T.C.

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK SAYI DİZİLERİNDE $\beta-$DERECEDEN $f-$İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mithat KASAP

(131121105)

Anabilim Dalı : Matematik

Program : Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Tez Danışmanı: Doç.Dr. Hıfsı ALTINOK

Ekim-2016

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK SAYI DİZİLERİNDE $\beta-$DERECEDEN $f-$İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mithat KASAP
(131121105)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih	:	12 Ekim 2016
Tezin Savunulduğu Tarih	:	27 Ekim 2016

Tez Danışmanı	:	Doç.Dr. Hıfsı ALTINOK
Diğer Jüri Üyeleri	:	Prof.Dr. Mikail ET
	:	Doç.Dr. Mahmut IŞIK

Ekim-2016

ÖNSÖZ

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygıdeğer hocam Doç. Dr. Hıfsı ALTINOK'a üzerimdeki emeklerinden dolayı çok teşekkür eder, saygılar sunarım.

Mithat KASAP

ELAZIĞ-2016

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Bulanık Sayı Dizilerinde
$\beta-$Dereceden $f-$İstatistiksel Yakınsaklık

Beş esas bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde istatistiksel yakınsaklık ve bulanık sayıların kısa bir tarihçesinden bahsedilmiştir. İkinci bölümde, çalışmamızın içerisinde geçen bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiş olup üçüncü bölümde bulanık sayı, bulanık küme ve bulanık sayı dizisi tanımları verilerek bulanık sayı dizilerinin yakınsaklığı, sınırlılığı, istatistiksel yakınsaklığı ve kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilme gibi bazı özelliklerinden bahsedilmiştir. Çalışmamızın dördüncü bölümü orjinal olup, sınırsız bir f modülüs fonksiyonu kullanılarak $\beta \in (0,1]$ reel sayısı için bulanık sayı dizilerinde $\beta-$dereceden $f-$istatistiksel yakınsaklık ve $\beta-$dereceden kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilme kavramları tanımlanmış ve aralarındaki bazı kapsama bağıntıları incelenmiştir. Beşinci ve son bölümde ise tez çalışmasında elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık sayı dizisi, İstatistiksel yakınsaklık, Cesàro toplanabilme, Modülüs fonksiyonu.

SUMMARY

$f-$Statistical Convergence of order β of Sequences of Fuzzy Numbers

This study consists of the five main chapters. In the chapter 1 and 2, we give some informations about the historical development of statistical convergence and fuzzy numbers, and some fundamental definitions and theorems which are necessary in this study, respectively. In the third chapter, we give the concepts of fuzzy set, fuzzy number and sequence of fuzzy numbers and mention convergence, boundedness, statistical convergence and strongly $p-$Cesàro summability of the sequences of fuzzy numbers. In the fourth chapter which is original, we introduce the notions $f-$statistical convergence of order β and strong Cesàro summability of order β for $\beta \in (0,1]$ with respect to an unbounded modulus function f for sequences of fuzzy numbers and examine some inclusion theorems. In the fifth and last chapter, we give the results obtained from the thesis.

Keywords: Sequence of fuzzy numbers, Statistical convergence, Cesàro summability, Modulus function.

ŞEKİLLER LİSTESİ

SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı semboller açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
$L(\mathbb{R}^n)$	:	$n-$boyutlu reel bulanık sayılar kümesi
A^α	:	A bulanık kümesinin $\alpha-$kesimi
$cl(A)$	:	A kümesinin kapanışı
$\operatorname{supp} A$	:	A bulanık kümesinin desteği (support)
$h.h.k$	:	hemen hemen her k
$S^\beta(F,f)$	:	$\beta-$dereceden $f-$istatistiksel yakınsak bulanık sayı dizilerin uzayı
$S^{\beta,0}(F,f)$	:	$\beta-$dereceden sıfıra $f-$istatistiksel yakınsak bulanık sayı dizilerin uzayı
$w^\beta(F,f)$	:	Bir modülüs fonksiyonuna göre $\beta-$dereceden kuvvetli Cesàro toplanabilir bulanık sayı dizilerin uzayı
$w^{\beta,0}(F,f)$	:	Bir modülüs fonksiyonuna göre sıfıra $\beta-$dereceden kuvvetli Cesàro toplanabilir bulanık sayı dizilerin uzayı

1. GİRİŞ

Reel sayı dizilerindeki yakınsaklık kavramını genelleştirmek amacıyla birbirinden bağımsız olarak Fast [1] ve Schoenberg [2] tarafından farklı bir kavram olan istatistiksel yakınsaklık tanımlanmıştır. İstatistiksel yakınsaklık farklı isimler altında Fourier analiz, Ergodic teori ve Sayı teorisinde kullanılmıştır. Daha sonra bu konu toplanabilme, topolojik gruplar ve fonksiyon uzayları konularıyla da ilişkilendirilmiştir ([3],[4],[5],[6],[7],[8],[9]).

Matloka [10], 1986 yılında bulanık sayı dizisini tanımlayarak bu dizilerin yakınsaklığı ve sınırlılığı gibi temel özelliklerini açıklamıştır. Daha sonra 1995'de Nuray ve Savaş [11] bulanık sayı dizileri için istatistiksel yakınsaklık tanımını vermiş ve o tarihten bu yana bu konuyla ilgili pek çok çalışma yapılmıştır ([12],[13],[14],[15],[16]).

2010 yılında Çolak [17], $[0, 1]$ aralığını derecelendirerek istatistiksel yakınsaklığı genelleştirip reel sayı dizileri için $\alpha \in (0, 1]$ bir reel sayı olmak üzere $\alpha-$dereceden istatistiksel yakınsaklık ve $p > 0$ için $\alpha-$dereceden kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilmeyi tanımlamış ve aralarında bazı kapsama bağıntıları vermiştir. Daha sonra bu kavramlar Altınok vd.[18] tarafından bulanık sayı dizileri için tanımlanmış ve çeşitli sonuçlar elde edilmiştir. Son zamanlarda Aizpuru [19] tarafından bir modülüs fonksiyonu kullanılarak reel sayı dizileri için $f-$istatistiksel yakınsak ve sonra da Bhardwaj [20] tarafından $\alpha \in (0, 1]$ reel sayısı için $\alpha-$dereceden $f-$istatistiksel yakınsak ve $\alpha-$dereceden kuvvetli Cesàro toplanabilir dizilerin uzayları verilmiş, bu uzaylar arasında bazı kapsama bağıntıları elde edilmiştir. $\alpha-$dereceden istatistiksel yakınsaklık ve $\alpha-$dereceden kuvvetli Cesàro toplanabilme kavramları ile ilgili hala pek çok matematikçi tarafından bilimsel çalışmalar yapılmaktadır ([21],[22],[23]).

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1. ([24]) $X \neq \emptyset$ bir küme ve K reel veya kompleks sayılar cismi olmak üzere

$$+ : X \times X \to X,$$

$$\cdot : K \times X \to X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X kümesine K skaler cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) adı verilir. Her $x, y, z \in X$ ve her $\lambda, \mu \in K$ için

i) $x + y = y + x$

ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$

iii) Her $x \in X$ için $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.

iv) Herbir $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.

v) $1.x = x$

vi) $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$

vii) $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$

viii) $\lambda (\mu x) = (\lambda \mu) x$.

Tanım 2.2. ([24]) X boş olmayan bir küme olsun. Her $x, y, z \in X$ için

i) $d(x, x) = 0$

ii) $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$

iii) $d(x, y) = d(y, x)$

iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

özelliklerine sahip $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna metrik ve (X, d) ikilisine de metrik uzay denir.

Tanım 2.3. ([25]) Kompleks terimli bütün $x = (x_k)$, $(k = 1, 2, 3, ...)$ dizilerinin kümesini s ile göstereceğiz. $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere

$$x + y = (x_k) + (y_k)$$

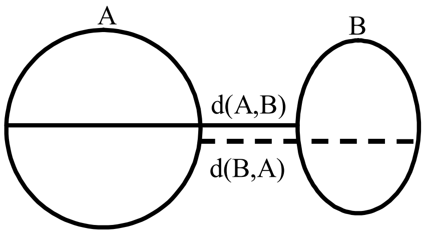
$$\alpha x = (\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında s bir lineer uzaydır. s nin her alt lineer uzayına bir dizi uzayı denir.

Tanım 2.4. ([26]) (X,d) bir tam metrik uzay olsun. X in boş olmayan bütün kompakt alt kümelerinin sınıfını $\mathfrak{h}(X)$ ile gösterelim. $A,B\in\mathfrak{h}(X)$, $x\in A$ ve $y\in B$ için A kümesinin B kümesine uzaklığı $d(x,B)=\inf\limits_{y\in B} d(x,y)$ olmak üzere

$$d(A,B)=\sup_{x\in A} d(x,B)$$

şeklinde tanımlanır. A ve B kümeleri için genellikle $d(A,B)\neq d(B,A)$ dır (Şekil 2.1).



Şekil 2.1. İki kümenin birbirine uzaklıkları

Burada $d(A,A)=0$ olduğu açıktır. $A,B,C\in\mathfrak{h}(X)$ kümeleri için

$$d(A,B)\leq d(A,C)+d(C,B)$$

bağıntısı sağlanır. Gerçekten, her $z\in C$ noktası için

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \sup_{x\in A}\inf_{y\in B} d(x,y)\leq \sup_{x\in A}\inf_{y\in B}\left[d(x,z)+d(z,y)\right] \\ &\leq \sup_{x\in A} d(x,z)+\inf_{y\in B} d(z,y),\ \forall z\in C \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu bağıntı sağ taraftaki her iki terimde de C kümesinin her z noktasını yerleştirdiğimizde geçerli olduğuna göre birinci terimde $d(x,z)$ uzaklığını minimum, ikinci terimde ise $d(z,y)$ uzaklığını maksimum yapan z noktalarını kullanırsak

$$d(A,B)\leq \sup_{x\in A}\inf_{z\in C} d(x,z)+\sup_{z\in C}\inf_{y\in B} d(z,y)=d(A,C)+d(C,B)$$

buluruz.

Şimdi $\mathfrak{h}(X)$ üzerinde bir $h:\mathfrak{h}(X)\times\mathfrak{h}(X)\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ fonksiyonunu her $A,B\in\mathfrak{h}(X)$ için

$$h(A,B)=\max\{d(A,B),d(B,A)\}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu fonksiyon $\mathfrak{h}(X)$ üzerinde metrik şartlarını sağlar. Yani bu h küme fonksiyonu gerçekten bir metrik olup Hausdorff metriği adını alır.

