T.C.

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GECİKMELİ PARABOLİK BİR DİFERANSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİ

İSMAİL HAKKI GÜRBEY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: YRD. DOÇ. DR. DENİZ AĞIRSEVEN

EDİRNE 2013

GECİKMELİ PARABOLİK BİR DİFERANSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİ

İSMAİL HAKKI GÜRBEY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2013

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. Mustafa ÖZCAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans/Doktora tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Hülya İŞCAN
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tez tarafımca (tarafımızca) okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans/ Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Deniz AĞIRSEVEN
Tez Danışmanı

Bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından Matematik Anabilim Dalında bir Yüksek lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:	İmza
Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV	…………………
Prof. Dr. Mustafa ÖZCAN	…………………
Yrd. Doç. Dr. Deniz AĞIRSEVEN	…………………

Tarih:

T.Ü.FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI YÜKSEK LİSANS PROGRAMI
DOĞRULUK BEYANI

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

... / .... / 2013

İsmail Hakkı GÜRBEY

Yüksek Lisans Tezi

Gecikmeli Parabolik Bir Diferansiyel Denklemin Çözümleri

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

ÖZET

Bu çalışmada gecikmeli parabolik bir diferansiyel denklemin değişkenlerine ayırma ve Fourier serileri ve Laplace dönüşüm metotları kullanılarak tam çözümü ve homotopi analiz metodu kullanılarak yaklaşık çözümü bulunmuştur. Homotopi analiz metodu ile bulanan yaklaşık çözüm ile birinci basamaktan doğruluklu fark şemasının nümerik çözümleri karşılaştırılarak elde edilen sonuçlar tablolarla verilmiştir.

Yıl **:** 2013

Sayfa Sayısı**:** 88

Anahtar Kelimeler**:** Gecikmeli Parabolik Denklemler, Değişkenlerine Ayırma ve Fourier Serileri ile Çözüm Metodu, Laplace Dönüşümü Metodu, Homotopi Analiz Metodu, Fark Şemaları Metodu

Master's Thesis
Solutions of a Delay Parabolic Equation
Trakya University Institute of Natural Sciences
Department of Mathematics

ABSTRACT

In this study, exact solution of a delay parabolic equation is found by using separation of variables and Fourier series and Laplace transform methods and approximate solution of the same equation is found by using homotopy analysis method. The approximate solution found by using homotopy analysis method and numerical solutions found by first order of accuracy difference scheme are compared and the obtained results are given with tables.

Year : 2013

Number of Pages : 88

Keywords: Delay Parabolic Equations, Separation of Variables and Fourier Series Method, Laplace Transform Method, Homotopy Analysis Method, Method of Difference Schemes

TEŞEKKÜRLER

Eğitim hayatım boyunca teşekkür etme fırsatı bulamadığım, üzerimde emeği olan saygıdeğer hocalarıma, üniversite hayatımda sağladıkları bilimsel katkının yanında, sabırlı ve anlayışlı davranışlarıyla örnek birer insan olmalarından dolayı Matematik Bölümü sayın hoca ve asistanlarına, tez sürecinde tüm bilgi, birikim ve hoşgörüsüyle büyük katkı sağlayan değerli hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Deniz AĞIRSEVEN' e ve koşulsuz desteklerinden dolayı sevgili aileme çok teşekkür ederim.

.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$L(f)$:	f fonksiyonunun Laplace dönüşümü
$\hbar$ **:**	Yakınsaklık kontrol parametresi
u_{app} :	Yaklaşık çözüm
u_{ex} :	Tam çözüm
u_{er} :	Mutlak hata
$D(A)$:	A operatörünün tanım kümesi
$E_\alpha = E_\alpha(A, E)$:	E Banach uzayında A operatörü ile tanımlı fractional uzay

Kısaltmalar

HAM:	Homotopi Analiz Metodu

TABLOLAR

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Gecikmeli diferansiyel denklemler, doğal olarak meydana gelen salınımlı sistemler gibi, fiziksel, biyolojik ve sosyolojik süreçleri modellemek için kullanılır. İlk olarak 1942 yılında Minorsky [1], kendinden uyartımlı salınımlı dinamik sistemleri modellemek için kullanılan histerodiferansiyel denklemler fikrini tanıtmıştır. Minorsky, öz salınımlar gibi bazı doğal fenomenlerin gecikmeli zamana bağımlı olan bir eylemi tarif eden bir gecikmeli dinamik sistemi [2] tanımlayan bir hareket veya eylemin öncesinden etkilenmiş olabileceği önerisini ortaya atmıştır. Ayrıca, Minorsky bir kontrol sistemi içinde kendi kendini uyarmayı modelleme yeteneğinden dolayı bu sistemlerin önemini açıklamıştır.

g bir dış kuvvet olmak üzere; fiziksel sistemler genelde gecikmeli sönüme sahip

$$x''(t) + Kx'(t) + bx(t-\tau) = g(t) \tag{1.1}$$

ve gecikmeli kuvvete sahip

$$x''(t) + Kx'(t-\tau) + bx(t) = g(t) \tag{1.2}$$

sistemleriyle sınıflandırılır. Minorsky (1.1) ve (1.2) modellerini gemilerdeki stabilizasyon sistemlerini [3] çalışmak için kullanmıştır. Hareketli denge ağırlığı ile bir geminin hareketini kontrol etmeyle ilgili olan bu çalışmasında gecikme (denge ağırlığının yeniden ayarlanmasını temsil eden zaman) içeren bir realist matematiksel model yapmış ve gecikme çok büyükse hareketin salınımlı olduğunu gözlemlemiştir.

Bir adi diferansiyel denklem, şimdiki zamanda geleceği öngören denklemdir. Gecikmeli diferansiyel denklem ise şimdiki zamanın ve geleceğin bir biçimde geçmişe bağlı olduğu denklemdir. Bir adi diferansiyel denklemin karakteristik denkleminin derecesi sonlu iken bir gecikmeli diferansiyel denklemin karakteristik denkleminin derecesi sonsuzdur. Gecikmeli diferansiyel denklemin karakteristik denkleminin derecesinin sonsuz olması çözümde kendinden uyartımlı salınımlar gibi farklı çözüm davranışlarını destekleyen sonsuz sayıda öz değer olmasını sağlar. Gecikmeli diferansiyel denklemlerin bu özelliği, fiziksel kontrol sistemlerinin modellenmesinde bu denklemlerin kullanımına büyük avantaj sağlar.

Minorsky, fiziksel sistemlerde salınımlı fenomen modellemek için bir temel atmıştır. Onun bu konu üzerine araştırmalarından birçok fiziksel ve biyolojik sürecin modellenmesinde kullanışlı olan gecikmeli dengeleyici kuvvete ve gecikmeli sönüme sahip gecikmeli diferansiyel denklem modelleriyle tanışmış olduk.

Hutchinson, 1948'de bir dairesel nedensel sistemin dinamiğini tanımlayan gecikmeli lojistik sistem olarak bilinen bir gecikmeli diferansiyel denklem modeli geliştirmiştir [4]. Bir nedensel sistem, çıktının şimdiki veya geçmiş girdiye bağlı olduğu bir sistemdir. Bir dairesel nedensel sistem ise sistem yok olmasın diye farklı oranlarda ve sıklıkta sistemin bir parçasının diğerini etkilediği biçimde değişen nedensel bir sistemdir. Konak-parazit ilişkisi [5], bir parazit konak popülasyonunun gelişimini zorlayıcı bir şekilde değiştirmeden veya konağı öldürmeden yaşam döngüsünü tamamlayabileceği için konak popülasyonu var olmaya devam edeceğinden ekolojik dairesel nedensel sisteme bir örnektir. Bu modeldeki gecikme, büyüyen bir popülasyondaki gebelik periyodu veya bir parazitin yaşam döngüsü gibi modellenebilen ve sürecin doğal olarak meydana geldiği çeşitli özelliklerini temsil eder.

20. yüzyılda, 1950'lerde gecikmeli denklemler teorisi üzerine araştırmalar artmış ve araştırmacıların ilgisi ile hızlı bir gelişme kaydedilmiştir. Özellikle adi gecikmeli diferansiyel denklemler üzerine yapılan çalışmalar günümüzde de etkin bir şekilde gelişmeye devam etmektedir [6-10]. Gecikmeli denklemlerin nümerik çözümleri üzerine daha çok adi diferansiyel denklemlerde çalışılmıştır [11-15]. Bazı yazarlar gecikmeli adi diferansiyel denklemlerin kararlılığını çalışmışlardır [16-22]. Adi gecikmeli diferansiyel denklemler üzerine çalışmalar aktif olarak devam etmesine rağmen kısmi gecikmeli diferansiyel denklemlerle çalışan az sayıda bilim adamı vardır.

Kısmi gecikmeli denklemler için farklı tipte problemler, operatör yaklaşımı kullanılarak çözülmüştür. A. Ashyralyev ve P.E. Sobolevskii, parabolik tipte lineer kısmi diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemini göz önüne almışlar ve probleminin kararlılığı için gerekli koşullardan daha kuvvetli varsayımlar altında kararlılık eşitsizlikleri kanıtlamışlardır. Gecikmeli parabolik tipte denklemler için başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümünde birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları çözümlerinin kararlılık kestirimlerini vermişlerdir [23-24].

D.B. Gabriella, sınırsız gecikme operatörleri içeren Banach uzaylarında değerler alan gecikmeli denklemleri çözmek için ekstrapolasyon uzaylarını kullanmıştır. Gabriella, abstract yarı lineer gecikmeli denklemlerin bir sınıfı için kuvvetli ve zayıf çözümlerin varlığını araştırmıştır [25].

Daha çok çözümün karakteri üzerine bazı çalışmalar yapılmıştır [26-30]. Y.Liang, T.J. Xiao bir Banach uzayında sonsuz gecikme içeren fonksiyonel diferansiyel denklemler için Cauchy probleminin çözülebilirliğini incelemişlerdir [31]. S. Ahmad, M. Rama Mohana Rao ve Y. Zhang gecikmeli denklemlerin kararlılığını çalışmışlardır [32-33]. Feng ve Lu asimptotik davranış üzerine araştırma yapmış [34], J. Yang, C.Y. Wang, J. Li, Z.J. Meng nötral hiperbolik gecikmeli denklemlerin salınımı için gerekli ve yeterli koşulu göz önüne almıştır [35]. M.El-Borai ve F.K.Asaad yüksek mertebeden gecikmeli parabolik diferansiyel denklemlerin Cauchy probleminin çözümünün varlık ve tekliği üzerine çalışmıştır [36]. C.V. Pao, üst ve alt çözüm metodunu kullanarak lineer olmayan gecikmeli parabolik sistemleri incelemiştir [37].

Analitik çözümleri ifade edilebilen az sayıda gecikmeli diferansiyel denklem vardır. Gecikme teriminin varlığı gecikmeli diferansiyel denklemlerin teorik analizinin yapılmasını zorlaştırır. Bu durumda nümerik metotlar bu açığın kapatılması için gereklidir. Nümerik metotların sistematik olarak çalışılması Barwell ‘in 1975’te P-kararlılık ve GP kararlılık kavramlarını tanıtmasından sonra başlamıştır [38]. Yirminci yüzyılın son on senesinde nümerik metotları kullanarak gecikmeli denklemler üzerine yapılan çalışmalar en üst düzeye çıkmıştır. 1990’da Liu ve M.N. Spijker, gecikmeli diferansiyel denklemlerde θ-metodunun kararlılığını çalışmışlar ve birçok sonuca ulaşmışlardır [39]. Z.Jackiewicz ve B.Zubik-Kowal, lineer olmayan gecikmeli kısmi denklemler için Chebyshev spektral kollokasyon ve dalga biçimi relaksasyon metotlarını araştırmışlardır [40]. Ferreria, Hutchinson denkleminin özel durumu olan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemi çalışmıştır [41].

Bu çalışmada gecikmeli parabolik

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + (0{,}1)\dfrac{\partial^2 u(t-1,x)}{\partial x^2} = 0, \\ t > 0,\ 0 < x < \pi, \\ u(t,x) = e^{-t}\cos x, \\ -1 < t < 0, \quad 0 \le x \le \pi, \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 \end{cases}$$

denklemi için Neumann tipi sınır koşullu başlangıç ve sınır değer problemi çalışılmıştır.

İkinci bölümde değişkenlerine ayırma ve Fourier serileri metodu kullanılarak denklemin analitik çözümü bulunmuştur.

Üçüncü bölümde aynı denklemin çözümünü bulmak için Laplace dönüşüm metodu kullanılmıştır.

Dördüncü bölümde Liao [42] tarafından tanıtılan homotopi analiz metodu (HAM) kullanılarak denklemin yaklaşık çözümü bulunmuş, metotta yakınsaklık kontrol parametresi olan $\hbar = -1$ alındığında problemin tam çözümü elde edilmiştir.

Beşinci ve son bölümde ise fark şemaları metoduyla bulunan [43] birinci basamaktan doğruluklu fark şemasının nümerik çözümleri ile aynı noktalar göz önüne alınarak HAM ile bulunan yaklaşık çözümler karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma yapılırken MATLAB 7.0 programı kullanılmıştır. Sonuçlar tablolarla verilmiştir.

BÖLÜM 2

GECİKMELİ PARABOLİK BİR DENKLEM İÇİN NEUMANN TİPİ SINIR KOŞULLU BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMİNİN DEĞİŞKENLERİNE AYIRMA VE FOURIER SERİLERİ METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Bilindiği gibi, bir lineer parabolik diferansiyel denklemin analitik çözümü, Fourier serileri, Laplace dönüşüm ve Fourier dönüşüm metotları kullanılarak bulunabilir. Bu çalışmada gecikmeli parabolik

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + (0{,}1)\dfrac{\partial^2 u(t-1,x)}{\partial x^2} = 0, \ \ t > 0, \ 0 < x < \pi, \\ u(t,x) = e^{-t}\cos x, \ -1 < t \le 0, \quad 0 \le x \le \pi, \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

denklemi için Neumann tipi sınır koşullu başlangıç ve sınır değer problemi çalışılmıştır. Öncelikle bu problemin çözümü için değişkenlerine ayırma ve Fourier serileri metodu kullanılacaktır.

