operatörler teorisi hızla gelişmeye başlamıştır. XIX–XX. asırlarda birçok matematikçi sayesinde bu teori mükemmel bir seviyeye ulaşmıştır. Özel olarak bu çalışmalarda özdeğerler, özfonksiyonlar, spektral fonksiyon, normlaştırıcı sayılar gibi spektral veriler tanımlanmış ve farklı yöntemlerle bunlar için asimptotik formüller bulunmuştur.

İkinci mertebeden diferansiyel operatörlerin spektral teorisi şimdiye kadar birçok matematikçi fizikçi ve mekanikçiler tarafından incelenmiştir. Bir boyutlu Schrödinger operatörünün karşıtı olan Sturm-Liouville operatörü spektral teoride önemli yere sahiptir. Spektral problemlerin önemli bir bölümünü ise Sturm-Liouville problemleri oluşturur. 1836 yılında hem Sturm hem de Liouville Journal de Mathematique dergisinin aynı sayısında makaleleri yayınlanmıştır[1-2]. Bu makalelerin ikisi de Sturm-Liouville sınır değer problemleriyle ilgilidir:

$$-y''+q(x)y=\lambda y, \quad \mathrm{a}\le x\le b \tag{1.1}$$

$$y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0$$
$$y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0$$

Sturm ve Liouville bu çalışmalarında bu problemin aşikar olmayan çözümünün var olup olmadığını araştırmışlardır. Burada λ kompleks sayı olmak üzere, tüm özdeğerler kümesine sınır değer probleminin spektrumu denir.

Özdeğerlerin dağılımı diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli yere sahiptir. Yukarıda bahsedildiği gibi sonlu aralıkta ikinci mertebeden diferansiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılım problemi ilk olarak XIX asrın başlangıcında Liouville ve Sturm tarafından ele alınmıştır.

Daha sonra regüler sınır koşulları için keyfi mertebeden adi diferansiyel operatörlerin özdeğerlerin dağılımını G.Birkhoff [3-4] incelemiştir. Özel olarak kuantum mekaniği için uzayın tamamında tanımlı ve diskret (ayrık) spektruma sahip operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı önemli bir yere sahiptir. Sonsuzlukta artan potansiyele sahip doğru ekseninin tamamında tanımlı bir boyutlu Sturm operatörünün özdeğerlerinin dağılımı için formülü ilk olarak C.Titchmarsh [5] göstermiştir. Ayrıca C.Titchmarsh, ilk olarak Schrödinger operatörü için özdeğerlerin dağılımı formülünü yazmıştır. Sonraki yıllarda C.Titchmarsh yöntemini geliştiren B.M.Levitan [6-9] farklı diferansiyel operatörlerin özdeğerleri için önemli asimptotik formüller bulmuştur.

Özdeğerler için asimptotik formüllerin incelenmesi için iki önemli yöntem ele alınmıştır.

Birinci yöntem olarak bilinen varyasyon yöntemi R.Courant'a [10] aittir. Bu yöntem M.Sh.Birman ve onun öğrencileri tarafından önemli derecede geliştirilmiş ve M.Sh.Birman, M.Z.Solomyak [11-12] çalışmalarında yeteri kadar kaynak gösterilmiştir.

T.Carleman [13] tarafından verilen ikinci yöntem Tauber [15] teoremlerinden faydalanarak göz önüne alınan operatörlerin rezolventinin araştırılmasına dayanır. Bu durumda Tauber koşullarının potansiyel üzerine bazı kısıtlamalar oluşturduğunu da not etmek gerekiyor. Bu koşulların genişletilmesi, Tauber teoremlerinin gelişmesine sebep olmuştur.

Bu iki yöntemin her birinin kendine has üstünlükleri vardır. Bu konulara ilişkin kaynaklar Trubowitz-Poeschel [14] , Levitan-Sargsyan [15] ve diğer monografilerde detaylı bir şekilde gösterilmiştir. Singüler durumda özdeğerlerin dağılımı için çok sayıda çalışmalar yapılmıştır. Özel olarak diferansiyel operatörlerin katsayılar analitik fonksiyonlar olacak şekilde özdeğerler için asimptotik formüller M.V. Fedoryuk [16] tarafından incelenmiştir.

Operatör katsayılı Sturm-Liouville probleminin asimptotik dağılımı E. Abdukadyrov [17] tarafından yapılmıştır. İkinci mertebeden lineer integro-diferansiyel operatörlerin pozitif özdeğerlerinin asimptotiği B.İ. Aleksandriyskii [18] çalışmasında incelenmiştir. Singüler sınır değer problemlerinin özdeğerlerinin dağılımına ilişkin çalışmalar J.H.E. Cohn [19] tarafından yapılmıştır. Ayrıca küçük parametreyi polinom şeklinde içeren diferansiyel operatörlerin yerel olmayan Dirichlet probleminin spektral asimptotiği, eliptik problemlerin spektrumun asimptotiği A.B. Alekseev [20]

M.Sh.Birman [21] çalışmalarında incelemiştir. Mekanik problemlerinde karşılaşılan sınır değer problemlerinin spektrumunun dağılımı çalışmalarının özeti [22] bu monografide verilmiştir.

Regüler ve singüler klasik Sturm-Liouville probleminin özdeğer ve özfonksiyonları için asimptotik formüller birçok matematikçiler [22-30,55-90] tarafından farklı yöntemlerle gösterilmiştir. Radial Schrödinger ve Dirac operatörleri için spektrumunun asimptotiği L. Sakhnovich' in [31,32] ve diğer matematikçilerin çalışmalarında ele alınmıştır.

Self adjoint olmayan diferansiyel operatörlerin spektrumunun dağılımı detaylı olarak İ. Gohberg ve M.G. Krein'in [24] monografisinde verilmiştir. Ayrıca kompakt Riemann manifoldları üzerine Laplace ve Laplace-Bertarami operatörlerinin spektrumlarının dağılımı [33] ve diğer çalışmalarda incelenmiştir.

Periyodik diferansiyel operatörlerin (Hill, Dirac, Difüzyon denklemi vs) periyodik anti periyodik dirichlet koşulları sağlanmak üzere spektrumlarının dağılımına ilişkin önemli çalışmalar yapılmıştır ve bu çalışmaların özeti [34] monografisinde bulunur.

Pseudo diferansiyel operatörlerin spektral teorisi ve özel olarak özdeğerlerin asimptotiği V.N. Tulovskii, M.A. Shubin [35] ve diğer matematikçiler tarafından incelenmiştir.

(1.1) denklemi için farklı sınır koşullarından biri

$$y(0)=0, \quad y(1)=0 \tag{1.2}$$

Dirichlet sınır şartlarıdır. Genel olarak literatürde (1.1)-(1.2) sınır değer problemine Dirichlet problemi denir. Bu problemin fiziksel yorumu aşağıdaki şekildedir:

Değişken kitle yoğunlu $\rho(x)>0$ olacak şekilde, L uzunluğundaki ipin homojen olmayan serbest titreşimindeki yer değişimi $u=u(x,t),\ \ 0\le x\le \mathrm{L}$ fonksiyonu

$$u(0,t)=0, \quad u(L,t)=0$$

sınır şartları sağlanmak üzere

$$\rho(x)u_{tt}=u_{xx}$$

dalga denklemini sağlar. ω frekansına sahip

$$u=y(x)(a\cos\omega t+b\sin\omega t)$$

şeklindeki periyodik titreşim fonksiyonuna saf ton denir. Dalga denklemine değişkenlerine ayırma yöntemi uygulanırsa y nin

$$y''+\omega^2\rho(x)y=0 \tag{1.6}$$

$$y(0)=0, \quad \text{y(L)=0} \tag{1.7}$$

problemini sağladığı elde edilir. Bu problemin

$$-y''+q(x)y=\lambda y, \quad 0\le x\le 1$$

$$y(0)=0, \quad y(1)=0$$

şekline dönüşebileceğini Liouville göstermiştir. Bu problemin spektral teorisi yani düz ve ters problemler detaylı bir şekilde Pöschel-Trubowitz [14] monografisinde incelenmiştir. Daha sonra Guillot-Ralston [39] bu sonuçları

$$-y''+\frac{2}{x^2}y+q(x)y=\lambda y, \quad x\in(0,1) \tag{1.8}$$

singüler Sturm-Liouville operatörüne taşımıştır ve Dirichlet sınır şartları altında

$$\mu_n(q)=(n+1)^2\pi^2-2+\int_0^1 q(x)dx+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

asimptotik formülünü elde etmiştir. R. Carlson [53] ise (1.8)'in genel durumu olan

$$-y''+\frac{m(m+1)}{x^2}y+p(x)y=\lambda y, \quad \text{m}\ge 0$$

denklemi ele almış ve aşağıdaki teoremleri ispat etmiştir.

Teorem 1.1 $0\le x_1<x_2\le 1$ ve $m\ge 0$ olsun. Bu takdirde

$$-y''+\frac{m(m+1)}{x^2}y+p(x)y=\lambda y$$

denklemini ve

$$y(x_1)=0, \quad y'(x_2)+by(x_2)=0$$

şartlarını sağlayan aşikar çözüm $y(x)$ olmak üzere

$$\lambda\ge-\left[|b|+2\left(\int_{x_1}^{x_2} p^2(x)dx\right)^{1/2}\right]^2$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 1.2 $0<x_1<x_2\le 1$ ve $m\ge 0$ olsun. $r(x)\in L^2[0,1]$ için

$$y'(x_1)=y'(x_2)=0$$

şartlarını sağlayan

$$-y''+\frac{m(m+1)}{x^2}y+r(x)y=0$$

denkleminin aşikar çözümü $y(x)$ olmak üzere

$$\frac{m(m+1)}{x_2^2} \leq 4\left[\int_{x_1}^{x_2} |r| dx\right]^2 + \left[1/\left(x_2 - x_1\right)\right]\int_{x_1}^{x_2} |r| dx$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu çalışmaların doğal devamı olarak Dirichlet sınır şartları altında Coulomb potansiyeline sahip Sturm-Liouville operatörü, difüzyon operatörü ve hidrojen atom denklemi için diferansiyel operatörlerin spektral teoresinin düz problemleri göz önüne alınıp, özdeğerler için asimptotik formüller bulunmuştur. Özel olarak hidrojen atom denklemi için elde edilen sonuçlar E.S. Panakhov ve İ. Ulusoy çalışmasında bulunmaktadır [36].

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

2.1. Diferansiyel Operatörlerin Spektral Teorisinde Kullanılan Önemli Kavramlar

Bu kısımda, diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde kullanılan bazı önemli tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1.1 X boş olmayan bir küme olsun. Bu küme üzerinde reel değerli, negatif olmayan bir $d: X \times X \to \mathbb{R}$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlasın: $\forall x, y, z \in X$ için

1) $d(x,y) \geq 0$

2) $d(x,y) = d(y,x),$

3) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y),$ (üçgen eşitsizliği)

Bu durumda $d(x,y)$ fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir metrik ve (X,d) ikilisine ise bir metrik uzay denir. [38].

Tanım 2.1.2 (M,d) metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya tamdır denir. $A \subset M$ içinde bulunan her Cauchy dizisi A'nın bir elemanına yakınsarsa A'ya (M,d) içinde tamdır denir [37].

Tanım 2.1.3

X, F üzerinde bir vektör uzay olsun. X üzerinde bir norm aşağıdaki özellikleri sağlayan bir

$$\|.\|: X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonudur: $\forall x, y \in X$ ve her $\alpha \in F$ için

1) $\|x\| \geq 0$

2) $\|x\| = 0$ ancak ve ancak $x = 0$

3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,$

4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$

şeklindedir [37].

Tanım 2.1.4 x, y, z elemanlarından oluşan herhangi bir cümle H olsun ve aşağıdaki aksiyomlar sağlansın:

1. H lineer kompleks uzay

2. H nin her x, y ikili elemanına karşılık gelen $\langle x, y \rangle$ kompleks sayısı için

a) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$

b) $\langle x_1+x_2,y\rangle = \langle x_1,y\rangle + \langle x_2,y\rangle \quad (x_1,x_2 \in H)$

c) $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$ (Her λ kompleks sayısı için)

d) $\langle x,x\rangle \geq 0$; $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0$; $\quad (\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle})$

$d(x,y) = \|x-y\|$ metriği anlamında H tamdır.

Her n doğal sayısı için H de n sayıda lineer bağımsız eleman vardır. Yani H sonsuz boyutludur.

Bu takdirde 1-4 sınır şartlarını sağlayan uzaya Soyut Hilbert uzayı, 1-3 şartlarını sağlayan uzaya ise Üniter Hilbert uzayı denir [38].

Tanım 2.1.5 ($L_2[a,b]$ Uzayı)

$a \leq t \leq b$ olmak üzere $(L_2[a,b])$ uzayı,

$$(L_2[a,b]) = \left\{ x(t) : \int_a^b [x(t)]^2\, dt < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayda iç çarpım ise

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

şeklinde tanımlanır (reel durumda $\overline{g(x)} = g(x)$ dir) [38].

Tanım 2.1.8

Tanım ve değer cümlesi vektör uzayı olan dönüşümlere operatör denir [40].

Tanım 2.1.9 L ve L' aynı bir C cismi üzerinde iki vektör uzay olsun.

$T: L \to L'$ operatör dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa:

i) $T(x+x) = T(x)+T(y), \quad x,y \in T$

ii) $T(\lambda x) = \lambda T(x), \quad \lambda \in C$

T operatörüne lineer operatör denir [40].

Tanım 2.1.10

N ve N' normlu uzay ve $T: N \to N'$ lineer bir operatör olsun. Eğer her $x \in N$ için

$$\|Tx\| \leq c\|x\|$$

olacak şekilde bir $c \geq 0$ reel sayısı varsa T'ye sınırlı operatör denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük c sayısına ise T operatörünün normu denir [40].

Tanım 2.1.11

N ve N' normlu uzay, T bir operatör, $x_0 \in X$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in X$ için $\|x - x_0\| < \delta$ olduğunda $\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ reel sayısı varsa T 'ye $x_0 \in X$ noktasında sürekli operatör denir [40].

Tanım 2.1.12

H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayı ve $T : H_1 \to H_2$ sınırlı lineer operatör olsun. Eğer $T^* : H_1 \to H_2$ operatörü

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$$

şartını sağlıyorsa T^* operatörüne T 'nin adjointi denir. Eğer $T^* = T$ ise T ye self-adjoint operatör denir [40].

Tanım 2.1.13

H bir Hilbert uzayı ve $T : D(T) \subset H \to H$ lineer operatörü verilsin.

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle,$$

eşitliği her $x, y \in D(T)$ için sağlanıyorsa, T operatörüne simetrik operatör denir. Simetrik operatörlerin bütün özdeğerleri reeldir ve farklı özdeğerlere uygun özfonksiyonları ortogonaldir [41].

Tanım 2.1.14 (Dönüşüm Operatörü)

E Hilbert lineer topolojik uzay, A ve B de $A : E \to E$, $B : E \to E$ şeklinde tanımlı iki lineer operatör olsun. E_1 ile E_2 de E lineer uzayının kapalı alt uzayları olmak üzere E uzayının tamamında tanımlı, E_1 den E_2 ye dönüşüm yapan ve lineer tersi olan X operatörü,

i) X ve X^{-1} operatörleri E uzayında süreklidir,

ii) $AX = XB$ operatör denklemi sağlanır.

şartlarını sağlıyorsa, bu operatöre A ve B operatörler çifti için dönüşüm operatörü denir [42].

Tanım 2.1.15 (Spektrum)

$L - \lambda I$ operatörünün sınırlı $(L - \lambda I)^{-1}$ tersinin mevcut olmadığı λ 'lar cümlesine L operatörünün spektrumu denir [43].

Tanım 2.1.17

L, $D(L)$ tanım bölgesinde sınırlı lineer bir operatör olmak üzere

$$Ly = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y(x) \neq 0$ fonksiyonu mevcut ise λ sayısına L operatörünün özdeğeri, y fonksiyonuna ise bir özfonksiyon denir [42].

Tanım 2.1.18 (Özdeğer, Özvektör Fonksiyonu)

$D(L)$ tanım bölgesi, L sınırlı lineer bir operatör ve

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},\ y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix},$$

olmak üzere

$$Ly \equiv By' + Q(x)y = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y(x,\lambda) \neq 0$ vektör fonksiyonu mevcut ise λ sayısına L operatörünün özdeğeri, $y(x,\lambda)$ fonksiyonuna ise λ sayısına karşılık gelen özvektör fonksiyonu denir [42].

Tanım 2.1.19

$x \in X$ olduğunda verilen x'ler için $|f(x)| \leq C|g(x)|$ olacak şekilde bir C sabiti varsa $f(x) = O(g(x))$ şeklinde yazılır. $x \to x_0$ iken $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ ise $f(x) = o(g(x))$ şeklinde yazılır [48,49].

Tanım 2.1.20

$f(z)$ kompleks fonksiyonunun z_0 noktasında türevi mevcut ve z_0 noktasının bir $D_\varepsilon(z_0) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$ komşuluğundaki her noktada türevlenebilirse, bu durumda $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir [44].

Tanım 2.1.21

Kompleks düzlemin tamamında analitik olan bir fonksiyona tam fonksiyon denir. e^z, $\sin z$, z^2 gibi fonksiyonlar tam fonksiyonlardır [44].

Tanım 2.1.22 $\{\lambda_n\}$ dizisi L operatörünün özdeğerleri ve $y(x,\lambda_n)$ ler bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olacak şekilde

$$\alpha_n = \int_a^b y^2(x,\lambda_n)dx$$

sayılarına L operatörünün normlaştırıcı sayıları denir [45].

Teorem 2.1.1 (Rouche Teoremi)

$f(z), g(z)$ fonksiyonları bir C kapalı çevresinin içinde analitik olsun. Eğer C üzerinde $|g(z)| < |f(z)|$ ise $f(z)$ ve $f(z)+g(z)$ fonksiyonları C kapalı çevresinin içinde aynı sayıda sıfırlara sahiptir [46].

Tanım 2.1.24 (Parseval Eşitliği) H bir Hilbert uzayı ve $x \in H$ ve (e_k) ortonormal bir dizi olsun. Bu durumda Parseval eşitliği

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \langle x, e_k \rangle \right|^2$$

olarak tanımlanır [38].

Tanım 2.1.25 (Volterra İntegral Denklemi)

$K(x,y)$ karesel bir bölgede tanımlı sürekli bir çekirdek fonksiyonu olmak üzere

$$f(x) = \phi(x) + \lambda \int_a^x K(x,y)\phi(y)dy$$

integral denklemine $\phi(x)$ bilinmeyen fonksiyonuna göre ikinci tür Volterra integral denklemi denir [47].

Tanım 2.1.27 (Düzgün Yakınsaklık)

(f_n) dizisi A cümlesi üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır ancak ve ancak her pozitif sayısı için en az bir sayısı vardır öyle ki $\forall n \geq n_0$ için ve her $x \in A$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Burada sözü edilen n_0 sayısı sadece ε sayısına bağlı olup, x noktasına bağlı değildir. Buna göre düzgün yakınsak her dizi noktasal yakınsaktır. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir. Eğer A cümlesi sonlu ise düzgün yakınsaklık ile noktasal yakınsaklık birbirine denktir [50].

Tanım 2.1.28 (Parseval Eşitliği)

$f(x), g(x) \in L_2(a,b)$ olmak üzere

$$\int_a^b f(u)\,g(u)\,du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho_n} \left(\int_a^b f(u)\,\phi(u,\lambda_n)\,du \right) \left(\int_a^b g(u)\,\phi(u,\lambda_n)\,du \right)$$

dir [38].

Tanım 2.1.29 (Hardy-Littlewood Eşitsizliği) $p > 1$, $f(x) \geq 0$ ve $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ ise

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x} \right)^p dx < \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty f^p(x) dx$$

eşitsizliği sağlanır [51].

Teorem 2.1.2 (Minkowski Eşitsizliği) $1 \le p < \infty$ olmak üzere $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (veya $\mathbb{C}^n$) için

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{1/p}$$

şeklindeki eşitsizliğe toplam için Minkowski eşitsizliği denir [52].

Tanım 2.1.30 (Cauchy-Bunjakowski Eşitsizliği) $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$|\langle x, y \rangle| \le \|x\| . \|y\|$$

dir [52].

Tanım 2.1.31 (İntegral için Ortalama Değer Teoremi)

f fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli ise öyle bir $c \in (a,b)$ vardır ki

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

dir [50].

3. STURM LIOUVILLE OPERATÖRÜ

3.1 Sturm-Liouville Operatörü İçin Genel Bilgiler

L herhangi elemanlar cümlesinde tanımlı lineer bir operatör olsun. $y \neq 0$ olmak üzere $Ly = \lambda y$ eşitliğini sağlayan y fonksiyonuna L operatörünün özfonksiyonu λ ya ise özdeğeri denir.

Operatörlerin spektral teorisinde sık sık göz önüne alınan Sturm-Liouville operatörü

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $q(x)$, $[a,b]$ aralığında sürekli reel değerli fonksiyondur.

L operatörü için sınır şartları genellikle aşağıdaki gibi tanımlanır.

1. tür sınır şartı: Bunlara ayrık sınır şartları denir ve

$$y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0$$
$$y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0$$

şeklinde tanımlanır.

2. tür sınır şartı: Bunlar periyodik ve anti periyodik sınır şartları olarak bilinir ve sırası ile

$$y(a) = -y(b)$$

$$y'(a) = -y'(b)$$

şeklinde yazılır.

3. tür sınır şartı: Bunlar uçları bağlı sınır şartları olarak bilinir ve

$$y(a) = y(b) = 0 \text{ veya } y'(a) = y'(b) = 0$$

şeklinde tanımlanır.

$$Ly(x) = -\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)y = \lambda y \tag{3.1.1}$$

$$\begin{aligned} y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0 \\ y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0 \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

şeklinde tanımlanan (3.1.1)- (3.1.2) sınır değer problemi literatürde Sturm-Liouville problemi olarak bilinir.

$p(x), l(x)$ ve $r(x)$ fonksiyonları reel ve sonlu $[a,b]$ aralığında sürekli olmak üzere Sturm-Liouville operatörünün özdeğer ve özfonksiyonlarını inceleyelim. $p(x)$ ve $r(x)$, $[a,b]$ aralığında pozitif fonksiyonlar olmak üzere Sturm-Liouville denkleminin genel

$$L = -\frac{d}{dx}\left\{ p(x)\frac{dy}{dx} \right\} + l(x)y = \lambda r(x)y \quad (a \le x \le b) \tag{3.1.3}$$

ifadesini göz önüne alalım. $p(x)$ birinci mertebeden ve $p(x)\ r(x)$ ikinci mertebeden sürekli türeve sahip olacak şekilde

$$z = \frac{1}{c}\int_a^x \left(\frac{r(x)}{p(x)} \right)^{\frac{1}{2}} dx, \quad u = \left(r(x)p(x) \right)^{\frac{1}{4}} y, \quad \mu = c\lambda$$

dönüşümleri yapılırsa (3.1.3) denklemi

$$c = \frac{1}{\pi}\int_a^x \left(\frac{r(x)}{p(x)} \right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$q(z) = \frac{Q''(z)}{Q(z)} - c^2 \frac{l(x)}{r(x)}$$

$$Q(z) = \left(r(x)p(x) \right)^{\frac{1}{4}}$$

olmak üzere

$$-y'' + q(x)y = \lambda y$$

şeklinde yazılır.

Herhangi λ_1 için göz önüne alınan sınır değer probleminin $y(x,\lambda_1) \ne 0$ aşikar olmayan çözüme sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda bu bölümün başlangıcında verilen tanımda (3.1.1)-(3.1.2) sınır değer problemi λ_1 özdeğeri ve buna karşılık gelen özfonksiyonu da $y(x,\lambda_1)$ olarak tanımlanır.

Teorem 3.1.1 Eğer $q(x)$, $[a,b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon ve

$$\varphi(a,\lambda) = \sin\alpha \ , \ \varphi'_x(a,\lambda) = -\cos\alpha$$

başlangıç şartları sağlanırsa (3.1.1) denkleminin $(a \le x \le b)$ aralığında her α için bir tek $\varphi(x,\lambda)$ çözümü vardır. her $x \in [a,b]$ sabiti için $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu λ ya göre bir tam fonksiyondur [15].

Lemma 3.1.1 $\lambda_1 \ne \lambda_2$ farklı özdeğerlerine karşılık gelen $y(x,\lambda_1)$ ve $y(x,\lambda_2)$ özfonksiyonları ortogonaldir. Yani

$$\int_0^\pi y(x,\lambda_1)y(x,\lambda_2)dx = 0 \qquad \lambda_1 \ne \lambda_2 \tag{3.1.4}$$

dir [15].

Lemma 3.1.2 (3.1.1)-(3.1.2) sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir [15].

3.2 Regüler ve Singüler Sturm-Liouville Probleminin Özdeğerler ve Özfonksiyonlar için Asimptotik Formülleri

1. Sturm-Liouville Problemi için

$$Ly(x) = -\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)y = \lambda y \tag{3.2.1}$$

$$\begin{aligned} y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0 \\ y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

sınır değer problemini göz önüne alalım. Burada $\sin\alpha \neq 0$ ve $\sin\beta \neq 0$ olmak üzere (3.2.2) sınır şartlarını sırası ile $\sin\alpha$ ve $\sin\beta$ ifadelerine bölersek

$$\begin{aligned} y(a)\cot\alpha + y'(a) = 0 \\ y(b)\cot\beta + y'(b) = 0 \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

elde ederiz. $\cot\alpha = -h$ ve $\cot\beta = H$ ile gösterilirse

$$\begin{aligned} y'(a) - hy(a) = 0 \\ y'(b) + Hy(b) = 0 \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

yazılır. Böylece (3.2.3)- (3.2.4) probleminde eğer $q(x)$ sürekli reel değerli bir fonksiyon h ve H reel sayıları da sonlu ise bu probleme Regüler Sturm-Liouville Problemi denir. Bu şartlardan herhangi biri bozulduğunda bu probleme Singüler Sturm-Liouville Problemi denir.

2. $q(x)$, $[0,\pi]$ aralığında sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki Sturm-Liouville Problemini

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad x \in [0,\pi] \tag{3.2.5}$$

$$\begin{aligned} y'(0) - hy(0) = 0 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

göz önüne alalım. (3.2.5) denkleminin

$$\varphi(0,\lambda) = 1, \quad \varphi'(0,\lambda) = h \tag{3.2.7}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü $\varphi(x,\lambda)$ ile gösterelim. Aynı denklemin

$$\psi(0,\lambda) = 0, \quad \psi'(0,\lambda) = 1 \tag{3.2.8}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü de $\psi(x,\lambda)$ ile gösterelim.

