T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

COBB-DOUGLAS VE ACMS ÜRETİM HİPERYÜZEYLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Rukiye AKTAŞ

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Danışman: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

MAYIS-2016

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

COBB-DOUGLAS VE ACMS ÜRETİM HİPERYÜZEYLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Rukiye AKTAŞ
(141121103)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Danışman: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih:

MAYIS-2016

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

COBB-DOUGLAS VE ACMS ÜRETİM HİPERYÜZEYLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Rukiye AKTAŞ
(141121103)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 19.04.2016
Tezin Savunulduğu Tarih: 11.05.2016

Tez Danışmanı :	**Prof. Dr. Mahmut ERGÜT (N.K.Ü.)**
Diğer Jüri Üyeleri :	**Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ (F.Ü)**
	Doç. Dr. Mihriban KÜLAHCI (F.Ü)

MAYIS-2016

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın planlanması ve yürütülmesi sürecinde benden destek ve ilgilerini esirgemeyen, lisansüstü eğitimim boyunca, bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım sayın hocam Prof. Dr. Mahmut ERGÜT'e şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim. Ayrıca bilgisini, tecrübesini ve tavsiyelerini benimle hiç düşünmeden cömertçe paylaşan sayın hocam Arş. Gör. M. Evren Aydın' a teşekkürlerimi sunarım.

Rukiye AKTAŞ
ELAZIĞ–2016

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışma üç bölüm halinde düzenlenmiştir.

Birinci bölümde; üretim fonksiyonlarının tarihçesi ve bu fonksiyonların geometrik özellikleri üzerine yapılan çalışmalar özet halinde ifade edilmiştir. Tezde kullanılacak olan çeşitli temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; üretim teorisi ve üretim fonksiyonlarının özellikleri incelenmiştir.

Üçüncü bölüm tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır.

Üçüncü bölümde; Cobb-Douglas ve ACMS üretim fonksiyonları ve bu fonksiyonlara karşılık gelen yüzeyler tanımlanıp, bu yüzeyler alt bölümler halinde incelenmiştir.

Öncelikle Cobb-Douglas üretim fonksiyonun sahip olduğu ölçek getirisi ile bu üretim fonksiyonuna karşılık gelen yüzeylerin Gauss eğriliği arasındaki ilişkiye bağlı olarak sonuçlar ede edilmiştir. Cobb-Douglas üretim fonksiyonun üretim esnekliği ile bu üretim fonksiyonuna karşılık gelen yüzeylerin ortalama eğriliği arasındaki ilişkiye bağlı bağlantılar kurulmuştur.

Daha sonra ACMS üretim fonksiyonun sahip olduğu ölçek getirisi ile bu üretim fonksiyonuna karşılık gelen yüzeylerin Gauss eğriliği arasındaki ilişkiye bağlı olarak sonuçlar bulunmuştur. Benzer şekilde ACMS üretim fonksiyonun üretim esnekliği ile bu üretim fonksiyonuna karşılık gelen yüzeylerin ortalama eğriliği arasındaki ilişkiler ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Üretim fonksiyonu, Ölçeğe göre getiri, Mükemmel ikame, Üretim yüzeyi, Üretim esnekliği, Gauss eğriliği, Ortalama eğrilik, Galilean uzayı, Pseudo-Galilean uzayı

SUMMARY

COBB-DOUGLAS AND ACMS PRODUCTION HYPERSURFACES

This study is constructed in three chapters.

In the first chapter, it is expressed a historical analysis of production functions and works found on geometric properties of the production functions. Some fundamental definitions and theorems used in thesis are also given.

In chapter two, theory of production and the properties of production functions are investigated.

Chapter three from the original part of thesis.

In chapter three, Cobb-Douglas and ACMS production functions and their associated surfaces are investigated in to several subsections.

Firstly, the results are obtained according to relationship between the return to scale of Cobb-Douglas production function and Gaussian curvature of the associated surface. The connections are made according to relationship between the production elasticity of Cobb-Douglas production function and the mean curvature of the associated surface.

Then the results are found according to relationship between return to scale of ACMS production functions and Gaussian curvature of their associated surfaces. Similarly the relationships between the production elasticity of ACMS production functions and mean curvature of the surface.

Key Words: Production function, Return to scale**,** Perfect substitution, Production elasticity, Gaussian curvature, Mean curvature, Galilean space, Pseudo-Galilean space

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

SEMBOLLER LİSTESİ

Y	: Total üretim
L	: İş gücü girdisi
K	: Sermaye girdisi
$\mathbb{R}_+^n$	: Pozitif reel sayıların sıralı n-liler cümlesi
$\mathbb{R}_+$	: Pozitif reel sayılar cümlesi
H_{ij}	: i −yinci üretim girdisinin j −yinci üretim girdisine göre Hicks ikame esnekliği
$M(f)$	: f üretim fonksiyonunun Allen matrisi
ε_s	: Faktörler arası ikame esneklik katsayısı
MRS_{ij}	: i −yinci üretim girdisinin j −yinci üretim girdisine göre Marjinal teknik ikame oranı
$H(f)$	: f üretim fonksiyonunun Hessiyan matrisi
J_f	: f fonksiyonunun Jakobiyen matrisi
$\mathbb{E}^{n+1}$	: $(n+1)$ −boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{S}^n$	: $\mathbb{E}^{n+1}$ Öklid uzayının birim hiperküresi
G_3	: Galilean uzayı
G_3^1	: Pseudo - Galilean space

1. GİRİŞ

Ekonomik alanlarda üretim fonksiyonları, bir işletmenin kullandığı girdilerle yarattığı çıktı arasındaki fiziki ilişkileri gösteren matematiksel ifadelerdir. Bu tür fonksiyonlar, işletmenin çeşitli üretim teknikleri içinde en etkininin seçilmiş olduğu varsayımına dayanır. Bir başka deyişle üretim teknolojisi veridir. Buna göre üretimin artırılabilmesi, üretim faktörlerinden en az birinin artırılması ile mümkündür, (Bulmuş, 2008).

Üretim fonksiyonu kavramı, ilk olarak açık bir şekilde Philip Wicksteed (1894) tarafından cebirsel olarak formülize edilmiştir. Ancak 1840 lı yıllarda Johann Von Thünen' in üretim fonksiyonlarını formülleştiren ilk ekonomist olduğuna dair bazı delillerde vardır, (Mishra, 2010).

Üretim fonksiyonları arasında en ünlü olanı 1928 de Cobb ve Douglas tarafından ortaya konulan,

$$Y = bL^k K^{(1-k)}$$

Cobb ve Douglas üretim fonksiyonudur. Burada L iş gücü girdisi, K sermaye girdisi, b total verimlilik katsayısı ve Y ise total üretimdir, (Cobb ve Douglas, 1928). 1928 de başlayan bu araştırmalar Douglas ın sonraki çalışmaları (Douglas, 1976) ve başka yazarların konuyla ilgili çeşitli yazılarıyla, mikroiktisat perspektifi içinde önemli yer kazandı. Cobb-Douglas üretim fonksiyonu üzerindeki bazı kısıtlamalar, birçok iktisatçıyı daha genel özellikler taşıyan üretim fonksiyonu türleri aramaya yöneltmiştir. Bu nedenle 1961 yılında, Arrow, Chenery, Minhas ve Solow iki-girdili

$$Y = F(aK^r + (1-a)L^r)^{(1/r)}$$

CES üretim fonksiyonunu tanımladılar. Burada Y çıktı, F faktör verimliliği, a pay parametresi, K, L temel üretim faktörleri (sermaye ve iş gücü), $r = 1 - 1/s$ olmak üzere $s = 1/(1-r)$ ikame esnekliğidir, (Arrow, Chenery, Minhas ve Solow, 1961).

Kabul edelim ki $R_+^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\colon x_1, x_2, \dots, x_n > 0\}, R_+ = \{r \in R\colon r > 0\}$ olsun. Buna göre bir üretim fonksiyonu,

$$Q\colon R_+^n \to R_+, Q = Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ile tanımlanan C^∞ sınıfından bir dönüşümdür. Burada Q çıktı miktarı, n girdi sayısı ve $x_1, x_2, \dots, x_n$ kullanılan girdilerdir (iş gücü, sermaye, arazi, ham madde vb.), (Vilcu, 2011). Her $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ üretim fonksiyonu $E^{(n+1)}$ (n+1)-boyutlu Öklid uzayının

$$f = (x_1, x_2, \dots, x_n, Q(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

ile verilen, bir non-parametrik hiperyüzeyi ile tanımlanabilir ve bu hiperyüzeye bir üretim hiperyüzeyi denir, (Chen, 2011).

Bir $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ üretim fonksiyonu için, eğer

$$Q(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^h Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

şartı sağlanıyorsa $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonuna h-homojen ya da h.ıncı dereceden homojendir denir. Burada t pozitif ve h herhangi bir sabittir. Eğer $h > 1$ ise üretim fonksiyonu, ölçeğe göre artan getiri ve eğer $h < 1$ ise ölçeğe göre azalan getiri özelliği gösterir. Eğer üretim fonksiyonunun homojenlik derecesi 1 ise, ölçeğe göre sabit getiri özelliğine sahiptir denir, (Chen, 2011).

Üretim fonksiyonlarını genelleştiren ve uzayda diferensiyel geometri bakış açısı ile inceleyen ilk çalışmalar, 2005 yılında Zakhirov ve daha sonra 2007 yılında, Ioan tarafından verildi, (Zakhirov, 2005 ve Ioan, 2007). Bu tarihlerden önce üretim fonksiyonları üzerine yapılan tüm çalışmalar düzleme izdüşürme metodunu kullandıklarından, sonuçlar istenilen ölçütte olmamıştır ama diferensiyel geometriye ait metodların kullanılması daha faydalı olmuştur. Zakhirov, iki girdili ve sabit ölçek getirisine sahip Cobb-Douglas ve CES üretim fonksiyonlarına karşılık gelen üretim yüzeylerinin parabolik tipten olduğunu ifade etmiştir, (Zakhirov, 2005).