$t \in [0,1]$ için $t-1 \in [-1,0]$ olduğundan $u(t-1,x) = e^{-(t-1)}\cos x$ fonksiyonu, (2.1) denkleminde yerine yazılırsa parabolik denklem için

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = (0{,}1)e^{-(t-1)}\cos x, \ \ 0 \le t \le 1, \ 0 < x < \pi \ , \\ u(0,x) = \cos x, \ \ 0 \le x \le \pi \ , \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, \ t \in [0,1] \end{cases} \tag{2.2}$$

Neumann tipi sınır koşullu başlangıç ve sınır değer problemi elde edilir. (2.2) problemini çözmek için $u(t,x)$'i

$$u(t,x)=v(t,x)+w(t,x) \tag{2.3}$$

biçiminde iki fonksiyonun toplamı olarak yazarız. Bu durumda (2.2) probleminin çözümü

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2}=0, \quad 0\le t\le 1,\ 0<x<\pi, \\ v(0,x)=\cos x,\ 0\le x\le \pi, \\ v_x(t,0)=v_x(t,\pi)=0,\ t\in[0,1] \end{cases} \tag{2.4}$$

ve

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w(t,x)}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2}=(0,1)e^{-(t-1)}\cos x,\ \ 0\le t\le 1,\ 0<x<\pi, \\ w(0,x)=0,\ 0\le x\le \pi, \\ w_x(t,0)=w_x(t,\pi)=0,\ t\in[0,1] \end{cases} \tag{2.5}$$

problemlerinin çözümlerinin toplamını verir. Öncelikle (2.4) problemini çözelim. Değişkenlerine ayırma metoduyla

$$v(t,x)=T(t)X(x)\neq 0$$

biçiminde tanımlayıp denklemde yerine yazarsak

$$T'(t)X(x)-T(t)X''(x)=0$$

veya

$$\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=\lambda \tag{2.6}$$

bulunur. (2.6) eşitliğinden

$$\begin{cases} X''(x)-\lambda X(x)=0 \\ X'(0)=X'(\pi)=0 \end{cases} \tag{2.7}$$

denklemi elde edilir. Çözümü bulabilmek için λ 'nın aldığı değerlere göre üç durum söz konusudur.

i) $\lambda=\mu^2>0$ için sadece aşikar çözüm vardır.

ii) $\lambda=0$ için c herhangi bir sabit sayı olmak üzere; $X(x)=c$ çözümü elde edilir.

iii) $\lambda=-\mu^2<0$ için μ 'nün $\mu=k, k\in Z^+$ ve çözümün

$$X_k(x)=c_k\cos kx+d_k\sin kx,\ k=1,2,....$$

biçiminde olduğu görülür. (2.6) eşitliğinden

$$T'(t)-k^2T(t)=0 \qquad (2.8)$$

denklemi yazılır. Bu denklemden

$$T_k(t)=C_ke^{-k^2t}$$

çözümü bulunur. Böylece $a_k = c_kC_k$, $b_k = d_kC_k$ olmak üzere;

$$v(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)e^{-k^2t} \qquad (2.9)$$

bulunur.

$$v(0,x)=\cos x,\ 0\le x\le \pi$$

başlangıç koşulu kullanılırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=\cos x$$

eşitliğinden

$$a_1=1,\ a_k=0,\ k\ge 2$$

$$b_k=0,\ k\ge 1$$

katsayıları elde edilir. Katsayılar, (2.9) çözümünde yerine yazıldığında (2.4) probleminin çözümü

$$v(t,x)=e^{-t}\cos x \qquad (2.10)$$

bulunur. (2.5) probleminin çözümünü elde etmek için

$$w(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k(t)\cos kx \qquad (2.11)$$

serisini göz önüne alalım.

$$w(0,x)=0,\ 0\le x\le \pi \qquad (2.12)$$

başlangıç şartı kullanılarak

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_k(0)\cos kx=0$$

olduğundan

$$A_k(0)=0,\ \ k\ge 1$$

elde edilir. (2.11) seri çözümü (2.5) probleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_k'(t)\cos kx+\sum_{k=1}^{\infty}k^2A_k(t)\cos kx=(0{,}1)e^{-(t-1)}\cos x$$

yani

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k^{'}(t)+k^2A_k(t)\right]\cos kx=(0,1)e^{-(t-1)}\cos x$$

bulunur. $\{\cos kx\}_{k=1}^{\infty}$ kümesi ortogonal bir küme olduğundan (2.12) başlangıç koşulu kullanılarak

$$\begin{cases} A_1^{'}(t)+A_1(t)=(0,1)e^{-(t-1)}, & A_1(0)=0, \\ A_k^{'}(t)+k^2A_k(t)=0, & A_k(0)=0,\ k\geq 2 \end{cases}$$

Cauchy problemleri elde edilir. Bu problemlerin çözümlerinden

$$A_1(t)=e^{-t}A_1(0)+\int_0^t e^{-(t-s)}(0,1)e^{-(s-1)}ds=\int_0^t e^{-(t-s)}(0,1)ds=e^{-(t-1)}(0,1)t=e^{-t}(0,1)et$$

ve

$$A_k(t)=0,\ k\geq 2$$

bulunur. Katsayılar, (2.11) çözümünde yerine yazılırsa

$$w(t,x)=e^{-t}(0,1)et\cos x \tag{2.13}$$

bulunur. Sonuç olarak (2.3) eşitliğinden (2.2) problemin çözümü

$$u(t,x)=e^{-t}\{1+(0,1)et\}\cos x,\quad 0\leq t\leq 1 \tag{2.14}$$

biçiminde bulunur.

$t\in[1,2]$ için $t-1\in[0,1]$ olduğundan $u(t-1,x)=e^{-(t-1)}\{1+(0,1)e(t-1)\}\cos x$ fonksiyonu, (2.1) denkleminde yerine yazılırsa parabolik denklem için

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}=(0,1)e^{-(t-1)}\{1+(0,1)e(t-1)\}\cos x, \\ 1\leq t\leq 2,\ 0<x<\pi, \\ u(1,x)=e^{-1}\{1+(0,1)e\}\cos x,\ \ 0\leq x\leq \pi, \\ u_x(t,0)=u_x(t,\pi)=0,\ t\in[1,2] \end{cases} \tag{2.15}$$

Neumann tipi sınır koşullu başlangıç ve sınır değer problemi elde edilir. (2.15) problemini çözmek için $u(t,x)$'i (2.3) biçiminde yazarız. Buradan (2.15) probleminin çözümü

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} = 0, \ 1 \le t \le 2, \ 0 < x < \pi, \\ v(1,x) = e^{-1}\{1 + (0,1)e\}\cos x, \ \ 0 \le x \le \pi, \\ v_x(t,0) = v_x(t,\pi) = 0, \ t \in [1,2] \end{cases} \tag{2.16}$$

ve

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w(t,x)}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2} = (0,1)e^{-(t-1)}\{1 + (0,1)e(t-1)\}\cos x, \ 1 \le t \le 2, \ 0 < x < \pi, \\ w(1,x) = 0, \ \ 0 \le x \le \pi, \\ w_x(t,0) = w_x(t,\pi) = 0, \ t \in [1,2] \end{cases} \tag{2.17}$$

problemlerinin çözümlerinin toplamını verir. (2.16) problemini değişkenlerine ayırma ve Fourier serileri metoduyla çözelim. $t \in [0,1]$ aralığındaki işlemleri tekrarlarsak (2.9) çözümünü elde ederiz.

$v(1,x) = e^{-1}\{1 + (0,1)e\}\cos x, \ 0 \le x \le \pi$

başlangıç koşulu kullanılırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) e^{-k^2} = \{1 + (0,1)e\}\cos x e^{-1}$$

eşitliğinden

$a_1 = 1 + (0,1)e, \ a_k = 0, \ k \ge 2$

$b_k = 0, \ k \ge 1$

katsayıları elde edilir. Katsayılar, (2.9) çözümünde yerine yazıldığında (2.16) probleminin çözümü

$$v(t,x) = e^{-t}\{1 + (0,1)e\}\cos x \tag{2.18}$$

bulunur. (2.17) probleminin çözümünü elde etmek için (2.11) seri çözümünü göz önüne alalım.

$$w(1,x) = 0, \ 0 \le x \le \pi \tag{2.19}$$

başlangıç şartı kullanılarak

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k(1)\cos kx = 0$$

olduğundan

$A_k(1) = 0 \,, \ \ k \ge 1$

elde edilir. (2.11) seri çözümü (2.17) probleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^{'}(t)\cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 A_k(t)\cos kx = (0,1)e^{-(t-1)}\{1+(0,1)e(t-1)\}\cos x$$

Yani

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k^{'}(t) + k^2 A_k(t)\right]\cos kx = (0,1)e^{-(t-1)}\{1+(0,1)e(t-1)\}\cos x$$

bulunur.

$\{\cos kx\}_{k=1}^{\infty}$ kümesi ortogonal bir küme olduğundan (2.19) başlangıç koşulu kullanılarak

$$\begin{cases} A_1^{'}(t) + A_1(t) = (0,1)e^{-(t-1)}\{1+(0,1)e(t-1)\}, \quad A_1(1) = 0 \\ A_k^{'}(t) + k^2 A_k(t) = 0,\ A_k(1) = 0,\ k \geq 2. \end{cases}$$

Cauchy problemleri elde edilir. Bu problemlerin çözümlerinden

$$A_1(t) = e^{-(t-1)}A_1(1) + \int_{-1}^{t} e^{-(t-s)}(0,1)e^{-(s-1)}\{1+(0,1)e(s-1)\}ds$$

$$= \int_{1}^{t} e^{-(t-1)}(0,1)\{1+(0,1)e(s-1)\}ds$$

$$= e^{-t}\left[(0,1)e\left\{ s + (0,1)\frac{e(s-1)^2}{2}\Big|_1^t \right\}\right]$$

$$= e^{-t}\left[(0,1)et + (0,1)^2 e^2\,\frac{(t-1)^2}{2} - (0,1)e\right]$$

$$= e^{-t}\left[(0,1)et + \frac{((0,1)e(t-1))^2}{2!} - (0,1)e\right]$$

ve

$$A_k(t) = 0,\ k \geq 2$$

bulunur. Katsayılar, (2.11) çözümünde yerine yazılırsa

$$w(t,x) = e^{-t}\left[(0,1)et + \frac{((0,1)e(t-1))^2}{2!} - (0,1)e\right]\cos x$$

bulunur. Sonuç olarak (2.3) eşitliğinden (2.15)

problemin çözümü

$$u(t,x)=e^{-t}\left[1+(0,1)et+\frac{\left((0,1)e(t-1)\right)^2}{2!}\right]\cos x,\ 1\le t\le 2, \tag{2.20}$$

biçiminde bulunur.

$m\in Z^+$, $t\in[m,m+1]$ için $t-1\in[m-1,m]$ olduğundan

$u(t-1,x)=e^{-(t-1)}\left\{1+(0,1)e(t-1)+...+\dfrac{(0,1)e(t-m)^m}{m!}\right\}\cos x$ fonksiyonu, (2.1)

denkleminde yerine yazılırsa parabolik denklem için

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}=(0,1)e^{-(t-1)}\left\{1+(0,1)e(t-1)+...+\dfrac{(0,1)e(t-m)^m}{m!}\right\}\cos x,\\ m\le t\le m+1,\ 0\le x\le\pi,\\ u(m,x)=e^{-m}\left\{1+(0,1)em+\dfrac{\left((0,1)e(m-1)\right)^2}{2!}+...+\dfrac{\left[(0,1)e\left(m-(m-1)\right)\right]^m}{m!}\right\}\cos x,\ 0\le x\le\pi,\\ u_x(t,0)=u_x(t,\pi),\ t\in[m,m+1]\end{cases} \tag{2.21}$$

Neumann tipi sınır koşullu başlangıç ve sınır değer problemi elde edilir. (2.21) problemini çözmek için $u(t,x)$'i (2.3) biçiminde yazarız. Buradan (2.21) probleminin çözümü

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2}=0,\quad m\le t\le m+1,\ 0\le x\le\pi,\\ v(m,x)=e^{-m}\left\{1+(0,1)em+\dfrac{\left((0,1)e(m-1)\right)^2}{2!}+...++\dfrac{\left[(0,1)e\right]^m}{m!}\right\}\cos x,\ 0\le x\le\pi,\\ v_x(t,0)=v_x(t,\pi),\quad t\in[m,m+1]\end{cases} \tag{2.22}$$

ve

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w(t,x)}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2} = (0,1)e^{-(t-1)}\left\{1 + (0,1)e(t-1) + ... + \dfrac{(0,1)e(t-m)^m}{m!}\right\}\cos x, \\ m \le t \le m+1,\ 0 \le x \le \pi, \\ \\ w(m,x) = 0,\ \ 0 \le x \le \pi, \\ w_x(t,0) = w_x(t,\pi),\ \ t \in [m, m+1] \end{cases} \qquad (2.23)$$

problemlerinin çözümlerinin toplamını verir. (2.22) problemini değişkenlerine ayırma ve Fourier serileri metoduyla çözersek (2.9) çözümünü elde ederiz.

$$v(m,x) = e^{-m}\left\{1 + (0,1)em + \frac{((0,1)e(m-1))^2}{2!} + ... + \frac{[(0,1)e]^m}{m!}\right\}\cos x,\ 0 \le x \le \pi$$

başlangıç koşulu kullanılırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)e^{-mk^2} = e^{-m}\left\{1 + (0,1)em + \frac{((0,1)e(m-1))^2}{2!} + ... + \frac{[(0,1)e]^m}{m!}\right\}\cos x$$

eşitliğinden

$$a_1 = 1 + (0,1)em + \frac{((0,1)e(m-1))^2}{2!} + ... + \frac{[(0,1)e]^m}{m!},$$

$$a_k = 0,\ k \ge 2$$

$$b_k = 0,\ k \ge 1$$

katsayıları elde edilir. Katsayılar, (2.9) çözümünde yerine yazıldığında (2.22) probleminin çözümü

$$v(t,x) = e^{-t}\left\{1 + (0,1)em + \frac{((0,1)e(m-1))^2}{2!} + ... + \frac{[(0,1)e]^m}{m!}\right\}\cos x \qquad (2.24)$$

bulunur. (2.23) probleminin çözümünü elde etmek için (2.11) seri çözümünü göz önüne alalım.

$$w(m,x) = 0,\ 0 \le x \le \pi \qquad (2.25)$$

başlangıç şartı kullanılarak

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k(m)\cos kx = 0$$

olduğundan

$$A_k(m)=0\,,\quad k\geq 1$$

elde edilir.

(2.11) seri çözümü, (2.23) probleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^{'}(t)\cos kx+\sum_{k=1}^{\infty} k^2 A_k(t)\cos kx$$

$$=(0{,}1)e^{-(t-1)}\left\{1+(0{,}1)e(t-1)+....+\frac{[(0{,}1)e(t-m)]^m}{m!}\right\}\cos x$$

yani

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k^{'}(t)+k^2A_k(t)\right]\cos kx=(0{,}1)e^{-(t-1)}\left\{1+(0{,}1)e(t-1)+....+\frac{[(0{,}1)e(t-m)]^m}{m!}\right\}\cos x$$

bulunur.