Lemma 3.2.1. $\lambda = s^2$ olsun. Bu takdirde

$$\varphi(x,\lambda) = \cos sx + \frac{h}{s}\sin sx + \frac{1}{s}\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)\,d\tau \tag{3.2.9}$$

$$\psi(x,\lambda) = \frac{1}{s}\sin sx + \frac{1}{s}\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}q(\tau)\psi(\tau,\lambda)\,d\tau \tag{3.2.10}$$

şeklindedir.

İspat. Öncelikle (3.2.9) eşitliğini ispatlayalım. $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu (3.1.1) denklemini sağladığı için

$$\int_0^x \sin\{s(x-\tau\}q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)\,d\tau = \int_0^x \sin\{s(x-\tau\}\varphi''(\tau,\lambda)\,d\tau + s^2\int_0^x \sin\{s(x-\tau\}\varphi(\tau,\lambda)\,d\tau$$

yazılabilir. Daha sonra sağdaki integrali iki kez parçalı integralleyelim ve (3.2.7) şartlarını göz önüne alalım. Bu takdirde $\int_0^x \sin\{s(x-\tau\}\varphi''(\tau,\lambda)\,d\tau$ integralini hesaplayalım.

$$\int_0^x \sin\{s(x-\tau\}\varphi''(\tau,\lambda)\,d\tau =$$

$$= \varphi'(x,\lambda)\sin\{s(x-x)\} - \varphi'(0,\lambda)\sin\{s(x-0)\} + s\int_0^x \cos\{s(x-\tau)\}\varphi'(\tau,\lambda)d\tau$$

$$= -h\sin x + s\int_0^x \cos\{s(x-\tau)\}\varphi'(\tau,\lambda)d\tau$$

$$= -h\sin x + s\left\{\varphi(x,\lambda)\cos\{s(x-x)\} - \varphi(0,\lambda)\cos\{s(x-0)\} - s\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}\varphi(\tau,\lambda)d\tau\right\}$$

$$= -h\sin sx + s\left\{\varphi(x,\lambda) - \cos sx - s\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}\varphi(\tau,\lambda)d\tau\right\}$$

bulunur. Böylece

$$\int_0^x \sin\{s(x-\tau\}q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)\,d\tau = \int_0^x \sin\{s(x-\tau\}\varphi''(\tau,\lambda)\,d\tau + s^2\int_0^x \sin\{s(x-\tau\}\varphi(\tau,\lambda)\,d\tau$$

$$= -h\sin sx + s\{\varphi(x,\lambda) - \cos sx\} - s^2\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}\varphi(\tau,\lambda)d\tau + s^2\int_0^x \sin\{s(x-\tau)\}\varphi(\tau,\lambda)d\tau$$

$$= -h\sin sx + s\varphi(x,\lambda) - s\cos sx$$

elde edilir. (3.2.10) bağıntısının ispatı da benzer şekilde yapılır.

Lemma 3.2.2 $s = \sigma + it$ olsun. Bu durumda öyle $s_0 > 0$ vardır ki $|s| > s_0$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\varphi(x,\lambda)=O\left(e^{|t|x}\right),\quad \psi(x,\lambda)=O\left(|s|^{-1}e^{|t|x}\right) \tag{3.2.11}$$

$$\varphi(x,\lambda)=\cos sx+O\left(|s|^{-1}e^{|t|x}\right) \tag{3.2.12}$$

$$\psi(x,\lambda)=\frac{\sin sx}{s}+O\left(\frac{e^{|t|x}}{|s|^{2}}\right) \tag{3.2.13}$$

$0\le x\le\pi$ için x in aldığı tüm değerlerde bu ifadeler sağlanır.

3. Şimdi özdeğerler ve özfonksiyonlar için asimptotik formülleri hesaplayalım.

(3.2.5)- (3.2.6) Sturm-Liouville Problemini göz önüne alalım. Lemma 3.2.1 ve Lemma 3.2.2 den dolayı

$$\varphi(x,\lambda)=\cos sx+\frac{h}{s}\sin sx+\frac{1}{s}\int_0^x \sin\{s(x-\tau\}q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)\,d\tau$$

$$\varphi(x,\lambda)=\cos sx+O\left(|s|^{-1}e^{|t|x}\right)$$

şeklindedir.

$h\neq\infty$ ve $H\neq\infty$ olsun. $\varphi(x,\lambda)$, (3.2.5) denkleminin (3.2.6) sınır şartlarını sağlayan bir çözümü olduğundan bu fonksiyonun π noktasındaki değerini (3.2.6) sınır şartlarının ikincisinde yazdığımızda özdeğerleri buluruz. Lemma 3.1.2 den dolayı özdeğerler reeldir. Negatif özdeğerlerin sayısı sonludur. λ pozitif sayısı için $\operatorname{Im} s=0$ dır. Bu sebeple (3.2.12) formülünden

$$\varphi(x,\lambda)=\cos sx+O\left(\frac{1}{s}\right) \tag{3.2.14}$$

yazılabilir. Daha sonra (3.2.9) ifadesini x 'e göre diferansiyelini alıp ve (3.2.14) bağıntısını da kullanırsak

$$\varphi_x'(x,\lambda)=-s\sin sx+h\cos sx+O(\frac{1}{s}) \tag{3.2.15}$$

ifadesini elde ederiz. (3.2.6) sınır şartlarının ikincisinde (3.2.12) ve (3.2.15) ifadelerini yerine yazarsak özdeğerleri bulmak için aşağıdaki

$$-s\sin s\pi+(h+H)\cos s\pi+O(\frac{1}{s})=0 \tag{3.2.16}$$

denklemi elde ederiz.

s nin büyük değerleri için (3.2.16) denkleminin tam doğal sayıların komşuluğunda kökleri olmak üzere çözümlerin varlığı açıktır. Buradan özdeğerlerin sonsuz bir cümlesinin var olduğunu elde ederiz. Herhangi yeteri kadar büyük tam *n* 'den başlayarak her *n* 'nin komşuluğunda denkleminin sadece bir kökünün bulunduğunu gösterelim. Bu amaçla (3.2.16) denkleminin sol kısmının s 'ye göre diferansiyeli alınırsa

$$-\pi s\cos s\pi-\sin s\pi-\pi(h+H)\sin s\pi+O(1)=0$$

elde edilir. Sol taraftaki ifadenin s büyük tam değerleri komşuluğunda sıfıra eşit olmadığını göstermek mümkündür.

s_n ile (3.2.16) denkleminin n. kökünü gösterelim. Sturm'un osilasyon teoreminden ve (3.2.12) formülünden s_n için s nin sıfırlarını yalnız tam n ler komşuluğunda elde ederiz. Bu iddianın Sturm un teoremine bağlı kalmadan başka bir ifadesini de söyleyebiliriz.

$\lambda=s^2$ olsun. Bu takdirde özdeğerler

$$\varphi(\pi,\lambda)+H\varphi_x'(\pi,\lambda)\equiv w(\lambda)=0$$

denkleminin kökleri olduğundan $w(\lambda)=w_1(s)$ dir. (3.2.9) ifadesinden dolayı $w_1(s)$, s ye göre tam fonksiyondur. Buna ilaveten (3.2.14) ve (3.2.15) formüllerinden $\sin s\pi\neq 0$ için $w(\lambda)=w_1(s)$ ifadesinden

$$w(\lambda)=w_1(s)=-Hs\sin s\pi\left\{1+O\left(\frac{1}{|s|}\right)\right\} \tag{3.2.17}$$

elde edilir.

S düzleminde $R=N+\frac{1}{2}$ yarıçaplı ve merkezi orijinde olan D_R dairesini göz önüne alalım. Rouche teoreminden ve (3.2.17) asimptotik formülünden D_R dairesinin içinde $w_1(s)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısına eşit olup bu sayı $2n+1$dir. $w_1(s)$ fonksiyonu çift olduğundan onun sadece pozitif sıfırlarını göz önüne almak yeterlidir. $w_1(s)$ nin her pozitif sıfırına bir özdeğer karşılık gelir. Yani $N+\frac{1}{2}$ den küçük olan s_k özdeğerinin sayısı $N+1$ olacaktır. s_n için asimptotik formül aşağıdaki gibi olur.

$$s_n=n+o(1) \tag{3.2.18}$$

$s_n=n+\delta_n$ olsun. Bu durumda

$$0=-(n+\delta_n)\sin(n+\delta_n)\pi+(h+H)\cos(n+\delta_n)\pi+O(\frac{1}{n})$$
$$=-(n+\delta_n)\left(\sin n\pi\cos\delta_n\pi+\cos n\pi\sin\delta_n\pi\right)$$
$$+(h+H)\left(\cos n\pi\cos\delta_n\pi-\sin n\pi\sin\delta_n\pi\right)+O(\frac{1}{n})$$

elde edilir. $\cos n\pi=(-1)^n$ ve $\sin n\pi=0$ olduğu göz önüne alınırsa (3.2.16) denklemi $n\sin\delta_n\pi+O(1)=0$ şeklinde olur. Buradan $\sin\delta_n\pi=O\left(\frac{1}{n}\right)$ yani $\delta_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$ olur. Buradan (3.2.16) denkleminin köklerini büyük n ler için

$$s_n=n+o\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.2.19}$$

elde ederiz.

Eğer (3.2.1) denkleminde $q(x)$ fonksiyonu sınırlı türeve sahipse (3.2.19) formülü yeteri kadar düzgün sayılır. Şayet (3.2.9) eşitliğinin x 'e göre türevini alıp daha sonra $\varphi(x,\lambda)$ ve $\varphi'_x(x,\lambda)$ ifadelerinin (3.2.6) sınır şartlarının ikincisinde kullanıp birkaç dönüşüm yaparsak

$$A=h+H+\int_0^\pi\left\{\cos s\tau+\frac{H}{s}\sin s\tau\right\}q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau$$
$$B=\frac{hH}{s}+\int_0^\pi\left\{\sin s\tau+\frac{H}{s}\right\}q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)d\tau$$

olacak şekilde

$$(-s+B)\sin s\pi+A\cos s\pi=0 \tag{3.2.20}$$

ifadesini elde ederiz. (3.2.14) ifadesinden dolayı A ve B için

$$A=h+H+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)d\tau+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)\cos 2s\tau d\tau+O\left(\frac{1}{s}\right)$$
$$B=\frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)\sin 2s\tau d\tau+O\left(\frac{1}{s}\right)$$

olur. Hipotezimizden dolayı $q(x)$ potansiyel fonksiyonu sınırlı türeve sahip olduğu için kısmi integral alınırsa

$$\int_0^\pi q(\tau)\cos 2s\tau d\tau=O\left(\frac{1}{s}\right),\quad \int_0^\pi q(\tau)\sin 2s\tau d\tau=O\left(\frac{1}{s}\right)$$

olur. Dolayısıyla A ve B ifadeleri için

$$A = h + H + h_1 + O\left(\frac{1}{s}\right) \quad h_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(\tau)d\tau$$

$$B = O\left(\frac{1}{s}\right)$$

elde edilir. Bu sebeple (3.2.20) denklemini

$$\tan s\pi = \frac{h + H + h_1 + O\left(\frac{1}{s}\right)}{s + O\left(\frac{1}{s}\right)}$$

şeklinde yazmak mümkündür. Tekrar $s_n = n + \delta_n$ alınırsa

$$\tan(n+\delta_n)\pi = \frac{\tan n\pi \tan \delta_n \pi}{1 - \tan n\pi \tan \delta_n \pi} = \tan \delta_n \pi$$

olduğundan

$$\tan \pi\delta_n = \frac{h + H + h_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ve $x \to 0$ iken $\tan x \approx x$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\delta_n = \frac{h + H + h_1}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

elde edilir. Böylece

$$c = \frac{1}{\pi}\left(h + H + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(\tau)d\tau\right)$$

olmak üzere

$$s_n = n + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{3.2.21}$$

elde ederiz. $q(x) \in C^2(0,\pi)$ olduğunu kabul edersek daha yaklaşık bir asimptotik formül buluruz. c_1 sabit olmak üzere

$$s_n = n + \frac{c}{n} + \frac{c_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \tag{3.2.22}$$

olur.

Şimdi (3.2.21) formülünden faydalanarak $\varphi(x,\lambda) = \varphi_n(x)$ özfonksiyonları için asimptotik formül bulalım. Bunun için (3.2.9) eşitliğinde $\varphi(x,\lambda)$ yerine (3.2.14) ifadesini yazarsak

$$\varphi(x,\lambda)=\cos sx+\frac{h}{s}\sin sx+\frac{1}{s}\int_0^x \sin\{s(x-\tau\}\cos s\tau q(\tau)d\tau+O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$
$$=\cos sx+\frac{h}{s}\sin sx+\frac{\sin sx}{2s}\int_0^x q(\tau)d\tau+O\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

elde edilir. (3.2.21) formülünde s için her yerde s_n alınırsa

$$\beta(x)=-cx+h+\frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau$$

olmak üzere

$$\varphi(x,\lambda_n)=\varphi_n(x)=\cos nx-\frac{cx}{n}\sin nx+\frac{h}{n}\sin nx+\frac{\sin nx}{2n}\int_0^x q(\tau)d\tau+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$=\cos nx+\frac{\beta(x)}{n}\sin nx+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

elde ederiz. $\varphi_n(x)$ normlaştırılmış özfonksiyonlarının asimptotik formüllerini bulmak için

$$a_n^2=\int_0^\pi \varphi_n^2(x)dx=\int_0^\pi \cos^2 nxdx+\frac{1}{n}\int_0^\pi \beta(x)\sin 2nxdx+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

integralini göz önüne alalım. $\beta(x)$ fonksiyonu diferansiyellenebilir olduğundan

$$\int_0^\pi \beta(x)\sin 2nxdx=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

dir. Bundan dolayı $a_n^2=\frac{\pi}{2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ dolayısıyla

$$\frac{1}{a_n}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olur. Böylece normlu özfonksiyonlar için asimptotik formül

$$v_n(x)=\frac{1}{a_n}\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\cos nx+\frac{\beta(x)}{n}\sin nx\right\}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (3.2.23)$$

şeklinde olur.

4. Şimdi $h=\infty,\ H\neq\infty$ olduğu durumu inceleyelim. (3.2.6) sınır şartlarının birincisinde

$$y(0)=0 \qquad (3.2.24)$$

olduğunu kabul edelim. fonksiyonu şartını sağlar. Bundan dolayı araştırdığımız durum için (3.2.6) sınır şartlarının ikincisinde $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonu yazarak özdeğerlerini araştırabiliriz. (3.2.10) ifadesinin x e göre diferansiyelini alırsak

$$\psi'_x(x,\lambda) = \cos sx + \int_0^x \cos\{s(x-\tau\} q(\tau)\psi(\tau,\lambda)\,d\tau$$

elde ederiz. Bundan dolayı (3.2.6) sınır şartlarının ikincisinden

$$\begin{aligned} &\cos s\pi + \int_0^\pi \cos\{s(\pi-\tau\} q(\tau)\psi(\tau,\lambda)\,d\tau \\ &+H\left\{\frac{\sin s\pi}{s} + \frac{1}{s}\int_0^\pi \sin\{s(\pi-\tau\} q(\tau)\psi(\tau,\lambda)\,d\tau\right\} = 0 \end{aligned} \tag{3.2.25}$$

elde ederiz. (3.2.13) ifadesinden dolayı (3.2.25) dan

$$\cos s\pi + \frac{1}{s}\int_0^\pi \cos\{s(\pi-\tau\}\sin s\tau q(\tau)d\tau + \frac{\sin s\pi}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = 0 \tag{3.2.26}$$

bulunur. $q(x)$ sınırlı türeve sahip olduğundan

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \cos\{s(\pi-\tau\}\sin s\tau q(\tau)d\tau = \cos s\pi \int_0^\pi \cos s\tau \sin s\tau q(\tau)d\tau + \sin s\tau \int_0^\pi \sin^2 s\tau d\tau \\ &= \frac{\sin s\pi}{2}\int_0^\pi q(\tau)d\tau + O\left(\frac{1}{s}\right) \end{aligned}$$

olur. Bundan dolayı (3.2.26) eşitliğinden

$$\cos s\pi + \frac{\sin s\pi}{s}\left\{H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)d\tau\right\} + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = \cos s\pi + H_1\frac{\sin s\pi}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = 0 \tag{3.2.27}$$

olur.

$s_n = n + \frac{1}{2} + \delta_n$ olsun. O zaman (3.2.27) ifadesinden

$$\delta_n = \frac{H_1}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olmak üzere

$$\cot\left(n + \frac{1}{2} + \delta_n\right)\pi = -\tan\delta_n\pi = -\frac{H_1}{n+\frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olur ve

$$H_1 = H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)d\tau$$

olmak üzere

$$s_n = n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

elde ederiz.

Şimdi (3.2.10) da s_n değerini yerleştirirsek $\psi(x,\lambda_n) = \psi_n(x)$ özfonksiyonları için aşağıdaki asimptotik formülü

$$\psi_n(x) = \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

elde ederiz. α_n^{-1} normlaştırılmış katsayıları için

$$\frac{1}{\alpha_n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left\{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

formülünü elde ederiz. Bundan dolayı bu durum için $v_n(x) = \left(\frac{1}{\alpha_n}\right)\psi_n(x)$ normlu özfonksiyonları

$$v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(n+\frac{1}{2}\right)x + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.2.28}$$

şeklinde olur.

5. Son olarak $h=\infty$ ve $H=\infty$ durumunu araştıralım. (3.2.6) sınır şartlarında $y(0) = y(\pi) = 0$ olduğunu söyleyebiliriz ve bundan dolayı $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonu özel olarak $\psi(x,\lambda) = 0$ şartını sağlamalıdır. (3.2.10) ifadesinden

$$\sin s\pi + \int_0^\pi \sin\{s(\pi-\tau\} q(\tau)\psi(\tau,\lambda)\, d\tau = 0$$

ya da

$$\sin s\pi \left\{1 + \int_0^\pi \cos s\tau q(\tau)\psi(\tau,\lambda)\, d\tau\right\} - \cos s\pi \int_0^\pi \sin s\tau q(\tau)\psi(\tau,\lambda)\, d\tau = 0$$

şeklinde elde edilir. (3.2.13) ifadesinden dolayı ($q(x)$ sınırlı)

$$\sin s\pi - \frac{1}{2s}\cos s\pi \int_0^\pi q(\tau)d\tau + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = \sin s\pi - \frac{\alpha}{s}\cos s\pi + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \tag{3.2.29}$$

elde ederiz. Bu denklem (3.2.16) denklemi ile aynıdır. Bundan dolayı (3.2.29) denkleminin kökleri

$$\alpha_1 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)\int_0^{\pi} q(\tau)d\tau \text{ olmak üzere}$$

$$s_n = n + \frac{\alpha_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

şeklindedir. (3.2.10) da s_n nin değerini yerine yazarsak $\psi(x,\lambda_n) = \psi_n(x)$ özfonksiyonları için

$$\psi_n(x) = \frac{\sin nx}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

asimptotik formülünü elde ederiz. α_n^{-1} normlaştırılmış katsayıları için

$$\frac{1}{\alpha_n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}n\left\{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

formülünü elde ederiz. Bundan dolayı

$$v_n(x) = \left(\frac{1}{\alpha_n}\right)\psi_n(x)$$

normlaştırılmış özfonksiyonları

$$v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

olur. Buraya kadar olan kısım Levitan ve Sargsjan tarafından incelenmiştir [15]. (3.2.1) denkleminin Dirichlet sınır şartı altında incelenmesi ise Pöschel ve Trubowitz tarafından yapılmıştır [14].

3.3. Dirichlet Sınır Şartı altında Özdeğerler için Asimptotik Formüller

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 \le x \le 1 \tag{3.3.1}$$

$$\begin{aligned} y_1(0,\lambda,q) &= y_2'(0,\lambda,q) = 1 \\ y_1'(0,\lambda,q) &= y_2(0,\lambda,q) = 0 \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

şeklinde tanımlanan (3.3.1)- (3.3.2) başlangıç değer problemini göz önüne alalım. Burada $\lambda \in C$ ve $q(x) \in L^2[0,1]$ olmak üzere bu problemin çözüm fonksiyonları aşağıdaki şekildedir:

Teorem 3.3.1 (3.3.1) denkleminin (3.3.2) başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri

$$y_1(x,\lambda,q) = \cos\sqrt{\lambda}x + \int_0^x \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} q(t)\, y_1(t,\lambda,q)dt \tag{3.3.3}$$

$$y_2(x,\lambda,q)=\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}+\int_0^x\frac{\sin\sqrt{\lambda}\left(x-t\right)}{\sqrt{\lambda}}q\left(t\right)y_2(t,\lambda,q)dt \qquad (3.3.4)$$

şeklindedir. Ayrıca aşağıdaki yaklaşımlar sağlanır:

$$\left|y_1(x,\lambda,q)-\cos\sqrt{\lambda}x\right|\le\frac{1}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}e^{\left(\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|x+\|q\|\sqrt{x}\right)} \qquad (3.3.5)$$

$$\left|y_2(x,\lambda,q)-\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}\right|\le\frac{1}{|\lambda|}e^{\left(\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|x+\|q\|\sqrt{x}\right)} \qquad (3.3.6).$$

Şimdi (3.3.1) denkleminin

$$y(0)=0, \quad y(1)=0 \qquad (3.3.7)$$

Dirichlet sınır şartını sağlayan bir çözümü olup olmadığına bakalım. Teorem 3.3.1 ‘den $y_2(x,\lambda,q)$ çözüm fonksiyonu $y_2(0,\lambda,q)=0$ şartını sağlayan bir çözümdür. $y_2(1,\lambda,q)=0$ şartını da sağlaması durumunda Dirichlet sınır şartını sağlayan bir çözüm olacaktır.

Lemma 3.3.1: Her n tamsayısı için $|z-n\pi|\ge\pi/4$ ise

$$e^{|\operatorname{Im}z|}<4|\sin z|$$

İspat: z = x+iy $|\sin z|$ çift ve periyodu π olduğundan $0\le x\le\pi/2$ ve $|z|\ge\pi/4$ için lemmayı ispat edelim.

$|\sin z|^2=\cosh^2 y-\cos^2 x$ olduğunu biliyoruz. $\pi/6\le x\le\pi/2$ ve her y reel değeri için $\cos^2 x\le\frac{3}{4}\le\frac{3}{4}\cosh^2 y$ elde edilir. $0\le x\le\pi/6$ için ve $|z|\ge\pi/4$ olduğundan

$$y^2\ge\left(\pi/4\right)^2-x^2\ge\frac{5}{144}\pi^2\ge\frac{1}{3}$$

ve böylece $\cosh^2 y\ge1+y^2\ge\frac{4}{3}\ge\frac{4}{3}\cos^2 x$ olur. Her iki durumda da

$$|\sin z|^2=\cosh^2 y-\cos^2 x\ge\frac{1}{4}\cosh^2 y>\frac{1}{16}e^{2|y|}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.3.2 (Counting Lemma): $q\in L^2\left[0,1\right]$ ve $N>e^{2\|q\|}$ bir tamsayı olsun. Bu durumda $y_2(1,\lambda,q)$ ‘nun

$$\operatorname{Re}\lambda<(N+1/2)^2\pi^2$$

bölgesinde N tane kökü vardır ve her $n > N$ için

$$|\lambda - n\pi| < \pi / 2$$

bölgesine sadece bir kökü vardır.

İspat: $N > e^{2\|q\|}$ olsun.

$$|\lambda - n\pi| = \pi / 2 \ , \ n > N$$

çevresini göz önüne alalım. Lemma 3.3.1'den

$$e^{|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|} < 4\left|\sin\sqrt{\lambda}\right|$$

sağlanır. (3.3.6)'dan

$$\begin{aligned}\left|y_2(1,\lambda) - \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right| &\le \frac{e^{\|q\|}}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\frac{e^{|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|}}{\left|\sqrt{\lambda}\right|} \\ &\le \frac{2N}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}\left|\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right| \\ &\le \left|\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right|\end{aligned}$$

olur. Böylece Rouche teoreminden

$$\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \text{ ve } \left(y_2(1,\lambda) - \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right) + \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$$

aynı sayıda sıfırlara sahiptir. Böylece ispat tamamlanmış olur. Bu lemmayı kullanarak aşağıdaki teorem ispatlanabilir.

Teorem 3.3.2 $q \in L^2[0,1]$ olmak üzere

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 \le x \le 1$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

sınır değer problemi için özdeğerlerin asimptotik formülü aşağıdaki şekildedir:

$$\mu_n(q) = n^2\pi^2 + \int_0^1 q(t)dt - \langle \cos(2\pi n x), q \rangle + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

4. SİNGÜLER STURM- LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ANALİZİ

Bu bölümde Guillot, Ralston [39] ve Carlson [53] tarafından elde edilen sonuçların ispatları daha detaylı bir şekilde verilmiştir.

4.1.1 Özdeğerler İçin Asimptotik Formüller

$$-y''+\frac{2}{x^2}y+q(x)y=\lambda y, \quad x\in(0,1) \quad ve \quad \lambda\in C \tag{4.1.1}$$

denklemi

$$y(1)=0 \tag{4.1.2}$$

başlangıç şartını sağlasın. (4.1.1) denkleminin

$$u(x,\lambda)=\frac{3}{\lambda}\left(\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}x}-\cos\sqrt{\lambda}x\right) \tag{4.1.3}$$

$$v(x,\lambda)=-\frac{\sqrt{\lambda}}{3}\left(\sin\sqrt{\lambda}x+\frac{\cos\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}x}\right) \tag{4.1.4}$$

olmak üzere

$$\psi(x,\lambda,q)=v(x,\lambda)-\int_x^1 g(x,t;\lambda)q(t)\psi(t,\lambda,q)dt \tag{4.1.5}$$

$$\varphi(x,\lambda,q)=u(x,\lambda)+\int_0^x g(x,t;\lambda)q(t)\varphi(t,\lambda,q)dt \tag{4.1.6}$$

$\left(\varphi(.,\lambda,q),\psi(.,\lambda,q)\right)$ şeklinde iki lineer bağımsız çözümü olduğunu gösterelim. Burada

$$g\left(x,t,\lambda\right)=v(x,\lambda)u(t,\lambda)-v(t,\lambda)u(x,\lambda)$$

şeklindedir. (4.1.1) denkleminde $q(x)=0$ alırsak

$$y''+\left(\lambda-\frac{2}{x^2}\right)y=0$$

denklemi elde edilir. $x=0$ noktası reguler singüler bir nokta olduğundan Frobenius metodunu kullanalım.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}$$

şeklinde bir çözüm arayalım. Bu çözümü

$$x^2y''-2y+\lambda x^2y=0$$

denkleminde yerine yazarsak

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1)x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^{n+r+2} = 0$$

elde edilir. (n+1). terimin katsayısı

$$a_n = \frac{-\lambda}{(n+r+1)(n+r-2)} a_{n-2}$$

şeklindedir. İndisler denklemi

$$r^2 - r - 2 = 0$$

olduğundan $r_1 = 2$ ve $r_2 = -1$ elde edilir.

