

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



PH EĞRİLERİ VE EULER-RODRİGUES ÇATILARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Mustafa YENEROĞLU

HAZIRLAYAN
Mustafa TURAN

ELAZIĞ-2016

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PH EĞRİLERİ VE EULER-RODRÍGUES ÇATILARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mustafa TURAN

(121121113)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 12 Ekim 2016
Tezin Savunulduğu Tarih : 28 Ekim 2016

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Mustafa YENEROĞLU (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Vedat ASİL (F.Ü)

Doç. Dr. Talat KÖRPİNAR (M.Ü)

EKİM-2016

ÖNSÖZ

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde bilgisinden yararlandığım ve çalışmamın başından itibaren yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer Hocam Yrd. Doç. Dr. Mustafa Yeneroğlu 'na ve yine desteklerini esirgemeyen değerli Hocam Prof. Dr. Vedat Asil'e teşekkürler eder, saygılarımı sunarım.

Mustafa TURAN
ELAZIĞ-2016



İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
SİMGELER LİSTESİ.....	VI
1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	1
2. DÜZLEMSEL PİSAGOR-HODOGRAE EĞRİLERİ.....	9
2.1 Giriş	9
2.2. R^2 de Pisagor-Hodograf Eğrileri.....	9
2.3. R^3 de Pisagor-Hodograf Eğrileri.....	11
3. 3-BOYUTLU UZAYDA PİSAGOR HODOGRAE EĞRİLERİ ÜZERİNDE EULER RODRİGUES ÇATILARI	13
3.1. Giriş	13
3.2. PH Eğrilerinin Kuaterniyon Gösterimi (Temsili).....	13
3.3. Rotation (Dönme) Minimize Çatılar.....	15
3.4. Euler-Rodrigues Çatıları.....	18
3.5. Üçüncü Dereceden PH Eğrilerinin ERF'si.....	19
3.6 Beşinci Dereceden PH Eğrilerinin ERF'si	21
3.7. Yedinci Dereceden PH Eğrilerinin ERF'si.....	24
SONUÇ	28
KAYNAKLAR.....	29
ÖZGEÇMİŞ	32

ÖZET

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde Düzlemsel Pisagor-Hodograf Eğrileri incelendi ve R^3 3-boyutlu reel uzayda Pisagor-Hodograf eğrileri araştırıldı.

Üçüncü bölümde ise çalışmanın orijinal kısmı verildi. 3-boyutlu uzayda Pisagor-Hodograf Eğrileri üzerinde Euler-Rodrigues çatıları araştırıldı. Buna ek olarak Rotation çatılar incelendi. Üçüncü, Beşinci ve Yedinci dereceden Pisagor-Hodograf Eğrileri üzerinde Euler-Rodrigues çatıları verildi.

Anahtar Kelimeler: Pisagor-Hodograf Eğrileri, Euler-Rodrigues Çatıları, Rotation Çatılar

SUMMARY

PH CURVES AND EULER-RODRIGUES FRAMES

This study is consist of three chapters.

In the first chapter; The fundamental definitions and theorems are given.

In the second chapter; Plane PH curves are examined and PH curves are investigated in the \mathbb{R}^3 3-dimensional real space.

In the third chapter; The original parth of study is given. Euler-Rodrigues Frames are investigated in 3-dimensional curve space on Pythagoras Hodograf. In addition, Rotation Frames are investigated. Euler-Rodrigues Frames are given Third, fifth and seventh degree on the PH Curves.

Key Words: Pythagoras Hodograf Curves, Euler-Rodrigues Roofs, Rotation Roofs

SİMGELER LİSTESİ

- \langle , \rangle : Reel (veya kompleks) İç çarpım
IK : Kuaterniyon Cebiri
gcd : En Büyük Ortak Bölen
SO3 : Üç Sütun Vektörleri Grubu



1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 1.1: $\forall a, a^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir $A = (a, a^*)$ ikilisine bir sıralı ikili denir [Hacısalıhoğlu, H.H., 2000].

Tanım 1.2 : V ve W aynı bir F cismi üzerinde sonlu boyutlu iki vektör uzayı olsun.

$$A : V \times W \rightarrow F$$

dönüşümü , $\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha \in V$ için $\forall \beta_1, \beta_2, \beta \in W$ için $\forall a_1, a_2 \in F$ olmak üzere

i) $A(a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2, \beta) = a_1 A(\alpha_1, \beta) + a_2 A(\alpha_2, \beta)$

ii) $A(\alpha, a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2) = a_1 A(\alpha, \beta_1) + a_2 A(\alpha, \beta_2)$

aksiyomları sağlanıyor ise A dönüşümüne $V \times W$ üzerinde bilinear (2-linear) dönüşümdür denir [Hacısalıhoğlu, H.H., 1983] .

Tanım 1.3 : F cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı V ve V üzerindeki bir bilinear dönüşüm A olsun . $\forall \alpha, \beta \in V$ için

i) $A(\alpha, \beta) = K(A(\beta, \alpha))$ ise A eşlenik simetrik bilinear dönüşümdür denir.

ii) $A(\alpha, \alpha) \geq 0$ ise A pozitif bilinear dönüşümdür denir.

iii) $A(\alpha, \alpha) > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ ise A pozitif tanımlı bilinear dönüşümdür denir.

Eğer bir V reel vektör uzayı için $A : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear dönüşümü

$$\forall \alpha, \beta \in V \text{ için } A(\alpha, \beta) = A(\beta, \alpha)$$

Özellikliğini sağlıyorsa A simetrik bilinear dönüşümdür denir [Hacısalıhoğlu, H.H., 1983] .

Tanım 1.4 : V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerindeki bir iç çarpım aşağıdaki aksiyomlarla tanımlanan bir

$$\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümüne denir.

i) Simetri Aksiyomu

ii) Bilineerlik Aksiyomu

iii) Pozitif Tanımlılık Aksiyomu

V vektör uzayı üzerinde tanımlı \langle , \rangle iç çarpımı ile birlikte bir iç çarpım uzayı olur. $\forall u, v \in V$ olmak üzere u ve v nin iç çarpımı ise $\langle u, v \rangle$ şeklinde gösterilir [Hacısalihoglu, H.H., 1983].

Tanım 1.5 : C kompleks sayılar cismi olmak üzere n -boyutlu kompleks vektör uzayı $C^n = C \times C \times \dots \times C$ (n tane) olsun. $\forall X, Y \in C^n$ için

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n), Y = (y_1, y_2, \dots, y_n); x_i, y_i \in C, 1 \leq i \leq n$$

olmak üzere

$$\langle , \rangle : C^n \times C^n \rightarrow C$$

$$(X, Y) \rightarrow \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$$

Şeklinde tanımlı \langle , \rangle dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağladığından C^n üzerinde bir iç çarpımdır.

- i) Eşlenik simetri Aksiyomu
- ii) Bilineerlik Aksiyomu
- iii) Pozitif Tanımlılık Aksiyomu

Bu iç çarpıma C^n üzerindeki standart iç çarpım veya Hermit anlamındaki iç çarpım denir [Hacısalihoglu, H.H., 1983].

Tanım 1.6 : Reel (veya kompleks) vektör uzayı üzerinde bir iç çarpım tanımlanırsa bu vektör uzayına bir reel (veya kompleks) iç çarpım uzayı denir [Hacısalihoglu, H.H., 1983].

Tanım 1.7 : Bir reel kuarterniyon, sıralı dört sayısının $+1, e_1, e_2, e_3$ gibi dört birime eşlik etmesiyle tanımlanabilir. Burada birinci birim $+1$ reel sayıdır, diğer üç birim ise;

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1$$

$$e_1 \wedge e_2 = e_3, e_2 e_3 = e_1, e_1 \wedge e_3 = e_2$$

$$e_2 \wedge e_1 = -e_3, e_3 e_2 = -e_1, e_1 \wedge e_3 = -e_2$$

Özelliklerine sahiptir. Böylece bir kuarterniyon;

$$q = d + ae_1 + be_2 + ce_3$$

biçiminde ifade edilebilir, burada $d, a, b, c \in \mathbb{R}$ reel sayılarına q kuaterniyonunun bileşenleri denir. e_1, e_2, e_3 birimleri üç-boyutlu reel vektör uzayının bir dik koordinat sisteminin baz vektörleri olarak alınabilirler ve dolayısıyla q kuaterniyonu S_q ile gösterilen skaler kısım ve V_q ile gösterilen vektörel kısım olmak üzere iki kısma ayrılabilir:

$$S_q = d, V_q = ae_1 + be_2 + ce_3$$

O halde,

$$q = S_q + V_q$$

yazılabilir [Hacısalıhoğlu, H.H., 2000].

Tanım 1.8 :

$$\oplus: IK \times IK \rightarrow IK$$

$$(q_1, q_2) \rightarrow q_1 \oplus q_2 = S_{q_1+q_2} + V_{q_1 \oplus q_2}$$

işlemi,

$$S_{q_1+q_2} = S_{q_1} + S_{q_2} \text{ ve } V_{q_1 \oplus q_2} = V_{q_1} \oplus V_{q_2}$$

olarak tanımlanır. Burada $S_{q_1}, S_{q_2} \in \mathbb{R}$ ve $+$ işlemi \mathbb{R} deki toplama işlemidir; V_{q_1}, V_{q_2} de birer reel vektör olup \oplus işlemi reel vektör uzayındaki Abel grubu (vektörlerde toplama) işleminin aynısıdır. O halde (IK, \oplus) ikilisi bir Abel grubudur. Buradaki etkisiz eleman sıfır kuaterniyon adını alır ve $(0, 0, 0, 0)$ sıralı dördlüsünden başka bir şey değildir [Hacısalıhoğlu, H.H., 2000].