$\{\cos kx\}_{k=1}^{\infty}$ kümesi ortogonal bir küme olduğundan (2.25) başlangıç koşulu kullanılarak

$$\begin{cases} A_1^{'}(t)+A_1(t)=(0{,}1)e^{-(t-1)}\left\{1+(0{,}1)e(t-1)+....+\dfrac{[(0{,}1)e(t-m)]^m}{m!}\right\},\ A_1(1)=0 \\ A_k^{'}(t)+k^2A_k(t)=0,\ A_k(1)=0,\ k\geq 2. \end{cases}$$

Cauchy problemleri elde edilir. Bu problemlerin çözümlerinden

$$A_1(t)=e^{-(t-m)}A_1(m)+\int_m^t e^{-(t-s)}(0{,}1)e^{-(s-1)}\left[1+(0{,}1)e(s-1)+...+\frac{((0{,}1)e(s-m))^m}{m!}\right]ds$$

$$=e^{-t}\begin{bmatrix}(0{,}1)et-(0{,}1)em+\dfrac{((0{,}1)e(t-1))^2}{2!}-\dfrac{((0{,}1)e(m-1))^2}{2!}+....+\dfrac{((0{,}1)e(t-m+1))^m}{m!}\\ -\dfrac{((0{,}1)e)^m}{m!}+\dfrac{((0{,}1)e(t-m))^{m+1}}{(m+1)!}\end{bmatrix}$$

ve

$$A_k(t)=0,\ k\geq 2$$

bulunur. Katsayılar, (2.11) çözümünde yerine yazılırsa

$$w(t,x)=e^{-t}\begin{bmatrix}(0{,}1)et-(0{,}1)em+\dfrac{((0{,}1)e(t-1))^2}{2!}-\dfrac{((0{,}1)e(m-1))^2}{2!}\\ +...+\dfrac{((0{,}1)e(t-m+1))^m}{m!}-\dfrac{((0{,}1)e)^m}{m!}+\dfrac{((0{,}1)e(t-m))^{m+1}}{(m+1)!}\end{bmatrix}\cos x \qquad (2.26)$$

elde edilir. (2.3) eşitliğinden (2.23) problemin çözümü

$$u(t,x)=e^{-t}\left\{1+(0,1)et+\frac{(0,1)e(t-1)^{2}}{2!}+...+\frac{(0,1)e(t-m)^{m+1}}{(m+1)!}\right\}\cos x,\quad m\le t\le m+1 \tag{2.27}$$

biçiminde bulunur. Böylece, (2.1) gecikmeli parabolik denklemi için Neumann tipi sınır koşullu başlangıç ve sınır değer probleminin değişkenlerine ayırma ve Fourier serileri metodu kullanılarak bulunan analitik çözümü [43]

$$u(t,x)=\begin{cases} e^{-t}\cos x, \quad -1\le t\le 0, \\ e^{-t}\{1+(0,1)et\}\cos x,\ 0\le t\le 1, \\ e^{-t}\left\{1+(0,1)et+\dfrac{((0,1)e(t-1))^{2}}{2!}\right\}\cos x,\ 1\le t\le 2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{-t}\left\{1+(0,1)et+\dfrac{((0,1)e(t-1))^{2}}{2!}+..+\dfrac{((0,1)e(t-n))^{n+1}}{(n+1)!}\right\}\cos x,\quad n\le t\le n+1,\ n\ge 2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{2.28}$$

biçimindedir.

BÖLÜM 3

GECİKMELİ PARABOLİK BİR DENKLEM İÇİN NEUMANN TİPİ SINIR KOŞULLU BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMİNİN LAPLACE DÖNÜŞÜM METODU İLE ÇÖZÜMÜ

3.1 Laplace Dönüşümü

İntegral dönüşümlerinin tarihçesi L´eonard Euler (1763 ve 1769)'in çalışmasına dayanır. Euler ikinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklemlerin çözümlerinde aslında ters Laplace dönüşümünü göz önüne almıştır. Laplace, *Theorie analytique des probabilites* (1812) adlı çalışmasında, aslında Euler'in Laplace dönüşümünü tanıttığını kabul etmiştir. İlk olarak Euler 'in kullandığı

$$y = \int_a^b e^{sx}\phi(s)ds$$

integral dönüşüme Laplace dönüşümü ismini koyan ise Spitzer(1878) 'dir. Bu haliyle Laplace dönüşümü $y = y(x)$'in bilinmeyen fonksiyon olduğu diferansiyel denklemde kullanılmıştır.

19. yüzyılın sonlarında, Laplace dönüşümü Poincare ve Pincherle ve daha sonra Petzval tarafından kompleks haline genişletilmiş ve Picard tarafından iki değişkenli formuyla yeniden bulunmuştur. Abel ve diğer birçok araştırmacı Laplace dönüşümü ile ilgili çalışmalara devam etmiştir. Modern Laplace dönüşümünün ilk uygulaması, Rutherford'un radyoaktif parçalanma üzerine çalışmasından ortaya çıkan denklemleri dönüştüren Baterman (1910)'ın çalışmasıdır.

Baterman,

$$\frac{dP}{dt} = -\lambda_i P$$

denkleminde

$$p(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} P(t) dt$$

dönüşümünü yerine koyarak dönüştürülmüş denklem elde etmiştir. Bernstein (1920), teta fonksiyonları üzerine yaptığı çalışmasında

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} \phi(u) du$$

ifadesini kullanarak bu dönüşümü Laplace dönüşümü olarak adlandırmıştır.

Laplace dönüşümüne modern yaklaşım, Doetsch tarafından 1920 ve 30 larda verilmiştir ve Laplace dönüşümü Doetsch [44-45] tarafından diferansiyel, integral ve integro-diferansiyel denklemlere uygulanmıştır. Doetsch çalışmasını, 1937 yılında sunduğu *Theorie und Anwendungen der Laplace Transformation* adlı metinde sonuçlandırmıştır.

Oliver Heaviside'ın (1894, 1899, 1912), üç ciltten oluşan *Electromagnetic Theory* adlı eserinde Laplace dönüşüm yöntemine benzerlikler bulunmaktadır. Heaviside'ın hesaplamalarında elektrik mühendisleri için problemlerini çözmede oldukça kullanışlı bir teknik bulunur. Bromwich bu tekniği güçlendirip Laplace dönüşümü ile birleştirerek γ, x fonksiyonunun bütün tekilliklerinin sağında olmak üzere;

$$X(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{ts} x(s) ds$$

ters dönüşümünü bulmuştur.

Adi ve kısmi diferansiyel denklemler, elektrik akımı, titreşen zar, yalıtılmış iletken içinden geçen ısı akımı gibi bazı zamanla değişen nicelikleri tanımlarlar. Bu denklemler genelde sistemin $t = 0$ anındaki durumunu tanımlayan başlangıç koşulları ile verilirler. Laplace dönüşümü, bu problemleri çözmek için verilen çok güçlü bir tekniktir. Dönüştürülmüş denklemin çözümü de daha sonra uygulanan ters dönüşümle orijinal problemin çözümüne dönüştürülür. Bu teknik "Laplace dönüşüm yöntemi" olarak bilinir.

Laplace dönüşüm yöntemi adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin, integro-diferansiyel denklemlerin, fark denklemlerinin, imroper integrallerin çözümlerinde kullanılır ve literatürde bu konu üzerine yapılan birçok çalışma bulunmaktadır [46-50].

Laplace Dönüşümünün Tanımı: $t>0$ olmak üzere; $f=f(t)$, bir reel veya kompleks değişkenli fonksiyon ve s, bir reel veya kompleks parametre olsun. Limit mevcut iken f'nin Laplace dönüşümü

$$F(s)=L(f(t))=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau e^{-st}f(t)dt \tag{3.1}$$

ile verilir. (3.1) integrali limit mevcut iken yakınsaktır, limit mevcut değilse integral ıraksaktır denir ve f için tanımlanan Laplace dönüşümü yoktur. $L(f)$ notasyonu f ' in Laplace dönüşümünü gösterirken kullanılır ve buradaki integral Riemann (improper) integralidir. Yani L sembolü, $f=f(t)$ fonksiyonlarından yeni bir $F(s)=L(f(t))$ fonksiyonu üreten Laplace dönüşümüdür.

Tanım 3.1. (3.1) integraline

$$\lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau \left|e^{-st}f(t)\right|dt$$

limiti varsa mutlak yakınsaktır denir. Eğer $L(f(t))$ mutlak olarak yakınsıyor ise $\tau\to\infty$ iken her $\tau'>\tau$ için

$$\left|\int_\tau^{\tau'} e^{-st}f(t)dt\right|\le\int_\tau^{\tau'}\left|e^{-st}f(t)\right|dt\to 0$$

olur. Bu durumda $L(f(t))$ de yakınsar[1].

Tanım 3.2. (3.1) integraline, kompleks düzlemde bir Ω bölgesindeki s parametreleri için eğer her $\varepsilon>0$ için $\tau\ge\tau_0$ eşitsizliğini sağlayan bir τ_0 sayısı varsa ve her $s\in\Omega$ için

$$\left|\int_\tau^\infty e^{-st}f(t)dt\right|<\varepsilon$$

---

[1] $\int_0^\infty \varphi(t)dt$ integralinin yakınsaklığı Cauchy kriterine denktir:

$\tau\to\infty$ iken $\tau'>\tau$ için $\int_\tau^{\tau'}\varphi(t)dt\to 0$.

sağlanıyorsa düzgün yakınsar denir.

Tanım 3.3. Bir f fonksiyonu, eğer

$\lim\limits_{t\to t_0^-} f(t) = f(t_0^-)$ ve $\lim\limits_{t\to t_0^+} f(t) = f(t_0^+)$

limitleri mevcut ve $f(t_0^-) \neq f(t_0^+)$ ise bir t_0 noktasında sıçrama süreksizliğine sahiptir.

Tanım 3.4. Bir f fonksiyonu,

i) $\lim\limits_{t\to t0^+} f(t) = f(0^+)$ limiti mevcut

ve

ii) f 'in $(0,b)$ aralığındaki sıçrama süreksizliğine sahip olduğu sonlu sayıda $\tau_1,\tau_2,...,\tau_n$ noktası hariç, her sonlu $(0,b)$ aralığında sürekli ise $[0,\infty)$ aralığında parçalı süreklidir denir. Parçalı sürekli bir fonksiyon her alt aralıkta sınırlıdır. Yani sonlu sayıda M_i sabiti için

$|f(t)| \leq M_{i,}, \quad \tau_i < t < \tau_{i+1},\ i = 1,2,...,n-1$

sağlanır.

Tanım 3.5. Bir f fonksiyonu, eğer $\exists t_0 \geq 0$ için

$|f(t)| \leq Me^{\alpha t},\ t \geq t_0$

eşitsizliğini sağlayan $M > 0$ ve α sabitleri varsa α üstel mertebeye sahiptir.

3.2. Laplace Dönüşümünün Temel Özellikleri

Lineerlik: Laplace operatörü L 'nin en temel ve kullanışlı özelliklerinden biri lineerliğidir. Yani

$\operatorname{Re}(s) > \alpha$ için $f_1 \in L$, $\operatorname{Re}(s) > \beta$ için $f_2 \in L$ ise $\operatorname{Re}(s) > \max\{\alpha,\beta\}$ için $f_1 + f_2 \in L$

ve her c_1, c_2 sabiti için

$$L(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 L(f_1) + c_2 L(f_2) \tag{3.2}$$

eşitliği sağlanır.

Düzgün Yakınsaklık: $[0,\infty)$ aralığında parçalı sürekli ve üstel mertebeden f fonksiyonları için Laplace integrali mutlak yakınsaktır yani $\int_0^{\infty}\left|e^{-st}f(t)\right|dt$ yakınsaktır. Üstelik bu tür fonksiyonlar için Laplace integrali düzgün yakınsaktır.

Teorem 3.1. f fonksiyonu, $[0,\infty)$ aralığında parçalı sürekli ve α üstel mertebeye sahip ise $\operatorname{Re}(s)\to\infty$ iken

$$F(s)=L(f(t))\to 0$$

olur.

Laplace Dönüşümünün Tersi: $F(s)=L(f(t))$ ise bir fonksiyonun Laplace dönüşümünü orijinal fonksiyona dönüştüren ters Laplace dönüşümü

$$L^{-1}(F(s))=f(t), \qquad t\geq 0,$$

ile gösterilir.

Lerch Teoremi: $[0,\infty)$ aralığında farklı sürekli fonksiyonlar farklı Laplace dönüşümlerine sahiptirler.

Ters Laplace Dönüşümünün Lineerliği: L^{-1} ters Laplace dönüşümü de lineerdir, yani, $F(s)=L(f(t))$ ve $G(s)=L(g(t))$ ise

$$L^{-1}(aF(s)+bG(s))=aL^{-1}(F(s))+bL^{-1}(G(s))=af(t)+bg(t) \tag{3.3}$$

sağlanır.

Birinci Öteleme Teoremi: $F(s)=L(f(t))$ ise $\operatorname{Re}(s)>0$ için a reel $\operatorname{Re}(s)>a$ olmak üzere;

$$F(s-a)=L\left(e^{at}f(t)\right)$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$\operatorname{Re}(s)>a$ için

$$F(s-a)=\int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)dt=\int_0^\infty e^{-st}e^{at} f(t)dt = L\left(e^{at} f(t)\right)$$

bulunur.

İkinci Öteleme Teoremi: $F(s)=L(f(t))$ ise

$$a \ge 0,\ u_a(t)=\begin{cases} 1, & t>a \\ 0, & t<a. \end{cases}$$

olmak üzere;

$$L(u_a(t)f(t-a))=e^{-as}F(s),\ a\ge 0.$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$L(u_a(t)f(t-a))=\int_0^\infty e^{-st}[u_a(t)f(t-a)]dt=\int_a^\infty e^{-st} f(t-a)dt,$$

integralinde $\tau = t-a$ dönüşümü yapılırsa

$$\int_0^\infty e^{-s(\tau+a)} f(\tau)d\tau = e^{-as}\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)d\tau = e^{-as}F(s).$$

bulunur.

3.3. Laplace Dönüşümünün Türevi ve İntegrali

Yardımcı Teorem: $f(x,t)$ ve $\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)$, $a\le x\le b$, $0\le t\le T$, $T>0$ bölgelerinde $t=t_i$, $i=1,...,n$ doğruları boyunca sonlu sayıda sıçrama süreksizlikleri hariç sürekli fonksiyonlar olsun.

$F(x)=\int_0^\infty f(x,t)dt$ ve $\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt$ integralinin ilki yakınsak, ikincisi düzgün yakınsaktır.

Bu durumda

$$\frac{d}{dx}F(x)=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt \qquad (a<x<b)$$

olur.

Teorem 3.2. f, $[0,\infty)$'da α üstel mertebeden parçalı sürekli bir fonksiyon ve $L(f(t)) = F(s)$ olsun. Bu durumda

$$\frac{d^n}{ds^n} F(s) = L\left((-1)^n t^n f(t)\right),\ n = 1,2,3,\ldots,(s > \alpha) \tag{3.4}$$

olur.