Ioan; Cobb-Douglas, CES ve Sato üretim fonksiyonlarını tek bir formatta ifade etmiş ve bu formata karşılık gelen üretim yüzeylerinin temel elemanlarını hesaplamıştır. Ayrıca, sabit ölçekli Cobb-Douglas üretim fonksiyonunun Gauss eğriliğinin sıfır olduğunu ifade etmiştir, (Ioan, 2007).

Zakhirov' un 2-girdili üretim fonksiyonları için verdiği sonuç, Vilcu tarafından $f(x_1, \dots, x_n) = bx_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ ile verilen $n-$girdili Cobb-Douglas üretim fonksiyonlarına aşağıdaki gibi genelleştirilmiştir:

(a) *Genelleştirilmiş Cobb-Douglas üretim fonksiyonunun sabit ölçek getiri özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart karşılık gelen Cobb-Douglas üretim hiperyüzeyi açılabilirdir.*

(b) *Genelleştirilmiş Cobb-Douglas üretim fonksiyonunun ölçeğe göre artan getiri (ölçeğe göre azalan getiri) özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart karşılık gelen Cobb–Douglas üretim hiperyüzeyi negatif (pozitif) Gauss-Kronocker eğriliklidir,* (Vilcu, 2011).

Daha sonra A.D. Vilcu ve G.E. Vilcu, Zakhirov'un sonucunu

$$f(x_1, \dots, x_n) = b\left(a_1^{\rho} x_1^{\rho} + \cdots + a_n^{\rho} x_n^{\rho}\right)^{\frac{h}{\rho}}$$

ile ifade edilen, genelleştirilmiş CES (ACMS) üretim fonksiyonları için aşağıdaki şekilde düzenlediler:

(a) *Genelleştirilmiş CES üretim fonksiyonunun sabit ölçek getirisine sahip olması için gerek ve yeter şart karşılık gelen CES hiperyüzeyi açılabilirdir.*

(b) *Genelleştirilmiş CES üretim fonksiyonunun ölçeğe göre artan getiri (ölçeğe göre azalan getiri) özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart karşılık gelen CES üretim hiperyüzeyi negatif (pozitif) Gauss-Kronocker eğriliklidir,* (Vilcu ve Vilcu, 2011).

Bir üretim fonksiyonu, sıfırdan farklı $a_1, \dots, a_n$ sabitleri için,

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

formunda yazılabiliyor ise, yani lineer olarak homojen ise, o zaman *mükemmel ikame* adını alır, (Chen, 2011).

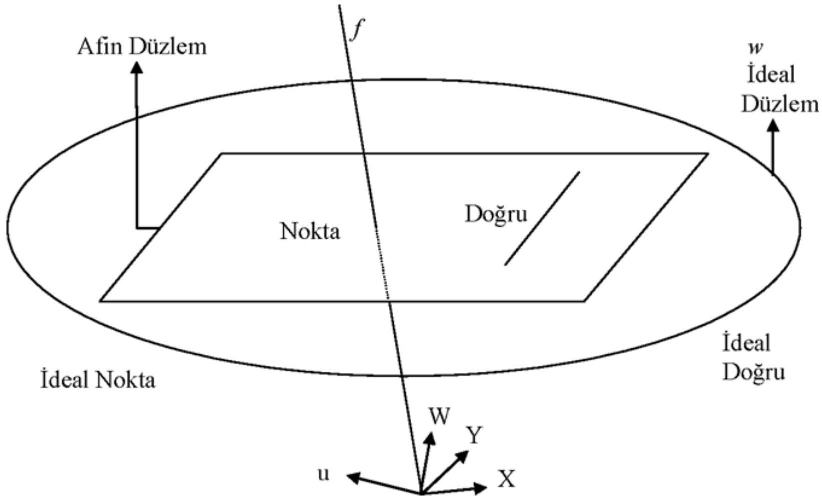
X. Wang and Y. Fu (Wang, Fu, 2013), Genelleştirilmiş Cobb-Douglas ve genelleştirilmiş ACMS üretim fonksiyonlarına karşılık gelen hiperyüzeylerin minimal olması ile ilgili aşağıdaki teoremleri ifade ettiler:

(a) $E^{(n+1)}$ *Öklid uzayında minimal olan bir Cobb-Douglas üretim hiperyüzeyi yoktur.*

(b) $E^{(n+1)}$ *Öklid uzayında bir CES üretim hiperyüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şart karşılık gelen genelleştirilmiş CES üretim fonksiyonunun mükemmel ikame formunda olmasıdır.*

Aydın and Aykurt, aşağıdaki gibi tanımlanan G_3 Galilean uzayında, Cobb-Douglas ve ACMS üretim fonksiyonlarına karşılık gelen yüzeyler için bazı sınıflandırma teoremleri elde ettiler, (Aydın, Aykurt, 2015).

G_3 Galilean uzayı, 3-boyutlu bir P_3 kompleks projektif uzayında tanımlanır ve $\{\omega, f, I_1, I_2\}$ ideal şekline sahiptir. Burada ω, ideal düzlemlerinin bir reel düzlemini; $f \subset \omega$ ideal doğrularının bir reel doğrusunu; $I_1, I_2 \in f$ de ideal noktalardan iki tanesini ifade eder, (Kamenarovic, 1991).



Şekil 1.1. Galilen Uzayında Nokta ve Doğrular

G_3 uzayının bir reel modeli olarak, ε eliptik involusyonu ile birlikte $f \subset \omega$ reel doğrusunu ve $\omega \subset G_3$ reel düzlemini içeren $\{\omega, f\}$ idealine sahip bir reel P_3 projektif uzayını alabiliriz.

Uygun koordinatlarda ε eliptik involusyonu

$$\omega \ldots x_0 = 0, \;\; f \ldots x_0 = x_1 = 0$$

$$\varepsilon: (0:0:x_2:x_3) \to (0:0:x_3:-x_2).$$

şeklindedir. Homojen olmayan koordinatlarda H_8 benzerlik grubu

$$x' = a_{11} + a_{12}x,$$

$$y' = a_{21} + a_{22}x + a_{23}y\cos\varphi + a_{23}z\sin\varphi,$$

$$z' = a_{31} + a_{32}x - a_{23}y\sin\varphi + a_{23}z\cos\varphi,$$

formundadır. Burada a_{ij} ve φ reel sayılardır. Üstelik a_{12} ve a_{23} katsayıları özel bir rol oynar. $a_{12} = a_{23}$ =1 alındığında Galilean uzayının B_6 hareket grubu elde edilir. Bu grup

$$B_6: \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & \cos\varphi & \sin\varphi \\ e & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

şeklinde hareket eder. Böylece bu hareket boyunca G_3 Galilean uzayında doğrular dört sınıfa ayrılır. Bu doğrular aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

1) Reel non-izotropik doğrular. Bu doğrular f ideal doğrusunu kesmezler.
2) Reel izotropik doğrular. Bu doğrular ω düzlemine ait değildir, fakat f ideal doğrusunu keserler.
3) Reel olmayan non-izotropik doğrular. Bu doğrular f den başka ω nın bütün doğrularıdır.

4) f ideal doğrusu.

G_3, Galilean uzayında $x = sbt$ düzlemleri Öklid düzlemleridir. Özel olarak ω da bir Öklid düzlemidir. Diğer düzlemler izotropiktir.

$C^k (k \geq 3)$ sınıfından bir $r: I \to G_3$ eğrisi (I, r) koordinat komşuluğu ile $r(x) = \big(x, y(x), z(x)\big)$ şeklinde verildiğinde $\kappa(x)$ eğriliği ve $\tau(x)$ torsiyonu

$$\kappa(x) = \sqrt{y''^2(x) + z''^2(x)}$$

$$\tau(x) = \frac{\det(r'(x), r''(x), r'''(x))}{\kappa^2(x)}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece G_3 Galilean uzayında ortonormal üçyüzlü

$$t(x) = r'(x)$$

$$n(x) = \frac{1}{\kappa(x)}\big(0, y''(x), z''(x)\big)$$

$$b(x) = \frac{1}{\kappa(x)}\big(0, -z''(x), y''(x)\big)$$

şeklinde verilebilir. Burada t, n, b vektörleri, sırasıyla, tanjant, aslinormal ve binormal vektörler olarak adlandırılır. Bu vektörlerin türevleri alınarak Frenet formülleri

$$t'(x) = \kappa(x)n(x)$$

$$n'(x) = r(x)b(x)$$

$$b'(x) = -r(x)n(x)$$

şeklinde elde edilir.

Pseudo-Galilean geometri, projektif işareti $(0,0,+,-)$ olan reel Cayley-Klein geometrilerinden biridir. Pseudo–Galilean geometrinin temeli $\{\omega, f, I\}$ sıralı üçlüleridir. Burada ω ideal düzlem, f ise ω ideal düzlemde bir doğru ve I da f nin noktalarının sabit hiperbolik involusyonudur, (Divjak, 1998). Uygun afin bileşenlere sahip

$$B_6: \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ e & -\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

şeklinde verilen Galilean uzayının B_6 hareket grubu göz önüne alındığında

$$\overline{B_6} \coloneqq < B_6, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} >$$

şeklindeki $\overline{B_6}$ grubu G_3^1 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayının hareket grubu olarak adlandırılır, (Divjak, 1998). Afin bileşenlere sahip $\overline{B_6}$ grubu

$$\overline{B_6}: \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & \eta \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ e & \eta \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

şeklinde hareket eder. Burada $\eta = \pm 1$ dir. $\overline{B_6}$ hareketi boyunca noktalar altı sınıfa ayrılır. Bu altı sınıf aşağıdaki şekilde oluşturulur, (Divjak, 1998).

1) $(1\colon x\colon y\colon z) \sim (x, y, z)$ şeklindeki reel noktalar.

2) $(1, y, z)$ birim vektörleri tarafından gerilen mutlak olmayan $(0\colon 1\colon y\colon z)$ şeklindeki ideal noktalar.