Tanım 2.5. ([27]) $K \subset \mathbb{N}$ olmak üzere bir K kümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

şeklinde tanımlanır. Burada $|\{k \leq n : k \in K\}|$ ifadesi K kümesinin n den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermektedir.

Eğer $\delta(K) = 0$ ise K kümesine sıfır yoğunluklu küme denir.

Tanım 2.6. ([3]) Herhangi bir $x = (x_k)$ dizisinin terimleri bir P özelliğini sıfır yoğunluklu bir küme dışında bütün k lar için sağlıyorsa, (x_k) dizisi hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir ve "$h.h.k$" biçiminde gösterilir.

Doğal yoğunluk kavramından faydalanılarak istatistiksel yakınsaklık tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 2.7. ([3]) $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

veya $h.h.k$ için $|x_k - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $S - \lim x_k = L$ veya $x_k \xrightarrow{s} L$ biçiminde gösterilir.

İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S ile gösterilir. Eğer özel olarak $L = 0$ ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel sıfır dizisi denir. İstatistiksel yakınsak sıfır dizilerinin kümesi S_0 ile gösterilir. Buna göre

$$S = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0,\ \exists L \in \mathbb{C} \right\}$$

ve

$$S_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Açıkça görüleceği gibi yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Yani $\lim x_k = L$ ise $S - \lim x_k = L$ dir. Fakat bunun tersi doğru değildir. Gerçekten,

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \text{ ise} \quad (m = 1, 2, ...) \\ 0, & k \neq m^2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{n}\left|\{k \leq n : x_k \neq 0\}\right| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Bu $S - \lim x_k = 0$ olduğu anlamına gelir. Ancak (x_k) yakınsak değildir.

Diğer taraftan istatistiksel yakınsak bir dizi sınırlı olmak zorunda değildir. Yani ℓ_∞ ve S uzayları birbirlerini kapsamazlar, ancak ortak elemanları vardır. Gerçekten,

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2 \text{ ise} \quad (m = 1, 2, ...) \\ 1, & k \neq m^2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $S - \lim x_k = 1$ dir, ancak $x \notin \ell_\infty$ dir. $x = (1, 0, 1, 0, ...)$ dizisi sınırlıdır. Ancak istatistiksel yakınsak değildir.

Bir dizi istatistiksel yakınsak ise istatistiksel limiti tektir, yani $S - \lim x_k = L_1$, $S - \lim x_k = L_2$ ise $L_1 = L_2$ dir.

Tanım 2.8. ([3]) Bir $x = (x_k)$ kompleks terimli dizisini göz önüne alalım. $\varepsilon > 0$ verilsin. Eğer $h.h.k$ için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa yani,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left|\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Teorem 2.9. ([1]) $S - \lim x_k = a$, $S - \lim y_k = b$ ve c bir reel sayı olsun. Bu taktirde

i) $S - \lim cx_k = ca$ dır.

ii) $S - \lim (x_k + y_k) = a + b$ dir.

Bu teoreme göre istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi bir lineer uzay olur.

Teorem 2.10. ([3]) Aşağıdaki önermeler denktir.

i) x dizisi istatistiksel yakınsaktır,

ii) x dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir,

iii) $h.h.k$ için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi vardır.

Tanım 2.11. ([28]) Aşağıdaki şartları sağlayan bir $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonuna modülüs fonksiyonu denir:

i) $f(x) = 0$ ancak ve ancak $x = 0$,

ii) $x, y \geq 0$ için $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$,

iii) f artandır,

iv) f fonksiyonu $x = 0$ noktasında sağdan süreklidir.

Bir modülüs fonksiyonu sınırlı veya sınırsız olabilir. Örneğin, $f(x) = x^p, (0 < p \leq 1)$ sınırsız olmasına rağmen $f(x) = \frac{x}{1+x}$ fonksiyonu sınırlıdır.

3. BULANIK KÜMELER VE BULANIK SAYI DİZİLERİ

Bu bölümde bulanık kümeler ve bulanık sayıların temel özellikleri verildi. Ayrıca bulanık sayı dizisinin tanımı ve bazı özellikleri verilerek bu dizilerin istatistiksel yakınsaklığı ve kuvvetli Cesàro toplanabilirliği örneklerle açıklandı.

3.1. Bulanık Kümeler ve Bulanık Sayılar

Tanım 3.1.1. X herhangi bir küme ve A, X in bir alt kümesi olsun. Bu durumda

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \text{ ise} \\ 0, & x \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $f_A : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna A kümesinin karakteristik fonksiyonu denir. Buna göre X in bir A alt kümesini karakteristik fonksiyon yardımıyla

$$A = \{x \in X : f_A(x) = 1\}$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

Karakteristik fonksiyonu kullanarak X in herhangi bir elemanının A kümesinin elemanı olup olmadığını kesin olarak anlayabiliriz.

Aşağıda Zadeh [29] tarafından tanımlanan bazı tanımları verelim.

Tanım 3.1.2. χ, elemanları x ile gösterilmiş bir nesneler kümesi olsun. χ kümesinde bir A bulanık kümesi, χ deki herbir noktayı $[0,1]$ aralığındaki bir reel sayıya karşılık getiren bir $X_A(x)$ karakteristik fonksiyonu ile karakterize edilir.

χ deki bir A bulanık kümesinden bahsedilirken $X_A : \chi \to [0,1]$ şeklinde bir karakteristik fonksiyon daima mevcuttur. Bu fonksiyon $x \in A$ için $X_A(x) \in (0,1]$, $x \notin A$ için $X_A(x) = 0$ biçiminde tanımlanır. Bu şekilde tanımlanmış karakteristik fonksiyona bundan sonra üyelik fonksiyonu diyeceğiz.

Üyelik fonksiyonunun tanımından yararlanarak bir A bulanık kümesini

$$A = \{x \in \chi : X_A(x) \in (0,1]\}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Burada $X_A(x)$ in değeri A bulanık kümesindeki x noktasının üyelik derecesini göstermektedir. Buna göre $X_A(x)$ in 1 e en yakın değeri, A bulanık kümesindeki x in en yüksek üyelik derecesidir. Eğer A kümesi klasik anlamda bir küme ise üyelik fonksiyonu sadece 0 ve 1 değerlerini alır. Burada $X_A(x) = 1$ veya $X_A(x) = 0$ olması x in A ya ait olması veya olmaması demektir. Buna göre $X_A(x)$, A kümesinin bilinen karakteristik fonksiyonuna indirgenmiş olur.

Tanım 3.1.3. Bir A bulanık kümesinin normal olması için gerek ve yeter şart $X(x_0) = 1$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in \chi$ olmasıdır.

Örnek 3.1.4.

$$X(x) = \begin{cases} \frac{2x-5}{5}, & x \in \left[\frac{5}{2}, 5\right] \text{ ise} \\ \frac{-2x+15}{5}, & x \in \left[5, \frac{15}{7}\right] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

bulanık kümesi $x = 5$ için 1 değerini aldığından normaldir.

Konvekslik kavramı, klasik kümelerdeki pek çok özellik korunacak şekilde bulanık kümelere genişletilebilir. Bu kavram, bulanık sayının tanımını yapabilmek için gerekli olan önemli özelliklerden birisidir. Konveksliğin tanımını vermeden önce $\alpha-$seviye kümesi tanımını verelim.

Tanım 3.1.5. A bir bulanık küme olsun ve $\alpha \in (0,1]$ verilsin. A bulanık kümesinin $\alpha-$seviye ($\alpha-$kesim) kümesi A^α ile gösterilir ve

$$A^\alpha = \{x \in \chi : X_A(x) \geq \alpha\}$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak 0-seviye kümesi $cl\{x \in \mathbb{R} : X_A(x) > 0\}$ şeklinde tanımlanır.

Bu tanımın benzeri olan ve bulanık kümelerde sık kullanılan "destek" kavramını şu şekilde tanımlayabiliriz.

Tanım 3.1.6. A bir bulanık küme olsun. A nın desteği (support), üyelik derecesi sıfır olmayan bütün noktaların kümesidir ve

$$\text{supp}(A) = \{x \in \chi : X_A(x) > 0\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.1.7. χ, n boyutlu $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayı olsun. Bir A bulanık kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart her $\alpha \in (0,1]$ için A^α kümesinin konveks olmasıdır.

Konveksliğin diğer bir tanımı ise şöyle verilebilir.

Tanım 3.1.8. Bir A bulanık kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart her $\lambda \in [0,1]$ ve her $x_1, x_2 \in \chi$ için

$$X_A\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \geq \min\left\{X_A(x_1), X_A(x_2)\right\}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Tanım 3.1.9. ([30]) Bir reel bulanık sayı aşağıdaki şartları sağlayan bir $X : \mathbb{R} \to [0,1]$ fonksiyonudur.

i) X normaldir, yani $X(x_0) = 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in \mathbb{R}$ mevcuttur,

ii) X bulanık konvekstir, yani herhangi $x, y \in \mathbb{R}$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$X\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) \geq \min\left\{X(x), X(y)\right\}$$

eşitsizliği sağlanır,

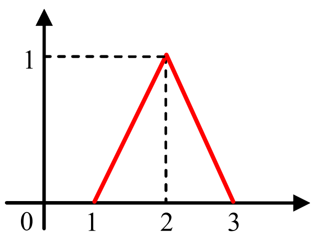
iii) X üst-yarı-süreklidir,

iv) $X^0 = \{x \in \mathbb{R} : X(x) > 0\}$ kümesinin kapanışı kompakttır.

Örnek 3.1.10.

$$X(x) = \begin{cases} x-1, & x \in [1,2] \text{ ise} \\ -x+3, & x \in [2,3] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $X : \mathbb{R} \to [0,1]$ fonksiyonu, bir bulanık sayısıdır ve grafiği aşağıdaki gibidir:



Şekil 3.1. Bir bulanık sayı

Bütün reel bulanık sayılar kümesini $L(\mathbb{R})$ ile göstereceğiz. $L(\mathbb{R})$ kümesinde $\alpha-$seviye kümeleri için bazı aritmetik işlemler şu şekilde tanımlanır.

$X, Y \in L(\mathbb{R})$ bulanık sayılarının toplamı ve farkı sırasıyla

$$(X+Y)(x) = \sup_{x=y+z} \min\{X(y), Y(z)\}$$

ve

$$(X-Y)(x) = \sup_{x=y-z} \min\{X(y), Y(z)\}$$

şeklindedir [31].

X ve Y gibi iki bulanık sayının $\alpha-$seviye kümelerine göre toplamı ve farkı ise şu şekilde tanımlanır.