İspat : $s \geq x_0 > \alpha$ için aşağıdaki hesaplamada Yardımcı Teoremden yararlanarak türev ve integral işaretlerini yer değiştirilirse

$$\frac{d}{ds} F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty -te^{-st} f(t)dt = L(-tf(t)).$$

elde edilir.

Her $s > \alpha$ için $s \geq x_0 > \alpha$ eşitsizliğini sağlayan $\exists x_0$ bulunabilir. Bu durumda yukarıda bulunan sonuç her $s > \alpha$ için sağlanır. Diferansiyel almayı tekrarlayarak ya da tümevarımla $s \geq x_0 > \alpha$ için teorem ispatlanmış olur.

3.4. Türevin Laplace Dönüşümü

Diferansiyel denklemleri çözmek için bir f fonksiyonunun f' türevinin Laplace dönüşümünün bilinmesi gerekir. $L(f')$, $L(f)$ cinsinden yazılabilir.

Türev Teoremi: f, $(0,\infty)$ aralığında α üstel mertebeden, sürekli fonksiyon ve f', $[0,\infty)$ aralığında parçalı sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda

$$L(f'(t)) = sL(f(t)) - f(0^+) \qquad (\mathrm{Re}(s) > \alpha) \tag{3.5}$$

sağlanır. Kısmi integrasyon ile

$$\int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \tau\to\infty}} \int_\delta^\tau e^{-st} f'(t)dt = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \tau\to\infty}} \left[e^{-st} f(t)\Big|_\delta^\tau + s\int_\delta^\tau e^{-st} f(t)dt \right]$$

$$= \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \tau\to\infty}} \left[e^{-s\tau} f(\tau) - e^{-s\delta} f(\delta) + s\int_\delta^\tau e^{-st} f(t)dt \right] = -f(0^+) + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \qquad (\mathrm{Re}(s) > \alpha).$$

bulunur. Buradan

$$L(f'(t)) = sL(f(t)) - f(0^+)$$

olur. $\mathrm{Re}(s) = x > \alpha$ olduğunu kullanırsak $\tau \to \infty$ iken

$$\left|e^{-s\tau} f(\tau)\right| \leq e^{-x\tau} M e^{\alpha\tau} \leq M e^{-(x-\alpha)\tau} \to 0$$

bulunur.

$f'(0^+) = \lim_{t \to 0^+} f'(t)$ limiti var olduğunda $f(0^+)$ vardır. Eğer f, t=0 da sürekli fonksiyon ise $f(0^+) = f(0)$ olur ve buradan

$$L(f'(t)) = sL(f(t)) - f(0) \tag{3.6}$$

bulunur.

Teorem 3.3. f, $[0,\infty)$ aralığında $t = t_1 > 0$ sıçrama süreksizlik noktası hariç sürekli ve α üstel mertebeden fonksiyon, f', $[0,\infty)$ aralığında parçalı sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda

$$L(f'(t)) = sL(f(t)) - f(0) - e^{-t_1 s}\left(f(t_1^+) - f(t_1^-)\right) \qquad (\operatorname{Re}(s) > \alpha)$$

olur.

İspat :

$$\int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = \lim_{\tau \to \infty} \int_0^\tau e^{-st} f'(t)dt$$

$$= \lim_{\tau \to \infty} \left[e^{-st} f(t)\Big|_0^{t_1^-} + e^{-st} f(t)\Big|_{t_1^+}^{\tau} + \int_0^\tau e^{-st} f(t)dt \right]$$

$$= \lim_{\tau \to \infty} \left[e^{-st_1} f(t_1^-) - f(0) + e^{-s\tau} f(\tau) - e^{-st_1} f(t_1^+) + s\int_0^\tau e^{-st} f(t)dt \right].$$

bulunur. Böylece

$$L(f'(t)) = sL(f(t)) - f(0) - e^{-st_1}\left(f(t_1^+) - f(t_1^-)\right)$$

olur.

Eğer $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$ sonlu sayıda sıçrama süreksizlik noktaları ise bu Teorem 3.3. 'ün sonucu,

$$L(f'(t)) = sL(f(t)) - f(0^+) - \sum_{k=1}^{n} e^{-st_k}\left(f(t_k^+) - f(t_k^-)\right) \tag{3.7}$$

olarak genelleştirilebilir.

f', $[0,\infty)$ aralığında sürekli ve üstel mertebeden fonksiyon ise f de sürekli ve üstel mertebedendir. Bunu görmek için

$\left| f'(t) \right| \le Me^{\alpha t}, \; t \ge t_0, \; \alpha \ne 0$

olduğu varsayılsın.

$$f(t) = \int_{t_0}^{t} f'(\tau) d\tau + f(t_0)$$

olur ve

$$\left| f(t) \right| \le M \int_{t_0}^{t} e^{\alpha\tau} d\tau + \left| f(t_0) \right| \le \frac{M}{\alpha} e^{\alpha t} + \left| f(t_0) \right| \le Ce^{\alpha t}, t \ge t_0.$$

bulunur. f sürekli olduğundan bu sonuç $\alpha \ne 0$ için olduğu kadar $\alpha = 0$ için de geçerlidir.

Diferansiyel denklemlerin çözümlerinde daha yüksek mertebeden türevlerin de Laplace dönüşümlerini almak gerektiğinden (3.6) formülünü f'' 'ne uygulayarak

$$L(f''(t)) = sL(f'(t)) - f'(0) = s(sL(f(t)) - f(0)) - f'(0)$$

$$= s^2 L(f(t)) - sf(0) - f'(0) \tag{3.8}$$

elde edilir. Benzer biçimde

$$L(f'''(t)) = sL(f''(t)) - f''(0) = s^3 L(f(t)) - s^2 f'(0) - f''(0) \tag{3.9}$$

bulunur.

Bu bulunanlar genelleştirilirse aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.4. $f(t), f'(t), ..., f^{(n-1)}(t)$, $(0, \infty)$ aralığında sürekli ve α üstel mertebeden fonksiyon, $f^{(n)}(t)$, $[0, \infty)$ aralığında parçalı sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda

$$L\left(f^{(n)}(t)\right) = s^n L(f(t)) - s^{n-1} f\left(0^+\right) - s^{n-2} f'\left(0^+\right) - ... - f^{(n-1)}\left(0^+\right) \tag{3.10}$$

olur.

3.5. Laplace Dönüşümünün Kısmi Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

$t \ge 0$ zaman değişkeni olmak üzere; $u = u(t, x)$ fonksiyonu göz önüne alınsın. $U(s, x)$ ile u 'nun t 'ye göre Laplace dönüşümü gösterilir.

$$U(s, x) = L(u(t, x)) = \int_0^{\infty} e^{-st} u(t, x) dt$$

Burada x, dönüştürülmemiş değişkendir.

Bu durumda

$$L\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial}{\partial x}u(t,x)dt$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty e^{-st}u(t,x)dt=\frac{\partial}{\partial x}U(s,x) \tag{3.11}$$

bulunur. Yani türevin dönüşümü, dönüşümün türevidir.

$$\lim_{x\to x_0}\int_0^\tau e^{-st}u(t,x)dt=\int_0^\infty e^{-st}u(t,x_0)dt\,,$$

Yani,

$$\lim_{x\to x_0}U(s,x)=U(s,x_0) \tag{3.12}$$

bulunur.

(3.11) 'de x'e göre türev alındığından s parametresi sabit olarak alınabilir. Böylece

$$\frac{\partial}{\partial x}U(s,x)=\frac{d}{dx}U(s,x)=\frac{dU}{dx}$$

yazılabilir. (3.11)'in türevi

$$L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\frac{d^2U}{dx^2}$$

olur.

Türev teoreminden

$$L\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=sL(u(t,x))-u(0^+,x)=sU(s,x)-u(0^+,x)$$

olur.

Laplace dönüşüm yönteminde kısmi diferansiyel denklemin her iki yanına Laplace dönüşümü uygulanır ve denklem bilinmeyen fonksiyonun $U=U(x)$ olduğu adi diferansiyel denkleme döner. u'nun diğer değişken olan x'e göre Laplace dönüşümü alınırsa bu sefer denklem bilinmeyen fonksiyonun $U=U(t)$ olduğu adi diferansiyel denkleme döner ve dönüştürülmüş denklemin çözümü bulunur. Bulunan çözümün ters Laplace dönüşümü alınarak orijinal denklemin çözümü bulunur.

3.6 Gecikmeli Parabolik Bir Denklem için Neumann Tipi Sınır Koşullu Başlangıç ve Sınır Değer Probleminin Laplace Dönüşüm Metodu ile Çözümü

(2.1) denklemini fark denklemi olarak yazıp $t \in [m, m+1]$ için denklemin çözümünü Laplace dönüşüm metodu ile bulabiliriz.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_{k+1}(t,x)}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u_{k+1}(t,x)}{\partial x^2} = -(0{,}1)\dfrac{\partial^2 u_k(t-1,x)}{\partial x^2}, \\ k \geq 0, t > 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \in [m, m+1], \\ u_0(t,x) = e^{-t}\cos x \,,\; 0 \leq x \leq \pi \,, -1 \leq t \leq 0, \\ u_{k+1x}(t,0) = u_{k+1x}(t,\pi) = 0 \;\;, t \geq 0 \end{cases} \tag{3.13}$$

gecikmeli parabolik Neumann tipi sınır koşullu başlangıç ve sınır değer probleminin Laplace dönüşüm metodu ile çözümü bulunabilir. t zaman değişkenine göre $u(t,x)$ fonksiyonunun ve türevlerinin ve gecikmeli terim içeren fonksiyonun türevinin Laplace dönüşümü

$$L_t(u_{k+1}) = \int_0^\infty e^{-st} u_{k+1}(t,x)dt \tag{3.14}$$

ve

$$L_t\left(\frac{\partial u_{k+1}}{\partial t}\right) = \int_0^\infty e^{-st} u'_{k+1}(t,x)dt = u_{k+1}(t,x)e^{-st}\Big|_0^\infty \tag{3.15}$$

$$+ s\int_0^\infty e^{-st} u_{k+1}(t,x)dt = -u_{k+1}(0,x) + sU_{k+1}(s),$$

$$L_t\left(\frac{\partial^2 u_k(t-\tau,x)}{\partial x^2}\right) = \int_0^\infty e^{-st}\,\frac{\partial^2 u_k(t-\tau,x)}{\partial x^2}dt = \int_{-\tau}^\infty e^{-s(\theta+\tau)}\,\frac{\partial^2 u_k(\theta,x)}{\partial x^2}d\theta$$

$$=$$

$$= e^{-s\tau}\int_{-\tau}^0 e^{-s\theta}\,\frac{\partial^2 u_k(\theta,x)}{\partial x^2}d\theta + e^{-s\tau}\int_0^\infty \frac{\partial^2 u_k(\theta,x)}{\partial x^2}d\theta \tag{3.16}$$

$$= e^{-s\tau}\left[\frac{e^{-(s+1)\theta}}{s+1}\cos x \Big|_{-\tau}^{0}\right] + e^{-s\tau}\,\frac{d^2 u_k}{dx^2}$$

olarak tanımlansın.

Öncelikle $t \in [0,1]$ için çözüm bulmak istediğimizde (3.13) denkleminde (3.14), (3.15) ve (3.16) eşitliklerinde $\tau = 1,\; k = 0$ alırsak

$$\frac{\partial u_1(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial^2 u_1(t,x)}{\partial x^2}=-\frac{(0.1)\partial^2 u_0(t-1,x)}{\partial x^2} \tag{3.17}$$

denklemi ve

$$L_t(u_1)=\int_0^\infty e^{-st}u_1(t,x)dt$$

$$L_t\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)==-\cos x+sU_1(s),$$

$$L_t\left(\frac{\partial^2 u_0(t-\tau,x)}{\partial x^2}\right)=e^{-s\tau}\left[\frac{1-e^{(s+1)\tau}}{s+1}\right]\cos x-e^{-s\tau}\frac{1}{s+1}\cos x$$

$$=-\frac{e^{\tau}}{s+1}\cos x$$

elde edilir. (3.17) denklemin her iki yanına Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$L_t\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)-L_t\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)=-(0.1)L_t\left(\frac{\partial^2 u_0(t-1,x)}{\partial x^2}\right)$$

$$-\cos x+sU_1-\frac{\mathrm{d}^2U_1}{\mathrm{d}x^2}=-(0.1)\left(\frac{-e}{s+1}\cos x\right)$$

ve dönüştürülmüş denklem

$$\frac{\mathrm{d}^2U_1(s,x)}{\mathrm{dx}^2}-sU_1(s,x)=-\cos x-\frac{e(0.1)}{s+1}\cos x \tag{3.18}$$

olarak bulunur. Bu denklemin homojen çözümü

$$U_{1h}(s,x)=c_1e^{\sqrt{s}x}+c_2e^{-\sqrt{s}x}$$

olur. Başlangıç koşulları kullanılırsa $c_1=c_2=0$ bulunur.

(3.18) denkleminin özel çözümü

$$U_{1p}(s,x)=A\cos x+B\sin x$$

olarak kabul edilip (3.18) denkleminde yerine konulursa

$$A=\frac{1}{s+1}+\frac{e(0.1)}{(s+1)^2}\ ,\ B=0$$

bulunur. Buradan (3.18) denkleminin çözümü

$$U_1(s,x)=U_{1p}(s,x)=\left\{\frac{1}{s+1}+\frac{e(0.1)}{(s+1)^2}\right\}\cos x \tag{3.19}$$

elde edilir. (3.19) çözümüne ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$L^{-1}(U_1(s,x)) = L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)\cos x + L^{-1}\left(\frac{e(0.1)}{(s+1)^2}\right)\cos x$$

ve $t \in [0,1]$ için (3.13) denkleminin

$$u_1(t,x) = e^{-t}\{1+(0.1)et\}\cos x \tag{3.20}$$

çözümü bulunur.

