Sıfırlayıcı

Zeynep Tuba Kahya

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz 2007

Annihilator

Zeynep Tuba Kahya

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics

July 2007

Sıfırlayıcı

Zeynep Tuba Kahya

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Cebir Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ummahan Ege Arslan

Temmuz 2007

Zeynep Tuba Kahya’ nın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “Sıfırlayıcı” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ummahan EGE ARSLAN

Üye : Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

Üye : Prof. Dr. Mahmut KOÇAK

Üye : Yrd. Doç. Dr. İlker AKÇA

Üye : Yrd. Doç. Dr. Filiz TAŞCAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdurrahman KARAMANCIOĞLU

Enstitü Müdürü

ÖZET

Sıfırlayıcı (Annihilator) üzerine hazırlanan bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde ideal kavramı, bölüm ideali ve bazı temel özelliklerine yer almaktadır.

İkinci bölümde modül kavramı örneklerle incelenerek, modül için bölüm kavramı ve bunun özel hali olan sıfırlayıcı açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde modül bölümü kavramı ile yakından ilgili olan çarpımsal R-modüller ve yalın alt modül kavramları ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

Dördüncü ve son bölümde ise çaprazlanmış modül kavramı tanıtılıp 2-boyutlu cebirler olarak düşünülebilinen çaprazlanmış modüllerin sıfırlayıcısı belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: İdeal bölüm, modül, sıfırlayıcı

SUMMARY

This thesis based on Annihilator consist of four chapters. In the first chapter, we give ideal, ideal quotient notions and some basic properties of them.

In the second chapter, we exam module concept with the examples and we introduce quotient notion for module and annihilator which is its special case.

In the third chapter, we give multiplication R-modules which is closely related quotient for module.

In the four chapter, crossed module and actor crossed module are stated. Using actor crossed module, annihilator of the crossed module which is considered as 2-dimension algebra is given.

Keywords: İdeal quotient, module, annihilator.

TEŞEKKÜR

Beni bu çalışmaya sevkeden ve yöneten, çalışma boyunca değerli yardımlarını esirgemeyen, Hocam, Sayın;

Yrd. Doç. Dr. Ummahan EGE ARSLAN'a

Bu vesileyle şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (Devam ediyor)

Sayfa

BÖLÜM 1

İDEALLER

Bu bölümde ideal kavramı, idealler üzerine işlemler, bölüm ideali ve bunun özel bir hali olarak sıfırlayıcı kavramları ile ilgili genel bilgiler verilmiştir. Ayrıntılı bilgi için (Sharp, 1990), (Adkins and Weintraub, 1992),(Spindler, 1994), (Atiyah and Macdonald, 1969) önerilir.

Tanım 1.1 R değişmeli bir halka ve $\emptyset \neq I \subseteq R$ olmak üzere;

(i) $\forall\ a, b \in I$ için $a + b \in I$

(ii) $\forall\ a \in I$ ve $r \in R$ için $ra \in I$

koşulları sağlanıyorsa, I'ya R değişmeli halkasının ideali denir ve $I \trianglelefteq R$ şeklinde gösterilir.

1.1 Üreteçli İdealler

R değişmeli halka ve $I(R)$; R nin boş olmayan $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ideal ailesi olmak üzere $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ arakesitinin R nin ideali olduğu açıktır.

$H \subseteq R$ olmak üzere, R nin H kümesini içeren bütün ideallerinin arakesitine R nin H tarafından üretilmiş ideali denir ve $\langle H \rangle$ ile gösterilir.

$H \subseteq R$ ve $R \trianglelefteq R$ olduğundan $\langle H \rangle$ boş kümeden farklıdır ve aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

(i) $\langle H \rangle$, R nin bir idealidir ve $H \subseteq \langle H \rangle$ olur.

(ii) $\langle H \rangle$, H kümesini içeren R nin en küçük idealidir. Çünkü $H \subseteq I \trianglelefteq R$ ise $\langle H \rangle \subseteq I$ olur.

H, R nin bir sonlu alt kümesi olmak üzere $\langle H \rangle$ idealine R nin sonlu üreteçli ideali denir.

Önerme 1.2 *R birimli değişmeli halka ve $\emptyset \neq H \subseteq R$ olsun. R halkasının H tarafından üretilen ideali;*

$$\langle H \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i h_i \mid n \in N, r_1, \ldots, r_n \in R, h_1, \ldots, h_n \in H \right\}$$

kümesidir.

$\langle \emptyset \rangle$, R nin boş küme tarafından üretilen ideali olup, sıfır idealine eşittir.

Özel olarak; $h \in R$ için $\langle h \rangle = \{rh \mid r \in R\}$ kümesi h tarafından üretilmiş R nin temel idealidir.

Örnek 1.1 R değişmeli halkası üzerinde $R[X_1, \dots, X_n]$ polinom halkası olmak üzere, her $r \in R$ için $f(r) = r$ ve her $i = 1, \dots, n$ ve $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$ için $f(X_i) = \alpha_i$, şeklinde tanımlanan $f : R[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow R$ yerine koyma homomorfizmi verilsin. Bu durumda $Çek f = \langle X_1 - \alpha_1, \dots, X_n - \alpha_n \rangle$ olur.

Bu örneğe dayanarak değişmeli bir halkanın her idealinin sonlu üreteçli olduğunu düşünmek yanlış olur. Bunun için aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 1.2 K bir cisim, her $n \in N$ için $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ değişkenlerin bir kümesi ve $R_n = K[X_1, \dots, X_n]$, $R_0 = K$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}_0$ için R_n, R_{n+1} in bir alt halkasıdır ve $R_\infty = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}_0} R_n$ bir değişmeli halka yapısı oluşturur. $\Gamma = \{X_i, i \in N\}$ olmak üzere $R_\infty = K[\Gamma] = K[X_1, \dots, X_n, \dots]$ *nin* Γ tarafından üretilmiş ideali sonlu üretilmiş değildir.

1.2 İdeallerin Toplamı

Tanım 1.3 *$(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, R değişmeli halkasının ideallerinin ailesi olmak üzere R nin $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ kümesi tarafından üretilmiş idealine $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ailesinin toplamı denir ve*

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda = \ < \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda >$$

şeklinde gösterilir.

Önerme 1.4 R nin $I_1, \dots, I_n$ ideallerinin toplamı;

$$I_1 + \dots + I_n = \sum_{i=1}^{n} I_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i \mid r_i \in I_i, i = 1, \dots, n \right\}$$

şeklindedir.

Önerme 1.5 $h_1, \dots, h_n \in R$ olmak üzere;

$$\langle h_1, \dots, h_n \rangle = \langle h_1 \rangle + \dots + \langle h_n \rangle$$

eşitliği geçerlidir.

Önerme 1.6 $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ ve $ebob(a_1, \dots, a_n) = d$ ise,

$$\langle a_1 \rangle + \langle a_2 \rangle + \ldots + \langle a_n \rangle = \langle d \rangle$$

dir.

Örnek 1.3 $\mathbb{Z}$ de $\langle 4,6,8\rangle = \langle 4\rangle + \langle 6\rangle + \langle 8\rangle = \langle 2\rangle$ dir.

Önerme 1.6 gereğince $\langle 4,6,8\rangle = \langle 4\rangle + \langle 6\rangle + \langle 8\rangle$ eşitliği vardır. İki tamsayının en büyük ortak böleni bu tam sayıların lineer toplamı şeklinde yazılabileceğinden

$$(4,6,8) = 2 = 4x_1 + 6x_2 + 8x_3$$

olacak şekilde $x_1 = x_2 = 1,\ x_3 = -1 \in \mathbb{Z}$ sayıları bulunabilir. Buradan

$$2 \in \langle 4\rangle + \langle 6\rangle + \langle 8\rangle \ \text{ ve } \ \langle 2\rangle \subset \langle 4\rangle + \langle 6\rangle + \langle 8\rangle$$

kapsaması sağlanır. Ters kapsama için $\forall\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$ için

$$4x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 2(2x_1 + 3x_2 + 4x_3) \in \langle 2\rangle$$

dir. $\langle 4\rangle + \langle 6\rangle + \langle 8\rangle \subset \langle 2\rangle$ olup $\langle 4\rangle + \langle 6\rangle + \langle 8\rangle = \langle 2\rangle$ eşitliği vardır.

1.3 İdeallerin Çarpımı

Tanım 1.7 I ve J, R değişmeli halkasının idealleri olsun.

$$\{ab \mid a \in I,\ b \in J\}$$

kümesi tarafından üretilen R nin idealine I ile J nin çarpımı denir ve IJ ile gösterilir.

Önerme 1.8 I ve J, R değişmeli halkasının idealleri olmak üzere,

$$IJ = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid n \in N,\ a_1, \ldots, a_n \in I,\ b_1, \ldots, b_n \in J \right\}$$

şeklindedir.

İspat $r \in R$, $a \in I$, $b \in J$ olmak üzere R nin rab şeklindeki bir elemanı $(ra)b$ şeklinde yazılabilir ve $ra \in I$ olur. Böylece *Önerme 1.2* gereğince istenilen elde edilir.

1.4 İdeallerin Özellikleri

(i) R nin bütün ideallerinin ailesi olan $I(R)$ üzerinde ideallerin toplamı ve çarpımı şeklindeki ikili işlemler değişmeli ve birleşmelidir.

*(*ii) $\{0\}$, ideal toplamı işlemine göre etkisiz elemandır.

(iii) R birimli ise ideal çarpımı işlemine göre R birim elemandır. Çünkü her $I \trianglelefteq R$ için $RI = IR = I$ olur.

(iv) $I,\ J, K \in I(R)$ için;

$$I\,(J+K) = IJ + IK \qquad ve \qquad (I+J)K = IK + JK$$

şeklinde dağılma özelliği vardır.

(v) $I \neq \{0\}$ olmak üzere, $I + J = \{0\}$ olacak şekilde R nin bir ideali olmadığından $I(R)$ kümesinde toplamsal ters eleman özelliği sağlanmaz.

Dolayısıyla sadece bu özellik nedeniyle $I(R)$ bir halka yapısı oluşturamaz.

(vi) $I_1\,, \ldots I_n$, R nin idealleri ve $L = \{a_1, \ldots, a_n \mid a_1 \in I_1, \ldots, a_n \in I_n\}$ olmak üzere $\prod\limits_{i=1}^{n} I_i = \langle L \rangle$ olur.

(vii) $IJ \subseteq I \cap J \subseteq I + J$ kapsaması vardır.

(viii) Z halkasında, $(I+J)(I \cap J) = IJ$ eşitliği geçerli iken genel olarak sadece

$$(I+J)(I \cap J) \subseteq IJ$$

kapsaması geçerlidir. Çünkü

$$(I+J)(I \cap J) = I\,(I \cap J) + J\,(I \cap J) \subseteq IJ$$

olur.

(ix) Z halkasında, $I \cap (J+K) = I \cap J + I \cap K$ ve $I + (J \cap K) = I + J \cap I + K$ şeklinde $\cap$ ve $+$ işlemlerinin birbiri üzerine dağılma özelliği vardır. Fakat genel olarak bu doğru değildir. Ancak $J \subseteq I$ veya $K \subseteq I$ ise

$$I \cap (J+K) = I \cap J + I \cap K$$

şeklinde modüler kuralı geçerlidir.

1.5 Bölüm İdeali Ve Sıfırlayıcısı

Tanım 1.9 I ve J, R değişmeli halkasının idealleri olsun.

$$\{r \in R \mid rJ \subseteq I\}$$

kümesine I ve J nin bölüm ideali denir ve $(I : J)$ ile gösterilir.

Özel olarak; $I = 0$ alındığında elde edilen,

$$(0 : J) = \{r \in R \mid rJ = 0\} = \{r \in R \ \mid rb = 0, \forall b \in J\}$$

kümesine J nin annihilatörü (sıfırlayıcısı) denir ve $AnnJ$ veya Ann_RJ şeklinde gösterilir.

Ayrıca J, $< r >$ şeklinde bir temel ideal ise;

$$< I :< r >>=< I : r >$$

eşitliği geçerlidir.

D, R nin bütün sıfır bölenlerinin kümesi ve $r \neq 0$ olmak üzere;

$$D = \bigcup_{r \in R} Ann\,(r)$$

eşitliği geçerlidir.

Bölüm idealinin bazı temel özellikleri aşağıdaki şekildedir.

Önerme 1.10 R bir değişmeli halka ve $I, J, K, I_\alpha, J_\alpha$ R nin idealleri olsun.

(i) $(I : J)$, R nin bir idealidir ve R nin en büyük (geniş) ideali $KJ \subseteq I$ şartını sağlayan K idealidir. Özel olarak $I \subseteq (I : J)$ olur.

(ii) $A \neq \emptyset$ herhangi bir indeks kümesi olmak üzere;

$((\bigcap\limits_{\alpha \in A} I_\alpha) : J) = \bigcap\limits_{\alpha \in A} (I_\alpha : J)$ eşitliği geçerlidir.

(iii) $A \neq \emptyset$ herhangi bir küme olmak üzere;

$(I : (\sum\limits_{\alpha \in A} J_\alpha)) = \bigcap\limits_{\alpha \in A} (I : J_\alpha)$ eşitliği geçerlidir.

(iv) $((I : J) : K) = (I : (JK)) = ((I : K) : J)$

(v) $(I : J) = (I : (I + J))$ olur.

İspat (i) x,$y \in (I : J)$, $r \in R$ olsun. Bu durumda

$$(x + y)\,J \subseteq xJ + yJ \subseteq I + I = I$$

ve

$$(rx)\,J = r\,(xJ) \subseteq rI \subseteq I$$

olur. Buradan $x + y$ ve $rx \in (I : J)$ olup $(I : J) \trianglelefteq R$ *sağlanır. Diğer iddialar açıktır.*

(ii) $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in A} (I_\alpha : J)$ *olması için gerek ve yeter şart her* $\alpha \in A$ için $xJ \subseteq I_\alpha$ *yani*

$$xJ \subseteq \bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha$$

olmasıdır. Buradan $x \in \left((\bigcap\limits_{\alpha\in A} I_\alpha) : J \right)$ olur.

(iii) $x \in \bigcap\limits_{\alpha\in A} (I : J_\alpha)$ *olması için gerek ve yeter şart her* $\alpha \in A$ *için* $xJ_\alpha \subseteq I$ *olmasıdır. Dolayısıyla* $x\left(\sum\limits_{\alpha\in A} J_\alpha\right) \subseteq I$ *yani*

$$x \in (I : (\sum_{\alpha\in A} J_\alpha))$$

olmalıdır.

(iv) $x \in ((I : J) : K) \iff xK \subseteq (I : J) \iff (xK)\, J \subseteq I \iff x\,(JK) \subseteq I \iff x \in (I : (JK))$ *bulunur.*

Eşitliğin diğer tarafı J *yerine* K *alınarak kolaylıkla bulunabilir.*

(v) $(I : I) = R$ ve *(iii) eşitliği yardımıyla*

$$(I : (I + J)) = (I : I) \cap (I : J) = R \cap (I : J) = (I : J)$$

bulunur.

Örnek 1.4 $R = \mathbb{Z}$, $m = \prod\limits_p P^{\theta_P}$, $n = \prod\limits_p P^{\varphi_P}$, $q = \prod\limits_p P^{\delta_p}$, $I =< m >$, $J =< n >$ ve $\delta_P = max(\theta_P - \varphi_P, 0) = \theta_P - min(\theta_P, \varphi_P)$ *olmak üzere;*

$$(I : J) = (q)$$

eşitliği geçerlidir. Burada $q = m/ebob\,(m, n)$ dir.