$X, Y \in L(\mathbb{R})$ ve bunların $\alpha-$seviye kümeleri $\alpha \in [0,1]$ için $[X]^\alpha = \left[\underline{X}^\alpha, \overline{X}^\alpha\right]$ ve $[Y]^\alpha = \left[\underline{Y}^\alpha, \overline{Y}^\alpha\right]$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} [X+Y]^\alpha &= \left[\underline{X}^\alpha + \underline{Y}^\alpha, \overline{X}^\alpha + \overline{Y}^\alpha\right], \\ [X-Y]^\alpha &= \left[\underline{X}^\alpha - \overline{Y}^\alpha, \overline{X}^\alpha - \underline{Y}^\alpha\right], \end{aligned}$$

dir.

Bir X bulanık sayısının bir $k \in \mathbb{R}$ reel sayısıyla çarpımı da

$$[k \cdot X]^\alpha = \begin{cases} \left[k \cdot \underline{X}^\alpha, k \cdot \overline{X}^\alpha\right], & k \geq 0 \text{ ise} \\ \left[k \cdot \overline{X}^\alpha, k \cdot \underline{X}^\alpha\right], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklindedir.

Burada $[X \pm Y]^\alpha = [X]^\alpha \pm [Y]^\alpha$ ve $[k \cdot X]^\alpha = k[X]^\alpha$ yazılabilir. Bunu aşağıdaki gibi basit cebirsel işlemler yaparak gösterebiliriz.

$$\begin{aligned} [X]^\alpha + [Y]^\alpha &= \{x \in \mathbb{R} : X(x) \geq \alpha\} + \{x \in \mathbb{R} : Y(x) \geq \alpha\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : X(x) + Y(x) \geq 2\alpha \geq \alpha\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (X+Y)(x) \geq 2\alpha \geq \alpha\} \\ &= [X+Y]^\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [k \cdot X]^\alpha &= \{x \in \mathbb{R} : (kX)(x) \geq \alpha\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : kX(x) \geq \alpha\} \\ &= k\{x \in \mathbb{R} : X(x) \geq \alpha\} \\ &= k[X]^\alpha \end{aligned}$$

dir.

Her bir reel sayı kendisinin karakteristik fonksiyonuyla ifade edilebilir. Ayrıca bulanık sayının tanımına göre her bir karakteristik fonksiyon bir bulanık sayı olur. Yani $r \in \mathbb{R}$ için $\bar{r} \in L(\mathbb{R})$ bulanık sayısı

$$\bar{r}(x) = \begin{cases} 1, & x = r \text{ ise} \\ 0, & x \neq r \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece her r reel sayısı için $\bar{r} = [r, r]$ şeklinde bir gösterim vardır. Bu düşünceden hareketle $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, $L(\mathbb{R})$ bulanık sayılar kümesine gömülebilir [32].

Bulanık sayılar kümesi üzerindeki sıralama bağıntısı, reel aralıklar arasındaki sıralama bağıntısına benzerlik gösterir.

$X, Y \in L(\mathbb{R})$ için "$\preceq$" kısmi sıralama bağıntısı

$$X \preceq Y \Leftrightarrow \forall \alpha \in [0,1] \text{ için } \underline{X}^{\alpha} \preceq \underline{Y}^{\alpha} \text{ ve } \overline{X}^{\alpha} \preceq \overline{Y}^{\alpha}$$

şeklinde tanımlanır [33].

Tanım 3.1.11. ([34]) $A \subset L(\mathbb{R})$ kümesi verilsin. Her $X \in A$ bulanık sayısı için $X \preceq U$ olacak şekilde bir U bulanık sayısı varsa A kümesine üstten sınırlıdır ve U bulanık sayısına da A kümesinin bir üst sınırı denir. Eğer A kümesinin her μ üst sınırı için $U \preceq \mu$ ise U bulanık sayısına A kümesinin en küçük üst sınırı (supremumu) denir. Bir küme için alttan sınırlılık ve infimum kavramları da benzer şekilde tanımlanır.

$L(\mathbb{R})$ üzerinde X ve Y gibi iki bulanık sayı arasındaki uzaklığı hesaplamak için

$$\begin{aligned} \bar{d} &: L(\mathbb{R}) \times L(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ \bar{d}(X, Y) &= \sup_{0 \le \alpha \le 1} d_H(X^{\alpha}, Y^{\alpha}) \end{aligned}$$

metriği kullanılacaktır. Burada d_H Hausdorff metriğidir ve

$$d_H(X^{\alpha}, Y^{\alpha}) = \max\left(\left|\underline{X}^{\alpha} - \underline{Y}^{\alpha}\right|, \left|\overline{X}^{\alpha} - \overline{Y}^{\alpha}\right|\right)$$

şeklinde tanımlanır. $\left(L(\mathbb{R}), \bar{d}\right)$, bir tam metrik uzaydır [35]. Bu metrik, $\mathbb{R}$ üzerindeki mutlak değer metriğine indirgenir.

$C(\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{R}^n$ öklid uzayının boş olmayan, kompakt ve konveks bütün alt kümelerinin ailesini göstersin. Bu takdirde $C(\mathbb{R}^n)$ üzerinde toplama ve skalerle çarpma her $A, B \in C(\mathbb{R}^n)$ için

$$A + B = \{z : z = x + y,\ x \in A \text{ ve } y \in B\}$$

ve her $A \in C(\mathbb{R}^n)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\lambda A = \{z : z = \lambda x,\ x \in A\}$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki toplama ve çarpma işlemleri $C(\mathbb{R}^n)$ üzerinde bir lineer yapı üretir.

A ve B kümeleri arasındaki uzaklık

$$\delta_\infty(A, B) = \max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a - b\|, \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\|a - b\|\right\}$$

Hausdorff metriğiyle tanımlanır. Burada $\|\cdot\|$ sembolü ile $\mathbb{R}^n$ deki alışılmış Öklid normu gösterilmektedir. $(C(\mathbb{R}^n), \delta_\infty)$ uzayının bir tam metrik uzay olduğu bilinmektedir.

Bir bulanık sayının tanımı aşağıdaki biçimde genelleştirilebilir.

Tanım 3.1.12. $n-$boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^n$ üzerindeki bir bulanık sayı aşağıdaki şartları sağlayan bir $X : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ fonksiyonudur:

i) X normaldir, yani $X(x_0) = 1$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mevcuttur,

ii) X bulanık konvekstir, yani herhangi $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$X(\lambda x + (1 - \lambda) y) \geq \min\{X(x), X(y)\}$$

eşitsizliği sağlanır,

iii) X üst-yarı-süreklidir,

iv) $X^0 = \{x \in \mathbb{R}^n : X(x) > 0\}$ kümesinin kapanışı kompakttır.

$\mathbb{R}^n$ üzerindeki bütün bulanık sayıların kümesi $L(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

$0 \leq \alpha \leq 1$ için X^α seviye kümesini göz önüne alalım. Tanımdan, $X^\alpha \in C(\mathbb{R}^n)$ olduğu açıktır. $L(\mathbb{R}^n)$ deki toplama ve skaler ile çarpma $X, Y \in L(\mathbb{R}^n)$ ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$[X + Y]^\alpha = X^\alpha + Y^\alpha \text{ ve } [kX]^\alpha = kX^\alpha$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi, herbir $1 \leq q < \infty$ için

$$d_q(X,Y) = \left(\int_0^1 \delta_\infty (X^\alpha, Y^\alpha)^q \, d\alpha \right)^{\frac{1}{q}}$$

ve

$$d_\infty = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \delta_\infty (X^\alpha, Y^\alpha)$$

metriklerini tanımlayalım. $q \leq s$ için $d_q \leq d_s$ olmak üzere

$$d_\infty (X,Y) = \lim_{q \to \infty} d_q (X,Y)$$

olduğu açıktır. $(C(\mathbb{R}^n), d_q)$ metrik uzayı tamdır [36].

Bundan sonraki kısımlarda d_q yerine d notasyonu kullanılacaktır.

Açıkça $n = 1$ için $L(\mathbb{R}^n)$ kümesinden $L(\mathbb{R})$ ve üzerinde tanımlı metrik elde edilir.

3.2. Bulanık Sayı Dizileri ve Temel Özellikleri

Matloka [10] 1986 yılında bulanık sayı dizisi tanımını yapmış ve diziyle ilgili temel kavramları aşağıdaki gibi vermiştir.

Tanım 3.2.1. Bulanık sayılarının bir $X = (X_k)$ dizisi, doğal sayılar kümesinden $L(\mathbb{R}^n)$ içine tanımlı bir X fonksiyonudur. Bu durumda her bir k pozitif tamsayısına bir $X(k)$ bulanık sayısı karşılık gelir. Bundan sonraki bölümlerde $X(k)$ yerine X_k yazacağız.

Tanım 3.2.2. $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $k > N$ iken $d(X_k, X_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir N sayısı mevcut ise (X_k) dizisi yakınsaktır ve limiti X_0 dır denir. Bu durumda $\lim_{k \to \infty} X_k = X_0$ yazılır. Eğer $\lim X_k$ mevcut değilse (X_k) dizisi ıraksaktır denir.

Bütün yakınsak bulanık sayı dizilerinin kümesini $c(F)$ ile göstereceğiz.

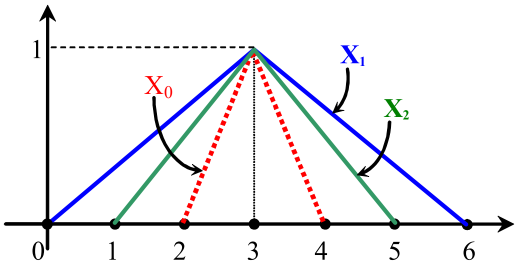
Örnek 3.2.3.

$$X_k(x) = \begin{cases} \frac{k}{k+2}x + \frac{2-2k}{k+2}, & x \in \left[\frac{2k-2}{k}, 3\right] \text{ ise} \\ -\frac{k}{k+2}x + \frac{4k+2}{k+2}, & x \in \left[3, \frac{4k+2}{k}\right] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklindeki $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini göz önüne alalım. Bu dizinin limiti

$$X_0(x) = \begin{cases} x-2, & x \in [2,3] \quad \text{ise} \\ -x+4, & x \in [3,4] \quad \text{ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

bulanık sayıdır (Şekil 3.2).



Şekil 3.2. (X_k) bulanık sayı dizisinin X_0 bulanık sayısına yakınsaması

Teorem 3.2.4. Yakınsak bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisinin limiti tektir.