$t \in [1,2]$ için (3.13) denkleminde $k=1$ alınırsa

$$\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_2(t,x)}{\partial x^2} = -\frac{(0.1)\partial^2 u_1(t-1,x)}{\partial x^2} \tag{3.21}$$

denklemi elde edilir. (3.14), (3.15) ve (3.16) eşitliklerinde $k=1$ alındığında

$$L_t(u_2(t,x)) = \int_0^\infty e^{-st} u_2(t,x)dt$$

$$L_t\left(\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial t}\right) = \int_0^\infty e^{-st} u_2'(t,x)dt = U_2(t,x)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}u_2(t,x)dt$$
$$= -u(0,x) + sU_2(s,x)$$

$$L_t\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(t-1,x)\right) = e^{-s}\left[\frac{1-e^{(s+1)}}{s+1}\right]\cos x + e^{-s}\frac{d^2u_1}{dx^2}$$
$$= e^{-s}\left[\frac{1-e^{(s+1)}}{s+1}\right]\cos x - e^{-s}\left(\frac{1}{s+1} + (0.1)e\frac{1}{(s+1)^2}\right)\cos x$$
$$= \left\{\frac{-e}{s+1} - (0.1)e^{-s+1}\frac{1}{(s+1)^2}\right\}\cos x$$

elde edilir. (3.21) denkleminin her iki yanına Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$-u_2(0,x) + sU_2(s,x) - \frac{d^2U_2(s,x)}{dx^2} = -(0.1)e\left\{\frac{-1}{s+1} - \frac{(0.1)e^{-s}}{(s+1)^2}\right\}\cos x$$

Buradan

$$\frac{d^2U_2(s,x)}{dx^2} - sU_2(s,x) = -u_2(0,x) + (0.1)e\left\{\frac{-1}{s+1} - \frac{(0.1)e^{-s}}{(s+1)^2}\right\}\cos x \tag{3.22}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü

$$U_2(s,x) = \frac{u_2(0,x)}{s+1} - (0.1)e\left\{\frac{-1}{(s+1)^2} - \frac{(0.1)e^{-s}}{(s+1)^3}\right\}\cos x \tag{3.23}$$

bulunur. (3.23) çözümünün ters Laplace dönüşümünü alırsak

$$L_t^{-1}(U_2(s,x)) = L_t^{-1}\left(\frac{u_2(0,x)}{s+1}\right) - (0.1)eL_t^{-1}\left(\frac{-1}{(s+1)^2} - \frac{(0.1)e^{-s}}{(s+1)^3}\right)\cos x$$

olur.

$$g(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le T \\ f(t-T) & t \ge T \end{cases} \tag{3.24}$$

fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$G(s) = L_t(g(t)) = e^{-st}F(s) \tag{3.25}$$

olarak verilir. (3.24)'te $T = 1$ alırsak $\frac{n!}{s^{n+1}} = L(t^n)$ olduğundan $F(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$ için

(3.25)' te $G(s) = e^{-s}F(s)$ ve $f(t) = \frac{e^{-t}t^2}{2!}$ yani $f(t-1) = \frac{e^{-(t-1)}(t-1)^2}{2!}$, $t \ge 1$ bulunur.

Bu durumda (3.23) denkleminin çözümü

$$u_2(t,x) = e^{-t}u_2(0,x) + (0.1)e\left(e^{-t}t + (0.1)\frac{e^{-(t-1)}(t-1)^2}{2!}\right)\cos x \tag{3.26}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} u_2(1,x) &= u_1(1,x) = e^{-1}u_2(0,x) + (0.1)\cos x \\ &= e^{-1}(1 + (0.1)e)\cos x \end{aligned}$$

olduğundan

$$u_2(0,x) = \cos x$$

bulunur. (3.21) denkleminin çözümü

$$u_2(t,x) = e^{-t}\left(1 + (0.1)et + \frac{((0.1)e(t-1))^2}{2!}\right)\cos x \tag{3.27}$$

elde edilir.

$t \in [2,3]$ için (3.13) denkleminde $k = 2$ alınırsa

$$\frac{\partial u_3(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_3(t,x)}{\partial x^2} = -\frac{(0.1)\partial^2 u_2(t-1,x)}{\partial x^2} \tag{3.28}$$

denklemi elde edilir.

(3.14), (3.15) ve (3.16) eşitliklerinde $k = 2$ alındığında

$$L_t(u_3(t,x)) = \int_0^\infty e^{-st}u_3(t,x)dt$$

$$L_t\left(\frac{\partial u_3(t,x)}{\partial t}\right)=-u_3(0,x)+sU_3(s,x)$$

$$L_t\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}(t-1,x)\right)=e^{-s}\left[\frac{1-e^{s+1}}{s+1}\right]\cos x+e^{-s}\,\frac{d^2U_2(s,x)}{dx^2}$$

$$=e^{-s}\left[\frac{1-e^{(s+1)}}{s+1}\right]\cos x-e^{-s}\left(\frac{1}{s+1}+\frac{(0.1)e}{(s+1)^2}+\frac{(0.1)^2e^{-s}}{(s+1)^3}\right)\cos x$$

$$=\left\{\frac{-e}{s+1}-(0.1)e^{-s+1}\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{(0.1)^2e^{-2s}}{(s+1)^3}\right\}\cos x$$

bulunur. (3.28) denkleminin her iki yanına Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$-u_3(0,x)+sU_3(s,x)-\frac{d^2U_3(s,x)}{dx^2}=-(0.1)e\left\{-\frac{1}{s+1}-\frac{(0.1)e^{-s}}{(s+1)^2}-\frac{(0.1)^2e^{-2s}}{(s+1)^3}\right\}\cos x$$

ve

$$\frac{d^2U_3(s,x)}{dx^2}-sU_3(s,x)=-u_3(0,x)+(0.1)e\left\{-\frac{1}{s+1}-\frac{(0.1)e^{-s}}{(s+1)^2}-\frac{(0.1)^2e^{-2s}}{(s+1)^3}\right\}\cos x \qquad (3.29)$$

denklemi elde edilir. (3.29) denkleminin çözümü

$$U_3(s,x)=\frac{u_3(0,x)}{s+1}-(0.1)e\left\{-\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{(0.1)e^{-s}}{(s+1)^3}-\frac{(0.1)^2e^{-2s}}{(s+1)^4}\right\}\cos x \qquad (3.30)$$

bulunur. (3.30) çözümünün ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$L_t^{-1}(U_3(s,x))=L_t^{-1}\left(\frac{u_3(0,x)}{s+1}\right)-(0.1)eL_t^{-1}\left\{-\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{(0.1)e^{-s}}{(s+1)^3}-\frac{(0.1)^2e^{-2s}}{(s+1)^4}\right\}\cos x$$

olur.

(3.24)'te $T=2$ alınırsa

$F(s)=\dfrac{1}{(s+1)^4}$ için (3.25)' te $G(s)=e^{-2s}F(s)$ ve $f(t)=\dfrac{e^{-t}t^3}{3!}$ yani

$f(t-2)=\dfrac{e^{-(t-2)}(t-2)^3}{3!}$, $t\geq 2$ bulunur.

Böylece (3.28) denkleminin çözümü

$$u_3(t,x)=e^{-t}u_3(0,x)+(0.1)e\left(e^{-t}t+\frac{(0.1)e^{-(t-1)}(t-1)^2}{2!}+\frac{(0.1)^2e^{-(t-2)}(t-2)^3}{3!}\right)\cos x \qquad (3.31)$$

elde edilir.

$$u_3(2,x)=u_2(2,x)=\left\{e^{-2}u_3(0,x)+e^{-2}\left\{2(0.1)e+\frac{((0.1)e)^2}{2!}\right\}\right\}\cos x$$

$$=e^{-2}\left\{1+2(0.1)e+\frac{((0.1)e)^2}{2!}\right\}\cos x$$

olduğundan

$u_3(0,x)=\cos x$

bulunur. Buradan (3.28) denkleminin çözümü

$$u_3(t,x)=e^{-t}\left\{1+(0.1)et+\frac{(0.1)^2e^2(t-1)^2}{2!}+\frac{(0.1)^3e^3(t-2)^3}{3!}\right\}\cos x \tag{3.32}$$

olur.

$t\in[3,4]$ için (3.13) denkleminde $k=3$ alınırsa

$$\frac{\partial u_4(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial^2u_4(t,x)}{\partial x^2}=-(0.1)\frac{\partial^2u_3(t-1,x)}{\partial x^2} \tag{3.33}$$

denklemi elde edilir.

(3.14), (3.15) ve (3.16) eşitliklerinde $k=3$ alındığında

$$L_t(u_4(t,x))=\int_0^\infty e^{-st}u_4(t,x)dt$$

$$L_t\left(\frac{\partial u_4(t,x)}{\partial t}\right)=-u_4(0,x)+sU_4(s,x)$$

$$L_t\left(\frac{\partial^2u_3(t-1,x)}{\partial x^2}\right)=e^{-s}\left[\frac{1-e^{(s+1)}}{s+1}\right]\cos x+e^{-s}\,\frac{d^2U_3(s,x)}{dx^2}$$

$$=e^{-s}\left[\frac{1-e^{s+1}}{s+1}\right]\cos x-e^{-s}\left(\frac{1}{s+1}\left(\frac{1}{s+1}+\frac{(0.1)e}{(s+1)^2}+\frac{(0.1)^2ee^{-s}}{(s+1)^3}+\frac{(0.1)^3ee^{-2s}}{(s+1)^4}\right)\cos x\right.$$

olur. (3.33) denkleminin her iki yanına Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}&-u_4(0,x)+sU_4(s,x)-\frac{d^2U_4(s,x)}{dx^2}\\&=-(0.1)e\left\{-\frac{1}{s+1}-\frac{(0.1)e^{-s}}{(s+1)^2}-\frac{(0.1)^2e^{-2s}}{(s+1)^3}-\frac{(0.1)^3e^{-3s}}{(s+1)^4}\right\}\cos x\end{aligned} \tag{3.34}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü

$$U_4(s,x)=\frac{u_4(0,x)}{s+1}-(0.1)e\left\{-\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{(0.1)e^{-s}}{(s+1)^3}-\frac{(0.1)^2e^{-2s}}{(s+1)^4}-\frac{(0.1)^3e^{-3s}}{(s+1)^5}\right\}\cos x \qquad (3.35)$$

bulunur. (3.35) çözümüne ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$L_t^{-1}(U_4(s,x))=L_t^{-1}\left(\frac{u_4(0,x)}{s+1}\right)$$

$$-(0.1)eL_t^{-1}\left\{-\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{(0.1)e^{-s}}{(s+1)^3}-\frac{(0.1)^2e^{-2s}}{(s+1)^4}-\frac{(0.1)^3e^{-3s}}{(s+1)^5}\right\}\cos x$$

olur.

(3.24)'te $T=3$ alınırsa $F(s)=\dfrac{1}{(s+1)^5}$ için (3.25)' te $G(s)=e^{-3s}F(s)$ ve $f(t)=\dfrac{e^{-4}t^4}{4!}$

yani $f(t-3)=\dfrac{e^{-(t-3)}(t-3)^4}{4!}$, $t\geq 3$ bulunur.

Buradan (3.35) çözümünün ters Laplace dönüşümü

$$u_4(t,x)=e^{-t}u_4(0,x)+(0.1)e\left\{e^{-t}t+\frac{(0.1)e^{-t(-1)}(t-1)^2}{2!}\right.$$
$$\left.+\frac{(0.1)^2e^{-(t-2)}(t-2)^3}{3!}+\frac{(0.1)^3e^{-(t-3)}(t-3)^4}{4!}\right\}\cos x \qquad (3.36)$$

bulunur.

$$u_4(3,x)=u_3(3,x)=e^{-3}u_4(0,x)+e^{-3}\left\{1+3(0.1)e\frac{(2(0.1)e)^2}{2!}+\frac{((0.1)^2e)^3}{3!}\right\}\cos x$$
$$=e^{-3}\left\{1+3(0.1)e+\frac{(2(0.1)e)^2}{2!}+\frac{((0.1)^2e)^3}{3!}\right\}\cos x$$

olduğundan

$$u_4(0,x)=\cos x$$

bulunur. Böylece (3.33) denkleminin çözümü

$$u_4(t,x)=e^{-t}\left\{1+(0.1)et+\frac{((0.1)e(t-1))^2}{2!}+\frac{((0.1)e(t-2))^3}{3!}+\frac{((0.1)e(t-3))^4}{4!}\right\}\cos x \qquad (3.37)$$

elde edilir.

Benzer biçimde her $t\in[m,m+1]$ ve $k\geq 0$ için denklemler birbiri ardınca çözülür ve $m\in N, t\in[m,m+1]$ için (3.13) denkleminde $k=m$ alınırsa

$$U_m(t,x)=e^{-t}\left(1+(0.1)et+...+\frac{((0.1)e(t-m))^{m+1}}{(m+1)}\right)\cos x$$

olmak üzere;

$$\frac{\partial u_{m+1}}{\partial t}(t,x)-\frac{\partial^2 u_{m+1}(t,x)}{\partial x^2}=-(0.1)\frac{\partial^2 u_m(t,x)}{\partial x^2} \tag{3.38}$$

denklemi elde edilir.

(3.14), (3.15) ve (3.16) eşitliklerinde $k=m$ alındığında

$$L_t(u_m(t,x))=\int_0^\infty e^{-st}u_m(t,x)dt$$

$$L_t\left(\frac{\partial u(t,x)_m}{\partial t}\right)=-u_{m+1}(0,x)+sU_{m+1}(s,x) \quad ,$$

$$L_t\left(\frac{\partial^2 u_{m+1}}{\partial x^2}(t-1,x)\right)=e^{-s}\left[\frac{1-e^{(s+1)}}{s+1}\right]\cos x+e^{-s}\,\frac{d^2U_m}{dx^2}$$

$$=e^{-s}\left[\frac{1-e^{s+1}}{s+1}\right]\cos x-e^{-s}\left(\frac{1}{s+1}+\frac{(0.1)e}{(s+1)^2}+\frac{(0.1)^2ee^{-s}}{(s+1)^3}+\right.$$
$$\left.+\frac{(0.1)^3ee^{-2s}}{(s+1)^4}+...+\frac{(0.1)^m e^{-(m-1)s}}{(s+1)^{m+1}}\right)\cos x$$

olur. (3.38) denkleminin her iki yanına Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$-u_{m+1}(0,x)+sU_{m+1}(s,x)-\frac{d^2U_{m+1}}{dx^2}$$
$$=-(0.1)e\left\{-\frac{1}{s+1}-\frac{(0.1)e^{-s}}{(s+1)^2}-\frac{(0.1)^2e^{-2s}}{(s+1)^3}-...-\frac{(0.1)^m e^{-ms}}{(s+1)^{m+1}}\right\}\cos x \tag{3.39}$$

denklemi elde edilir. (3.39) denkleminin çözümü

$$U_{m+1}(s,x)=\frac{u_{m+1}(0,x)}{s+1}-(0.1)e\left\{-\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{(0.1)e^{-s}}{(s+1)^3}-\frac{(0.1)^2e^{-2s}}{(s+1)^4}-...-\frac{(0.1)^m e^{-ms}}{(s+1)^{m+2}}\right\}\cos x \tag{3.40}$$

bulunur. (3.40) çözümünün ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$L_t^{-1}(U_{m+1}(s,x))=L_t^{-1}\left(\frac{u_{m+1}(0,x)}{s+1}\right)$$
$$-L_t^{-1}\left(-\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{(0.1)e^{-s}}{(s+1)^3}-\frac{(0.1)^2e^{-2s}}{(s+1)^4}-...-\frac{(0.1)^m e^{-ms}}{(s+1)^{m+2}}\right)\cos x$$

olur.