$r_1 = 2$ için çözüm fonksiyonu

$$y_1 = a_0 (x^2 - \frac{\lambda}{10} x^4 + \frac{\lambda^2}{280} x^6 - \frac{\lambda^3}{15120} + ...) = a_0 \frac{3}{\lambda} \left(\frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda} x} - \cos \sqrt{\lambda} x \right),$$

$r_2 = -1$ için çözüm fonksiyonu

$$y_2 = \frac{\partial}{\partial r} \left[(r - r_2) y(r_1, x) \right] \Big|_{r=r_2} = a_0 (-\frac{1}{3x} - \frac{\lambda}{6} x + \frac{\lambda^2}{24} x^3 - \frac{\lambda^3}{432} x^5 + ...)$$

$$= a_0 \frac{\sqrt{\lambda}}{3} \left(-\sin \sqrt{\lambda} x - \frac{\cos \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda} x} \right)$$

şeklindedir. Şimdi (4.1.1) denkleminin çözümünü bulmak için sabitlerin değişimi yöntemini uygulayalım.

$$y = c_1(x) u(x, \lambda) + c_2(x) v(x, \lambda) \tag{4.1.7}$$

alalım. Kendisini ve türevlerini (4.1.1) denkleminde yerine yazarsak

$$c_1'(x) u(x, \lambda) + c_2'(x) v(x, \lambda) = 0$$
$$c_1'(x) u'(x, \lambda) + c_2'(x) v'(x, \lambda) = -q(x) y$$

sistemi elde edilir. Birinci denklemi $-v'(x, \lambda)$, ikinci denklemi $v(x, \lambda)$ ile çarpıp taraf tarafa toplarsak

$$c_1'(x) = -\frac{v(x, \lambda)}{u'(x, \lambda) v(x, \lambda) - u(x, \lambda) v'(x, \lambda)} q(x) y(x, \lambda)$$

ve birinci denklemi $u'(x, \lambda)$, ikinci denklemi $-u(x, \lambda)$ ile çarpıp taraf tarafa toplarsak

$$c_2'(x) = \frac{u(x, \lambda)}{u'(x, \lambda) v(x, \lambda) - u(x, \lambda) v'(x, \lambda)} q(x) y(x, \lambda)$$

elde edilir. Burada

$$u'(x,\lambda)v(x,\lambda)-u(x,\lambda)v'(x,\lambda)$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{\cos\sqrt{\lambda}x}{x}-\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}x^2}+\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x\right)\left(\sin\sqrt{\lambda}x+\frac{\cos\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}x}\right)$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}x}-\cos\sqrt{\lambda}x\right)\left(\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x-\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{x}-\frac{\cos\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}x^2}\right)$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{2\cos\sqrt{\lambda}x\sin\sqrt{\lambda}x}{x}+\frac{\cos^2\sqrt{\lambda}x-\sin^2\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}x^2}+\sqrt{\lambda}\sin^2\sqrt{\lambda}x-\frac{\cos\sqrt{\lambda}x\sin\sqrt{\lambda}x}{\lambda x^3}\right)$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{2\cos\sqrt{\lambda}x\sin\sqrt{\lambda}x}{x}+\frac{\cos^2\sqrt{\lambda}x-\sin^2\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}x^2}-\sqrt{\lambda}\cos^2\sqrt{\lambda}x-\frac{\cos\sqrt{\lambda}x\sin\sqrt{\lambda}x}{\lambda x^3}\right)$$
$$=-1$$
olduğundan

$$c_1'(x)=v(x,\lambda)q(x)y(x,\lambda)$$
$$c_2'(x)=-u(x,\lambda)q(x)y(x,\lambda)$$

bulunur. Son eşitlikleri 0'dan x'e integre edersek

$$c_1(x)=\int_0^x v(t,\lambda)q(t)y(t,\lambda)dt \text{ ve } c_2(x)=-\int_0^x u(t,\lambda)q(t)y(t,\lambda)dt \text{ olur.}$$

olur. Bu değerleri (4.1.7) denkleminde yerine yazarsak

$$y=u(x,\lambda)\int_0^x v(t,\lambda)q(t)y(t,\lambda)dt-v(x,\lambda)\int_0^x u(t,\lambda)q(t)y(t,\lambda)dt$$
$$=\int_0^x\left[u(x,\lambda)v(t,\lambda)-v(x,\lambda)u(t,\lambda)\right]q(t)y(t,\lambda)dt$$
$$=\int_0^x g(x,t;\lambda)q(t)y(t,\lambda)dt$$

elde edilir. Böylece (4.1.1) denkleminin

$$\varphi(x,\lambda,q)=u(x,\lambda)+\int_0^x g(x,t;\lambda)q(t)\varphi(t,\lambda,q)dt$$

şeklinde bir çözümü vardır.

$$\left|g\left(x,t,\lambda\right)\right|\le C\frac{x^2}{t}\frac{\left(1+\left|\sqrt{\lambda}\right|t\right)}{\left(1+\left|\sqrt{\lambda}\right|x\right)^2}e^{\left|\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}\right|(x-t)},\qquad t\le x$$

ve

$$\left|\varphi\left(x,\lambda,q\right)\right|\le C\frac{x^2}{\left(1+\left|\sqrt{\lambda}\right|x\right)^2}e^{\left|\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}\right|x} \tag{4.1.8}$$

bağıntılarını [39] kullanarak

$$\left|\varphi(x,\lambda,q)-u(x,\lambda)\right|\le\left|\int_0^x g(x,t;\lambda)q(t)\varphi(t,\lambda,q)dt\right|$$

$$\le C\left|\int_0^x \frac{x^2}{t}\frac{\left(1+\left|\sqrt{\lambda}t\right|\right)}{\left(1+\left|\sqrt{\lambda}x\right|\right)^2}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|(x-t)}q(t)\frac{t^2}{\left(1+\left|\sqrt{\lambda}t\right|\right)^2}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|t}dt\right|$$

$$\le C\frac{x^2}{\left(1+\left|\sqrt{\lambda}x\right|\right)^2}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|x}\left|\int_0^x q(t)\frac{t}{\left(1+\left|\sqrt{\lambda}t\right|\right)}dt\right|$$

bulunur. O halde

$$\left|\varphi(x,\lambda,q)-u(x,\lambda)\right|\le C\frac{x^2e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|x}}{\left(1+\left|\sqrt{\lambda}\right|x\right)^2}\int_0^1\frac{t\left|q(t)\right|}{1+\left|\sqrt{\lambda}\right|t}dt \tag{4.1.9}$$

şeklindedir. Burada C, keyfi bir sabittir.

Benzer şekilde (4.1.1) denkleminin

$$\psi(x,\lambda,q)=v(x,\lambda)-\int_x^1 g(x,t;\lambda)q(t)\psi(t,\lambda,q)dt$$

şeklinde bir çözümü vardır.

$$\left|g(x,t,\lambda)\right|\le c\frac{t^2}{x}\frac{\left(1+\left|\sqrt{\lambda}\right|x\right)}{\left(1+\left|\sqrt{\lambda}\right|t\right)^2}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|(t-x)},\qquad \mathrm{x}\le t \tag{4.1.11}$$

ve

$$\left|\psi(x,\lambda,q)\right|\le C\frac{1+\left|\sqrt{\lambda}\right|x}{x}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|(1-x)} \tag{4.1.12}$$

bağıntıları kullanılarak

$$\left|\psi(x,\lambda,q)-v(x,\lambda)\right|\le C\frac{1+\left|\sqrt{\lambda}\right|x}{\left|\sqrt{\lambda}\right|x}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|(1-x)}\int_x^1\left|q(t)\right|dt \tag{4.1.13}$$

bulunur. $W(\varphi,\psi)$ wronskianın bire ve sıfıra eşit olmadığı aşikardır. Gerçekten,

$$W(\varphi,\psi)=1+O\left(\frac{1}{\lambda^{1/2}}\right),\quad \lambda\to+\infty\,.$$

Rouche teoreminden dolayı $\forall n\ge N$ için $\left\{\lambda\in R\,|\,\lambda^{1/2}-(n+1/2)\pi<\pi/2\right\}$ kümesinde sadece bir $\mu_n(q)$ özdeğeri olacak şekilde bir N tamsayısı vardır. Böylece $\forall n\ge N$ için

$$\mu_n^{1/2}(q)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi+\varepsilon_n, \quad |\varepsilon_n|<\frac{\pi}{2} \tag{4.1.14}$$

olur. Burada N, $L_R^2[0,1]$ uzayındaki sınırlı kümeler üzerinde q'dan bağımsız olarak seçilebilir. [14]

Teorem 4.1.1 $\forall f\in L^2[0,1]$ için

$$\int_0^1\left(2\frac{\lambda^2}{9}u^2(x,\lambda)-1\right)f(x)dx=\int_0^1\cos 2\sqrt{\lambda}x\,(Tf)(x)dx \tag{4.1.15}$$

ve

$$\int_0^1\lambda^{1/2}u(x,\lambda)v(x,\lambda)f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\sin 2\sqrt{\lambda}x\,(Tf)(x)dx \tag{4.1.16}$$

olur. T operatörü

$$(Tf)(x)=f(x)-4x\int_x^1\frac{f(s)}{s^2}ds, \qquad f\in L^2[0,1]$$

$L^2[0,1]$'de sınırlı birebir operatördür. Görüntü kümesi x^2 fonksiyonuna göre ortogonal bir alt uzaydır [39].

İspat: Önce (4.1.15) bağıntısının sağlandığını gösterelim.

$$\int_0^1\left(2\frac{\lambda^2}{9}u^2(x,\lambda)-1\right)f(x)dx=\int_0^1\left(2\left(\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}x}-\cos\sqrt{\lambda}x\right)^2-1\right)f(x)dx$$

$$=2\int_0^1\left(\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}x}\right)^2 f(x)dx-2\int_0^1\frac{\sin 2\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}x}f(x)dx+\int_0^1\cos 2\sqrt{\lambda}x f(x)dx \tag{4.1.17}$$

$f\in L^2[0,1]$ olduğundan

$$\int_x^1\frac{f(s)}{s}ds\le\left(\int_x^1 f^2(s)ds\right)^{1/2}\left(\int_x^1\frac{1}{s^2}ds\right)^{1/2}\le C\left(\left[-\frac{1}{s}\right]_x^1\right)^{1/2}=C\left(-1+\frac{1}{x}\right)^{1/2} \quad \text{ve}$$

$$\int_x^1\frac{f(s)}{s^2}ds\le\left(\int_x^1 f^2(s)ds\right)^{1/2}\left(\int_x^1\frac{1}{s^4}ds\right)^{1/2}\le C\left(\left[-\frac{1}{3s^3}\right]_x^1\right)^{1/2}=C\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3x^3}\right)^{1/2}$$

olur. Dolayısıyla $x\to 0_+$ iken

$$\int_x^1\frac{f(s)}{s}ds=O\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right) \text{ ve } \int_x^1\frac{f(s)}{s^2}ds=O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

elde edilir.

(4.1.17) ifadesindeki eşitliğin sağında bulunan birinci ve ikinci integralleri sırasıyla I_1 ve I_2 ile gösterelim. I_1 ile gösterilen integralde

$$u = \sin^2 \sqrt{\lambda}x, \qquad du = \sqrt{\lambda} \sin 2\sqrt{\lambda}x dx$$
$$dv = \frac{f(x)}{x^2} dx, \qquad v = -\int_x^1 \frac{f(s)}{s^2} ds$$

kısmi integrasyonu uygularsak

$$I_1 = 2\int_0^1 \left(\frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}x} \right)^2 f(x)dx$$
$$= \frac{2}{\lambda}\left[-\sin^2 \sqrt{\lambda}x \int_x^1 \frac{f(s)}{s^2} ds \Big|_0^1 + \sqrt{\lambda}\int_0^1 \sin 2\sqrt{\lambda}x \left(\int_x^1 \frac{f(s)}{s^2} ds \right) dx \right]$$
$$= \frac{2}{\lambda}\left[\sqrt{\lambda}\int_0^1 \sin 2\sqrt{\lambda}x \left(\int_x^1 \frac{f(s)}{s^2} ds \right) dx \right]$$

elde edilir. Burada tekrar

$$u = \sin 2\sqrt{\lambda}x, \qquad du = 2\sqrt{\lambda} \cos 2\sqrt{\lambda}x dx$$
$$dv = \left(\int_x^1 \frac{f(s)}{s^2} ds \right) dx, \qquad v = -\int_x^1 \left(\int_t^1 \frac{f(s)}{s^2} ds \right) dx$$

ele alıp, kısmi integrasyonu uygularsak

$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\left[-\sin 2\sqrt{\lambda}x \int_x^1 \left(\int_t^1 \frac{f(s)}{s^2} ds \right) dx \Big|_0^1 + 2\sqrt{\lambda}\int_0^1 \cos 2\sqrt{\lambda}x \int_x^1 \left(\int_t^1 \frac{f(s)}{s^2} ds \right) dt dx \right]$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\left[2\sqrt{\lambda}\int_0^1 \cos 2\sqrt{\lambda}x \int_x^1 \left(\int_t^1 \frac{f(s)}{s^2} ds \right) dt dx \right] = 4\int_0^1 \cos 2\sqrt{\lambda}x \int_x^1 \left(\int_t^1 \frac{f(s)}{s^2} ds \right) dt dx$$

elde edilir. I_2 ile gösterilen integralde

$$u = \sin 2\sqrt{\lambda}x, \qquad du = 2\sqrt{\lambda} \cos 2\sqrt{\lambda}x dx$$
$$dv = \frac{f(x)}{x} dx, \qquad v = -\int_x^1 \frac{f(s)}{s} ds$$

olmak üzere kısmi integrasyonu uygularsak

$$I_2 = -2\int_0^1 \frac{\sin 2\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}x} f(x)dx$$
$$= \frac{-2}{\sqrt{\lambda}}\left[-\sin 2\sqrt{\lambda}x \int_x^1 \frac{f(s)}{s} ds \Big|_0^1 + \int_0^1 2\sqrt{\lambda} \cos 2\sqrt{\lambda}x \int_x^1 \frac{f(s)}{s} ds dx \right]$$

$$I_2 = -4\left[\int_0^1 \cos 2\sqrt{\lambda}x \int_x^1 \frac{f(s)}{s} dsdx\right]$$

bulunur. Daha sonra I_1 ve I_2 değerleri için bulunan değerleri (4.1.15) ‘de yerine koyarsak

$$\int_0^1 \left(2\frac{\lambda^2}{9}u^2(x,\lambda)-1\right) f(x)dx$$

$$= 4\int_0^1 \cos 2\sqrt{\lambda}x \int_x^1 \left(\int_t^1 \frac{f(s)}{s^2} ds\right) dtdx - 4\left[\int_0^1 \cos 2\sqrt{\lambda}x \int_x^1 \frac{f(s)}{s} dsdx\right]$$

$$+\int_0^1 \cos 2\sqrt{\lambda}x f(x)dx$$

$$= \int_0^1 \cos 2\sqrt{\lambda}x \left[4\int_x^1 \left(\int_t^1 \frac{f(s)}{s^2} ds\right) dt - 4\int_x^1 \frac{f(s)}{s} ds + f(x)\right] dx$$

$$= \int_0^1 \cos 2\sqrt{\lambda}x \left(\tilde{T}f\right)(x) dx$$

elde edilir. Burada

$$\left(\tilde{T}f\right)(x) = 4\int_x^1 \left(\int_t^1 \frac{f(s)}{s^2} ds\right) dt - 4\int_x^1 \frac{f(s)}{s} ds + f(x)$$

şeklindedir. Şimdi $\tilde{T} = T$ olduğunu gösterelim.

Birinci integralde

$$u = \int_t^1 \frac{f(s)}{s^2} ds, \qquad dv = dt$$

olacak şekilde kısmi integrasyonu uygularsak

$$\left(\tilde{T}f\right)(x) = 4\left[t\int_t^1 \frac{f(s)}{s^2} ds \Big|_x^1 + \int_x^1 t\frac{f(t)}{t^2} dt\right] - 4\int_x^1 \frac{f(s)}{s} ds + f(x)$$

$$= 4\int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt - 4x\int_x^1 \frac{f(s)}{s^2} ds - 4\int_x^1 \frac{f(s)}{s} ds + f(x)$$

$$= f(x) - 4x\int_x^1 \frac{f(s)}{s^2} ds = \left(Tf\right)(x)$$

olduğu görülür. Böylece (4.1.15) eşitliği ispatlanmış olur. Benzer şekilde (4.1.16) eşitliği de gösterilebilir. Şimdi T operatörünün sınırlı olduğunu gösterelim. Bunun için T operatörünün adjointi olan T^* operatörünü bulalım.

$$\langle Tf, h\rangle = \int_0^1 \left(f(x) - 4x\int_x^1 \frac{f(s)}{s^2}\,ds \right) h(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 f(x)h(x) - 4\int_0^1 xh(x)\int_x^1 \frac{f(s)}{s^2}\,dsdx$$

Son ifadenin ikinci terimine

$$u = \int_x^1 \frac{f(s)}{s^2}\,ds, \quad dv = xh(x)\,dx$$

kısmi integrasyonu uygularsak

$$\langle Tf, h\rangle = \int_0^1 f(x)h(x) - 4\int_0^1 xh(x)\int_x^1 \frac{f(s)}{s^2}\,dsdx$$

$$= \int_0^1 f(x)h(x)dx - 4\left[\int_x^1 \frac{f(s)}{s^2}\,ds\int_0^x sh(s)\,ds\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2}\int_0^x sh(s)\,dsdx \right]$$

$$= \int_0^1 f(x)\left(h(x) - \frac{4}{x^2}\int_0^x sh(s)\,ds \right) dx = \langle f, T^*h\rangle$$

elde edilir. Böylece T^* operatörünü

$$\left(T^*h\right)(x) = h(x) - \frac{4}{x^2}\int_0^x sh(s)\,ds \qquad (4.1.18)$$

şeklinde elde ederiz. (4.1.18) eşitliğinin her iki tarafının normunu alarak üçgen eşitsizliğinden faydalanarak ve integral içindeki s yerine x alırsak

$$\left\| T^*h \right\| \le \|h\| + 4\left\| \frac{1}{x}\int_0^x |h(s)|\,ds \right\|$$

olur. Hardy-Littlewood eşitsizliğinden

$$\left\| \frac{1}{x}\int_0^x |h(s)|\,ds \right\| = \left[\int_0^1 \frac{1}{x^2}\left(\int_0^x |h(s)|\,ds \right)^2 dx \right]^{1/2} < \left[\left(\frac{2}{2-1} \right)^2 \int_0^1 h^2(s)\,ds \right]^{1/2} \le 2\|h\|$$

olduğu hemen bulunur. O halde

$$\left\| T^*h \right\| \le 9\|h\|$$

elde edilir. Böylece T^* sınırlı bir operatördür. Dolayısıyla T ’de sınırlı bir operatördür. Ayrıca

$$T^*(x^2) = x^2 - \frac{4}{x^2}\int_0^x s.s^2 ds = x^2 - \frac{4}{x^2}\left[\left.\frac{s^4}{4}\right|_0^x\right] = 0$$

olduğundan T operatörünün görüntü cümlesi $L^2[0,1]$'de x^2 fonksiyonuna göre ortogonal alt uzaydır.

Şimdi T operatörünün birebir olduğunu gösterelim. Gerçekten, T operatörü sürekli olduğundan dolayı $(Tf)(x) = g(x),$ olacak şekilde bir $g \in C_0^\infty(0,1)$ fonksiyonu vardır. Şimdi $f(x)$ fonksiyonunu bulalım.

$$(Tf)(x) = g(x)$$

denkleminin x'e göre türevini alırsak

$$g(x) = f(x) - 4x\int_x^1 \frac{f(s)}{s^2} ds$$

$$g'(x) = f'(x) - 4\int_x^1 \frac{f(s)}{s^2} ds + 4\frac{f(x)}{x}$$

elde edilir. Son eşitliği x ile çarpıp tekrar türevini alırsak

$$xg'(x) = xf'(x) + 3f(x) + g(x)$$

$$g'(x) + xg''(x) = f'(x) + xf''(x) + 3f'(x) + g'(x)$$

$$xg''(x) = xf''(x) + 4f'(x)$$

olur. Son eşitliği x^3 ile çarpıp her iki tarafa $4x^3 g'(x)$ eklersek

$$x^4 g''(x) = x^4 f''(x) + 4x^3 f'(x)$$

$$4x^3 g'(x) + x^4 g''(x) = 4x^3 f'(x) + x^4 f''(x) + 4x^3 g'(x)$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafına da $12x^2 g(x)$ terimini ekleyip çıkararak ve 0'dan 'e integre edersek

$$4x^3 g'(x) + x^4 g''(x) = 4x^3 f'(x) + x^4 f''(x) + 12x^2 g(x) + 4x^3 g'(x) - 12x^2 g(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^4 g'(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(x^4 f'(x)\right) + \frac{d}{dx}\left(4x^3 g(x)\right) - 12x^2 g(x)$$

$$x^4 g'(x) = x^4 f'(x) + 4x^3 g(x) - 12\int_0^x t^2 g(t) dt$$

bulunur. Daha sonra elde edilen eşitliği x^4 ile bölüp tekrar integre edersek

$$f'(x) = g'(x) + \frac{12}{x^4}\int_0^x t^2 g(t)dt - \frac{4}{x}g(x)$$
$$= g'(x) - \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{x^3}\int_0^x t^2 g(t)dt\right)$$

ve

$$f(x) = g(x) - \frac{4}{x^3}\int_0^x t^2 g(t)dt$$

bulunur.

$$(Ag)(x) = g(x) - \frac{4}{x^3}\int_0^x t^2 g(t)dt$$

olsun. A operatörünün sürekliliği T^* operatörünün sürekliliğine benzer şekilde gösterilebilir.

$\forall f \in L^2[0,1]$ için $A(Tf) = f$ ve x^2'ye göre ortogonal alt uzaydaki her f için $T(Af) = f$ olduğunu gösterirsek T operatörünün birebir olduğunu göstermiş oluruz. Bunun için önce $A(Tf) = f$ olduğunu gösterelim.

$$A(Tf(x)) = f(x) - 4x\int_x^1 \frac{f(s)}{s^2}ds - \frac{4}{x^3}\int_0^x t^2\left(f(t) - 4t\int_t^1 \frac{f(s)}{s^2}ds\right)dt$$
$$= f(x) - 4x\int_x^1 \frac{f(s)}{s^2}ds - \frac{4}{x^3}\left[\int_0^x t^2 f(t)dt - \int_0^x 4t^3\int_t^1 \frac{f(s)}{s^2}dsdt\right]$$

Son integralde

$$4t^3dt = dv\,, \qquad \int_t^1 \frac{f(s)}{s^2}ds = u$$

olmak üzere kısmi integrasyonu uygularsak

$$A(Tf(x)) = f(x) - 4x\int_x^1 \frac{f(s)}{s^2}ds - \frac{4}{x^3}\left[\int_0^x t^2 f(t)dt - \left(t^4\int_t^1 \frac{f(s)}{s^2}ds\Big|_0^x + \int_0^x t^2 f(t)dt\right)\right]$$
$$= f(x) - 4x\int_x^1 \frac{f(s)}{s^2}ds - \frac{4}{x^3}\left[-x^4\int_x^1 \frac{f(s)}{s^2}ds\right] = f(x)$$

olur. Şimdi $T(Af) = f$ olduğunu gösterelim.

$$T(Af(x)) = f(x) - \frac{4}{x^3}\int_0^x t^2 f(t)dt - 4x\int_x^1 \frac{1}{s^2}\left(f(s) - \frac{4}{s^3}\int_0^s t^2 f(t)dt\right)ds$$
$$= f(x) - \frac{4}{x^3}\int_0^x t^2 f(t)dt - 4x\left[\int_x^1 \frac{f(s)}{s^2}ds - \int_x^1 \frac{4}{s^5}\int_0^s t^2 f(t)dtds\right]$$

Son integralde

$$\frac{4}{s^5}ds = dv, \qquad \int_0^s t^2 f(t)\,dt = u$$

ele alıp kısmi integrasyonu uygularsak

$$T\left(Af(x)\right) = f(x) - \frac{4}{x^3}\int_0^x t^2 f(t)dt - 4x\left[\int_x^1 \frac{f(s)}{s^2}ds - \left(-\frac{1}{s^4}\int_0^s t^2 f(t)dt\Big|_x^1 + \int_x^1 \frac{f(s)}{s^2}ds\right)\right]$$

$$= f(x) - \frac{4}{x^3}\int_0^x t^2 f(t)dt - 4x\left[\int_0^1 t^2 f(t)dt - \frac{1}{x^4}\int_0^x t^2 f(t)dt\right]$$

Burada $\int\limits_0^1 t^2 f(t)dt = 0$ olduğundan $T\left(Af(x)\right) = f(x)$ olur. Böylece T operatörünün birebir olduğu ispatlanmış olur.