Teorem 3.2.5. $X = (X_k)$ ve $Y = (Y_k)$ bulanık sayı dizilerinin limitleri sırasıyla X_0 ve Y_0 olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) $\lim\limits_{k\to\infty} (X_k + Y_k) = X_0 + Y_0$,

ii) $\lim\limits_{k\to\infty} (X_k - Y_k) = X_0 - Y_0$,

iii) $\lim\limits_{k\to\infty} (X_k . Y_k) = X_0 . Y_0$,

iv) $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{X_k}{Y_k}\right) = \frac{X_0}{Y_0}$, (Eğer bütün k lar için $0 \notin \operatorname{supp} Y_k$ ve $0 \notin \operatorname{supp} Y_0$).

Tanım 3.2.6. Her $k \in \mathbb{N}$ sayısı için $L \leq X_k \leq U$ olacak şekilde L ve U bulanık sayıları mevcut ise $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisine sınırlıdır denir. Bütün sınırlı bulanık sayı dizilerinin kümesini $\ell_\infty(F)$ ile göstereceğiz.

Örnek 3.2.3 de verilen (X_k) bulanık sayı dizisi sınırlı bir dizidir.

Tanım 3.2.7. ([11]) $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_n \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

olacak şekilde bir X_0 bulanık sayısı mevcut ise, yani $h.h.k$ için $d(X_k, X_0) < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir X_0 bulanık sayısı varsa $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. (X_k) dizisi X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsak ise $S(F) - \lim X_k = X_0$ veya $X_k \to X_0\,(S(F))$ yazılır.

$S(F)$ ile istatistiksel yakınsak bulanık sayı dizilerinin kümesini göstereceğiz. Özel olarak $X_0 = \bar{0}$ alınırsa $S(F)$ yerine $S_0(F)$ yazacağız.

Bilindiği gibi sonlu bir kümenin doğal yoğunluğu sıfırdır. Bundan dolayı $c(F) \subset S(F)$ kapsaması açıktır. Bu kapsamanın kesin olduğunu da aşağıdaki örnekte görebiliriz.

Örnek 3.2.8. $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini

$$X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{matrix} 2x-(2k-1), & x \in \left[k-\frac{1}{2}, k\right] \text{ ise} \\ -2x+(2k+1), & x \in \left[k, k+\frac{1}{2}\right] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{matrix}\right\} & \begin{matrix} k = n^3 \text{ ise} \\ (n = 1, 2, 3, ...) \end{matrix} \\ X_0(x), & k \neq n^3 \text{ ise} \end{cases}$$

olacak biçimde tanımlayalım. Burada

$$X_0(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ ise} \\ -2x+3, & x \in \left[1, \frac{3}{2}\right] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olup, her $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\} \subseteq \{8, 27, 64, ...\}$$

olduğundan $\delta(\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}) = 0$ dır. Bu nedenle $X = (X_k)$ dizisi X_0 a istatistiksel yakınsaktır. Ancak $\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}$ kümesi sonlu olmadığı için (X_k) dizisi X_0 a yakınsak değildir.

$S(F)$ ve $\ell_\infty(F)$ dizi sınıfları birbirlerini kapsamazlar. Yukarıdaki örnekte verilen $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini göz önüne alalım. Bu dizi istatistiksel yakınsaktır fakat sınırlı değildir. Şimdi de sınırlı olup istatistiksel yakınsak olmayan bir dizi örneği verelim.

Örnek 3.2.9.

$$U_1(x) = \begin{cases} x+3, & x \in [-3, -2] \text{ ise} \\ -x-1, & x \in [-2, -1] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$U_2(x) = \begin{cases} x-1, & x \in [1,2] \text{ ise} \\ -x+3, & x \in [2,3] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere

$$X_k(x) = \begin{cases} U_1, & k \text{ tek ise} \\ U_2, & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (X_k) bulanık sayı dizisi sınırlıdır, ancak istatistiksel yakınsak değildir.

Yakınsak her bulanık sayı dizisi aynı zamanda hem istatistiksel yakınsak hem de sınırlı olduğundan $S(F) \cap \ell_\infty(F) \neq \emptyset$ dir. Hatta $c(F) \subset S(F) \cap \ell_\infty(F)$ kapsaması kesindir. Bununla ilgili bir örnek aşağıda verilmiştir:

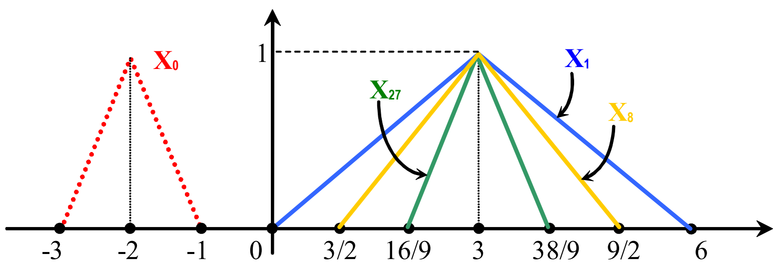
Örnek 3.2.10. $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini

$$X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} \frac{k}{k+2}x + \frac{2-2k}{k+2}, & x \in \left[\frac{2k-2}{k}, 3\right] \text{ ise} \\ -\frac{k}{k+2}x + \frac{4k+2}{k+2}, & x \in \left[3, \frac{4k+2}{k}\right] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & \begin{array}{c} k = n^2 \text{ ise} \\ (n = 1, 2, 3, ...) \end{array} \\ X_0(x), & k \neq n^2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada

$$X_0(x) = \begin{cases} x+3, & x \in [-3,-2] \text{ ise} \\ -x-1, & x \in [-2,-1] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olup $X = (X_k)$ dizisi hem sınırlıdır, hem de X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsaktır. Ancak bu dizi yakınsak değildir (Şekil 3.3).



Şekil 3.3. İstatistiksel yakınsak, fakat yakınsak olmayan bir bulanık sayı dizisi

Teorem 3.2.11. ([37]) $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi olsun. Bu durumda $h.h.k.$ için $X_k = Y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $Y = (Y_k)$ dizisi varsa X dizisi istatistiksel yakınsaktır.

Tanım 3.2.12. ([38]) $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi ve p bir pozitif reel sayı olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[d\left(X_k, X_0\right)\right]^p = 0$$

olacak şekilde bir X_0 bulanık sayısı varsa $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına kuvvetli $p-$Cesàro yakınsaktır denir. Kuvvetli $p-$Cesàro yakınsak bulanık sayı dizilerinin kümesini $w(F,p)$ ile göstereceğiz. Bir başka ifadeyle

$$w(F,p) = \left\{ X = (X_k) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[d\left(X_k, X_0\right)\right]^p = 0, \text{ en az bir } X_0 \text{ için} \right\}$$

dir. $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına kuvvetli $p-$Cesàro yakınsak ise $X_k \to X_0\,(w(F,p))$ yazacağız.

Teorem 3.2.13. ([38]) $0 < p < \infty$ olsun. Eğer bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına kuvvetli $p-$Cesàro yakınsak ise aynı zamanda X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 3.2.14. ([38]) $0 < p < \infty$ olsun. Eğer sınırlı bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsak ise bu takdirde X_0 bulanık sayısına kuvvetli $p-$Cesàro yakınsaktır.

Örnek 3.2.15. (X_k) bulanık sayı dizisini aşağıdaki gibi göz önüne alalım:

$$X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{cc} kx+1, & x \in \left[-\frac{1}{k}, 0\right] \text{ ise} \\ -kx+1, & x \in \left[0, \frac{1}{k}\right] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & \begin{array}{c} k = n^2 \text{ ise} \\ (n = 1, 2, 3, ...) \end{array} \\ \bar{0}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

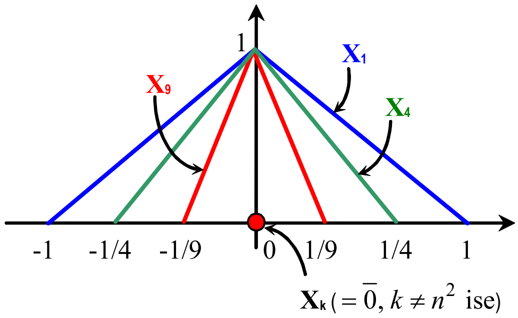
Bu dizinin $\alpha-$seviye kümesi

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} \left[\frac{\alpha-1}{k}, \frac{1-\alpha}{k}\right], & k = n^2 \text{ ise} \\ [0,0], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır. Buradan $p = 1$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} [d(X_k, X_0)]^p = 0$$

olup (X_k) bulanık sayı dizisinin $\bar{0}$ bulanık sayısına kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilir olduğu anlaşılır (Şekil 3.4).



Şekil 3.4. (X_k) bulanık sayı dizisi $\bar{0}$ bulanık sayısına kuvvetli p-Cesaro toplanabilirdir

4. BULANIK SAYI DİZİLERİNDE BİR MODÜLÜSE GÖRE $\beta-$DERECEDEN $f-$İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE KUVVETLİ CESARO TOPLANABİLME

4.1. Giriş

Bu kısımda ilk olarak sırasıyla reel sayı dizileri ve bulanık sayı dizileri için $\beta-$dereceden istatistiksel yakınsaklık tanımlarını verip daha sonra $f-$yoğunluk ve $f_\beta-$yoğunluk ile ilgili kavramlarına yer vereceğiz.

Tanım 4.1.1. [17] $\beta \in (0,1]$ olsun. Bir $A \subset \mathbb{N}$ kümesinin $\beta-$yoğunluğu

$$d_\beta (A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : k \in A\}|$$

şeklinde tanımlanır.

Herhangi bir kümenin $\beta-$yoğunluğu $\beta = 1$ halinde o kümenin doğal yoğunluğuna indirgenir.

Uyarı 4.1.2. Bir A kümesinin $\beta \in (0,1]$ olmak üzere $\beta-$yoğunluğu sıfırsa, doğal yoğunluğu da sıfırdır. Fakat tersi doğru değildir. Sıfır doğal yoğunlukluklu bir küme bazı $\beta \in (0,1)$ ler için sıfırdan farklı $\beta-$yoğunluğa sahip olabilir. Örneğin, $A = \{1, 4, 9, ...\}$ alınırsa $d(A) = 0$ olup $\beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ için $d_\beta (A) = \infty$ dur.

Tanım 4.1.3. [17] $\beta \in (0,1]$ ve $x = (x_k)$ bir reel sayı dizisi olsun. Eğer herbir $\varepsilon > 0$ için

$$d_\beta (\{k \in \mathbb{N} : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}) = 0,$$

yani

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| = 0,$$

ise $x = (x_k)$ dizisi ℓ 'ye $\beta-$dereceden istatistiksel yakınsaktır veya ℓ 'ye $S^\beta-$yakınsaktır denir.