(3.24)’te $T = m$ alınırsa $F(s) = \dfrac{1}{(s+1)^{m+2}}$ için (3.25)’ te $G(s) = e^{-ms}F(s)$ ve

$f(t) = \dfrac{e^{-t}t^{m+1}}{(m+1)!}$ yani $f(t-m) = \dfrac{e^{-(t-m)}(t-m)^{m+1}}{(m+1)!}$, $t \geq m$ bulunur.

Buradan (3.40) çözümünün ters Laplace dönüşümü

$$u_{m+1}(t,x) = e^{-t}u_{m+1}(0,x) + (0.1)e\left(e^{-t}t + \frac{(0.1)e^{-(t-1)}(t-1)^2}{2!} + \frac{(0.1)^2 e^{-(t-2)}(t-2)^3}{3!} + \ldots + \frac{(0.1)^m e^{-(t-m)}(t-m)^{m+1}}{(m+1)!}\right)\cos x \tag{3.41}$$

bulunur.

$$u_{m+1}(m,x) = u_m(m,x) = e^{-m}u_{m+1}(0,x) + e^{-m}\left(m(0.1)e + \frac{((m-1)(0.1)e)^2}{2!} + \frac{((m-2)(0.1)e)^3}{3!} + \ldots + \frac{((0.1)e)^m}{m!}\right)\cos x$$

$$= e^{-m}\left(1 + m(0.1)e + \ldots + \frac{((m-1)(0.1)e)^2}{(m-1)!} + \frac{((0.1)e)^m}{m!}\right)\cos x$$

olduğundan

$$u_{m+1}(0,x) = \cos x$$

bulunur. Buradan (3.38) denkleminin çözümü

$$u_{m+1}(t,x) = e^{-t}\left\{1 + (0.1)et + \frac{((0.1)e(t-1))^2}{2!} + \ldots. + \frac{((0.1)e(t-m))^{m+1}}{(m+1)!}\right\}\cos x \tag{3.42}$$

elde edilir.

Böylece Laplace dönüşümü uygulanarak fark denklemine dönüştürülmüş (2.1) denkleminin (2.28) tam çözümü bulunur.

BÖLÜM 4

GECİKMELİ PARABOLİK BİR DENKLEM İÇİN NEUMANN TİPİ SINIR KOŞULLU BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMİNİN HOMOTOPİ ANALİZ METODU İLE ÇÖZÜMÜ

(2.1) probleminin çözümü için S.J.Liao tarafından bulunan homotopi analiz metodunu göz önüne alalım [51-59]. Yöntemi tanıtmak için

$$N[u(t,x)] = f(t,x) \tag{4.1}$$

diferansiyel denklemini ele alalım. Genel olarak yöntemin tanıtımında kullanılan N operatörü lineer olmayan bir operatör olmasına rağmen (2.1) probleminde çalıştığımız gecikmeli parabolik denklem lineer bir denklem olduğu için (2.1) problemi için N lineer bir operatör, t ve x bağımsız değişkenler, $u(t,x)$ bilinmeyen fonksiyon ve $f(t,x)$ verilen analitik bir fonksiyon olarak alınacaktır. $q \in [0,1]$ homotopi parametresi, $\hbar \neq 0$ yakınsaklık kontrol parametresi, L lineer operatör, $u_0(t,x)$, $u(t,x)$' in başlangıç yaklaşımı ve $\phi(t,x;q)$ bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere;

$$(1-q)L[\phi(t,x;q) - u_0(t,x)] = q\hbar[N[\phi(t,x;q)] - f(t,x)] \tag{4.2}$$

denklemi sıfırıncı-derece deformasyon denklemi olarak adlandırılır.

Tanım 4.1. $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ sürekli dönüşümler, $I = [0,1]$ olsun. Her $x \in X$ için $H(x,0) = f(x)$ ve $H(x,1) = g(x)$ eşitliklerini sağlayan bir $H : XxI \to Y$ sürekli dönüşümü varsa f ve g dönüşümleri homotopiktir denir. H dönüşümüne de f ve g arasında homotopi dönüşümü denir.

Homotopik dönüşümler tanımına göre, (4.2) sıfırıncı-derece deformasyon denklemini kullanarak $q=1$ ve $q=0$ alındığında lineer denklem ile lineer olmayan denklem arasında bir homotopi dönüşümü tanımlanabilir.
Benzer şekilde $q=0$ ve $q=1$ için

$$\phi(t,x;0)=u_0(t,x) \quad , \quad \phi(t,x;1)=u(t,x) \tag{4.3}$$

olacağından $u(t,x)$ çözümü ile $u_0(t,x)$ başlangıç yaklaşımı arasında da bir homotopi dönüşümü tanımlanabilir. Bu durumda q,0' dan 1'e değiştikçe $\phi(t,x;q)$ çözümü, $u_0(t,x)$ başlangıç yaklaşımından denklemin çözümü olan $u(t,x)$' e değişir. $\phi(t,x;q)$, q'ya göre Taylor serisine açılırsa

$$u_m(t,x)=\frac{1}{m!}\frac{\partial^m\phi(t,x;q)}{\partial q^m}\bigg|_{q=0} \tag{4.4}$$

olmak üzere;

$$\phi(t,x;q)=u_0(t,x)+\sum_{m=1}^{\infty}u_m(t,x)q^m \tag{4.5}$$

elde edilir. $u_0(t,x)$ başlangıç yaklaşımı, L lineer operatörü, $\hbar$ yakınsaklık kontrol parametresi uygun olarak seçildiğinde (4.4) serisi $q=1$' de verilen denklemin çözümü olan $u(t,x)$' e yakınsar ve

$$u(t,x)=u_0(t,x)+\sum_{m=1}^{\infty}u_m(t,x) \tag{4.6}$$

bulunur.
$\vec{U}_n=\{u_0(t,x),u_1(t,x),...,u_n(t,x)\}$ vektörü tanımlansın. (4.2) sıfırıncı derece deformasyon denklemi türetilerek,

$$R_m=\frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}\left(N(\phi(t,x;q))-f(t,x)\right)}{\partial q^{m-1}}\bigg|_{q=0} \tag{4.7}$$

$$\chi_m=\begin{cases}0 \quad , \quad m\le 1\\ 1 \quad , \quad m>1\end{cases} \tag{4.8}$$

olmak üzere;

$$L[u_m(t,x)-\chi_m u_{m-1}(t,x)]=\hbar R_m\left(\vec{U}_{m-1}\right) \tag{4.9}$$

$$u_m(0,x)=0 \quad , \quad m\ge 1$$

m. derece deformasyon denklemleri elde edilir. Yüksek derece deformasyon denklemleri art arda çözülerek $u(t,x)$ çözümünün N. dereceden yaklaşımı

$$u(t,x) \approx u_0(t,x) + \sum_{m=1}^{N} u_m(t,x) \tag{4.10}$$

bulunur. Çözümlerden oluşturulan homotopi serisi $q=1$' de çözüme yakınsadığından problemin çözümü olan

$$u(t,x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(t,x) \tag{4.11}$$

elde edilir.

Liao [42] kitabında, çözüm serisinin yakınsaklık bölgesini belirlemek için $\hbar$'yi bağımsız değişken gibi düşünüp N. dereceden yaklaşık çözüm olan $\sum_{m=1}^{N} u_m(t,x)$ 'i kullanarak bulunan $\hbar$'ye bağlı fonksiyonun grafiklerinin çizilmesi gerektiğini belirtmiştir. Örneğin

$$\gamma = u_{xtt}(\vec{x},t)\Big|_{\vec{x}=0,\, t=0}$$

olmak üzere; γ, $\hbar$'nin bir fonksiyonudur. Buradan bir $\gamma \sim \hbar$ eğrisi çizilebilir. γ'nın farklı $\hbar$ değerleri için verilen bütün yakınsak seriler alınan terim sayısına bağlı olarak tam çözüme yakınsar. $\gamma \sim \hbar$ eğrisinin grafiğinde $\hbar$-eksenine paralel bir doğru parçası görülür. Bu doğru parçasına karşı gelen $\hbar$ değerlerinin oluşturduğu bölge serinin yakınsaklık bölgesidir. Ele alınan probleme göre çözüm serisinden $\hbar$'ye bağlı bir fonksiyon elde etmek için alınan türevin mertebesi ve türev alınan değişken farklılık gösterir.

Eğer $\hbar$ yerine, $\hbar$'nin yakınsak olduğu bölgeden herhangi bir değer konursa buna karşı gelen çözüm serisi yakınsak olur. Homotopi analiz metodu, bir problemin yardımcı $\hbar$ parametresi cinsinden çözüm ailesini verir. Aile içindeki her bir çözümün yakınsaklık bölgesi, $\hbar$ yakınsaklık kontrol parametresi ile belirlenir.

(2.1) denklemini homotopi analiz metodu ile çözmek için denklemi $t \in [0,1]$ için yeniden düzenleyelim:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = (0.1)e^{-(t-1)}\cos x, \quad 0 < t \le 1\,,\ 0 < x < \pi, \\ u(0,x) = \cos x, \quad\quad 0 \le x \le \pi, \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0\ \ ,\ \ t \in [0,1] \end{cases} \tag{4.12}$$

(4.12) denkleminin çözümü için başlangıç yaklaşımını

$$u_0(t,x) = \cos x \tag{4.13}$$

c; integral sabiti olmak üzere $L[c] = 0$ özelliğini sağlayan

$$L[\phi(t,x;q)] = \frac{\partial \phi(t,x;q)}{\partial t} \tag{4.14}$$

olsun. (4.12) denklemi için

$$N[\phi(t,x;q)] = \frac{\partial \phi(t,x;q)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \phi(t,x;q)}{\partial x^2} \tag{4.15}$$

olsun. (4.2) sıfırıncı-derece deformasyon denklemini oluşturursak

$q = 0$ ve $q = 1$ için

$$\begin{aligned} \phi(t,x;0) &= u_0(t,x) = u(0,x) = \cos x \\ \phi(t,x;1) &= u(t,x) \end{aligned}\quad , \tag{4.16}$$

olur.

$$R_m(\vec{u}_{m-1}) = \frac{\partial u_{m-1}(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_{m-1}(t,x)}{\partial x^2} - (1-\chi_m)(0.1)e^{-(t-1)}\cos x \tag{4.17}$$

olmak üzere (4.9) m derece deformasyon denkleminin çözümü $m \ge 1$ için

$$u_m(t,x) = \chi_m u_{m-1}(t,x) + \hbar L^{-1}\left[R_m\left(\vec{U}_{m-1}\right)\right] \tag{4.18}$$

bulunur. Buradan başlangıç yaklaşımı

$$u_0(t,x) = \cos x$$

olarak alınır. (4.17)'den

$$R_1(u_0) = \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - (0.1)e^{-(t-1)}\cos x\,,$$

$$R_1(u_0) = \cos x - (0.1)e\left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \ldots\right)\cos x\,,$$

elde edilir. (4.9)'dan

$$L[u_1(t,x) - \chi_1 u_0(t,x)] = \hbar R_1(u_0)$$

ve

$$L(u_1) = \hbar R_1(u_0) \qquad u_1(0,x) = 0$$

denklemi

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \hbar R_1(u_0) \quad ,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \hbar\left[\cos x - (0.1)e\left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \ldots\right)\cos x\right],\ u_1(0,x) = 0\,,$$

olur. Bu denklemin çözümünden

$$u_1(t,x) = -\hbar(0.1)e\left(t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^4}{4!} + \ldots\right)\cos x + \hbar t\cos x \quad , \quad u_1(0,x) = 0$$

Yani

$$u_1(t,x) = -\hbar(0.1)e\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}t^k}{k!}\cos x + \hbar t\cos x,$$

bulunur.

(4.17)'den

$$R_2(u_1) = \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = -\hbar(0.1)e\left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \ldots\right)\cos x + \hbar\cos x$$
$$-\hbar(0.1)e\left(t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^4}{4!} + \ldots\right)\cos x + \hbar t\cos x \quad ,$$

elde edilir. (4.9) 'dan

$$L[u_2(t,x) - \chi_2 u_1(t,x)] = \hbar R_2(u_1)$$

ve

$$L(u_2) = L(u_1) + \hbar R_2(u_1) \ , \ u_2(0,x) = 0$$

denklemi

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \hbar\cos x - \hbar(0.1)e\left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \ldots\right)\cos x - \hbar^2(0.1)e\left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \ldots\right)\cos x +$$
$$\hbar^2\cos x - \hbar^2(0.1)e\left(t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^4}{4!} + \ldots\right)\cos x + \hbar^2 t\cos x \ , \ u_2(0,x) = 0$$

olur. Bu denklemin çözümünden

$$u_2(t,x)=\hbar(\hbar+1)\cos xt-\hbar(\hbar+1)(0.1)e\left(t-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}-\frac{t^4}{4!}+...\right)\cos x$$

$$-\hbar^2(0.1)e\left(\frac{t^2}{2!}-\frac{t^3}{3!}+...\right)\cos x+\frac{\hbar^2t^2}{2!}\cos x$$

Yani

$$u_2(t,x)=\hbar(\hbar+1)t\cos x-\hbar(\hbar+1)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{k-1}}{(k-1)!}\cos x$$

$$+\hbar^2(0.1)e\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}t^k}{k!}\cos x+\frac{\hbar^2t^2}{2!}\cos x$$

bulunur. (4.17)'den

$$R_3(u_2)=\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=\hbar(\hbar+1)\cos x-\hbar(\hbar+1)(0.1)e\left(1-t+\frac{t^2}{2!}-\frac{t^3}{3!}+...\right)\cos x$$

$$-\hbar^2(0.1)e\left(t-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}-\frac{t^4}{4!}+...\right)\cos x+\hbar^2t\cos x-\hbar^2(0.1)e\left(\frac{t^2}{2!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^5}{5!}+...\right)\cos x+\frac{\hbar^2t^2}{2!}\cos x$$

elde edilir. (4.9)'dan

$$L[u_3(t,x)-\chi_3u_2(t,x)]=\hbar R_3(u_2)$$

ve

$$L(u_3)=L(u_2)+\hbar R_3(u_2)\quad,\qquad u_3(0,x)=0$$

denklemi

$$\frac{\partial u_3}{\partial t}=\hbar\cos x-\hbar(0.1)e\left(1-t+\frac{t^2}{2!}-\frac{t^3}{3!}+...\right)\cos x-\hbar^2(0.1)e\left(1-t+\frac{t^2}{2!}-\frac{t^3}{3!}+...\right)\cos x+$$

$$\hbar^2\cos x-\hbar^2(0.1)e\left(t-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}-\frac{t^4}{4!}+...\right)\cos x+\hbar^2t\cos x+\hbar^2(\hbar+1)t\cos x$$

$$-\hbar^2(\hbar+1)(0.1)e\left(1+t-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}-...\right)\cos x-\hbar^3(0.1)e\left(t-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}-\frac{t^4}{4!}+...\right)\cos x$$

$$+\hbar^3t\cos x+\hbar^2(\hbar+1)t\cos x-\hbar^2(\hbar+1)(0.1)e\left(t-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}-\frac{t^4}{4!}+...\right)\cos x$$

$$-\hbar^3(0.1)e\left(\frac{t^2}{2!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^5}{5!}+...\right)\cos x+\frac{\hbar^3t^2}{2!}\cos x$$

olur. Bu denklemin çözümünden

$$u_3(t,x)=\hbar(\hbar+1)t\cos x+3\hbar^2(\hbar+1)\frac{t^2}{2!}\cos x-\hbar(\hbar+1)^2\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}t^{k-2}}{(k-2)!}\cos x$$
$$-2\hbar^2(\hbar+1)\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}t^{k-1}}{(k-1)!}\cos x-\hbar^3(0.1)e\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}t^{k}}{k!}\cos x+\frac{\hbar^3t^3}{3!}\cos x$$

bulunur. Denklemler sırasıyla çözülürse

$$u_n(t,x)=g(\hbar+1,t,x)+(-1)^n\hbar^n(0.1)e\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}t^{k}}{k!}\cos x+\frac{\hbar^nt^n}{n!}\cos x \qquad (4.19)$$

elde edilir. (4.11)'de $\hbar=-1$ seçersek

$$u_0(t,x)=\cos x,$$

$$u_1(t,x)=(0.1)e\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}t^{k}}{k!}\cos x-t\cos x$$

$$u_2(t,x)=(0.1)e\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}t^{k}}{k!}\cos x+\frac{t^2}{2!}\cos x,$$

$$u_3(t,x)=(0.1)e\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}t^{k}}{k!}\cos x-\frac{t^3}{3!}\cos x,$$

.