Tanım 1.9 :

$$\odot: \mathbb{R} \times IK \rightarrow IK$$

$$(\lambda, q) \rightarrow \lambda \odot q = \lambda q = \lambda S_q + \lambda V_q$$

Şeklinde tanımlanan dış işlem için

$$\lambda \odot (q_1 \oplus q_2) = \lambda \odot q_1 \oplus \lambda \odot q_2, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ve } \forall q_1, q_2 \in IK;$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \odot q = (\lambda_1 \odot q) \oplus (\lambda_2 \odot q),$$

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ ve } \forall q \in IK;$$

$$L \odot q = q.$$

O halde $\{IK, \otimes, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ sistemi bir reel vektör uzayıdır. Kısaca bu uzayı IK ile göstereceğiz ve IK daki toplama \oplus işlemini de $+$ ile göstereceğiz [Hacısalıhoğlu, H.H., 2000].

Tanım 1.10 :

$X: IK \times IK \rightarrow IK$

$(q_1, q_2) \rightarrow q_1 \times q_2$ işlemi aşağıdaki çarpım tablosu ile tanımlanır.

X	+1	e_1	e_2	e_3
+1	+1	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1

$$q_1 \times q_2 = (d_1 + a_1e_1 + b_1e_2 + c_1e_3) \times (d_2 + a_2e_1 + b_2e_2 + c_2e_3)$$

$$q_1 \times q_2 = d_1d_2 - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) + (d_1a_2 + a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2) e_1 + (d_1b_2 + b_1d_2 + c_1d_2 - a_1c_2) e_2 + (d_1c_2 + d_2c_1 + a_1b_2 - b_1a_2) e_3$$

Böylece kuaterniyon çarpımının şu özelliklere sahip olduğu kolayca görülür.

- (i) İki kuaterniyonun çarpımı bir kuaterniyondur
- (ii) Kuaterniyon çarpımı birleşimlidir.
- (iii) Kuaterniyon çarpımı dağılımlıdır.

Fakat kuaterniyon çarpımı değişimli değildir. Bu özellikleriyle; $\{IK, \otimes, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot, \times\}$ sistemi bir asosyatif (birleşimli) cebirdir. Bu cebire kuaterniyon cebiri denir ve kısaca IK ile gösterilir. Bu cebirin bir bazı $\{1, e_1, e_2, e_3\}$ ve boyutu 4'dür.

Özel olarak q_1 ve q_2 birer skalar iseler veya vektör kısımları orantılı

$$(Vq_2 = Vq_1)$$

ise;

$$q_1 \times q_2 = q_2 \times q_1$$

olur [Hacısalıhoğlu, H.H., 2000].

Tanım 1.11 : Kuaterniyonlar için eşitlik bağıntısı ;

$$\forall q_1, q_2 \in IK \text{ için } q_1 = q_2 \Leftrightarrow S_{q_1} = S_{q_2} \text{ ve } V_{q_1} = V_{q_2}$$

şeklinde tanımlanır [Hacısalihoglu , H.H., 2000].

Tanım 1.12 : Toplama ve skalar ile çarpma işlemlerinden iki kuaterniyonun farkı ;

$$q_1 - q_2 = (S_{q_1} - S_{q_2}) + (V_{q_1} - V_{q_2})$$

yani ,

$$S_{q_1+q_2} = S_{q_1} - S_{q_2} \quad \text{ve} \quad V_{q_1+q_2} = V_{q_1} - V_{q_2}$$

olarak tanımlanır [Hacısalihoglu , H.H., 2000].

Tanım 1.13 :

$$IK: \quad IK \rightarrow IK$$

işlemi

$$q \rightarrow K_{(q)} = K_q \quad q = S_q + V_q \rightarrow K_{(q)} = S_q - V_q$$

şeklinde tanımlanır ve K_q kuaterniyonuna q 'nun eşleniği denir. $V_{Kq} = -V_q$ olduğundan;

$$q \times K_q = K_q \times q = d^2 + a^2 + b^2 + c^2 \in \mathbb{R}$$

dir. O halde

$$q \times K_q = K_q \times q \geq 0$$

dır ve

$$q \times K_q = K_q \times q \Leftrightarrow q=0 \text{ dır.}$$

Eşlenik işleminin aşağıdaki özelliklere sahip olduğu açıktır [Hacısalihoglu , H.H., 2000].

- (i) $K(q_1 \times q_2) = K_{q_1} \times K_{q_2}$
- (ii) $K(a q_1 + b q_2) = a K_{q_1} + b K_{q_2}$
- (iii) $K(K_q) = q$

Tanım 1.14 :

$$N: IK \rightarrow \mathbb{R}$$

$$q \rightarrow N(q) = q \times K_q = K_q \times q$$

veya

$$q = d + a e_1 + b e_2 + c e_3$$

ise

$$N_q = q \times K_q = K_q \times q = d^2 + a^2 + b^2 + c^2$$

şeklinde tanımlanan pozitif reel sayıya q 'nun normu denir.

Norm işleminin aşağıdaki özelliklere sahip olduğu tanımdan kolayca görülebilir.

$$\begin{aligned}
 N(q_1 \times q_2) &= N(q_1 \times q_2) = (q_1 \times q_2) K(q_1 \times q_2) \\
 &= q_1 \times (N(q_2)) K_q \\
 &= N(q_2) I N(q_1) I \\
 &= N(q_1) N(q_2)
 \end{aligned}$$

dir [Hacısalıhoğlu , H.H., 2000].

Tanım 1.15 :

$$(\cdot)^{-1} : IK - \{0\} \rightarrow IK - \{0\}$$

$$q \rightarrow q^{-1} = K_q / N_q$$

şeklinde tanımlanır. Böylece

$$q \times q^{-1} = q^{-1} \times q = 1$$

elde edilir. $q \neq 0$ olmak üzere $V_q \in IK$ elamanının bir q^{-1} inversine sahip olması IK cebirini bir bölüm cebiri yapar. Böylece IK 'da bölme işlemini tanımlamak mümkün olur [Hacısalıhoğlu , H.H., 2000].

Tanım 1.16 : $q \neq 0$ olmak üzere bir p kuaterniyonunu bir q kuaterniyonu ile bölmek için p 'yi q^{-1} ile çarpmak gerekir. Fakat kuaterniyon çarpımı değişimli olmadığından bu çarpma işlemi iki türlüdür ve dolayısıyla p 'yi q ile iki türlü bölmek gerekir.

$$r_1 = p q^{-1} \text{ ve } r_2 = q^{-1} p$$

Burada r_1 kuaterniyonuna p 'nin q ile sağdan ve r_2 kuaterniyonuna da p 'nin q ile soldan bölümü denir. Genel olarak r_1 ile r_2 farklıdır, dolayısıyla p/q notasyonu kullanılmaz. Genelleştirme ile $\forall q_1, q_2, \dots, q_n \in IK$ için,

$$K(q_1 + q_2 + \dots + q_n) = Kq_1 + Kq_2 + \dots + Kq_n$$

$$K(q_1 \times q_2 \times \dots \times q_n) = Kq_1 \times Kq_2 \times \dots \times Kq_n$$

$$N(q_1 \times q_2 \times \dots \times q_n) = Kq_1 Kq_2 \dots Kq_n$$

$$(q_1 \times q_2 \times \dots \times q_n)^{-1} = q_n^{-1} \times q_{n-1}^{-1} \times \dots \times q_1^{-1}$$

bağıntıları elde edilebilir [Hacısalıhoğlu , H.H., 2000].

Tanım 1.17 : Normu birim olan bir kuaterniyona birim kuaterniyon denir ve q_0 ile gösterilir. Buna göre vektörlerde olduğu gibi herhangi bir q kuaterniyonunun normlanması

$$q_0 = \frac{q}{\sqrt{Nq}} = \frac{d+ae_1+be_2+ce_3}{\sqrt{d^2+a^2+b^2+c^2}}$$

olarak ifade edilebilir. Bu q_0 birim kuaterniyonu

$$q_0 = \cos\theta + S_0 \sin\theta$$

formunda yazılabilir, burada

$$\cos\theta = \frac{d}{\sqrt{d^2+a^2+b^2+c^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{d^2+a^2+b^2+c^2}}$$

dır ve $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ olduğu zaman

$$S_0 = \frac{ae_1+be_2+ce_3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

birim vektörüne q_0 birim kuaterniyonunun ekseni denir.

Yukarıdaki açıklamalardan bir kuaterniyondaki $+1, e_1, e_2, e_3$ birimlerinin cümlesi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- (i) Cümledeki herhangi iki elemanın çarpımı yine cümlededir.
- (ii) Cümlede çarpma işlemine göre birim eleman $e_0 = +1$ 'dir. Yani
- (iii) $e_0 \times e_i = e_i \times e_0 = e_i$, $1 \leq i \leq 3$, $e_0 = +1$ dir.
- (iv) $e_i \times (e_j \times e_k) = (e_j \times e_k) \times e_i$, $0 \leq i, j, k \leq 3$ dir, yani cümle de çarpma işlemi birleşimlidir.
- (v) Her elemanın bir inversi vardır. Hatta, bir birinin inversiyle çarpımı, soldan yahut sağdan, daima $e_0 = +1$ birim elemanına eşittir.