BÖLÜM 2

MODÜLLER VE SIFIRLAYICI

Bu bölümde, modül kavramına ve çok sayıda örneğe yer verilerek, modül için bölüm kavramı ile bunun özel bir hali olan sıfırlayıcı (annihilator) ile ilgili çeşitli sonuçlar incelenmiştir. Bu bölümle ilgili olarak (Sharp, 1990), (Adkins and Weintraub, 1992), (Hungerford, 1973), (Spindler, 1994),ve (Blyth, 1977) önerilir.

2.1 Modül Kavramı ve Örnekler

Modüller, bir vektör uzayının genelleştirilmesidir. Skaler çarpım, bir cisim yerine halkadan elde edilmektedir. Halkalar ve Abelyen gruplar, modüllerin özel halleri olmaktadır.

Tanım 2.1 R bir halka, M bir küme olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} + : M \times M & \longrightarrow & M \\ (m, m') & \longmapsto & m + m' \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{rcl} \cdot : R \times M & \longrightarrow & M \\ (r, m) & \longmapsto & r \cdot m \end{array}$$

ikili işlemleri verilsin.

M1) $(M, +)$ Abel grup;

M2) $\forall\ r \in R$, $m, m' \in M$ için $r \cdot (m + m') = r \cdot m + r \cdot m'$;

M3) $\forall\ r, r' \in R$ ve $m \in M$ için $(r + r') \cdot m = r \cdot m + r' \cdot m$;

M4)$\forall\ r, r' \in R$, $m \in M$ için $(rr') \cdot m = r \cdot (r' \cdot m)$;

şartları sağlanıyor ise M kümesine, R halkası üzerinde bir sol modül veya bir sol R-modül denir ve $(M, +, \cdot)$ ile gösterilir.

M5) R birimli halka olmak üzere her $m \in M$ için $1_R \cdot m = m$;

şartını sağlayan M, sol R-modülüne, birimsel sol R-modül denir.

Benzer şekilde

$$\begin{array}{rcl} \circ : M \times R & \rightarrow & M \\ (m, r) & \mapsto & m \circ r \end{array}$$

ikili işlemi alınırsa sağ R-modül tanımlanır.

M, hem sağ hem de sol R-modül ise kısaca bir R-modül denir.

Teorem 2.2 M, bir (sol) R-modül olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

(i) $0_R \cdot m = 0_M$

(ii) $r \cdot 0_M = 0_M$

(iii) $(-r) \cdot m = -(rm) = r \cdot (-m)$

(iv) $k(r \cdot m) = r \cdot (km)$ $k \in \mathbb{Z}$

Bir modül elemanı ile bir halka elemanının çarpımı olan '$\cdot$' skaler çarpımı genelde ihmal edilir.

Modül aksiyomları, bir cisim üzerinde tanımlanan vektör uzayı aksiyomları ile aynıdır. F bir cisim olmak üzere V, F-modülüne F üzerinde bir vektör uzayı denir.

Örnek 2.1 Bir R halkasının ideali bir R-modüldür. Bu durumda skalerle çarpım işlemi R halkasındaki çarpma işlemidir. Özel olarak R ve $\{0\}$ birer R-modüldür.

Örnek 2.2 R bir halka ve $I \subseteq R$ bir ideal ise R/I bölüm halkası,

$$\begin{array}{ccc} R \times R/I & \longrightarrow & R/I \\ (r, s+I) & \longmapsto & rs+I \end{array}$$

şeklinde tanımlanan çarpım dönüşümüyle bir R-modüldür.

$$\begin{aligned} s+I &= s'+I \Rightarrow s-s' \in I \;\; (s, s' \in R) \\ r(s-s') &= rs - rs' \in I \;\; (r \in R,\, I \trianglelefteq R) \\ rs+I &= rs'+I \end{aligned}$$

olduğundan sol skalerle çarpım iyi tanımlıdır. Benzer şekilde sağ skalerle çarpım tanımlanabilir. Bu işlemlere göre modül aksiyomlarının sağlandığı kolayca gösterilir. O halde R/I, bir R-modüldür.

Örnek 2.3 S, bir halka ve R, S nin alt halkası olmak üzere S, bir R-modüldür. Skalerle çarpma işlemi halkadaki çarpma işlemidir.

Örneğin; $S = R[X]$ polinom halkası ve $R \subseteq R[X]$ alt halka (çünkü her $a \in R$ elemanı $a = a + 0x + \cdots + 0x^n \in R[X]$ olur.) olmak üzere $R[X]$, R-modüldür.

Ancak S bir R-modül ise R, S nin alt halkası olmak zorunda değildir. R/I; R-modül olmasına rağmen R, R/I bölüm halkasının alt halkası değildir.

Özel olarak; F, K cisminin alt cismi ise K, F üzerinde bir vektör uzayıdır.

Örnek 2.4 $\mathbb{C}$,

$$\begin{array}{cccc} \cdot : & \mathbb{R} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (r, x+iy) & \mapsto & r \cdot (x+iy) = rx + iry \end{array}$$

tanımlamasıyla bir $\mathbb{R}$-modül yapısı oluşturur.

Örnek 2.5 R bir değişmeli halka ise herhangi bir M sol R-modülü

$$\begin{array}{cccc} \circ : & M \times R & \longrightarrow & M \\ & (m,r) & \mapsto & m \circ r = r \cdot m \end{array}$$

şeklinde tanımlanan skaler çarpım ile bir sağ R-modül yapısı oluşturur.

"$\circ$" *işleminin tanımı ve M,sol R-modülünün **M1, M2, M3** aksiyomları gereğince M sağ R-modülünün ilgili aksiyomları sırasıyla sağlanır.* Ayrıca,

$$\begin{aligned} m \circ (rs) &= (rs) \cdot m && (\circ \text{ tanımından}) \\ &= (sr) \cdot m && (R \text{ değişmeli halka }) \\ &= s \cdot (r \cdot m) && (M\text{,sol } R\text{-modülünün } \mathbf{M4} \text{ aksiyomu gereğince }) \\ &= s \cdot (m \circ r) && (\circ \text{ tanımından}) \\ &= (m \circ r) \circ s && (\circ \text{ tanımından}) \end{aligned}$$

*eşitliğiyle **M4** aksiyomu sağlanır.*

Örnek 2.6 $(R, +, .)$ bir halka ve her $r, s \in R$ için $r * s = s.r$ olmak üzere $R^z = (R, +, *)$ zıt halkası tanımlansın. Bu durumda bir M, sol R-modülü aynı zamanda bir sağ R^z-modüldür.

$$\begin{array}{ccc} \circ : & M \times R^z \to & M \\ & (m,r) \mapsto & m \circ r = r \cdot m \end{array}$$

olmak üzere ***M4*** aksiyomu

$$\begin{aligned} m \circ (r * s) &= (r * s) \cdot m && (\circ \text{ tanımından}) \\ &= (s.r) \cdot m && (* \text{ tanımından}) \\ &= s \cdot (r \cdot m) && (M, \text{ sol } R\text{-modül olduğundan}) \\ &= s \cdot (m \circ r) && (\circ \text{ tanımından}) \\ &= (m \circ r) \circ s && (\circ \text{ tanımından}) \end{aligned}$$

şeklinde sağlanır.

Örnek 2.7 R bir halka, $\phi : (R, +) \longrightarrow (R, +)$, $r, s \in R$ için $\phi(rs) = \phi(s)\phi(r)$ şartını sağlayan grup homomorfizmi (zıt otomorfizma) olmak üzere herhangi bir M sol R-modül yapısı

$$\begin{array}{cccc} \circ : & M \times R & \longrightarrow & M \\ & (m,r) & \mapsto & m \circ r = \phi(r) \cdot m \end{array}$$

tanımlamasıyla aynı zamanda bir sağ R-modül yapısı oluşturur.

M4 aksiyomu,

$$\begin{aligned}
(m \circ r) \circ r' &= \phi(r') \cdot (m \circ r) && (\circ \text{ tanımından}) \\
&= \phi(r') \cdot (\phi(r) \cdot m) && (\circ \text{ tanımından}) \\
&= (\phi(r')\phi(r)) \cdot m && (M \text{ sol } R\text{-modül}) \\
&= \phi(rr') \cdot m && (\phi \text{ tanımından}) \\
&= m \circ (rr') && (\circ \text{ tanımından})
\end{aligned}$$

şeklinde sağlanır. Bu durumun bir örneği, G bir grup, R birimli bir halka olmak üzere $R(G)$ grup halkası için geçerlidir.

$$R(G) = \{f \mid f : G \to R, \text{sonlu sayıda } a \in G \text{ için } f(a) \neq 0\}$$

halkasındaki işlemler;

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a)$$
$$(f \cdot g)(a) = \sum_{b \in G} f(b)\, g\left(b^{-1}a\right)$$

şeklindedir. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
\phi \;:\; R(G) &\longrightarrow R(G) \\
\sum_{g \in G} a_g g &\longmapsto \sum_{g \in G} a_g g^{-1}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. ϕ*, bir zıt otomorfizmadır. Böylece herhangi bir* M *sol* $R(G)$*-modül, sağ* $R(G)$*-modül yapısı oluşturur.*

Örnek 2.8 $(G, +)$ Abel grup, $n \in \mathbb{Z}$ ve $g \in G$ olsun.

$$\begin{aligned}
\cdot : \mathbb{Z} \times G &\longrightarrow G \\
(n, g) &\longmapsto n \cdot g = \begin{cases} \underbrace{g + \cdots + g}_{n\ tane} & n > 0 \text{ } ise \\ 0_G & n = 0 \text{ } ise \\ \underbrace{(-g) + \cdots + (-g)}_{|n| \text{ tane}} & n < 0 \text{ } ise \end{cases}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan skaler çarpım ile G *bir* $\mathbb{Z}$*-modüldür.*

Böylece Abelyen grup kavramı, $\mathbb{Z}$-modül kavramı ile örtüşür.

Örnek 2.9 R, bir halka ve A, Abelyen grup olmak üzere,

$$\begin{aligned}
R \times A &\longrightarrow A \\
(r, a) &\longmapsto r \cdot a = 0
\end{aligned}$$

işlemiyle birlikte A, Abelyen grubu bir R-modüldür. Böylece her Abelyen grup R-modül yapısı olarak alınabilir.

Örnek 2.10 R herhangi bir halka olsun. Bu durumda $a, b_1, \ldots, b_n \in R$ olmak üzere R^n, $a(b_1, \ldots, b_n) = (ab_1, \ldots, ab_n)$ ve $(b_1, \ldots, b_n)a = (b_1 a, \ldots, b_n a)$ skaler çarpımları ile hem sol hem de sağ R-modüldür.

Örnek 2.11 R herhangi bir halka olmak üzere $M_{m,n}(R)$ matrisler kümesi, matrislerin sağ ve sol skalerle çarpımı yani, $A \in M_{m,n}(R)$, $a \in R$ için $ent_{i,j}(aA) = aent_{i,j}(A)$ ve $ent_{i,j}(Aa) = (ent_{i,j}(A))a$ *çarpımı ile hem sol hem de sağ R-modüldür.*

Ayrıca, yukarıdaki örneğin bir genelleştirilmesi olarak,

$$\begin{array}{ccc} M_m(R) \times M_{m,n}(R) & \longrightarrow & M_{m,n}(R) \\ (A, B) & \longmapsto & AB \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} M_{m,n}(R) \times M_n(R) & \longrightarrow & M_{m,n}(R) \\ (A, B) & \longmapsto & AB \end{array}$$

şeklinde tanımlanan matris çarpımı dönüşümleri ile $M_{m,n}(R)$ bir sol $M_m(R)$-modül ve bir sağ $M_n(R)$-modül oluşturur.

Örnek 2.12 R ve S değişmeli halka, $f : R \to S$ halka homomorfizmi ve G, S-modül olsun. Bu durumda, G, f homomorfizmi yardımıyla bir R-modül olarak gözönüne alınır.

$$\begin{array}{ccl} R \times G & \longrightarrow & G \\ (r, g) & \longmapsto & r \cdot g = f(r) \circ g \end{array}$$

şeklinde tanımlanan çarpımla birlikte G bir R-modül yapısı oluşturur. ***M3*** aksiyomu

$$\begin{array}{rcll} (r_1 + r_2) \cdot g & = & f(r_1 + r_2) \circ g & (\cdot \text{ tanımından}) \\ & = & [f(r_1) + f(r_2)] \circ g & (f \text{ halka homomorfizması}) \\ & = & [f(r_1) \circ g] + [f(r_2) \circ g] & (G,\ S\text{-modül olduğundan}) \\ & = & r_1 \cdot g + r_2 \cdot g & (\cdot \text{ tanımından}) \end{array}$$

eşitliğiyle sağlanır. Diğer modül aksiyomlarının da sağlandığı kolayca görülebilir.

Örnek 2.13 A bir Abelyen grup olmak üzere;

R =End $A = \{f \mid f : A \to A, \text{ homomorfizm}\}$ kümesi üzerinde her $a \in A$ için

$$
\begin{aligned}
(f+g)(a) &= f(a)+g(a) \\
(f \circ g)(a) &= f(g(a))
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlanan işlemlerle endomorfizm halkası $(EndA, +, \circ)$ *oluşturulur. Bu durumda,*

$$
\begin{aligned}
End(A) \times A &\longrightarrow A \\
(f, a) &\longmapsto f \cdot a = f(a)
\end{aligned}
$$

işlemine göre A Abel grubu bir sol End(A)-modüldür. ***M4*** *aksiyomu*

$$
\begin{aligned}
(f_1 \circ f_2) \cdot a &= (f_1 \circ f_2)(a) && (\cdot \text{ tanımından}) \\
&= f_1(f_2(a)) && (EndA \text{ halkasında} \circ \text{ işleminden}) \\
&= f_1 \cdot (f_2(a)) && (f_2(a) \in A, \ \cdot \text{ tanımından}) \\
&= f_1 \cdot (f_2 \cdot a) && (\cdot \text{ tanımından})
\end{aligned}
$$

şeklinde sağlanır.

Örnek 2.14 R bir değişmeli halka, M bir R-modül ve $S \subset End_R(M)$ bir alt halka olsun. Bu durumda $(f, m) \longmapsto f(m)$ şeklinde tanımlanan $S \times M \longrightarrow M$ dönüşümü ile M bir S-modüldür.

Örnek 2.15 R, birimli bir halka, M Abelyen grup olmak üzere, M nin birimsel R-modül olması için gerek ve yeter şart, birimi koruyan yani $f(1_R) = Id_M$ *şartını sağlayan* $f : R \longrightarrow End(M)$ *halka homomorfizminin olmasıdır.*

R,birimli bir halka ve $f : R \longrightarrow End(M)$, $f(1_R) = Id_M$ *şartını sağlayan bir halka homomorfizmi ise,*

$$
\begin{aligned}
R \times M &\longrightarrow M \\
(r, m) &\longmapsto r \cdot m = [f(r)](m)
\end{aligned}
$$

işlemiyle M, *birimsel bir sol* R*-modül olur. Tersine* M, *birimsel bir sol* R*-modül olmak üzere*

$$
\begin{aligned}
f : \ R &\longrightarrow End(M) \\
r &\longmapsto f_r
\end{aligned}
$$

fonksiyonu birimi koruyan halka homomorfizmasıdır. Burada $f_r : M \longrightarrow M$, $f_r(m) = r \cdot m$ şeklindedir.

$$\begin{aligned} f_r(m_1 + m_2) &= r \cdot (m_1 + m_2) \\ &= r \cdot m_1 + r \cdot m_2 \\ &= f_r(m_1) + f_r(m_2) \end{aligned}$$

olduğundan $f_r \in End(M)$ dir. *Ayrıca her* $m \in M$, $r_1, r_2 \in R$ için

$$f(r_1+r_2)(m) = f_{(r_1+r_2)}(m) = (r_1+r_2)\cdot m = r_1\cdot m + r_2\cdot m = f_{r_1}(m) + f_{r_2}(m) = f(r_1)(m) + f(r_2)(m)$$

$$f(r_1 r_2)(m) = f_{(r_1 r_2)}(m) = (r_1 r_2) \cdot m = r_1 \cdot (r_2 \cdot m) = f_{r_1}(f_{r_2}(m)) = (f(r_1)f(r_2))\,(m)$$

sağlandığından f halka homomorfizmasıdır.

$$f(1_R)(m) = f_{1_R}(m) = 1_R \cdot m = m = Id(m)$$

olduğundan f birimi korur.