Teorem 4.1.2 $q(x) \in L^2[0,1]$ olmak üzere

$$\mu_n(q) = (n+1)^2\pi^2 - 2 + \int_0^1 q(x)dx + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

İspat: (4.1.6)'dan

$$0 = \varphi(1,\mu_n(q),q) = u(1,\mu_n(q)) + \int_0^1 g\left(1,t,\mu_n(q)\right)q(t)\varphi(t,\mu_n(q),q)dt \qquad (4.1.19)$$

elde edilir. (4.1.8), (4.1.9) ve (4.1.11)'den

$$\varphi(x,\lambda,q) \le u(x,\lambda) + C\frac{x^2 e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|x}}{\left(1+\left|\sqrt{\lambda}\right|x\right)^2}\int\limits_0^1 \frac{t\left|q(t)\right|}{\left(1+\left|\sqrt{\lambda}\right|t\right)}dt$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\varphi(t,\mu_n(q),q) \le u(t,\mu_n(q)) + C\frac{t^2 e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\mu_n(q)}\right|t}}{\left(1+\left|\sqrt{\mu_n(q)}\right|t\right)^2}\int\limits_0^1 \frac{t\left|q(t)\right|}{1+\left|\sqrt{\mu_n(q)}\right|t}dt$$

$$\le u(t,\mu_n(q)) + C\frac{t^2}{\left(1+\left|\sqrt{\mu_n(q)}\right|t\right)^2}\int\limits_0^1 \frac{t\left|q(t)\right|}{1+\left|\sqrt{\mu_n(q)}\right|t}dt$$

olur. Bunu ve (4.1.11) eşitsizliğini kullanarak

$$\int_0^1 g\left(1,t,\mu_n(q)\right)q(t)\varphi(t,\mu_n(q),q)dt \le \int_0^1 g\left(1,t,\mu_n(q)\right)q(t)u(t,\mu_n(q))dt$$

$$+C\int_0^1 g\left(1,t,\mu_n(q)\right)q(t)\frac{t^2}{\left(1+\left|\sqrt{\mu_n(q)}\right|t\right)^2}\int\limits_0^1 \frac{s\left|q(s)\right|}{1+\left|\sqrt{\mu_n(q)}\right|s}dsdt$$

$$\leq \int_0^1 g\left(1,t,\mu_n(q)\right) q\left(t\right) u(t,\mu_n(q))dt$$

$$+C\int_0^1 \frac{1+\left|\sqrt{\mu_n(q)}\right|t}{t\left(1+\left|\sqrt{\mu_n(q)}\right|\right)^2} \frac{t^2 q\left(t\right)}{\left(1+\left|\sqrt{\mu_n(q)}\right|t\right)^2} \int_0^1 \frac{s\left|q\left(s\right)\right|}{1+\left|\sqrt{\mu_n(q)}\right|s} dsdt$$

$$\leq \int_0^1 g\left(1,t,\mu_n(q)\right) q\left(t\right) u(t,\mu_n(q))dt$$

$$+C\int_0^1 \frac{1}{\left(1+\left|\sqrt{\mu_n(q)}\right|\right)^2} \frac{tq\left(t\right)}{\left(1+\left|\sqrt{\mu_n(q)}\right|t\right)} \int_0^1 \frac{s\left|q\left(s\right)\right|}{1+\left|\sqrt{\mu_n(q)}\right|s} dsdt$$

$$\leq \int_0^1 g\left(1,t,\mu_n(q)\right) q\left(t\right) u(t,\mu_n(q))dt + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

elde edilir. O halde (4.1.19) eşitliğinden

$$0=\varphi(1,\mu_n(q),q)=u(1,\mu_n(q))+\int_0^1 g\left(1,t,\mu_n(q)\right) q\left(t\right) u(t,\mu_n(q))dt + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \qquad (4.1.20)$$

elde edilir.

$$g\left(1,t,\mu_n(q)\right)=v(1,\mu_n(q))u(t,\mu_n(q))-v(t,\mu_n(q))u(1,\mu_n(q))$$

olduğundan (4.1.20) bağıntısındaki integral

$$\begin{aligned}\int_0^1 g\left(1,t,\mu_n(q)\right) q\left(t\right) u(t,\mu_n(q))dt &= v(1,\mu_n(q))\int_0^1 u^2(t,\mu_n(q))q\left(t\right)dt \\ &\quad -u(1,\mu_n(q))\int_0^1 u(t,\mu_n(q))v(t,\mu_n(q))q\left(t\right)\end{aligned} \qquad (4.1.21)$$

şeklindedir. (4.1.15) bağıntısındaki

$$\int_0^1 \left(2\frac{\lambda^2}{9}u^2(x,\lambda)-1\right) f(x)dx = \int_0^1 \cos 2\sqrt{\lambda}x(Tf)(x)dx$$

eşitliği kullanırsak (4.1.21) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci integral

$$v(1,\mu_n(q))\int_0^1 u^2(t,\mu_n(q))q\left(t\right)dt =$$

$$=-\frac{\sqrt{\mu_n(q)}}{3}\left(\sin\sqrt{\mu_n(q)}+\frac{\cos\sqrt{\mu_n(q)}}{\sqrt{\mu_n(q)}}\right)\frac{9}{2\mu_n^2(q)}\left(\int_0^1 \cos\sqrt{\mu_n(q)}x\left(Tq\right)\left(x\right)dx+\int_0^1 q(x)dx\right)$$

$$=\frac{-3}{2}\mu_n^{-3/2}(q)\left(\sin\sqrt{\mu_n(q)}+\frac{\cos\sqrt{\mu_n(q)}}{\sqrt{\mu_n(q)}}\right)\left(\int_0^1 \cos\sqrt{\mu_n(q)}x\left(Tq\right)\left(x\right)dx+\int_0^1 q(x)dx\right)$$

şeklinde bulunur. Daha sonra (4.1.16) bağıntısındaki

$$\int_0^1 \sqrt{\lambda}u(x,\lambda)v(x,\lambda)f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin 2\sqrt{\lambda}x(Tf)(x)dx$$

eşitliğini kullanırsak (4.1.21) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci integral

$$u(1,\mu_n(q))\int_0^1 u(t,\mu_n(q))v(t,\mu_n(q))q(t)\,dt$$

$$=\frac{3}{\mu_n(q)}\left(\frac{\sin\sqrt{\mu_n(q)}}{\sqrt{\mu_n(q)}}-\cos\sqrt{\mu_n(q)}\right)\frac{1}{2\sqrt{\mu_n(q)}}\left(\int_0^1 \sin 2\sqrt{\mu_n(q)}t\,(Tq)(t)\,dt\right)$$

$$=\frac{3}{2}\mu_n^{-3/2}(q)\left(\frac{\sin\sqrt{\mu_n(q)}}{\sqrt{\mu_n(q)}}-\cos\sqrt{\mu_n(q)}\right)\left(\int_0^1 \sin 2\sqrt{\mu_n(q)}t\,(Tq)(t)\,dt\right)$$

şeklinde bulunur. Böylece (4.1.20) eşitliği

$$0=\varphi(1,\mu_n(q),q)=u(1,\mu_n(q))+\int_0^1 g\left(1,t,\mu_n(q)\right)q(t)u(t,\mu_n(q))dt+O\left(n^{-4}\right)$$

$$=u(1,\mu_n(q))+\int_0^1\left[v(1,\mu_n(q))u(t,\mu_n(q))-v(t,\mu_n(q))u(1,\mu_n(q))\right]q(t)u(t,\mu_n(q))dt+O\left(n^{-4}\right)$$

$$=u(1,\mu_n(q))+v(1,\mu_n(q))\int_0^1 u^2(t,\mu_n(q))q(t)\,dt-u(1,\mu_n(q))\int_0^1 u(t,\mu_n(q))v(t,\mu_n(q))q(t)$$
$$+O\left(n^{-4}\right)$$

$$=\frac{3}{\mu_n(q)}\left(\frac{\sin\sqrt{\mu_n(q)}}{\sqrt{\mu_n(q)}}-\cos\sqrt{\mu_n(q)}\right)-\frac{3}{2}\mu_n^{-3/2}(q)\left(\sin\sqrt{\mu_n(q)}+\frac{\cos\sqrt{\mu_n(q)}}{\sqrt{\mu_n(q)}}\right)$$

$$\times\left(\int_0^1\cos\sqrt{\mu_n(q)}t\,(Tq)(t)\,dt+\int_0^1 q(t)dt\right)-\frac{3}{2}\mu_n^{-3/2}(q)\left(\frac{\sin\sqrt{\mu_n(q)}}{\sqrt{\mu_n(q)}}-\cos\sqrt{\mu_n(q)}\right)$$

$$\times\left(\int_0^1\sin\sqrt{\mu_n(q)}t\,(Tq)(t)\,dt\right)$$

şeklinde olur. Bu eşitliği $\mu_n(q)/3$ ile çarparsak

$$\varphi(1,\mu_n(q),q)=\frac{\sin\sqrt{\mu_n(q)}}{\sqrt{\mu_n(q)}}-\cos\sqrt{\mu_n(q)}-\frac{1}{2\sqrt{\mu_n(q)}}\left(\sin\sqrt{\mu_n(q)}+\frac{\cos\sqrt{\mu_n(q)}}{\sqrt{\mu_n(q)}}\right)$$
$$\times\left(\int_0^1\cos\sqrt{\mu_n(q)}t\,(Tq)(t)\,dt+\int_0^1 q(t)dt\right)-\frac{1}{2\sqrt{\mu_n(q)}}\left(\frac{\sin\sqrt{\mu_n(q)}}{\sqrt{\mu_n(q)}}-\cos\sqrt{\mu_n(q)}\right)$$
$$\times\left(\int_0^1\sin\sqrt{\mu_n(q)}t\,(Tq)(t)\,dt\right)$$

olur. Son eşitlikte gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$\varphi(1,\mu_n(q),q)=\frac{\sin\sqrt{\mu_n(q)}}{\sqrt{\mu_n(q)}}\left(1-\frac{1}{2}\int_0^1 q(t)dt\right)-\cos\sqrt{\mu_n(q)}$$

$$-\frac{\sin\sqrt{\mu_n(q)}}{2\sqrt{\mu_n(q)}}\int_0^1\cos\sqrt{\mu_n(q)}t\left(Tq\right)\left(t\right)dt+\frac{\cos\sqrt{\mu_n(q)}}{2\mu_n(q)}\int_0^1\cos\sqrt{\mu_n(q)}t\left(Tq\right)\left(t\right)dt$$

$$+\frac{\cos\sqrt{\mu_n(q)}}{2\mu_n(q)}\int_0^1 q(t)dt-\frac{\sin\sqrt{\mu_n(q)}}{2\mu_n(q)}\int_0^1\sin\sqrt{\mu_n(q)}t\left(Tq\right)\left(t\right)dt$$

$$+\frac{\cos\sqrt{\mu_n(q)}}{2\sqrt{\mu_n(q)}}\int_0^1\sin\sqrt{\mu_n(q)}t\left(Tq\right)\left(t\right)dt$$

bulunur. Burada $\left(Tq\right)\left(t\right)\in L^2\left[0,1\right]$ dir.(Teorem 4.1.1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin 2\sqrt{\mu_n(q)}}{4\sqrt{\mu_n(q)}}=0$$

olduğundan

$$\int_0^1\cos\sqrt{\mu_n(q)}t\left(Tq\right)\left(t\right)dt\le\left(\int_0^1\cos^2\sqrt{\mu_n(q)}tdt\right)^{1/2}\left(\int_0^1\left(Tq\right)^2\left(t\right)dt\right)^{1/2}$$

$$\le C\left(\int_0^1\cos^2\sqrt{\mu_n(q)}tdt\right)^{1/2}$$

$$\le C\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sin 2\sqrt{\mu_n(q)}}{4\sqrt{\mu_n(q)}}}\le C$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\int_0^1\sin\sqrt{\mu_n(q)}t\left(Tq\right)\left(t\right)dt\le C\,,\ q(t)\in L^2\left[0,1\right]$$

olduğundan

$$0=-\cos\sqrt{\mu_n(q)}+\frac{\sin\sqrt{\mu_n(q)}}{\sqrt{\mu_n(q)}}\left(1-\frac{1}{2}\int_0^1 q(t)dt\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)\qquad(4.1.22)$$

elde edilir. Böylece (4.1.14) formülünü (4.1.22) da yerine yazarsak

$$0=-\cos\left[(n+\frac{1}{2})\pi+\varepsilon_n\right]+\frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})\pi+\varepsilon_n\right]}{\left[(n+\frac{1}{2})\pi+\varepsilon_n\right]}\left(1-\frac{1}{2}\int_0^1 q(t)dt\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)\qquad(4.1.23)$$

elde edilir. Burada

$$\cos\left[(n+\frac{1}{2})\pi+\varepsilon_n\right]=\cos\left[(n+\frac{1}{2})\pi\right]\cos\varepsilon_n-\sin\left[(n+\frac{1}{2})\pi\right]\sin\varepsilon_n$$
$$=-\sin\left(\pi\mathrm{n}\right)\cos\varepsilon_n-\cos\left(\pi\mathrm{n}\right)\sin\varepsilon_n$$
$$=-\left(-1\right)^n\sin\varepsilon_n$$
$$\sin\left[(n+\frac{1}{2})\pi+\varepsilon_n\right]=\sin\left[(n+\frac{1}{2})\pi\right]\cos\varepsilon_n+\sin\varepsilon_n\cos\left[(n+\frac{1}{2})\pi+\varepsilon_n\right]$$
$$=\cos\left(\pi\mathrm{n}\right)\cos\varepsilon_n\text{-}\sin\left(\pi\mathrm{n}\right)\sin\varepsilon_n$$
$$=\left(-1\right)^n\cos\varepsilon_n$$

olduğu dikkate alınırsa (4.1.23)

$$\tan\varepsilon_n=\frac{-1}{\left[(n+\frac{1}{2})\pi+\varepsilon_n\right]}\left(1-\frac{1}{2}\int_0^1 q(t)dt\right)+O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (4.1.24)$$

şeklinde olur. (4.1.24) bağıntısını $(n+\frac{1}{2})\pi+\varepsilon_n$ ile çarparsak

$$(n+\frac{1}{2})\pi\tan\varepsilon_n+\varepsilon_n\tan\varepsilon_n=-\left(1-\frac{1}{2}\int_0^1 q(t)dt\right)+O\left(1\right)$$

elde edilir. Burada $\varepsilon_n\tan\varepsilon_n$ sonlu bir değer olduğu için

$$\varepsilon_n=-\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\left(1-\frac{1}{2}\int_0^1 q(x)dx\right)+O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n\geq N$$

olur. Bulduğumuz bu değeri (4.1.14) denkleminde yerine yazarsak

$$\mu_n(q)=\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi-\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\left(1-\frac{1}{2}\int_0^1 q(x)dx\right)\right]^2+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

veya

$$\mu_n(q)=\left(n+1\right)^2\pi^2-2+\int_0^1 q(x)dx+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

olur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

4.2 Singüler Sturm-Liouville Operatörünün Özdeğerlerinin İncelenmesi

Bu bölümde yapılan çalışmalar Carlson [53] tarafından yapılmıştır.

$$-y''+\frac{m(m+1)}{x^2}y+p(x)y=\lambda y, \quad \mathrm{m}\geq 0 \tag{4.2.1}$$

denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin $(\varphi(.,\lambda,q),\psi(.,\lambda,q))$ şeklinde iki lineer bağımsız çözümü vardır.

Teorem 4.2.1 (4.2.1) denkleminin lineer bağımsız iki çözümü

$$\varphi(x)=c_1x^{m+1}+c_2x^{-m}-\frac{1}{2m+1}\int_x^1(t^{-m}x^{m+1}-x^{-m}t^{m+1}\left(p(t)-\lambda\right)\varphi(t)dt \tag{4.2.2}$$

$$\psi(x)=x^{m+1}+\frac{1}{2m+1}\int_0^x(t^{-m}x^{m+1}-x^{-m}t^{m+1})\left(p(t)-\lambda\right)\psi(t)dt \tag{4.2.3}$$

şeklindedir [53].

Bu denklemlerin çözümlerine ardışık yaklaşımlar yöntemini uygulayalım. Öncelikle $\psi(x)$ için

$$y_0(x)=x^{m+1}$$
$$y_{n+1}(x)=y_0(x)+\frac{1}{2m+1}\int_0^x\left(t^{-m}x^{m+1}-x^{-m}t^{m+1}\right)\left(p(t)-\lambda\right)y_n(t)\,dt$$

alalım. Not edelim ki ispat süresince $\psi(x)$ çözümü için ardışık yaklaşımlar yöntemi uygulanıp recurrence formülleri bulunur. Böylece aşağıdaki lemma söz konusudur.

Lemma 4.2.1. $y_n(x)$ dizisi (4.2.1) denklemi ve (4.2.3) çözümünü sağlayan $\psi(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Ayrıca

$$\lim_{x\downarrow 0}x^{-m-1}\psi(x)=1$$

ve $\mathbb{C}\times L^2[0,1]$ kümesinden $C[0,1]$ kümesine tanımlı $(\lambda,p)\to\psi(x,\lambda,p)$ dönüşümü analitiktir.

İspat :

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leq\left(\frac{\|p-\lambda\|_2}{2m+1}\right)^n x^{m+1}\left[\frac{x^{3n}}{\prod_{k=1}^n 3k}\right]^{1/2} \tag{4.2.4}$$

olduğunu tümevarımla gösterelim. $k=1$ için

$$\left|y_1(x)-y_0(x)\right|=\left|\frac{1}{2m+1}\int_0^x\left(t^{-m}x^{m+1}-x^{-m}t^{m+1}\right)\left(p(t)-\lambda\right)y_0(t)\,dt\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2m+1}\int_0^x\left(t^{-m}x^{m+1}-x^{-m}t^{m+1}\right)\left(p(t)-\lambda\right)t^{m+1}dt\right|$$

$$=\frac{x^{m+1}}{2m+1}\left|\int_0^x\left(t-t\left(\frac{t}{x}\right)^{2m+1}\right)\left(p(t)-\lambda\right)dt\right|$$

elde edilir. Burada

$$\left|t-t\left(\frac{t}{x}\right)^{2m+1}\right|\le t\left|1-\left(\frac{t}{x}\right)^{2m+1}\right|\le t\ ,\ 0\le t\le x$$

olduğundan

$$\left|y_1(x)-y_0(x)\right|\le\frac{x^{m+1}}{2m+1}\int_0^x t\left|p(t)-\lambda\right|dt$$

elde edilir. Cauchy-Bunjakowski eşitsizliğinden

$$\left|y_1(x)-y_0(x)\right|\le\frac{x^{m+1}}{2m+1}\left[\int_0^x t^2dt\right]^{1/2}\left[\int_0^x\left|p(t)-\lambda\right|^2dt\right]^{1/2}$$

$$\le\frac{x^{m+1}}{2m+1}\left(\frac{x^3}{3}\right)^{1/2}\left\|p-\lambda\right\|_2$$

olur. Şimdi $k=n$ için doğru olduğunu kabul edelim ve $k=n+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\left|y_{n+1}(x)-y_n(x)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2m+1}\int_0^x\left(t^{-m}x^{m+1}-x^{-m}t^{m+1}\right)\left(p(t)-\lambda\right)\left(y_n(t)-y_{n-1}(t)\right)dt\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2m+1}\int_0^x\left(t^{-m}x^{m+1}-x^{-m}t^{m+1}\right)\left(p(t)-\lambda\right)\left(\frac{\left\|p-\lambda\right\|_2}{2m+1}\right)^n t^{m+1}\left[\frac{t^{3n}}{\prod_{k=1}^n 3k}\right]^{1/2}dt\right|$$

$$\le\left(\frac{1}{2m+1}\right)^{n+1}x^{m+1}\int_0^x t\left|p(t)-\lambda\right|\left\|p-\lambda\right\|_2^n\left[\frac{t^{3n}}{\prod_{k=1}^n 3k}\right]^{1/2}dt$$

elde edilir. Cauchy-Bunjakowski eşitsizliğinden

$$\left|y_{n+1}(x)-y_n(x)\right| \le \left(\frac{\|p-\lambda\|_2}{2m+1}\right)^{n+1} x^{m+1}\int_0^x \left[\frac{t^{3n+2}}{\prod_{k=1}^{n} 3k}\right]^{1/2} dt$$

$$\le \left(\frac{\|p-\lambda\|_2}{2m+1}\right)^{n+1} x^{m+1}\left[\frac{x^{3(n+1)}}{\prod_{k=1}^{n} 3k}\right]^{1/2}$$

elde edilir. Böylece (4.2.4) eşitsizliği ispatlanmış olur. O halde $\psi(x)$ çözüm fonksiyonu terim terim türevlenebilirdir. Dolayısıyla türevini alırsak

$$\psi'(x) = (m+1)x^m + \frac{1}{2m+1}\int_0^x ((m+1)t^{-m}x^m + mx^{-m-1}t^{m+1})\left(p(t)-\lambda\right)\psi(t)dt$$

elde edilir. Buradan

$$\lim_{x\downarrow 0} x^{-m}\psi'(x) = \lim_{x\downarrow 0}\left\{(m+1) + \frac{1}{2m+1}\int_0^x ((m+1)t^{-m} + mx^{-2m-1}t^{m+1})\left(p(t)-\lambda\right)\psi(t)dt\right\}$$

$$= m+1$$

bulunur. Böylece lemma ispatlanmış olur.

Şimdi $\varphi(x)$ için ardışık yaklaşımlar yöntemini uygulayalım.

$$y_0(x) = c_1x^{m+1} + c_2x^{-m}$$

$$y_{n+1}(x) = y_0(x) - \frac{1}{2m+1}\int_x^1 \left(t^{-m}x^{m+1} - x^{-m}t^{m+1}\right)\left(p(t)-\lambda\right)y_n(t)\,dt$$

alalım. Böylece aşağıdaki lemma söz konusudur.

Lemma 4.2.2 $x\in(0,1]$ için $x^m y_n(x)$ dizisi (4.2.1) denklemi ve (4.2.2) çözümünü sağlayan $x^m\varphi(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Üstelik $\lim_{x\downarrow 0} x^m\varphi(x)$ vardır ve $\mathbb{C}^3\times L^2[0,1]$ kümesinden $C[0,1]$ kümesine tanımlı $(C_1,C_2,\lambda,p)\to x^m\varphi(x,C_1,C_2,\lambda,p)$ dönüşümü analitiktir.

İspat :

$$\left|y_n(x)-y_{n-1}(x)\right| \le \left[|C_1|+|C_2|\right]x^{-m}\left(\frac{\|p-\lambda\|_2}{2m+1}\right)^n\left[\frac{(1-x)^n}{n!}\right]^{1/2} \qquad (4.2.5)$$

olduğunu tümevarımla gösterelim. Burada $t\ge x$ için

$$\left|t^{-m}x^{m+1} - x^{-m}t^{m+1}\right| \le x^{-m}t^{m+1}$$

olduğu dikkate alınırsa $k=1$ için;

$$\left|y_1(x)-y_0(x)\right| = \left|\frac{1}{2m+1}\int_x^1 \left(t^{-m}x^{m+1}-x^{-m}t^{m+1}\right)\left(p(t)-\lambda\right)y_0(t)\,dt\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2m+1}\int_x^1 \left(t^{-m}x^{m+1}-x^{-m}t^{m+1}\right)\left(p(t)-\lambda\right)\left(C_1t^{m+1}+C_2t^{-m}\right)dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{2m+1}\int_x^1 x^{-m}t^{m+1}\left|p(t)-\lambda\right|\left|C_1t^{m+1}+C_2t^{-m}\right|dt$$

$$= \frac{x^{-m}}{2m+1}\int_x^1 \left|p(t)-\lambda\right|\left|C_1t^{2m+2}+C_2t\right|dt$$

olur. Üçgen eşitsizliğinden ve $t \leq 1$ olduğundan

$$\left|y_1(x)-y_0(x)\right| \leq \frac{x^{-m}}{2m+1}\int_x^1 \left|p(t)-\lambda\right|\left[\left|C_1\right|+\left|C_2\right|\right]dt$$

bulunur ve Cauchy-Bunjakowski eşitsizliğinden

$$\left|y_1(x)-y_0(x)\right| \leq \frac{x^{-m}}{2m+1}\left[\left|C_1\right|+\left|C_2\right|\right]\left(\int_x^1 \left|p(t)-\lambda\right|^2 dt\right)^{1/2}\left(\int_x^1 dt\right)^{1/2}$$

$$= \frac{x^{-m}}{2m+1}\left[\left|C_1\right|+\left|C_2\right|\right]\left\|p-\lambda\right\|_2\left[1-x\right]^{1/2}$$

elde edilir.

Şimdi (4.2.5) eşitsizliğinin $k=n$ için doğru olduğunu kabul edelim ve $k=n+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\left|y_{n+1}(x)-y_n(x)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2m+1}\int_x^1 \left(t^{-m}x^{m+1}-x^{-m}t^{m+1}\right)\left(p(t)-\lambda\right)\left(y_n(t)-y_{n-1}(t)\right)dt\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2m+1}\int_x^1 \left(t^{-m}x^{m+1}-x^{-m}t^{m+1}\right)\left(p(t)-\lambda\right)\left[\left|C_1\right|+\left|C_2\right|\right]t^{-m}\left(\frac{\left\|p-\lambda\right\|_2}{2m+1}\right)^n\left[\frac{(1-t)^n}{n!}\right]^{1/2}dt\right|$$

$$\leq \left(\frac{1}{2m+1}\right)^{n+1}\left[\left|C_1\right|+\left|C_2\right|\right]\left\|p-\lambda\right\|_2^n\int_x^1 x^{-m}t^{m+1}t^{-m}\left|p(t)-\lambda\right|\left[\frac{(1-t)^n}{n!}\right]^{1/2}dt$$

$$\leq \left(\frac{1}{2m+1}\right)^{n+1}x^{-m}\left[\left|C_1\right|+\left|C_2\right|\right]\left\|p-\lambda\right\|_2^n\int_x^1 \left|p(t)-\lambda\right|\left[\frac{(1-t)^n}{n!}\right]^{1/2}dt$$

elde edilir. Cauchy-Bunjakowski eşitsizliğinden

$$\left|y_{n+1}(x)-y_n(x)\right|\le\left(\frac{1}{2m+1}\right)^{n+1}x^{-m}\left[\left|C_1\right|+\left|C_2\right|\right]\left\|p-\lambda\right\|_2^n\left(\int_x^1\left|p(t)-\lambda\right|^2dt\right)^{1/2}\left(\int_x^1\frac{(1-t)^n}{n!}dt\right)^{1/2}$$

$$\le\left(\frac{\left\|p-\lambda\right\|_2}{2m+1}\right)^{n+1}x^{-m}\left[\left|C_1\right|+\left|C_2\right|\right]\left[\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right]^{1/2}$$

bulunur. Böylece (4.2.5) eşitsizliği ispatlanmış olur. O halde $\varphi(x)$ çözüm fonksiyonunu terim terim türevlenebilirdir. Dolayısıyla $\varphi(x)$ 'in türevini alırsak

$$\varphi'(x)=(m+1)c_1x^m-mc_2x^{-m-1}-\frac{1}{2m+1}\int_x^1(\left((m+1)t^{-m}x^m+mx^{-m-1}t^{m+1}\right)\left(p(t)-\lambda\right)\varphi(t)dt$$

elde edilir. Böylece lemma ispatlanmış olur.