Böylece bu dört elemandan oluşan cümle dördüncü mertebeden sonlu bir grup oluşturur [Hacısalıhoğlu, H.H., 2000].

Tanım 1.18 :

$$q_1 \times q_2 = (d_1+a_1e_1+b_1e_2+c_1e_3) \times (d_2+a_2e_1+b_2e_2+c_2e_3)$$

$$q_1 \times q_2 = d_1 d_2 - (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) + (d_1 a_2 + a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2) e_1 + (d_1 b_2 + b_1 d_2 + c_1 d_2 - a_1 c_2) e_2 + (d_1 c_2 + d_2 c_1 + a_1 b_2 - b_1 a_2) e_3$$

ifadesinde $d_1 = d_2 = 0$ alınırsa

$$a = a_1 e_1 + b_1 e_2 + c_1 e_3 \quad \text{ve} \quad b = a_2 e_1 + b_2 e_2 + c_2 e_3$$

şeklinde iki vektör elde edilir. Bu iki vektörün kuaterniyon çarpımı, yine

$$q_1 \times q_2 = (d_1 + a_1 e_1 + b_1 e_2 + c_1 e_3) \times (d_2 + a_2 e_1 + b_2 e_2 + c_2 e_3)$$

$$q_1 \times q_2 = (d_1 d_2 - a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) + (d_1 a_2 + a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2) e_1$$

$$+ (d_1 b_2 + b_1 d_2 + c_1 d_2 - a_1 c_2) e_2 + (d_1 c_2 + d_2 c_1 + a_1 b_2 - b_1 a_2) e_3$$

$$a \times b = - (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) + \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

olarak bulunur, bu ise bir kuaterniyondur. Vektör cebirinde a, b vektörlerinin iç çarpımını $\langle a, b \rangle$ ve vektörel çarpımını da $a \wedge b$ ile gösterdiğimizize göre

$$\langle a, b \rangle = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

$$a \wedge b = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

dır. Buna göre

$$a \times b = - (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) + \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

ile verilen kuaterniyon çarpımı

$$a \times b = - \langle a, b \rangle + a \wedge b$$

formunda yazılabilir. (2.45) den de görüldüğü gibi iki vektörün kuaterniyondur ki bu kuaterniyonun skalar kısmı ve vektörel kısmı, sırası ile

$$S_{(a \times b)} = - \langle a, b \rangle \quad \text{ve} \quad V_{(a \times b)} = a \wedge b$$

dır [Hacısalıhoğlu, H.H., 2000].

2. DÜZLEMSEL PİSAGOR-HODOGRAFI EĞRİLERİ

2.1 Giriş

R^n 'de $r(t)$ parametrik eğrisinin hodografı onun türevi olan $r'(t)$ 'dir. Eğer $r(t)$ polinom eğrisinin hodografının bileşenlerinin kareleri toplamı $\sigma(t)$ şeklinde başka bir polinom oluyorsa R^n 'de $r(t)$ polinom eğrisi bir Pisagor-Hodograf eğrisidir.

2.2. R^2 de Pisagor-Hodograf Eğrileri

$r(t) = (x(t), y(t))$
eğrisinin PH eğrisi
 $x^2(t) + y^2(t) = \sigma^2(t)$ (2.1)
ifadesinden tanımlanır.

Teorem 2.1 :

$$a^2(t) + b^2(t) = c^2(t) \quad (2.2)$$

Pisagor koşulu $a(t), b(t), c(t)$ polinomları tarafından sağlanması için gerek ve yeter şart bu polinomların

$$\left. \begin{aligned} a(t) &= [u^2(t) - v^2(t)] w(t) \\ b(t) &= 2u(t)v(t)w(t), \\ c(t) &= [u^2(t) + v^2(t)] w(t), \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

(2.3) formunda $u(t), v(t), w(t)$ polinomlarına bağlı olarak ifade edilmesidir.

İspat: (2.3) formundaki (2.2) denklemini sağladığını görmek için (gcd = en büyük ortak bölen olmak üzere)

$$w(t) = \gcd(a(t), b(t), c(t))$$

ve

$$\tilde{a}(t) = \frac{a(t)}{w(t)}, \tilde{b}(t) = \frac{b(t)}{w(t)}, \tilde{c}(t) = \frac{c(t)}{w(t)}$$

polinomlarını göz önüne almak yeterlidir. Burada

$$\tilde{a}^2(t) + \tilde{b}^2(t) = \tilde{c}^2(t)$$

dir. Ayrıca $a(t), b(t), c(t)$ (2.2) denklemini sağlayan Pisagor üçlüsüdür. O halde $\tilde{b}^2(t) = \tilde{c}^2(t) - \tilde{a}^2(t) = |\tilde{c}(t) + \tilde{a}(t)||\tilde{c}(t) - \tilde{a}(t)|$,

olarak yazılırsa $\tilde{c}(t) + \tilde{a}(t)$ ve $\tilde{c}(t) - \tilde{a}(t)$ ortak köklere sahip değildir. Çünkü böyle köklerin varlığı $\tilde{a}(t), \tilde{b}(t), \tilde{c}(t)$ 'nin ortak kökleriyle ilişkilidir. Buradan $\tilde{b}(t)$ 'nin her kökü ya $\tilde{c}(t) + \tilde{a}(t)$ ya da $\tilde{c}(t) - \tilde{a}(t)$ olmak zorundadır. Böylece genelliği bozmaksızın $u(t), v(t), w(t)$ polinomlarına bağlı olarak

$$\tilde{c}(t) + \tilde{a}(t) = 2u^2(t) \text{ ve } \tilde{c}(t) - \tilde{a}(t) = 2v^2(t)$$

yazabiliriz. Böylece

$$\tilde{b}^2(t) = 4u^2(t)v^2(t)$$

dir. Son yazılan bu 3 denklemden

$$\tilde{a}(t) = u^2(t) - v^2(t), \tilde{b}(t) = 2u(t)v(t), \tilde{c}(t) = u^2(t) + v^2(t)$$

elde edilir. Ve böylece (2.3) denklemini sağlanmış olur.

Hatırlatma 2.2: $\gcd(a(t), b(t), c(t)) = sbt$ olan çözümlerinden $w(t)$ 'de sabit olacağından $\gcd(u(t), v(t))$ 'nin de sabit olduğu görülür. Böyle çözümlere ilkel Pisagor üçlüleri denir.

Böylece $r(t) = (x(t), y(t))$ düzlemsel PH eğrisi aşağıdaki gibi ifade edilen $u(t), v(t), w(t)$ 'lere bağlı olarak yazılan polinomların toplamı olarak tanımlanır.

$$x'(t) = [u^2(t) - v^2(t)]w(t), \quad y'(t) = 2u(t)v(t)w(t) \quad (2.4)$$

Burada $a(t), b(t)$ ile $x'(t)$ ve $y'(t)$ genelliği bozmaksızın özdeşdir. Dejenere PH eğrilerini oluşturabilmek için $u(t), v(t), w(t)$ 'lerin seçimi aşağıdaki gibi olur.

(a) Eğer $w(t) = 0$ veya $w(t) = v(t) = 0$ ise o zaman $x'(t) = y'(t) = 0$ hodografi sürekli bir noktalar kümesinden ziyade bir tek nokta tanımlar.

(b) Eğer $u(t), v(t), w(t)$ bütünüyle sabit (w ve u, v 'den en az biri sıfırdan farklı) ise o zaman düzgün parametrelendirilmiş doğru elde ederiz.

(c) Eğer $u(t), v(t)$ sabit, ikisi de 0'dan farklı ve $w(t) \neq sbt$ ise noktalar kümesi (4) de entegre edilerek elde edilen bir doğru tanımlar. Fakat onun parametrik hızı

genelde düzenli değildir. Bu doğru $w(t)$ 'nin çoklu köklerinden oluşturulan aralık üzerinde çoklu ize sahiptir.

(d) Eğer $w(t) \neq 0$ $u(t)$ veya $v(t)$ 'den biri 0 ise z-eksenine paralel lineer bir ifade elde ederiz. Böylece $u(t), v(t), w(t)$ 'nin hepsi 0'dan farklı ve $u(t)$ ve $v(t)$ 'nin her ikisinin de sabit olduğu durumları göz önüne alacağız.

Hatırlatma 2.3: $\lambda = \deg(w(t))$ ve $\mu = \max(\deg(u(t)), \deg(v(t)))$ ise PH eğrisi (4) hodografinın derecesi $n = \lambda + 2\mu + 1$ ' den elde edilir.

Lemma 2.4: n. dereceden PH eğrisi en çok bağımsız $n+3$ dereceye sahiptir. Çünkü n. dereceden genel bir polinom eğrisiyle birleştirilen $2(n+1)$ dereceyle orantılıdır.

2.3. \mathbb{R}^3 de Pisagor-Hodograf Eğrileri

\mathbb{R}^3 de

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

eğrisinin Pisagor-Hodografı

$$x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = \sigma^2(t) \quad (2.5)$$

olarak tanımlanır.