Tüm $\beta-$dereceden istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S^β ile gösterilir. $\beta = 1$ durumunda $\beta-$dereceden istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklığa indirgenir.

Tanım 4.1.4. [18] $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi ve $\beta \in (0,1]$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

limiti mevcutsa $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına $\beta-$dereceden istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $S^{\beta}(F) - \lim X_k = X_0$ yazılır. Bütün $\beta-$dereceden istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini $S^{\beta}(F)$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.5. [19] f sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun. Bir $A \subset \mathbb{N}$ kümesinin $f-$yoğunluğu aşağıdaki limitin mevcut olması halinde

$$d^f(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(|\{k \leq n : k \in A\}|)}{f(n)}$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 4.1.6. $f-$yoğunluk kavramı $f(x) = x$ olması durumunda doğal yoğunluk kavramına indirgenir. Doğal yoğunluk durumunda $d(A) + d(\mathbb{N} - A) = 1$ olduğu bilinmektedir. Fakat bu sonuç $f-$yoğunluk durumunda geçerli değildir. Yani $d^f(A) + d^f(\mathbb{N} - A) = 1$ genelde sağlanmaz. Örneğin $f(x) = \log(x+1)$ ve $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ alınırsa $d^f(A) = d^f(\mathbb{N} - A) = 1$ olur. Bununla birlikte, $f-$yoğunluk durumunda eğer $d^f(A) = 0$ olursa $d^f(\mathbb{N} - A) = 1$ olduğunu varsayabiliriz. Doğal yoğunluk durumunda olduğu gibi, sonlu kümeler de sıfır $f-$yoğunluğa sahiptir ve böylece herhangi bir sonlu A kümesi için $d^f(A) + d^f(\mathbb{N} - A) = 1$ dir.

Uyarı 4.1.7. Herhangi bir sınırsız f modülüsü ve $A \subset \mathbb{N}$ için $d^f(A) = 0$ olması $d(A) = 0$ olmasını gerektirir. Fakat tersinin doğru olması gerekmez. Çünkü sıfır doğal yoğunluğa sahip bir küme sınırsız bir f modülüsüne göre sıfırdan farklı $f-$yoğunluğa sahip olabilir. Örneğin, $f(x) = \log(x+1)$ ve $A = \{1, 4, 9, ...\}$ alınırsa $d(A) = 0$ olur, fakat $d^f(A) = \frac{1}{2}$ dir. Bununla birlikte Uyarı 4.1.6 'dan dolayı $d(A) = 0$ olması $d^f(A) = 0$ eşitliğinin herhangi bir sonlu $A \subset \mathbb{N}$ kümesi durumunda daima doğru olacaktır. Bu sınırsız f modülüsünün seçiminden bağımsızdır.

Tanım 4.1.8. [19] f sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun. Eğer herbir $\varepsilon > 0$ için

$$d^f(\{k \in \mathbb{N} : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}) = 0,$$

yani

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(n)} f(|\{k \leq n : |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}|) = 0,$$

ise (x_k) dizisi ℓ 'ye $f-$istatistiksel yakınsaktır denir ve $S^f-\lim x_k = \ell$ yazılır. Tüm $f-$istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S^f ile gösterilir.

Tanım 4.1.8 ve Uyarı 4.1.7 'den her $f-$istatistiksel yakınsak dizinin istatistiksel yakınsak olduğu fakat istatistiksel yakınsak bir dizinin her sınırsız f modülüsü için $f-$istatistiksel yakınsak olmak zorunda olmadığı anlaşılır.

Tanım 4.1.9. [20] f sınırsız bir modülüs fonksiyonu ve $\beta \in (0,1]$ herhangi bir reel sayı olsun. Bir $A \subset \mathbb{N}$ kümesinin $f_\beta-$yoğunluğu

$$d_\beta^f(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(n^\beta)} f(|\{k \leq n : k \in A\}|)$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 4.1.10. [20] $f_\beta-$yoğunluk, $\beta = 1$ ve $f(x) = x$ durumunda doğal yoğunluğa, $\beta = 1$ durumunda $f-$yoğunluğa ve $f(x) = x$ durumunda $\beta-$yoğunluğa indirgenir.

Genelde $d_\beta^f(A) + d_\beta^f(\mathbb{N} - A) = 1$ eşitliği sınırsız bir f modülüs fonksiyonu için sağlanmaz. Örneğin, $0 < p \leq 1$, $\beta \in (0,1)$ ve $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ için $f(x) = x^p$ alınırsa $d_\beta^f(A) = \infty = d_\beta^f(\mathbb{N} - A)$ elde edilir. Ayrıca, sınırsız bir f modülüs fonksiyonu için sonlu kümeler sıfır $f_\beta-$yoğunluğa sahiptir.

Uyarı 4.1.11. [20] f sınırsız bir modülüs fonksiyonu ve $\beta \in (0,1]$ olmak üzere eğer bir A kümesinin $f_\beta-$yoğunluğu sıfır ise $\beta-$yoğunluğu sıfır olup böylece doğal yoğunluğu da sıfır olur. Tersine, sıfır yoğunluğa sahip bir küme aynı f modülüs fonksiyonu ve β değeri için sıfırdan farklı $f_\beta-$yoğunluğa sahip olabilir. Bunun için aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek 4.1.12. $f(x) = \ln(x+1)$ modülüs fonksiyonunu ve $A = \{1, 8, 27, 64, ...\}$ kümesini göz önüne alalım. Bu takdirde, $\beta \in \left(\frac{1}{3}, 1\right]$ için $d(A) = 0$ ve $d_\beta(A) = 0$ olduğu fakat $d_\beta^f(A) \geq d^f(A) = \frac{1}{3}$ ve böylece $d_\beta^f(A) \neq 0$ olduğu kolayca gösterilebilir.

Lemma 4.1.13. [20] f sınırsız bir modülüs fonksiyonu, $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ ve $A \subset \mathbb{N}$ olsun. Bu takdirde $d_\gamma^f(A) \leq d_\beta^f(A)$ dir.

Buna göre, eğer bir A kümesi sınırsız bir f modülüs fonksiyonu ve $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ için sıfır $f_\beta-$yoğunluğa sahip ise sıfır $f_\gamma-$yoğunluğa sahiptir. Özel olarak, bazı $\beta \in (0,1]$ değerleri için sıfır $f_\beta-$yoğunluğa sahip bir küme sıfır $f-$yoğunluğa sahiptir. Bunun tersi aşağıdaki örnekte de görüldüğü gibi doğru değildir.

Örnek 4.1.14. $0 < p \leq 1$ ve $A = \{1, 8, 27, ...\}$ olmak üzere $f(x) = x^p$ olsun. $d^f(A) = 0$ olduğu kolayca görülebilir. Herhangi bir $\beta \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ için

$$\begin{aligned} \frac{f(|\{k \leq n : k \in A\}|)}{f(n^\beta)} &\geq \frac{([\sqrt[3]{n}])^p - 1}{(n^\beta)^p} \\ &= \frac{([\sqrt[3]{n}])^p}{n^{\beta.p}} - \frac{1}{n^{\beta.p}} \\ &= \frac{([\sqrt[3]{n}])^p . (\sqrt[3]{n})^p}{(\sqrt[3]{n})^p . n^{\beta.p}} - \frac{1}{n^{\beta.p}} \\ &= \frac{([\sqrt[3]{n}])^p}{(\sqrt[3]{n})^p} . \frac{1}{n^{p\left(\beta - \frac{1}{3}\right)}} - \frac{1}{n^{\beta.p}} \end{aligned}$$

olduğundan $d_\beta^f(A) \neq 0$ dir ve böylece her iki tarafta $n \to \infty$ için limit alınırsa $d_\beta^f(A) = \infty$ bulunur. Burada $\lim_{n \to \infty} \frac{([\sqrt[3]{n}])^p}{(\sqrt[3]{n})^p}$ sonludur.

4.2. Bulanık Sayı Dizilerinde $\beta-$Dereceden $f-$İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda bulanık sayı dizileri için $\beta-$dereceden $f-$istatistiksel yakınsak dizilerin sınıfını tanımlayıp farklı $\beta \in (0, 1]$ sayıları için bazı kapsama bağıntıları vereceğiz.

Tanım 4.2.1. f sınırsız bir modülüs ve $\beta \in (0, 1]$ olsun. $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi olmak üzere herbir $\varepsilon > 0$ için eğer

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{f(n^\beta)} f(|\{k \leq n : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}|) = 0$$

limiti varsa $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayı dizisine $\beta-$dereceden $f-$istatistiksel yakınsaktır veya X_0 'a $S^\beta(F, f)-$yakınsaktır denir.

Bu durumda, $S^\beta(F, f) - \lim X_k = X_0$ yazılır. $S^\beta(F, f)$ sembolü ile $\beta-$dereceden tüm $f-$istatistiksel yakınsak bulanık sayı dizilerin kümesini, $S^{\beta,0}(F, f)$ ile $\beta-$dereceden sıfıra $f-$istatistiksel yakınsak bulanık sayı dizilerin kümesini göstereceğiz. Açıktır ki herhangi bir sınırsız f modülüsü ve $\beta \in (0, 1]$ için $S^{\beta,0}(F, f) \subset S^\beta(F, f)$ dir.

f ve β nın özel durumları için:

$f(x) = x$ için $\beta-$dereceden $f-$istatistiksel yakınsaklık Altınok vd. [18] tarafından tanımlanan $\beta-$dereceden istatistiksel yakınsaklığa dönüşür.

$f(x) = x$ ve $\beta = 1$ için $\beta-$dereceden $f-$istatistiksel yakınsaklık istatistiksel yakınsaklığa dönüşür.

Uyarı 4.2.2. Tanım 4.2.1 'de $\beta \in (0, 1]$ için $\beta-$dereceden $f-$istatistiksel yakınsaklık iyi yanımlı olmasına rağmen $\beta > 1$ için iyi tanımlı değildir. Bu durum Örnek 4.2.3 'de gösterilmiştir.