.

.

$$u_n(t,x)=(0.1)e\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}t^{k}}{k!}\cos x+\frac{(-1)^nt^n}{n!}\cos x \qquad (4.20)$$

elde edilir. Bu durumda $\hbar=-1$ için (4.12) probleminin çözümü

$$u(t,x)=(1+(0.1)et)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}t^{k}}{k!}\cos x \quad , \quad 0\le t\le 1 \qquad (4.21)$$

bulunur. (4.21)'den (4.12) probleminin tam çözümü olan

$$u(t,x)=(1+(0.1)et)e^{-t}\cos x \qquad (4.22)$$

elde edilir.

(2.1) problemini $t \in [1,2]$ için yeniden düzenleyelim:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = (0.1)e^{-(t-1)}[(0.1)e(t-1)+1]\cos x, \quad 1<t\le 2\ , 0<x<\pi, \\ u(1,x) = e^{-1}[(0.1)e+1]\cos x \quad , \quad 0<x<\pi, \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 \quad , \quad 1<t\le 2 \end{cases} \tag{4.23}$$

(4.23) denkleminin çözümü için başlangıç yaklaşımını

$$u_0(t,x) = e^{-1}\{1+(0.1)e\}\cos x \tag{4.24}$$

olarak seçelim. (4.14) lineer operatörünü göz önüne alıp (4.23) denklemi için (4.15) operatörünü tanımlarsak (4.2) sıfırıncı derece deformasyon denklemini oluştururuz. $m \ge 1$ için

$$R_m(\vec{u}_{m-1}) = \frac{\partial u_{m-1}(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_{m-1}(t,x)}{\partial x^2} - (1-\chi_m)(0.1)e^{-(t-1)}[(0.1)e(t-1)+1]\cos x \tag{4.25}$$

olmak üzere ;

$$u_m(1,x) = 0 \tag{4.26}$$

başlangıç koşullarını alarak (4.9) $m.$ derece deformasyon denklemlerini elde ederiz. (4.18) denkleminden, $m.$ derece deformasyon denklemlerinin çözümleri

$$\begin{aligned} R_1(u_0) &= \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - (0.1)e^{-(t-1)}\{1+(0.1)e(t-1)\}\cos x \\ &= e^{-1}\{1+(0.1)e\}\cos x - (0.1)e^{-(t-1)}\{1+(0.1)e(t-1)\}\cos x \end{aligned}$$

elde edilir. (4.9)'dan

$$L[u_1(t,x) - \chi_1 u_0(t,x)] = \hbar R_1(u_0)$$

ve

$$L(u_1) = \hbar R_1(u_0), \qquad u_1(1,x) = 0$$

denklemi

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \hbar e^{-1}\{1+(0.1)e\}\cos x - \hbar(0.1)e^{-(t-1)}\{1+(0.1)e(t-1)\}\cos x\ , \qquad u_1(1,x) = 0$$

olur. Bu denklemde $t-1=\vartheta$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$\frac{\partial u_1}{\partial \vartheta} = \hbar e^{-1}\{1+(0.1)e\}\cos x - \hbar(0.1)e^{-\vartheta}\{1+(0.1)e\vartheta\}\cos x \quad , \quad u_1(0,x) = 0$$

ve buradan

$$\frac{\partial u_1}{\partial \vartheta} = \hbar e^{-1}\{1+(0.1)e\}\cos x - \hbar(0.1)\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+...\right)\cos x$$

$$-\hbar(0.1)^2 e\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+...\right)\vartheta\cos x\ , \qquad u_1(0,x)=0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü

$$u_1(t,x) = \hbar e^{-1}\{1+(0.1)e\}\cos x(t-1) - \hbar(0.1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-1)^k}{k!}\cos x$$

$$-\hbar(0.1)^2 e\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-1)^{k+1}}{(k+1)(k-1)!}\cos x$$

olarak bulunur. (4.17)’den

$$R_2(u_1) = \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$$

elde edilir. (4.9)’dan

$$L[u_2(t,x) - \chi_2 u_1(t,x)] = \hbar R_2(u_1)\ \ , \quad u_2(1,x)=0$$

$\vartheta = t-1$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$R_2(u_1) = \hbar e^{-1}\{1+(0.1)e\}\cos x - \hbar(0.1)\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+...\right)\cos x$$

$$-\hbar(0.1)^2 e\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+...\right)\cos x + \hbar e^{-1}\{1+(0.1)e\}\vartheta\cos x$$

$$-\hbar(0.1)\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2!}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+...\right)\cos x - \hbar(0.1)^2 e\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^3}{3}+\frac{\vartheta^4}{4.2!}-\frac{\vartheta^5}{5.3!}+...\right)\cos x$$

elde edilir. (4.9)’dan

$$L[u_2(t,x) - \chi_2 u_1(t,x)] = \hbar R_2(u_1)\ , \quad u_2(0,x)=0$$

ve

$$L(u_2) = L(u_1) + \hbar R_2(u_1), \quad u_2(0.x)=0$$

olduğundan

$$\frac{\partial u_2}{\partial \vartheta} = \frac{\partial u_1}{\partial \vartheta} + \hbar R_2(u_1)$$

Yani

$$\frac{\partial u_2}{\partial \vartheta}=\hbar e^{-1}\{1+(0.1)e\}\cos x-\hbar(0.1)\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\ldots\right)\cos x$$
$$-\hbar(0.1)^2 e\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+\ldots\right)\cos x+\hbar^2 e^{-1}\{1+(0.1)e\}\cos x$$
$$-\hbar^2(0.1)\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\ldots\right)\cos x-\hbar^2(0.1)^2 e\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+\ldots\right)\cos x$$
$$+\hbar^2 e^{-1}\{1+(0.1)e\}\vartheta\cos x-\hbar^2(0.1)\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2!}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\ldots\right)\cos x$$
$$-\hbar^2(0.1)^2 e\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^3}{3}+\frac{\vartheta^4}{4.2!}-\frac{\vartheta^5}{5.3!}+\ldots\right)\cos x\ , \qquad u_2(0,x)=0$$

denklemi bulunur. Bu denklemin çözümü

$$u_2(t,x)=\hbar(\hbar+1)e^{-1}\{1+(0.1)e\}\cos x(t-1)-\hbar(\hbar+1)(0.1)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k(t-1)^{k-1}}{(k-1)!}\cos x$$
$$-\hbar(\hbar+1)(0.1)^2 e\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k(t-1)^k}{k(k-2)!}\cos x+\hbar^2 e^{-1}\{1+(0.1)e\}\cos x\frac{(t-1)^2}{2!}$$
$$+\hbar^2(0.1)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-1)^k}{k!}\cos x+\hbar^2(0.1)^2 e\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-1)^{k+1}}{(k+1)k(k-2)!}\cos x$$

elde edilir. (4.17)’den

$$R_3(u_2)=\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$$

olur. $t-1=\vartheta$ değişken dönüşümü yapılırsa (4.17)’den

$$R_3(u_2)=\frac{\partial u_2}{\partial \vartheta}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$$

ve

$$R_3(u_2)=\hbar e^{-1}\{1+(0.1)e\}\cos x-\hbar(0.1)\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\ldots\right)\cos x$$
$$-\hbar(0.1)^2 e\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+\ldots\right)\cos x$$

$$+\hbar^2 e^{-1}\{1+(0.1)e\}\cos x-\hbar^2(0.1)\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\ldots\right)\cos x$$
$$-\hbar^2(0.1)^2 e\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+\ldots\right)\cos x$$
$$+\hbar^2 e^{-1}\{1+(0.1)e\}\vartheta\cos x-\hbar^2(0.1)\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2!}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\ldots\right)\cos x$$
$$-\hbar^2(0.1)^2 e\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^3}{3}+\frac{\vartheta^4}{4.2!}-\frac{\vartheta^5}{5.3!}+\ldots\right)\cos x$$
$$+\hbar(1+\hbar)e^{-1}\{1+(0.1)e\}\vartheta\cos x-\hbar(\hbar+1)(0.1)\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\ldots\right)\cos x$$
$$-\hbar(\hbar+1)(0.1)^2 e\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^3}{3}+\frac{\vartheta^4}{3!}-\frac{\vartheta^5}{4!}+\ldots\right)\cos x+\hbar^2 e^{-1}\{1+(0.1)e\}\frac{\vartheta^2}{2}\cos x$$
$$+(0.1)\hbar^2\left(-\frac{\vartheta^2}{2}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\frac{\vartheta^5}{5!}-\ldots\right)\cos x$$
$$+\hbar^2(0.1)^2 e\left(-\frac{\vartheta^3}{3.2}+\frac{\vartheta^4}{4.3}-\frac{\vartheta^5}{5.4.2!}+\frac{\vartheta^6}{6.5.3!}+\ldots\right)\cos x$$

elde edilir. (4.9)’dan

$$L(u_3)=L(u_2)+\hbar R_3(u_2)\ ,\quad u_3(1,x)=0$$

denklemi $t-1=\vartheta$ değişken dönüşümü ile

$$L(u_3)=L(u_2)+\hbar R_3(u_2)\ ,\quad u_3(0,x)=0$$

denklemine dönüşür ve

$$\frac{\partial u_3}{\partial\vartheta}=\hbar e^{-1}\{1+(0.1)e\}\cos x-\hbar(0.1)\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\ldots\right)\cos x$$
$$-\hbar(0.1)^2 e\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+\ldots\right)\cos x+\hbar^2 e^{-1}\{1+(0.1)e\}\cos x$$

$$-\hbar^2(0.1)\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+...\right)\cos x-\hbar^2(0.1)^2 e\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+...\right)\cos x$$

$$+\hbar^2 e^{-1}\{1+(0.1)e\}\vartheta\cos x-\hbar^2(0.1)\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2!}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+...\right)\cos x$$

$$-\hbar^2(0.1)^2 e\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^3}{3}+\frac{\vartheta^4}{4.2!}-\frac{\vartheta^5}{5.3!}+...\right)\cos x+\hbar^3 e^{-1}\{1+(0.1)e\}\cos x$$

$$-\hbar^3(0.1)\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+...\right)\cos x-\hbar^3(0.1)^2 e\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+...\right)\cos x$$

$$+\hbar^3 e^{-1}\{1+(0.1)e\}\vartheta\cos x-\hbar^3(0.1)e\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2!}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+...\right)\cos x$$

$$-\hbar^3(0.1)^2 e\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^3}{3}+\frac{\vartheta^4}{4.2!}-\frac{\vartheta^5}{5.3!}+...\right)\cos x+\hbar^2(\hbar+1)e^{-1}\{1+(0.1)e\}\vartheta\cos x$$

$$-\hbar^2(\hbar+1)(0.1)\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2!}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+...\right)\cos x$$

$$-\hbar^2(\hbar+1)(0.1)^2 e\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^3}{3}+\frac{\vartheta^4}{3!}-\frac{\vartheta^5}{4!}+...\right)\cos x$$

$$+\hbar^3 e^{-1}\{1+(0.1)e\}\frac{\vartheta^2}{2}\cos x+\hbar^3(0.1)\left(-\frac{\vartheta^2}{2}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\frac{\vartheta^5}{5!}-...\right)\cos x$$

$$+\hbar^3(0.1)^2 e\left(-\frac{\vartheta^3}{3.2}+\frac{\vartheta^4}{4.3}-\frac{\vartheta^5}{5.4.2!}+\frac{\vartheta^6}{6.5.3!}-...\right)\cos x$$

denkleminin çözümü

$$u_3(t,x)=\hbar(\hbar+1)^2 e^{-1}[(0.1)e+1]\cos x(t-1)+2\hbar^2(\hbar+1)e^{-1}[(0.1)e+1]\cos x\frac{(t-1)^2}{2!}$$

$$+\hbar(\hbar+1)^2(0.1)\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-1)^{k-2}}{(k-2)!}\cos x-\hbar(\hbar+1)^2(0.1)^2 e\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-1)^{k}}{(k-1)(k-3)!}\cos x$$

$$-2\hbar^2(\hbar+1)(0.1)\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k}(t-1)^{k-1}}{(k-1)!}\cos x-\hbar(\hbar+1)(0.1)^2\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k}(t-1)^{k}}{k(k-1)(k-3)!}\cos x$$

$$+\hbar^2(\hbar+1)(0.1)^2 e\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k}(t-1)^{k}}{k(k-1)(k-2)!}\cos x+\hbar^3 e^{-1}[(0.1)e+1]\cos x\frac{(t-1)^3}{3!}$$

$$-\hbar^3(0.1)\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-1)^{k}}{k!}\cos x-\hbar^3(0.1)^2 e\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-1)^{k+1}}{(k+1)k(k-1)(k-3)!}\cos x$$

bulunur.