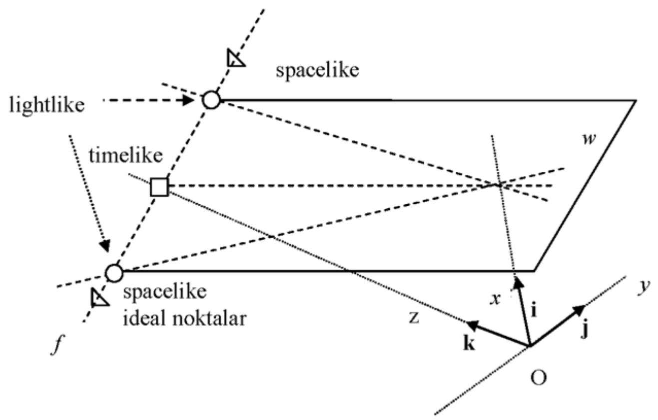
3) Projektif işareti serbest olan ve $(0\colon 0\colon \cosh\varphi : \sinh\varphi)$ şeklinde yazılabilen space-like mutlak noktalar.

4) $(0\colon 0\colon \sinh\varphi : \cosh\varphi)$ şeklindeki time-like mutlak noktalar.

5) $(0\colon 0\colon 1\colon 1)$ şeklindeki bir light-like mutlak nokta.

6) $(0\colon 0\colon 1\colon -1)$ şeklindeki bir diğer light-like mutlak nokta.

Yukarıda sınıflandırılan noktalar şekil 1.2. de gösterildiği gibidir. G_3^1 uzayında bir vektör (yani bir reel nokta çifti) ω nın ideal bir noktasını temsil eder.



Şekil 1.2. G_3^1 Pseudo-Galilean Uzayında Noktalar

$\overline{B_6}$ grubuna göre G_3^1 uzayında vektörler öncelikle ikiye ayrılır. Bunları aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz:

G_3^1, uzayında bir $X(x, y, z)$ vektörü veridiğinde, eğer $x = 0$ ise $X(x, y, z)$ vektörü izotropik vektör olarak adlandırılır, (Divjak and Sipus, 2003).

G_3^1, uzayında bir $X(x, y, z)$ vektörü verildiğinde, eğer $x \neq 0$ ise $X(x, y, z)$ vektörü non-izotropik vektör olarak adlandırılır.

Bütün birim non-izotropik vektörler $X(1, y, z)$ formundadır, (Divjak and Sipus, 2003).

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1.1. (*Topolojik uzay*): X boşdan farklı bir cümle ve τ, X in kuvvet cümlesi olan $P(X)$ in bir altcümlesi olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanırsa τ ailesine X cümlesi üzerinde bir topoloji (veya topolojik yapı) denir:

a) $\emptyset, X \in \tau$,

b) $A_1, A_2, \dots, A_n \in \tau$ *için* $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$,

c) I keyfi indis cümlesi olmak üzere $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \tau$

dir. (X, τ) ikilisine birden topolojik uzay denir, (Hacısalihoğlu,1983).

Tanım 1.1.2. (*Diferensiyellenebilir Fonksiyonlar*): f, R^n uzayından R ye giden bir fonksiyon olsun. f sürekli ise f fonksiyonu C^0 sınıfından bir fonksiyondur denir. R^n den R ye giden C^0 sınıfından bütün fonksiyonların cümlesi $C^0(R^n, R)$ şeklinde gösterilir.

R^n in her noktasında f fonksiyonunun kısmi türevleri var ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise f fonksiyonu C^1 sınıfındandır denir.

f fonksiyonunun R^n in her bir noktasında k ıncı basamaktan kısmi türevleri var ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise f fonksiyonu C^ksınıfındandır denir. R^n den R ye giden C^ksınıfından bütün fonksiyonların cümlesi $C^k(R^n, R)$ şeklinde gösterilir. R^n nın her bir p noktasında f fonksiyonunun her basamaktan kısmi türevleri var ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise f fonksiyonu C^∞ sınıfındandır denir. R^n den R ye giden C^∞ sınıfından bütün fonksiyonların cümlesi $C^\infty(R^n, R)$ şeklinde gösterilir, (Sabuncuoğlu, 2006).

Tanım 1.1.3. (*Topolojik Manifold*): M bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanırsa M ye $m-$ boyutlu topolojik manifold ya da kısaca topolojik $m-$ manifold denir:

a) M bir Hausdorff uzaydır,

b) M sayılabilir sayıda açık cümleler ile örtülebilir,

c) M nin her bir altcümlesi E^m e veya E^m in bir açık altcümlesine homeomorftur, (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 1.1.4. (***Diferensiyellenebilir Manifold***)**:** M bir $m-$ boyutlu manifold olsun. Eğer M üzerinde haritaların bir ailesi olan $A = \{(U, \varphi), (V, \psi), (W, \phi), \dots\}$ cümlesi için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa A koleksiyonuna M üzerinde r.mertebeden diferensiyellenebilir yapı (veya atlas) adı verilir.

(1) $\{U, V, W, \dots\}$ açık cümlelerinin koleksiyonu M manifoldunun bir açık örtüsüdür.

(2) A daki herhangi iki harita r.mertebeden uyumludur.

(3) A maksimaldir, yani eğer bir (U, φ) haritası A daki bütün koordinat atlasları ile uyumlu ise bu durumda $(U, \varphi) \in A$ dır.

Eğer bir M manifoldu üzerinde r. mertebeden diferensiyellenebilir bir atlas varsa M manifolduna r. mertebeden diferensiyellenebilir manifold denir. Diferensiyellenebilir yapının her bir haritasına M manifoldunun uyumlu haritası adı verilir. Eğer atlas her mertebeden diferensiyellenebiliyorsa M manifolduna C^{∞} manifold (veya diferensiyellenebilir manifold) adı verilir, (Şahin, 2012).

Tanım 1.1.5. (***Tanjant vektör***): M bir manifold ve manifold üzerindeki diferensiyellenebilir fonksiyonların cümlesi $C(M, R)$ olsun. Bu durumda her $f, g \in C(M, R)$ ve her $a, b \in R$ için,

a) $V_p(af + bg) = aV_p f + bV_p g$

b) $V_p(fg) = V_p(f)g + fV_p(g)$

şartlarını sağlayan $V_p: C(M, R) \to R$ dönüşümüne M manifoldunun p noktasındaki tanjant vektörü denir, (Şahin, 2012).

Tanım 1.1.6. (***Vektör alanı***): M bir manifold ve T_pM manifoldun p noktasındaki tanjant uzayı olsun. Bu durumda her $p \in M$ noktasına T_pM uzayında bir tanjant vektör karşılık getiren X diferensiyellenebilir dönüşümüne vektör alanı denir. Böylece M manifoldu üzerinde bir vektör alanı $X: M \to \bigcup_{p \in M} T_p M$ diferensiyellenebilir dönüşümüdür, (Şahin, 2012).

Tanım 1.1.7. (***Yüzey***)**:** U, E^2 uzayının irtibatlı bir açık altcümlesi olmak üzere $x: U \to E^3$ diferensiyellenebilir ve regüler bir dönüşüm olsun. $x: U \to x(U)$ dönüşümü bir homeomorfizm ise $x(U)$ cümlesine bir basit yüzey denir. M, E^3 uzayının bir altcümlesi olsun. M nin her bir p noktası için $p \in x(U)$ ve $x(U) \subset M$ olacak şekilde $x(U)$ bir basit yüzeyi bulunabiliryorsa M cümlesine, E^3 uzayında bir yüzey denir, (Şahin, 2012).

Tanım 1.1.8. (*Temel formlar*): E^3 uzayında $\{u^1, u^2\}$ lokal koordinatlı bir basit yüzey

$x: U \to E^3$ olsun. O zaman $g_{ij} =< \frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j} >$, i,j=1,2, olmak üzere

$$ds^2 = I = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1du^2 + g_{22}(du^2)^2$$

formuna x basit yüzeyinin Riemann metriği ya da birinci temel formu, g_{ij} fonksiyonlarına ise x basit yüzeyinin birinci temel formunun bileşenleri denir. Ayrıca, x basit yüzeyinin birim normal vektör alanı $\overrightarrow{U}$ ve $L_{ij} =< \frac{\partial^2 x}{\partial u^i, \partial u^j}, \overrightarrow{U} >$ olmak üzere

$$L = L_{11}(du^1)^2 + 2\, L_{12}du^1du^2 + L_{22}(du^2)^2$$

formuna x basit yüzeyinin ikinci temel formu, L_{ij} fonksiyonlarına ise x basit yüzeyinin ikinci temel formunun bileşenleri denir, (Sabuncuoğlu, 2006).

Tanım 1.1.9. (*Hiperyüzey*): E^{n+1}, (n+1)-boyutlu Öklid uzayında n-boyutlu bir yüzey, veya n-yüzey diye E^3 deki boş olmayan bir M cümlesine denir, öyle ki bu M cümlesi

$$M = \{x \in U \subset E^{n+1}\} | f: U \to R, f(x) = c, c\ sabit\ ve\ U\ açık\ alt\ cümle$$

$$M = \{x \in U \subset E^{n+1}\} | f: U \to R, f(x) = c$$

$$\nabla f|_p \neq 0, \forall p \in M$$

şeklinde tanımlanır. E^n de bir n-yüzey, n>2 olması halinde bir hiperyüzey olarak adlandırılır, (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.1.10. (*Hiperküre*): E^n, (n+1)-boyutlu Öklid uzayında

$$S_r^n = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) | \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = r^2, r \in R, r\ sabit\}$$

nokta cümlesine bir n-boyutlu hiperküre veya kısaca n-küre denir, (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.1.11. (*Şekil Operatörü*): N, M üzerinde birim dik vektör alanı olmak üzere M nin bir p noktasında

$$S_p(v_p) = -D_{v_p}N$$

eşitliğiyle tanımlı $S_p: T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ fonksiyonuna, M yüzeyinin p noktasında, N birim dik vektör alanına bağlı şekil operatörü (Weingarten dönüşümü) denir. M nin her bir p noktasına S_p fonksiyonunu karşılık getiren S dönüşümüne de M yüzeyinin, N birim dik vektör alanına bağlı şekil operatörü (veya Weingarten dönüşümü) denir, (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.1.12. (*Gauss Eğriliği*): S_p lineer dönüşümünün determinantına M yüzeyinin p noktasındaki Gauss eğriliği denir ve $K(p)$ ile gösterilir, (Sabuncuoğlu, 2006).

$$K(p) = \det(S_p)$$

Tanım 1.1.13. (*Ortalama Eğrilik*): S_p lineer dönüşümünün izinin yarısına, M yüzeyinin p noktasındaki ortalama eğriliği denir ve $H(p)$ ile gösterilir, (Sabuncuoğlu, 2006).

$$H(p) = \frac{1}{2}\text{İz}(S_p)$$

Tanım 1.1.14. (*Gauss Dönüşümü*): M yüzeyinin birim dik vektör alanı N ile gösterildiğine göre

$$N = \sum_{i=1}^{3} N^i \frac{\partial}{\partial y^i}$$

olsun.

$$G: M \rightarrow S^2, G(p) = (N^1(p), N^2(p), N^3(p))$$

fonksiyonuna, M nin Gauss dönüşümü denir, (Sabuncuoğlu, 2006).