Lemma 4.2.3 (4.2.1) denkleminin lineer bağımsız iki çözümü $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ ise

$$\lim_{x\downarrow 0}x^m\varphi(x)\neq 0\,.$$

İspat: $y_1(x)$ ve $y_2(x)$, (4.2.1) denkleminin $\varphi(x)$ formundaki çözümleri olsun. O halde c_1,c_2 ve d_1,d_2 sabitler olmak üzere

$$y_1(x)=c_1x^{m+1}+c_2x^{-m}-\frac{1}{2m+1}\int_x^1(t^{-m}x^{m+1}-x^{-m}t^{m+1}\left(p(t)-\lambda\right)y_1(t)dt$$

$$y_2(x)=d_1x^{m+1}+d_2x^{-m}-\frac{1}{2m+1}\int_x^1(t^{-m}x^{m+1}-x^{-m}t^{m+1}\left(p(t)-\lambda\right)y_2(t)dt$$

şeklindedir. Bu sebeple

$$W\left(y_1,y_2\right)=(2m+1)\left(c_2d_1-c_1d_2\right)$$

olur. Şimdi c_1 ve c_2 'yi öyle seçelim ki

$$y_1(x)=\psi(x)$$

ve $y_2(x)$ lineer bağımsız bir çözüm olsun. Lemma 4.2.1'den

$$\lim_{x\downarrow 0}x^{-m-1}y_1(x)=1 \text{ ve } \lim_{x\downarrow 0}x^{-m}y_1'(x)=m+1$$

olduğunu biliyoruz. O halde

$$(2m+1)\left(c_2d_1-c_1d_2\right)=\lim_{x\downarrow 0}x^{m+1}y_2'(x)-(m+1)x^my_2(x)$$

elde edilir. Her iki limit var ve her ikisi birden sıfır olmadığından genelliği bozmaksızın

$$\lim_{x\downarrow 0} x^{m+1} y_2'(x) = C > 0$$

olsun. Bu durumda

$$\frac{C}{2} \le x^{m+1} y_2'(x) \le 2C$$

olur. Böylece en az bir x_0 pozitif sayısı için $x < x_0$ olacak şekilde

$$\frac{C}{2} x^{-m-1} \le y_2'(x) \le 2Cx^{-m-1}$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntıyı x 'den x_0 'a integre edersek

$$\frac{C}{2m}\left[x^{-m} - x_0^{-m}\right] \le y_2(x_0) - y_2(x) \le \frac{2C}{m}\left[x^{-m} - x_0^{-m}\right]$$

elde edilir. Daha sonra eşitsizliği x^m ile çarpıp ve $x \to 0$ için limit alırsak

$$\frac{C}{2m} \le -\lim_{x\downarrow 0} x^m y_2(x) \le \frac{2C}{m}$$

elde edilir. Böylece $m = 0$ için ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.2 $0 \le x_1 < x_2 \le 1$ ve $m \ge 0$ olsun. (4.2.1) denkleminin

$$y(x_1) = y'(x_2) + by(x_2) = 0$$

şartlarını sağlayan aşikar çözüm y olmak üzere

$$\lambda \ge -\left[|b| + 2\left(\int_{x_1}^{x_2} p^2(x)dx\right)^{1/2}\right]^2 \tag{4.2.6}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Denklemi y ile çarpıp x_1 'den x_2 'ye integre edersek

$$\int_{x_1}^{x_2}\left\{-y''y + p(x)y^2 - \lambda y^2 + \frac{m(m+1)}{x^2}y^2\right\}dx = 0 \tag{4.2.7}$$

elde edilir.

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{m(m+1)}{x^2} y^2 dx \ge 0$$

olduğundan

$$\int_{x_1}^{x_2}\left\{-y''y + +p(x)y^2 - \lambda y^2\right\}dx < 0 \tag{4.2.8}$$

şeklindedir. (4.2.8) integralinin ilk terimine kısmi integrasyon uygularsak

$$\int_{x_1}^{x_2} -y''y\,dx = -y'(x_2)y(x_2) + y'(x_1)y(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} (y')^2\,dx$$
$$= by^2(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} (y')^2\,dx$$

elde edilir. Bunu (4.2.8) eşitsizliğinde yerine koyarsak

$$by^2(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} \left[(y')^2 + p(x)y^2 - \lambda y^2 \right] dx \le 0 \tag{4.2.9}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\int_{x_1}^{x_2} 2y(x)y'(x) \int_{x_1}^{x} p(t)\,dt\,dx$$

integraline

$$2y(x))\int_{x_1}^{x} p(t)\,dt = u, \quad \left[y'(x)\int_{x_1}^{x} p(t)\,dt + y(x)p(x) \right] dx = du$$
$$2y'(x)dx = dv, \qquad 2y(x) = v$$

olmak üzere kısmi integrasyon uygularsak

$$\int_{x_1}^{x_2} 2y(x)y'(x)\int_{x_1}^{x} p(t)\,dt\,dx = \left(2y^2(x)\int_{x_1}^{x} p(t)\,dt \right)_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} 2y(x)y'(x)\int_{x_1}^{x} p(t)\,dt\,dx - \int_{x_1}^{x_2} 2y^2(x)p(x)\,dx$$

$$= y^2(x_2)\int_{x_1}^{x_2} p(t)\,dt - \int_{x_1}^{x_2} y^2(x)p(x)\,dx$$

elde edilir. Buradan

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} p(x)y^2(x)\,dx \right| = \left| y^2(x_2)\int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} 2y(x)y'(x)\int_{x_1}^{x} p(t)\,dt\,dx \right| \tag{4.2.10}$$

olur. Şimdi

$$y^2(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} 2y(x)y'(x)\,dx \tag{4.2.11}$$

olduğunu gösterelim. Bunun için kısmi integrasyon uygulayalım.

$$2y(x) = u \quad y'(x)dx = dv$$

alırsak ve $y(x_1) = 0$ olduğundan

$$\int_{x_1}^{x_2} 2y(x)y'(x)\,dx = \left(2y^2(x) \right)_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} 2y(x)y'(x)\,dx = 2y^2(x_2) - \int_{x_1}^{x_2} 2y(x)y'(x)\,dx$$

(4.2.11) eşitliği elde edilir. (4.2.10) eşitliğinin iki tarafına $\left|by^2(x_2)\right|$ ekleyip üçgen eşitsizliğini kullanırsak

$$\left|by^2(x_2)\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2} p(x)y^2(x)dx\right| \le |b|\, y^2(x_2)+\left|y^2(x_2)\int_{x_1}^{x_2} p(x)dx\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2} 2y(x)y'(x)\int_{x_1}^{x} p(t)dtdx\right|$$

elde edilir. (4.2.11)'dan ve mutlak değeri integral içine alırsak

$$\left|by^2(x_2)\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2} p(x)y^2(x)dx\right| \le |b|\int_{x_1}^{x_2} 2yy'dx+\int_{x_1}^{x_2}|p|\,dx\int_{x_1}^{x_2} 2yy'dx+\int_{x_1}^{x_2}|2yy'|\int_{x_1}^{x}|p(t)|\,dtdx$$

elde edilir. Eşitsizliğin son terimindeki integralde x yerine x_2 alırsak eşitsizliğin sağ tarafı daha büyük olur:

$$\left|by^2(x_2)\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2} p(x)y^2(x)dx\right| \le |b|\int_{x_1}^{x_2} 2yy'dx+\int_{x_1}^{x_2}|p|\,dx\int_{x_1}^{x_2} 2yy'dx+\int_{x_1}^{x_2} 2yy'\int_{x_1}^{x_2}|p(t)|\,dtdx$$

$$\le \left[|b|+2\int_{x_1}^{x_2}|p|\,dx\right]\int_{x_1}^{x_2} 2yy'dx.$$

$\int_{x_1}^{x_2} 2yy'dx$ terimine Cauchy-Bunjakowski eşitsizliğini uygularsak

$$\left|by^2(x_2)\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2} p(x)y^2(x)dx\right| \le \left[|b|+2\int_{x_1}^{x_2}|p|\,dx\right]2\left[\int_{x_1}^{x_2} y^2dx\right]^{1/2}\left[\int_{x_1}^{x_2}(y')^2dx\right]^{1/2}$$

bulunur. Herhangi bir $\varepsilon>0$ için, $2A^{1/2}B^{1/2}\le \varepsilon A+\frac{1}{\varepsilon}B$ eşitsizliğinden

$$\left|by^2(x_2)\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2} p(x)y^2(x)dx\right| \le \left[|b|+2\int_{x_1}^{x_2}|p|\,dx\right]\left\{\varepsilon\left[\int_{x_1}^{x_2} y^2dx\right]+1/\varepsilon\left[\int_{x_1}^{x_2}(y')^2dx\right]\right\}$$

elde edilir. Herhangi bir $\varepsilon>\left[|b|+2\int_{x_1}^{x_2}|p|\,dx\right]$ için

$$by^2(x_2)+\int_{x_1}^{x_2}\left[(y')^2+py^2-\lambda y^2\right]dx$$

$$\ge \int_{x_1}^{x_2}\left[(y')^2-\lambda y^2\right]dx-|b|\,y(x_2)^2-\left|\int_{x_1}^{x_2} py^2dx\right|$$

$$\geq \int_{x_1}^{x_2}\left[(y')^2-\lambda y^2\right]dx-\left[|b|+2\int_{x_1}^{x_2}|p|\,dx\right]\left\{\varepsilon\left[\int_{x_1}^{x_2}y^2dx\right]+1/\varepsilon\left[\int_{x_1}^{x_2}(y')^2\,dx\right]\right\}$$

$$=\left\{1-\frac{\left[|b|+2\int_{x_1}^{x_2}|p|\,dx\right]}{\varepsilon}\right\}\int_{x_1}^{x_2}(y')^2\,dx+\left\{-\lambda-\varepsilon\left[|b|+2\int_{x_1}^{x_2}|p|\,dx\right]\right\}\int_{x_1}^{x_2}y^2dx$$

$$=C(\varepsilon)+\left\{-\lambda-\varepsilon\left[|b|+2\int_{x_1}^{x_2}|p|\,dx\right]\right\}\int_{x_1}^{x_2}y^2dx$$

olur. Burada $C(\varepsilon)>0$ 'dır.

$$-\lambda-\varepsilon\left[|b|+2\int_{x_1}^{x_2}|p|\,dx\right]>0$$

olsun. Bu durumda

$$\lambda<-\varepsilon\left[|b|+2\int_{x_1}^{x_2}|p|\,dx\right]<-\left[|b|+2\int_{x_1}^{x_2}|p|\,dx\right]^2$$

bulunur. Böylece

$$\lambda<-\left[|b|+2\int_{x_1}^{x_2}|p|\,dx\right]^2 \quad \text{ve} \quad \varepsilon>\left[|b|+2\int_{x_1}^{x_2}|p|\,dx\right]$$

için

$$by^2(x_2)+\int_{x_1}^{x_2}\left[(y')^2+p(x)y^2-\lambda y^2\right]dx>0$$

olacak şekilde

$$y(x_1)=y'(x_2)+by(x_2)=0$$

şartını sağlayan hiçbir diferansiyel denklem yoktur. O halde

$$\lambda\geq-\left[|b|+2\int_{x_1}^{x_2}|p|\,dx\right]^2 \quad \text{ve} \quad \int_{x_1}^{x_2}|p|\,dx\leq\left\{\int_{x_1}^{x_2}|p|^2\,dx\right\}^{1/2}$$

olduğundan (4.2.6) eşitsizliği elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.2.3 $0<x_1<x_2\leq 1$ ve $m\geq 0$ olsun. $r(x)\in L^2[0,1]$ olmak üzere $y'(x_1)=y'(x_2)=0$ şartlarını ve $-y''+\dfrac{m(m+1)}{x^2}y+r(x)y=0$ denklemini sağlayan aşikar çözüm y olmak üzere

$$\frac{m(m+1)}{x_2^2}\leq 4\left[\int_{x_1}^{x_2}|r|dx\right]^2+\left[1/(x_2-x_1)\right]\int_{x_1}^{x_2}|r|dx$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (4.2.10) bağıntısından

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} r(x)y^2(x)dx\right| = \left|y^2(x_2)\int_{x_1}^{x_2} r(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} 2y(x)y'(x)\int_{x_1}^{x} r(t)dtdx\right| \tag{4.2.12}$$

yazabiliriz. $y_a = \left[1/\left(x_2 - x_1\right)\right]\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$ olsun. y fonksiyonu $\left[x_1, x_2\right]$ aralığında sürekli olduğundan ve ortalama değer teoreminden $y_a = y^2\left(x_3\right)$ olacak şekilde bir $x_3 \in \left[x_1, x_2\right]$ vardır. $\int_{x_3}^{x_2} 2yy'dx$ integraline kısmi integrasyon uygularsak

$$y^2(x_2) = y^2(x_3) + \int_{x_3}^{x_2} 2yy'dx = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx + \int_{x_3}^{x_2} 2yy'dx$$

elde edilir. Bu ifadeyi (4.2.12) bağıntısında yerine yazarsak

$$\int_{x_1}^{x_2} ry^2 dx = \left\{\frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx + \int_{x_3}^{x_2} 2yy'dx\right\}\int_{x_1}^{x_2} rdx - \int_{x_1}^{x_2} 2yy'\int_{x_1}^{x} r(t)dtdx$$

olur. Bu eşitliğin mutlak değerini alıp üçgen eşitsizliğini kullanırsak

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} ry^2 dx\right| \le \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx\int_{x_1}^{x_2} |r|dx + \left|\int_{x_3}^{x_2} 2yy'dx\int_{x_1}^{x_2} rdx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} 2yy'\int_{x_1}^{x} r(t)dtdx\right|$$

$$\le \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx\int_{x_1}^{x_2} |r|dx + 2\int_{x_1}^{x_2} |2yy'|dx\int_{x_1}^{x_2} |r|dx$$

$$\le \left[\int_{x_1}^{x_2} |r|dx\right]\left\{\frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx + 2\int_{x_1}^{x_2} |2yy'|dx\right\}$$

Burada $|2yy'| \le \varepsilon y^2 + \left(1/\varepsilon\right)\left(y'\right)^2$ eşitsizliğini kullanırsak

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} ry^2 dx\right| \le \left[\int_{x_1}^{x_2} |r|dx\right]\left\{\frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx + 2\left[\varepsilon\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx + \left(1/\varepsilon\right)\int_{x_1}^{x_2}\left(y'\right)^2 dx\right]\right\}$$

elde edilir.

$$\int_{x_1}^{x_2} -y''ydx = -y'(x_2)y(x_2) + y'(x_1)y(x_1) + \int_{x_1}^{x_2}\left(y'\right)^2 dx = \int_{x_1}^{x_2}\left(y'\right)^2 dx$$

ve

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{m(m+1)}{x^2} y^2 dx \ge \int_{x_1}^{x_2} \frac{m(m+1)}{x_2^2} y^2 dx$$

olduğu hemen bulunur ve herhangi bir

$$\varepsilon > 2\left[\int_{x_1}^{x_2} |r|\, dx\right]$$

için

$$\int_{x_1}^{x_2}\left\{-y''y + ry^2 + \frac{m(m+1)}{x^2}y^2\right\}dx = \int_{x_1}^{x_2}(y')^2\,dx + \int_{x_1}^{x_2} ry^2dx + \int_{x_1}^{x_2}\frac{m(m+1)}{x^2}y^2dx$$

$$\geq \int_{x_1}^{x_2}(y')^2\,dx - \left[\int_{x_1}^{x_2}|r|\,dx\right]\left\{\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}y^2dx + 2\left[\varepsilon\int_{x_1}^{x_2}y^2dx + (1/\varepsilon)\int_{x_1}^{x_2}(y')^2\,dx\right]\right\}$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\frac{m(m+1)}{x_2^2}y^2dx$$

$$=\left(1-\frac{2}{\varepsilon}\left[\int_{x_1}^{x_2}|r|\,dx\right]\right)\int_{x_1}^{x_2}(y')^2\,dx + \left\{\frac{m(m+1)}{x_2^2} - \left[\int_{x_1}^{x_2}|r|\,dx\right]\left(\frac{1}{x_2-x_1}+2\varepsilon\right)\right\}\int_{x_1}^{x_2}y^2dx$$

$$=C(\varepsilon) + \left\{\frac{m(m+1)}{x_2^2} - \left[\int_{x_1}^{x_2}|r|\,dx\right]\left(\frac{1}{x_2-x_1}+2\varepsilon\right)\right\}\int_{x_1}^{x_2}y^2dx$$

olmak üzere bir $C(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

$$0 < \frac{m(m+1)}{x_2^2} - \left[\int_{x_1}^{x_2}|r|\,dx\right]\left(\frac{1}{x_2-x_1}+2\varepsilon\right)$$

olsun. Bu durumda

$$\frac{m(m+1)}{x_2^2} > 2\varepsilon\int_{x_1}^{x_2}|r|\,dx + \frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}|r|\,dx$$

$$> 4\left[\int_{x_1}^{x_2}|r|\,dx\right]^2 + \frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}|r|\,dx$$

olur. Böylece

$$\int_{x_1}^{x_2}\left\{-y''y + ry^2 + \frac{m(m+1)}{x^2}y^2\right\}dx > 0$$

olur ki bu da kabulümüzle çelişir. O halde

$$\frac{m(m+1)}{x_2^2} \leq 4\left[\int_{x_1}^{x_2}|r|dx\right]^2 + \left[1/(x_2-x_1)\right]\int_{x_1}^{x_2}|r|dx$$

olur. Bununla teorem ispatlanmış olur.

5. COULOMB POTANSİYELİNE SAHİP STRUM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ

5.1 Özdeğerler İçin Asimptotik Formüllerinin Bulunması

Lemma 5.1.1 $a, b \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$-y'' = \lambda y - f(x), \quad 0 \le x \le 1 \tag{5.1.1}$$

denkleminin $y(0) = a, \quad y'(0) = b$ şartlarını sağlayan tek çözümü

$$y(x) = a\cos\sqrt{\lambda}x + b\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^x \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} f(t)dt \tag{5.1.2}$$

şeklindedir [14].

İspat: Önce (5.1.1) denkleminin çözümünün (5.1.2) olduğunu gösterelim.

$$y_f(x) = \int_0^x \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} f(t)dt$$

integralini göz önüne alalım. Sinüs fonksiyonu için toplam-fark formülünden

$$y_f(x) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \cos\sqrt{\lambda}t\, f(t)dt - \cos\sqrt{\lambda}x \int_0^x \frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} f(t)dt$$

elde edilir. $\cos\sqrt{\lambda}tf(t)$ ve $\sin\sqrt{\lambda}tf(t)$ integrallenebilir olduğundan y_f süreklidir. Böylece

$$y_f'(x) = \cos\sqrt{\lambda}x \int_0^x \cos\sqrt{\lambda}t\, f(t)dt + \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x \int_0^x \frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} f(t)dt \tag{5.1.3}$$

(5.1.3) ün sağ tarafı sürekli olduğundan her yerde süreklidir. Tekrar türevini alırsak y_f fonksiyonunun

$$-y'' = \lambda y - f(x), \quad y_f(0) = 0, \quad y_f'(0) = 0$$

probleminin bir özel çözümü olduğu görülür. $\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}$ ve $\cos\sqrt{\lambda}x$ homojen kısmının bir çözümü olduğundan (5.1.2) çözümü elde edilir.

Teorem 5.1.1 $q(x) \in L^2[0,1]$ olmak üzere

$$-y'' + \frac{1}{x}y + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0,1) \quad ve \quad \lambda \in C$$

denkleminin $\varphi(0,\lambda,q) = 0, \quad \varphi'(0,\lambda,q) = 1$ şartlarını sağlayan çözümü

$$\varphi(x,\lambda,q)=\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}+\int_0^x\frac{\sin\sqrt{\lambda}\left(x-t\right)}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{1}{t}+q\left(t\right)\right)\varphi(t,\lambda,q)dt \qquad (5.1.4)$$

ve $\psi(0,\lambda,q)=1,\quad \psi'(0,\lambda,q)=0$ şartlarını sağlayan çözümü ise

$$\psi(x,\lambda,q)=\cos\sqrt{\lambda}x+\int_0^x\frac{\sin\sqrt{\lambda}\left(x-t\right)}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{1}{t}+q\left(t\right)\right)\psi(t,\lambda,q)dt \qquad (5.1.5)$$

şeklindedir.

Lemma 5.1.2 $\left[0,1\right]\times\mathbb{C}\times L^2\left[0,1\right]$ kümesi üzerinde aşağıdaki yaklaşımlar sağlanır:

$$\left|\varphi(x,\lambda,q)\right|\le\frac{cx}{1+\left|\sqrt{\lambda}\right|x}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|x} \qquad (5.1.6)$$

$$\left|\varphi(x,\lambda,q)-\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}\right|\le\frac{cx}{1+\left|\sqrt{\lambda}\right|x}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|x}\int_0^1\frac{1+\left|q\left(t\right)\right|t}{1+\left|\sqrt{\lambda}\right|t}dt\,. \qquad (5.1.7)$$

İspat: (5.1.4) denkleminden

$$\left|\varphi(x,\lambda,q)\right|\le\left|\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}+\int_0^x\frac{\sin\sqrt{\lambda}\left(x-t\right)}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{1}{t}+q\left(t\right)\right)\frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}dt\right|$$

elde edilir. Üçgen eşitsizliğinden ve

$$\left|\sin z\right|\le\frac{c\left|z\right|}{1+\left|z\right|}e^{\left|\operatorname{Im}z\right|}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\left|\varphi(x,\lambda,q)\right|&\le\left|\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}\right|+\left|\int_0^x\frac{\sin\sqrt{\lambda}\left(x-t\right)}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{1}{t}+q\left(t\right)\right)\frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}dt\right|\\&\le\frac{cx}{1+\left|\sqrt{\lambda}x\right|}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}x\right|}+\int_0^x\frac{c(x-t)}{1+\left|\sqrt{\lambda}(x-t)\right|}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}(x-t)\right|}\left|\frac{1}{t}+q\left(t\right)\right|\frac{ct}{1+\left|\sqrt{\lambda}t\right|}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}t\right|}dt\end{aligned}$$

elde edilir. $0\le t\le x$ olduğundan

$$\begin{aligned}\left|\varphi(x,\lambda,q)\right|&\le\frac{cx}{1+\left|\sqrt{\lambda}\right|x}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|x}+\int_0^x\frac{c(x-t)}{1+\left|\sqrt{\lambda}\right|(x-t)}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|(x-t)}\left|\frac{1}{t}+q\left(t\right)\right|\frac{ct}{1+\left|\sqrt{\lambda}\right|t}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|t}dt\\&\le\frac{cx}{1+\left|\sqrt{\lambda}x\right|}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|x}+\int_0^x\frac{cx}{1+\left|\sqrt{\lambda}\right|x}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|x}\left|\frac{1}{t}+q\left(t\right)\right|\frac{ct}{1+\left|\sqrt{\lambda}\right|t}dt\end{aligned}$$

olur.

$$\frac{x-t}{1+\left|\sqrt{\lambda}\right|(x-t)} \le \frac{x}{1+\left|\sqrt{\lambda}\right|x}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\varphi(x,\lambda,q) = \frac{cx}{1+\left|\sqrt{\lambda}x\right|} e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}x\right|} \left[1+\int_0^x \left|1+tq(t)\right| \frac{1}{1+\left|\sqrt{\lambda}t\right|} dt\right]$$

$$\le \frac{cx}{1+\left|\sqrt{\lambda}\right|x} e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|x} \left[1+\int_0^1 \left|1+tq(t)\right| \frac{1}{1+\left|\sqrt{\lambda}t\right|} dt\right]$$

$$\le \frac{cx}{1+\left|\sqrt{\lambda}\right|x} e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|x}$$

bulunur. Böylece

$$\left|\varphi(x,\lambda,q)\right| \le \frac{cx}{1+\left|\sqrt{\lambda}\right|x} e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|x}$$

elde edilir. Şimdi (5.1.7) eşitsizliğini gösterelim. (5.1.4) ve (5.1.6) dan

$$\left|\varphi(x,\lambda,q) - \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}\right| = \left|\int_0^x \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{1}{t}+q(t)\right) \varphi(t,\lambda,q)dt\right|$$

$$\le \int_0^x \left|\frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}}\right| \left|\frac{1}{t}+q(t)\right| \left|\varphi(t,\lambda,q)\right| dt$$

$$\le \int_0^x \frac{c(x-t)}{1+\left|\sqrt{\lambda}(x-t)\right|} e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}(x-t)\right|} \left|\frac{1}{t}+q(t)\right| \frac{ct}{1+\left|\sqrt{\lambda}t\right|} e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}t\right|} dt$$

$$\le \int_0^x \frac{cx}{1+\left|\sqrt{\lambda}x\right|} e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|x} \left|\frac{1}{t}+q(t)\right| \frac{ct}{1+\left|\sqrt{\lambda}t\right|} dt$$

$$= \frac{cx}{1+\left|\sqrt{\lambda}\right|x} e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|x} \left[\int_0^1 \frac{1+t\left|q(t)\right|}{1+\left|\sqrt{\lambda}t\right|} dt\right]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 5.1.3 Her $f(x) \in L^2[0,1]$ için

$$\int_0^1 \frac{\cos\sqrt{\mu_n(q)}\sin^2\sqrt{\mu_n(q)t}}{\mu_n(q)} f(t)dt = \frac{\cos\sqrt{\mu_n(q)}}{\mu_n(q)} \int_0^1 \frac{f(t)}{2}dt + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{\mu_n(q)}\sin 2\sqrt{\mu_n(q)t}}{2\mu_n(q)} f(t)\, dt = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

asimptotik formülleri sağlanır.