Örnek 2.16 R, birimli bir halka olmak üzere, $R^{\mathbb{N}} = \{f \mid f : \mathbb{N} \to R\}$ *kümesi,* $(f+g)(n) = f(n) + g(n)$ *işlemiyle bir Abel grup oluşturur.*

$$\begin{array}{ccc} R \times R^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & R^{\mathbb{N}} \\ (r, f) & \longmapsto & \begin{array}{lll} r \cdot f : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & (rf)(n) = rf(n) \end{array} \end{array}$$

tanımlamasıyla R^N *bir* R*-modül olur. Ayrıca her* $m \in M$,

2.2 Alt Modüller

Tanım 2.3 M, R-modül ve $N \subseteq M$ olmak üzere, M üzerindeki işlemlere göre N, R-modül ise N ye M nin **alt modülü** (R-**alt modülü**) denir.

M nin alt modülü, özel olarak bir alt grubudur. Böylece $0_M \in N$ olur. Bununla birlikte M ve $\{0_M\}$, alt modüllerdir.

R değişmeli bir halka olmak üzere R halkasının idealleri R, R-modülünün R-alt modülleridir.

G Abelyen grup olmak üzere G nin Z-altmodülleri G nin alt gruplarıdır.

F bir cisim ve V de F üzerinde bir vektör uzayı ise, V nin bir lineer alt uzayı V nin bir F-alt modülüdür.

Teorem 2.4 (Altmodül Kriteri) R birimli, değişmeli halka, M, birimsel R-modül ve $N \subseteq M$ olsun. N'in, M nin alt modülü olması için gerek ve yeter şart

$$N \neq \emptyset \qquad ve \qquad n, n' \in N,\ r \in R \text{ için } n' + r \cdot n \in N$$

şartlarının sağlanmasıdır.

Örnek 2.17 $\Delta = \{(s, s) \mid s \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-modülünün alt modülüdür.

(i) $(1, 1) \in \Delta$ olup $\Delta \neq \emptyset$ dir.

(ii) $(s, s), (t, t) \in \Delta, r \in \mathbb{R}$ için

$(s, s) + r \cdot (t, t) = (s, s) + (rt, rt) = (s + rt, s + rt) \in \Delta$ *olur.*

Örnek 2.18 $(M_i)_{i \in I}, M$ nin R-alt modüllerin ailesi ise, $\bigcap_{i \in I} M_i$ kümesi M nin bir alt modülüdür.

Her $i \in I$ için $0_M \in M_i$ olduğundan $\bigcap_{i \in I} M_i \neq \emptyset$ olur. $x, y \in \bigcap_{i \in I} M_i$ ise her $i \in I$ için $x, y \in M_i$ dir. Herbir M_i, M nin alt modülü olduğundan, $r \in R$ için $x + r \cdot y \in M_i$ olup $x + r \cdot y \in \bigcap_{i \in I} M_i$ sağlanır.

2.3 Üreteçli Modüller

M, R-modülünün, altmodülü olmayan bir alt kümesi için, bu kümeyi içeren en küçük alt modülü üretilebilir.

Tanım 2.5 M, R-modül, $S \subseteq M$ ise M nin S yi içeren bütün alt modüllerinin arakesitine, *M nin S tarafından üretilen alt modülü denir ve $\langle S \rangle$ ile gösterilir.* Böylece $\langle S \rangle$, M nin S yi içeren altmodülüdür ve M nin S yi içeren tüm alt modüllerinin kapsamındadır, yani $\langle S \rangle$, M nin S yi içeren en küçük alt modülüdür.

S sonlu ise $M = \langle S \rangle$ modülüne sonlu üreteçli modül denir. $M = \langle m \rangle$ ise M devirli modül olarak adlandırılır.

Teorem 2.6 M bir R-modül ve $S \subseteq M$, $\{B_i \mid i \in I\}$ kümesi M nın alt modüllerinin ailesi, $m \in M$, $Rm = \{rm \mid r \in R\}$ olsun.

(i) Rm, M nin alt modülüdür.

(ii) $\langle m \rangle = \{rm + nm \mid r \in R, n \in \mathbb{Z}\}$ *olur.*

Özel olarak R birimli ve M birimsel ise

$$nm = \underbrace{m + \cdots + m}_{n\text{-tane}} = 1_R \cdot m + \cdots + 1_R \cdot m = (1_R + \cdots + 1_R) \cdot m = \underbrace{(n1_R)}_{\in R} \cdot m$$

olduğundan $\langle m \rangle = Rm$ *olur.*

(iii) $\langle S \rangle = \{\sum\limits_{i=1}^{s} r_i m_i + \sum\limits_{j=1}^{t} n_j b_j \mid m_i, b_j \in S, s, t \in \mathbb{N}^*, r_i \in R, n_j \in \mathbb{Z}\}$ dir.

(iv) $S = \emptyset$ *ise,* $\langle S \rangle = \{0\}$ *olur.* R birimli ve M birimsel ise,

$$\langle S \rangle = RS = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i m_i \mid n \in \mathbb{N},\ r_1, \ldots, r_n \in R,\ m_1, \ldots, m_n \in S \right\}$$

şeklinde ifade edilir. Özel olarak $\langle M \rangle = M$ olur.

Tanım 2.7 *M modülünün üreteçlerinin minimum sayısına M modülünün* rankı *denir ve $\mu(M)$ ile gösterilir. M sonlu üreteçli değil ise $\mu(M) = \infty$ olarak ifade edilir.*

(i) Teorem 2.6 gereğince $\mu(\{0\}) = 0$ olur. $M \neq \{0\}$ grubunun devirli olması için gerek ve yeter şart$\mu(M) = 1$ olmasıdır.

(ii) Devirli R-modül kavramı devirli grup kavramının bir genelleştirilmesidir. Yani bir G abelyen grubunun devirli olması için gerek ve yeter şart, devirli Z-modül olmasıdır.

(iii) Eğer R, temel ideal bölgesi ise, R nin herhangi bir M, R -altmodülü bir idealdir. Dolayısıyla $\mu(M) = 1$ olur.

Eğer M bir sonlu üreteçli R-modül ve N herhangi bir altmodül ise M/N nin sonlu üreteçli olduğu açıktır. $\mu(M/N) \leq \mu(M)$ olur.

Örnek 2.19 $\langle (2,0), (3,0) \rangle = \mathbb{Z} \times \{0\}$, $\langle (1,0), (0,1) \rangle = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ve $\langle (2,2) \rangle = \{n(2,2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ *kümeleri* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$-modülünün üreteçli alt modüllerinden bazılarıdır.

R halkasının bir ideali, M R-modülünün bir alt modülü ve bir alt kümesi yardımıyla elde edilebilir. Benzer şekilde M R-modülünün bir alt modülü ve R nin bir ideali ile M nin bir başka alt modülü elde edilebilir. Özel olarak M nin $\{0\}$ alt modülüyle sıfırlayıcı kavramı tanımlanır.

Tanım 2.8 R değişmeli halka ve M, R-modül, G, M nin alt modülü ve $\emptyset \neq J \subseteq M$ olsun. R nin bir ideali olan

$$\{r \in R \mid r.j \in G, \forall j \in J\}$$

kümesi $(G : J)$ ile gösterilir. *Ayrıca M nin J tarafından üretilen bir N altmodülü için*

$$(G : J) = (G : N)$$

olur. Özel olarak $G = 0$ alınırsa

$$(0 : J) = \{r \in R \mid r.j = 0, \forall j \in J\}$$

*idealine J nin sıfırlayıcısı (annihilatör*ü*) denir ve $Ann(J)$ ile gösterilir.*

Eğer R değişmeli ve $J = \langle j \rangle$, M nin bir devirli altmodülü ise

$$Ann(J) = \{a \in R \mid aj = 0\}$$

olur.

Bu durum R değişmeli değil ise doğru değildir. $R = M_n(R) = M$ ve $x = E_{11}$, 11 pozisyonunda 1, diğer durumlarda 0 olacak biçimde bir matris olsun. Kolayca görülebileceği üzere, $Ann(\langle E_{11} \rangle) = \langle 0 \rangle$ iken $Ann(E_{11})$ kümesi birinci sütunu 0 olan tüm matrislerin kümesidir.

Eğer R değişmeli ve J , j üretecine sahip devirli altmodül ise $Ann(\langle j \rangle)$ yerine $Ann(j)$ gösterimi kullanılır. Bu durumda $Ann(j)$ idealine genellikle j nin "*mertebe*" ideali denir. Bu adlandırmanın nedenini açıklamak için bir G abel grubu ve $g \in G$ alalım. Bu durumda G bir Z-modüldür. $\circ(g) < \infty$ ise $p = \circ(g)$ ve $\langle g \rangle$ sonsuz devirli ise $p = 0$ olmak üzere

$$Ann(g) = \{n \in \mathbb{Z} \mid ng = 0\} = \langle p \rangle$$

olur.

Önerme 2.9 I, R birimli değişmeli halkasının ideali olmak üzere,

$$I = Ann(R/I) = (0 : 1 + I)$$

olur.

İspat

$$Ann(R/I) = \left\{r' \in R \mid r' \cdot (r + I) = r'r + I = 0_{R/I} = 0 + I,\ \textit{her}\ r + I \in R/I\ \right\}$$

$i \in I \subseteq R,\ i \cdot (r + I) = \underbrace{ir}_{i \in I \trianglelefteq R} + I = 0 + I = 0_{R/I}$

olduğundan $i \in Ann(R/I)$ *olup* $I \subseteq Ann(R/I)$ *kapsaması sağlanır.*

$r' \in Ann(R/I)$ *ise,* $r' \cdot (r + I) = r'r + I = 0 + I$ ve $r'r \in I$ *olur. Buradan* $r' \in I$ *elde edilir. Böylece* $Ann(R/I) \subseteq I$ *olduğu görülür.*

$i \in I$ için

$$i \cdot (1 + I) = i + I = 0 + I = 0_{R/I}$$

olup $i \in (0 : 1 + I)$ bulunur.

Tersine $r \in (0 : 1 + I)$ için

$$r \cdot (1 + I) = r + I = 0 + I$$

olup $r \in I$ elde edilir. Böylece $I = (0 : 1 + I)$ elde edilir.

2.4 Alt Modül Toplamı

Tanım 2.10 *R değişmeli halka, M R-modül olsun.* $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, M$ *nin alt modüllerinin ailesi olmak üzere, M nin* $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ *kümesi tarafından üretilen alt modülüne* $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *ailesinin toplamı denir ve* $\sum_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda = < \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda >$ *şeklinde gösterilir.*

$(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, M R-modülünün alt modüllerinin ailesi olmak üzere $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, genelde bir alt modül değildir.

Örnek 2.20 *R değişmeli halka, M R-modül olsun.*

(i) M nin alt modüllerinin kümesi üzerinde tanımlanan alt modül toplamı ikili işlemi değişmeli ve birleşmelidir.

(ii) M nin $G_1, \ldots, G_n$ alt modüllerinin toplamı;

$$G_1 + \cdots + G_n = \sum_{i=1}^{n} G_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} g_i \mid g_i \in G_i, i = 1, \ldots, n \right\}$$

şeklindedir.

(iii) $j_1, \ldots, j_n \in M$ ise $\langle j_1, \ldots, j_n \rangle = Rj_1 + \ldots + Rj_n$ olur.

Tanım 2.11 R değişmeli halka, M R-modül, I, I', R nin idealleri olsun. M nin

$$\{rg \mid r \in I,\ g \in M\}$$

kümesi tarafından üretilen alt modülü

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i g_i \mid n \in N,\ r_1, \ldots, r_n \in I,\ g_1, \ldots, g_n \in M \right\}$$

şeklinde tanımlanır ve IM ile gösterilir. Bu ideallerin çarpımı konusunun bir genelleştirilmesidir. Ayrıca,

$$I(I^{'}M) = (II')M$$

eşitliğinin geçerliliği de görülebilir.

2.5 Halkaların Değişimi

M; R değişmeli halkası üzerinde bir modül ve I, $I \subseteq$Ann(M) şartını sağlayan R nin bir ideali olmak üzere M, R/I üzerinde bir modül yapısı oluşturur.

$$\begin{array}{rcl} R/I \times M & \longrightarrow & M \\ (r+I, m) & \longmapsto & r.m \end{array}$$

fonksiyonu iyi tanımlıdır.

$m \in M$, $r, r' \in R$ ve $r + I = r' + I$ olsun. Bu durumda

$$r - r' \in I \subseteq \text{Ann}(M) = \{r'' \in R \mid r''.m = 0, \forall m \in M\}$$

olup $(r - r').m = 0$ ve $r.m = r'.m$ olur. Dolayısıyla fonksiyonun iyi tanımlılığı sağlanır. Modül aksiyomlarının da sağlandığı kolayca görülebilir. Böylece M, R-modülü R/I modülüne dönüşmüş olur. M üzerinde R-modül ve R/I-modül yapıları $\forall r \in R$, $\forall m \in M$ için $(r + I).m = r.m$ bağlantısıyla ilişkilendirilir. Buradan M nin bir alt kümesinin, R-alt modül olması için gerek ve yeter şartın R/I-alt modül olması olduğu söylenebilir.

Önerme 2.12 M, R değişmeli halkası üzerinde bir modül, N, N', G, M *nin alt modülleri,* $(G_i)_{i\in I}$ ve $(N_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$,M *nin alt modül ailesi olsun. Bu durumda*

(i) $(\bigcap\limits_{i\in I} G_i : N) = \bigcap\limits_{i\in I}(G_i : N)$

(ii) $(G : \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda) = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}(G : N_\lambda)$

(iii) $Ann\,(N + N') = Ann\,(N) \bigcap Ann\,(N')$

eşitlikleri mevcuttur.

İspat (i) $r \in (\bigcap\limits_{i\in I} G_i : N)$ ise $\forall n \in N, \forall i \in I$ için $r \in R$ ve $r \cdot n \in \bigcap\limits_{i\in I} G_i$ olup $\forall i \in I$ için $r \cdot n \in G_i$ ve $r \in (G_i : N)$ bulunur. Böylece, $\forall i \in I$ için $r \in \bigcap\limits_{i\in I}(G_i : N)$ olur.