Gauss dönüşümü geometrik olarak yüzeyin p noktası komşuluğundaki biçimiyle ilgilidir.

Tanım 1.1.15. (*Normal Eğrilik*): $v_p \in T_p(M)$ olmak üzere

$$k_p = (v_p) < S(\frac{v_p}{\parallel v_p \parallel}), \frac{v_p}{\parallel v_p \parallel} >$$

eşitliğiyle tanımlanan $k_p(v_p)$ sayısına, M yüzeyinin p noktasında, v_p doğrultusundaki normal eğriliği denir, (Sabuncuoğlu, 2006).

Tanım 1.1.16. (*Dik Kesit Eğriliği*): $v_p \in T_p(M)$ olsun. $\{v_p, N(p)\}$ kümesinin gerdiği düzlemle M yüzeyinin arakesiti olan ve $\sigma'(0)$ eşitliğini sağlayan σ eğrisine, v_p doğrultusundaki dik kesit eğrisi denir, (Sabuncuoğlu, 2006).

Tanım 1.1.17. (*Minimal Yüzey*): M yüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu sıfır ise bu yüzeye minimal yüzey denir.

M minimal yüzey ise her $p \in M$ için $K(p) \leq 0$ dır, (Sabuncuoğlu, 2006).

Tanım 1.1.18. (*f fonksiyonunun diferensiyeli*): $f \in C^\infty(M, R)$ ve $p \in M$ olmak

üzere M yüzeyinin her bir p noktasına

$$(df)_p : T_p(M) \to \mathrm{R}, (df)_p(v_p) = v_p[f]$$

fonksiyonunu karşılık getiren df fonksiyonuna, f fonksiyonunun diferensiyeli adı verilir, (Şahin, 2012).

Tanım 1.1.19. (*Açılabilir Yüzey*): M yüzeyinin açılabilir olması için Gauss eğriliğinin sıfır olması gerekli ve yeterlidir, (Sabuncuoğlu, 2006).

Tanım 1.1.20. (*Riemann Manifold*): M bir diferensiyellenebilir manifold ve g pozitif tanımlı, simetrik, (2, 0) tipinde bir kovaryant tensör alanı olsun. (M, g) ikilisine bir Riemann manifoldu denir, (O' Neill, 1983).

Tanım 1.1.21. (*Türev (Diferensiyel) Dönüşüm*): M ve N iki Riemann manifold olmak üzere $\phi: M \to N$ dönüşümü verilsin. Her $p \in M$ için $\phi_{*_p}: T_M(p) \to T_N(\phi\,(p))$ dönüşümüne ϕ nin p noktasındaki türev (diferensiyel) dönüşümü denir, (O' Neill, 1983).

Tanım 1.1.22. (*İmmersiyon*): M ve N iki Riemann manifoldu olmak üzere, bir $\phi: M \to N$ diferensiyellenebilir fonksiyonu için eğer her $p \in M$ noktasında ϕ_{*_p} türev dönüşümü bire bir ise ϕ ye bir immersyion (dolgulama) denir. Eğer ϕ immersionun kendisi bire bir ve $\phi: M \to \phi(N)$ dönüşümü bir homeomorfizm ise ϕ ye imbedding (yerleştirme) adı verilir, (O' Neill, 1983).

Örnek 1.1.1. Her regüler eğri bir immersiondur.

Tanım 1.1.23. (*Jakobien Matris*): $F: E^n \to E^m$ dönüşümünün türev dönüşümü $p \in E^n$ için F_{*p} olsun. Sırasıyla $T_p E^n$ ve $T_{(F(p))} E^m$ de

$$\phi = \left\{\frac{\partial}{(\partial x_1)}|_p, \dots, \frac{\partial}{(\partial x_n)}|_p\right\}, \psi = \left\{\frac{\partial}{(\partial y_1)}|_{(F(p))}, \dots, \frac{\partial}{(\partial y_m)}|_{(F(p))}\right\},$$

standart bazları için F_{*p} nin karşılık geldiği matris $J(F, P)$ ile gösterilir ve $J(F, P)$ matrisine F nin p noktasında ki Jakobien matrisi ve bu matrise karşılık gelen lineer dönüşüme de F nin Jakobien dönüşümü denir, (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 1.1.24. (*Altmanifold*): P ve M birer manifold olsunlar. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa P ye M nin bir altmanifoldu denir:

a) P , M nin bir topolojik altuzayıdır,

b) $j: P \subset M$ inclusion dönüşümü diferensiyellenebilir ve bu inclusion dönüşümünün P nin her noktasındaki türev dönüşümü bire birdir, (O' Neill, 1983).

Tanım 1.1.25. (*Pseudo-Galilean Uzayında İç Çarpım*): 3-boyutlu reel vektör uzayı R^3 ve $\forall\, X_1(x_1, y_1, z_1),\ X_2(x_2, y_2, z_2) \in G_3^1$ vektörü için pseudo-Galilean iç çarpımı

$$g: G_3^1 \times G_3^1 \to \mathbb{R}$$
$$(X_1, X_2) \to g(X_1, X_2) = \begin{cases} x_1 x_2, & x_1 \neq 0 \vee x_2 \neq 0, \\ y_1 y_2 - z_1 z_2, & x_1 = 0 \wedge x_2 = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır, (Divjak, 1998).

Tanım 1.1.26. (*Pseudo-Galilean Uzayında Uzaklık*): $P_1, P_2 \in G_3^1, P_1 \neq P_2$ iki reel nokta olmak üzere $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ için

$$d: G_3^1 \times G_3^1 \to \mathbb{R}$$

$$(P_1, P_2) \to d(P_1, P_2) = \begin{cases} |x_2 - x_1|, & x_1 \neq x_2 \\ \sqrt{(|y_2 - y_1|)^2 - (z_2 - z_1)^2}, & x_1 = x_2, \end{cases}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna G_3^1, pseudo-Galilean uzayında uzaklık fonksiyonu $d(P_1, P_2)$ reel sayısınada $P_1, P_2 \in G_3^1$ noktaları arasındaki uzaklık denir, (Divjak, 1998).

Tanım 1.1.27. (*Pseudo-Galilean Uzayında İzotropik Vektörler*): G_3^1 3-boyutlu pseudo-Galilean uzayında bir $X(x, y, z)$ izotropik vektörü verildiğinde

$y^2 - z^2 > 0$ ise X izotropik vektörüne space-like vektör

$y^2 - z^2 < 0$ ise X izotropik vektörüne time-like vektör,

$y = \pm z$ ise X izotropik vektörüne light-like vektör denir, (Divjak, 1998).

Tanım 1.1.28. (*Pseudo-Galilean Uzayında Birim Vektör*): G_3^1 $3-$boyutlu pseudo $-$ Galilean uzayında bir light –like olmayan $X(x, y, z)$ izotropik vektörü göz önüne alınsın. Eğer $y^2 - z^2 = \pm 1$ ise bu X izotropik vektörü birim vektör olarak adlandırılır, (Divjak, 1998).

Tanım 1.1.29. (*Pseudo-Galilean Uzayında Norm*): G_3^1 $3-$boyutlu pseudo $-$ Galilean uzayında bir light –like olmayan $X(x, y, z)$ vektörünün normu

$$\| X \| = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ \sqrt{|y^2 - z^2|}, & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır, (Divjak, 1998).

Tanım 1.1.30. (*Pseudo-Galilean Uzayında Fark Vektör Uzunluğu*): G_3^1 $3-$boyutlu pseudo $-$ Galilean uzayında iki non-izotropik vektör $a(1, a_2, a_3)$ ve $b(1, b_2, b_3)$ olsun. Bu iki non-izotropik vektör arasındaki açının ölçüsü onların fark vektörlerinin uzunluğu olarak tanımlanır ve

$$m(a, b) = \sqrt{|(b_2 - a_2)^2 - (b_3 - a_3)^2|}$$

şeklinde hesaplanır, (Divjak, 1998).

Tanım 1.1.31. *(Pseudo-Galilean Uzayında Vektörel Çarpım):* Pseudo Galilean uzayında iki vektör $X = (x_1, x_2, x_3)$ ve $Y = (y_1, y_2, y_3)$ olsun. Bu iki vektör arasındaki vektörel çarpım

$$X \times Y = \left(0, \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

şeklindedir, (Sipus, Divjak, 2012).

Tanım 1.1.32. *(Pseudo-Galilean Uzayında Bir Uygun Yüzey):* G_3^1 de

$$X = X\big(x(u_1, u_2), y(u_1, u_2), z(u_1, u_2)\big)$$

denklemi ile verilen X yüzeyi için eğer $x_{u_1} = \partial x / \partial u_1 \neq 0$ veya $x_{u_2} = \partial x / \partial u_2 \neq 0$ ise yüzeye uygundur denir, (Sipus, Divjak, 2012).

Tanım 1.1.33. *(Pseudo-Galilean Uzayında Yüzeyin Birim Normal Vektör Alanı):*

G_3^1 de $r: R^2 \to G_3^1, (u, v) \mapsto r(x, y) = (x, y, z(x, y))$ ile verilen yüzeyin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{\left(0, z_y, 1\right)}{\sqrt{\left|1 - \left(z_y\right)^2\right|}}$$

ile tanımlanır, (Sipus, Divjak, 2012).