İspat: Önce ilk eşitliğin sağlandığını gösterelim.

$$\int_0^1 \frac{\cos\sqrt{\mu_n(q)}\sin^2\sqrt{\mu_n(q)}t}{\mu_n(q)} f(t)dt = \frac{\cos\sqrt{\mu_n(q)}}{\mu_n(q)} \int_0^1 \frac{1-\cos 2\sqrt{\mu_n(q)}t}{2} f(t)dt$$
$$= \frac{\cos\sqrt{\mu_n(q)}}{\mu_n(q)} \left(\int_0^1 \frac{f(t)}{2}dt - \int_0^1 \frac{\cos 2\sqrt{\mu_n(q)}t}{2} f(t)dt \right)$$

Cauchy- Bunjakowski eşitsizliğinden

$$\int_0^1 \frac{\cos\sqrt{\mu_n(q)}\sin^2\sqrt{\mu_n(q)}t}{\mu_n(q)} f(t)dt \le \frac{\cos\sqrt{\mu_n(q)}}{\mu_n(q)} \left(\int_0^1 \frac{f(t)}{2}dt - \int_0^1 \frac{\cos^2 2\sqrt{\mu_n(q)}t}{4}dt \int_0^1 f^2(t)dt \right)$$
$$= \frac{\cos\sqrt{\mu_n(q)}}{\mu_n(q)} \left(\int_0^1 \frac{f(t)}{2}dt - c\int_0^1 \frac{\cos 4\sqrt{\mu_n(q)}t+1}{8}dt \right)$$
$$= \frac{\cos\sqrt{\mu_n(q)}}{\mu_n(q)} \left(\int_0^1 \frac{f(t)}{2}dt - c\left(\left. \frac{\sin 4\sqrt{\mu_n(q)}t+t}{32\sqrt{\mu_n(q)}} \right|_0^1 \right) \right)$$
$$= \frac{\cos\sqrt{\mu_n(q)}}{\mu_n(q)} \left(\int_0^1 \frac{f(t)}{2}dt + O\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$
$$= \frac{\cos\sqrt{\mu_n(q)}}{\mu_n(q)} \int_0^1 \frac{f(t)}{2}dt + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

elde edilir. Şimdi ikinci eşitliğin sağlandığını gösterelim.

$$\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{\mu_n(q)}\sin 2\sqrt{\mu_n(q)}t}{2\mu_n(q)} f(t)\,dt = \frac{\sin\sqrt{\mu_n(q)}}{2\mu_n(q)} \int_0^1 \sin 2\sqrt{\mu_n(q)}t f(t)\,dt$$

Cauchy- Bunjakowski eşitsizliğinden

$$\le \frac{\sin\sqrt{\mu_n(q)}}{2\mu_n(q)} \int_0^1 \sin^2 2\sqrt{\mu_n(q)}t dt \int_0^1 f^2(t)\,dt$$
$$= \frac{c\sin\sqrt{\mu_n(q)}}{2\mu_n(q)} \int_0^1 \frac{1-\cos 4\sqrt{\mu_n(q)}t}{2}dt$$
$$= \frac{c\sin\sqrt{\mu_n(q)}}{2\mu_n(q)} \left(\left. \frac{t}{2} - \frac{\sin 4\sqrt{\mu_n(q)}t}{8\sqrt{\mu_n(q)}} \right|_0^1 \right) = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.1.2 $q(x) \in L^2[0,1]$ olmak üzere

$$-y'' + \frac{1}{x}y + q(x)y = \lambda y \tag{5.1.8}$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \tag{5.1.9}$$

(5.1.8)- (5.1.9) probleminin özdeğerleri için

$$\mu_n(q)=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2\left[1+\frac{2}{\int_0^1 q(t)dt}\right]^2+O\left(\frac{1}{n^4}\right) \tag{5.1.10}$$

asimptotik formülü sağlanır.

İspat: (5.1.8) denkleminin $y(0)=0,\quad y(1)=0$ Dirichlet sınır şartlarını sağlayan $\varphi(x,\lambda,q)$ çözüm fonksiyonunu göz önüne alalım. $\varphi(x,\lambda,q)$ fonksiyonu ikinci sınır şartında yazarsak

$$0=\varphi(1,\mu_n(q),q)=\frac{\sin\sqrt{\mu_n(q)}}{\sqrt{\mu_n(q)}}+\int_0^1\frac{\sin\sqrt{\mu_n(q)}\,(1-t)}{\sqrt{\mu_n(q)}}\left(\frac{1}{t}+q(t)\right)\varphi(t,\mu_n(q),q)dt \tag{5.1.11}$$

olur. Önce integrali hesaplayalım. Bunun için (5.1.7)'den

$$\varphi(t,\lambda,q)\le\frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}+\frac{ct}{1+\left|\sqrt{\lambda}\right|t}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|t}\int_0^1\frac{1+|q(t)|t}{1+\left|\sqrt{\lambda}\right|t}dt$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\varphi(t,\mu_n(q),q)\le\frac{\sin\sqrt{\mu_n(q)}t}{\sqrt{\mu_n(q)}}+\frac{ct}{1+\left|\sqrt{\mu_n(q)}\right|t}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\mu_n(q)}\right|t}\int_0^1\frac{1+|q(t)|t}{1+\left|\sqrt{\mu_n(q)}\right|t}dt$$

elde edilir. (5.1.11) deki integral

$$\begin{aligned}&\int_0^1\frac{\sin\sqrt{\mu_n(q)}\,(1-t)}{\sqrt{\mu_n(q)}}\left(\frac{1}{t}+q(t)\right)\varphi(t,\mu_n(q),q)dt\\
&\le\int_0^1\frac{\sin\sqrt{\mu_n(q)}\,(1-t)}{\sqrt{\mu_n(q)}}\left(\frac{1}{t}+q(t)\right)\frac{\sin\sqrt{\mu_n(q)}t}{\sqrt{\mu_n(q)}}dt\\
&+\int_0^1\frac{\sin\sqrt{\mu_n(q)}\,(1-t)}{\sqrt{\mu_n(q)}}\left(\frac{1}{t}+q(t)\right)\frac{ct}{1+\left|\sqrt{\mu_n(q)}\right|t}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\mu_n(q)}\right|t}\int_0^1\frac{1+|q(t)|s}{1+\left|\sqrt{\mu_n(q)}\right|s}dsdt\end{aligned}$$

şeklinde olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}&\int_0^1\frac{\sin\sqrt{\mu_n(q)}\,(1-t)}{\sqrt{\mu_n(q)}}\left(\frac{1}{t}+q(t)\right)\varphi(t,\mu_n(q),q)dt\\
&\le\int_0^1\frac{\sin\sqrt{\mu_n(q)}\cos\sqrt{\mu_n(q)}t-\sin\sqrt{\mu_n(q)}t\cos\sqrt{\mu_n(q)}}{\sqrt{\mu_n(q)}}\left(\frac{1}{t}+q(t)\right)\frac{\sin\sqrt{\mu_n(q)}t}{\sqrt{\mu_n(q)}}dt\\
&+c\int_0^1\frac{\sin\sqrt{\mu_n(q)}\,(1-t)}{\sqrt{\mu_n(q)}}\frac{t+q(t)}{1+\left|\sqrt{\mu_n(q)}\right|t}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\mu_n(q)}\right|t}\int_0^1\frac{1+|q(t)|s}{1+\left|\sqrt{\mu_n(q)}\right|s}dsdt\end{aligned}$$

$$\leq \int_0^1 \frac{\left(\sin\sqrt{\mu_n(q)}\sin 2\sqrt{\mu_n(q)t}\right)/2-\sin^2\sqrt{\mu_n(q)t}\cos\sqrt{\mu_n(q)}}{\mu_n(q)}\left(\frac{1}{t}+q(t)\right)dt$$

$$+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

elde edilir. Lemma 5.1.3'den

$$\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{\mu_n(q)}\,(1-t)}{\sqrt{\mu_n(q)}}\left(\frac{1}{t}+q(t)\right)\varphi(t,\mu_n(q),q)dt\varepsilon$$

$$\leq \int_0^1 \frac{\left(\sin\sqrt{\mu_n(q)}\sin 2\sqrt{\mu_n(q)t}\right)/2-\sin^2\sqrt{\mu_n(q)t}\cos\sqrt{\mu_n(q)}}{t\mu_n(q)}dt$$

$$+\int_0^1 \frac{\left(\sin\sqrt{\mu_n(q)}\sin 2\sqrt{\mu_n(q)t}\right)/2-\sin^2\sqrt{\mu_n(q)t}\cos\sqrt{\mu_n(q)}}{\mu_n(q)}q(t)dt+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\leq \int_0^1 \frac{\sin\sqrt{\mu_n(q)}\sin 2\sqrt{\mu_n(q)t}}{2t\mu_n(q)}dt-\int_0^1 \frac{\sin^2\sqrt{\mu_n(q)t}\cos\sqrt{\mu_n(q)}}{t\mu_n(q)}dt$$

$$-\frac{\cos\sqrt{\mu_n(q)}}{\mu_n(q)}\int_0^1 \frac{q(t)}{2}dt+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$=-\frac{\cos\sqrt{\mu_n(q)}}{\mu_n(q)}\int_0^1 \frac{q(t)}{2}dt+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

bulunur. Bulunan bu ifadeyi (5.1.11)'da yerine yazarsak

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\sin\sqrt{\mu_n(q)}}{\sqrt{\mu_n(q)}}-\frac{\cos\sqrt{\mu_n(q)}}{\mu_n(q)}\int_0^1 \frac{q(t)}{2}dt+O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \sin\sqrt{\mu_n(q)}-\frac{\cos\sqrt{\mu_n(q)}}{\sqrt{\mu_n(q)}}\int_0^1 \frac{q(t)}{2}dt+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.1.14) formülünden

$$0=\sin\left[(n+\frac{1}{2})\pi+\varepsilon_n\right]-\frac{\cos\left[(n+\frac{1}{2})\pi+\varepsilon_n\right]}{\left[(n+\frac{1}{2})\pi+\varepsilon_n\right]}\frac{1}{2}\int_0^1 q(t)dt+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (5.1.12)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \cos\left[(n+\frac{1}{2})\pi+\varepsilon_n\right] &= \cos\left[(n+\frac{1}{2})\pi\right]\cos\varepsilon_n-\sin\left[(n+\frac{1}{2})\pi\right]\sin\varepsilon_n \\ &= -\sin(\pi \mathrm{n})\cos\varepsilon_n-\cos(\pi \mathrm{n})\sin\varepsilon_n \\ &= -(-1)^n\sin\varepsilon_n \end{aligned}$$

$$\sin\left[(n+\frac{1}{2})\pi+\varepsilon_n\right]=\sin\left[(n+\frac{1}{2})\pi\right]\cos\varepsilon_n+\sin\varepsilon_n\cos\left[(n+\frac{1}{2})\pi\right]$$
$$=\cos(\pi\mathrm{n})\cos\varepsilon_n\text{-}\sin(\pi\mathrm{n})\sin\varepsilon_n$$
$$=(-1)^n\cos\varepsilon_n$$

olduğu dikkate alınırsa (5.1.12) eşitliği

$$0=(-1)^n\cos\varepsilon_n-\frac{(-1)^n\sin\varepsilon_n}{\left[(n+\frac{1}{2})\pi+\varepsilon_n\right]}\frac{1}{2}\int_0^1 q(t)dt+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olur. Daha sonra gerekli işlemler yapılırsa

$$\tan\varepsilon_n=\frac{2(n+\frac{1}{2})\pi}{\int_0^1 q(t)dt}+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

olur. Böylece

$$\varepsilon_n=\frac{2(n+\frac{1}{2})\pi}{\int_0^1 q(t)dt}+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

bulunur. Rouche teoreminden

$$\mu_n(q)=\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi+\frac{2(n+\frac{1}{2})\pi}{\int_0^1 q(t)dt}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2$$
$$=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2\left[1+\frac{2}{\int_0^1 q(t)dt}\right]^2+O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

şeklinde asimptotik formülü elde edilir.

6. DİFÜZYON OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL TEORİSİ

6.1 Özdeğerler İçin Asimptotik Formüllerinin Bulunması

Lemma 6.1.1 $a,b\in\mathbb{C}$ olmak üzere

$$-y''=\lambda^2 y-f(x),\quad x\in[0,1] \tag{6.1.1}$$

denkleminin

$$y(0)=a,\quad y'(0)=b$$

başlangıç değerlerini sağlayan çözümü

$$y(x)=a\cos\lambda x+b\frac{\sin\lambda x}{\lambda}+\int_0^x\frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}f(t)dt \tag{6.1.2}$$

şeklindedir.

İspat:

$$y(x)=\int_0^x\frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}f(t)dt$$

integralini ele alalım. Sinüs için fark formülünden

$$y(x)=\frac{\sin\lambda x}{\lambda}\int_0^x\cos(\lambda t)f(t)dt-\frac{\cos\lambda x}{\lambda}\int_0^x\sin(\lambda t)f(t)dt$$

elde edilir. Bu fonksiyonun iki kez türevini alırsak

$$y'=\cos\lambda x\int_0^x\cos(\lambda t)f(t)dt+\frac{\sin\lambda x}{\lambda}\cos(\lambda x)f(x)+\sin\lambda x\int_0^x\sin(\lambda t)f(t)dt-\frac{\cos\lambda x}{\lambda}\sin(\lambda x)f(x)$$

$$=\cos\lambda x\int_0^x\cos(\lambda t)f(t)dt+\sin\lambda x\int_0^x\sin(\lambda t)f(t)dt$$

$$y''=-\lambda\sin\lambda x\int_0^x\cos(\lambda t)f(t)dt+\cos^2(\lambda x)f(x)+\lambda\cos\lambda x\int_0^x\sin(\lambda t)f(t)dt+\sin^2\lambda xf(x)$$

$$=-\lambda\sin\lambda x\int_0^x\cos(\lambda t)f(t)dt+\lambda\cos\lambda x\int_0^x\sin(\lambda t)f(t)dt+f(x)$$

$$=-\lambda^2 y+f(x)$$

elde edilir. Bulduğumuz bu değerleri (6.1.1) denkleminde yerine yazarsak ve ayrıca

$\cos\lambda x$ ve $\dfrac{\sin\lambda x}{\lambda}$,

$$y''+\lambda^2 y=0$$

homojen denkleminin çözümü olduklarından ispat tamamlanmış olur.

$\varphi(x,\lambda,p,q)=\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda,p,q)=\psi(x,\lambda)$ olacak şekilde aşağıdaki teorem söz konusudur:

Teorem 6.1.1 $p(x), q(x) \in L^2[0,1]$ olmak üzere

$$-y''+[2\lambda p(x)+q(x)]y=\lambda^2 y, \quad x\in(0,1) \quad ve \quad \lambda\in C$$

denkleminin $\varphi(0,\lambda)=0, \quad \varphi'(0,\lambda)=1$ şartlarını sağlayan çözümü

$$\varphi(x,\lambda)=\frac{\sin\lambda x}{\lambda}+\int_0^x\left[2\sin\lambda(x-t)\,p(t)+\frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}q(t)\right]\varphi(t,\lambda)dt \qquad (6.1.3)$$

şeklindedir ve $\psi(0,\lambda)=1, \quad \psi'(0,\lambda)=0$ şartlarını sağlayan çözümü ise

$$\psi(x,\lambda)=\cos\lambda x+\int_0^x\left[2\sin\lambda(x-t)\,p(t)+\frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}q(t)\right]\psi(t,\lambda)dt \qquad (6.1.4)$$

şeklindedir.

Lemma 6.1.2 $[0,1]\times\mathbb{C}\times L^2[0,1]\times L^2[0,1]$ kümesi üzerinde aşağıdaki yaklaşım sağlanır:

$$\left|\varphi(x,\lambda)-\frac{\sin\lambda x}{\lambda}\right|\le C\frac{x}{1+|\lambda|x}e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|x}\int_0^1 t\,\frac{2|\lambda|\,p(t)+q(t)}{1+|\lambda|t}dt \,.$$

İspat: (6.1.3) denkleminden

$$\left|\varphi(x,\lambda)-\frac{\sin\lambda x}{\lambda}\right|=\left|\int_0^x\left[2\sin\lambda(x-t)\,p(t)+\frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}q(t)\right]\varphi(t,\lambda)dt\right|$$

elde edilir.

$$|\sin z|\le\frac{c|z|}{1+|z|}e^{|\mathrm{Im}\,z|}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$=\left|\int_0^x\left[2\sin\lambda(x-t)\,p(t)+\frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}q(t)\right]\frac{\sin\lambda t}{\lambda}dt\right|$$

$$\le\int_0^x\left[\frac{2|\lambda(x-t)|}{1+|\lambda(x-t)|}e^{|\mathrm{Im}\,\lambda(x-t)|}p(t)+\frac{|x-t|}{1+|\lambda(x-t)|}e^{|\mathrm{Im}\,\lambda(x-t)|}q(t)\right]\frac{t}{1+|\lambda t|}e^{|\mathrm{Im}\,\lambda t|}dt$$

elde edilir. $0\le t\le x$ ve $x-t\ge 0$ olduğundan

$$\le\int_0^x\left[\frac{2|\lambda|(x-t)}{1+|\lambda|(x-t)}e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|(x-t)}p(t)+\frac{x-t}{1+|\lambda|(x-t)}e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|(x-t)}q(t)\right]\frac{t}{1+|\lambda|t}e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|t}dt$$

olur.

$$\frac{x-t}{1+|\lambda|(x-t)} \le \frac{x}{1+|\lambda|x}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\left|\varphi(x,\lambda)-\frac{\sin\lambda x}{\lambda}\right| \le \int_0^x \left[\frac{2|\lambda|x}{1+|\lambda|x}e^{|\mathrm{Im}\lambda|(x-t)}p(t)+\frac{x}{1+|\lambda|x}e^{|\mathrm{Im}\lambda|(x-t)}q(t)\right]\frac{t}{1+|\lambda|t}e^{|\mathrm{Im}\lambda|t}dt$$

$$\le C\frac{x}{1+|\lambda|x}e^{|\mathrm{Im}\lambda|x}\int_0^x\left[\frac{2|\lambda|tp(t)}{1+|\lambda|t}+\frac{tq(t)}{1+|\lambda|t}\right]dt$$

bulunur.

Lemma 6.1.3 (Counting Lemma) $p,q\in L^2[0,1]$ ve $N>2\|q\|$ bir tamsayı olsun. Bu durumda $\varphi(1,\lambda)$ çözümünün

$$\mathrm{Re}\,\lambda<(N+1/2)^2\pi^2$$

bölgesinde N tane kökü vardır ve her $n>N$ için

$$|\lambda-n\pi|<\pi/2$$

bölgesine sadece bir kökü vardır.

İspat: $N>2\|q\|$ olsun.

$$|\lambda-n\pi|=\pi/2\ ,\ n>N$$

çevresini göz önüne alalım. Bu durumda Lemma 6.1.2'den

$$\left|\varphi(1,\lambda)-\frac{\sin\lambda}{\lambda}\right|\le\frac{1}{1+|\lambda|}e^{|\mathrm{Im}\lambda|}\int_0^1\frac{2t|\lambda|\,p(t)+tq(t)}{1+|\lambda|t}dt$$

bulunur. Cauch-Schwarz eşitsizliğinden ve $e^{|\mathrm{Im}\,z|}<4|\sin z|$ olduğundan

$$\left|\varphi(1,\lambda)-\frac{\sin\lambda}{\lambda}\right|\le\frac{4|\sin\lambda|}{1+|\lambda|}\left[2\left(\int_0^1\frac{t^2|\lambda|^2}{\left(1+|\lambda|t\right)^2}dt\right)^{1/2}\|p\|+\left(\int_0^1\frac{t^2}{\left(1+|\lambda|t\right)^2}dt\right)^{1/2}\|q\|\right]$$

olur ve $|\lambda|\to\infty$ için

$$\left|\varphi(1,\lambda)-\frac{\sin\lambda}{\lambda}\right|\le\frac{4|\sin\lambda|}{1+|\lambda|}\left(2\|p\|+\frac{1}{|\lambda|}\|q\|\right)$$

$$=\frac{4|\sin\lambda|}{1+|\lambda|}2\|p\|+\frac{4|\sin\lambda|}{1+|\lambda|}\frac{\|q\|}{|\lambda|}$$

bulunur. $z = x + iy$ $|\sin z| = \sqrt{\cosh^2 y - \cos^2 x}$ ve $|\lambda - n\pi| = \pi / 2$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\left|\varphi(1,\lambda) - \frac{\sin\lambda}{\lambda}\right| \le \frac{4|\sin\lambda|}{1+|\lambda|}\frac{\|q\|}{|\lambda|}$$

elde edilir. $N > 2\|q\|$ ve $n > N$ olduğundan

$$\left|\varphi(1,\lambda) - \frac{\sin\lambda}{\lambda}\right| < \frac{|\sin\lambda|}{1+|\lambda|}\frac{2N}{|\lambda|}$$

$$\left|\varphi(1,\lambda) - \frac{\sin\lambda}{\lambda}\right| < \frac{|\sin\lambda|}{1+|\lambda|}\frac{2n}{|\lambda|}$$

$$< \frac{|\sin\lambda|}{|\lambda|}$$

olur. Böylece Rouche teoreminden

$$\frac{\sin\lambda}{\lambda} \text{ ve } \left(\varphi(1,\lambda) - \frac{\sin\lambda}{\lambda}\right) + \frac{\sin\lambda}{\lambda}$$

ifadeleri aynı sayıda sıfırlara sahiptir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Bu lemmadan L^2 deki her p,q için Dirichlet spektrumu

$$\mu_n(p,q) = n\pi + O(1)$$

şartını sağlayan

$$\mu_1(p,q) < \mu_2(p,q) < \dots$$

reel sayıların bir dizisidir.

Lemma 6.1.3 Her $p(t), q(t) \in L^2[0,1]$ için $\mu_n(p,q) = \mu_n$ olmak üzere

$$\int_0^1 \frac{\sin\mu_n \sin(2\mu_n t) - 2\sin^2(\mu_n t)\cos\mu_n}{\mu_n} p(t)dt = -\frac{\cos\mu_n}{\mu_n}\int_0^1 p(t)dt + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{\sin\mu_n \sin(2\mu_n t) - 2\sin^2(\mu_n t)\cos\mu_n}{2\mu_n^2} q(t)dt = -\frac{\cos\mu_n}{2\mu_n^2}\int_0^1 q(t)dt + O\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)$$

asimptotik formüller sağlanır.

İspat: Cauchy- Bunjakowski eşitsizliğinden

$$\int_0^1 \frac{\sin\mu_n \sin(2\mu_n t) - 2\sin^2 \mu_n t\cos\mu_n}{\mu_n} p(t)dt =$$

$$\le \frac{\sin\mu_n}{\mu_n}\left(\int_0^1 \sin^2(2\mu_n t)dt\right)^{1/2}\left(\int_0^1 p^2(t)dt\right)^{1/2} - \frac{\cos\mu_n}{\mu_n}\int_0^1 [p(t) - \cos(2\mu_n t)p(t)]dt$$

elde edilir. Yarım açı formüllerinden ve $p(t), q(t) \in L^2[0,1]$ olduğundan

$$\le \frac{\sin\mu_n}{\mu_n}\left(\int_0^1 \frac{1-\cos(4\mu_n t)}{2}dt\right)^{1/2} C - \frac{\cos\mu_n}{\mu_n}\left(\int_0^1 p(t)dt - \left(\int_0^1 \cos^2(2\mu_n t)dt\right)^{1/2}\left(\int_0^1 p^2(t)dt\right)^{1/2}\right)$$

$$\le \frac{\sin\mu_n}{\mu_n}\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(4\mu_n t)}{8\mu_n}\Bigg|_0^1\right)^{1/2} C - \frac{\cos\mu_n}{\mu_n}\left(\int_0^1 p(t)dt - \left(\int_0^1 \frac{\cos(4\mu_n t)+1}{2}dt\right)^{1/2} C\right)$$

olur.

$$\left|\frac{\sin\mu_n}{\mu_n}\right| \le \frac{1}{n\pi + O(1)} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

olduğundan

$$\le -\frac{\cos\mu_n}{\mu_n}\left(\int_0^1 p(t)dt - \left(\frac{\sin 4\mu_n t}{8\mu_n} + \frac{t}{2}\Bigg|_0^1\right)^{1/2} C\right) + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

$$= -\frac{\cos\mu_n}{\mu_n}\int_0^1 p(t)dt + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

elde edilir. Böylece birinci eşitlik gösterilmiş olur. İkinci eşitliği gösterelim: Cauchy-Bunjakowski eşitsizliğinden

$$\int_0^1 \frac{\sin\mu_n \sin(2\mu_n t) - 2\sin^2(\mu_n t)\cos\mu_n}{2\mu_n^{\,2}} q(t)\,dt =$$

$$\le \frac{\sin\mu_n}{2\mu_n^2}\left(\int_0^1 \sin^2(2\mu_n t)dt\right)^{1/2}\left(\int_0^1 q^2(t)\,dt\right)^{1/2} - \frac{\cos\mu_n}{2\mu_n^2}\int_0^1 [q(t) - \cos(2\mu_n t)q(t)]dt$$

elde edilir. Yarım açı formüllerinden ve $p(t), q(t) \in L^2[0,1]$ olduğundan

$$\le \frac{\sin\mu_n}{2\mu_n^2}\left(\int_0^1 \frac{1-\cos(4\mu_n t)}{2}dt\right)^{1/2} C - \frac{\cos\mu_n}{2\mu_n^2}\left(\int_0^1 q(t)dt - \left(\int_0^1 \cos^2(2\mu_n t)dt\right)^{1/2}\left(\int_0^1 q^2(t)dt\right)^{1/2}\right)$$

$$\le \frac{\sin\mu_n}{2\mu_n^2}\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(4\mu_n t)}{8\mu_n}\Bigg|_0^1\right)^{1/2} C - \frac{\cos\mu_n}{2\mu_n^2}\left(\int_0^1 q(t)dt - \left(\int_0^1 \frac{\cos(4\mu_n t)+1}{2}dt\right)^{1/2} C\right)$$

olur.

$$\left|\frac{\sin\mu_n}{\mu_n^2}\right| \le \frac{1}{n^2\pi^2 + O(n)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olduğundan

$$\leq -\frac{\cos\mu_n}{2\mu_n^2}\left(\int_0^1 q(t)dt - \left(\left.\frac{\sin 4\mu_n t}{8\mu_n} + \frac{t}{2}\right|_0^1\right)^{1/2} C\right) + O\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)$$

$$= -\frac{\cos\mu_n}{2\mu_n^2}\int_0^1 q(t)dt + O\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 6.1.2 $p(x), q(x) \in L^2[0,1]$ olmak üzere

$$-y'' + [2\lambda p(x) + q(x)]y = \lambda^2 y, \quad x \in (0,1) \quad ve \quad \lambda \in C \tag{6.1.5}$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \tag{6.1.6}$$

sınır değer problemi için özdeğerlerin asimptotik formülü aşağıdaki gibidir:

$$\mu_n(q) = \frac{\mathrm{n}\pi + \alpha}{2} \pm \frac{\left((n\pi+\alpha)^2 + 2\beta\right)^{1/2}}{2} + O\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right) \tag{6.1.7}$$

Burada $\alpha = \int_0^1 p(t)dt$ ve $\beta = \int_0^1 q(t)dt$ şeklindedir.