Tersine, $r \in \bigcap\limits_{i\in I}(G_i : N)$ ise $\forall i \in I$ *için*

$$r \in (G_i : N), r \cdot n \in G_i \Rightarrow r \cdot n \in \bigcap_{i \in I} G_i \Rightarrow r \in (\bigcap_{i \in I} G_i : N)$$

o*lur.*

(ii) $r \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(G : N_\lambda)$ *olsun.* $r \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(G : N_\lambda)$ *ise* $\forall\lambda \in \Lambda$ *için* $rN_\lambda \subset G$ olur. Buradan $r\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda\right) \subseteq G$ *kapsaması ile* $r \in (G : \sum_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda)$ *elde edilir. Böylece*

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(G : N_\lambda) \subseteq (G : \sum_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda)$$

s*ağlanır. Diğer kapsama benzer şekilde gösterilebilir.*

(iii) (ii) nin özel halidir

Tanım 2.13 M, R değişmeli halkası üzerinde bir modül G, M nin alt modülü, $I \trianglelefteq R$ olsun. Bu durumda $G \subseteq (G :_M I)$ olup, $(G :_M I)$, M nin alt modülüdür ve

$(G :_M I) = \{m \in M \mid r.m \in G,$ *her* $r \in I\}$ *şeklinde tanımlanır.*

Özel olarak $G = 0$ *alınırsa,*

$$(0 :_M I) = \{m \in M \mid r.m = 0, \ \textit{her } r \in I\}$$

elde edilir ve bu kümeye M *içinde* I *idealinin sıfırlayıcısı (veya annihilatörü) denir ve* $Ann(_M I)$ ile gösterilir.

Örnek 2.21 M; R değişmeli halkası üzerinde bir modül, G, M *nin alt modülü,* $(G_i)_{i\in I}$, M *nin alt modüllerinin bir ailesi,* $I, J \trianglelefteq R$ *ve* $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ R *nin ideallerinin bir ailesi olsun. Bu durumda;*

(i) $((G :_M J) :_M K) = (G :_M JK) = ((G :_M K) :_M J)$

(ii) $(\bigcap_{i\in I} G_i :_M I) = \bigcap_{i\in I}(G_i :_M I)$

(iii) $(G :_M \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(G :_M I_\lambda)$

eşitlikleri mevcuttur.

2.6 Bölüm Modülleri

Teorem 2.14 M, R-modül ve A, M nin altmodülü olsun. $M/A = \{x + A \mid x \in M\}$ kümesi;

$$(x + A) + (y + A) = (x + y) + A \text{ ve } r(x + A) = rx + A$$

işlemleriyle birlikte bir R-modüldür.

Tanım 2.15 M, R-modül ve A, M nin alt modülü olmak üzere Teorem 2.13 de belirtilen M/A R-modülüne bölüm modülü denir.

Örnek 2.22

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{3\mathbb{Z}, 1+3\mathbb{Z}, 2+3\mathbb{Z}\}$$

kümesi bir bölüm modülüdür.

Örnek 2.23 M, R-modül ve $I \trianglelefteq R$ olmak üzere $N = M/IM$ bir bölüm modülüdür. $i \in I$ için,

$$i.(m+IM) = im+IM = IM \text{ ve } \{r \in R \mid r.(m+IM) = rm+IM = IM,\ m+IM \in M/IM\}$$

olduğundan $I \subseteq \mathrm{Ann}(N)$ sağlanır. Böylece halkaların değişiminden M/IM bir (R/I)-modül olur.

2.7 Hom ve Dual Uzaylar

Tanım 2.16 R bir halka ve M ile M' R-modül olsun. Eğer $f : M \longrightarrow M'$ fonksiyonu, $m_1, m_2, m \in M$ ve $r \in R$ için

$$f(m_1+m_2) = f(m_1)+f(m_2) \qquad ve \qquad f(rm) = rf(m)$$

aksiyomlarını sağlıyor ise f ye bir R-modül homomorfizmi denir. Tüm R-modül homomorfizmlerinin kümesi $Hom_R(M, M')$ ile gösterilir. Bire-bir ve örten R-modül homomorfizmine izomorfizm denir. $M = M'$ olması durumunda $Hom_R(M, M)$ yerine genelde $End_R(M)$ yazılır ve elemanlarına endomorfizm denir. Eğer $f \in End_R(M)$ fonksiyonunun tersi varsa, f ye M nin otomorfizmi denir. M nin tüm R-modül otomorfizimlerinin grubu $Aut_R(M)$ ile gösterilir.

M ve N, R-modül ise,

$$(f+g)(m) = f(m)+g(m)$$

şeklinde tanımlanan "+" işlemi ile birlikte $Hom_R(M, N)$ bir abel gruptur. R değişmeli halka olmak üzere,

$$\begin{array}{ccc} R \times Hom_R(M,N) & \longrightarrow & Hom_R(M,N) \\ (r,f) & \longmapsto & r \cdot f : \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & N \\ m & \longmapsto & (r \cdot f)(m) = r \cdot (f(m)) \end{array} \end{array}$$

şeklinde tanımlanan $r \cdot f$ *işlemi ile* $Hom_R(M,N)$ *bir* R*-modül yapısı oluşturur.* $r \cdot f \in Hom(M,N)$ olması için gerekli olan

$$(r \cdot f)(r'm) = r \cdot (f(r'm)) = r(r' \cdot (f(m))) = (rr') \cdot f(m) = r'\,(r \cdot (f(m))$$

eşitliği R *nin değişmeli olması ile mümkündür. O halde* R *bir değişmeli halka ise,* $Hom_R(M,N)$ *bir* R*-modül, aksi halde sadece bir abel gruptur.*

Örnek 2.24 *Eğer* V *ve* W*,* F *üzerinde vektör uzayları ise* V *den* W *ye bir lineer dönüşüm,* V *den* W *ye bir* F*-modül homomorfizmidir.*

Örnek 2.25 İzomorfik R-modüller eşit sıfırlayıcılara sahiptir.

M ve M' izomorfik R-modüller olduğundan $f : M \to M'$ R modül izomorfizmi ve $r \in Ann(M)$ olmak üzere her $m' \in M'$ için $f(m) = m'$ olacak şekilde $m \in M$ vardır. $r.m' = r.f(m) = f(rm) = f(0_M) = 0_{M'}$ olduğundan $r \in Ann(M')$ olup, $Ann(M) \subseteq Ann(M')$ sağlanır. Tersine kapsama benzer olarak gösterilir.

Eğer $f \in Hom_R(M,M')$ *ise* f*, abel grup homomorfizmi biçiminde düşünülerek,* f *nin çekirdeği ve görüntüsü tanımlanabilir.*

Tanım 2.17 $f : M \to M'$, modül homomorfizmi ise

$$\text{Çek}f = \{x \in M \mid f(x) = 0_{M'}\} \text{ ve } f(M) = \{f(m) \mid m \in M\}$$

kümelerine sırasıyla f nin **çekirdeği** ve **görüntü** kümesi denir. Bu kümeler sırasıyla M ve M' nün alt modülleridir.

Teorem 2.18 $f : M \to M'$ modül homomorfizm olmak üzere;

(i) N, M nin alt modülü ise $f(N)$, M' modülünün alt modülüdür.

(ii) N', M'nin alt modülü ise $f^{-1}(N'), M$ modülünün alt modülüdür.

Teorem 2.19 (Birinci İzomorfizm Teoremi) $f : M \to M^{'}$, R-modül homomorfizmi ise

$$M/\text{Çek}f \cong f(M)$$

dir.

Teorem 2.20 (İkinci İzomorfizm Teoremi) M bir R-modül ve N ile P ise altmodüller olsun. Bu durumda $(N+P)/P \cong N(N \cap P)$ olacak biçimde bir R-modül homomorfizmi vardır.

İspat $\pi : M \longrightarrow M/P$ doğal izdüşüm dönüşümü ve π_0 ise π nin N ye kısıtlanışı olsun. Bu durumda π_0 bir R-modül homomorfizmi ve Çek$(\pi_0) = N \cap P$ ve $Im(\pi_0) = (N+P)/P$ dir. Böylece sonuç birinci izomorfizm teoreminden elde edilir.

Teorem 2.21 (Üçüncü İzomorfizm Teoremi) M bir R-modül ve N ile P ise $P \subseteq N$ olacak biçimde M nin altmodülleri olsun. Bu durumda

$$M/N \cong (M/P)/(N/P)$$

olur.

İspat

$$\begin{array}{rcl} f : M/P & \longrightarrow & M/N \\ m+P & \longmapsto & m+N \end{array}$$

Dönüşümü iyi tanımlı, örten bir R-modül homomorfizmidir ve

$$\text{Çek}(f) = \{m+P : m+N = N\} = \{m+P : m+N\} = N/P$$

olur. Böylece istenen sonuç birinci izomorfizm teoreminden elde edilir.

Önerme 2.22 R birimli bir halka ve $M = \langle m \rangle$ ise bir birimsel devirli R-modül olsun. Bu durumda $M \cong R/\text{Ann}(m)$ dir.

İspat $f(a) = a \cdot m$ biçiminde tanımlanan $f : R \longrightarrow M$ fonksiyonu bir örten R-modül homomorfizmidir ve Çek$(f) = Ann(m)$ dir. Sonu ç birinci izomorfizm teoreminden elde edilir.

Sonuç 2.23 Eğer F bir cisim ve M ise sıfırdan farklı bir devirli F-modül ise $M \cong F$ dir.

İspat $m \neq 0$ elemanı M nin bir üreteci olmak üzere bir cisim sadece $\{0\}$ ve F ideallerine sahip olduğundan ve $1 \cdot m = m \neq 0$ olduğundan $Ann(m) \neq F$ olur. $Ann(m) = \{0\}$ olmalıdır. Buradan $M \cong F$ bulunur.

Örnek 2.26 M bir R-modül olmak üzere, $Hom_R(R, M) \cong M$ dir.

$$\begin{array}{rcc} F : Hom_R(R,M) & \longrightarrow & M \\ f & \longmapsto & F(f) = f(1) \end{array}$$

$r \in R,\ f, g \in Hom_R(R, M)$ için

$F(f+g) = (f+g)(1) = f(1) + g(1) = F(f) + G(g)$ ve

$F\,(rf) = (rf)\,(1) = r(f(1)) = r\,(F(f))$

olduğundan F, R-modül homomorfizmasıdır.

$$\begin{array}{rcl} f : R & \longrightarrow & M \\ r & \longmapsto & rx \end{array}$$

$f \in Hom_R(R, M)$ olup $F(f) = f(1) = x$ olacak şekilde $x \in M$ vardır. Yani F örtendir. $f \in$Çek$F$ ise $F(f) = f(1) = 0_M$ olur. $\forall r \in R$ için

$$f\,(r) = rf(1) = r.0_M = 0_M$$

ise $f = 0$ bulunur. Buradan Çek$F = \{0\}$ olup F birebirdir. Böylece

$$Hom_R(R, M) \cong M$$

dir Ayrıca M, $\mathbb{Z}$-modül ise $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, M) \cong M$ olur.

Özel olarak, G abel grubu bir $\mathbb{Z}$-modül olduğundan $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, G) \cong G$ olur.

Önerme 2.24 M, devirli birimsel R-modül, $I =$Ann(M) olmak üzere

$$Hom_R(R/I, R) \cong (0 : I)$$

olur.

İspat M, devirli birimsel R-modül olmak üzere $I =$Ann(M) için $M \cong R/I$ olur. Buradan, $Hom_R(M, R) \cong Hom_R(R/I, R)$ olur. Ayrıca $x \in I$ için

$$Hom_R(R/I, R) \cong (0 : I)$$

ifadesi geçerlidir.

$$\begin{array}{rcl} F : Hom_R(R/I, R) & \longrightarrow & (0 : I) \\ f & \longmapsto & F(f) = f(1 + I) \end{array}$$

dir. $xf(1 + I) = f(x + I) = f(0_{R/I}) = 0$ olur. $x \in (0 : I)$ ise $R \to R$, $1 \longmapsto x$ fonksiyonu yardımıyla izomorfizm teoreminden $R/\,(0 : x) \to R$ içine dönüşümü elde edilir. $I \subseteq (0 : x)$ olduğundan $R/I \to R/\,(0 : x)$ örten dönüşümdür. Böylece

$$R/I \to R/\,(0 : x) \to R$$

bileşke fonksiyonu elde edilir. Böylece $Hom_R(R/I, R) \cong (0 : I)$ elde edilir.

Teorem 2.25 M, Noetherian R-modül olmak üzere $R/\text{Ann}M$ Noetherian halkadır.

İspat M, Noetherian R-modülünün her alt modülü sonlu üretildiğinden $\text{Ann}M = \bigcap\limits_{i\in I} \text{ann}m_i$ ifadesi geçerlidir.

$$\begin{array}{rccc} f: & R/\text{ann}m_i & \longrightarrow & M \\ & x + \text{ann}m_i & \longmapsto & xm_i \end{array}$$

şeklinde tanımlı f birebirdir. Buradan her bir $R/\text{ann}m_i$ deki ideallerin artan zinciri M deki modüllerin artan zincirine karşılık gelir. Varsayım gereğince M, Noetherian olduğundan $R/\text{ann}m_i$ de Noetheriandır. Dolayısıyla

$$R/AnnM = R/\bigcap_{i\in I} annm_i$$

Noetheriandır.

Tanım 2.26 M bir R-modül ve bir halka olmak üzere her $r \in R$, $m_1, m_2 \in M$ için

$$r \cdot (m_1 m_2) = (r \cdot m_1)m_2 = m_1(r \cdot m_2)$$

eşitliği sağlanıyorsa M ye R-cebir denir.

Örnek 2.27 Her halka bir $\mathbb{Z}$-cebirdir. $(R, +, .)$ halkası Abel grup olup her $n \in \mathbb{Z}$, $r_1, r_2 \in R$ için

$$n(r_1 r_2) = (nr_1)r_2 = r_1(nr_2)$$

eşitliği sağlanır.

Örnek 2.28 R bir değişmeli halka ise, R bir R-cebirdir. $(R, +, .)$ halkası Abel grup olup her $r_1, r_2, r_3 \in R$ için

$$r_1(r_2r_3) = (r_1r_2)r_3 = (r_2r_1)r_3 = r_2(r_1r_3)$$

eşitliği sağlanır.

Örnek 2.29 $Im(\phi) \subseteq C(S) = \{a \in S : ab = ba, b \in S\}$ olacak biçimde bir $\phi : R \longrightarrow S$ halka homomorfizmi olsun. Eğer M bir S-modül ise, $r \in R$ ve $m \in M$ için

$$\begin{array}{rcl} R \times M & \longrightarrow & M \\ (r, m) & \longmapsto & r \cdot m = (\phi(r)) \circ m \end{array}$$

şeklinde tanımlanan skaler çarpım ile birlikte M bir R-modüldür. Buradan S bir S-modül olduğundan, S bir R-modüldür.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} r.(s_1s_2) &= \phi(r)(s_1s_2) \\ &= (\phi(r)s_1)s_2 \\ &= (s_1\phi(r))s_2 \\ &= s_1(\phi(r)s_2) \end{aligned}$$

olduğundan S bir R-cebirdir.

Örnek 2.30 R bir değişmeli halka ise, $R[X]$ polinom halkası ve $M_n(R)$ matris halkası birer R-cebirdir.

Örnek 2.31 $T \in End_R(M)$ $\phi(X) = T$ ve $a \in R$ için $\phi(a) = a1_M$ olacak şekilde bir $\phi : R[X] \longrightarrow End_R(M)$ halka homomorfizmi tanımlansın.

$$f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \ ise$$

$$\phi(f(X)) = a_01_M + a_1T + \cdots + a_nT^n$$

olur. $\phi(f(X))$ ifadesi $f(T)$ ile gösterilir ve $Im(\phi) = R[T]$ olur. $R[T]$, T deki "polinomlar"dan oluşur ve $End_R(M)$ nin althalkasıdır. $f(T)m = f(T)(m)$ çarpımı ile M bir $R[T]$ -modüldür.

Bu örnek temel idealler üzerinde modüllerin, lineer dönüşümlere uygulamaları için bir taban oluşturması açısından önemlidir.