Örnek 4.2.3. f fonksiyonu $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}>0$ şartını sağlayan bir modülüs ve $X=(X_k)$ bulanık sayı dizisi aşağıdaki gibi olsun:

$$X_k(x)=\begin{cases}\left.\begin{array}{ll} x+3, & -3\le x\le -2\\ -x-1, & -2\le x\le -1\\ 0 & \text{diğer durumlarda}\end{array}\right\}: X_0,\ k \text{ tek ise}\\ \left.\begin{array}{ll} x-1, & 1\le x\le 2\\ -x+3, & 2\le x\le 3\\ 0 & \text{diğer durumlarda}\end{array}\right\}: X_0',\ k \text{ çift ise}\end{cases}$$

(X_k) dizisinin $\alpha-$seviye kümesi hesaplanırsa

$$[X_k]^\alpha=\begin{cases}[\alpha-3,-1-\alpha]: & [X_0]^\alpha,\ k \text{ tek ise}\\ [\alpha+1,3-\alpha]: & [X_0']^\alpha,\ k \text{ çift ise}\end{cases}$$

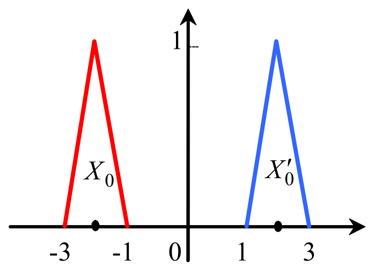
bulunur. Bu takdirde $\beta>1$ ve her bir $\varepsilon>0$ için $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}>0$ özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(n^\beta)}f\left(\left|\left\{k\le n: d(X_k,X_0)\ge\varepsilon\right\}\right|\right) &\le \frac{f\left(\frac{n}{2}\right)}{f(n^\beta)}\\ \frac{1}{f(n^\beta)}f\left(\left|\left\{k\le n: d(X_k,X_0')\ge\varepsilon\right\}\right|\right) &\le \frac{f\left(\frac{n}{2}\right)}{f(n^\beta)}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{f(n^\beta)}f\left(\left|\left\{k\le n: d(X_k,X_0)\ge\varepsilon\right\}\right|\right) &= 0\\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{f(n^\beta)}f\left(\left|\left\{k\le n: d(X_k,X_0')\ge\varepsilon\right\}\right|\right) &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre $X=(X_k)$ bulanık sayı dizisi hem X_0 hem de X_0' bulanık sayısına $\beta-$dereceden $f-$istatistiksel yakınsaktır. Yani, $\beta-$dereceden $f-$istatistiksel limit $\beta>1$ değerleri için tek olamaz (Bkz. Şekil 4.1).



Şekil. 4.1. (X_k) dizisi $\beta>1$ için hem X_0 hem de X_0' bulanık sayılarına β dereceden f-istatistiksel yakınsaktır

Sınırsız bir f modülüs fonksiyonu ve $0 < \beta \leq 1$ için her yakınsak bulanık sayı dizisi $\beta-$dereceden $f-$istatistiksel yakınsaktır, fakat tersi aşağıdaki örnekte de görüldüğü gibi doğru değildir.

Örnek 4.2.4. $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} x+3, & -3 \leq x \leq -2 \\ -x-1, & -2 \leq x \leq -1 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} k = n^3 \text{ ise} \\ \left.\begin{array}{ll} x-1, & 1 \leq x \leq 2 \\ -x+3, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} k \neq n^3 \text{ ise} \end{cases}$$

$0 < p \leq 1$ için $f(x) = x^p$ modülüs fonksiyonunu alalım. (X_k) dizisinin $\alpha-$seviye kümesi hesaplanırsa

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} [\alpha-3, -1-\alpha] : & k = n^3 \text{ ise} \\ [\alpha+1, 3-\alpha] : & k \neq n^3 \text{ ise} \end{cases}$$

kümesi bulunur. Bu takdirde, (X_k) bulanık sayı dizisi $\beta \in \left(\frac{1}{3}, 1\right]$ için $\beta-$dereceden $f-$istatistiksel yakınsaktır, fakat yakınsak değildir.

Teorem 4.2.5. $X = (X_k)$, $Y = (Y_k)$ birer bulanık sayı dizisi ve L_1, L_2 iki bulanık sayı olsun. Ayrıca, f sınırsız bir modülüs fonksiyonu ve $\beta \in (0, 1]$ olsun. Bu takdirde,

(i) Eğer $S^\beta(F, f) - \lim X_k = L_1$ ve $c \in \mathbb{C}$ ise $S^\beta(F, f) - \lim cX_k = cL_1$ dir.

(ii) Eğer $S^\beta(F, f) - \lim X_k = L_1$ ve $S^\beta(F, f) - \lim Y_k = L_2$ ise $S^\beta(F, f) - \lim(X_k + Y_k) = L_1 + L_2$ dir.

Teorem 4.2.6. f sınırsız bir modülüs fonksiyonu, β ve γ sayıları da $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ olacak şekilde reel sayılar olsun. Bu takdirde $S^\beta(F, f) \subset S^\gamma(F, f)$ dir ve kapsama kesindir.

İspat. Kapsama bağıntısının ispatı $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ için f nin artanlık özelliğinden kolaylıkla yapılabilir. Şimdi kapsamanın kesin olduğunu gösterelim. Bunun için (X_k)

bulanık sayı dizisini

$$X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{cc} x+3, & -3 \le x \le -2 \\ -x-1, & -2 \le x \le -1 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & k = n^2 \text{ ise} \\ \left.\begin{array}{cc} x-1, & 1 \le x \le 2 \\ -x+3, & 2 \le x \le 3 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & k \ne n^2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım ve $f(x) = x^p$, $0 < p \le 1$ modülüs fonksiyonunu göz önüne alalım. (X_k) bulanık sayı dizisinin $\alpha-$seviye kümesi hesaplanırsa

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} [\alpha - 3, -1-\alpha] & k = n^2 \text{ ise} \\ [\alpha + 1, 3-\alpha] & k \ne n^2 \text{ ise} \end{cases}$$

kümesi bulunur. Buna göre (X_k) bulanık sayı dizisi $\gamma \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ için $\gamma-$dereceden $f-$istatistiksel yakınsaktır, fakat $\beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ için $\beta-$dereceden $f-$istatistiksel yakınsak değildir.

Sonuç 4.2.7. $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi, f sınırsız bir modülüs fonksiyonu ve $\beta \in (0,1]$ olsun. Bu takdirde, $S^\beta(F,f) \subset S(F,f)$ kapsaması mevcut ve kesindir, ayrıca $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisinin limitleri de aynıdır.

Uyarı 4.1.11 'den aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 4.2.8. f sınırsız bir modülüs fonksiyonu ve $\beta \in (0,1]$ olsun. Bu takdirde,

(i) $S^\beta(F,f) \subset S^\beta(F)$ ve kapsama kesindir,

(ii) $S^\beta(F,f) \subset S(F)$ ve kapsama kesindir.

İspat. Kapsamanın kesinliğini göstermek için $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{cc} x-k+1, & k-1 \le x \le k \\ -x+k+1, & k \le x \le k+1 \\ 0, & d.d \end{array}\right\} & k = n^3 \text{ ise} \\ \qquad\qquad \bar{0} & k \ne n^3 \text{ ise} \end{cases}$$

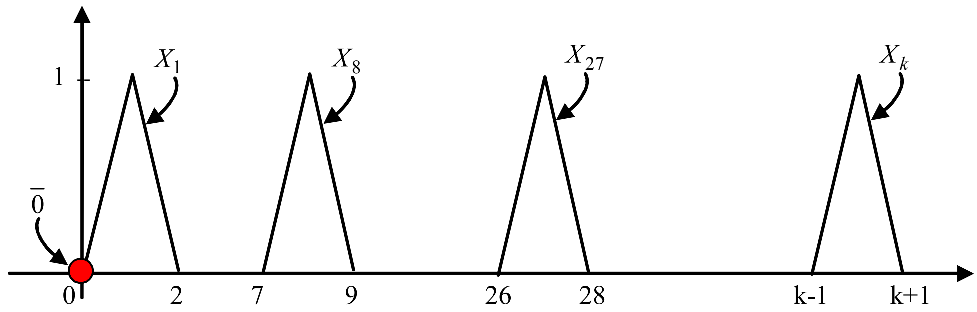
(X_k) bulanık sayı dizisinin $\alpha-$seviye kümesi

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} [\alpha + k - 1, k+1-\alpha], & k = n^3 \text{ ise} \\ \bar{0}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklindedir. $f(x) = \ln(x+1)$ modülüs fonksiyonunu alalım. Bu durumda $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi $\beta \in \left(\frac{1}{3}, 1\right]$ için $\beta-$dereceden istatistiksel yakınsak ve böylece istatistiksel yakınsaktır (Bkz. Şekil 4.2). Diğer yandan,

$$\begin{aligned} d_\beta^f\left(\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, \bar{0}) \geq \varepsilon\}\right) &\geq d^f\left(\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, \bar{0}) \geq \varepsilon\}\right) \\ &= \frac{1}{3} \neq 0 \end{aligned}$$

yazılabileceğinden $X = (X_k)$ dizisi $\beta-$dereceden $f-$istatistiksel yakınsak değildir.



Şekil. 4.2. (X_k) dizisi $\beta \in (\frac{1}{3}, 1]$ için $\beta-$dereceden istatistiksel yakınsak fakat β dereceden f-istatistiksel yakınsak değildir.

4.3. Bir Modülüse göre $\beta-$dereceden Kuvvetli Cesàro Toplanabilme

Bu kısımda bir modülüs fonksiyonunu kullanarak bulanık sayı dizileri için $\beta-$dereceden kuvvetli Cesàro toplanabilir dizilerin sınıfını tanımlayıp bazı kapsama bağıntıları vereceğiz. Son olarak bir modülüs fonksiyonuna göre $\beta-$dereceden kuvvetli Cesàro toplanabilme ve $\beta-$dereceden $f-$istatistiksel yakınsaklık arasında bir bağıntı vereceğiz.

Tanım 4.3.1. $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi, f sınırsız bir modülüs fonksiyonu ve β pozitif bir reel sayı olsun. Bu durumda aşağıdaki dizi sınıflarını tanımlayalım:

$$\begin{aligned} w^{\beta,0}(F, f) &= \left\{X \in s(F) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^{n} f\left(d\left(X_k, \bar{0}\right)\right) = 0\right\}, \\ w^{\beta}(F, f) &= \left\{X \in s(F) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^{n} f\left(d\left(X_k, X_0\right)\right) = 0 \ \exists X_0 \in L(\mathbb{R})\right\}, \\ w^{\beta,\infty}(F, f) &= \left\{X \in s(F) : \sup_{n} \frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^{n} f\left(d\left(X_k, \bar{0}\right)\right) < \infty\right\}, \end{aligned}$$

Özel olarak $f(x) = x$ durumunda $w^\beta(F, f)$ dizi sınıfı $p = 1$ için Altinok vd. [18] nin tanımladığı $w^\beta(F, p)$ dizi sınıfı ile aynıdır. $f(x) = x$ durumunda $w^{\beta,\infty}(F, f)$ dizi sınıfını $w^{\beta,\infty}(F)$ ile göstereceğiz.