İspat: (6.1.5) denkleminin $y(0)=0, \quad y(1)=0$ Dirichlet sınır şartlarını sağlayan çözüm fonksiyonuna bakalım. $\varphi(0,\lambda)=0$ olduğundan $\varphi(1,\lambda)=0$ şartını sağlaması yeter.

$$0 = \varphi(1,\mu) = \frac{\sin\mu_n}{\mu_n} + \int_0^1 \left[2\sin\left(\mu_n(1-t)\right)p(t) + \frac{\sin\left(\mu_n(1-t)\right)}{\mu_n} q(t)\right]\varphi(t,\mu)dt \tag{6.1.8}$$

eşitliği sağlanmalıdır. Önce integrali hesaplayalım. Bunun için (6.1.4) den

$$\varphi(t,\lambda) \leq \frac{\sin\lambda t}{\lambda} + \frac{ct}{1+|\lambda|t} e^{|\mathrm{Im}\lambda|t} \int_0^1 t \frac{2|\lambda| p(t) + q(t)}{1+|\lambda|t} dt$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\varphi(t,\mu_n) \leq \frac{\sin(\mu_n t)}{\mu_n} + \frac{ct}{1+|\mu_n|t} e^{|\mathrm{Im}\,\mu_n|t} \int_0^1 t \frac{2|\mu_n| p(t) + q(t)}{1+|\mu_n|t} dt$$

olur. (6.1.8) deki integral sonlu olduğundan

$$\int_0^1 t \frac{2|\mu_n| p(t) + q(t)}{1+|\mu_n|t} dt$$

$$\leq 2\left(\int_0^1 \frac{|\mu_n|^2 t^2}{\left(1+|\mu_n|t\right)^2} dt\right)^{1/2} \left(\int_0^1 p^2(t)dt\right)^{1/2} + \left(\int_0^1 \frac{t^2}{\left(1+|\mu_n(q)|t\right)^2} dt\right)^{1/2} \left(\int_0^1 q^2(t)dt\right)^{1/2}$$

$$\leq \int_0^1 2\left[\sin\mu_n \cos(\mu_n t) - \sin(\mu_n t)\cos\mu_n\right] p(t)\frac{\sin(\mu_n t)}{\mu_n}dt$$
$$+\int_0^1 \frac{\left[\sin\mu_n \cos(\mu_n t) - \sin(\mu_n t)\cos\mu_n\right]}{\mu_n} q(t)\frac{\sin(\mu_n t)}{\mu_n}dt$$
$$+\int_0^1 \left[2\sin\left(\mu_n(1-t)\right)p(t) + \frac{\sin\left(\mu_n(1-t)\right)}{\mu_n}q(t)\right]\frac{ct}{1+|\mu_n|t}e^{|\mathrm{Im}\,\mu_n|t}dt$$
$$\leq \int_0^1 \left[\frac{\sin\mu_n \sin(2\mu_n t) - 2\sin^2(\mu_n t)\cos\mu_n}{\mu_n}\right]p(t)dt$$
$$+\int_0^1 \left[\frac{\sin\mu_n \sin(2\mu_n t)}{2\mu_n^2} - \frac{\sin^2(\mu_n t)\cos\mu_n}{\mu_n^2}\right]q(t)dt$$
$$+\int_0^1 \left[2\sin\left(\mu_n(1-t)\right)p(t) + \frac{\sin\left(\mu_n(1-t)\right)}{\mu_n}q(t)\right]\frac{ct}{1+|\mu_n|t}e^{|\mathrm{Im}\,\mu_n|t}dt$$

elde edilir. Lemma 6.1.3'den

$$\int_0^1 \left[2\sin\left(\mu_n(1-t)\right)p(t) + \frac{\sin\left(\mu_n(1-t)\right)}{\mu_n}q(t)\right]\varphi(t,\mu_n)dt$$
$$= -\frac{\cos\mu_n}{\mu_n}\int_0^1 \left(p(t) + \frac{q(t)}{2\mu_n}\right)dt + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

bulunur. (6.1.8) 'de yerine yazarsak

$$0 = \sin\mu_n - \cos\mu_n\left[\int_0^1 p(t)dt + \frac{1}{2\mu_n}\int_0^1 q(t)dt\right] + O\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right) \qquad (6.1.9)$$

elde edilir.

$$\cos\left(n\pi + \varepsilon_n\right) = \cos n\pi\cos\varepsilon_n - \sin n\pi\sin\varepsilon_n$$
$$= (-1)^n\cos\varepsilon_n$$
$$\sin\left(n\pi + \varepsilon_n\right) = \sin n\pi\cos\varepsilon_n + \sin\varepsilon_n\cos n\pi$$
$$= (-1)^n\sin\varepsilon_n$$

olduğu dikkate alınırsa (6.1.9) eşitliği

$$0 = (-1)^n\sin\varepsilon_n - (-1)^n\cos\varepsilon_n\left[\int_0^1 p(t)dt + \frac{1}{2n\pi + 2\varepsilon_n}\int_0^1 q(t)dt\right] + O\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right)$$

olur. Daha sonra gerekli işlemler yapılırsa

$$\tan\varepsilon_n = \left[\int_0^1 p(t)dt + \frac{1}{2n\pi + 2\varepsilon_n}\int_0^1 q(t)dt\right] + O\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right)$$

bulunur. Böylece $\alpha=\int_0^1 p(t)dt$ ve $\beta=\int_0^1 q(t)dt$ olmak üzere

$$\varepsilon_n=\frac{\alpha-n\pi}{2}\pm\frac{\left((n\pi+\alpha)^2+2\beta\right)^{1/2}}{2}+O\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right)$$

şeklinde bulunur. Sonuç olarak

$$\mu_n(q)=n\pi+\frac{\alpha-n\pi}{2}\pm\frac{\left((n\pi+\alpha)^2+2\beta\right)^{1/2}}{2}+O\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right)$$
$$=\frac{\mathrm{n}\pi+\alpha}{2}\pm\frac{\left((n\pi+\alpha)^2+2\beta\right)^{1/2}}{2}+O\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right)$$

elde edilir.

7. HİDROJEN ATOM DENKLEMİNİN SPEKTRAL TEORİSİ

7.1 Özdeğerlerin Asimptotik Davranışının İncelenmesi

$$-y''+\left(\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x}\right)y+q(x)y=\lambda y, \quad x\in(0,1) \quad ve \quad \lambda\in C \tag{7.1.1}$$

denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin aşağıdaki gibi iki lineer bağımsız çözümü vardır.

Lemma 7.1.1 (7.1.1) denkleminin lineer bağımsız iki çözümü

$$\varphi_1(x)=x^2+\frac{1}{3}\int_0^x\left(\frac{x^2}{t}-\frac{t^2}{x}\right)\left(q(t)-\frac{2}{t}-\lambda\right)\varphi_1(t)dt \tag{7.1.2}$$

ve

$$\varphi(x)=c_1x^2+c_2x^{-1}-\frac{1}{3}\int_x^1\left(\frac{x^2}{t}-\frac{t^2}{x}\right)\left(q(t)-\frac{2}{t}-\lambda\right)\varphi(t)dt \tag{7.1.3}$$

şeklindedir.

İspat: (7.1.1) denkleminde

$$xq(x)=2 \quad \lambda=0$$

alırsak

$$-y''+\frac{2}{x^2}y=0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin genel çözümü ise

$$y=c_1x^2+c_2x^{-1}$$

şeklindedir. Şimdi (7.1.1) eşitliğine sabitlerin değişimi yöntemini uygulayalım.

$$y=u_1(x)x^2+u_2(x)x^{-1} \tag{7.1.4}$$

ifadesini ve türevlerini (7.1.1) denkleminde yerine yazarsak

$$u_1'(x)x^2+u_2'(x)x^{-1}=0$$
$$-2u_1'(x)x+u_2'(x)x^{-2}=\left(\lambda+\frac{2}{x}-q(x)\right)y(x)$$

elde edilir. Burada birinci denklem $-\frac{1}{x}$ ile çarpılıp toplanırsa

$$-3xu_1'(x)=\left(\lambda+\frac{2}{x}-q(x)\right)y(x)$$

elde edilir. Bu ifadenin 0'dan x'e integrali alınırsa

$$u_1(x)=\frac{1}{3}\int_0^x \frac{1}{t}\left(q(t)-\lambda-\frac{2}{t}\right)y(t)\,dt$$

elde edilir. Benzer şekilde birinci denklem 2, ikinci denklem x ile çarpılıp 0'dan x'e integrali alınırsa

$$\frac{3}{x}u_2'(x)=x\left(\lambda+\frac{2}{x}-q(x)\right)y(x)$$

$$u_2'(x)=\frac{x^2}{3}\left(\lambda+\frac{2}{x}-q(x)\right)y(x)$$

$$u_2(x)=-\frac{1}{3}\int_0^x t^2\left(q(t)-\lambda-\frac{2}{t}\right)y(t)\,dt$$

bulunur. Bulduğumuz bu fonksiyonları (7.1.4) denkleminde yerine yazarsak

$$y=\frac{1}{3}\int_0^x\left(\frac{x^2}{t}-\frac{t^2}{x}\right)\left(q(t)-\frac{2}{t}-\lambda\right)y(t)dt$$

elde edilir.

$$u_1'(x)=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{x}\left(q(x)-\lambda-\frac{2}{x}\right)y(x)\right]$$

Bu ifadenin x'den 1'e integrali alınırsa

$$u_1(x)=-\frac{1}{3}\int_x^1 \frac{1}{t}\left(q(t)-\lambda-\frac{2}{t}\right)y(t)\,dt$$

elde edilir. Böylece

$$u_2'(x)=\frac{x^2}{3}\left(\lambda+\frac{2}{x}-q(x)\right)y(x)$$

$$u_2(x)=\frac{1}{3}\int_0^x t^2\left(q(t)-\lambda-\frac{2}{t}\right)y(t)\,dt$$

bulunur. Bulduğumuz bu fonksiyonları (7.1.4) denkleminde yerine yazarsak

$$y(x)=-\frac{1}{3}\int_x^1\left(\frac{x^2}{t}-\frac{t^2}{x}\right)\left(q(t)-\frac{2}{t}-\lambda\right)y(t)dt$$

elde edilir. Bu çözümlerin analitik çözümler olduğunu gösterelim. Bunun için

$$y_0(x)=x^2$$

$$y_{n+1}(x)=y_0(x)+\frac{1}{3}\int_0^x\left(\frac{x^2}{t}-\frac{t^2}{x}\right)\left(q(t)-\frac{2}{t}-\lambda\right)y_n(t)dt$$

şeklinde $y_n(x)$ dizisi alalım.

Lemma 7.1.2 $y_n(x)$ dizisi $\varphi_1(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Ayrıca

$$\lim_{x\downarrow 0} x^{-2}\varphi_1(x)=1$$

ve $\mathbb{C}\times L^2[0,1]$ kümesinden $C[0,1]$ kümesine tanımlı $(\lambda,q)\to\varphi_1(x,\lambda,q)$ dönüşümü analitiktir.

İspat :

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\le x^2\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{x^{3n}}{3\mathrm{n}\prod_{m=1}^{n-1}3m}\right)^{1/2}\|q-\lambda\|^n+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{x^{3n-k}}{(3\mathrm{n}\text{-}\mathrm{k})\prod_{m=1}^{n-1}3m}\right)^{1/2}\|q-\lambda\|^{n-k}+\frac{x^n}{n!}\right]$$

olduğunu tümevarımla gösterelim. $n=1$ için

$$|y_1(x)-y_0(x)|=\left|\frac{1}{3}\int_0^x\left(\frac{x^2}{t}-\frac{t^2}{x}\right)\left(q(t)-\frac{2}{t}-\lambda\right)y_0(t)dt\right|$$

$$=\left|\int_0^x\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{t}-\frac{t^2}{x}\right)\left(q(t)-\frac{2}{t}-\lambda\right)t^2dt\right|$$

$$\le x^2\left[\left|\int_0^x\frac{1}{3}\left(t-\frac{t^4}{x^3}\right)\left(q(t)-\frac{2}{t}-\lambda\right)dt\right|\right]$$

olur.

$$\left|t-\frac{t^4}{x^3}\right|\le t$$

olduğundan

$$|y_1(x)-y_0(x)|\le x^2\left[\left|\int_0^x\frac{1}{3}t\left(q(t)-\frac{2}{t}-\lambda\right)dt\right|\right]$$

$$\le x^2\left[\left|\int_0^x\frac{1}{3}t\big(q(t)-\lambda\big)dt\right|+\frac{2}{3}x\right]$$

elde edilir. Cauchy- Bunjakowski eşitsizliğinden

$$|y_1(x)-y_0(x)|\le\frac{x^2}{3}\left[\left[\int_0^x t^2dt\right]^{1/2}\left[\int_0^x|q(t)-\lambda|^2\,dt\right]^{1/2}+x\right]$$

$$\le x^2\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}\right)^{1/2}\|q-\lambda\|+x\right]$$

olur. Şimdi $k=n$ için doğru olduğunu kabul edelim.

$$\left|y_{n+1}(x)-y_n(x)\right|\le\left|\frac{1}{3}\int_0^x\left(\frac{x^2}{t}-\frac{t^2}{x}\right)\left(q(t)-\frac{2}{t}-\lambda\right)\left(y_n(t)-y_{n-1}(t)\right)dt\right|$$

$$\le\left|\frac{1}{3}\int_0^x\left(\frac{x^2}{t}-\frac{t^2}{x}\right)\left(q(t)-\frac{2}{t}-\lambda\right)t^2\right.$$

$$\left.\times\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{t^{3n}}{3\text{n}\prod_{m=1}^{n-1}3m}\right)^{1/2}\|q-\lambda\|^n+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{t^{3n-k}}{(3\text{n-k})\prod_{m=1}^{n-1}3m}\right)^{1/2}\|q-\lambda\|^{n-k}+\frac{t^n}{n!}\right]dt\right|$$

olduğundan

$$\left|y_{n+1}(x)-y_n(x)\right|\le x^2\left\{\int_0^x\left(\frac{1}{3}t\left|\left(q(t)-\lambda\right)\right|+1\right)\right.$$

$$\left.\times\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{t^{3n}}{3\text{n}\prod_{m=1}^{n-1}3m}\right)^{1/2}\|q-\lambda\|^n+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{t^{3n-k}}{(3\text{n-k})\prod_{m=1}^{n-1}3m}\right)^{1/2}\|q-\lambda\|^{n-k}+\frac{t^n}{n!}\right]dt\right\}$$

olduğu görülür. Burada gerekli işlemler yapılırsa

$$\left|y_{n+1}(x)-y_n(x)\right|\le x^2$$

$$\times\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\left(\frac{x^{3(n+1)}}{3(\text{n}+1)\prod_{m=1}^{n}3m}\right)^{1/2}\|q-\lambda\|^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x^{3(n+1)-k}}{(3(\text{n}+1)\text{-k})\prod_{m=1}^{n}3m}\right)^{1/2}\|q-\lambda\|^{n+1-k}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi $\phi(x)$ 'e bakalım. Bunun için

$$y_0(x)=c_1x^2+c_2x^{-1}$$

$$y_{n+1}(x)=y_0(x)-\frac{1}{3}\int_x^1\left(\frac{x^2}{t}-\frac{t^2}{x}\right)\left(q(t)-\frac{2}{t}-\lambda\right)y_n(t)dt$$

şeklinde $y_n(x)$ dizisi alalım.

Lemma 7.1.3 $xy_n(x)$ dizisi $x\varphi(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

$$\lim_{x\downarrow 0}x\varphi(x)$$

vardır ve $\mathbb{C}^3\times L^2[0,1]$ kümesinden $C[0,1]$ kümesine tanımlı $(\lambda,q)\to x\varphi(x,\lambda,q)$ dönüşümü analitiktir.

İspat

$$\left|y_n(x)-y_{n-1}(x)\right| \le \frac{1}{x}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{(1-x)^n}{\mathrm{n}!}\right)^{1/2}\left\|q-\lambda\right\|^n\left|c_n\right|+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{(1-x)^k}{k!}\right)^{1/2}\left\|q-\lambda\right\|^k\left|c_k\right|+\left|c_{n+1}\right|\right]$$

olduğunu tümevarımla gösterelim. $n=1$ için

$$\left|y_1(x)-y_0(x)\right| = \left|\frac{1}{3}\int_x^1\left(\frac{x^2}{t}-\frac{t^2}{x}\right)\left(q(t)-\frac{2}{t}-\lambda\right)y_0(t)dt\right|$$

$$=\left|\frac{1}{3}\int_x^1\left(\frac{x^2}{t}-\frac{t^2}{x}\right)\left(q(t)-\frac{2}{t}-\lambda\right)\left[c_1t^2+c_2t^{-1}\right]dt\right|$$

$t \ge x$ olduğundan

$$\left|\frac{x^2}{t}-\frac{t^2}{x}\right| = \left|\frac{t^2}{x}\left(\frac{x^3}{t^3}-1\right)\right| \le \frac{t^2}{x}$$

elde edilir. Böylece

$$\left|y_1(x)-y_0(x)\right| \le \left|\frac{1}{3}\int_x^1\frac{t^2}{x}\left(q(t)-\frac{2}{t}-\lambda\right)\left[c_1t^2+c_2t^{-1}\right]dt\right|$$

$$\le \frac{1}{3x}\left|\int_x^1 t^2\left(q(t)-\lambda\right)\left[c_1t^2+c_2t^{-1}\right]+2t\left[c_1t^2+c_2t^{-1}\right]dt\right|$$

$$\le \frac{1}{3x}\left|\int_x^1\left(q(t)-\lambda\right)\left[c_1t^4+c_2t\right]+\left[2c_1t^3+2c_2t\right]dt\right|$$

$t \le 1$ olduğundan

$$\le \frac{1}{3x}\left\{\left|\int_x^1\left(q(t)-\lambda\right)c_1dt\right|+\left|c_2\right|\right\}$$

$$=\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{3}\left\|q-\lambda\right\|(1-x)^{1/2}\left|c_1\right|+\left|c_2\right|\right\}$$

olur. Şimdi $k=n$ için doğru olduğunu kabul edelim.

$$\left|y_{n+1}(x)-y_n(x)\right| = \left|\frac{1}{3}\int_0^x\left(\frac{x^2}{t}-\frac{t^2}{x}\right)\left(q(t)-\frac{2}{t}-\lambda\right)\left(y_n(t)-y_{n-1}(t)\right)dt\right|$$

$$=\left|\frac{1}{3}\int_x^1\left(\frac{x^2}{t}-\frac{t^2}{x}\right)\left(q(t)-\frac{2}{t}-\lambda\right)\frac{1}{t}\right.$$

$$\left.\times\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{(1-x)^n}{\mathrm{n}!}\right)^{1/2}\left\|q-\lambda\right\|^n\left|c_n\right|+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{(1-x)^k}{k!}\right)^{1/2}\left\|q-\lambda\right\|^k\left|c_k\right|+\left|c_{n+1}\right|\right\}dt\right|$$

$t \ge x$ olduğundan

$$\left|\frac{x^2}{t}-\frac{t^2}{x}\right| = \left|\frac{t^2}{x}\left(\frac{x^3}{t^3}-1\right)\right| \le \frac{t^2}{x}$$

elde edilir. Böylece

$$\leq \left| \frac{1}{3} \int_x^1 \frac{t^2}{x} \left(q(t) - \frac{2}{t} - \lambda \right) \frac{1}{t} \right.$$

$$\left. \times \left\{ \left(\frac{1}{3} \right)^n \left(\frac{(1-x)^n}{\text{n}!} \right)^{1/2} \|q-\lambda\|^n |c_n| + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{(1-x)^k}{k!} \right)^{1/2} \|q-\lambda\|^k |c_k| + |c_{n+1}| \right\} dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{3x} \left| \int_x^1 \left[t\left(q(t) - \lambda \right) + 2 \right] \right.$$

$$\left. \times \left\{ \left(\frac{1}{3} \right)^n \left(\frac{(1-x)^n}{\text{n}!} \right)^{1/2} \|q-\lambda\|^n |c_n| + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{(1-x)^k}{k!} \right)^{1/2} \|q-\lambda\|^k |c_k| + |c_{n+1}| \right\} dt \right|$$

olur. $t \leq 1$ olduğundan

$$\leq \frac{1}{3x} \left| \int_x^1 \left[\left(q(t) - \lambda \right) + 2 \right] \right.$$

$$\left. \times \left\{ \left(\frac{1}{3} \right)^n \left(\frac{(1-x)^n}{\text{n}!} \right)^{1/2} \|q-\lambda\|^n |c_n| + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{(1-x)^k}{k!} \right)^{1/2} \|q-\lambda\|^k |c_k| + |c_{n+1}| \right\} dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{x} \left[\left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \left(\frac{(1-x)^{n+1}}{(\text{n}+1)!} \right)^{1/2} \|q-\lambda\|^{n+1} |c_{n+1}| + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(1-x)^k}{k!} \right)^{1/2} \|q-\lambda\|^k |c_k| + |c_{n+2}| \right]$$

elde edilir. Böylece istenen elde edilir.

Teorem 7.1.1 $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ $q(x) \in L^2[0,1]$ olmak üzere

$$-y'' + \left(\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x} \right) y + q(x) y = \lambda y$$

denklemini ve

$$y(x_1) = y'(x_2) + b y(x_2) = 0$$

şartlarını sağlayan aşikar çözüm y ise o zaman

$$\lambda \geq -\left(\frac{2}{x_1} + \left[|b| + 2\int_{x_1}^{x_2} |q|\, dx \right]^2 \right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Denklemi y ile çarpıp x_1'den x_2'ye integre edersek

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ -y'' y + q(x) y^2 - \lambda y^2 + \left(\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x} \right) y^2 \right\} dx = 0$$

elde edilir.

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{2}{x^2} y^2 dx$$

integrali pozitif olacağından

$$\int_{x_1}^{x_2}\left\{-y''y+q(x)y^2-\lambda y^2-\frac{2}{x}y^2\right\}dx\le 0$$

integrali negatiftir. Son integralin ilk terimine kısmi integrasyon uygularsak

$$\int_{x_1}^{x_2}-y''ydx=-y'(x_2)y(x_2)+y'(x_1)y(x_1)+\int_{x_1}^{x_2}(y')^2\,dx$$

$$=by^2(x_2)+\int_{x_1}^{x_2}(y')^2\,dx$$

elde edilir. Bunu son eşitsizlikte yerine koyarsak

$$by^2(x_2)+\int_{x_1}^{x_2}\left[(y')^2+q(x)y^2-\lambda y^2-\frac{2}{x}y^2\right]dx\le 0 \qquad (7.1.5)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\int_{x_1}^{x_2}2y(x)y'(x)\int_{x_1}^{x}q(t)dtdx$$

integraline kısmi integrasyon uygularsak

$$\int_{x_1}^{x_2}2y(x)y'(x)\int_{x_1}^{x}q(t)dtdx=\left(2y^2(x)\int_{x_1}^{x}q(t)dt\right)_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}2y(x)y'(x)\int_{x_1}^{x}q(t)dtdx-\int_{x_1}^{x_2}2y^2(x)q(x)dx$$

$$=y^2(x_2)\int_{x_1}^{x_2}q(t)dt-\int_{x_1}^{x_2}y^2(x)q(x)dx$$

elde edilir. Buradan

$$\int_{x_1}^{x_2}q(x)y^2(x)dx=y^2(x_2)\int_{x_1}^{x_2}q(x)dx-\int_{x_1}^{x_2}2y(x)y'(x)\int_{x_1}^{x}q(t)dtdx \qquad (7.1.6)$$

olduğu görülür. Şimdi

$$y^2(x_2)=\int_{x_1}^{x_2}2y(x)y'(x)dx$$

olduğunu gösterelim. Eşitliğin sağ tarafına kısmi integrasyon uygularsak

$$\int_{x_1}^{x_2}2y(x)y'(x)dx=\left(2y^2(x)\right)_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}2y(x)y'(x)dx=2y^2(x_2)-\int_{x_1}^{x_2}2y(x)y'(x)dx$$

istenen elde edilir. (7.1.6) ’de üçgen eşitsizliğinden

$$\left|by^2(x_2)\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2} q(x)y^2(x)dx\right| = |b|\,y^2(x_2)+\left|y^2(x_2)\int_{x_1}^{x_2} q(x)dx\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2} 2y(x)y'(x)\int_{x_1}^{x} q(t)dtdx\right|$$

$$\leq |b|\int_{x_1}^{x_2} 2yy'dx+\int_{x_1}^{x_2}|q|dx\int_{x_1}^{x_2} 2yy'dx+\int_{x_1}^{x_2}|2yy'|\int_{x_1}^{x}|q(t)|dtdx$$

bulunur. Eşitsizliğin son terimindeki integralde x yerine x_2 alırsak eşitsizlik büyür. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\left|by^2(x_2)\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2} q(x)y^2(x)dx\right| \leq |b|\int_{x_1}^{x_2} 2yy'dx+\int_{x_1}^{x_2}|q|dx\int_{x_1}^{x_2} 2yy'dx+\int_{x_1}^{x_2} 2yy'\int_{x_1}^{x_2}|q(t)|dtdx$$

$$\leq \left[|b|+2\int_{x_1}^{x_2}|q|dx\right]\int_{x_1}^{x_2} 2yy'dx$$

olur. Cauchy- Bunjakowski eşitsizliğinden

$$\left|by^2(x_2)\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2} q(x)y^2(x)dx\right| \leq \left[|b|+2\int_{x_1}^{x_2}|q|dx\right]2\left[\int_{x_1}^{x_2} y^2dx\right]^{1/2}\left[\int_{x_1}^{x_2}(y')^2dx\right]^{1/2}$$

ve $2A^{1/2}B^{1/2} \leq \varepsilon A+\frac{1}{\varepsilon}B$ eşitsizliğinden

$$\left|by^2(x_2)\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2} q(x)y^2(x)dx\right| \leq \left[|b|+2\int_{x_1}^{x_2}|q|dx\right]\left\{\varepsilon\left[\int_{x_1}^{x_2} y^2dx\right]+1/\varepsilon\left[\int_{x_1}^{x_2}(y')^2dx\right]\right\}$$

elde edilir. Herhangi bir $\varepsilon > \left[|b|+2\int_{x_1}^{x_2}|q|dx\right]$ için

$$by^2(x_2)+\int_{x_1}^{x_2}\left[(y')^2+qy^2-\lambda y^2-\frac{2}{x}y^2\right]dx \geq \int_{x_1}^{x_2}\left[(y')^2-\lambda y^2-\frac{2}{x}y^2\right]dx-|b|\,y^2(x_2)-\left|\int_{x_1}^{x_2} qy^2dx\right|$$

$$\geq \int_{x_1}^{x_2}\left[(y')^2-\lambda y^2-\frac{2}{x}y^2\right]dx-\left[|b|+2\int_{x_1}^{x_2}|q|dx\right]\left\{\varepsilon\left[\int_{x_1}^{x_2} y^2dx\right]+1/\varepsilon\left[\int_{x_1}^{x_2}(y')^2dx\right]\right\}$$

$$\geq \int_{x_1}^{x_2}\left[(y')^2-\lambda y^2\right]dx-\frac{2}{x_1}\int_{x_1}^{x_2} y^2dx-\left[|b|+2\int_{x_1}^{x_2}|q|dx\right]\left\{\varepsilon\left[\int_{x_1}^{x_2} y^2dx\right]+1/\varepsilon\left[\int_{x_1}^{x_2}(y')^2dx\right]\right\}$$

$$=\left\{1-\left[|b|+2\int_{x_1}^{x_2}|q|dx\right]/\varepsilon\right\}\int_{x_1}^{x_2}(y')^2dx+\left\{-\lambda-\frac{2}{x_1}-\varepsilon\left[|b|+2\int_{x_1}^{x_2}|q|dx\right]\right\}\int_{x_1}^{x_2} y^2dx$$

$$=C(\varepsilon)+\left\{-\lambda-\frac{2}{x_1}-\varepsilon\left[|b|+2\int_{x_1}^{x_2}|q|dx\right]\right\}\int_{x_1}^{x_2} y^2dx$$

olur. Burada $C(\varepsilon) > 0$ dır.

$$-\lambda-\frac{2}{x_1}-\varepsilon\left[|b|+2\int_{x_1}^{x_2}|q|\,dx\right]>0$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$0<-\lambda-\frac{2}{x_1}-\varepsilon\left[|b|+2\int_{x_1}^{x_2}|q|\,dx\right]$$

$$\lambda<-\frac{2}{x_1}-\varepsilon\left[|b|+2\int_{x_1}^{x_2}|q|\,dx\right]<-\frac{2}{x_1}-\left[|b|+2\int_{x_1}^{x_2}|q|\,dx\right]^2$$

olur. Böylece

$$\lambda<-\frac{2}{x_1}-\left[|b|+2\int_{x_1}^{x_2}|q|\,dx\right]^2$$

için

$$\varepsilon>\left[|b|+2\int_{x_1}^{x_2}|q|\,dx\right]$$

olduğunda

$$by(x_2)^2+\int_{x_1}^{x_2}\left[\left(y'\right)^2+q(x)y^2-\lambda y^2\right]dx>0$$

olacak şekilde

$$y(x_1)=y'(x_2)+by(x_2)=0$$

şartını sağlayan hiçbir diferansiyel denklem yoktur. O halde

$$\lambda\geq-\left(\frac{2}{x_1}+\left[|b|+2\int_{x_1}^{x_2}|q|\,dx\right]^2\right)$$

olur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 7.1.2 $0<x_1<x_2\leq 1$, $q(x)\in L^2\left[0,1\right]$ olmak üzere

$$y'(x_1)=y'(x_2)=0$$

şartlarını ve

$$-y''+\left(\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x}\right)y+q(x)y=0$$

denklemini sağlayan aşikar çözüm y olmak üzere

$$\frac{1}{x_2^2}-\frac{1}{x_2}\leq 2\left[\int_{x_1}^{x_2}|q|dx\right]^2+\left[1/2\left(x_2-x_1\right)\right]\int_{x_1}^{x_2}|q|dx$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Denklemi y ile çarpıp x_1'den x_2'ye integre edersek

$$\int_{x_1}^{x_2}\left\{-y''y+q(x)y^2+\left(\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x}\right)y^2\right\}dx=0$$

elde edilir.