Örnek 2.32 Özel olarak; F bir cisim,

$$\begin{aligned} T : F^2 &\longrightarrow F^2 \\ (u_1, u_2) &\longmapsto (u_2, 0) \end{aligned}$$

olsun. $T^2 = 0$ olduğundan $f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_mX^m \in F[X]$ ise $f(T) = a_01_{F^2} + a_1T$ olur. Ayrıca $u = (u_1, u_2) \in F^2$ için $f(X)u$ skaler çarpımı

$$\begin{aligned} f(X)\cdot(u_1, u_2) &= f(T)(u_1, u_2) \\ &= (a_01_{F^2} + a_1T)(u_1, u_2) \\ &= (a_0u_1 + a_1u_2, a_0u_2) \end{aligned}$$

şeklindedir.

Tanım 2.27 F bir cisim, V bir vektör uzayı $T \in End_F\,(V)$ ve V_T ise T tarafından tanımlanan bir $F\,[X]$-modül olsun. (Örnek 2.32) $v \in V$ ise

$$Ann(v) = \{f(x) \in F\,[X] : f(T)(v) = 0\}$$

olur. Ayrıca $F\,[X]$, temel ideal bölgesi olduğundan, Ann(v) $\langle g(x) \rangle$ şeklinde bir temel idealdir.

Tanım 2.28 R bir tamlık bölgesi ve M bir R-modül olsun. $Ann(x) \neq \{0\}$ ise $x \in M$ elemanına bir *torsion eleman* denir. Böylece bir $x \in M$ elemanının torsion eleman olması için gerek ve yeter koşul $ax = 0$ olacak biçimde bir $a \neq 0 \in R$ elemanının bulunmasıdır. M nin torsion elemanlarının kümesi M_T ile gösterilir. $M_T = \{0\}$ ise M ye torsion-serbest denir. $M = M_T$ ise M ye bir *torsion modül* denir.

Önerme 2.29 R bir tamlık bölgesi ve M bir R-modül olsun. *M/M_T torsion-serbesttir.*

İspat $0 \neq a \in R$ ve $x + M_T \in (M/M_T)_T$ olsun. Bu durumda

$$a(x + M_T) = ax + M_T = 0_{M/M_T} = 0 + M_T$$

olur. Buradan $ax \in M_T$ olur ve dolayısıyla $b(ax) = (ba)x$ olacak şekilde bir $b \neq 0 \in R$ vardır. R tamlık bölgesi olduğundan $ba \neq 0$ olur. Buradan $x \in M_T$ yani, $x + M_T = 0 \in M/M_T$ elde edilir. Böylece $(M/M_T)_T = \{0\}$ bulunur.

Örnek 2.33 G bir abelyen grup ise, G nin torsion $\mathbb{Z}$-modülü, G nin tüm sonlu dereceden elemanlarının kümesidir. Ayrıca, herhangi bir sonlu abelyen grup torsiondur. Tersine torsion bir modül sonlu olmayabilir.

Örneğin; $G = Q/\mathbb{Z}$ alalım. G sonsuz mertebedendir. Fakat

$$q(p/q + \mathbb{Z}) = p + \mathbb{Z} = 0 \in Q/\mathbb{Z}$$

olduğundan $Q/\mathbb{Z}$ nin her elemanı sonlu dereceye sahiptir. Böylece $(Q/\mathbb{Z})_T = Q/\mathbb{Z}$ dir.

Örnek 2.34 Bir abel grup, 0 dan başka sonlu dereceli elemana sahip değilse torsion-serbesttir. Q toplamsal grubu buna bir örnektir.

Örnek 2.35 F cisim, V birimsel F-modül olsun. Bu durumda V torsion serbesttir. $0 \neq \alpha \in f$, $x \in V_T$ için $\alpha.x = 0$ olur.

$$\begin{array}{rrl} & \alpha.x & = 0 = 0 + 0 = \alpha.x + \alpha.x \\ \Leftrightarrow & \alpha.x & = \alpha.(x + x) \\ \Leftrightarrow & \alpha^{-1}.\alpha.x & = \alpha^{-1}.\alpha.(x + x) \\ \Leftrightarrow & x & = x + x \\ \Leftrightarrow & -x + x & = -x + x + x \\ \Leftrightarrow & 0_V & = 0_V + x = x \end{array}$$

$x = 0_V$ bulunur. $V_T = \{0_V\}$ olup V, torsion serbesttir.

Örnek 2.36 $V = F^2$, ve

$$\begin{array}{rcl} T : F^2 & \longrightarrow & F^2 \\ (u_1, u_2) & \longmapsto & (u_2, 0) \end{array}$$

lineer dönüşüm olmak üzere T tarafından tanımlanan V_T, $F[X]$-modülü bir torsion modüldür. Bu durumda $Ann(V_T) = \langle X^2 \rangle$ olur. $T^2 = 0$ olduğundan her $u \in V$ için $X^2 \cdot u = 0$ dır. Böylece $\langle X^2 \rangle \subseteq Ann(V_T)$ dır. $F[X]$ in $\langle X^2 \rangle$ yi içeren idealleri $\langle X \rangle$ ve $F[X]$ halkasıdır, fakat $X \cdot (0,1) = (1,0) \neq (0,0)$ olduğundan $X \notin Ann(V_T)$ olur. Dolayısıyla $Ann(V_T) = \langle X^2 \rangle$ bulunur.

Örnek 2.37 R tamlık bölgesi, M sonlu üretilmiş bir torsion R-modül olsun. Bu durumda $m \in M$ için $\exists 0 \neq r \in R \, \exists r.m = 0$ olup $0 \neq r \in Ann(M)$ ise $Ann(M) \neq \langle 0 \rangle$ dir. Eğer $M = \langle \{x_1, \ldots, x_n\} \rangle$ ise

$$Ann(M) = Ann(x_1) \cap \ldots \cap Ann(x_n) \neq \langle 0 \rangle$$

dir.

M, $M_T = \{m \in M \mid r.m = 0, \ 0 \neq r \in R\} = M$ olmak üzere $r \in Ann(M)$ ise $x_1, \ldots, x_n \in M$ için $r \in Ann(x_1), \ldots, r \in Ann(x_n)$ olup

$$r \in Ann(x_1) \cap \ldots \cap Ann(x_n)$$

bulunur. Böylece

$$Ann(M) \subseteq Ann(x_1) \cap \ldots \cap Ann(x_n)$$

kapsaması sağlanır.

$r \in Ann(x_1) \cap \ldots \cap Ann(x_n)$ ise $r \in Ann(x_1), \ldots, r \in Ann(x_n)$ olup $r.x_1 = 0, \cdots, r.x_n = 0$ olur. $r_i \in R$, $a_j \in \mathbb{Z}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i x_i + \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j \in M$ için

$$r\left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i + \sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right) = \sum_{i=1}^{n} r r_i x_i + \sum_{j=1}^{n} r a_j x_j = \sum_{i=1}^{n} r_i r x_i + \sum_{j=1}^{n} a_j r x_j = 0$$

olup $r \in Ann(M)$ ve

$$Ann(x_1) \cap \ldots \cap r \in Ann(x_n) \subseteq Ann(M)$$

kapsaması sağlanır yani $Ann(x_1) \cap \ldots \cap Ann(x_n) = Ann(M)$ olur.

Tanım 2.30 *V bir F-vektör uzayı olmak üzere $Hom(V, F)$ vektör uzayına V nin dual uzayı denir ve $\widehat{V} = Hom(V, F)$ ile gösterilir.*

Tanım 2.31 W, V nin bir alt uzayı olmak üzere,

$$Ann(W) = \left\{ f \in \hat{V} \mid \forall w \in W \text{ için } f(w) = 0 \right\}$$

kümesine W nin *sıfırlayıcısı (* annihilatörü) *denir.*

Önerme 2.32 V sonlu boyutlu bir F-vektör uzayı ve $v \neq 0 \in V$ ise $f(v) \neq 0$ olacak şekilde bir $f \in \widehat{V}$ vardır.

Önerme 2.33 $Ann(W)$, $\widehat{V}$ nin bir alt uzayıdır.

İspat $f, g \in Ann(W)$ ve $\alpha \in F$, $\forall w \in W$ için

$$(f + \alpha g)(w) = f(w) + \alpha g(w) = 0 + \alpha 0 = 0 + 0 = 0$$

olup $f + \alpha g \in Ann(W)$ bulunur. Böylece $Ann(W)$, $\widehat{V}$ nin bir alt uzayıdır.

Önerme 2.34 V sonlu boyutlu bir F-vektör uzayı ve W, V nin bir alt uzayı olsun. Bu durumda

$$\widehat{V}/\mathrm{Ann}(W) \cong \widehat{W}$$

olur.

İspat $f \in \widehat{V}$ için $f : V \to F$ lineer fonksiyonu ve $i : W \to V$ içine homomorfizması ile $\widetilde{f} : W \to F$, $\tilde{f}(w) = f(w)$ şeklinde tanımlanan f nin W ye kısıtlanmış fonksiyonu bir lineer fonksiyondur. Böylece, $\widetilde{f} \in \widehat{W}$ olup

$$\begin{array}{rccc} T: & \widehat{V} & \to & \widehat{W} \\ & f & \mapsto & T(f) = \widetilde{f} \end{array}$$

fonksiyonu tanımlanabilir.

$$T\left(f+g\right)=\widetilde{f+g}=\widetilde{f}+\widetilde{g}=T\left(f\right)+T\left(g\right)\qquad \text{ve}\qquad T\left(\alpha f\right)=\widetilde{\alpha f}=\alpha\widetilde{f}=\alpha T\left(f\right)$$

olup, T lineer dönüşümdür.

$f\in$Çek$T\iff T\left(f\right)=\widetilde{f}=0_{\widehat{W}}\iff\forall w\in W$ için $\widetilde{f}\left(w\right)=f(w)=0_F$ $\iff f\in Ann(W)$ olduğundan Çek$T=$Ann(W) bulunur.

Ayrıca,

$$T\left(\widehat{V}\right)=\left\{T\left(f\right)\mid f\in\widehat{V}\right\}=\left\{\widetilde{f}=f\mid_{w}\mid f\in\widehat{V}\right\}=\widehat{W}$$

olduğundan T örtendir. O halde, 1.izomorfizm teoremi gereğince

$$\widehat{V}/\text{Ann}(W)\cong\widehat{W}$$

elde edilir.

Örnek 2.38 $Ann(Ann(W))=W$ eşitliği geçerlidir.

Önerme 2.35 $S\subseteq V$ ise $Ann\left(S\right)=Ann\left(\langle S\rangle\right)$ dir.

İspat $S\subseteq V$ ve $S=\{s_1,s_2,...s_n\}$, $f\in\widehat{V}=Hom\left(V,F\right)$ ve $Ann\left(S\right)\subseteq Ann\left(\langle S\rangle\right)$, $f\in Ann\left(S\right)$ olsun. Her $s\in S$ için $f\left(s\right)=0_F$ dir. $\forall x\in\langle S\rangle$ için $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in F$ olmak üzere $x=\alpha_1s_1+\alpha_2s_2+\cdots+\alpha_ns_n$ şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned}
f(x) &= f\left(\alpha_1s_1+\alpha_2s_2+\cdots+\alpha_ns_n\right)\\
&= f\left(\alpha_1s_1\right)+f\left(\alpha_2s_2\right)+\cdots+f\left(\alpha_ns_n\right) &&\left(f\in\widehat{V},\text{lineer dönüşüm}\right)\\
&= \alpha_1f\left(s_1\right)+\alpha_2f\left(s_2\right)+\cdots+\alpha_nf\left(s_n\right)\\
&= \alpha_1.0+\alpha_2.0+\cdots+\alpha_n.0 &&\left(f\in Ann(S)\right)\\
&= 0_F
\end{aligned}$$

Böylece $\forall x\in\langle S\rangle$ için $f(x)=0_F$ olduğundan $f\in Ann\left(S\right)$ bulunur ve $Ann\left(S\right)\subseteq Ann\left(\langle S\rangle\right)$ kapsaması geçerlidir.

$f\in Ann\left(\langle S\rangle\right)$ olsun. $\forall x\in\langle S\rangle$ için $f(x)=0_F$ dir. $S\subseteq\langle S\rangle$ olduğundan $\forall s\in S$ için $s\in\langle S\rangle$ olup $f\in Ann\left(\langle S\rangle\right)$ olduğundan $f(s)=0_F$ olur. Buradan $f\in Ann\left(S\right)$ olup $Ann\left(\langle S\rangle\right)\subseteq Ann\left(S\right)$ kapsaması geçerlidir. Dolayısıyla $Ann\left(S\right)=Ann\left(\langle S\rangle\right)$ bulunur.

BÖLÜM 3

ÇARPIMSAL R-MODÜLLER ÜZERİNE

Bu bölümde modül bölümü kavramı ile yakından ilgili olan çarpımsal R-modül kavramına yer verilmiştir. (Anderson and Al Shaniafi, 2002), (Ali and Smith,II, 2004) ve (Ali and Smith I, 2004) nın çalışmaları incelenmiştir.

3.1 Çarpımsal R-Modüller

R birimli değişmeli halka, M birimsel R-modül olmak üzere M nin her N alt modülü, R nin herhangi bir I ideali $N = IM$ formunda ifade edilebiliyorsa M ye bir çarpımsal R-modül denir. İdeal tanımı gereğince, R halkasının bir R-modül olarak çarpımsal bir modül olduğu açıktır. Bir çarpımsal modül olan R nin I idealine de çarpımsal ideal denir.

Genel olarak tanımdaki I ideali $(N : M) = \{r \in R \mid rM \subseteq N\}$ kümesi olarak alınabilir. (Anderson and Al Shaniafi, 2002) Bu durumda M çarpımsal R-modül ve N, M'nin bir altmodülü olmak üzere $I \subseteq (N : M)$ olduğundan

$$N = IM \subseteq (N : M)M \subseteq N$$

yani, $N = (N : M)M$ elde edilir. O halde, M nin çarpımsal olması için gerek ve yeter şartın M nin her N altmodülü için $N = (N : M)M$ eşitliğinin sağlanması olduğu görülür. Ayrıca, M nin her N alt modülü için $N \cap K = (N : K)K$ ise K, M nin bir çarpımsal alt modülü adını alır. (Naoum and Hasan,1986)

M çarpımsal R-modül ve N, M'nin bir altmodülü olmak üzere $(0 : M) = AnnM = 0$ ise M çarpımsal modülü sadık (faithful) olarak adlandırılır.

Şimdi, çarpımsal modüller ile ilgili çalışmalarda önemli yer tutan bazı özel ideallere yer verelim. Bunlardan biri R nin bir ideali olan

$$\theta(M) = \sum_{m \in M} (Rm : M)$$

kümesidir. Diğeri M nin iz ideali olarak adlandırılan

$$\tau(M) = \sum \{f(M) : f \in Hom_R(M, R)\}$$

kümesidir. (Anderson and Al Shaniafi, 2002) de yer alan

$$T(M) = \bigcap \{(I + (0 : M)) : I \trianglelefteq R, IM = M\}$$

kümesi ise bir başka ilgili idealdir. Son olarak bahsedeceğimiz ideal ise $D_0(M)$ ile gösterilen $\sum\limits_{x \in M} (0 : (0 : M))$ idealidir.

Özel olarak, M sadık (faithful) çarpımsal R-modül ise bu dört idealin eşitliği (Teorem 3.2) de verilmiştir.

Teorem 3.1 R değişmeli halka ve M, R- modül ise aşağıdaki eşitlikler mevcuttur.

(i) M çarpımsal R modül ve N, M nin alt modülü olsun. Bu durumda $\theta(M) = \sum\limits_{m \in M} (Rm : M)$, R nin bir ideali olmak üzere $N = \theta(M) N$ olur.