Şimdi Tanım 4.3.1 de verilen $w^{\beta}(F,f)$, $w^{\beta,0}(F,f)$ ve $w^{\beta,\infty}(F,f)$ dizi sınıflarıyla ilgili bazı sonuçları verelim.

Uyarı 4.3.2. Altinok vd. [18] nin tanımladığı $w^{\beta}(F,p)$ dizi sınıfında β sayısı 1 den büyük olmamasına rağmen burada tanımlanan $w^{\beta,0}(F,f)$ ve $w^{\beta}(F,f)$ uzaylarında β sayısı herhangi bir pozitif reel sayıdır.

Teorem 4.3.3. f herhangi bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu takdirde,

(i) $\beta > 0$ için $w^{\beta,0}(F,f) \subset w^{\beta,\infty}(F,f)$ dir,

(ii) $\beta \geq 1$ için $w^{\beta}(F,f) \subset w^{\beta,\infty}(F,f)$ dir.

İspat. (i) nin ispatı aşikardır, bu nedenle (ii) nin ispatını vereceğiz. Bunun için $\beta \geq 1$ olmak üzere $w^{\beta}(F,f)$ dizi sınıfında herhangi bir bulanık sayı dizisini göz önüne alalım. Bu durumda modülüs fonksiyonunun tanımından

$$\frac{1}{n^{\beta}}\sum_{k=1}^{n} f\left(d\left(X_k,\bar{0}\right)\right) \leq \frac{1}{n^{\beta}}\sum_{k=1}^{n} f\left(d\left(X_k,X_0\right)\right) + f\left(d\left(X_0,\bar{0}\right)\right).\frac{1}{n^{\beta}}\sum_{k=1}^{n} 1,$$

yazılabilir ve böylece $X \in w^{\beta,\infty}(F,f)$ elde edilir.

Teorem 4.3.4. f herhangi bir modülüs fonksiyonu ve $\beta \geq 1$ olsun. Bu durumda $w^{\beta}(F) \subset w^{\beta}(F,f)$, $w^{\beta,0}(F) \subset w^{\beta,0}(F,f)$ ve $w^{\beta,\infty}(F) \subset w^{\beta,\infty}(F,f)$ kapsama bağıntıları mevcuttur.

İspat. Birinci ve ikinci kapsama bağıntılarının ispatları kolay olduğu için $w^{\beta,\infty}(F) \subset w^{\beta,\infty}(F,f)$ bağıntısını ispatlayalım. Bunun için, $\beta \geq 1$ olsun ve $w^{\beta,\infty}(F)$ dizi sınıfında

$$\sup_n \frac{1}{n^{\beta}}\sum_{k=1}^{n} d\left(X_k,\bar{0}\right) < \infty$$

şartını sağlayan herhangi bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini göz önüne alalım. $t \in (0,\delta]$ için $f(t) < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta \in (0,1)$ ve $\varepsilon > 0$ sayıları verilsin.

$\sum_1$ toplamı $d\left(X_k,\bar{0}\right) \leq \delta$ ve $\sum_2$ toplamı $d\left(X_k,\bar{0}\right) > \delta$ üzerinden olmak üzere

$$\frac{1}{n^{\beta}}\sum_{k=1}^{n} f\left(d\left(X_k,\bar{0}\right)\right) = \sum_1 + \sum_2,$$

toplamını göz önüne alalım. Bu takdirde $\sum_1 \leq \varepsilon \frac{1}{n^{\beta-1}}$ olup $d\left(X_k,\bar{0}\right) > \delta$ için

$$d\left(X_k,\bar{0}\right) < \frac{d\left(X_k,\bar{0}\right)}{\delta} < 1 + \left[\left|\frac{d\left(X_k,\bar{0}\right)}{\delta}\right|\right],$$

yazılabilir. Burada, $[|d(X_k,\bar{0})/\delta|]$ ifadesi $d(X_k,\bar{0})/\delta$ nin tam kısmını göstermektedir. Bu nedenle $d(X_k,\bar{0})>\delta$ için modülüs fonksiyonun tanımından

$$f\left(d\left(X_k,\bar{0}\right)\right)\leq\left(1+\left[\left|\frac{d\left(X_k,\bar{0}\right)}{\delta}\right|\right]\right)f\left(1\right)\leq 2f\left(1\right)\frac{d\left(X_k,\bar{0}\right)}{\delta}$$

elde edilir. Böylece

$$\sum_2\leq 2f\left(1\right)\delta^{-1}\frac{1}{n^{\beta}}\sum_{k=1}^{n}d\left(X_k,\bar{0}\right)$$

olup $\sum_1\leq\varepsilon\frac{1}{n^{\beta-1}}$ eşitsizliği yardımıyla

$$\frac{1}{n^{\beta}}\sum_{k=1}^{n}f\left(d\left(X_k,\bar{0}\right)\right)\leq\varepsilon\frac{1}{n^{\beta-1}}+2f\left(1\right)\delta^{-1}\frac{1}{n^{\beta}}\sum_{k=1}^{n}d\left(X_k,\bar{0}\right).$$

bulunur. Sonuç olarak, $\beta\geq 1$ olduğundan $(X_k)\in w^{\beta,\infty}(F,f)$ elde edilir ki bu da $(X_k)\in w^{\beta,\infty}(F)$ demektir.

Teorem 4.3.5. f fonksiyonu $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}>0$ şartını sağlayan bir modülüs fonksiyonu ve β bir pozitif reel sayı olsun. Bu takdirde $w^{\beta}(F,f)\subset w^{\beta}(F)$ dir.

İspat. $X=(X_k)$ bir bulanık sayı dizisi ve $(X_k)\in w^{\beta}(F,f)$ olsun. $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}=\inf\left\{\frac{f(t)}{t}:t>0\right\}$ olduğu daha önceden bilinmektedir. Kısalık bakımından $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}$ limitinin değerini ℓ ile göstereceğiz. Buna göre $\ell>0$ olduğundan her $t\geq 0$ için $f(t)\geq\ell t$ ve $t\leq\ell^{-1}f(t)$ olup böylece

$$\frac{1}{n^{\beta}}\sum_{k=1}^{n}d\left(X_k,X_0\right)\leq\ell^{-1}\frac{1}{n^{\beta}}\sum_{k=1}^{n}f\left(d\left(X_k,X_0\right)\right)$$

dir. Böylece $(X_k)\in w^{\beta}(F)$ elde edilir.

Teorem 4.3.4 ve Teorem 4.3.5 'den aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.3.6. f bir modülüs fonksiyonu olsun. Eğer $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}>0$ ve $\beta\geq 1$ ise $w^{\beta}(F,f)=w^{\beta}(F)$ dir.

Teorem 4.3.7. f bir modülüs fonksiyonu ve $0<\beta\leq\gamma$ olsun. Bu takdirde $w^{\beta}(F,f)\subset w^{\gamma}(F,f)$ dir ve kapsama kesindir.

İspat. Kapsama bağıntısının doğruluğunu göstermek kolaydır. Kapsamanın kesinliği için bir f modülüs fonksiyonunu ve

$$X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} x-1, & 1 \le x \le 2 \\ -x+3, & 2 \le x \le 3 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} k = n^3 \text{ ise} \\ \bar{0} \qquad\qquad\qquad k \ne n^3 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı bir bulanık sayı dizisini göz önüne alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f(0) = 0$ özelliği kullanılırsa

$$\frac{1}{n^\gamma}\sum_{k=1}^{n} f\left(d\left(X_k, \bar{0}\right)\right) \le \frac{\sqrt[3]{n}}{n^\gamma} f(3) = \frac{1}{n^{\gamma-\frac{1}{3}}} f(3)$$

yazılabilir ve böylece $n \to \infty$ iken $\gamma > \frac{1}{3}$ için sağ taraf sıfıra gider. Diğer yandan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{n^\beta}\sum_{k=1}^{n} f\left(d\left(X_k, \bar{0}\right)\right) \ge \frac{\sqrt[3]{n}-3}{n^\beta} f(3)$$

elde edilir. Böylece $n \to \infty$ iken $0 < \beta < \frac{1}{3}$ için sağ taraf sonsuza gittiğinden $(X_k) \notin w^\beta(F, f)$ bulunur.

Teorem 4.3.8. $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi ve $0 < \beta \le \gamma \le 1$ olsun. Ayrıca, her $x \ge 0$, $y \ge 0$ ve $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ için $f(xy) \ge cf(x) f(y)$ şartlarını sağlayan bir pozitif c sabiti mevcut olacak şekilde sınırsız bir f modülüs fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu takdirde, eğer bir bulanık sayı dizisi bir f modülüs fonksiyonuna göre bir X_0 bulanık sayısına $\beta-$dereceden kuvvetli Cesàro toplanabilir ise yine aynı X_0 bulanık sayısına $\gamma-$dereceden $f-$istatistiksel yakınsaktır.

İspat. $X = (X_k)$ herhangi bir bulanık sayı dizisi ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu takdirde, modülüs fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} f\left(d\left(X_k, X_0\right)\right) &\ge f\left(\sum_{k=1}^{n} d\left(X_k, X_0\right)\right) \\ &\ge f\left(\left|\left\{k \le n : d\left(X_k, X_0\right) \ge \varepsilon\right\}\right| \varepsilon\right) \\ &\ge cf\left(\left|\left\{k \le n : d\left(X_k, X_0\right) \ge \varepsilon\right\}\right|\right) f(\varepsilon) \end{aligned}$$

ve buradan da $\beta \leq \gamma$ kullanılarak

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^{\beta}}\sum_{k=1}^{n} f\left(d\left(X_k, X_0\right)\right) &\geq \frac{cf\left(\left|\left\{k \leq n : d\left(X_k, X_0\right) \geq \varepsilon\right\}\right|\right) f\left(\varepsilon\right)}{n^{\beta}} \\
&\geq \frac{cf\left(\left|\left\{k \leq n : d\left(X_k, X_0\right) \geq \varepsilon\right\}\right|\right) f\left(\varepsilon\right)}{n^{\gamma}} \\
&= \frac{cf\left(\left|\left\{k \leq n : d\left(X_k, X_0\right) \geq \varepsilon\right\}\right|\right) f\left(\varepsilon\right) f\left(n^{\gamma}\right)}{n^{\gamma} f\left(n^{\gamma}\right)}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece, $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t} > 0$ ve $X \in w^{\beta}\left(F, f\right)$ gerçekleri dikkate alınırsa $X \in S^{\gamma}\left(F, f\right)$ olduğu kolayca görülür.