\mathbb{R}^2 den \mathbb{R}^3 e genelleştirilmiş Pisagor-Hodografları aşağıdaki gibi yazılmış olan $r'(t)$ Hodografı ile tanımlanır.

$$\begin{aligned} x'(t) &= h(t)[u^2(t) - v^2(t) - w^2(t)], \\ y'(t) &= 2h(t)u(t)v(t), \\ z'(t) &= 2h(t)u(t)w(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Burada $h(t), u(t), v(t), w(t)$ polinomlar olmak üzere

$$\sigma(t) = |h(t)| (u^2(t) + v^2(t) + w^2(t))$$

dir.

Teorem 2.5: $a(t), b(t), c(t), d(t)$ asal reel polinomlar olmak üzere

$$a^2(t) + b^2(t) + c^2(t) = d^2(t) \quad (2.7)$$

Pisagor koşulunu sağlıyorsa

$$\begin{aligned}a(t) &= u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t) , \\b(t) &= 2[u(t)q(t) + v(t)p(t)] \\c(t) &= 2[u(t)q(t) - v(t)p(t)] , \\d(t) &= u^2(t) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t)\end{aligned}\tag{2.8}$$

(2,4) formundaki $u(t), v(t), p(t), q(t)$ reel polinomlarına bağlı olarak ifade edilmeleri gerekir.



3. 3-BOYUTLU UZAYDA PİSAGOR HODOGRAFF EĞRİLERİ ÜZERİNDE EULER RODRİGUES ÇATILARI

3.1. Giriş

Bu çalışmada uzamsal/uzaysal Pisagor-Hodograph eğrileri üzerinde tanımlanan bir çerçevenin özelliklerini araştırdık. Bu çerçevede PH eğrilerinin kuaterniyon formülasyonu doğal olarak ortaya çıkar. “PH Temsil Haritası” özel bir örneği olarak Choi ve arkadaşları tarafından önerilen (2002) bu formülasyon, SO(3) ortogonal grubunun R^3 kinematığında bir rasyonel parametresini gerektirir. Euler-Rodrigues parametrizasyonu olarak da bilinir. (Bottema ve Roth, 1990 Altmann,1986)

SO(3) üç sütun vektörleri birim teğet eğrisinin vektörü olarak ilkinden PH eğrisi üzerinde bir çerçeve oluşturmaktadır. Böyle Frenet çatılarının en büyük avantajı, her zamanki gibi ERF çatıları üzerinde pratik ve rasyonel olmasıdır. Örneğin rasyonel bir çevreleme yüzeyi veya genelleştirilmiş silindirler oluşturmak için çerçevelerde gerekir.

Genel eğriler için Frenet çatıları bir umulmadık omurga eğrisi parametresinin rasyonel bir fonksiyonu olarak temsil edilebilir. (Bu bağlamda Wagner ve Ravani (1997) rasyonel eğrilerin özel bir türü olan Frenet çatılarının rasyonel olduğunu çalıştı.) Ayrıca ERF Frenet çatılarının “Dönüm noktalarında tanımlanabilir olamaz.” özelliğinin aksine PH eğrileri üzerinde her yerde tanımlanır.

3.2. PH Eğrilerinin Kuaterniyon Gösterimi (Temsili)

PH eğrisi

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 = \sigma(t)^2 \quad (3.1)$$

Denklemini sağlayan

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Tarafından verilen 3 boyutlu uzayda polinom eğrisidir.

$$\begin{aligned} x'(t) &= h(t)[u(t)^2 - v(t)^2 - w(t)^2] \\ y'(t) &= 2h(t)u(t)v(t) \\ z'(t) &= 2h(t)u(t)w(t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Pisagor bağıntısından $x'(t), y'(t), z'(t)$ dir. Burada $h(t), u(t), v(t), w(t)$ reel polinomlardır. Kontrol polinomlarına uygun kübik PH eğrileri Farouki ve Sakkalis

tarafından tam olarak analiz edilmiş olmasına rağmen doğru şartlar bilinmiyordu. Fakat başka yayınlarda keşfedilmişti. Birim küre üzerindeki yüzey ve eğrilerin rasyonel ifadelerini araştıran Dietz ve diğerleri (2) deki $x'(t), y'(t), z'(t)$ polinomlarının

$$\begin{aligned}x'(t) &= a(t)^2 + b(t)^2 - c(t)^2 - d(t)^2, \\y'(t) &= 2[a(t)d(t) + b(t)c(t)], \\z'(t) &= 2[-a(t)c(t) + b(t)d(t)], \\ \sigma(t) &= \pm [a(t)^2 + b(t)^2 + c(t)^2 + d(t)^2]\end{aligned}\tag{3.3}$$

(3.3) denklemi formuna sahip olduğunu ispatlamıştır. Burada $a(t), b(t), c(t), d(t)$ reel polinomlardır. Ortak $h(t)$ çarpanlı $x'(t), y'(t), z'(t)$ ve $\sigma(t)$ benzer olarak ifade edilebilir. $x'(t) = h(t) \tilde{x}'(t)$, $y'(t) = h(t) \tilde{y}'(t)$, $z'(t) = h(t) \tilde{z}'(t)$ ve $\sigma'(t) = h(t) \tilde{\sigma}'(t)$ dan tanımlandığında $\tilde{x}'(t)$, $\tilde{y}'(t)$, $\tilde{z}'(t)$ ve $\tilde{\sigma}'(t)$ Pisagor dördlüsü olduğu kolayca görülür. Ve böylece

$$\begin{aligned}\tilde{x}'(t) &= \tilde{a}(t)^2 + \tilde{b}(t)^2 - \tilde{c}(t)^2 - \tilde{d}(t)^2, \\ \tilde{y}'(t) &= 2[\tilde{a}(t)\tilde{d}(t) + \tilde{b}(t)\tilde{c}(t)], \\ \tilde{z}'(t) &= 2[-\tilde{a}(t)\tilde{c}(t) + \tilde{b}(t)\tilde{d}(t)], \\ \tilde{\sigma}'(t) &= \pm [\tilde{a}(t)^2 + \tilde{b}(t)^2 + \tilde{c}(t)^2 + \tilde{d}(t)^2]\end{aligned}\tag{3.4}$$

denklemi yazılır. Burada $\tilde{a}(t), \tilde{b}(t), \tilde{c}(t)$ ve $\tilde{d}(t)$ polinomlardır.

(3.3) deki ifadeler hareket dizaynını sağlayan bir ailedir. Daha sonra $\Delta = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ yazıldıktan sonra U SO3 matrisinin ilk kolonunu oluşturur.

$$U = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2(-ad + bc) & 2(ac + bd) \\ 2(ad + bc) & a^2 - b^2 - c^2 - d^2 & 2(-ab + cd) \\ 2(-ac + bd) & 2(ab + cd) & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{bmatrix}\tag{3.5}$$

Burada a, b, c, d ye Euler-Rodrigues parametresi denir. U matrisi \mathbb{R}^3 de bir rasyonel dönüşümü temsil ettiği için $U (1, 0, 0)^T$ birinci kolonu dönme altında $i = (1, 0, 0)$ vektörünün görüntüsüdür. Böyle dönmeleri U birim kuaterniyon cinsinden UiU^* şeklinde ifade edilebilir. Bundan sonrada

$$A \mathbf{i} A^* = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)\mathbf{i} + 2(ad + bc)\mathbf{j} + 2(-ac + bd)\mathbf{k} \quad (3.6)$$

$A = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ olduğundan PH eğrileri

$$\mathbf{r}'(t) = A(t)\mathbf{i} A^*(t) \quad (3.7)$$

$$\mathbf{r}(t) = h(t)\tilde{A}(t)\mathbf{i} \tilde{A}^*(t) \quad (3.8)$$

denklemleri yazılır.

3.3. Rotation (Dönme) Minimize Çatılar

Bir $r(t)$ eğrisi üzerinde ortogonal birim vektör alanlarının $E = \{e_1(t), e_2(t), e_3(t)\}$ cümlesine eğrinin bir çatısı, çatı alanı denir.

Biz burada pozitif yönlendirilmiş çatı alanlarını inceleyeceğiz. Yani $e_1(t) \cdot (e_2(t) \times e_3(t)) = 1$ dir. Eğer $e_1(t) = \mathbf{r}'(t)/|\mathbf{r}'(t)|$ ise e'ye adapted denir. O zaman $r(t)$ gerdiği ve e_2 ve e_3 tarafından gerilen düzleme eğrinin normal düzlemi denir. Adapted çatılar yüzey oluşturmakta faydalıdır. Bir $r(t)$ uzay eğrisi ve $p(u) = (p_1(u), p_2(u))$ düzlem eğrisi verildiğinde $S(t, u)$ sweep yüzeyi

$$S(t, u) = \mathbf{r}(t) + p_1(u)\mathbf{e}_2(t) + p_2(u)\mathbf{e}_3(t)$$

denklemleriyle tanımlanır. $p(u)$ ya profil eğrisi $r(t)$ ye de spin eğrisi adını vereceğiz. Dikkat edilirse daima normal düzlemde bulunur.