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} q(x)y^2(x)dx\right|=\left|y^2(x_2)\int_{x_1}^{x_2} q(x)dx-\int_{x_1}^{x_2} 2y(x)y'(x)\int_{x_1}^{x} q(t)dtdx\right| \qquad (7.1.7)$$

olduğunu biliyoruz.

$$y_a=\left[1/\left(x_2-x_1\right)\right]\int_{x_1}^{x_2} y^2dx$$

olsun. y fonksiyonu $\left[x_1,x_2\right]$ aralığında sürekli olduğundan ve ortalama değer teoreminden $y_a=y^2\left(x_3\right)$ olacak şekilde bir $x_3\in\left[x_1,x_2\right]$ vardır.

$$\int_{x_3}^{x_2} 2yy'dx$$

integraline kısmi integrasyon uygularsak

$$y^2(x_2)=y^2(x_3)+\int_{x_3}^{x_2} 2yy'dx=\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} y^2dx+\int_{x_3}^{x_2} 2yy'dx$$

elde edilir. Bu ifadeyi (7.1.7) bağıntısında yerine yazarsak

$$\int_{x_1}^{x_2} qy^2dx=\left\{\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} y^2dx+\int_{x_3}^{x_2} 2yy'dx\right\}\int_{x_1}^{x_2} qdx-\int_{x_1}^{x_2} 2yy'\int_{x_1}^{x} q(t)dtdx$$

olur.

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(q-\frac{2}{x}\right)y^2dx=\left\{\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} y^2dx+\int_{x_3}^{x_2} 2yy'dx\right\}\int_{x_1}^{x_2} q(x)dx-\int_{x_1}^{x_2} 2yy'\int_{x_1}^{x} q(t)dtdx-\int_{x_1}^{x_2}\frac{2}{x}y^2dx$$

Bu eşitliğin mutlak değerini alıp üçgen eşitsizliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(q-\frac{2}{x}\right)y^2dx\right|&=\left|\left\{\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} y^2dx+\int_{x_3}^{x_2} 2yy'dx\right\}\int_{x_1}^{x_2} q(x)dx-\int_{x_1}^{x_2} 2yy'\int_{x_1}^{x} q(t)dtdx-\int_{x_1}^{x_2}\frac{2}{x}y^2dx\right| \\ &\le\left(\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}|q|dx+\frac{2}{x_2}\right)\int_{x_1}^{x_2} y^2dx+\left|\int_{x_3}^{x_2} 2yy'dx\int_{x_1}^{x_2} qdx\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2} 2yy'\int_{x_1}^{x} q(t)dtdx\right| \\ &\le\left(\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}|q|dx+\frac{2}{x_2}\right)\int_{x_1}^{x_2} y^2dx+2\int_{x_1}^{x_2}|2yy'|dx\int_{x_1}^{x_2}|q|dx\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$|2yy'| \le \varepsilon y^2 + (1/\varepsilon)(y')^2$$

eşitsizliğini kullanırsak

$$\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(q-\frac{2}{x}\right)y^2dx\right| \le \left(\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}|q|\,dx+\frac{2}{x_2}\right)\int_{x_1}^{x_2}y^2dx+2\left[\varepsilon\int_{x_1}^{x_2}y^2dx+(1/\varepsilon)\int_{x_1}^{x_2}(y')^2\,dx\right]\int_{x_1}^{x_2}|q|\,dx$$

bulunur. Ayrıca

$$\int_{x_1}^{x_2}-y''\,y\,dx=-y'(x_2)y(x_2)+y'(x_1)y(x_1)+\int_{x_1}^{x_2}(y')^2\,dx=\int_{x_1}^{x_2}(y')^2\,dx$$

ve

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{2}{x^2}y^2dx \ge \int_{x_1}^{x_2}\frac{2}{x_2^2}y^2dx$$

olduğu hemen görülür. Herhangi bir

$$\varepsilon > 2\left[\int_{x_1}^{x_2}|q|\,dx\right]$$

için bir $C(\varepsilon)>0$ sayısı vardır öyle ki

$$\int_{x_1}^{x_2}\left\{-y''\,y+qy^2+\left(\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x}\right)y^2\right\}dx=\int_{x_1}^{x_2}(y')^2\,dx+\int_{x_1}^{x_2}\left(q-\frac{2}{x}\right)y^2dx+\int_{x_1}^{x_2}\frac{2}{x^2}y^2dx$$

$$\ge \int_{x_1}^{x_2}(y')^2\,dx-\left(\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}|q|\,dx+\frac{2}{x_2}\right)\int_{x_1}^{x_2}y^2dx$$

$$-2\left[\varepsilon\int_{x_1}^{x_2}y^2dx+(1/\varepsilon)\int_{x_1}^{x_2}(y')^2\,dx\right]\int_{x_1}^{x_2}|q|\,dx+\int_{x_1}^{x_2}\frac{2}{x_2^2}y^2dx$$

$$=\left(1-\frac{2}{\varepsilon}\left[\int_{x_1}^{x_2}|q|\,dx\right]\right)\int_{x_1}^{x_2}(y')^2\,dx+\left\{\frac{2}{x_2^2}+\frac{2}{x_2}-\left[\int_{x_1}^{x_2}|q|\,dx\right]\left(\frac{1}{x_2-x_1}+2\varepsilon\right)\right\}\int_{x_1}^{x_2}y^2dx$$

$$=C(\varepsilon)+\left\{\frac{2}{x_2^2}+\frac{2}{x_2}-\left[\int_{x_1}^{x_2}|q|\,dx\right]\left(\frac{1}{x_2-x_1}+2\varepsilon\right)\right\}\int_{x_1}^{x_2}y^2dx$$

elde edilir.

$$0<\frac{2}{x_2^2}-\frac{2}{x_2}-\left[\int_{x_1}^{x_2}|q|\,dx\right]\left(\frac{1}{x_2-x_1}+2\varepsilon\right)$$

olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{x_2^2}-\frac{1}{x_2}>\varepsilon\int_{x_1}^{x_2}|q|\,dx+\frac{1}{2(x_2-x_1)}\int_{x_1}^{x_2}|q|\,dx$$

$$>2\left[\int_{x_1}^{x_2}|q|\,dx\right]^2+\frac{1}{2(x_2-x_1)}\int_{x_1}^{x_2}|q|\,dx$$

olmalıdır. Böylece

$$\int_{x_1}^{x_2}\left\{-y''y+qy^2+\left(\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x}\right)y^2\right\}dx>0$$

olur ki bu da kabulümüzle çelişir. O halde

$$\frac{1}{x_2^2}-\frac{1}{x_2}\leq 2\left[\int_{x_1}^{x_2}|q|dx\right]^2+\left[1/2\left(x_2-x_1\right)\right]\int_{x_1}^{x_2}|q|dx$$

olur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

SONUÇ

Bu tezde regüler ve singüler Sturm-Liouville operatörünün spektral teorisi ile ilgili yapılan çalışmalar incelenmiştir. Bu çalışmalar daha detaylı bir şekilde üç ve dördüncü bölümde verilmiştir. Beşinci bölümde ise bu çalışmalardan faydalanarak Coulomb potansiyeline sahip Sturm-Liouville operatörünün özdeğerleri için asimptotik formüller bulunmuştur. Altıncı bölümde Difüzyon denklemi için Counting Lemma ispatlanmış ve bu lemma yardımıyla özdeğerler için asimptotik formüller bulunmuştur. Yedinci bölümde ise daha önce Sturm-Liouville operatörünün L^2 den olan potansiyel fonksiyonundan farklı olarak L^2 den olmayan potansiyel fonksiyonları ele alınmış ve özdeğerlerin asimptotik davranışı incelenmiştir. İleride ise bu çalışmaların regüler ve singüler Dirac operatörü için yapılması düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] **Sturm, C.,** 1836. Mémoire sur les Équations différentielles linéaires du second ordre. *J. Math. Pures Appl,* **1**, 106-186

[2] **Liouville, J.,** 1836. Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries de sinus et de cosinus. **Journ. Math. Pures Appl. 1**, 14-32.

[3] **Birkhoff, G. D.,** 1908. Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations, *Transactions of the American Mathematical Society,* **1**, 219- 231

[4] **Birkhoff, G.D.,** 1908. On the Asymptotic Character of the Solution of the Certain Linear Differential Equations Containing Parameter,*Trans. Amer. Math. Soc.*, **9**, 219-231.

[5] **Titchmarsh, E.C.,** 1946. Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations, Oxford.(vol.**1**).

[6] **Gelfand, I. M. and Levitan, B. M.,** 1951.On identification of the differential expression via its spectral function, *Izv Akad Nauk SSSR (in Russian*), *Sek. Matem,* **15**, 309-360.

[7] **Levitan, B.M.,** 1964. Generalized Translation Operators and some of its Applications, *Jerusalem.*

[8] **Gelfand, I.M. and Levitan, B.M.,** 1951. On the Determination of a Differential Equations by its Spectral Function, *Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Math.,***15**, 309-360.

[9] **Levitan, B.M.,**1950. Expansion in Characteristic Functions of Differential Equations of the Second Order(in Russian), *Gostekhizdat, Moscow.*

[10] **Courant, R., Hilbert, D.,** 1953. Methods of Mathematical Physics, **1** *Interscience, New York*, 560p.

[11] **Birman, M. Sh. and Solomyak, M. Z.**, 1977. Asymptotic properties of the spectrum of differential equations, *Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Mat. Anal*., **14**, VINITI, Moscow, 5–58.

[12] **Birman, M. Sh., Solomyak M. Z.,** 1978. On asymptotic behaviour of the spectrum of variational problems with constraints. *Izdat. Mosk. Univ., Moscow,***1,** 51-52

[13] **Carleman, T.,** 1957. Problèmes mathématiques dans la théorie cinétique des gaz (in French)

[14] **Pöschel, J. and Trubowitz, E.,** 1987. Inverse Spectral Theory, *Academic Press, New York.*

[15] **Levitan, B.M. and Sargsjan, I.S.,** 1975. Introduction to spectral Theory, *Rhode Island.*

[16] **Fedoryuk, M. V.,** 1989. Asymptotic Methods in Analysis, *Encyclopaedia of Mathematical Sciences,* **13**, 83-191.

[17] **Abdukadyrov, E.,** 1970 Sturm-Liouville operatör probleminin asimptotik dağılımı, DAN Uzb SSR, **12**, 3-5

[18] **Aleksandriiskii, B.I.,** 1973. Asymptotic behaviore of the positive eigenvalues of second order linear integro-differential equations, Izv. VUZ. Mat., **12**, 3-9.

[19] **Cohn, J.H.E.,** 1969. On the nagative eigenvalues of a singular boundary value problem, Quart. J.Math, **20** , No 78, 187-191.

[20] **Alekseev, A.B.,** 1977. Bir local olmayan Dirichlet probleminin küçük parametreye göre asimptotiği,Vestnik LGU, No:2, 157-159.

[21] **Alekseev, A.B., Birman M. Sh.,** 1976. Çözülen bağıntılara göre eliptik problemlerin spektrumunun asimptotiği, DAN SSSR, V. **230**, No: 3 pp 505-508.

[22] **Landau, L.D., Lifshits, E.M.,** 1948. Kuantum mekaniği, *M.L.Gostekhizdat*

[23] **Otelbayev, M., Apishev, O.D.,** 1975. Sturm-Liouville operatörünün özdeğerlerinin dağılımına ilişkin klasik formül üzerine, *İzv. A.N. Kaz. SSR. Fiz-Mat. Seri,***3**, 24-28.

[24] **Gohberg, İ.Ts., and Krein M.G.,** 1965. Lineer self-adjoint olmayan oparetörler teorisine giriş. *M, Nauka.*

[25] **Eastman, M.S.P.,** 1964. The Distribution of Eigenvalues in certain eigenvalue problems., *Quart J. Math. Oxford*, 1964, Ser (**2**), 15, pp 251-257.

[26] **Otelbayev, M., Sultanayev, Y.T.,** (1973) Singüler diferansiyel operatörlerinin özdeğerlerinin dağılımına ilişkin formüller, *Matem. Zametki,***14**,3, pp 361-368

[27] **Mc Leod, J.B.,** The distribution of the eigenvalues fort he hydrogen atom and similar cases, *Proc. London Math. Soc.,* 1961, **11**, No:3, pp 139-158

[28] **Levitan, B.M.,** 1964. Generalized Translation Operators and some of its Applications, *Jerusalem.*

[29] **Marchenko, V.A.,** 1950. Some Problems in the Theory of Second–Order Differential Operators, *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* **72**, 457-560.

[30] **Krein, M.G.,** 1951. Solution of the Inverse Sturm-Liouville problem, *Dokl. Akad. Nauk SSSR,***76**, 21-24.

[31] **Sakhnovich, L.A.,** 1965. Sıfır noktasının komşuluğunda Radial Schrödinger denkleminin spektrumu üzerine, *Matem. Sb.,* V.**67**, no:2, pp 221-243.

[32] **Sakhnovich, L.A.,** (1969) Radial Dirac denkleminin diskret ve sürekli spektrumunun özellikleri, *DAN SSSR*, V. **185**, No:1, pp 61-64.

[33] **Kogan, V.R., Krakhnov, A.D.,**1972. Kompakt Rieamann manifoldu üzerinde Laplace operatörünün özdeğer ve özfonksiyonlarının asimptotiği, *Radio Fizika* V **15** No 3 pp 448-453

[34] **Eastman, M.S.P.,** 1975. Results and problems in the spectral theory of periodic differential equations, *Lect. Notes in Math.* V **448** pp 126-135

[35] **Tulovskii, V.N., Shubin, M.A.,** 1973. Pseudo diferansiyel operatörlerin özdeğerlerinin asimptotiği üzerine, *Uspekhi Matem. Nauk*. v.**28** no 5 pp 242

[35] **Kiprianov, İ.A.,** 1972. Singüler eliptik operatörlerin özdeğer ve özfonksiyonların asimptotik dağılımı, *Tr.Matem.İns.AN SSSR*, v.**117**., pp 159-179.

[36] **Panakhov, E.S., Ulusoy, İ.,** 2015. Asymptotic behavior of eigenvalues of hydrogen atom equation, *Boundary value problems*, V. **87**.

[37] **Markushevich A.I.,** 1977. Introduction to Analytic Functions Theory I,II, *Moskow.*

[38] **Kreyszig, E.,** 1978. Introductory Functional Analysis with Applications, *John Wiley and Sons, New York.*

[39] **Guillot, J. C. and Ralston, J. V.,**1988. Inverse spectral theory for a singular Sturm–Liouville operator on [0, 1], *J. Differential Equations,***76** (2), 353–373.

[40] **Musayev, B., Alp, M.,** 2000. Fonksiyonel Analiz, *Balcı yayınları, Kütahya,* 470s.

[41] **Smirnov, V.I.,** 1964. A Course of Higher Mathematics, Part 5, *Pregman Press, Oxford*.

[42] **Levitan, B.M., and Sargsyan, I.S.,** 1990. Sturm-Liouville and Dirac Operators, *Netherlands.*

[43] **Naimark, M. A.,** 1968. Linear Differential Operators, *Frederik Ungar Publishing Co. Inc., London*.

[44] **Ocak, R.,** 1993. Kompleks Analiz, *Atatürk Üni.,* Erzurum.

[45] **Freiling, G. and Yurko, V.,** 2001. Inverse Sturm-Liouville problems and their Applications, *Nova Science Pub. Inc.*, 305p.

[46] **İdemen, M.,** 1999. *Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi*, Işık ün., İstanbul.

[47] **Tricomi, F.G.,**1967. Integral Equations, Interscience publihers, *INC.,* Newyork.

[48] **Hacısalihoğlu, H.H., Haciyev, A., Kalantarov, V., Sabuncuoğlu, A., Brown L. M., İbikli, E., Brown, S.,** 2000. Matematik Terimleri Sözlüğü, *Türk Dil Kurumu Yayınları,* Ankara, 678s.

[49] **Olver, F.W.J.,** 1974. Introduction to asymptotics and special functions, *Akademic pres,* New York and London, 375p.

[50] **Balcı, M.,** 1997. *Analiz II*, Balcı yayınları, Ankara, 420s.

[51] **Hardy, G.H., Littlewood, J.E., and Polya, G.,** 1934. Inequalities, *Cambridge University Press*, London.

[52] **Liusternik, L.A. and Sobolev, V.J.,** 1961. Elements of Functional Analysis. *Frederick Ungar Publishing Company*, New York.

[53] **Carlson, R.,** 1993, Inverse spectral theory for some singular Sturm-Liouville problems, *J. Differential Equations*, 121-140.

[54] **Gasymov, M. G. and Guseinov, G. Sh.,** 1981. Determination of a diffusion operator from spectral data, *Dokl. Akad. Nauk Azerbaijan SSR,* **37**(2), 19-22 (Russian).

[55] **Nabiev, I.M.,** 2004. The inverse spectral problem for the diffusion operator on an interval, *Matematicheskoj Fiziki, Analiza, Geometrii,* **11**, 302–313.

[56] **Gekhtman, M.M.,** 1977. Soyut Sturm-Liouville operatörü için Dirichlet ve Neumann problemlerinin özdeğerlerinin asimptotiği, *Matem.Zametki*. V **21** No 2 209-212

[57] **Kostyuchenko, A.G., and Sargsyan, I.S.,** 1979. Distribution of eigen values, *Nauka* , Moscow

[58] **Gasymov,M.G.,** 1965. Determination of a Sturm–Liouville equation with a singularity by two spectra, *Dokl. Akad. Nauk,* SSSR, **161**, 274–276.

[59] **Gasymov,M.G.,** 1965. Determination of a Sturm–Liouville equation with a singularity by two spectra, *Dokl. Akad. Nauk,* SSSR, **161**, 274–276.

[60] **Zhornitskaya, L.A. and Serov, V. S.,** 1994. Inverse eigenvalue problems for a singular Sturm–Liouville operator on [0,1], *Inverse Problems,* **10** (4), 975–987.

[61] **Panakhov, E.S. and Koyunbakan, H.,** 2003. Inverse problem for singular Sturm-Liouville operator, *Proceeding of IMM of NAS of Azerbaijan*, 113–126.

[62] **Serier, F.,**2007. The inverse spectral problem for radial Schrödinger operators on [0,1], *J. Differential Equations*, **235** (1), 101–126.

[63] **Albeverio, S., Hryniv, R. and Mykytyuk, Ya.,**2007. Inverse spectral problems for Bessel operators, *Journal of Differential Equations,* **241**, 1, 130-159.

[64] **Isaacson, E.L. and Trubowitz, E.,** 1983. The inverse Sturm-Liouville problem I, *Comm. Pure Appl. Math.* v. **36**, pp 767-783.

[65] **Isaacson, E. L., McKean, H. P. and Trubowitz, E.,** 1984. The inverse Sturm-Liouville problem II, *Comm. Pure Appl. Math*., v.**37**, pp 1-11.

[66] **Dahlberg, B.E.J. and Trubowitz, E.,** 1984. The inverse Sturm-Liouville Problem III, *Comm. Pure Appl. Math*., v. **37**, pp. 255-267.

[67] **Bas, E. , Panakhov, E. and Yılmazer, R.,** 2013. The uniquness theorem for hydrogen atom equation., *TWMS Jour. Pure Apple. Math*., v. **4** No 1, pp 1-9

[68] **Panakhov, E.S. and Şat, M.,** 2012. İnverse problem for interior spectral data of the hydrogen atom equation. *Ukraine Math. Journal* ,v. **64**, No 11, pp 1516-1525.

[69] **Sat, M. and Panakhov, E.S.,** 2014. Spectral Problem for Diffusion Operator, *Applicable Analysis*, Vol. **93**, No.6, 1178-1186.

[70] **Guseinov, G. Sh.,** 2014. On Construction of a Quadratic Sturm-Liouville Operator Pencil From Spectral Data, *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics,, National Academy of Sciences of Azerbaijan,* Volume **40**, Special Issue, Pages 1-12.

[71] **Kalmogorov, A.N. and Fomin, S.V.,** 1972. Fonksiyonel Analiz ve Fonksiyonlar Teorisinin Elemanları. *Nauka*, **496**, Moskow.

[72] **Gasymov, M.G.,** 1965. The Definition of Sturm-Liouville Operator from Two Spectra, *DAN*, SSSR,Vol.**161**, No. 2, pp. 274-276.

[73] **Hochstadt, H. and Lieberman, B.** 1978. An inverse sturm-liouville problem with mixed given data, *SIAM J. Appl. Math.*, V.**34**, pp.676-680 .

[74] **Panakhov, E. S., and Yilmazer, R.,** 2012. A Hochstadt-Lieberman theorem for the hydrogen atom equation, *Applied and Computational Mathematics*,**11**,No 1,74-80.

[75] **Panakhov, E. S., and Yilmazer, R.,** 2006. On inverse problem for singular Sturm-Liouville operatör from two spectra, *Ukrainian Mathematical Jour*, **58**(1), 147-154.

[76] **Panakhov, E. S., and Sat, M.,** 2013. Reconstruction of potential function for Sturm-Liouville operator with Coulomb potential, *Boundary Value Problems,* **49** .

[77] **Bas, E., Metin, F.,** 2013. Fractional singular Sturm-Liouville operator for Coulomb potential, *Advances in Di¤erence Equations*, 2013:**300**.

[78] **Newton, R.G.,** 1982. Scattering Theory of Waves and Particles, *Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag,* New York.

[79] **de Wet, JS; Mandl, F.,** 1950. On the Asymptotic Distribution of Eigenvalues, *Proc. R. Soc. Lond.*, A vol. **200**, 572-580

[80] **Clark, C.,** 1967. The Asymptotic Distribution of Eigenvalues and Eigenfunctions for Elliptic Boundary Value Problems, *SIAM Rev.*, Vol. **9**, pp. 627-646

[81] **Panakhov, E.S.,** 1981. The definition of differential operator with peculiarity in zero on two spectrum, *DEP.VINITI*, (4407), 1–16.

[82] **Watson, G.A.,** 1962. Treatise on the Theory of Bessel Functions (*Cambridge: Cambridge UniversityPress*).

[83] **Chadan, K. and Sabatier, P. C.,**1977. Inverse problems in quantum scattering theory.

[84] **Rundell, W. and Sacks, P. E.,** 1991. Reconstruction of a Radially Symmetric Potential from Two Spectral Sequences, *J. of Math. Anal. and Appl.,***264**, 354-381.

[85] **Jaulent, M., Jean, C.,** 1972. The inverse s-wave scattering problem for a class of potentials depending on energy, *Communications in Mathematical Physics*., **28**, 177–220.

[86] **Buterin, S.A., Yurko, V.A.,** 2006. Inverse spectral problem for pencils of differential operators on a finite interval,*Vesn. Bashkir. Univ*., **4**, 8–12.

[87] **Mc Leod, J.B.,** 1961. The distribution of the eigenvalues fort he hydrogen atom and similar cases, *Proc. London Math. Soc.*, **11**, No:3, pp 139-158

[88] **Fix, G.,** 1967. Asymptotic eigenvalues of Sturm-Liouville systems. *J.Math. Analysis and applic.*, **19**, No:3, pp 519-525.

[89] **Boimatov, K. Kh.,** 1974. Schrödinger operatörünün spektrumunun asimptotiği, . *Dif.Uravneniya*(Russian) V.**10**, No:11, pp 1939-1945

[90] **Bayramoğlu, M.** 1977. Sıfır noktasında tekilliğe sahip Sturm-Liouville operatör denkleminin özdeğerlerinin asimptotiği., *Spektralnaya Teoriya Operatorov*, Baku, ELM. pp 48-56.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında İstanbul'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 2007 yılında Hacettepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden mezun oldu. 2008 yılında Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansını yapmaya başladı. Aynı yıl Adıyaman Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atandı. 2011 yılında yüksek lisans eğitimini tamamladıktan sonra aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora eğitimine başladı. Halen doktora eğitimine devam etmektedir.