Tanım 1.1.34. ***(Pseudo-Galilean Uzayında Gauss ve Ortalama Eğrilik):***

G_3^1 de $r: R^2 \to G_3^1, (u, v) \mapsto r(x, y) = (x, y, z(x, y))$ ile verilen yüzeyin K Gauss ve H ortalama eğriliği, sırasıyla,

$$K = \frac{z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2}{\left(1 + \left(z_y\right)^2\right)^2}$$

ve

$$H = \frac{z_{yy}}{2\left(1 + \left(z_y\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

şeklindedir. G_3^1 de bir yüzeyin ortalama eğriliği (Gauss eğriliği) sıfır ise minimaldir (flattir) denir, (Sipus, Divjak, 2012).

2. ÜRETİM FONKSİYONLARI

Tanım 2.1.1. (*Mikroiktisat*): İktisadın, insan davranışı ve insanların piyasa, endüstri, firma ve birey gibi nispeten küçük birimlerle ilişkili tercihlerini inceleyen bölümüne mikroiktisat denir, (Parasız ve Özer, 2005).

Tanım 2.1.2. (*Üretim fonksiyonu*): Mikroiktisatta, bir üretim fonksiyonu; bir firmanın, bir endüstrinin ya da bir ekonominin ürettiği çıktı ile bu çıktıyı oluşturan girdiler arasındaki ilişkiyi veren matematiksel bir formüldür, (Vilcu, 2011).

Böylece bir üretim fonksiyonu

$$Q: \mathbb{R}_+^n \longrightarrow \mathbb{R}_+, \;\; Q = Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ile tanımlanan C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir bir dönüşümdür. Burada Q ile çıktı miktarı, n girdi sayısı ve $x_1, x_2, \dots, x_n$ ler ise kullanılan girdilerdir (işgücü, kapital, arazi, ham madde vb. gibi). Ayrıca $\mathbb{R}_+^n$ ve $\mathbb{R}_+$ notasyonları ile

$$\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_1, x_2, \dots, x_n > 0\}$$

ve

$$\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R}: r > 0\}$$

gösterilmektedir, (Vilcu, 2011).

Üretim fonksiyonlarının bazı özellikleri aşağıdaki gibidir:

(a) Herhangi bir girdinin yokluğunda üretim durur, yani Q özdeş olarak sıfır olur. Bu ise her bir girdinin üretim sürecinde zorunlu olması demektir.

(b) $i = 1, \dots, n$ için $\frac{\partial Q}{\partial x_i} > 0$ dir. Bu her bir üretim faktörüne göre üretim fonksiyonunun kesin monoton artan olduğunu gösterir.

(c) $i = 1, \dots, n$ için $\frac{\partial^2 Q}{\partial {x_i}^2} < 0$ dir, yani herhangi bir üretim faktörüne göre üretim fonksiyonu azalan bir etkiye sahiptir.

(d) $\forall \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}_+^n$ için, $Q(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \geq Q(\boldsymbol{x}) + Q(\boldsymbol{y})$ dir. Bu ise üretim fonksiyonunun azalmayan bir global etkiye sahip olduğunu gösterir.

(e) Q homojen bir fonksiyondur, yani her $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^n$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$Q(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda^p Q(\boldsymbol{x})$$

olacak şekilde bir p reel sayısı vardır. Bu ise, girdilerin bir skalerle çarpılması durumunda oluşan çıktının da, aynı sabitin bir kuvveti kadar çarpılacağı anlamına gelir, (Vilcu, 2011).

Eğer $p = 1$ ise, o zaman üretim fonksiyonu *sabit ölçek getirisine* sahiptir denir. Eğer $p > 1$ ise, *artan ölçek getirisine* ve son olarak eğer $p < 1$ ise üretim fonksiyonuna *azalan ölçek getirisine* sahiptir denir, (Vilcu, 2011).

Ölçeğe göre artan, azalan ve sabit getirileri şu örnekle izah edebiliriz: Tüm girdilerin miktarı %5 artırıldığında, çıktı %5 den daha fazla artarsa ölçeğe göre artan getiri söz konusu olur. Eğer tüm girdilerin miktarı %5 artırıldığında, çıktı %5 den daha az artarsa ölçeğe göre azalan getiriden söz edilir. Ölçeğe göre sabit getiri ise, tüm girdilerin miktarı %5 artırıldığında, çıktının yalnızca %5 oranda artması demektir, (Parasız ve Özer, 2005).

Yukarıdaki beş özellikten (c) ile belirtilen dışındakiler açıktır. (c) şıkkını açıklamadan önce bazı kavramların verilmesi gerekir.

İki girdili üretim yapan bir işletme ele alınsın. İşletmenin ürettiği malı Q, kullandığı girdileri de K ve L ile gösterelim. Buna göre işletmenin üretim fonksiyonu;

$$Q = f(K, L)$$

ile ifade edilebilir. Burada, sırasıyla, K ve L ile sermaye ve iş gücü girdileri gösterilmektedir.

Tanım 2.1.3. (*Ortalama ve marjinal verimlilik*): Bir faktörün ya da girdinin ortalama verimliliği aşağıdaki gibi ifade edilir: Faktörlerden birinin, örneğin, K faktörünün ortalama verimliliği: L nin $L = L_0$ gibi bir sabit değeri için değişen K değerlerine bağlı olarak birim K başına elde edilen Q olarak ifade edilir, yani,

$$\text{Ortalama verimlilik} = \frac{Q}{K} = \frac{f(K, L^0)}{K}$$

dir. K faktörünün marjinal verimliliği; L nin $L = L_0$ gibi bir sabit değeri için,

$$\text{Marjinal verimlilik} = \frac{\partial Q}{\partial K} \tag{2.1.1}$$

şeklinde tanımlanır, (Bulmuş, 2008).

Tanım 2.1.4. (*Eş-ürün eğrisi*): K ve L faktörleri sermaye ve iş gücü girdilerini göstermek üzere, bir işletmenin üretim fonksiyonu

$$Q = f(K, L)$$

ile verilsin. Belirli bir üretim düzeyinin gerçekleşmesini sağlayan K ve L faktör bileşimlerinin geometrik yerine eş-ürün eğrisi adı verilir.

Belli bir üretim düzeyi için $Q = f(K, L)$ üretim fonksiyonu

$$Q^0 = f(K, L)$$

şeklindedir.

Yukarıdaki bağıntıda Q^0 bir parametredir. Bir başka deyişle, Q^0 bir üretim düzeyini göstermektedir. Burada Q^0 üretim düzeyini veren K ve L faktörlerinin tüm bileşimlerinin geometrik yeri, bir eş-ürün eğrisi oluşturur, (Bulmuş, 2008).

Tanım 2.1.5. (*Teknik ikame oranı*): Belirli sınırlar içinde faktörlerin birbirleri yerine kullanılabilmesi, iktisatta, teknik ikame olarak adlandırılır. Bir faktörün diğerini ikame gücü, bir oran yardımıyla ifade edilebilir. Bu orana teknik ikame oranı adı verilir, (Bulmuş, 2008).

Teknik ikame oranı'na ulaşmak için, eş-ürün eğrisinin herhangi bir noktasındaki eğimini (–1) ile çarpmak yeterlidir, yani

$$\text{Marjinal teknik ikame oranı} = -\frac{dK}{dL} \tag{2.1.2}$$

şeklindedir.

Diğer taraftan bir $Q = f(K, L)$ üretim fonksiyonunun tam diferensiyeli

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial K} dK + \frac{\partial Q}{\partial L} dL \qquad (2.1.3)$$

dir. Bir eş-ürün eğrisi boyunca üretim miktarı sabit olduğundan, tam diferensiyelin sıfıra eşitlenmesi ile belli bir eş-ürün eğrisinin denklemi elde edilir. Yani, belli bir ürün miktarı için,

$$dQ = 0 \qquad (2.1.4)$$

dir. (2.1.4) eşitliği (2.1.3) de göz önüne alınırsa

$$\frac{\partial Q}{\partial K} dK + \frac{\partial Q}{\partial L} dL = 0 \qquad (2.1.5)$$

eş ürün eğrilerinin denklemini veren sonucu elde ederiz. Ayrıca bu denklemden

$$-\frac{dK}{dL} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}} \qquad (2.1.6)$$

yazılabilir. Marjinal verimlilik tanımı (2.1.1) eşitliği ile ifade edilmişti. (2.1.2) ile verilen marjinal teknik ikame oranı da göz ününe alınırsa, (2.1.6) dan

$$\text{Marjinal teknik ikame oranı} = \frac{\text{İş gücünün marjinal verimliliği}}{\text{Sermayenin marjinal verimliliği}}$$

elde edilir, (Uluatam, 1998).

Üretim teorisi içerisinde oldukça önemli bir konumda bulunan esneklik katsayıları, üretim fonksiyonlarına ilişkin birçok soruya cevap vermektedir.

Tanım 2.1.6. (*Esneklik katsayıları*): Faktörlerden biri sabitken, ötekinde ortaya çıkan oransal değişmeye karşı, üretimin ne ölçüde duyarlı olduğunu gösteren parametrelere üretim faktörü esneklik katsayıları denir, (Bulmuş, 2008).

Yine, iki-girdili

$$Q = f(K, L)$$

üretim fonksiyonunu ele alalım. Burada K ve L faktörleri sermaye ve iş gücü girdilerini ifade etmektedir.

Üretimin iş gücü faktörüne olan esneklik katsayısı (e_L), sermaye faktörüne olan esneklik katsayısı (e_K) ile gösterilsin. Bu katsayıların nasıl elde edileceği aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

$$e_L = \frac{\partial Q/\partial L}{Q/L} \ \text{ ve } \ e_K = \frac{\partial Q/\partial K}{Q/K}.$$

Üretimin faktör esneklik katsayıları ile, faktörlerin marjinal fiziki verimlilik fonksiyonları arasında bir benzerlik vardır. Her ikisi de, kullanılan faktörlerde ki değişmenin, üretimde yaratacağı değişmeyi göstermektedir, (Bulmuş, 2008).

Tanım 2.1.7. (*Faktörler arası ikame esneklik katsayısı*): Faktör oranlarındaki oransal değişmenin, teknik ikame oranındaki oransal değişmeye oranına, faktörler arası ikame esneklik katsıyısı denir (ε_s) ile gösterilir, (Bulmuş, 2008).