Adapted çatılarının en önemli örneği $F = \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ frenet çatısıdır. Burada

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{n} = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \times \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| |\mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|} \quad (3.9)$$

denklemleri söz konusudur. Frenet çatısı 3 boyutlu Öklid uzayında eğriler teorisi için vazgeçilmez(zorunlu) olmasına rağmen uygulamada pek çok dezavantajı vardır. Bunlar

- 1) Dönüm noktaları tanımlı olamaz.
- 2) t 'nin genellikle rasyonel olmayan fonksiyonlarıdır.
- 3) Son olarak da t etrafında dönmeyi istemez. (istenmeyen dönmeler vardır)

Fakat bir eğrideki çatıyı tanımlamanın birden fazla yolu vardır. Frenet çatısının istenmeyen dönmeleri sweep yüzeyine karşılık gelen bükülmeyi oluşturduğu bilindiğinden

normal düzlemi muhtemelen hareketsiz kalan bir adapted çatıyı oluşturmak gereklidir. Bir $r(t)$ eğrisi verildiğinde $e_1(t) = r'(t)/|r'(t)|$ dir. Her t için $r(t)$ nin normal düzlemi $e_2(t)$ keyfi birim vektörü seçildiğinde normal düzlemde olan $e_3(t) = e_1(t) \times e_2(t)$ tanımlanır. Böylece $E = \{e_1(t), e_2(t), e_3(t)\}$ bir adapted çatı belirtir. $e_2(t)$ vektör alanı muhtemelen istenildiği kadar küçük olarak değiştirilince bir birim vektör olur. Varyasyon iki bileşeni ayrıştırılabilir. Çünkü $|e_2(t)|$ sabittir. Ve $e_2'(t) \perp e_2(t)$ dir. Yani $e_2'(t) = ae_1(t) + be_3(t)$ 'dir. a katsayısı $e_1(t)$ deki değişimi ortogonal olan $e_2(t)$ deki şartlı değişimi yaptığından b normal düzlemde $e_2(t)$ den sorumludur. Buradan $e_2(t)$ nin minimum varyasyonuna ulaşmak için b 'yi sıfır yapmak gerekir. Klok, 1986 a katsayısını hesapladı ve

$$e_2'(t) = -\frac{r''(t) \cdot e_2(t)}{|r'(t)|^2} r'(t) \quad (3.10)$$

diferansiyel denklemini $e_2(t)$ 'nin sağlandığını gösterdi.

Eğer $e_2(t)$ ve $e_3(t)$ (10) denkleminin çözümleri ise bir Rotation Minimizing Frame (RMF) $E = \{e_1(t), e_2(t), e_3(t)\}$ adapted çatısına denir. $r(t)$ üzerinde hem $e_2(t)$ hem $e_3(t)$ normal konneksiyonları sıfır olduğunda özdeşleştirir. Normal düzlemde hem $e_2'(t)$ projeksiyonu hem de $e_3'(t)$ projeksiyonu sıfırdır.

$$e_2'(t) \cdot e_3(t) = e_3'(t) \cdot e_2(t) = 0 \quad (3.11)$$

Sonuç olarak $e_2'(t)$ ve $e_3'(t)$, $e_1(t)$ 'ye paraleldir. Bir eğri sonsuz sayıda RMF'ye sahip olduğundan $e_2(t)$ ve $e_3(t)$ 'nin sonsuz pozisyonlarının belirgin cümleleri farklı çatılar oluşturur. Şimdi diğer bir adapted çatı olan $F = \{f_1(t), f_2(t), f_3(t)\}$, bir RMF için $\theta(t)$ açısal sapması tarafından temsil edilebilir.

$$f_1(t) = e_1(t), \quad \begin{bmatrix} f_2(t) \\ f_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta(t) & \sin\theta(t) \\ -\sin\theta(t) & \cos\theta(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2(t) \\ e_3(t) \end{bmatrix}$$

Çatılar büyüklüklerine bölünerek ortogonal vektör alanlarından elde edildiği için $f_2(t)$ ve $f_3(t)$ birim olmayan ifadeler olduğundan açısal sapmaları hesaplamak için uygun bir formüle sahip olması gerekir. Genelde

$$\begin{aligned} f_2(t) &= |f_2(t)| [e_2(t)\cos\theta(t) + e_3(t)\sin\theta(t)], \\ f_3(t) &= |f_3(t)| [-e_2(t)\sin\theta(t) + e_3(t)\cos\theta(t)] \end{aligned}$$

denklemine sahiptir. (3.11) den $w(t) = \theta'(t)$ açısal hızı

$$\begin{aligned} f_2'(t) \cdot f_3(t) &= |f_2(t)| |f_3(t)| w(t), \\ f_2(t) \cdot f_3'(t) &= -|f_2(t)| |f_3(t)| w(t) \end{aligned}$$

denklemine sağladığını kolayca görebiliriz.

Böylece;

$$w(t) = \frac{f_2'(t) \cdot f_3(t)}{|f_2(t)| |f_3(t)|} = - \frac{f_2(t) \cdot f_3'(t)}{|f_2(t)| |f_3(t)|} \quad (3.12)$$

denklemine yazabiliriz. $f_1(t)$ ekseninde saat tersi yönde döndürüldüğünden açısal hız pozitiftir.

Hatırlatma 3.1: w açısal hızı kinematikte çatılarla uyumsuzdur. Ω açısal hız matrisi $\Omega = F'F^T$ ve F ortogonal matris) açısal hız Ω 'nın vektör temsilidir. Gerçekten bizim versiyonumuz olan açısal hız çatısının $(F^T)'F$ Kartan matrisinin (2,3) elemanıdır. RMF ya açısal hız matrisine ya da Kartan matrisine göre tanımlanır. Bu çalışmada w açısal hızı yukarıda tanımlanan θ sapma açısının zamana göre türevidir.

Örnek 3.2: Frenet çatısının $w_f(t)$ açısal hızı

$$w_f = \frac{\det(r', r'', r''')}{|r' \times r''|^2} |r'| = \tau |r'|, \quad (3.13)$$

denklemdir. Burada $\tau(t)$ eğrinin torsiyonudur. (n ve b için $r' \times r''$ ve $(r' \times r'') \times r'$ kullanmak uygundur.) Böylece torsiyon işaretine bağlı olarak $b' = \tau n$ tarafından verilir. Yani $\{n, b\}$ tarafından gerilen normal düzlem saat tersi yönde döndürüldüğünde eğri bir pozitif torsiyona sahiptir.

3.4. Euler-Rodrigues Çatıları

Bu bölümde PH eğrileri üzerinde tanımlı bir rasyonel çatıyı vereceğiz. İlk önce kabul edelim ki bir $r(t)$ üzerindeki bir PH eğrisi (7) denklemini sağlasın. O zaman $U(t) = A(t)/|A(t)|$ birim kuaterniyonu \mathbb{R}^3 de bir dönme tanımlar. Ve böylece

$$f_1(t) = U(t) \mathbf{i} U^*(t), f_2(t) = U(t) \mathbf{j} U^*(t), f_3(t) = U(t) \mathbf{k} U^*(t) \quad (3.14)$$

denklemleri 3 vektör alanı $F = \{f_1(t), f_2(t), f_3(t)\}$ adapted rasyonel çatıyı oluşturur. Dikkat edilirse $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ (5) deki U 'nun kolon vektörlerine karşılık gelir.

Tanım 3.3: $A(t) = a(t) + b(t)\mathbf{i} + c(t)\mathbf{j} + d(t)\mathbf{k}$ bir kuaterniyon polinomu ve $r(t)$, $\mathbf{r}'(t) = A(t)\mathbf{i} A^*(t)$ tarafından tanımlanan bir PH eğrisi olsun. $r(t)$ 'nin Euler-Rodrigues çatısı (ERF) $F = \{f_1(t), f_2(t), f_3(t)\}$ (3.14)'den tanımlı bir adapted çatıdır. Şimdi kabul edelim ki $r(t)$ (3.8) denklemini sağlasın. Benzer şekilde $\tilde{U}(t) = \tilde{A}(t) / |\tilde{A}(t)|$ birim kuaterniyonu tanımlayabiliriz ve $F = \{f_1(t), f_2(t), f_3(t)\}$ rasyonel çatısı $\tilde{f}_1(t) = \tilde{U}(t)\mathbf{i}\tilde{U}^*(t)$, $\tilde{f}_2(t) = \tilde{U}(t)\mathbf{j}\tilde{U}^*(t)$, $\tilde{f}_3(t) = \tilde{U}(t)\mathbf{k}\tilde{U}^*(t)$ denklemleridir. Şimdi $h(t) > 0$ olmak üzere t 'nin aralığı üzerinde, $\tilde{f}_1(t)$ bu aralıkta $r'(t)$ 'nin doğrultmanını gösterdiği için \tilde{F} , $r(t)$ 'nin bir adapted çatısıdır. Bu durumda $r(t)$ 'nin bir ERF'si olarak \tilde{F} 'i tanımlarız.