(ii) M sonlu üreteçli çarpımsal R-modül, I ve J, R nin $IM = JM$ koşulunu sağlayan idealleri olsun. Bu durumda $I + (0 : M) = J + (0 : M)$ olur.

(iii)M sonlu üreteçli R-modül, $M = IM$ koşulunu sağlayan R nin I ideali için $R = I + (0 : M)$ olur.

İspat (i) M çarpımsal R modül olmak üzere

$$\sum_{m \in M} (Rm : M) = \sum_{x \in M} (Rm : M) M = \left(\sum_{x \in M} (Rm : M) \right) M = \theta(M) M$$

eşitliği geçerlidir. Ayrıca N, M nin alt modülü olmak üzere

$$N = (N : M) M = (N : M)(\theta(M) M) = \theta(M)((N : M) M) = \theta(M) N$$

bulunur.

(ii) (Smith, 1988)

(iii) (Kaplansky, 1974)

YardımcıTeorem 3.2 R değişmeli halka M çarpımsal *R-modül* olsun. $I \subseteq \theta(M)$ ve I, R nin sonlu üreteçli bir ideali ise IM sonlu üreteçlidir. Tersine IM sonlu üreteçli olmak üzere $I \subseteq \theta(M)$ dir.

İspat $I \subseteq \theta(M)$ sonlu üreteçli olduğunu kabul edelim. Bu durumda bazı $x_1, \ldots, x_n \in M$ için $I \subseteq (Rx_1 : M) + \cdots + (Rx_n : M)$ olur. Dolayısıyla $M = \sum\limits_{m \in M} Rm = \theta(M) M$ olduğundan;

$$IM \subseteq (Rx_1 : M) M + \cdots + (Rx_n : M) M = Rx_1 + \cdots + Rx_n$$

$$\theta (M) (Rx_1 + \cdots + Rx_n) = Rx_1 + \cdots + Rx_n$$
$$\theta (M) + (0 : (Rx_1 + \cdots + Rx_n)) = R$$

olur. Buradan $(Ry_1 : M) + \cdots + (Ry_m : M) + (0 : (Rx_1 + \cdots + Rx_n)) = R$ olacak şekilde $y_1, \ldots y_m \in M$ vardır.

$$IM = I (Ry_1 : M) M + \ldots + (Ry_m : M) M + (0 : (Rx_1 + \ldots + Rx_n))$$

$IM = IRy_1 + \ldots + IRy_m$ olup, I sonlu üreteçli olduğundan IM sonlu üreteçlidir.

Tersine; $I \trianglelefteq R$ ve IM sonlu üreteçli olsun. $IM = \theta (M) IM$ olduğundan $R = \theta (M) + (0 : IM)$ eşitliği geçerlidir. Buradan

$$I (0 : IM) \subseteq (0 : M) \subseteq \theta (M)$$

olduğundan $I = I\theta (M) + I (0 : IM) \subseteq \theta (M)$ kapsaması elde edilir.

YardımcıTeorem 3.3 R değişmeli halka ve M bir çarpımsal R-*modül* olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) M sonlu üreteçlidir.

(ii) $\theta (M) = R$

(iii) $\theta (M)$ sonlu üreteçlidir.

İspat $(i) \Longrightarrow (ii)$, $I = R \trianglelefteq R$ için $IM = RM = M$ sonlu üreteçli olduğundan (Yardımcı Teorem 3.2) gereğince $R \subseteq \theta (M) \trianglelefteq R$ olup $\theta (M) = R$ elde edilir. $(ii) \Longrightarrow (iii)$ açıktır. $(iii) \Longrightarrow (i)$ Yardımcı Teorem 3.2' nin ifadesinde $I = \theta (M) \trianglelefteq R$ alınırsa, $\theta (M)$ sonlu üreteçli olduğundan $\theta (M) M = M$ sonlu üreteçlidir.

YardımcıTeorem 3.4 R değişmeli halka M çarpımsal R-modül olsun. I, R nin $I \subseteq \theta (M)$ şartını sağlayan bir ideali ise,

$$I + (0 : M) = I\theta (M) + (0 : M)$$

olur.

Özel olarak; $\theta (M) = \theta (M)^2 + (0 : M)$ olur. Ayrıca $\theta (M) / (0 : M)$, $R/ (0 : M)$ nin bir idempotent çarpımsal idealdir. Buradan M bir sadık (faithful) çarpımsal R modül ise; $\theta (M)$, R nin idempotent çarpımsal ideali olur.

İspat $r \in \theta(M)$ olmak üzere (Yardımcı Teorem 3.2) gereğince rM sonlu üreteçlidir. Böylece; $\theta(M)rM = rM$ eşitliğiyle $\theta(M) + (0 : rM) = R$ bulunur. $M = IM = \theta(M)M$ olup,

$$r\theta(M) + r(0 : rM) = Rr$$

olur. $r(0 : rM) \subseteq (0 : M)$ olduğundan

$$r\theta(M) + (0 : M) = Rr + (0 : M)$$

bulunur. Buradan R nin $I \subseteq \theta(M)$ ideali için

$$I\theta(M) + (0 : M) = I + (0 : M)$$

olur. I yerine $\theta(M)$ alınırsa,

$$\theta(M) = \theta(M) + (0 : M) = \theta(M)^2 + (0 : M)$$

elde edilir. $(0 : M) \subseteq I \subseteq \theta(M)$ olacak şekilde R nin herbir I ideali için

$$I\theta(M) + (0 : M) = I + (0 : M)$$

eşitliğiyle,

$$I/(0 : M) = (I/(0 : M)).(\theta(M)/(0 : M))$$

bulunur. Böylece, $\theta(M)/(0 : M)$, $R/(0 : M)$ nin idempotent çarpımsal idealidir.

Teorem 3.2 R değişmeli halka ve M sadık (faithful) çarpımsal R-modül ise $\theta(M) = T(M) = \tau(M) = D_0(M)$ olur.

İspat M sadık (faithful) çarpımsal R-modül olsun. $\theta(M)M = M$ olduğundan $T(M) \subseteq \theta(M)$ sağlanır. (Yardımcı Teorem 3.4) gereğince

$T(M) = T(M)\theta(M)$ olur. Her $x \in M$ için $T(M)Rx = Rx$ olur. (Abd El-Bast and Smith, 1988.) Buradan $T(M)+(0 : x) = R$ olur. $(Rx : M)(0 : x) \subseteq (0 : M) = 0$ olduğundan $T(M)(Rx : M) = (Rx : M)$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} T(M)\theta(M) &= T(M)\left(\sum_{x \in M}(Rx : M)\right) = \sum_{x \in M} T(M)(Rx : M) \\ &= \sum_{x \in M}(Rx : M) = \theta(M) \end{aligned}$$

olup $T(M) = \theta(M)$ eşitliği sağlanır.

$x \in M$, $\theta(M) Rx = Rx$ eşitliğinden bazı $a \in \theta(M)$ için $x = ax$ elde edilir. $f \in Hom_R(M, R)$ için

$$f(x) = f(ax) = af(x) \in \theta(M)$$

dir. Böylece

$$\tau(M) = \sum \{f(M) : f \in Hom_R(M, R)\} \subseteq \theta(M)$$

sağlanır.

$x \in M$ için $(R_X : M)(0 : x) = 0$ olduğundan $(R_X : M) \subseteq (0 : (0 : x))$ elde edilir. Buradan

$\tau(M) \subseteq \theta(M) = \sum\limits_{x \in M} (R_X : M) \subseteq \sum\limits_{x \in M} (0 : (0 : x)) = D_0(M)$ bulunur. $\tau(M) = D_0(M)$ eşitliğinin varlığı (Naoum, 1990) da yer almaktadır. Böylece

$$\theta(M) = T(M) = \tau(M) = D_0(M)$$

eşitlikleri elde edilir.

Herhangi bir M çarpımsal R-modül için (Teorem 3.1) gereğince $\theta(M) = T(M)$ eşitliği ve (Anderson-Al Shaniafi, 2002) gereğince $\tau(M) = D_0(M)$ eşitliği geçerli iken, M sadık (faithful) değilse $\theta(M) = \tau(M)$ olması gerekmez. Örneğin; $R = Z$ ve $M = Z/2Z$ olsun. Bu durumda M faithful olmayan sonlu üreteçli çarpımsal R-modüldür.

$$\tau(M) = D_0(M) = 0 \qquad \text{ve} \qquad \theta(M) = T(M) = Z$$

eşitlikleri geçerlidir.

Tanım 3.3 M nin N alt modülü

$$N = (N : M)N$$

eşitliğini sağlıyorsa N ye M de idempotenttir denir. Bunun R nin idempotent ideal kavramının bir genellemesi olduğunu görmek kolaydır. Gerçekten, R bir R-modül ve I, R nin idempotent ideali olmak üzere

$$(I : R) = \{r \in R \mid rI \subset R \Leftrightarrow I \subset R \Leftrightarrow I = R\} = I = II$$

eşitliğinden $I = (I : R)I$ elde edilir.

Önerme 3.4 M çarpımsal R-modül, N, M nin alt modülü olmak üzere, $(N : M)$ idempotent ise N, M de idempotenttir.

İspat

$$\begin{aligned} N &= (N : M)M \\ &= (N : M)^2 M \\ &= (N : M)(N : M)N \\ &= (N : M)N \end{aligned}$$

eşitliğinden N nin M'de idempotent olduğu görülür.

Yukarıdaki teoremin tersi, ancak M nin sonlu üreteçli sadık (faithful) çarpımsal modül olması durumunda geçerlidir.

Önerme 3.5 M sonlu üreteçli sadık (faithful) çarpımsal modül ve N, M'de idempotent ise $(N : M)$ idempotent idealdir.

İspat

$$\begin{aligned} N &= (N : M)M && (M \text{ çarpımsal olduğundan}) \\ N &= (N : M)N && (N,\ M \text{ de idempotent}) \\ &= (N : M)(N : M)N && (N = (N : M)M \text{ olduğundan}) \\ &= (N : M)^2 M \end{aligned}$$

olur. Böylece $N = (N : M)^2 M = (N : M)M$ eşitliğinden

$$(N : M)^2 = (N : M)$$

idempotent idealdir.

BÖLÜM 4

ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER VE SIFIRLAYICI

4.1 Çaprazlanmış Modül Kavramı

Çaprazlanmış modül kavramı, J.H.L.Whitehead tarafından (Whitehead, 1949) da tanımlanmıştır. Whitehead, özellikle relatif homotopi gruplarının cebirsel yapıları üzerine yaptığı çalışmasında çaprazlanmış modüllere yer vermiştir. Çaprazlanmış modüller, temel cebirsel yapılardan biri olarak incelenebilir. Asosyatif ve değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramı, farklı bir adla S. Lichtenbaum-M. Schlessinger (Lichtenbaum and Schlessinger, 1967) ve M. Gerstenhaber'in (Gerstenhaber, 1966) çalışmalarında karşımıza çıkar. T. Porter (Porter, 1986) çalışmasında değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramını tanımlayarak, bu yapının Koszul komplekslerle yakın ilgisini göstermiştir. Bununla birlikte, Z. Arvasi ve T. Porter (Arvasi, 1997), (Arvasi and Porter, 1996), (Arvasi and Porter, 1998), çalışmalarında değişmeli cebirler için çaprazlanmış modüllerle ilgili birçok önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Çaprazlanmış modüller, modüller ve ideallerin genelleştirilmesidir. Ayrıca herhangi bir halka (cebir) bir çaprazlanmış modüldür. Böylece çaprazlanmış modüller, halka (cebir) kavramının genelleştirilmesi olarak görülebilir. Şimdi, **k** sıfırdan farklı birimi olan değişmeli halka olmak üzere, T.Porter tarafından (Porter, 1986) de verilen **k**-cebirler üzerinde çaprazlanmış modül yapısı ile iki çaprazlanmış modül arasındaki morfizm kavramlarını hatırlatarak bazı örneklere yer verelim.

M ve R değişmeli **k**-cebir olmak üzere M üzerinde R nin değişmeli cebir etkisi aşağıdaki aksiyomları sağlayan

$$\begin{array}{ccc} R \times M & \longrightarrow & M \\ (r,m) & \longmapsto & r \cdot m \end{array}$$

dönüşümüdür. Her $k \in \mathbf{k},\ m,\ m' \in M, r, r' \in R$ için

$i)$ $k(r \cdot m) = (kr) \cdot m = r \cdot (km)$

$ii)$ $r \cdot (m + m^{'}) = r \cdot m + r \cdot m^{'}$

$iii)$ $(r + r^{'}) \cdot m = r \cdot m + r^{'} \cdot m$

$iv)$ $r \cdot (mm^{'}) = (r \cdot m)m^{'} = m(r \cdot m^{'})$

$v)$ $(rr^{'}) \cdot m = r \cdot (r^{'} \cdot m) = r^{'} \cdot (r \cdot m)$

R, birimli ve değişmeli bir **k**-cebir olmak üzere, $\mu : C \longrightarrow R$ bir R-cebir morfizmi ve R nin C üzerine etkisi ile birlikte, her $c, c' \in C$ ve $r \in R$ için

ÇM1) $\mu(r \cdot c) = r\mu(c)$

ÇM2) $\mu(c) \cdot c' = cc'$

şartları sağlanıyor ise (C, R, μ) üçlüsüne çaprazlanmış (crossed) R-modül denir.

Bazı standart çaprazlanmış modül örneklerine aşağıda yer verilmiştir.

i) I, R nin ideali olmak üzere $i : I \longrightarrow R$ içine dönüşümü bir çaprazlanmış R-modül yapısı oluşturur. Tersine, $\mu : C \longrightarrow R$ çaprazlanmış R-modül ise $I = \mu(C)$ görüntüsü, R nin idealidir.

ii) Herhangi bir M, R-modülü sıfır çarpımla birlikte bir R-cebir olarak düşünülebilir ve böylece $0 : M \longrightarrow R$ sıfır morfizmi bir çaprazlanmış R-modül yapısı oluşturur. Tersine, $\mu : C \longrightarrow R$ çaprazlanmış R-modül ise Kerμ, bir $R/\mu(C)$-modül olur.

(C, R, μ) ve (C', R', μ') çaprazlanmış modülleri arasındaki morfizm ise;
$\theta : C \to C'$, $\psi : R \to R'$

$$\theta(r \cdot c) = \psi(r) \cdot \theta(c) \quad \text{ve} \quad \mu'\theta(c) = \psi\mu(c)$$

şartını sağlayan **k**-cebir morfizmi olmak üzere

$$(\theta, \psi) : (C, R, \mu) \longrightarrow (C', R', \mu')$$

morfizmi olarak tanımlanır. Ayrıca θ, ψ izomorfizma ise

$$(\theta, \psi) : (C, R, \mu) \longrightarrow (C', R', \mu')$$

morfizmine izomorfizm denir. Bu durumda

$$(\theta, \psi)^{-1} = (\theta^{-1}, \psi^{-1}) : (C', R', \mu') \longrightarrow (C, R, \mu)$$

bir çaprazlanmış modül morfizmidir ve $(\theta, \psi)^{-1}(\theta, \psi) = (Id, Id) = (\theta, \psi)(\theta, \psi)^{-1}$ olur.

Böylece, çaprazlanmış modüllerin bir kategorisi oluşturulur ve bu kategori $CMod(\mathbf{k})$ ile gösterilir.