Teknik ikame oranını kısaca (s) ile gösterilirse, faktörler arası ikame esneklik katsayısı, aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\varepsilon_s = \frac{\frac{d(K/L)}{(K/L)}}{\frac{ds}{s}} = \frac{d(K/L)}{ds} \cdot \frac{s}{(K/L)}.$$

Ayrıca bu son eşitlikte (2.1.6) ile verilen teknik ikame oranı yerine yazılırsa, ikame esneklik katsayısı

$$\varepsilon_s = \frac{d(K/L)}{d\left(\frac{\partial Q/\partial L}{\partial Q/\partial K}\right)} \cdot \frac{\frac{\partial Q/\partial L}{\partial Q/\partial K}}{(K/L)}$$

şeklinde de gösterilebilir.

A.D. Vilcu ve G.E. Vilcu, sırasıyla, sabit esneklik katsayılı ve oransal marjinal teknik ikame oranlı homojen üretim fonksiyonlarını, aşağıdaki teoremlerle sınıflandırmışlardır:

Teorem 2.1.1. f iki kez diferensiyellenebilir, r −homojen, sabit olmayan ve iki girdili (K −sermaye ve L −iş gücü) bir üretim fonksiyonu olsun. O zaman

(a) f, işgücü faktörüne olan sabit esneklik katsayısına sahip olması için gerek ve yeter şart f nin

$$f(K, L) = CK^{r-k}L^{k}$$

ile verilen bir Cobb-Douglas üretim fonksiyonu olmasıdır. Burada C pozitif bir sabit ve k üretimin işgücü faktörüne olan sabit esneklik katsayıdır.

(b) f, sermaye faktörüne olan sabit esneklik katsayısına sahip olması için gerek ve yeter şart f nin

$$f(K, L) = CK^{k}L^{r-k}$$

ile verilen bir Cobb-Douglas üretim fonksiyonu olmasıdır. Burada C pozitif bir sabit ve k üretimin sermaye faktörüne olan sabit esneklik katsayıdır.

(c) f, sermaye ve iş gücü arasında oransal ikame oranı özelliğini sağlaması için (yani marjinal teknik ikame oranı $= k\left(\frac{K}{L}\right)$, burada k pozitif bir sabittir) gerek ve yeter şart f nin

$$f(K, L) = CK^{r/(k+1)}L^{rk/(k+1)}$$

ile verilen bir Cobb-Douglas üretim fonksiyonu olmasıdır. Burada C pozitif bir sabittir (Vilcu ve Vilcu, 2013).

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $n > 2$, şeklinde n −girdili bir homojen üretim fonksiyonu olsun. O zaman herhangi bir x_i faktörüne göre üretimin esnekliği

$$E_{x_i} = \frac{\partial f/\partial x_i}{f/x_i}$$

şeklinde tanımlanır. Yine üretimin i −yinci faktörünün j −yinci faktörüne göre marjinal teknik ikame oranı

$$MRS_{ij} = \frac{\partial f/\partial x_j}{\partial f/\partial x_i}$$

şeklinde verilir. Bir üretim fonksiyonuna, oransal marjinal teknik ikame oranı özelliğini sağlıyordur denir gerek ve yeter şart

$$MRS_{ij} = \frac{x_i}{x_j}, \qquad 1 \leq i \neq j \leq n$$

dir, (Vilcu ve Vilcu, 2013).

Teorem 2.1.2. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ iki kez diferensiyellenebilir, r −homojen, sabit olmayan, $D = \mathbb{R}_+^n$ üzerinde tanımlı ve n-değişkenli $(n > 2)$ bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

(a) Herhangi bir x_i üretim faktörüne göre, üretim esnekliğinin bir k_i sabiti olması için gerek ve yeter şart

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i^{k_i} x_j^{r-k_i} F(u_1, \dots, u_{n-2})$$

dir. Burada j, $\{1, \dots, n\} \backslash \{i\}$ cümlesinden alınmış herhangi bir eleman, F iki kez diferensiyellenebilir ve

$$\{u_1, \dots, u_{n-2}\} = \left\{ \frac{x_k}{x_j} \middle| k \in \{1, \dots, n\} \backslash \{i, j\} \right\}$$

şeklinde verilen $(n-2)$ −değişkenli, reel değerli bir fonksiyondur.

(b) Tüm üretim faktörlerine göre, üretim esnekliğinin bir k_i $(i \in \{1,2, \dots, n\})$ sabitine eşit olması için gerek ve yeter şart

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_n = r$$

ve f,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = C x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$$

ile verilen bir Cobb-Douglas üretim fonksiyonudur. Burada C bir pozitif sabittir.

(c) Üretim fonksiyonunun oransal marjinal ikame oranı özelliğini sağlaması için gerek ve yeter şart

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = C x_1^{r/n} x_2^{r/n} \cdots x_n^{r/n}$$

dir. Burada C pozitif bir sabittir, (Vilcu ve Vilcu, 2013).

3. G_3^1 UZAYINDA BAZI ÜRETİM MODELLERİNE KARŞILIK GELEN YÜZEYLER

Bu bölümde Cobb-Douglas ve ACMS üretim fonksiyonlarına karşılık gelen yüzeyler, alt bölümler halinde, incelenecektir.

3.1. Cobb-Douglas Üretim Fonksiyonuna Karşılık Gelen Yüzeyler

2 değişkenli bir genelleştirilmiş Cobb-Douglas üretim fonksiyonu

$$Q: R_+^2 \to R_+ \,, \ (k, l) \longmapsto Q(k, l) = Ak^{\alpha} l^{\beta} \,, A, \alpha, \beta > 0, \tag{3.1.1}$$

şeklinde verilir, burada k ve l sırasıyla sermaye ve işgücü girdileridir.

(3.1.1) deki genelleştirilmiş Cobb-Douglas üretim fonksiyonunun sabit ölçek getirisine sahip olması için gerek ve yeter şart $\alpha + \beta = 1$ dir. Benzer şekilde eğer $\alpha + \beta > 1$ ($\alpha + \beta < 1$) ise Q artan ölçek getirisine (azalan ölçek getirisine) sahiptir. Bu ifadelerin tersleri de doğrudur.

(3.1.1) de verilen genelleştilmiş Cobb-Douglas üretim fonksiyonunun, sırasıyla, k ve l ye bağlı üretim esneklikleri

$$E_k = \frac{\partial Q \ / \ \partial k}{Q/k} = \alpha \ ve \ E_l = \frac{\partial Q \ / \ \partial l}{Q/l} = \beta \tag{3.1.2}$$

ile verilir.

Diğer taraftan, G_3^1 uzayında bu fonksiyona karşılık gelen yüzey

$$r(k, l) = \left(k, l, Ak^{\alpha} l^{\beta}\right) \tag{3.1.3}$$

denklemine sahiptir. Bu yüzey Cobb-Douglas yüzeyi olarak adlandırılır. Yüzeyin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{\left(0, \frac{\beta}{l} Q, 1\right)}{\sqrt{\left|1 - \left(\frac{\beta}{l}\right)^2 Q^2\right|}} \tag{3.1.4}$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$g(N,N)=\epsilon=\frac{\left(\frac{\beta}{l}\right)^2 Q^2-1}{\left|1-\left(\frac{\beta}{l}\right)^2 Q^2\right|} \tag{3.1.5}$$

olur. (3.1.5) eşitliğinden eğer, her (k,l) ikilisi için, $\left(\frac{\beta}{l}\right)^2 Q^2-1>0$ ise yüzey timelike, benzer şekilde eğer, her (k,l) ikilisi için, $\left(\frac{\beta}{l}\right)^2 Q^2-1<0$ ise yüzey spacelike olur.

Bu yüzeyin Gauss eğriliği aşağıdaki gibidir:

$$K=-\epsilon\frac{Q^2\alpha\beta}{k^2l^2}\frac{1-(\alpha+\beta)}{\left(1+\left(\frac{\beta}{l}Q\right)^2\right)^2}. \tag{3.1.6}$$

Buna göre aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.1. Q, (3.1.1) ile verilen bir genelleştirilmiş Cobb-Douglas üretim fonksiyonu olsun. Buna göre aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

(A) G_3^1 uzayında Q fonksiyonuna karşılık gelen Cobb-Douglas yüzeyinin flat olması için gerek ve yeter şart Q nun sabit ölçek getirisine sahip olmasıdır.

(B) G_3^1 uzayında Q fonksiyonuna karşılık gelen spacelike Cobb-Douglas yüzeyinin negatif (pozitif) Gauss eğriliğine sahip olması için gerek ve yeter şart Q nun artan (azalan) ölçek getirisine sahip olmasıdır.

(C) G_3^1 uzayında Q fonksiyonuna karşılık gelen timelike Cobb-Douglas yüzeyinin pozitif (negatif) Gauss eğriliğine sahip olması için gerek ve yeter şart Q nun artan (azalan) ölçek getirisine sahip olmasıdır.

İspat: (A) G_3^1 uzayında Cobb-Douglas yüzeyi verilsin. Bu yüzeyin Gauss eğriliği (3.1.6) eşitliği ile bulunur. Bu eşitlikte α ve β pozitif sabitler, k ve l değişkenlerdir. Dolayısıyla yüzeyin Gauss eğriliğinin sıfır olması (yani yüzeyin flat olması) için $\alpha+\beta=1$ olması gerek ve yeterdir. Bu ise Q Cobb-Douglas üretim fonksiyonun sabit ölçek getirili olması anlamına gelir. Dolayısıyla Teorem 3.1.1 in (A) şıkkının ispatı tamamlanır.

(B) G_3^1 uzayında spacelike Cobb-Douglas yüzeyi için (3.1.6) eşitliğinde $\epsilon=-1$ olur. Ayrıca Q pozitif reel değerli bir fonksiyon, α ve β pozitif sabitler, k ve l pozitif değerli değişkenler olduğundan, eğer yüzey negatif (pozitif) Gauss eğrilikli ise, o zaman

$1-(\alpha+\beta)<0$ $(1-(\alpha+\beta)>0)$ olur. Bu ise Q nun artan (azalan) ölçek getirisine sahip olması demektir. Tersi de doğrudur.

(C) G_3^1 uzayında timelike Cobb-Douglas yüzeyi için (3.1.6) eşitliğinde $\epsilon=1$ dir. Bir önce ki ispata benzer olarak, eğer yüzey pozitif (negatif) Gauss eğrilikli ise, o zaman $1-(\alpha+\beta)<0$ $(1-(\alpha+\beta)>0)$ olur. Bu ise Q nun artan (azalan) ölçek getirisine sahip olması demektir. Tersi de doğrudur.

Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Uyarı 3.1.1. Teorem 3.1.1 (Vilcu, 2011) adlı referansdaki Teorem 3.1 in pseudo Galilean uzayına uyarlanmış versiyonudur. Ayrıca Teorem 3.1.1 in (A) şıkkı (Chen, 2012f) deki Teorem A nın özel bir durumudur.

Şimdi Cobb-Douglas yüzeyinin G_3^1 deki minimalliği araştırılacaktır. Bu amaçla Cobb-Douglas yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H=-\epsilon\frac{A\beta(\beta-1)k^{\alpha}l^{\beta-2}}{2(1+(\frac{\beta}{l}Q)^2)^{3/2}}, \tag{3.1.7}$$

ile verilir. Aşağıdaki teoremi ele alabiliriz.

Teorem 3.1.2. Q, (3.1.1) ile verilen bir genelleştirilmiş Cobb-Douglass üretim fonksiyonu olsun. Buna göre aşağıdaki şartlar geçerlidir:

(A) G_3^1 uzayında Q fonksiyonuna karşılık gelen Cobb-Douglas yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şart Q nun işgücü girdisine bağlı olan üretim esnekliğinin $E_l=1$ olmasıdır.

(B) G_3^1 uzayında Q fonksiyonuna karşılık gelen spacelike Cobb-Douglas yüzeyinin negatif (pozitif) ortalama eğriliğine sahip olması için gerek ve yeter şart Q nun l girdisine bağlı sabit üretim esnekliği $E_l<1$ $(E_l>1)$ dir.

(C) G_3^1 uzayında Q fonksiyonuna karşılık gelen timelike Cobb-Douglas yüzeyinin pozitif (negatif) ortalama eğriliğine sahip olması için gerek ve yeter şart Q nun l girdisine bağlı sabit üretim esnekliği $E_l<1$ $(E_l>1)$ dir.

İspat: (A) G_3^1 uzayında Cobb-Douglas yüzeyi verilsin. Bu yüzeyin ortalama eğriliği (3.1.7) eşitliği ile bulunur. Bu eşitlikte α ve β pozitif sabitler, k ve l değişkenlerdir. Dolayısıyla yüzeyin ortalama eğriliğinin sıfır olması (yani yüzeyin minimal olması) için $\beta = 1$ olması gerek ve yeterdir. Bu ise (3.1.2) den Q nun işgücü girdisine bağlı olan üretim esnekliğinin $E_l = 1$ olması anlamına gelir.

(B) G_3^1 uzayında spacelike Cobb-Douglas yüzeyi için (3.1.7) eşitliğinde $\epsilon = -1$ olur. Ayrıca Q pozitif reel değerli bir fonksiyon, α ve β pozitif sabitler, k ve l pozitif değişkenler olduğundan, eğer yüzey negatif (pozitif) ortalama eğrilikli ise, (3.1.2) den $\beta = E_l < 1$ ($\beta = E_l > 1$) olur. Terside doğrudur.

(C) G_3^1 uzayında timelike Cobb-Douglas yüzeyi için (3.1.7) eşitliğinde $\epsilon = 1$ olur. Bir önceki şıkkın ispatına benzer olarak, Q pozitif reel değerli bir fonksiyon, α ve β pozitif sabitler, k ve l pozitif değişkenlerdir. Buna göre eğer yüzey pozitif (negatif) ortalama eğrilikli ise Q nun l girdisine bağlı sabit üretim esnekliği $E_l < 1$ ($E_l > 1$) olur. Terside doğrudur.

Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Minimal bir Cobb-Douglas yüzeyi $Q(k,l) = Ak^{\alpha}l$ formunda bir fonksiyonun grafik yüzeyidir. $\alpha > 0$ olduğundan Q nun daima artan ölçek getirisine sahip olduğu ortaya çıkar. Bu sebeple aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.1.1. G_3^1 de genelleştirilmiş bir Cobb-Douglas üretim fonksiyonuna karşılık gelen Cobb-Douglas yüzeyi eğer minimal ise Cobb-Douglas üretim fonksiyonu artan ölçek getirisine sahiptir.

Uyarı 3.1.2 X. Wang ve Y. Fu (Wang, Fu, 2013) E^{n+1} Öklid uzayında minimal Cobb-Douglas hiperyüzeyleri için bir yokluk sonucu elde ettiler. Bizim çalışmamızda bu sonuç geçerli değildir, yani G_3^1 de minimal Cobb-Douglas yüzeyler vardır.

Uyarı 3.1.3. G_3^1 de, $\alpha, \beta > 0$ olduğundan, her iki eğriliği 0 olan bir Cobb-Douglas yüzeyi mevcut değildir.

3.2. ACMS Üretim Fonksiyonuna Karşılık Gelen Yüzeyler

İki girdili genelleştirilmiş bir ACMS üretim fonksiyonu aşağıdaki formdadır:

$$Q: R_+^2 \to R_+ , \qquad (k,l) \mapsto Q(k,l) = A(\alpha^\rho k^\rho + \beta^\rho l^\rho)^{\gamma/\rho},$$

burada $A > 0,\ \rho < 1,\ \rho \neq 0,\ \alpha, \beta, \gamma > 0$ ve $k, l,$ sırasıyla, sermaye ve işgücü girdileridir. Q nun homojenlik derecesi γ dir.

Genelleştirilmiş ACMS üretim fonksiyonuna karşılık gelen yüzey

$$r(k,l) = \left(k, l, A(\alpha^\rho k^\rho + \beta^\rho l^\rho)^{\gamma/\rho}\right) \tag{3.2.1}$$

ile verilir ve ACMS yüzeyi olarak adlandırılır.

Şimdi $q = (\alpha^\rho k^\rho + \beta^\rho l^\rho)$ diyelim. Dolayısıyla $Q = Aq^{\gamma/\rho}$ olur. Buna göre yüzeyin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{\left(0, \frac{\gamma\beta^\rho l^{\rho-1}}{\rho} Q, 1\right)}{\sqrt{\left|1 - \left(\frac{\gamma\beta^\rho l^{\rho-1}}{\rho} Q\right)^2\right|}} \tag{3.2.2}$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$g(N,N) = \epsilon = \frac{\left(\frac{\gamma\beta^\rho l^{\rho-1}}{\rho} Q\right)^2 - 1}{\left|1 - \left(\frac{\gamma\beta^\rho l^{\rho-1}}{\rho} Q\right)^2\right|} \tag{3.2.3}$$

olur. (3.2.3) eşitliğinden eğer, her (k,l) ikilisi için, $\left(\frac{\gamma\beta^\rho l^{\rho-1}}{\rho} Q\right)^2 - 1 > 0$ ise yüzey timelike, benzer şekilde eğer, her (k,l) ikilisi için, $\left(\frac{\gamma\beta^\rho l^{\rho-1}}{\rho} Q\right)^2 - 1 < 0$ ise yüzey spacelike olur.

Üstelik böyle bir yüzeyin Gauss eğriliği

$$K = -\epsilon \frac{(\gamma - 1)(\alpha^\rho k^\rho + \beta^\rho l^\rho)}{\left(1 - \left(\frac{\gamma \beta^\rho l^{\rho-1}}{\rho} Q\right)^2\right)^2} \tag{3.2.4}$$

şeklindedir.

Teorem 3.2.1. Q, (3.2.1) ile verilen bir genelleştirilmiş ACMS üretim fonksiyonu olsun. Buna göre aşağıdaki şartlar geçerlidir:

(A) G_3^1 uzayında Q fonksiyonuna karşılık gelen ACMS yüzeyinin flat olması için gerek ve yeter şart Q nun sabit ölçek getirisine sahip olmasıdır.

(B) G_3^1 uzayında Q fonksiyonuna karşılık gelen spacelike ACMS yüzeyinin negatif (pozitif) ortalama eğriliğine sahip olması için gerek ve yeter şart Q nun azalan (artan) ölçek getirisine sahip olmasıdır.

(C) G_3^1 uzayında Q fonksiyonuna karşılık gelen timelike ACMS yüzeyinin pozitif (negatif) Gauss eğriliğine sahip olması için gerek ve yeter şart Q nun azalan (artan) ölçek getirisine sahip olmasıdır.

İspat: **(A)** G_3^1 uzayında ACMS yüzeyi verilsin. Bu yüzeyin Gauss eğriliği (3.2.4) eşitliği ile bulunur. Bu eşitlikte $\alpha, \beta, \gamma, \rho$ pozitif sabitler, k ve l pozitif değerli değişkenlerdir. Dolayısıyla yüzeyin Gauss eğriliğinin sıfır olması (yani yüzeyin flat olması) için $\gamma = 1$ olması gerek ve yeterdir. Bu ise Q nun ölçeğe göre sabit getirili olması anlamına gelir.

(B) G_3^1 uzayında spacelike ACMS yüzeyi için (3.2.4) eşitliğinde $\epsilon = -1$ olur. Ayrıca Q pozitif reel değerli bir fonksiyon, $\alpha, \beta, \gamma, \rho$ pozitif sabitler, k ve l pozitif değişkenler olduğundan, eğer yüzey negatif (pozitif) Gauss eğrilikli ise, o zaman $\gamma - 1 < 0$ $(\gamma - 1 > 0)$ olur. Bu ise Q nun azalan (artan) ölçek getirisine sahip olması demektir. Tersi de doğrudur.

(C) G_3^1 uzayında timelike Cobb-Douglas yüzeyi için (3.1.6) eşitliğinde $\epsilon = 1$ dir. Bir önceki ispata benzer olarak, eğer yüzey pozitif (negatif) Gauss eğrilikli ise, o zaman $\gamma - 1 < 0$ $(\gamma - 1 > 0)$ olur. Bu ise Q nun azalan (artan) ölçek getirisine sahip olması demektir. Tersi de doğrudur.

Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Uyarı 3.2.1. Teorem 3.2.1, (Vilcu, Vilcu, 2011) deki Teorem 3.2 nin Galilean uzayına uyarlanmış versiyonudur. Ayrıca Teorem 3.2.1 in (A) ifadesi (Chen, 2012f) deki Teorem A nın bir özel durumudur.

ACMS yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H = -\epsilon \frac{\frac{\gamma\beta^{\rho} l^{\rho-1}}{\rho^2} Q((\rho-1)\alpha^{\rho}k^{\rho} + (\gamma-1)\beta^{\rho}l^{\rho})}{2\left(1-\left(\frac{\gamma\beta^{\rho}l^{\rho-1}}{\rho}Q\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.2.5}$$

ile verilir. (3.2.5) eşitliği göz önüne alınırsa, ACMS yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şart $\rho = \gamma = 1$ olmasıdır. Bu genelleştirilmiş ACMS üretim fonksiyonunun mükemmel ikame formunda olması, yani

$$Q(k,l) = \alpha_1 k + \alpha_2 l, \qquad \alpha_1, \alpha_2 > 0$$

şeklinde olmasıdır.

Böylece aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz.

Teorem 3.2.2. Q, (3.2.1) ile verilen bir genelleştirilmiş ACMS üretim fonksiyonu olsun. Buna göre Q nun mükemmel ikame formunda olması için gerek ve yeter şart karşılık gelen ACMS yüzeyinin G_3^1 uzayında minimal olmasıdır.

(3.2.5) eşitliğinde, $\rho < 1$ olduğundan, eğer $\gamma < 1$ ise ACMS yüzeyi, negatif ortalama eğriliğine sahiptir.

Sonuç 3.2.1. Genelleştirilmiş ACMS üretim fonksiyonunun azalan ölçek getiriye sahip olması için gerek ve yeter şart karşılık gelen spacelike (timelike) ACMS yüzeyinin negatif (pozitif) ortalama eğriliğine sahip olmasıdır.

4. SONUÇ

Üretim fonksiyonlarının uygulama sahaları, sadece mikroiktisat ve makroiktisat ile sınırlı değildir. Biyoloji, eğitim ve mühendislik alanlarında da karşımıza çıkmaktadır. Bu sebeple üretim fonksiyonlarının genel özellikleri ayrıntılı şekilde ikinci bölümde tanıtılmıştır.

Üçüncü bölüm bu çalışmanın orijinal kısmıdır. Bu bölümde G_3^1 uzayında Cobb-Dauglas ve ACMS üretim fonksiyonlarına karşılık gelen yüzeyler çalışılmıştır. Bu tür üretim fonksiyonlarının iktisadi bazı temel özellikleriyle bu fonksiyonlara karşılık gelen yüzeylerin geometrisi arasındaki ilişkiler ifade edilmiştir.

İlk olarak Cobb- Dauglas üretim fonksiyonunun ölçeğe göre getiri özelliği ile bu üretim fonksiyonuna karşılık gelen yüzeyin Gauss eğriliği arasında doğrudan bir ilişki bulunmuştur. Yine Cobb- Dauglas üretim fonksiyonunun üretim esnekliği ile Cobb-Dauglas yüzeyinin ortalama eğriliği arasında bağlantılar tespit edilip bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Son olarak ACMS üretim fonksiyonunun iktisadi özellikleri ve ACMS yüzeylerinin geometrisi arasında birebir ilişkiler elde edilmiştir. Bu üretim fonksiyonunun mükemmel ikame formunda olması için karşılık gelen yüzeyin minimal olduğu sonucu bulunmuştur.

KAYNAKLAR

Allen, R.G. and Hicks, J.R., 1934. A reconsideration of theory of value, Pt. II, *Economica*, **1,** 196-219.

Arrow, K.J., Chenery, H.B., Minhas, B.S. and Solow, R.M., 1961. Capital-Labor substitution and economic efficiency, *The Review of Economics and Statistics*, **43,** 225-250.

Aydın, M.E. and Ergut, M., 2014. Homothetic functions with Allen's perspective and its geometric applications, *Kragujevac Journal of Mathematics* **38(1)**, 185–194.

Aydın, M.E. and Ergut, M., Composite functions with Allen determinants and their applications to production models in economics, *Tamkang Journal of Mathematics*, **45(4)** (2014), 427-435.

Aydın, M.E. and Sepet, A.S., 2015. Galilean geometry of corresponding surfaces to production models in economics, *Kragujevac Journal of Mathematics* **39(2)**, 207-216.

Bektaş, M., 2005**.** The characterizations of general helices in the 3-dimensional Pseudo-Galilean space *Soochow Journal of Mathematics* **31(3)**, 441

Bektaş, M., Ergut, M. and Öğrenmiş, A.O., 2004**.** The Characterizations for helıces in the Galilean Space G_3^1, *International Journal of Pure and Applied Mathematics* 16, 31-36

Bulmuş, İ., 2008. Mikroisktisat, Gazi Üniversitesi, Ankara.

Chen, B.-Y., 2011. On some geometric properties of h-homogeneous production functions in microecnomics, *Kragujevac Journal of Mathematics*, **35**, 343-357.

Chen, B.-Y., 2012 On some geometric properties of quasi-sum production models, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* **392,** 192-199.

Chen, B.-Y., 2012 Classification of h-homogeneous production functions with constant elasticity of substitution, *Tamkang Journal of Mathematics,* **43**, 321-328.

Chen, B.-Y., 2012c. An explicit formula of Hessian determinants of composite functions and its applications, *Kragujevac Journal of Mathematics*, **36**, 27-39.

Chen, B.-Y., 2012d. Classification of homothetic functions with constant elasticity of substitution and its geometric applications, *International Electronic Journal of Geometry*, **5,** 67-78.

Chen, B.-Y., 2012e. Geometry of quasi-sum production functions with constant elasticity substitution property, *Journal of Advanced Mathematical Studies*, **5,** 90-97.

Chen, B.-Y., 2012f. A note on homogeneous production models, *Kragujevac Journal of Mathematics*, **36**, 41-43.

Chen, B.-Y. and Vilcu, G.E., 2013. Geometric classifications of homogeneous production functions, *Applied Mathematics and Computation*, **225**, 345-351.

Cobb, C.W. and Douglas, P.H., 1928. A theory of production, *American Economic Review*, **18**, 139-165.

Divjak, B. and Milin-Sipus, Z., 2003, Special Curves on the Ruled Surfaces in Galilean and Pseudo-Galilean Spaces, Acta Math. Hungar., **98(3)**, 203-215.

Divjak, B., 1998, Curves in Pseudo-Galilean Geometry, Annales Univ. Sci. Budapest, **41**, 117-128.

Douglas, P.H., 1976. The Cobb-Douglas production function once again: Its history, its testing and some new emprical values, *Journal of Political Economy*, **84**, 903-916.

Ergut, M., Öğrenmiş, A.O. and Öztekin, H., 2011. Some properties of Mannheim curves in Galilean and pseudo - Galilean space, *Differential Geometry (math.DG)*

Hiwarekar, A.P., 2009. Extension of Euler's theorem on homogeneous function to higher derivatives, *Bulletin of the Marathwada Mathematical Society*, **10**, 16-19.

Hacısalihoğlu, H.H., 1983. Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat. No. 2.

Hacısalihoğlu, H.H., 1998. Diferensiyel Geometri 1. Cilt, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.

Ioan, C.A., 2007. Applications of the space differential geometry at the study of production functions, *Euro Economica*, **18**, 30-38.

Kamenarovic, I., 1991, Existence Theorems for Ruled Surfaces in the Galilean Space G_3, Rad HAZU. Mat.456, **10**, 183-196.

Losonczi, L., 2010. Production functions having the CES property, *Acta Mathematica Academy Paedagog Nyházi*, N.S., **1**, 113-125.

Mihai, A. and Sandu, M., 2012. The use of the h-homogeneous production function in microecenomics, Modelling Challenges, *Revista Economica*, **1**, 465-472.

Mihai, A. and Olteanu, A., 2013. Applied geometry in microecenomics. Recent developments, *Land Reclamation, Earth Observation & Surveying, Enverionmental Engineering*, **II**, 159-166.

Mishra, S.K., 2010. A brief history of production functions, *The IUP Jounal of Managerial Economics*, **8**, 4 6-34.

Öğrenmiş, A.O., 2007. On the helices in the Galilean space G_3, *Iranian Journal of Science and Technology (Sciences)*, **31 (2)**, 177-181

Öğrenmiş A.O. and Öztekin H., 2012. Normal and rectifying curves in pseudo-Galilean space G_3^1 and their characterizations, Journal of Mathematical and Computational Science, vol. 2, no. 1, pp. 91–100

O' Neill, B., 1983. Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity, Academic Press.

Parasız, İ. and Özer, M., 2005. Bugünkü İktisadın Temelleri, Aktüel Yayınları.

Sabuncuoğlu, A., 2006. Diferensiyel Geometri, Nobel Yayın Dağıtım.

Sabuncuoğlu, A., 2009. Analitik Geometri, Nobel Yayın Dağıtım.

Sabuncuoğlu, A., 2011. Lineer Cebir, Nobel Yayın Dağıtım.

Şahin, B., 2012. Manifoldların Diferensiyel Geometrisi, Nobel Yayın Dağıtım.

Uluatam, Ö., 1998. Makroiktisat, Savaş Yayınları.

Uzawa, S.K., 1962. Production functions with constant elasticities of substitution, *Review of Economic Studies*, **29**, 4 291-299.

Vilcu, G.E., 2011. A geometric perspective on generalized Cobb-Douglas production functions, *Applied Mathematics Letters*, **24**, 777-783.

Vilcu, A.D. and Vilcu, G.E., 2011. On some geometric properties of generelized CES production functions, *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 124-129.

Vilcu, A.D. and Vilcu, G.E., 2013. On homogenous production functions with proportional marginal rate of substitution, *Mathematical problems in Engineering, Article ID 732643, 5 pages.*

Wang, X. and Fu, Y., 2013. Some characterizations of the Cobb-Douglas and CES production functions in microeconomics, *Abstract and Applied Analysis, Article ID 761832, 6 pages.*

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Elazığ'da doğmuşum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2010 yılında, Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2014 yılında, Matematik bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında, tezli yüksek lisansa başladım.