Hatırlatma 3.4: ERF üzerinde birim dizimizin analizi (3.7) tipindeki PH eğrilerine odaklanır. Diğer yandan (3.8) tipindeki PH eğrileri üzerinde ERF' nin özellikleri çok farklı değildir. (3.12)'den RMF'e karşı ERF'nin açılal sapmasını hesaplayacağız. Burada $f_2(t)\tilde{A}(t)\mathbf{j}\tilde{A}^*(t)$ ve $f_3(t)\tilde{A}(t)\mathbf{k}\tilde{A}^*(t)$ denklemlerini uygulayacağız.

$$w = 2 \frac{-a'b + ab' + c'd - cd'}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \quad (3.15)$$

n . dereceden $a(t), b(t), c(t)$ ve $d(t)$ reel polinomları $(2n + 1)$. dereceden bir PH eğrisi oluşturur. Paydaki baş terim birbirini ertelediği için açılal hız bir rasyonel fonksiyondur ve onun pay ve paydası $(2n - 2)$. ve $(2n)$. derecedendir. (3.15) tarafından oluşturulan rasyonel fonksiyonu bir kısmi kesirler ayrışımını kullanarak açılal sapmayı elde edebiliriz. 3. ve 5. dereceden PH eğrileri paydaları 2. ve 4. dereceden olanlara açık bir

şekilde tamamlanabilir. Daha yüksek dereceler için bir nümeriksel metotla derecesi 5'den büyük olan paydaları çarpanlara ayırmak gerekir. Bu alt bölümde biz 3., 5. ve $r'(t) = A(t)\mathbf{i} + A^*(t)$ tarafından temsil edilen 7. dereceden PH eğrilerini tartışacağız. $A(t)$ kuaterniyon polinomları Bernstein formunda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$A(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A_k (1-t)^{n-k} t^k \quad (3.16)$$

Burada A_k kuaterniyon sabitidir. $A(t) = a(t) + b(t)\mathbf{i} + c(t)\mathbf{j} + d(t)\mathbf{k}$ yazılabildiğinden $a(t), b(t), c(t)$ ve $d(t)$ reel polinomlarının Bernstein formu aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} a(t) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k (1-t)^{n-k} t^k \\ b(t) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k (1-t)^{n-k} t^k \\ c(t) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c_k (1-t)^{n-k} t^k \\ d(t) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k (1-t)^{n-k} t^k \end{aligned} \quad (3.17)$$

Burada $A_k = a_k + b_k\mathbf{i} + c_k\mathbf{j} + d_k\mathbf{k}$ 'dir.

3.5. Üçüncü Dereceden PH Eğrilerinin ERF'si

Bernstein formunda $A(t), a(t), b(t), c(t)$ ve $d(t)$ lineer polinomlarından tanımlıdır.

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0(1-t)a_1t, \\ b(t) &= b_0(1-t)b_1t, \\ c(t) &= c_0(1-t)c_1t, \\ d(t) &= d_0(1-t)d_1t. \end{aligned} \quad (3.18)$$

(3.15)'de (3.18) göz önüne alınırsa

$$w = 2 \frac{a_0b_1 - a_1b_0 - c_0d_1 + c_1d_0}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \quad (3.19)$$

(3.19) denklemi elde edilir. Pay sabit ve payda daima pozitif olduğu için açılmal hız işarete göre değişmez. Yani çatı bir doğrultuda sadece döner. Payda eğrisinde $|r'(t)|$ hız olduğundan çatının açılmal hızı ve eğrinin hızının çarpımı sabittir. 3. dereceden PH eğrisinin ERF'sinin bir RMF oluşturması için

$$a_0b_1 - a_1b_0 - c_0d_1 + c_1d_0 = 0 \quad (3.20)$$

(3.20) denkleminin sağlanması şarttır. (3.2)'deki PH koşulu kübik eğrilerin geometrisi üzerinde bizi bir kısıtlamaya götürmektedir. PH kübik eğrilerinde jenerik helisler, uzaysal eğriler ki onun eğrilik versiyonu sabit olan eğrilerdir.

Teorem 3.5: Bir ERF, kübik PH eğrileri üzerindeki Frenet çatısıyla sabit bir açı yapar. İspat için Frenet çatısının w_f açısız sapmasının (3.19)'a eşit olduğunu göstermek yeterlidir.

Frenet çatısında $b(t)$ ve ERF'nin $f_3(t)$ arasındaki sabit açı $\Delta\theta$ aşağıdaki denklemi sağlar.

$$\cos\Delta\theta = \frac{a_0b_1 - a_1b_0 - c_0d_1 + c_1d_0}{\sqrt{D}},$$

Burada

$$D = (a_0a_1 - c_0c_1)^2 - (a_0a_1 + d_0d_1)^2 + (a_0c_1 - b_1d_0)^2 + (a_0d_1 + b_1c_0)^2 + (a_1c_0 - b_0d_1)^2 + (a_1d_0 + b_0c_1)^2 - (b_0b_1 - c_0c_1)^2 + (b_0b_1 - d_0d_1)^2$$

dır. Böylece verilen bir PH kübik eğrisinin ERF'si bir RMF'dir. \Leftrightarrow Onun Frenet çatısıdır. Fakat Frenet çatısı bir RMF'dir. \Leftrightarrow Onun torsiyonu sifira eşittir. Yani eğri doğrusaldır.

Hatırlatma 3.6: Bir PH kübik eğrisinin ERF'si bir RMF' dir. \Leftrightarrow Eğri doğrusaldır.

Dönme minimize özelliğine sahip olan kübik PH eğrileri doğrusal PH eğrileri olduğundan, bu eğriler Tschirnhausen kübikleri olarak da bilinir. Dönme minimize koşulu kübik PH eğrilerinin uygulanabilir uzaysal eğrilerle özdeş olarak kendisini muhafaza etmesidir. Fakat PH kübik eğrilerini rasyonel sweep yüzeyleri için spin eğrileri olarak göz önüne almak yine de kullanışlıdır. Onların açısız hızı (3.19)'dan trigonometrik fonksiyonların integrasyonuna göre kabul eder. Bu sapma açısının rasyonel yaklaşımı ERF'yi bir RMF'ye göre uyarlamaktır. Böylece keyfi kübik eğrilerin rasyonel yaklaşımını bulabiliriz.

3.6 Beşinci Dereceden PH Eğrilerinin ERF'si

Tanım 3.7: Bernstein polinomları $t \in [0,1]$ olmak üzere,

$$B_i^n(t) = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!} (1-t)^{n-i} t^i, & 0 \leq i \leq n \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Bernstein formunda $A(t)$ 'nin $a(t), b(t), c(t)$ ve $d(t)$ kuadratik polinomlarını tanımlayabiliriz.

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0(1-t)^2 + 2a_1(1-t)t + a_2t^2, \\ b(t) &= b_0(1-t)^2 + 2b_1(1-t)t + b_2t^2, \\ c(t) &= c_0(1-t)^2 + 2c_1(1-t)t + c_2t^2, \\ d(t) &= d_0(1-t)^2 + 2d_1(1-t)t + d_2t^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

(3.15)'de (3.21) uygulandığından

$$w = 4 \frac{A(1-t)^3 + (A-C)(1-t)^2 + (B-C)(1-t)t^2 + Bt^3}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \quad (3.22)$$

denklemini elde edilir.

Burada

$$\begin{aligned} A &= a_0b_1 - a_1b_0 - c_0d_1 + c_1d_0, \\ B &= a_1b_2 - a_2b_1 - c_1d_2 + c_2d_1, \\ C &= a_2b_0 - a_0b_2 - c_2d_0 + c_0d_2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

denklemleri elde edilir.

(3.22) kübik Bernstein formunda olmasına rağmen aslında kuadrattır. 5. dereceden bir PH eğrisinin ERF'si bir RMF'dir. \Leftrightarrow Homojen kuadratik denklemlerin

sistemi $A = 0, B = 0, C = 0$ şartını sağlar. 12 reel bilinmeyenli 3 denklem sistemi için 9 bağımsız parametreye göre bu 12 bilinmeyi düşünürüz.

Teorem 3.8: Bir 5. dereceden PH eğrisinin ERF'si bir RMF'dir. \Leftrightarrow 12 katsayılı a_i, b_i, c_i, d_i 9 bağımsız değişken olan $r, s, u, v, w, x, y, \theta$ ve Φ tarafından aşağıdaki gibi ifade edilir. Eğer $a_0^2 + b_0^2 > 0$ ve $c_0^2 + d_0^2 > 0$ ise

$$\begin{aligned}
a_0 &= r \cos \theta, & b_0 &= r \sin \theta, & c_0 &= s \cos \Phi, & d_0 &= s \sin \Phi, \\
a_1 &= u \cos \theta - v \sin \theta, & b_1 &= u \cos \theta + v \sin \theta \\
c_1 &= w \cos \theta - \frac{rv}{s} \sin \Phi, & d_1 &= w \sin \theta + \frac{rv}{s} \cos \Phi, \\
a_2 &= x \cos \theta - y \sin \theta, & b_2 &= x \sin \theta + y \cos \theta, \\
c_2 &= \frac{1}{rv} (rwy - suy + svx) \cos \Phi - \frac{ry}{s} \sin \Phi, \\
d_2 &= \frac{1}{rv} (rwy - suy + svx) \sin \Phi - \frac{ry}{s} \cos \Phi
\end{aligned} \tag{3.24}$$

elde edilir. Eğer $a_0 = b_0 = 0$ ise $c_0 = s \cos \Phi$ ve $d_0 = s \sin \Phi$ 'dir. Veya $c_0 = d_0 = 0$ ise $a_0 = r \cos \theta$ ve $b_0 = r \sin \theta$ yazabiliriz. Her iki durumda da katsayılar aşağıdaki gibi ifade edilir.