Özel olarak, $R = R'$ ve ψ birim dönüşüm ise, θ bir R-cebir morfizmi olduğundan

$$\theta(r \cdot c) = r\theta(c)$$

olur ve

$$\mu'\theta(c) = \mu(c)$$

sağlandığından, θ bir çaprazlanmış R-modül morfizmidir. R üzerinde iki çaprazlanmış modülün bileşkesi bir çaprazlanmış R-modül morfizmi olduğundan $CMod(\mathbf{k})$ nin bir alt kategorisi elde edilir ve bu kategori $CMod/R$ ile gösterilir.

(Shammu, 1992) tezinde $CMod/R$ kategorisinde bir çaprazlanmış modülün alt yapılarına yer vermiştir.

Tanım 4.1 (C, R, μ) bir çaprazlanmış modül, C', C nin ve R', R nin bir alt cebiri olmak üzere

$$\mu' : \mu\mid_{C'} : C' \longrightarrow R'$$

μ nin C' ye kısıtlanmışı ve C'üzerine R'-etkisiyle birlikte, (C', R', μ') çaprazlanmış modülüne, (C, R, μ) çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülü denir ve $(C', R', \mu') \leq (C, R, \mu)$ şeklinde gösterilir.

Bazı temel alt çaprazlanmış modül örnekleri aşağıda yer almaktadır.

i) I, R cebrinin herhangi bir ideali olmak üzere (I, R, i), (R, R, Id) çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülünü oluşturur.

ii) A ve B, R nin ideali, $B \subseteq A$ olmak üzere, $(B, A, i), (A, R, i)$ çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülünü oluşturur.

iii) A, R-modül, B, A içinde R-alt modül olmak üzere $(B, R, 0)$, $(A, R, 0)$ çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülünü oluşturur.

4.2 Çaprazlanmış İdeal

(C, R, μ) çaprazlanmış modülünün (C', R', μ') alt çaprazlanmış modülü,

$i)$ R', R cebrinin bir ideali,

$ii)$ Her $r \in R$ ve $c' \in C'$ için, $r \cdot c' \in C'$,

$iii)$ Her $r' \in R'$ ve $c \in C$ için, $r' \cdot c \in C'$, şartlarını sağlıyorsa (C', R', μ') alt çaprazlanmış modülüne, (C, R, μ) çaprazlanmış modülünün ideali denir ve $(C', R', \mu') \trianglelefteq (C, R, \mu)$ şeklinde gösterilir.

I, R cebrinin bir ideali olmak üzere (I, I, Id), (R, R, Id) çaprazlanmış modülünün idealidir. Ayrıca I ve I', R nin ideali olmak üzere (I, R, v) ve (I', R, v') çaprazlanmış modüldür. Bu durumda $(I \cap I', I, v) \trianglelefteq (I', R, v')$ ve $(I \cap I', I', v') \trianglelefteq (I, R, v)$ olur. Ayrıca, $(C', R', \mu') \leq (C'', R'', \mu'') \leq (C, R, \mu)$ şeklindeki alt çaprazlanmış modüller için, (C', R', μ'), (C, R, μ) nin ideali ise (C', R', μ'), (C'', R'', μ'') nin idealidir.

4.3 Bölüm Çaprazlanmış Modül

(C', R', μ'), (C, R, μ) nin bir ideali olsun. Bu durumda R, C/C' üzerine etki eder. R' nün C/C' üzerine etkisi ise

$$r'(c + C') = r'c + C'$$

ve $r'c \in C'$ olduğundan sıfırdır. Dolayısıyla, R/R' bölüm halkası C/C' üzerine

$$\begin{aligned} R/R' \times C/C' &\longrightarrow C/C' \\ ((r + R'), (c + C')) &\longmapsto rc + C' \end{aligned}$$

şeklinde etki eder ve buradan μ,

$$\begin{aligned} \bar{\mu} : \quad C/C' &\longrightarrow R/R' \\ (c + C') &\longmapsto \mu(c) + R' \end{aligned}$$

dönüşümüne indirgenir. Böylece bu dönüşüme ve etki fonksiyonuna göre,

$$(C/C', R/R', \bar{\mu}) = \frac{(C, R, \mu)}{(C', R', \mu')}$$

cebir üzerinde bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur ve buna bölüm çaprazlanmış modül denir.

R', R nin ideali olmak üzere,

$$\frac{(0, R, i)}{(0, R', i)} = (0, R/R', i)$$

ve

$$\frac{(R, R, Id)}{(R', R', Id)} = (R/R', R/R', Id)$$

şeklinde bölüm çaprazlanmış modülleri elde edilir.

4.4 Çaprazlanmış Modüllerin Çekirdeği ve Görüntüsü

$(\theta,\psi):(C,R,\mu)\longrightarrow(C',R',\mu')$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere,

$$\mu:\text{Çek }\theta\longrightarrow\text{Çek }\psi$$

çaprazlanmış modülüne (θ,ψ) morfizminin çekirdeği denir ve Çek (θ,ψ) ile gösterilir.

Çek (θ,ψ) = (Çek θ,Çek $\psi,\mu)$ çaprazlanmış modülünün (C,R,μ) nin ideali olduğu açıktır.

$(\theta,\psi):(C,R,\mu)\longrightarrow(C',R',\mu')$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere,

$$\mu':\operatorname{Im}\theta\longrightarrow\operatorname{Im}\ \psi$$

çaprazlanmış modülü (C',R',μ') nin bir alt çaprazlanmış modülü olup (θ,ψ) morfizminin görüntüsü adını alır ve Im (θ,ψ) ile gösterilir.

(C,R,μ) nin (C',R',μ') ve (C'',R'',μ'') alt çaprazlanmış modüllerinin arakesiti ise

$$\mu\ |_{C'\cap C''}:C'\cap C''\longrightarrow R'\cap R''$$

şeklinde indirgenen alt çaprazlanmış modül olarak tanımlanır ve $(C',R',\mu')\cap(C'',R'',\mu'')$ ile gösterilir.

Özel olarak (C',R',μ') ve (C'',R'',μ''), (C,R,μ) çaprazlanmış modülünün ideali ise $(C',R',\mu')\cap(C'',R'',\mu'')$ arakesit çaprazlanmış alt modülü de (C,R,μ) nin idealidir.

(C',R',μ') ve (C'',R'',μ''), (C,R,μ) çaprazlanmış modülünün ideali olmak üzere. $C'+C'',C$ de ideallerin toplamı ve $R'+R'',R$ de ideallerin toplamı olmak üzere

$$\mu\ |_{C'+C''}:C'+C''\longrightarrow R'+R''$$

dönüşümü ve R nin C üzerine etkisinden kaynaklanan $R'+R''$ nin $C'+C''$ üzerine etkisi ile birlikte oluşturulan çaprazlanmış modüle (C',R',μ') ile (C'',R'',μ'') çaprazlanmış modüllerinin toplamı denir ve $(C',R',\mu')+(C'',R'',\mu'')$ ile gösterilir.

4.5 İzomorfizma Teoremleri

Cebir teoriye benzer olarak, izomorfizm teoremleri çaprazlanmış modüller için de geçerlidir.

Teorem 4.2 (I. izomorfizm) $(\theta,\psi):(C,R,\mu)\longrightarrow(C',R',\mu')$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere,

$$\frac{(C,R,\mu)}{\mathrm{Ker}\,(\theta,\psi)}\cong \mathrm{Im}\,(\theta,\psi)$$

izomorfizmi geçerlidir.

Teorem 4.3 (II. izomorfizm) (C'',R'',μ''), (C,R,μ) çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülü ve $(C',R',\mu'),(C,R,\mu)$ nin ideali ise

$$\frac{(C',R',\mu')+(C'',R'',\mu'')}{(C',R',\mu')}\cong\frac{(C'',R'',\mu'')}{(C',R',\mu')\cap(C'',R'',\mu'')}$$

izomorfizmi geçerlidir.

Teorem 4.4 (III. izomorfizm) (C',R',μ') ve (C'',R'',μ''), (C,R,μ) çaprazlanmış modülünün ideali ve $(C'',R'',\mu'')\subset(C',R',\mu')$ ise

$$\frac{(C,R,\mu)/(C'',R'',\mu'')}{(C',R',\mu')/(C'',R'',\mu'')}\cong\frac{(C,R,\mu)}{(C',R',\mu')}$$

izomorfizmi geçerlidir.

4.6 Çarpım Cebri Kavramı

Grup teoride bir grubun diğeri üzerine etkisinin otomorfizm grubuyla belirlendiği iyi bilinir. $A^{'}$ grubunun $B^{'}$grubu üzerine etkisi $A^{'}\longrightarrow Aut(B^{'})$ homomorfizmi ile verilir. Cebir teoride ise bir cebirin diğeri üzerine etkisi aşağıda söz edeceğimiz *çarpım cebri* ile verilir. Çarpım cebri kavramı, S.Mac Lane tarafından (Mac Lane, 1958) da tanımlanmıştır. R.Lavendhomme ve Th. Lucas ise (Lavendhomme and Lucas,1996) çalışmalarında bu kavram ile çaprazlanmış modül yapısı arasındaki ilişkiden söz etmişlerdir.

R, asosyatif **k**-cebir ve $\gamma,\delta:R\to R$, **k**-lineer dönüşümler olsun. Her $r,r^{'}\in R$ için,

i) $\gamma(rr^{'})=\gamma(r)\cdot r^{'}$

ii) $\delta(rr^{'})=r\cdot\delta(r^{'})$

iii) $r\cdot\gamma(r^{'})=\delta(r)\cdot r^{'}$

şartları sağlanıyorsa (γ,δ) ikilisine R nin bileşik çarpanları (bimultiplier) denir ve bütün bileşik çarpanların kümesi Bim(R) ile gösterilir.

R değişmeli cebir ise, $\gamma=\delta$ olup, Bim(R), R nin çarpanı (multiplier) olarak tanımlanır ve $\mathcal{M}(R)$ ile gösterilir.

$\delta, \delta^{'} \in \mathcal{M}(R)$, $k \in \mathbf{k}$ ve $r \in R$ için,

$(\delta + \delta^{'})(r) = \delta(r) + \delta^{'}(r)$

$(\delta \circ \delta^{'})(r) = \delta(\delta^{'}(r))$

$(k\delta)(r) = k(\delta(r))$

işlemleri altında $\mathcal{M}(R)$ bir çarpım cebridir. Böylece $\mu : R \longrightarrow \mathcal{M}(R)$ bir cebir homomorfizmi tanımlanabilir. Her $r, r^{'} \in R$ için,

$$\begin{aligned} \mu : \ R &\longrightarrow \ \mathcal{M}(R) \\ r &\longmapsto \ \mu(r) = \mu_r \end{aligned}$$

olmak üzere, $\mu(r)r^{'} = rr^{'}$ şeklinde tanımlı $\mu(r) = \mu_r : R \longrightarrow R$ dönüşümüne iç (inner) çarpan denir. R nin bütün iç çarpanlarının kümesi $\mathbb{I}(R)$ ile gösterilir.

$$\begin{aligned} \mu : \ R &\longrightarrow \ \mathcal{M}(R) \\ r &\longmapsto \ \mu(r) = \mu_r \end{aligned}$$

cebir homomorfizminin çekirdeğinin R nin sıfırlayıcısı ile çakıştığı görülür. Şöyleki;

$$\begin{aligned} r \in \text{Çek } \mu \ &\Longleftrightarrow \ \mu(r) = \mu_r = \mathbf{0} \\ &\Longleftrightarrow \ \mu_r(r') = \mathbf{0}(r') \\ &\Longleftrightarrow \ rr' = 0 \\ &\Longleftrightarrow \ r \in \ \text{Ann}_R(R) \end{aligned}$$

olduğundan Çek μ =$\text{Ann}_R(R)$ elde edilir.

Önerme 4.5 $\text{Ann}(R) = 0$ veya $R^2 = R$ olmak üzere $(R, \mathcal{M}(R), \mu)$ bir çaprazlanmış modül oluşturur.

İspat $x, r \in R$ ve $\delta \in \mathcal{M}(R)$ için,

$$\begin{aligned} \delta_r : R \ &\longrightarrow \ R \\ x \ &\longmapsto \ \delta_r(x) = rx \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mu : R \ &\longrightarrow \ \mathcal{M}(R) \\ r \ &\longmapsto \ \delta_r \end{aligned}$$

bir homomorfizma olup

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(R) \times R \ &\longrightarrow \ R \\ (\delta, r) \ &\longmapsto \ \delta(r) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı etki ile birlikte çaprazlanmış modül aksiyomlarının sağlandığını görelim.

ÇM1)$\mu(\delta \cdot r) = \mu(\delta(r)) = \delta_{\delta(r)} \overset{(*)}{=} \delta\delta_r = \delta\mu(r)$

$(*)$ $\quad \delta_{\delta(r)}(x) = \delta(r)x = \delta(rx) = \delta(\delta_r(x))$

ÇM2) $\mu(r) \cdot r' = \delta_r \cdot r' = \delta_r(r') = rr'$

olduğundan $(R, \mathcal{M}(R), \mu)$ bir çaprazlanmış modül oluşturur.

4.7 Değişmeli Cebirler İçin Aktör Çaprazlanmış Modüller

Ege (Ege, 2002) de, çarpım cebri ile yakından ilgili olan, değişmeli cebirler için aktör çaprazlanmış modül kavramı ve bu kavram yardımıyla, değişmeli cebirler teorisinde önemli yeri olan, bir çaprazlanmış modülün sıfırlayıcısı kavramlarına yer vermiştir.

4.7.1 Aktör çaprazlanmış modül

Bir (C, R, μ) çaprazlanmış modülün çarpanı, her $r \in R$ ve $c \in C$ için,

i) $\quad f \in \mathcal{M}(C),\ \phi \in \mathcal{M}(R)$

ii) $\quad \phi\mu = \mu f$ ve

iii) $\quad f(r \cdot c) = r \cdot f(c) = \phi(r) \cdot c$

şartlarını sağlayan $(f, \phi) : (C, R, \mu) \longrightarrow (C, R, \mu)$ dönüşümü olarak,tanımlanır. Bu özellikteki (f, ϕ) ikililerinin oluşturduğu küme bir **k**-cebir yapısı oluşturur ve $\mathcal{M}(C, R, \mu)$ ile gösterilir.

Cebir üzerinde aktör çaprazlanmış modül kavramını tanımlamada aşağıdaki küme önemli yer tutar.

(C, R, μ) bir çaprazlanmış modül olmak üzere, her $r_1, r_2 \in R$ için

$$d(r_1 r_2) = r_1 \cdot d(r_2) = r_2 \cdot d\,(r_1)$$

şartını sağlayan $d : R \longrightarrow C$, **k**-lineer dönüşümlerinin kümesi $\mathcal{U}(R, C)$ tanımlanır. Bu küme üzerinde aşağıdaki işlemler tanımlı olup, $\mathcal{U}(R, C)$ bir **k**-cebir yapısı oluşturur.

$+)$ $\quad (d_1 + d_2)(r) = d_1(r) + d_2(r)$

$\cdot)$ $\quad (kd)(r) = k\,(d(r))$

$\circ)$ $\quad (d_1 \circ d_2)(r) = d_1 \mu d_2(r)$

Ayrıca, $d \in \mathcal{U}(R, C)$ dönüşümü ile

$$\sigma(r) = \mu d(r) \qquad \text{ve} \qquad \theta(c) = d\mu(c)$$

şeklinde tanımlı $\sigma(=\sigma_d) : R \longrightarrow R$ ve $\theta(=\theta_d) : C \longrightarrow C$ dönüşümleri sırasıyla R ve C nin çarpanlarıdır ve aşağıdaki şartları sağlarlar .

i) $\theta_d d = d\sigma_d$

ii) $\sigma_d \mu = \mu\theta_d$

iii) $(\theta_d, \sigma_d) \in \mathcal{M}(C, R, \mu)$

$$\begin{array}{rcl} \Gamma : \ \mathcal{U}(R,C) & \longrightarrow & \mathcal{M}(R) \\ d & \longmapsto & \sigma_d = \mu d \end{array} \qquad \text{ve} \qquad \begin{array}{rcl} \Phi : \ \mathcal{U}(R,C) & \longrightarrow & \mathcal{M}(C) \\ d & \longmapsto & \theta_d = d\mu \end{array}$$

dönüşümleri cebir homomorfizmleridir.