Teorem 4.3.8 'de $\beta = \gamma$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.9. $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi ve $0 < \beta \leq 1$ olsun. Ayrıca, her $x \geq 0$, $y \geq 0$ ve $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t} > 0$ için $f\left(xy\right) \geq cf\left(x\right) f\left(y\right)$ şartlarını sağlayan bir pozitif c sabiti mevcut olacak şekilde sınırsız bir f modülüs fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu takdirde, eğer bir bulanık sayı dizisi bir f modülüs fonksiyonuna göre bir X_0 bulanık sayısına $\beta-$dereceden kuvvetli Cesàro toplanabilir ise yine aynı X_0 bulanık sayısına $\beta-$dereceden $f-$istatistiksel yakınsaktır.

Sonuç 4.3.9 'da $\beta = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.10. Bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini ve her $x \geq 0$, $y \geq 0$ ve $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t} > 0$ için $f\left(xy\right) \geq cf\left(x\right) f\left(y\right)$ şartlarını sağlayan bir pozitif c sabiti mevcut olacak şekilde sınırsız bir f modülüs fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer bir bulanık sayı dizisi bir f modülüs fonksiyonuna göre bir X_0 bulanık sayısına kuvvetli Cesàro toplanabilir ise yine aynı X_0 bulanık sayısına $f-$istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 4.3.11. $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi ve f fonksiyonu $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t} > 0$ ve $\beta \in (0, 1]$ olacak şekilde bir modülüs olsun. Bu takdirde, eğer bir bulanık sayı dizisi bir f modülüs fonksiyonuna göre bir X_0 bulanık sayısına $\beta-$dereceden kuvvetli Cesàro toplanabilir ise yine aynı X_0 bulanık sayısına $\beta-$dereceden istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 4.3.11 'de $\beta = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.12. $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi ve f fonksiyonu $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t} > 0$ olacak şekilde bir modülüs olsun. Bu takdirde, eğer bir bulanık sayı dizisi bir f modülüs fonksiyonuna göre bir X_0 bulanık sayısına kuvvetli Cesàro toplanabilir ise yine aynı X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 4.3.11 'da $f(x) = x$ ve $\beta = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.13. Bu takdirde, eğer bir bulanık sayı dizisi bir X_0 bulanık sayısına kuvvetli Cesàro toplanabilir ise X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsaktır.

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, f sınırsız bir modülüs fonksiyonu, $\beta \in (0,1]$ bir reel sayı ve $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi olmak üzere, Altınok vd. [18] tarafından tanımlanan $\beta-$dereceden istatistiksel yakınsaklık tanımı bir f modülüs fonksiyonu yardımıyla genelleştirilerek $\beta-$dereceden $f-$istatistiksel yakınsak bulanık sayı dizilerinin sınıfı olan $S^{\beta}(F,f)$ dizi sınıfı tanımlanmış ve farklı $\beta, \gamma \in (0,1]$ reel sayıları için bazı kapsama bağıntıları elde edilmiştir. Ayrıca, bir f modülüs fonksiyonuna göre $\beta-$dereceden kuvvetli Cesàro toplanabilme kavramı verilmiş ve $w^{\beta,0}(F,f)$, $w^{\beta}(F,f)$, $w^{\beta,\infty}(F,f)$ dizi sınıfları tanımlanarak $S^{\beta}(F,f)$ dizi sınıfı ile aralarındaki çeşitli kapsama bağıntıları elde edilmiştir. Burada şunu belirtmek gerekir ki daha önceden Altinok vd. [18] nin tanımladığı $w^{\beta}(F,p)$ dizi sınıfında β sayısı 1 den büyük olmamasına rağmen burada tanımlanan $w^{\beta,0}(F,f)$ ve $w^{\beta}(F,f)$ dizi sınıflarında β sayısı herhangi bir pozitif reel sayıdır.

6. KAYNAKLAR

[1] **Fast, H.** 1951, Sur la convergence statistique, *Colloq. Math.*, **2,** 241-244.

[2] **Schoenberg, I.J.** 1959, The integrability of certain functions and related summability methods, *Amer. Math. Monthly,* **66,** 361-375.

[3] **Fridy, J. 1985,** On statistical convergence, *Analysis*, **5,** 301-313.

[4] **Šalát, T.** 1980, On statistically convergent sequences of real numbers, *Math. Slovaca*, **30,** 139-150.

[5] **Connor, J.S.** 1988, The statistical and strong $p-$Cesàro convergence of sequences, *Analysis,* **8,** 47-63.

[6] **Çakallı, H.** 1996, On statistical convergence in topological groups, *Pure Appl. Math. Sci.*, **43,** 27–31.

[7] **Caserta, A.; Maio, G.D. and Kočinac, L.D.R.** 2011, Statistical convergence in function spaces, *Abstr. Appl. Anal.*, **11**. Article ID420419.

[8] **Et, M.** 2003, Strongly almost summable difference sequences of order m defined by a modulus, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **40(4),** 463–476.

[9] **Et. M.** 2006, Spaces of Cesàro difference sequences of order r defined by a modulus function in a locally convex space, *Taiwanese J. Math.* **10(4),** 865–879.

[10] **Matloka, M.** 1986, Sequences of fuzzy numbers, *BUSEFAL,* **28,** 28-37.

[11] **Nuray, F. and Savaş, E.,** 1995, Statistical convergence of fuzzy numbers, *Math. Slovaca*, **45(3)**, 269-273.

[12] **Tripathy, B.C. and Baruah, A.** 2010, Lacunary statistically convergent and lacunary strongly convergent generalized difference sequences of fuzzy real numbers, *Kyungpook Math. Jour.* **50,** 565-574.

[13] **Çanak, İ.** 2014, Tauberian theorems for Cesàro summability of sequences of fuzzy numbers, *J. Intell. Fuzzy Syst.*, **27(2),** 937-942.

[14] **Mursaleen, M. and Mohiuddine, S.A.** 2009, On lacunary statistical convergence with respect to the intuitionistic fuzzy normed space, *Jour. Comput. Appl. Math.*, **233(2),** 142-149.

[15] **Savas, E.** 2000, A note on sequence of fuzzy numbers, *Inform. Sci.* **124(1-4),** 297-300.

[16] **Aytar, S. and Pehlivan, S.** 2008, Statistical convergence of sequences of fuzzy numbers and sequences of $\alpha-$cuts. *International Journal of General Systems,* **37.2,** 231-237.

[17] **Çolak, R.**,2010, Statistical convergence of order α, *Modern Methods in Analysis and Its Applications*, New Delhi, India: Anamaya Pub, 121–129.

[18] **Altınok, H.; Altın, Y. and Işık, M.** 2012, Statistical Convergence and Strong $p-$Cesàro Summability of Order β in Sequences of Fuzzy Numbers, Iranian J. of Fuzzy Systems **9(2),** 65-75.

[19] **Aizpuru, A.; Listan-Garcia, M.C and Rambla-Barreno, F.** 2014, Density by moduli and statistical convergence. *Quaest. Math.* **37,** 525-530.

[20] **Bhardwaj, VK. and Dhawan, S.** 2015, $f-$statistical convergence of order α and strong Cesàro summability of order α with respect to a modulus, *J. Inequal. Appl.* 2015:332 DOI 10.1186/s13660-015-0850-x.

[21] **Altin, Y.; Altinok, H. and Çolak, R.** 2015 Statistical Convergence of Order α for Difference Sequences, *Quaestiones Mathematicae*, **38(4),** 505–514.

[22] **Altınok, H.** 2014, Statistical convergence of order β for generalized difference sequences of fuzzy numbers, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, **26,** 847–856.

[23] **Çolak, R. and Bektaş, C.A.** 2011, $\lambda-$statistical convergence of order α. *Acta Math. Sci.* **31(3),** 953-959.

[24] **Maddox, I.J.**, 1988, Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, Second Edition.

[25] **Goes, G. and Goes, S.**, 1970, Sequence of variation and sequence of fourier coefficients 1, *Math. Z.*, **118,** 93-102.

[26] **Şuhubi, E.,** 2001, Fonksiyonel Analiz, İTÜ Vakfı Yay., No: 38, İstanbul.

[27] **Niven, I. and Zuckerman, H.S.,** 1960, An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, New York.

[28] **Nakano, H.** 1953, Concave modulars, J. Math. Soc. Japan, **5,** 29–49.

[29] **Zadeh, L.A.,** 1965, Fuzzy sets, *Inform and Control*, **8,** 338-353.

[30] **Chang, S.S.L. and Zadeh, L.A.,** 1972, On fuzzy mapping and Control, *IEEE Trans. Systems Man Cybernet*, **2,** 30-34.

[31] **Dubois, D. and Prade, H.,** 1980, Fuzzy Sets Syst., Academic Press, New York.

[32] **Kaufmann, A. and Gupta, M.M.,** 1984, Introduction to Fuzzy Arithmetic, Van Nostrand Reinhohld.

[33] **Diamond, P. and Kloeden, P.,** 1994, Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications. World Scientific, Singapore.

[34] **Nanda, S.,** 1989, On sequence of fuzzy numbers, *Fuzzy Sets Syst.*, **33,** 123-126.

[35] **Puri, M. L. and Ralescu, D.A.,** 1983, Differentials of fuzzy functions, *J. Math. Anal. Appl.*, **91,** 552-558.

[36] **Puri, M. L. and Ralescu, D.A.,** 1986, Fuzzy random variables, *J. Math. Anal. Appl.*, **114,** 409-422.

[37] **Mursaleen, M. and Başarır, M.,** 2003, On some new sequence spaces of fuzzy numbers, *Indian J. Pure Appl. Math.,* **34(9),** 1351-1357.

[38] **Kwon, J.S.,** 2000, On statistical and $p-$Cesàro convergence of fuzzy numbers, *Korean J. Comput.&Appl. Math.* **7(1),** 195-203.

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Elazığ'da doğdum. İlk ve Orta öğretimimi Elazığ'da tamamladım. 1995 yılında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandım ve 1999 yılında aynı bölümden mezun oldum. 1999-2011 yılları arasında Matematik öğretmeni olarak çalıştım. 2011 yılında Şırnak Üniversitesi Meslek Yüksek Okulunda Öğretim görevlisi oldum. Halen aynı kurumda çalışmaktayım. 2013 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım.