İzoperimetrik Teorem Hakkında

Şükrü Ünver

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Mayıs 2008

On The Isoperimetric Theorem

Şükrü Ünver

THESIS for MASTER DEGREE

Department of Mathematics

May 2008

İzoperimetrik Teorem Hakkında

Şükrü Ünver

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman:
Prof. Dr. İSMAİL KOCAYUSUFOĞLU

Mayıs 2008

Şükrü ÜNVER'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "İzoperimetrik Teorem Hakkında" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye : Prof. Dr. İsmail KOCAYUSUFOĞLU (Danışman)

Üye : Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ

Üye : Doç. Dr. Nevin GÜRBÜZ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Cumali EKİCİ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Dursun ESER

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURMAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu çalışmanın amacı, izoperimetrik teorem adı verilen, çevreleri eşit, kapalı düzlemsel eğrilerden alanı en büyük olanın tespit edilmesidir.

"**Aynı çevre uzunluğuna sahip tüm kapalı düzlemsel şekiller arasında en büyük alana sahip olan çemberdir.**"

Başka bir deyişle:

"**Aynı alana sahip tüm kapalı düzlemsel şekiller arasında en küçük çevre uzunluğuna sahip olan çemberdir."**

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, çalışma hakkında genel bir bilginin verildiği giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, izoperimetrik teoremin ifadesi ve eşitsizliği verilmiştir.

Üçüncü bölümde, İzoperimetrik teoremin yapılmış ilginç ispatlarından örnekler ortaya konmuştur.

Dördüncü bölümde, bazı düzlemsel geometrik şekiller arasında izoperimetrik teoremin uygulamaları verilmiştir.

Beşinci bölümde ise, izoperimetrik teorem için ortaya koyduğumuz kendi yaklaşımımızın ispatı verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İzoperimetrik teorem, izoperimetrik eşitsizlik ve düzgün çokgen

SUMMARY

The aim of this study, is to discuss about Isoperimetric Inequality.

We can state the Isoperimetric Inequality as

"Among all closed-planer regions with the same perimeter, the CİRCLE has the maximum area."

In another word;

"Among all closed-planer regions with the same area, the CİRCLE has the minumum perimeter."

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, a general ıntroduction will be given.

In the second chapter, Isoperimetric Theorem and Isoperimetric Inequality will be stated.

In the third chapter, some interesting proves of the theorem are given.

In the fourth chapter, some application on the planer shapes of the theorem are discussed.

In the fifth chapter, over original idea about the Isoperimetric Theorem is given.

Key Words: İsoperimetric theorem, isoperimetric inequality and smooth polygon.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarında, gerek derslerimde ve gerekse tez çalışmalarında bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım **Prof. Dr. İSMAİL KOCAYUSUFOĞLU** hocama ve aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1

GİRİŞ

İzoperimetrik eşitsizlik oldukça eski bir problemdir. Teoremin adı Yunanca'dan gelir. "isos = aynı" , "peri = etrafında" ve "metron = ölçü" anlamına gelmektedir. Çevre (= "peri" + "metron") 2-boyutlu kapalı bir bölgenin sınırı boyunca yay uzunluğudur. Dolayısıyla teorem aynı çevre uzunluğuna sahip kapalı düzlemsel şekiller ile ilgilidir.

İzoperimetrik teorem şu şekilde ifade edilebilir :

"***Aynı çevre uzunluğuna sahip tüm kapalı düzlemsel şekiller arasında en büyük alana sahip olan çemberdir.***"

Başka bir deyişle:

"***Aynı alana sahip tüm kapalı düzlemsel şekiller arasında en küçük çevre uzunluğuna sahip olan çemberdir."***

Teorem M.Ö 900' lü yıllardan beri bilinmektedir. Prenses Dido'nun hikayesinde (Miller, A., 2000) teorem ile ilgili bir uygulama bulunmuştur.

Prenses Dido, şimdilerde Lübnan olarak adlandırılan Tyrus dolaylarında yaşıyordu. Babasının ölümünden sonra erkek kardeşi Prenses Dido' yu ülkesinden sınır dışı etti. Prenses de, halkı ile birlikte Kuzey Afrika' da bugün Tunus'un olduğu yerde bulunan Carthage'e gitti ve buranın hükümdarı King Jambas'dan bir arsa satın almak istedi. Ancak onlar Dido' nun gücünden korktukları için tüm araziyi alacağını düşündüler. Kral Jambas, Prenses'e zekice bir teklif sundu. Buna göre, Dido'ya bir boğa verildi ve bu boğanın derisiyle çevreleyebileceği araziyi alabileceği söylendi.

Kralın zekice olduğunu düşündüğü bu teklifi Prenses kabul etti ve dahiyane bir buluş ile herkesi şaşırtacak bir alan elde etti. Prenses, öncelikle boğanın derisini ince şeritlere böldü. Dido, Akdeniz kıyısını bir doğru kabul ederek elde ettiği şeridi bu doğrunun iki ucuna bağladı ve şeridi yarım çember haline getirdi. Böylece Prenses, alabileceği en büyük alanı elde etti. Hikayeye göre, Prenses Dido 8 ile 32 hektar (1 *hek* = 10.000m^2) arası toprak kazandı. Dido, şeridi maksimum alan kaplayacak şekilde arsaya yerleştirdi ve böylece farkında olmadan izoperimetrik teoremi çözdü.

Yüzyıllar boyunca teorem hakkında farklı yaklaşımlar ve ispatlar verilmiştir. Bu çalışmada birkaç ispattan bahsedecek, özellikle 5. bölümde farklı-özgün bir yaklaşım sunacağız.

Eskişehir, 2008 Şükrü Ünver

BÖLÜM 2

İZOPERİMETRİK TEOREM HAKKINDA

2.1 İzoperimetrik İfade Ve Eşitsizlik

Şimdi izoperimetrik teoremin ifadesini ve izoperimetrik eşitsizliği verelim. (Bogomolny, A., 2005)

İfade 1: *Aynı çevreye sahip olan bütün düzlemsel şekiller arasında en büyük alana sahip olan çemberdir.*

İfade 2: *Aynı alana sahip olan bütün düzlemsel şekiller arasında en küçük çevreye sahip olan çemberdir.*

Tanım 2.1.1 (İzoperimetrik Eşitsizlik)

L ve A düzlemsel bir şeklin sırayla çevresi ve alanı olsun.

$$\frac{L^2}{A} \geq 4\pi$$

eşitsizliğine izoperimetrik eşitsizlik denir. Eşitlik durumunun sadece çember için geçerli olduğu basitçe gösterilebilir. Çember için, $L = 2\pi r$ ve $A = \pi r^2$ eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$\frac{L^2}{A} = \frac{(2\pi r)^2}{\pi r^2} = 4\pi$$

İzoperimetrik eşitsizliği daha yüksek boyutlu uzaylara taşıyarak genelleştirebiliriz. İzoperimetrik eşitsizliğin 3-boyutlu uzayda karşılığı, S ve V üç boyutlu bir cismin sırasıyla yüzey alanı ve hacmi olmak üzere,

$$36\pi V \leq S^3$$

olarak verilir.

Aslında *İfade 1* in çözümünde çember elde etmek oldukça tatmin edicidir. Çünkü çember yuvarlaklığı ile eşsizdir ve merkezinden geçen her doğruya göre simetriktir. Çember mükemmel bir şekildir, dolayısıyla da izoperimetrik teoremi sağlayabilecek iyi bir adaydır. Çokgenler ise çemberlere göre daha az düzgün olduklarından, teoremin çözümü için de iyi bir aday değillerdir.

Çokgenler ailesinde aşağıdaki bazı temel sonuçları verebiliriz.

1- Aynı çevreye sahip bütün üçgenler arasında, en büyük alana sahip olan eşkenar üçgendir.

2- Aynı çevreye sahip bütün dörtgenler arasında, en büyük alana sahip olan karedir.

3- Özel olarak, aynı çevreye sahip bütün dikdörtgenler arasında, en büyük alana sahip olan karedir.

4- Aynı çevreye sahip düzgün çokgenler arasında en büyük alana sahip olan kenar sayısı fazla olanıdır.

Burada verilen bu sonuç 5. bölümde verdiğimiz ispatımızın temelini oluşturmaktadır.

5- Alan verildiği takdirde yukarıdaki her ifadenin tersi de geçerlidir.

6- Sabit bir çevreye sahip kapalı düzlemsel şekiller arasında en büyük alana sahip olan dairesel eğridir.

BÖLÜM 3

İZOPERİMETRİK TEOREME FARKLI YAKLAŞIMLAR

İzoperimetrik teoremin pek çok farklı ispatı verilmiştir. Biz burada birkaç ilginç ispat vereceğiz.

3.1 İzoperimetrik Eşitsizliğin Temel İspatı

İzoperimetrik teorem, genellikle düzlemde kapalı bir eğrinin çevre ve alanını ilişkilendiren bir eşitsizlik ile ifade edilir (Dergiades, N., 2002).

Teorem: L, düzlemde kapalı bir eğrinin çevresi ve A da eğri tarafından çevrelenen bölgenin alanı olmak üzere,

$$\frac{L^2}{A} \geq 4\pi$$

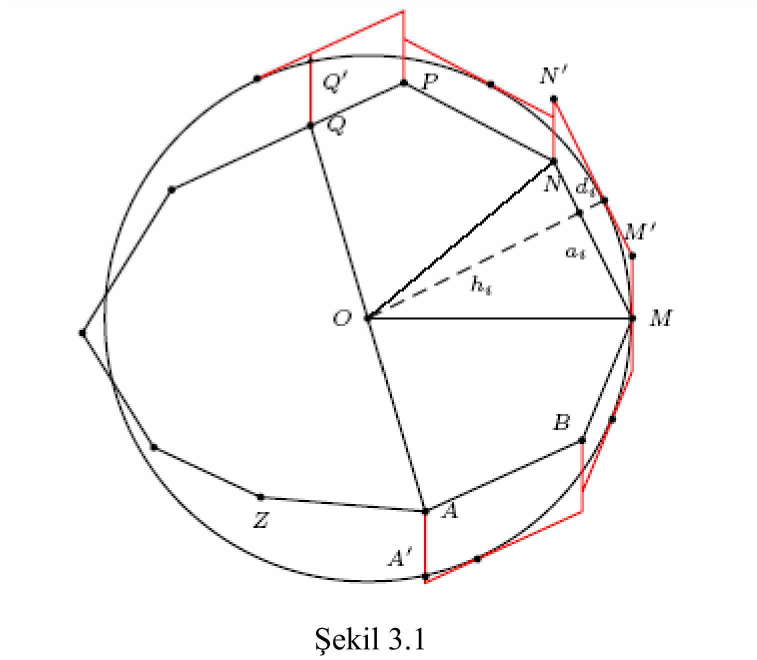
dir.

İspat : $ABM...Z$ bir çokgen olmak üzere, çokgen içindeki AQ doğrusu çokgeni öyle iki parçaya böler ki ,

(1) $AB + BM + ... + PQ = \dfrac{L}{2}$

(2) $\mathrm{A}(ABM...PQA) = A_1$ olmak üzere $A_1 \geq \dfrac{A}{2}$

şartlarını sağlar.



Şekil 3.1

O, AQ nun orta noktası, M ise $ABM...PQA$ nın O'ya en uzak noktası, $OM = R$ olmak üzere (O,R) çemberini çizelim. A ve Q'dan OM'ye A', Q' noktalarıyla kesişen dikeyler çizelim.

Simetriden dolayı $S = \mathrm{A}(AA'MQ'QA)$ alanı, çemberin alanının yarısına eşittir. Yani,

$$S = \frac{1}{2}\pi R^2$$

$ABM...PQA$ çokgeninin dışı çembere değecek şekilde temel kenarları $MN = a_i$ ve diğer kenarlarda AA' ye paralel olacak şekilde paralelkenarlar kurar.

OMN nin yüksekliği h_i ve $MM'NN'$ paralelkenarının yüksekliği d_i olmak üzere,

$$h_i + d_i = R$$

dir.

Ayrıca A_1 alanı, $OAB,...,OMN,...,OPQ$ üçgenlerinin alanlarının toplamına eşittir. Dolayısıyla,

$$A_1 = \frac{1}{2}\sum_i a_i h_i$$

olur.

A_2 alanı, paralelkenarların alanı olmak üzere,

$$\begin{aligned} A_2 &= \sum_i a_i h_i \\ &= \sum_i a_i (R - h_i) \\ &= \sum_i a_i R - \sum_i a_i h_i \\ &= R\sum_i a_i - \sum_i a_i h_i \\ &= R\frac{L}{2} - 2A_1 \end{aligned}$$

bulunur.

$$A_1 + A_2 \geq S$$

olduğundan,

$$A_1 + A_2 \geq \frac{1}{2}\pi R^2$$

$$A_2 = R\frac{L}{2} - 2A_1$$

ifadesi yerine konursa,

$$A_1 + R\frac{L}{2} - 2A_1 \geq \frac{1}{2}\pi R^2$$

$$R\frac{L}{2} - A_1 \geq \frac{1}{2}\pi R^2$$

olup gerekli işlemler yapılırsa,

$$\pi R^2 - LR + 2A_1 \leq 0$$

$$\pi(R - \frac{L}{2\pi})^2 - (\frac{L^2}{4\pi} - 2A_1) \leq 0$$

elde edilir. Buradan da şu sonuca ulaşmak mümkündür.

$$L^2 \geq 8\pi A_1 \geq 4\pi A$$

Sonuç olarak,

$$\frac{L^2}{A} \geq 4\pi$$

bulunur.

Çember için eşitsizlik, eşitliğe dönüştüğünden sabit L çevresine sahip bütün kapalı eğriler içinde en büyük alana sahip olan çemberdir sonucuna varılır.

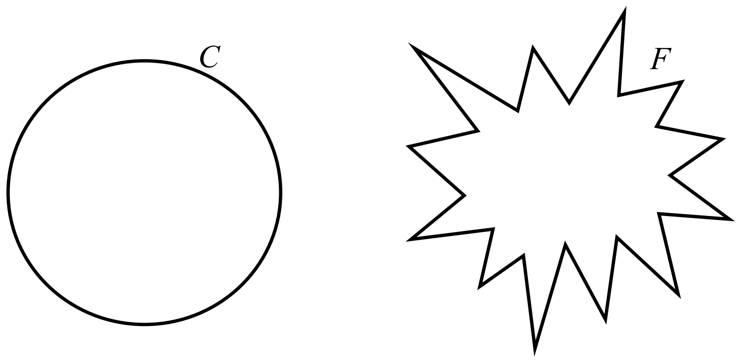
3.2 İzoperimetrik İfadenin İspatı

Bu kısımda da izoperimetrik ifadenin ispatından bahsedelim (Bogomolny, A., 2005).

İfade 1: *Aynı çevreye sahip olan bütün düzlemsel şekiller arasında en büyük alana sahip olan çemberdir.*

İfade 2: *Aynı alana sahip olan bütün düzlemsel şekiller arasında en küçük çevreye sahip olan çemberdir.*

İspat: *İfade 1* i A ile ve *İfade 2* yi B ile gösterelim. Öncelikle A nın doğru olduğunu farz edelim ve B yi ispatlayalım. Bunun için B nin yanlış olduğunu kabul edelim. O halde verilen bir C çemberi ile aynı alana ve daha küçük çevreye sahip bir F düzlemsel şekli vardır.



Şekil 3.2

Matematiksel olarak,

$$\mathrm{A}(C) = \mathrm{A}(F) \qquad \text{ve} \qquad \mathrm{P}(F) \leq \mathrm{P}(C)$$

dir.

F ile aynı çevreye sahip başka bir D çemberini ele alalım. Çemberin çevresi ile alan doğru orantılı ve

$$\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(F) \leq \mathrm{P}(C)$$

olduğundan D çemberinin alanı C çemberinin alanından daha küçük olur. Yani,

$$\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(F)$$

iken

$$\mathrm{A}(D) \leq \mathrm{A}(F)$$

olur. Bu ise A ifadesi ile çelişir. O halde;

$$\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$$

dir.

Şimdi de B nin doğru olduğunu farz edelim ve A nın da doğru olduğunu gösterelim. Bunun için A nın yanlış olduğunu kabul edelim.

O halde verilen bir C çemberi ile aynı çevreye ve daha büyük alana sahip olan bir F düzlemsel şekli vardır.

$$\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(F)$$

iken

$$\mathrm{A}(F) \geq \mathrm{A}(C)$$

dir.

F ile aynı alana sahip başka bir D çemberini ele alalım. Çemberin çevresi ile alan doğru orantılı ve

$$\mathrm{A}(D) = \mathrm{A}(F) \geq \mathrm{A}(C)$$

olduğundan D çemberinin çevresi C çemberinin çevresinden daha büyük olur. Yani,

$$\mathrm{A}(D) = \mathrm{A}(F)$$

iken

$$\mathrm{P}(D) \geq \mathrm{P}(F)$$

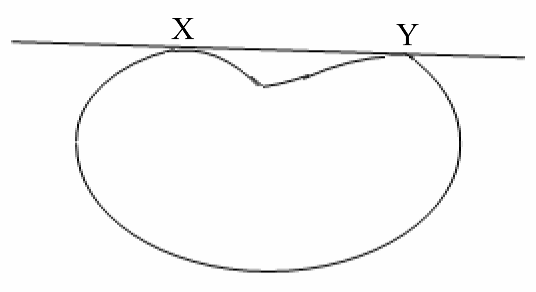
olur. Bu ise B ifadesi ile çelişir. O halde B doğru iken A da doğrudur.

$$\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}$$

dır.

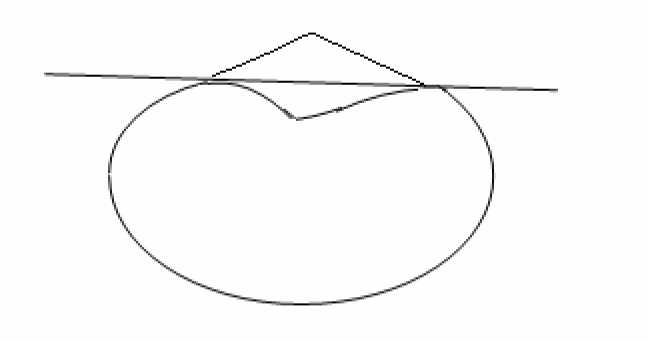
Şimdiye kadar A nın ya da B nin doğru olduğunu değil, ancak ikisinin birlikte doğru ya da yanlış olduğunu göstermiş olduk. Böylece aşağıdaki ispatı inceleyelim.

İfade 1 in ispatı: İspat pek çok basamağı içerir. Öncelikle *İfade 1* de bahsedilen şekle örnek olarak aşağıdaki konveks şekli ele alalım. Şekil 3.3 üzerindeki X ve Y noktalarından geçen doğruyu eksen kabul ederek arada kalan parçayı yansıtalım.



Şekil 3.3

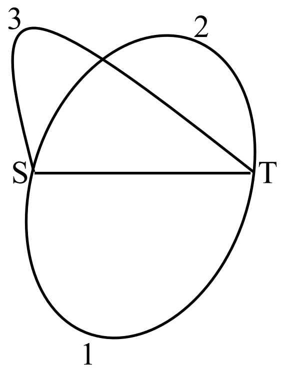
Elde edilen ikinci şeklin alanı daha büyüktür. O halde şeklin çevre uzunluğu değişmediği halde alanı büyütülebilir.



Şekil 3.4

İspatın ikinci adımında ise aşağıdaki lemmayı ispatlayacağız.

Lemma 1: S ve T *İfade 1* de çözülen şeklin sınırı üzerinde seçilmiş 2 nokta olsun ve çevreyi iki eşit parçaya ayırsınlar. O halde ST doğrusu şeklin alanını iki eşit parçaya ayırır.



Şekil 3.5

İspat: S1T nin alanının T2S den büyük olduğunu varsayalım. ST yi eksen kabul ederek S1T2 ile aynı çevreye fakat daha büyük alana sahip S1T3 elde edilir. Bu ispat aşağıdaki sorunun kısmen çözümünde yeterli olacaktır.

" *Verilen bir uzunluğa ve ST gibi bir doğru üzerindeki uç noktalara sahip olan bütün yaylar arasında en büyük alanı çevreleyeni bulunuz*".

Lemma 2: ST doğrusu üzerinde verilen bir uzunluğa ve uç noktalara sahip bütün yayları düşünelim. Yay ile doğru arasında maksimum alana sahip olan bir yarım çemberdir.

İspat: Çemberde çapı gören çevre açı dik açıdır, buradan en büyük alana sahip olan yay içine çizilen üçgenin dik olduğunu gösterilirse, bu yayın bir yarım çember olduğu ispatlanır. Eğer yay içine çizilen bu üçgen dik değilse S nin noktaları kaydırılarak üçgen dikleştirilir. Böylece yayın bir kısmının yeri değiştirilmiş olur. Ayrıca iki kenarı verilen bütün üçgenler içinde en büyük alana sahip olan dik açı oluşturandır. Buradan şekillerde taralı alanlar değişmediği halde üçgenin alan ve ST doğrusu ile yeni yay arasındaki toplam alanın arttığı görülür. Öyle ise, verilen eğri bir yarım çember olana dek alan her zaman S ve T yi hareket ettirerek artırılabilir. Bu ise *Lemma 2* ile birlikte *İfade 1* i de ispatlar.

Ancak *İfade 1* in ispatı bir hatayı da içerir, çünkü her üç adımda da şartlara uyan bir şekil olduğunu kabul ettik ve lemmaları bu varsayımlar altında ispatladık. Aynı çevreye sahip bütün düzlemsel şekiller arasında en büyük alana sahip bir şekil olduğunu farz ettik. Bu varsayım altında bu şeklin çember olduğunu ispatladık. H $\Rightarrow$ A gibi bir H hipotezinin varlığına dikkat edelim. Öyle ki A yı ispatlamak için H nin doğru olduğunu göstermeliyiz.

İfade 1 için optimal bir şeklin varlığı açık değildir. Örneğin, eğer *İfade 1* verilen bir çevre için en küçük alana sahip olan şekli tanımlamamızı gerektirseydi bunu gösteremezdik. Ancak bu ispatı gerçekten tamamlamamız için daha az önemli bir noktadır. H nin ispatı ise oldukça basit fakat Calculus un temel elemanlarını gerektirmektedir.

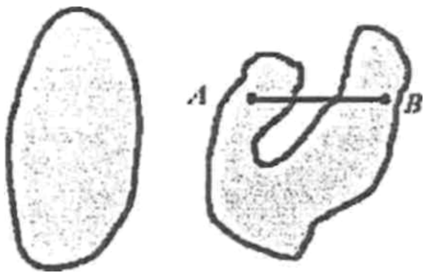
3.3 Kosinüs Teoremi Yardımı İle İspat

Şimdi yapacağımız ispatın pek çok basamağı vardır. Bu ispat (Millennium Mathematics Project, 2002) den alınmıştır. İspata bir büyük varsayımla başlayalım:

"*Aynı çevreye sahip tüm düzlemsel şekiller arasında en büyük alana sahip olan bir şekil kesinlikle vardır*."

l. Adım : Aşağıdaki iki eğriyi ele alalım. Soldaki eğri konveks bir eğridir, öyle ki eğri içinden alınan herhangi iki noktayı birleştiren doğru yine eğri içindedir. Sağdaki eğri ise bu şartı sağlamadığından konveks değildir.

İspatın birinci adımında çevreler eşit iken maksimum alana sahip olan şeklin konveks olduğu göstereceğiz.



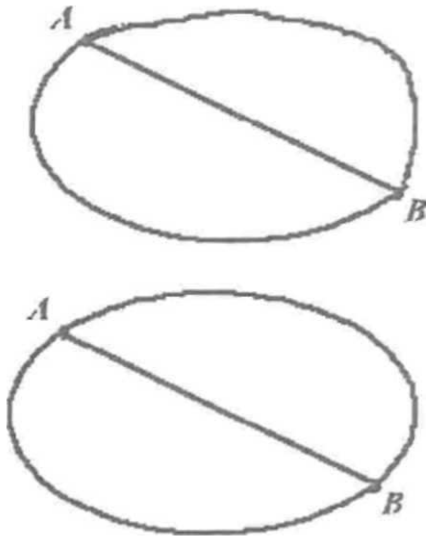
Şekil 3.6

Yukarıda gösterildiği gibi konveks olmayan bir şekil alalım. Şeklin C ve D noktalarında geçen bir AB doğrusu çizelim. C ve D arasında kalan eğri parçası yansıtılırsa, aynı çevreye sahip yeni bir şekil elde edilir. Ancak bu yeni şeklin alanı artmış olur. Bu işlem şekil konveks olana kadar tekrar edilebilir. Böylece şu sonuca varılır:

"*Verilen bir çevre için maksimum alana sahip olan şekil konvekstir.*"

Şekil 3.7

2.Adım: Bu adımda ise maksimum alana sahip olan şeklin çapına göre simetrik olduğunu göstereceğiz. Herhangi bir S konveks şeklini ve şeklin çevresi üzerinde bir A noktasını alalım. A dan yarım çevre uzaklığında bir B noktası daha alalım ve bu noktaları birleştirelim. Böylece AB doğrusu S şeklini aynı çevreye sahip olan Sl ve S2 gibi iki parçaya bölen bir çap olur.



Şekil 3.8

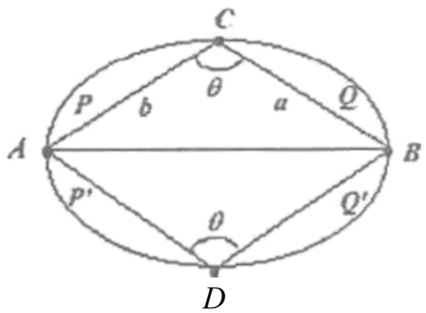
Varsayalım ki S1 in alanı S2 nin alanından daha büyük olsun. Yukarıdaki şekildeki gibi S1 i yansıtalım. Oluşan yeni şekil AB çapına göre simetriktir ve toplam alanı

$$2S1 > S1 + S2 = S$$

dir. S1 ve S2 aynı çevrelere sahip olduğundan bu iki şeklin çevreleri de birbirine eşittir. Ancak simetrik olan şeklin alan orjinal şeklin alanından büyüktür. A, S şeklinin çevresi üzerinde herhangi bir nokta olduğundan, şu genellemeye varılır:

"*En büyük alana sahip olan şekil, çapına göre simetrik olmalıdır*."

3. Adım: Bu adımda ise ACB açısının dik açı olmak zorunda olduğunu göstereceğiz. S, AB çapına göre simetrik olan bir şekil ve C, çevre üzerinde herhangi bir nokta ve D de AB doğrusuna göre onun yansıması olsun (öyle ki D noktası da AB simetri doğrusu olduğundan çevre üzerinde olmalıdır). Böylece şekil $ACBD$ gibi bir uçurtma şekli ve P, Q ve simetrikleri olan P' ve Q' parçaları oluşturur.



Şekil 3.9

Parçalar değişik şekiller verecek şekilde dayanak noktalarından hareket ettirilebilirler. Ancak her birinin çevresi orijinal şeklin çevresine eşittir. Tüm bu şekillerin alanı P, Q, P', Q' parçalarının hareket ettirilmesiyle oluşan uçurtma şeklinin alanı ve alanlarında bir değişiklik olmayan dört parçanın alanlarının toplamına eşittir. $ACBD$ nin alanı ise ACB değişken açısının ölçümü ile hesaplanır.

ACB açısına θ diyelim dolayısıyla,

$$A(ACBD) = a.b.\sin\theta$$

ya eşit olur. Bu alan ise ancak $\sin\theta$ nun maksimum olması ile maksimum olur ki bu da a ve b değişmediğinden $\theta = \frac{\pi}{2}$ veya $\theta = 90^o$ olması ile mümkündür. Sonuç olarak:

"*Maksimum alana sahip olan şekil, 90° lik ACB gibi bir açı ile elde edilir.*"

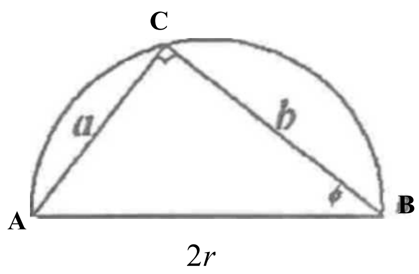
4. Adım: Şimdiye kadar verilen bir çevre için en büyük alana sahip olan şeklin, aşağıdaki özeliklere sahip olduğunu gördük:

1) Konvekstir,

2) Bir çapa göre simetriktir,

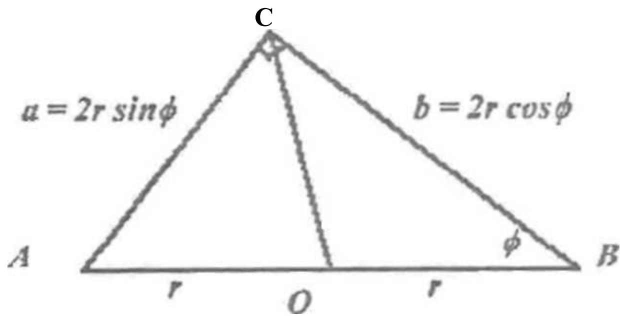
3) Şeklin çevresi üzerinde herhangi bir nokta ve bir çap ile oluşturduğumuz üçgende çapı gören çevre açı diktir.

Bunlar da bize bu şeklin çember olmak zorunda olduğunu verir.



Şekil 3.10

C dik açısı olmak üzere ACB dik üçgenini ele alalım. AB istediğimiz gibi çaptan geçsin. $|AB| = 2r$, $|AC| = a$, $|BC| = b$ ve ABC açısı ϕ olmak üzere kolayca trigonometrik bağıntılardan, $a = 2r\sin\phi$ ve $b = 2r\cos\phi$ dir.



Şekil 3.11

O, AB nin orta noktası ve $|AO| = |BO| = r$ olsun. ACB etrafındaki eğrinin dairesel olduğunu göstermek için $|OC| = r$ olduğunu göstermeliyiz. Aşağıda gösterilen kosinüs teoreminim BOC üçgenine uygulanırsa,

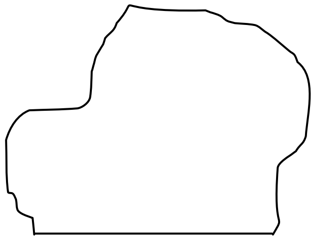
$$\begin{aligned} |OC|^2 &= r^2 + (2r\cos\phi)^2 - 2\cdot 2r\cos\phi \cdot r\cos\phi \\ &= r^2 + 4r^2\cos^2\phi - 4r^2\cos^2\phi \\ &= r^2 \end{aligned}$$

dir. Yani $|OC| = r$ dir. Sonuç olarak en büyük alanı veren şekil çemberdir.

3.4 Çubuk ve Yay Yardımıyla İspat

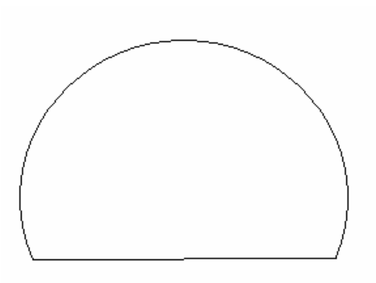
Problem: L uzunluğuna sahip bir yayın her iki ucu S uzunluğuna sahip bir çubuğa bağlansın. Bu şekilde oluşan bütün düzlemsel bölgeler arasında en büyük alana sahip olanı bulunuz.

Çözüm: $S > \mathbf{0}$ için problemi bilinen bir hale getirmeye çalışalım. Öncelikle çubuğu x-eksenine paralel olacak şekilde yerleştirelim. Çubuğun uç noktaları, çubuğun şeklini belirler. Yay pek çok şekil alabileceğinden, verilen bir çevre ile yay çubuğun uç noktalarına birleştirilirse keyfi bir eğri oluşur (Şekil 3.12).



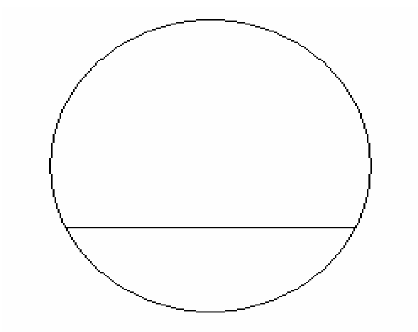
Şekil 3.12

Oluşabilecek şekillerden biri ise, bir daire parçası ile çubuğu içeren dairesel bir yaydır (Şekil 3.13).



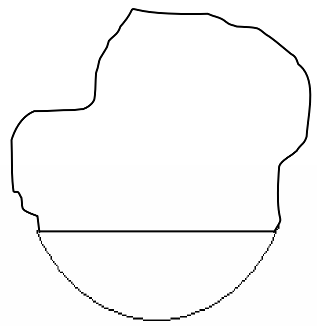
Şekil 3.13

Şekil başka bir daire parçası ile tamamlanırsa, Şekil 3.14 elde edilir.



Şekil 3.14

Öte yandan aynı daire parçası keyfi olarak oluşturulan başka bir şekle eklenirse Şekil 3.15 elde edilir.



Şekil 3.15

Açıkça görülüyor ki Şekil 3.14 deki çember aynı çevreye sahip tüm eğriler içinde en büyük alana sahip olandır. Aynı daire parçası her iki şekilden de çıkarılırsa şu sonuca varılır. Yay ve çubuk yardımıyla oluşturulan alan, Şekil 3.13 deki gibi çembersel bir yay ile maksimum olur.

BÖLÜM 4

BAZI DÜZLEMSEL ŞEKİLLERİN ÇEMBER İLE KARŞILAŞTIRILMASI

Bu bölümde bazı düzlemsel şekillerle çemberin kıyaslanması yapılacaktır. Burada çözülen problemler genellikle (Kara, E. T., 2005) yüksek lisans tezinden alınmıştır.

Problem 4.1: Eşkenar üçgenin çevresi ile çemberin çevresi eşit olsun. Çemberin alanının eşkenar üçgenin alanından büyük olduğunu gösteriniz.

Çözüm 4.1: Eşkenar üçgenin kenarları a ve çemberin yarıçapı r olsun.

$$P(\ddot{U}) = 3a$$

$$P(Ç) = 2\pi r$$

$$P(\ddot{U}) = P(Ç)$$

olsun .

O halde $r = \dfrac{3a}{2\pi}$ dir. Şimdi alanlarını kıyaslayalım.

$$\begin{aligned} A(Ç) - A(\ddot{U}) &= \pi r^2 - \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \\ &= \pi \frac{9a^2}{4\pi^2} - \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \\ &= \frac{a^2}{4}\left(\frac{9}{\pi} - \sqrt{3}\right) > 0 \end{aligned}$$

Yani, $A(Ç) > A(\ddot{U})$ dür.

Problem 4.2: Eşkenar üçgenin alanı ile çemberin alanı eşit olsun. Çemberin çevresinin eşkenar üçgenin çevresinden küçük olduğunu gösteriniz.

Çözüm 4.2:

$$\pi\, r^2 = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

$$r^2 = \frac{\sqrt{3}a^2}{4\pi}$$

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\pi}}$$

Şimdi çevreleri kıyaslayalım.

$$[\mathrm{P}(\ddot{U})]^2 - [\mathrm{P}(Ç)]^2 = 9a^2 - 4\pi \frac{a^2}{4}\frac{\sqrt{3}}{\pi}$$

$$= a^2(9 - \sqrt{3}\pi) > 0$$

olur.

O halde, $\mathrm{P}(Ç) < \mathrm{P}(\ddot{U})$ dür.

Problem 4.3: Dikdörtgenin çevresi ile çemberin çevresi eşit olsun. Çemberin alanının dikdörtgenin alanından büyük olduğunu gösteriniz.

Çözüm 4.3:

$$\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(Ç)$$

$$2\pi\, r = 2(a+b)$$

$$r = \frac{a+b}{\pi}$$

Şimdi alanları kıyaslayalım.

$$\mathrm{A}(Ç) - \mathrm{A}(D) = \pi\, r^2 - ab$$

$$= \pi \frac{(a+b)^2}{\pi^2} - ab$$

$$= \frac{(a+b)^2 - \pi\, ab}{\pi} > 0$$

olur.

Buradan, $\mathrm{A}(Ç) > \mathrm{A}(D)$ dir.

Lemma :

$$(a-b)^2 > 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0$$

$$a^2 + b^2 > 2ab$$

$2 > \pi - 2$ olduğundan,

$$a^2 + b^2 > 2ab > (\pi - 2)ab$$

$$a^2 + b^2 > (\pi - 2)ab$$

$$a^2 + b^2 > \pi\, ab - 2ab$$

$$(a+b)^2 > \pi\, ab$$

Problem 4.4: Çemberin ve dikdörtgenin alanları eşit olsun. Çemberin çevresinin dikdörtgenin çevresinden küçük olduğunu gösteriniz.

Çözüm 4.4:

$\mathrm{A}(Ç) = \mathrm{A}(D)$ olsun

$$\pi r^2 = ab$$

$$r = \sqrt{\frac{ab}{\pi}}$$

Şimdi çevreleri kıyaslayalım.

$$[\mathrm{P}(D)]^2 - [\mathrm{P}(Ç)]^2 = [2(a+b)]^2 - (2\pi r)^2$$

$$= 4[(a+b)^2 - \pi^2 \frac{ab}{\pi}]$$

$$= 4[(a+b)^2 - \pi\, ab] > 0$$

Böylece, $\mathrm{P}(D) > \mathrm{P}(Ç)$ dir.

Problem 4.5: Çember ile karenin çevreleri eşit olsun. Çemberin alanının karenin alanından büyük olduğunu gösteriniz.

Çözüm 4.5:

$\mathrm{P}(Ç) = \mathrm{P}(K)$ olsun.

$$2\pi r = 4a$$

$$r = \frac{2a}{\pi}$$

Şimdi alanları kıyaslayalım.

$$\mathrm{A}(Ç) - \mathrm{A}(K) = \pi r^2 - a^2$$

$$= \pi \frac{4a^2}{\pi^2} - a^2$$

$$= a^2 (\frac{4}{\pi} - 1) > 0$$

O halde, $\mathrm{A}(Ç) > \mathrm{A}(K)$ dır.

Problem 4.6: Çemberin alanı ile karenin alanı eşit olsun. Çemberin çevresinin karenin çevresinden küçük olduğunu gösteriniz.

Çözüm 4.6:

$\mathrm{A}(Ç) = \mathrm{A}(K)$ olsun.

$$\pi r^2 = a^2$$

$$r = \frac{a}{\sqrt{\pi}}$$

Şimdi çevrelerin karelerini kıyaslayalım.

$$[\mathrm{P}(K)]^2 - [\mathrm{P}(Ç)]^2 = (4a)^2 - (2\pi r)^2$$

$$= 16a^2 - 4\pi^2 \frac{a^2}{\pi}$$

$$= 4a^2(4-\pi) > 0$$

Dolayısıyla, $\mathrm{P}(Ç) < \mathrm{P}(K)$ dır.

Problem 4.7: Çember ile düzgün altıgenin çevreleri eşit olsun. Çemberin alanının düzgün altıgenin alanından büyük olduğunu gösteriniz.

Çözüm 4.7:

$\mathrm{P}(Ç) = \mathrm{P}(A)$ olsun.

$$2\pi r = 6a$$

$$r = \frac{3a}{\pi}$$

Şimdi alanları kıyaslayalım.

$$\mathrm{A}(Ç) - \mathrm{A}(A) = \pi r^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

$$= \pi \frac{9a^2}{\pi^2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

$$= 3a^2\left(\frac{3}{\pi} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) > 0$$

Buradan, $\mathrm{A}(Ç) > \mathrm{A}(A)$ dır.

Problem 4.8: Çember ile düzgün altıgenin alanları eşit olsun. Çemberin çevresinin düzgün altıgenin çevresinden küçük olduğunu gösteriniz.

Çözüm 4.8:

$\mathrm{A}(Ç) = \mathrm{A}(A)$ olsun.

$$\pi r^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

$$r^2 = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2\pi}$$

Şimdi çevrelerin karelerini kıyaslayalım.

$$[\mathrm{P}(Ç)]^2 - [\mathrm{P}(A)]^2 = (2\pi r)^2 - (6a)^2$$

$$= 4\pi^2 \frac{3\sqrt{3}a^2}{2\pi} - 36a^2$$

$$= 3a^2(2\sqrt{3}\pi - 12) < 0$$

Yani, $\mathrm{P}(Ç) < \mathrm{P}(A)$ dır.

BÖLÜM 5

FARKLI BİR YAKLAŞIMLA TEOREMİN İSPATI

Bu bölümde, şimdiye kadar yapılan ispatlardan farklı olarak kendi yaklaşımımızı ortaya koyacağız. Teorem 5.2 ile verilen;

"*Düzgün çokgenlerin çevre uzunlukları sabit kalmak şartıyla, kenar sayısı artırıldıkça alanı büyür*"

ifadesinin ispatını vereceğiz. *Çokgensel yaklaşım* adını verebileceğimiz bu yaklaşımda öncelikle düzgün çokgenler için genel bir alan formülü ortaya koyup, ispatı yapılacaktır. Daha sonra çevre uzunluğu sabit kalmak üzere düzgün çokgenlerin kenar sayısı arttıkça alanının büyüdüğü ispatlanacaktır.

Şimdi Teorem 5.2 için elde ettiğimiz düzgün çokgenler için alan formülünü verelim.

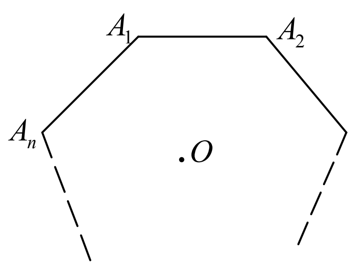
5.1 Düzgün Çokgen İçin Bir Alan Formülü

Teorem 5.1: Sonlu $n \in IN$ sayısı için kenar uzunluğu a br olan düzgün bir n-genin alanı,

$$\mathrm{A}(Ç) = \frac{n.a^2}{4}\cot(\frac{180}{n})$$

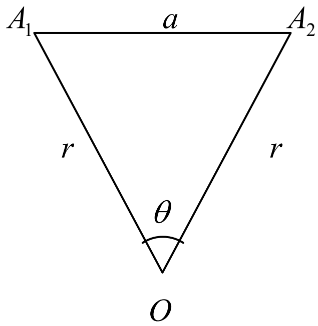
olur.

İspat 5.1: Düzgün çokgenimiz, $A_1A_2...A_n$ ve çevrel çemberin merkezi O olsun.



Şekil 5.1

$|OA_1|=|OA_2|=...=|OA_n|=r$ diyelim. Düzgün çokgenimizde n tane, birbirine eş olan OA_1A_2, OA_2A_3,…, $OA_{n-1}A_{n-2}$ üçgenleri oluşturalım. Bahsedilen ikizkenar üçgenlerden birinin alanını bulalım.



$$A(A_1OA_2)= \frac{1}{2}r\cdot r\sin\theta \text{ dır.} \qquad (1)$$

Buradaki tepe açısı için $\theta=\dfrac{360}{n}$ diyebileceğimiz açıktır.

Bu üçgende sinüs teoremini uygulayalım.

$$\frac{r}{\sin(90-\frac{\theta}{2})}=\frac{a}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \qquad r=\frac{a\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \qquad r=\frac{a\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow \qquad r = \frac{a}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

Bulduğumuz bu ifadeyi (1) eşitliğinde yerine yazalım.

$$A(A_1OA_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2\sin\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{a}{2\sin\frac{\theta}{2}}\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{a^2}{4}\cdot\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{a_2}{4}\cot\frac{\theta}{2}$$

$\theta = \frac{360}{n}$ olduğu düşünülürse

$$A(A_1OA_2) = \frac{a^2}{4}\cot\frac{180}{n}$$

O halde,

$$A\left(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3...\mathrm{A}_\mathrm{n}\right) = n\cdot\frac{a^2}{4}\cot\frac{180}{n}$$

$$= \frac{n.a^2}{4}\cot\frac{180}{n}$$

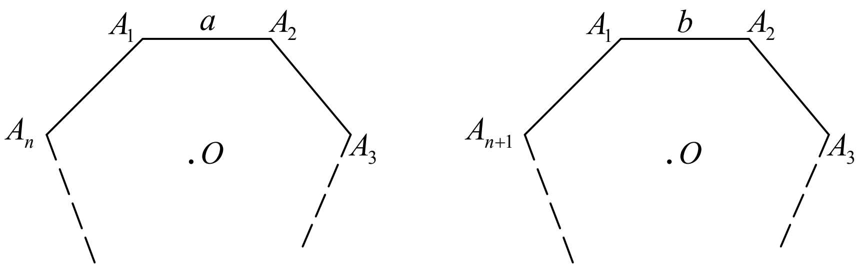
bulunur.

Bu aşamadan sonra izoperimetrik teorem için kendi düşüncemizi ortaya koyabiliriz. Bizim burada yapacağımız, aşağıdaki teoremin doğruluğunu kanıtlamak olacaktır.

5.2 Çokgensel Yaklaşımla İspat

Teorem 5.2 : Düzgün çokgenlerin çevre uzunlukları sabit kalmak şartıyla, kenar sayısı artırıldıkça alanı büyür.

İspat 5.2: Ç1: $A_1A_2...A_n$ düzgün n-genimizin bir kenar uzunluğu a olsun. Ç2 : $A_1A_2...A_{n+1}$ düzgün ($n+1$) – genimizin bir kenar uzunluğu b olsun.