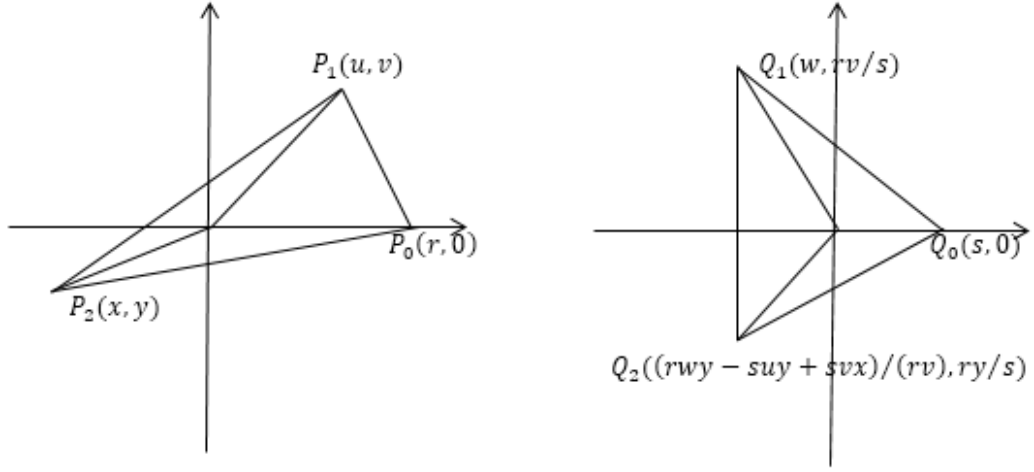
$$\begin{aligned}
a_1 &= r_1 \cos \theta, & b_1 &= r_1 \sin \theta, & c_1 &= s_1 \cos \Phi, & d_1 &= s_1 \sin \Phi, \\
a_2 &= r_2 \cos \theta, & b_2 &= r_2 \sin \theta, & c_2 &= s_2 \cos \Phi, & d_2 &= s_2 \sin \Phi.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

İspat: (3.23)'den $A = 0, B = 0, C = 0$ denklemleri aşağıdaki denklemlerden biriyle özdeştir.

$$\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} c_0 & c_1 \\ d_0 & d_1 \end{pmatrix}, \tag{3.26}$$

$$\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix}, \tag{3.27}$$

$$\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} a_2 & a_0 \\ b_2 & b_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} c_2 & c_0 \\ d_2 & d_0 \end{pmatrix}. \tag{3.28}$$



$P_i = (a_i, b_i)$ ve $Q_i = (c_i, d_i)$ $i = 0,1,2$ olsun. O zaman yukardaki denklem geometrik olarak OP_iP_{i+1} üçgeninin alanı OQ_iQ_{i+1} üçgeninin alanına eşittir.

Kabul edelim ki P_0 ve Q_0 x-ekseninin pozitif tarafında yani $a_0 = r, b_0 = 0, c_0 = s, d_0 = 0, r > 0, s > 0$ olsun. O zaman (3.26)'nın LHS'in den OP_0P_1 üçgeninin alanı $rv/2$ 'dir. c_1 keyfi olarak ve w tarafından tanımlandığında OQ_0Q_1 üçgeninin yüksekliği d_1 olmalıdır.

Aynı argümanla (3.28) denkleminde bakıldığında $d_2 = ry/s$ ve $a_2 = x, b_2 = y$ olacaktır. Fakat c_2 artık keyfi değildir. (3.27)'nin açılımından $c_2 = \frac{1}{rv} (rwy - suy + svx)$ olduğu gösterilir.

Orijin etrafındaki dönmelerden P_0 ve Q_0 'in konumları yeniden yapılandırılacaktır. $P_0 = (r \cos\theta, r \sin\theta)$ ve $Q_0 = (s \cos\theta, s \sin\theta)$ 'dir.

Böylece P_1, Q_1, P_2, Q_2 (3.24) tarafından elde edilecektir.

Şimdi kabul edelim ki $a_0 = b_0 = 0$ veya $c_0 = d_0 = 0$ olsun. O zaman (3.26) ve (3.28) denklemlerinin bütün determinantları 0'dır ve böylece (3.27)'de bunları göz önüne alabiliriz. $(a_0, b_0), (a_1, b_1)$ ve (a_2, b_2) paralel vektörlerdir. Aynı şekilde $(c_0, d_0), (c_1, d_1)$ ve (c_2, d_2) de paralel vektörlerdir. Bu vektörler (3.25)'de ki Θ ve Φ açılara bağlı olarak temsil edilebilir. Bu durumda r_i ve s_i pozitif olamazlar. ($i = 0,1,2$)

Teorem 3.9: 3. dereceden bir PH eğrisinin ERF'si bir RMF'dir. \Leftrightarrow Eğri düzlemseldir.

İspat. Böyle bir 3. dereceden eğri $r(t)$ olsun. Uygun bir dönme ile $r'(0)$ teğet vektörünün (başlangıç teğet vektörü) pozitif x-ekseni doğrultusunda olduğunu kabul edelim.

$r' = A_0(i)A_0^*(i)$ olduğundan $c_0 = d_0 = 0$ olmak zorundadır. O zaman $A(t)$ 'nin katsayıları (3.25) formunda alınır ve böylece

$$\begin{aligned} a(t) &= r(t)\cos\Theta, & c(t) &= s(t)\cos\Phi \\ b(t) &= r(t)\sin\Theta, & d(t) &= s(t)\sin\Phi \end{aligned} \quad (3.29)$$

yazılabilir.

$r(t) = r_0(1-t)^2 + 2r_1(1-t)t + r_2t^2$ ve $s(t) = 2s_1(1-t)t + s_2t^2$ olduğundan bu da bizi $r'(t)$ 'nin aşağıdaki ifadesine götürür.

$$\begin{aligned} r'(t) &= (r(t)^2 - s(t)^2, 2r(t)s(t) \sin(\Theta + \Phi), -2r(t)s(t) \cos(\Theta + \Phi)) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos M & -\sin M \\ 0 & \sin M & \cos M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(t)^2 - s(t)^2 \\ 2r(t)s(t) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Burada $M = \Theta + \Phi - \Pi/2$ 'dir.

3.7. Yedinci Dereceden PH Eğrilerinin ERF'si

Bernstein formunda $A(t)$ 'nin $a(t), b(t), c(t)$ ve $d(t)$ kuadratik polinomlarını tanımlayalım.

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0(1-t)^3 + 3a_1(1-t)^2t + 3a_2(1-t)t^2 + a_3t^3 \\ b(t) &= b_0(1-t)^3 + 3b_1(1-t)^2t + 3b_2(1-t)t^2 + b_3t^3 \\ c(t) &= c_0(1-t)^3 + 3c_1(1-t)^2t + 3c_2(1-t)t^2 + c_3t^3 \\ d(t) &= d_0(1-t)^3 + 3d_1(1-t)^2t + 3d_2(1-t)t^2 + d_3t^3 \end{aligned} \quad (3.30)$$

7. dereceden PH eğrisinin açılmal hızı;

$$\begin{aligned} w &= \frac{6}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} [A(1-t)^5 + (A + 2B)(1-t)^4t + (2B + 3C + D)(1-t)^3t^2 \\ &\quad + (3C + D + 2E)(1-t)^2t^3 + (2E + F)(1-t)t^4 + Ft^5], \end{aligned} \quad (3.31)$$

denkleminde hesaplanır. Burada

$$\begin{aligned}
A &= a_0b_1 - a_1b_0 - c_0d_1 + c_1d_0, \\
B &= a_0b_2 - a_2b_0 - c_0d_2 + c_2d_0, \\
C &= a_1b_2 - a_2b_1 - c_1d_2 + c_2d_1, \\
D &= a_0b_3 - a_3b_0 - c_0d_3 + c_3d_0, \\
E &= a_1b_3 - a_3b_1 - c_1d_3 + c_3d_1, \\
F &= a_2b_3 - a_3b_2 - c_2d_3 + c_3d_2.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

şeklindedir.

(3.31) denklemi 5. dereceden Bernstein formunda olmasına rağmen aslında 4.derecedendir.

7. dereceden bir PH eğrisinin ERF'si bir RMF'dir. \Leftrightarrow

$$A = B = 3C + D = E = F = 0 \tag{3.33}$$

denklemi homojen kuadratik denklemler sistemini sağlar. Kutupsal koordinatlarda $A(t)$ 'nin katsayılarını yazmak avantajlı olacaktır.

$$\begin{aligned}
(a_i, b_i) &= (r_i \cos \theta_i, r_i \sin \theta_i), \\
(c_i, d_i) &= (s_i \cos \phi_i, s_i \sin \phi_i)
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Eğer $r'(0)$ başlangıç teğet vektörü pozitif x-eksenindeki noktaysa (3.33) denkleminin karakterizasyonu kolaydır.

Lemma 3.10: Kabul edelim ki $c_0 = d_0 = 0$ olsun. (3.33)'ün herhangi bir çözümü

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 \pmod{\pi} \tag{3.35}$$

denklemini sağlar ve (3.34)'ün katsayıları için aşağıdaki 2 durum söz konusudur.