Teorem 4.6

$$\begin{array}{rcl} \Delta : \ \mathcal{U}(R,C) & \longrightarrow & \mathcal{M}(C, R, \mu) \\ d & \longmapsto & (\theta_d, \sigma_d) = (d\mu, \mu d) \end{array}$$

dönüşümü bir **k**-cebir homomorfizmi olup,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}(C, R, \mu) \times \mathcal{U}(R,C) & \longrightarrow & \mathcal{U}(R,C) \\ ((\alpha, \phi), d) & \longmapsto & \alpha d \end{array}$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{M}(C, R, \mu)$ nin $\mathcal{U}(R,C)$ kümesi üzerine etkisi ile birlikte

$$(\mathcal{U}(R,C), \mathcal{M}(C, R, \mu), \Delta)$$

üçlüsü bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

İspat $(\alpha, \phi) \in \mathcal{M}(C, R, \mu)$, $d \in \mathcal{U}(R,C)$ için,

$$\begin{array}{lrcl} \text{ÇM1)} & \Delta((\alpha, \phi) \cdot d) & = & \Delta(\alpha d) \\ & & = & (\theta_{\alpha d}, \sigma_{\alpha d}) \\ & & = & ((\alpha d)\mu, \mu(\alpha d)) \\ & & = & (\alpha d\mu, \phi\mu d) \\ & & = & (\alpha, \phi) \circ (d\mu, \mu d) \\ & & = & (\alpha, \phi) \circ (\theta_d, \sigma_d) \\ & & = & (\alpha, \phi) \circ \Delta(d) \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{ÇM2)} & \Delta(d_1) \cdot d_2 & = & (\theta_{d_1}, \sigma_{d_1}) \cdot d_2 \\ & & = & \theta_{d_1} d_2 \\ & & = & d_1 \mu d_2 \\ & & = & d_1 \circ d_2 \end{array}$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır.

Teorem 4.6 de verilen $(\mathcal{U}(R,C),\mathcal{M}(C,R,\mu),\Delta)$ çaprazlanmış modülüne, (C,R,μ) nin aktör çaprazlanmış modülü denir ve $\mathcal{A}(C,R,\mu)$ ile gösterilir.

4.7.2 Aktör çaprazlanmış modül örnekleri

1. I,R de ideal olmak üzere $i:I\longrightarrow R$ içine dönüşümü

$$\begin{array}{ccc} R\times I & \longrightarrow & I \\ (r,i) & \longmapsto & r\cdot i=ri \end{array}$$

etkisi ile birlikte (I,R,i) çaprazlanmış modülünü oluşturur.

$$\chi=\{f\in\mathcal{M}(R)\mid f\mid_I\in\mathcal{M}(I)\}$$

olmak üzere

$$\begin{array}{lll} \Sigma: & \mathcal{M}(I,R,i) & \longrightarrow\chi \\ & (\alpha,\phi) & \longmapsto\phi \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \Phi: & \chi & \longrightarrow\mathcal{M}(I,R,i) \\ & \phi & \longmapsto(f\mid_I,f) \end{array}$$

homomorfizmleri için

$$\Sigma\Phi=Id_\chi \qquad \Phi\Sigma=Id_{\mathcal{M}(I,R,i)}$$

olur. Böylece

$$\mathcal{M}(I,R,i)\cong\chi$$

olur. O halde, $\mathcal{A}(I,R,i)=(\mathcal{U}(R,I),\chi,\Delta)$ elde edilir.

2. Örnek 1'de özel olarak $I=0$ ise

$$\mathcal{A}(0,R,i)=(\mathcal{U}(R,0),\mathcal{M}(R),\Delta)=(0,\mathcal{M}(R),i)$$

ve $I=R$ ise

$$\mathcal{A}(R,R,Id)=(\mathcal{U}(R,R),\mathcal{M}(R),\Delta)=(\mathcal{M}(R),\mathcal{M}(R),Id)$$

olur.

4.8 Çaprazlanmış Modülün Sıfırlayıcısı (Annihilatörü) ve Örnekler

$(R, \mathcal{M}(R), \mu)$ çaprazlanmış modülünün çekirdeğinin, $\mathrm{Ann}(R)$ kümesine eşitliği yukarıda belirtilmişti. 2-boyutlu cebirler olarak düşünülebileceğimiz çaprazlanmış modüllerin sıfırlayıcısı ise, etkinin aktör çaprazlanmış modül ile sağlanıyor olmasından dolayı $(C, R, \mu) \longrightarrow \mathcal{A}(C, R, \mu)$ çaprazlanmış modül homomorfizminin çekirdeği olarak tanımlanır. Bunun için öncelikle $\alpha_r : C \longrightarrow C, \alpha_r(c) = r \cdot c$ ve $\phi_r : R \longrightarrow R, \phi_r(r') = rr'$olmak üzere,

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & R & \longrightarrow & \mathcal{M}(C, R, \mu) \\ & r & \longmapsto & (\alpha_r, \phi_r) \end{array}$$

cebir homomorfizmi ile.$\eta : C \longrightarrow \mathcal{U}(R, C), \eta(c) = \eta_c$ cebir homomorfizmi tanımlanır. Böylece,

$$\begin{aligned} i) \quad \Delta\eta(c) &= \Delta\eta_c(r) \\ &= (\theta_{\eta_c}(c'), \sigma_{\eta_c}(r)) \\ &= (\eta_c\mu(c'), \mu\eta_c(r)) \\ &= (\mu(c') \cdot c, \mu(r \cdot c)) \\ &= (c'c, \mu(r \cdot c)) \\ &= (cc', r\mu(c)) \\ &= (\mu(c) \cdot c', \mu(c)r) \\ &= (\alpha_{\mu(c)}(c'), \phi_{\mu(c)}(r)) \\ &= \gamma\mu(c) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} ii) \quad \gamma(r) \circ \eta(c)(r') &= (\alpha_r, \phi_r) \cdot \eta_c(r') \\ &= \alpha_r\eta_c(r') \\ &= \alpha_r(r' \cdot c) \\ &= r \cdot (r' \cdot c) \\ &= r' \cdot (r \cdot c) \\ &= \eta_{r \cdot c}(r') \\ &= \eta(r \cdot c)(r') \end{aligned}$$

olduğundan $(\eta, \gamma) : (C, R, \mu) \longrightarrow \mathcal{A}(C, R, \mu)$ dönüşümü bir çaprazlanmış modül homomorfizmi olur. Çekirdeği ise

$$\begin{aligned}
\text{Çek } \eta &= \{c \in C \mid \eta(c) = 0\} \\
&= \{c \in C \mid \eta_c(r) = 0(r), r \in R\} \\
&= \{c \in C \mid r \cdot c = 0, r \in R\} \\
&= \mathrm{Ann}_C(R) \\
\text{Çek } \gamma &= \{r \in R \mid \gamma(r) = (\alpha_r, \phi_r) = 0\} \\
&= \{r \in R \mid \alpha_r(c) = r \cdot c = 0,\ c \in C \text{ ve } \phi_r(r') = rr' = 0, r' \in R\} \\
&= \mathrm{Ann}_R(C) \cap \mathrm{Ann}_R(R)
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\text{Çek}(\eta, \gamma) = (\mathrm{Ann}_C(R), \mathrm{Ann}_R(C) \cap \mathrm{Ann}_R(R), \mu)$$

çaprazlanmış modülü olarak belirlenir. Çek(η, γ), (C, R, μ) çaprazlanmış modülünün annihilatörü olarak adlandırılır.ve Ann(C, R, μ) ile gösterilir.

Ann(C, R, μ), çaprazlanmış modül morfizminin çekirdeği olarak tanımlandığından, (C, R, μ) çaprazlanmış modülünün ideali olduğu açıktır.

4.0.1 Sıfırlayıcı (annihilatör) örnekleri

1. I, R de ideal olmak üzere, (I, R, i) çaprazlanmış modülünün sıfırlayıcısı,

$$\{i \in I \mid r \cdot i = ri = 0, r \in R\} = I \cap \mathrm{Ann}_R(R)$$

ve

$$\{r \in R \mid r \cdot i = ri = 0 \ ; \ i \in I\} \cap \{r \in R \mid r \cdot r' = rr' = 0 \ ; \ r \in R\} = \mathrm{Ann}_R(R)$$

olduğundan

$$(I \cap \mathrm{Ann}_R(R), \mathrm{Ann}_R(R), i)$$

çaprazlanmış modülüdür.

2. Özel olarak, (R, R, Id) ve $(0, R, i)$ çaprazlanmış modüllerinin sıfırlayıcısı,

$$\mathrm{Ann}(R, R, Id) = (R \cap \mathrm{Ann}_R(R), \mathrm{Ann}_R(R), Id) = (\mathrm{Ann}_R(R), \mathrm{Ann}_R(R), Id)$$

ve

$$\mathrm{Ann}(0, R, i) = (0 \cap \mathrm{Ann}_R(R), \mathrm{Ann}_R(R), i) = (0, \mathrm{Ann}_R(R), i)$$

şeklindedir.

3. C, bir R-modül olmak üzere, $(C, R, 0)$ çaprazlanmış modülünün sıfırlayıcısı,

$$\mathrm{Ann}(C, R, 0) = (H^0(R, C), \mathrm{Ann}_R(C) \cap \mathrm{Ann}_R(R), 0)$$

şeklindedir. Burada,

$$\begin{array}{rcl} 0 \xrightarrow{\partial_0} \mathcal{C}^0(R, C) = C & \xrightarrow{\partial_1} & \mathcal{C}^1(R, C) \\ c & \longmapsto & \partial_1 c \end{array}$$

cebir zinciri için

$$\text{Çek}\partial_1 = \{c \in C \mid \partial_1 c(r) = r \cdot c = 0, \text{ her } r \in R \text{ için}\} = Ann_C(R)$$

ve $\mathrm{Im}\, \partial_0 = 0$ olup,

$$\mathrm{Ann}_C(R) = \text{Çek}\partial_1 = \text{Çek}\partial_1 / \mathrm{Im}\, \partial_0 = H^0(R, C)$$

elde edilir.

4. $(R, \mathcal{M}(R), \mu)$ çaprazlanmış modülünün sıfırlayıcısı,

$$\{r' \in R \mid \ \sigma_r \cdot r' = \sigma(r)r' = rr' = 0 \ ; \sigma_r \in \mathcal{M}(R)\} = Ann_R(R)$$

ve

$$\{\ \sigma_r \in \mathcal{M}(R) \mid \sigma_r \cdot r' = \sigma_r(r') = 0 \ ; \text{her } r' \in \mathcal{M}(R) \text{ için}\} = 0$$
$$\{\ \sigma_r \in \mathcal{M}(R) \mid \sigma_r \cdot \sigma_{r'} = \sigma_r \sigma_{r'} = 0 \ ; \text{her } \sigma_{r'} \in \mathcal{M}(R) \text{ için}\} = Ann_{\mathcal{M}(R)}(\mathcal{M}(R))$$

olduğundan

$$Ann(R, \mathcal{M}(R), \mu) = (Ann_R(R), 0 \cap Ann_{\mathcal{M}(R)}(\mathcal{M}(R)), \mu) = (Ann_R(R), 0, \mu)$$

şeklindedir.

5. $\mu : C \longrightarrow R$ örten dönüşümü ile (C, R, μ) çaprazlanmış modülünün sıfırlayıcısı,

$$\{c \in C \mid \ r \cdot c = \mu(c') \cdot c = c'c = 0, \ c' \in C\} = Ann_C(C)$$

ve

$$(\{r \in \mu(C) = R \mid \; r \cdot c = \mu(c') \cdot c = c'c = 0 \; ; \; c, c' \in C\} \cap$$
$$\{r \in \mu(C) = R \mid \; rr' = \mu(c')\mu(c'') = \mu(c'c'') = 0 \; ; \; c, c' \in C\}) = \mu(Ann_C(C))$$

olduğundan

$$Ann(C, R, \mu) = (Ann_C(C), \; \mu(Ann_C(C)), \mu)$$

olur.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Abd El-Bast Z. and Smith, P.F., 1988, Multiplication Modules Comm.Algebra, 755-779.

Ali, M. and Smith,.D., I, 2004, Pure Submodules of Multiplication Modules, Contributions To Algebra and Geometry Volume 45., 61-74.

Ali, M. and Smith,.D., II, 2004, Some Remark on Multiplication and Projective Modules, Communications In Algebra Vol 32, 3897-3909.

Anderson, D. and Al-Shaniafi, Y., 2002, Multiplication Modules and the Ideal, Communications In Algebra, 3383-3390.

Anderson, F.W. and Fuller, K.R., 1974, Rings and Categories of Modules, Springer.

Arvasi, Z., 1997, Crossed Squares and 2-Crossed Modules of Commutative Algebras,Theory and Applications of Categories, 160-181.

Arvasi, Z. and Porter, T., 1996, Simplicial and Crossed Resolutions of Commutative Algebras,Journal of Algebra.426-448.

Arvasi, Z. and Porter, T., 1998, Freeness Conditions for 2-Crossed Modules of Commutative Algebras, Applied Categorical Structures, 455-471.

Atiyah, M.F. and Macdonald, I.G., 1969, Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley Publishing Company.

Blyth,T.S., 1977, Module Theory an Approach to Linear Algebra. Calerendon Press,Oxford.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

Ege, U., 2002, Çarpım Cebri ve Çaprazlanmış Modüller, Doktora tezi, Osmangazi Ünivesitesi.

Ewing, Adkins and Weintraub, 1992, Algebra An Approach Via Module Theory.

Gerstenhaber,M., 1966, On the Deformation of Rings and Algebras, Ann. Math.

Hungerford, T.W., 1973, Algebra, Holt, Rinehart and Winston, Inc.

Kaplansky, I., 1974, Commutative Rings.

Lavendhomme, R. and Lucas Th., 1996, On modules and Crossed Modules, Journal of algebra, 179, 936-963.

Lichtenbaum, S. and Schlessinger, M., 1967, The Cotangent Complex of a Morphism, Trans. American Society, 41-70.

Mac Lane, S., 1958, Extensions and Obstructions for Rings, Illinois J. Math, 316-345.

Naoum, A.G., 1990, Flat Modules and Multiplication Modules, Period.Math. 21, 309-317.

Naoum, A. and Hasan, M.K., 1986, The Resudual of Finitely Generated Multiplication Modules, Arch. Der Math. 46, 225-230.

Porter, T., 1986, Homology of Commutative Algebras and an Invariant of Simis and Vasconceles, J. Algebra, 458-465.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam Ediyor)

Shammu, N.M., 1992, Algebraic and Categorical Structure of Category of Crossed Modules of Algebras, Ph.D. Thesis, U.C.N.W.

Sharp, R.Y., 1990, Steps in Commutative Algebra, Cambrıdge Universty Press.

Smith, P.F., 1988, Some Remarks on Multiplication Modules, Arch. Math, 223-235.

Spindler, K., 1994, Abstract Algebra with Applications, Darmstadt, Germany.

Whitehead, J.H.C., 1949, Combinatorial Homotopy II, Bull. American Math. Society, 453-456.