Şekil 5.2

$\text{P}(Ç_1) = \text{P}(Ç_2)$ için $\text{A}(Ç_1) < \text{A}(Ç_2)$ olduğunu göstereceğiz.

$$\text{P}(Ç_1) = \text{P}(Ç_2)$$

$$n.a = (n+1)\cdot b$$

$$b = \frac{n\cdot a}{n+1} \qquad (2)$$

$$\mathrm{A}(Ç_1) = \frac{na^2}{4}\cot\frac{180}{n}$$

$$\mathrm{A}(Ç_2) = \frac{(n+1)b^2}{4}\cot\frac{180}{n+1}$$

$\mathrm{A}(Ç_1) < \mathrm{A}(Ç_2)$ olmalı:

$$\frac{(n+1)b^2}{4}\cot\frac{180}{n+1} - \frac{na^2}{4}\cot\frac{180}{n} > 0$$

eşitsizliğinde (2) eşitliğini kullanalım.

$$\frac{(n+1)(\frac{na}{n+1})^2}{4}\cot\frac{180}{n+1} - \frac{na^2}{4}\cot\frac{180}{n} > 0$$

$$\frac{n^2a^2}{4(n+1)}\cot\frac{180}{n+1} - \frac{na^2}{4}\cot\frac{180}{n} > 0$$

$$\frac{na^2}{4}[\frac{n}{n+1}\cot\frac{180}{n+1} - \cot\frac{180}{n}] > 0$$

$$\frac{na^2}{4}[\frac{n\cot(\frac{180}{n+1}) - (n+1)\cot(\frac{180}{n})}{n+1}] > 0$$

$$\frac{n.a^2}{4(n+1)}[n\cot(\frac{180}{n+1}) - (n+1)\cot(\frac{180}{n})] > 0$$

Bu eşitsizliğin doğru olması,

$$n\cot(\frac{180}{n+1}) - (n+1)\cot(\frac{180}{n}) > 0$$

olmasına bağlıdır.

Bu eşitsizliğin doğruluğunu matematiksel program MAPLE yardımıyla aşağıdaki şekilde verebiliriz:

$n \geq 3$ olmak üzere,

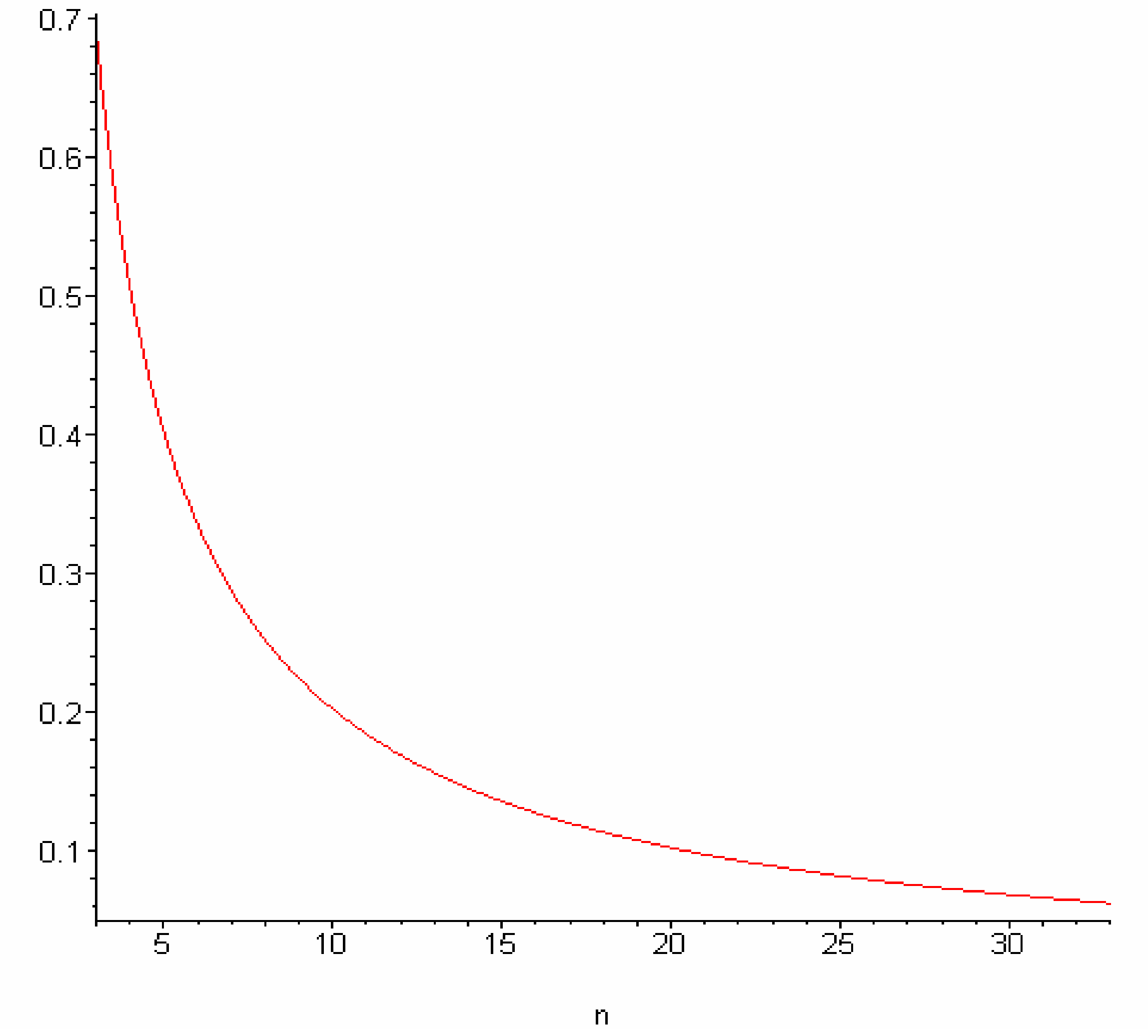
$$F(n) = n\cot(\frac{180}{n+1}) - (n+1)\cot(\frac{180}{n})$$

fonksiyonunun grafiğini Maple programına çizdirirsek, aşağıdaki grafikle karşılaşırız.

```
> A:=n*cot(Pi/(n+1))-(n+1)*cot(Pi/n);
```

$$A := n\cot\left(\frac{\pi}{n+1}\right) - (n+1)\cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

```
> plot(A,n=3..33);
```



Grafikten de açıkça görüldüğü üzere F fonksiyonunun değerleri hep pozitiftir. Bu ise teoremin doğru olduğunu kanıtlar. Bu noktadan sonra teoremi ifade edersek düzgün çokgenin çevresini değiştirmeden kenar sayısı artırıldığında alanı büyür.

Sonuç olarak şunu söyleyebiliriz:

"Kenar sayısı sonsuza götürüldüğü zaman düzgün çokgenimiz en mükemmel şekil olan çember olacaktır."

KAYNAKLAR

Alan Siegel, An Historical Review of The Isoperimetric Theorem in 2-D, and its place in Elemantary Planer Geometry, Courant Institute of Mathematical Sciences New York University

Alexander Bogomolny, Isoperimetric Inequality, Available at http://www.cut-the-knot.org/(2004/07/02)

Andrew Miller, The Isoperimetric Problem: A Motivated Look At the Calculus of Variations, (2000)

Kara, E. T., İzoperimetrik Teorem Üzerine, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi, (2005)

Milennium Mathematics Project, University of Cambridge, (2002)

Nikolas Dergiades, An Elemantary Proof of the Isoperimetric Inequality, Forum Geometricorum, Volume 2 (2002) 129-130