1.Durum: $\theta_3 = \theta_0 \pmod{\pi}$ bu bir dejenere durumdur. $r_i = r_j$ $i = 1,2,3$ ve $j = 1,2,3$ için keyfi non-negatif sayılar iken $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 \pmod{\pi}$ göre

2.Durum: $\theta_3 \neq \theta_0 \pmod{\pi}$ o zaman $\theta_i \neq \theta_j \pmod{\pi}$ ($i \neq j$) koşulu altında keyfi bir $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ vardır ve

$$r_0 = 3 \frac{s_1 s_2 \sin(\phi_2 - \phi_1)}{r_3 \sin(\theta_3 - \theta_0)},$$

$$r_1 = 3 \frac{s_1 s_3 \sin(\phi_3 - \phi_1)}{r_3 \sin(\theta_3 - \theta_1)},$$

$$r_1 = 3 \frac{s_2 s_3 \sin(\phi_3 - \phi_2)}{r_3 \sin(\theta_3 - \theta_2)},$$

burada s_1, s_2, s_3 ve r_3 keyfi pozitif reel sayılardır.

İspat: Matris formunda (3.33)'ü yazabiliriz.

$$\det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} c_0 & c_1 \\ d_0 & d_1 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

$$\det \begin{pmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} c_0 & c_2 \\ d_0 & d_2 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

$$3\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_0 & a_3 \\ b_0 & b_3 \end{pmatrix} = 3\det \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} c_0 & c_3 \\ d_0 & d_3 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ d_1 & d_3 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

$$\det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} c_2 & c_3 \\ d_2 & d_3 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

$c_0 = d_0 = 0$ için (3.36) ve (3.37) determinantları 0 olup (a_0, b_0) , (a_1, b_1) ve (a_2, b_2) paraleldir. Böylece (35) koşulu sağlanır.

$$\det \begin{pmatrix} a_0 & a_3 \\ b_0 & b_3 \end{pmatrix} = 3\det \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

O zaman (3.38) (3.41)' e kısıtlanır. Kabul edelim ki $\theta_3 = \theta_0(\text{mod}\pi)$ olsun. İlk olarak (a_3, b_3) vektörü (a_0, b_0) ' a paraleldir. Böylece (a_1, b_1) ve (a_2, b_2) de paralel olur. (3.36)-(3.40)' da bütün determinantların 0 olduğu görülür. Böylece $i = 1, 2, 3$ için (c_i, d_i) vektörleri paraleldir. Buda $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3(\text{mod}\pi)$ koşulunu sağlar. Şimdi kabul edelim ki $\theta_3 \neq \theta_0(\text{mod}\pi)$ olsun. O zaman (a_3, b_3) vektörü (a_1, b_1) vektörlerinin hiçbirine paralel değildir. $i = 1, 2, 3$ için (c_i, d_i) çiftleride paralel değildir. Paralel olmadığından $\phi_i \neq \phi_j(\text{mod}\pi)$ $i \neq j$ koşulu sağlanır. Şimdi (3.41) denklemini göz önüne alalım. Kutupsal koordinatlardan bu

$$r_0 r_3 \sin(\theta_3 - \theta_0) = 3 s_1 s_2 \sin(\phi_2 - \phi_1) \quad (3.42)$$

ve böylece

$$r_0 = 3 \frac{s_1 s_2 \sin(\phi_2 - \phi_1)}{r_3 \sin(\theta_3 - \theta_0)} \quad (3.43)$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.39) ve (3.40)' dan r_1 ve r_2 ifadeleri bulunur.



SONUÇ

Düzlemsel ve 3-boyutlu PH eğrileri verilmiştir. PH eğrilerinin kuaterniyonlardan faydalanarak bazı gösterimleri incelenmiş olup buradan hareketle PH eğrileri üzerinde Rotation çatılar ve Euler-Rodrigues çatıların (ERF) özelliklerine değinilmiştir. Aynı zamanda üçüncü, beşinci ve yedinci dereceden PH eğrilerinin ERF'leri incelenmiş olup uygulamalarında kullanılabilir olan kısımlar verilmiştir.



KAYNAKLAR

- [1] **Hacısalihođlu , H.H., 2000** , Lineer Cebir I, Ankara
- [2] **Hacısalihoğlu, H.H., 1983** , Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fak. Yayınları, Math. No.2.
- [3] **Altmann, S.L., 1986.** Rotations, Quaternions, and Double Groups. Oxford University Press.
- [4] **Bishop, R.L., 1975.** There is more than one way to frame a curve. Amer. Math. Monthly 82, 246–251.
- [5] **Bottema, O., Roth, B., 1990.** Theoretical Kinematics. Dover.
- [6] **Choi, H.I., Lee, D.S., Moon, H.P., 2002.** Clifford algebra, spin representation and rational parameterization of curves and surfaces. Adv. Comput. Math. 17, 5–48.
- [7] **Dietz, R., Hoschek, J., Jüttler, B., 1993.** An algebraic approach to curves and surfaces on the sphere and on other quadrics. Computer Aided Geometric Design 10, 211–229.
- [8] **Farouki, R.T., 2002.** Exact rotation-minimizing frames for spatial Pythagorean-hodograph curves. Preprint.
- [9] **Farouki, R.T., Neff, C.A., 1995.** Hermite interpolation by Pythagorean-hodograph quintics. Math. Comp. 64, 1589–1609.
- [10] **Farouki, R.T., Sakkalis, T., 1990.** Pythagorean hodographs. IBM J. Res. Develop. 34 (5), 736–752.
- [11] **Farouki, R.T., Sakkalis, T., 1994.** Pythagorean-hodograph space curves. Adv. Comput. Math. 2, 41–66.
- [12] **Farouki, R.T., al-Kandari, M., Sakkalis, T., 2002a.** Hermite interpolation by rotation-invariant spatial Pythagorean-hodograph curves. Adv. Comput. Math. 17, 369–383.
- [13] **Farouki, R.T., al-Kandari, M., Sakkalis, T., 2002b.** Structural invariance of spatial Pythagorean hodographs. Computer Aided Geometric Design 19, 395–407.
- [14] **Gray, A., 1993.** Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces. CRC Press.
- [15] **Guggenheimer, H.W., 1989.** Computing frames along a trajectory. Computer Aided Geometric Design 6, 77–78.

- [16] **Jüttler, B., 1995.** Spatial rational motions and their application in computer aided geometric design. In: *Mathematical Methods for Curves and Surfaces*. Vanderbilt University Press, pp. 271–280.
- [17] **Jüttler, B., 1998a.** Generating rational frames of space curves via Hermite interpolation with Pythagorean hodograph cubic splines. In: *Geometric Modeling and Processing '98*. Bookplus Press, pp. 83–106.
- [18] **Jüttler, B., 1998b.** Rotation minimizing spherical motions. In: *Advances in Robot Kinematics: Analysis and Control*. Kluwer Academic, Dordrecht, pp. 413–422.
- [19] **Jüttler, B., 2000.** Hermite interpolation by Pythagorean hodograph curves of degree seven. *Math. Comp.* 70 (235), 1089–1111.
- [20] **Jüttler, B., Mäurer, C., 1999.** Cubic Pythagorean hodograph spline curves and applications to sweep surface modeling. *Computer-Aided Design* 31, 73–83.
- [21] **Jüttler, B., Wagner, M.G., 1999.** Rational motion-based surface generation. *Computer-Aided Design* 31, 203–213.
- [22] **Kim, M.-S., Nam, K.-W., 1995.** Interpolating solid orientations with circular blending quaternion curves. *Computer-Aided Design* 27 (5), 385–398.
- [23] **Kim, M.-S., Park, E.-J., Lee, H.-Y., 1994.** Modeling and animation of generalized cylinders with variable radius offset space curves. *J. Vis. Comp. Animation* 5 (4), 189–207.
- [24] **Klok, F., 1986.** Two moving coordinate frames for sweeping along a 3D trajectory. *Computer Aided Geometric Design* 3, 217–229.
- [25] **Kuipers, J.B., 1999.** *Quaternions and Rotation Sequences*. Princeton University Press.
- [26] **Mäurer, C., Jüttler, B., 1999.** Rational approximation of rotation minimizing frames using Pythagorean-hodograph cubics. *J. Geom. Graph.* 3 (2), 141–159.
- [27] **Miura, K.T., 2000.** Unit quaternion integral curve: a new type of fair free-form curves. *Computer Aided Geometric Design* 17, 39–58.
- [28] **Moon, H.P., Farouki, R.T., Choi, H.I., 2001.** Construction and shape analysis of PH quintic Hermite interpolants. *Computer Aided Geometric Design* 18, 93–115.
- [29] **O'Neill, B., 1966.** *Elementary Differential Geometry*. Academic Press.
- [30] **Pottmann, H., Wagner, M.G., 1998.** Contributions to motion based surface design. *Internat. J. Shape Modelling* 4, 183–196.

- [31] **Wagner, M.G., Ravani, B., 1997.** Curves with rational Frenet–Serret motion. Computer Aided Geometric Design 15, 79–101.
- [32] **Wang, W., Joe, B., 1997.** Robust computation of the rotation minimizing frame for sweep surface modeling. Computer-Aided Design 29 (5), 379–391.



ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Elazığ'da doğdum. İlköğrenimimi Elazığ Namık Kemal İlköğretim okulunda tamamladım. Orta öğrenimimi Elazığ Merkez Anadolu Lisesinde tamamlayıp 2007 yılında mezun oldum. 2008-2012 yılları arasında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde Lisans öğrenimimi tamamladım. 2012 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Geometri Anabilim dalında Yüksek Lisansa başladım. Halen aynı bölümde Yüksek Lisans öğrenimime devam etmekteyim.