Denklemler sırasıyla çözülürse

$$u_n(t,x) = g_2(\hbar+1,t,x) + \hbar^n e^{-1}[(0.1)e+1]\cos x \frac{(t-1)^n}{n!} - \hbar^n (0.1)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-1)^k}{k!}\cos x$$
$$+(-1)^n \hbar^n (0.1)^2 e\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-1)^{k+1}}{(k+1)k(k-1)\ldots(k-(n-2))(k-n)!}\cos x \quad ,$$

elde edilir.

$\hbar=-1$ seçersek

$$u_0(t,x) = e^{-1}[(0.1)e+1]\cos x\,,$$
$$u_1(t,x) = -e^{-1}[(0.1)e+1](t-1)\cos x$$
$$+(0.1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-1)^k}{k!}\cos x + (0.1)^2 e\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-1)^{k+1}}{(k+1)(k-1)!}\cos x\,,$$
$$u_2(t,x) = e^{-1}[(0.1)e+1]\frac{(t-1)^2}{2!}\cos x$$
$$+(0.1)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-1)^k}{k!}\cos x + (0.1)^2 e\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-1)^{k+1}}{(k+1)k(k-2)!}\cos x\,,$$
$$u_3(t,x) = -e^{-1}[(0.1)e+1]\frac{(t-1)^3}{3!}\cos x$$
$$+(0.1)\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-1)^k}{k!}\cos x + (0.1)^2 e\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-1)^{k+1}}{(k+1)k(k-1)(k-3)!}\cos x\,.$$

.

.

.

$$u_n(t,x) = (-1)^n e^{-1}[(0.1)e+1]\frac{(t-1)^n}{n!}\cos x + (0.1)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-1)^k}{k!}\cos x$$
$$+(0.1)^2 e\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-1)^{k+1}}{(k+1)k(k-1)\ldots(k-(n-2))(k-n)!}\cos x \tag{4.27}$$

elde edilir.

$\hbar=-1$ için (4.23) probleminin çözümü

$$u(t,x) = \left(\frac{[(0.1)e+(t-1)]^2}{2!} + (0.1)et + 1\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^k}{k!}\cos x \tag{4.28}$$

olur. (4.28)' den , (4.23) probleminin tam çözümü olan

$$u(t,x)=\left(\frac{[(0.1)e+(t-1)]^2}{2!}+(0.1)et+1\right)e^{-t}\cos x \tag{4.29}$$

bulunur .

(2.1) probleminin $t\in[2,3]$ için çözümünü ele alalım. Denklemi $t\in[2,3]$ için yeniden düzenleyelim:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}=(0.1)e^{-(t-1)}\left[\dfrac{[(0.1)e(t-2)]^2}{2!}+(0.1)e(t-1)+1\right]\cos x \quad ,2<t\le 3, 0<x<\pi, \\ u(2,x)=e^{-2}\left[\dfrac{[(0.1)e]^2}{2!}+2(0.1)e+1\right]\cos x, 0\le x\le \pi, \\ u_x(t,0)=u_x(t,\pi)=0 \ , 2\le t\le 3 \end{cases} \tag{4.30}$$

Başlangıç yaklaşımını

$$u_0(t,x)=e^{-2}\left[\frac{[(0.1)e]^2}{2!}+2(0.1)e+1\right]\cos x \tag{4.31}$$

olarak seçelim. (4.14) lineer operatörünü alıp (4.30) denklemi için (4.15) operatörünü tanımlarsak (4.2) sıfırıncı derece deformasyon denklemini oluştururuz. $m\ge 1$ için

$$R_m(\vec{u}_{m-1})=\frac{\partial u_{m-1}(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial^2 u_{m-1}(t,x)}{\partial x^2}-(1-\chi_m)(0.1)e^{-(t-1)}\left[\frac{[(0.1)e(t-2)]^2}{2!}+(0.1)e(t-1)+1\right]\cos x \tag{4.32}$$

olmak üzere;

$$u_m(2,x)=0 \tag{4.33}$$

başlangıç koşulları ile (4.9) $m.$ derece deformasyon denklemlerini elde ederiz. (4.18) denkleminden, $m.$ derece deformasyon denklemlerinin çözümleri

$$\begin{aligned}R_1(u_0)&=\frac{\partial u_0}{\partial t}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}-(0.1)e^{-(t-1)}\left\{1+(0.1)e(t-1)+\frac{[(0.1)e(t-2)]^2}{2!}\right\}\cos x \\ &=e^{-2}\left\{1+2(0.1)e+\frac{[(0.1)e]^2}{2!}\right\}\cos x-(0.1)e^{-(t-1)}\left\{1+(0.1)e(t-1)+\frac{[(0.1)e(t-2)]^2}{2!}\right\}\cos x\end{aligned}$$

olmak üzere;

$$L(u_1)=\hbar R_1(u_0), \qquad u_1(2,x)=0$$

denklemi

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=\hbar e^{-2}\left\{1+2(0.1)e+\frac{[(0.1)e]^2}{2!}\right\}\cos x-\hbar(0.1)e^{-(t-1)}\left\{1+(0.1)e(t-1)+\frac{[(0.1)e(t-2)]^2}{2!}\right\}\cos x$$

olur. Bu denklemde $t-2=\vartheta$ değişken dönüşümü yaparsak

$$\frac{\partial u_1}{\partial \vartheta}=\hbar e^{-2}\left\{1+2(0.1)e+\frac{[(0.1)e]^2}{2!}\right\}\cos x-\hbar(0.1)e^{-(\vartheta+1)}\left\{1+(0.1)e(\vartheta+1)+\frac{[(0.1)e\vartheta]^2}{2!}\right\}\cos x$$

$$=\hbar e^{-2}\left\{1+2(0.1)e+\frac{[(0.1)e]^2}{2!}\right\}\cos x-\hbar(0.1)\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\ldots\right)e^{-1}\cos x$$

$$-\hbar(0.1)^2\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\ldots\right)\vartheta\cos x-\hbar(0.1)^2\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\ldots\right)\cos x$$

$$-\hbar\frac{(0.1)^3}{2!}e\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\ldots\right)\vartheta^2\cos x\quad,\quad u_1(0,x)=0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü

$$u_1(t,x)=\hbar e^{-2}\left[\frac{[(0.1)e]^2}{2!}+2(0.1)e+1\right](t-2)\cos x$$

$$-\hbar e^{-1}(0.1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^k}{k!}\cos x-\hbar(0.1)^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^{k+1}}{(k+1)(k-1)!}\cos x$$

$$-\hbar(0.1)^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^k}{k!}\cos x-\hbar e\frac{(0.1)^3}{2!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^{k+2}}{(k+2)(k-1)!}\cos x$$

bulunur. (4.9)’dan

$$L(u_2)=L(u_1)+\hbar R_2(u_1)\ ,\qquad u_2(2,x)=0$$

denkleminde $t-2=\vartheta$ değişken dönüşümü yaparsak (4.17)’den

$$R_2(u_1)=\frac{\partial u_1}{\partial\vartheta}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$$

ve

$$R_2(u_1)=\hbar e^{-2}\left\{1+2(0.1)e+\frac{[(0.1)e]^2}{2!}\right\}\cos x-\hbar(0.1)\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\ldots\right)e^{-1}\cos x$$

$$-\hbar(0.1)^2\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+\ldots\right)\cos x-\hbar(0.1)^2\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\ldots\right)\cos x$$

$$-\hbar\frac{(0.1)^3}{2!}e\left(\vartheta^2-\vartheta^3+\frac{\vartheta^4}{2!}-\frac{\vartheta^5}{3!}+\dots\right)\cos x+\hbar e^{-2}\left\{1+2(0.1)e+\frac{[(0.1)e]^2}{2!}\right\}\vartheta\cos x$$
$$-\hbar(0.1)\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\dots\right)e^{-1}\cos x-\hbar(0.1)^2\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^3}{3}+\frac{\vartheta^4}{4.2!}-\frac{\vartheta^5}{5.3!}+\dots\right)\cos x$$
$$-\hbar(0.1)^2\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\dots\right)\cos x-\hbar\frac{(0.1)^3}{2!}e\left(\frac{\vartheta^3}{3}-\frac{\vartheta^4}{4}+\frac{\vartheta^5}{5.2!}-\frac{\vartheta^6}{6.3!}+\dots\right)\cos x$$

elde edilir.

$$L(u_2)=L(u_1)+\hbar R_2(u_1)\,,\qquad u_2(0,x)=0$$

denklemi

$$\frac{\partial u_2}{\partial\vartheta}=\hbar e^{-2}\left\{1+2(0.1)e+\frac{[(0.1)e]^2}{2!}\right\}\cos x-\hbar(0.1)\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\dots\right)e^{-1}\cos x$$
$$-\hbar(0.1)^2\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+\dots\right)\cos x-\hbar(0.1)^2\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\dots\right)\cos x$$
$$-\hbar\frac{(0.1)^3}{2!}e\left(\vartheta^2-\vartheta^3+\frac{\vartheta^4}{2!}-\frac{\vartheta^5}{3!}+\dots\right)\cos x+\hbar^2e^{-2}\left\{1+2(0.1)e+\frac{[(0.1)e]^2}{2!}\right\}\cos x$$
$$-\hbar^2(0.1)\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\dots\right)e^{-1}\cos x-\hbar^2(0.1)^2\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+\dots\right)\cos x$$
$$-\hbar^2(0.1)^2\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\dots\right)\cos x-\hbar^2\frac{(0.1)^3}{2!}e\left(\vartheta^2-\vartheta^3+\frac{\vartheta^4}{2!}-\frac{\vartheta^5}{3!}+\dots\right)\cos x$$
$$+\hbar^2e^{-2}\left\{1+2(0.1)e+\frac{[(0.1)e]^2}{2!}\right\}\vartheta\cos x-\hbar^2(0.1)\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2!}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\dots\right)e^{-1}\cos x$$
$$-\hbar^2(0.1)^2\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^3}{3}+\frac{\vartheta^4}{4.2!}-\frac{\vartheta^5}{5.3!}+\dots\right)\cos x-\hbar^2(0.1)^2\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\dots\right)\cos x$$
$$-\hbar^2\frac{(0.1)^3}{2!}e\left(\frac{\vartheta^3}{3}-\frac{\vartheta^4}{4}+\frac{\vartheta^5}{5.2!}-\frac{\vartheta^6}{6.3!}+\dots\right)\cos x$$

olur.

Bu denklemin çözümü

$$u_2(t,x)=\hbar(\hbar+1)e^{-2}\left[\frac{[(0.1)e]^2}{2!}+2(0.1)e+1\right](t-2)\cos x-\hbar(\hbar+1)e^{-1}(0.1)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k(t-2)^{k-1}}{(k-1)!}\cos x$$
$$-\hbar(\hbar+1)(0.1)^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k(t-2)^{k-1}}{(k-1)!}\cos x-\hbar(\hbar+1)(0.1)^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k(t-2)^k}{k(k-2)!}\cos x$$
$$-\hbar(\hbar+1)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k(t-2)^{k+1}}{(k+1)(k-2)!}\cos x+\hbar^2e^{-2}\left[\frac{[(0.1)e]^2}{2!}+2(0.1)e+1\right]\frac{(t-2)^2}{2!}\cos x$$
$$+\hbar^2e^{-1}(0.1)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^k}{k!}\cos x+\hbar^2(0.1)^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^{k+1}}{(k+1)k(k-2)!}\cos x$$
$$+\hbar^2(0.1)^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^k}{k!}\cos x+\hbar^2e\frac{(0.1)^3}{2!}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^{k+2}}{(k+2)(k+1)(k-2)!}\cos x$$

bulunur. (4.9)'dan

$$L(u_3)=L(u_2)+\hbar R_3(u_2)\ ,\qquad u_3(2,x)=0$$

denkleminde $t-2=\vartheta$ değişken dönüşümü yaparsak (4.17)'den

$$R_3(u_2)=\frac{\partial u_2}{\partial\vartheta}-\frac{\partial^2u_2}{\partial x^2}$$

ve

$$R_3(u_2)=\hbar e^{-2}\left\{1+2(0.1)e+\frac{[(0.1)e]^2}{2!}\right\}\cos x-\hbar(0.1)\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\ldots\right)e^{-1}\cos x$$
$$-\hbar(0.1)^2\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+\ldots\right)\cos x-\hbar(0.1)^2\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\ldots\right)\cos x$$
$$-\hbar\frac{(0.1)^3}{2!}e\left(\vartheta^2-\vartheta^3+\frac{\vartheta^4}{2!}-\frac{\vartheta^5}{3!}+\ldots\right)\cos x+\hbar^2e^{-2}\left\{1+2(0.1)e+\frac{[(0.1)e]^2}{2!}\right\}\cos x$$
$$-\hbar^2(0.1)\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\ldots\right)e^{-1}\cos x-\hbar^2(0.1)^2\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+\ldots\right)\cos x$$
$$-\hbar^2(0.1)^2\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\ldots\right)\cos x-\hbar^2\frac{(0.1)^3}{2!}e\left(\vartheta^2-\vartheta^3+\frac{\vartheta^4}{2!}-\frac{\vartheta^5}{3!}+\ldots\right)\cos x$$
$$+\hbar^2e^{-2}\left\{1+2(0.1)e+\frac{[(0.1)e]^2}{2!}\right\}\vartheta\cos x-\hbar^2(0.1)\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2}+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+\ldots\right)e^{-1}\cos x$$
$$-\hbar^2(0.1)^2\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^3}{3}+\frac{\vartheta^4}{4.2!}-\frac{\vartheta^5}{5.3!}+\ldots\right)\cos x-\hbar^2(0.1)^2\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\ldots\right)\cos x$$
$$-\hbar^2\frac{(0.1)^3}{2!}e\left(\frac{\vartheta^3}{3}-\frac{\vartheta^4}{4}+\frac{\vartheta^5}{5.2!}-\frac{\vartheta^6}{6.3!}+\ldots\right)\cos x+\hbar(1+\hbar)e^{-2}\left\{1+2(0.1)e+\frac{[(0.1)e]^2}{2!}\right\}\vartheta\cos x$$

$$-\hbar(1+\hbar)(0.1)\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\dots\right)e^{-1}\cos x-\hbar(1+\hbar)(0.1)^2\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\dots\right)\cos x$$

$$-\hbar(1+\hbar)(0.1)^2\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^3}{3}+\frac{\vartheta^4}{4.2!}-\frac{\vartheta^5}{5.3!}+\dots\right)\cos x-\hbar(\hbar+1)\frac{(0.1)^3}{2!}e\left(\frac{\vartheta^3}{3}-\frac{\vartheta^4}{4}+\frac{\vartheta^5}{5.2!}-\frac{\vartheta^6}{6.3!}+\dots\right)\cos x$$

$$+\hbar^2e^{-2}\left\{1+2(0.1)e+\frac{[(0.1)e]^2}{2!}\right\}\frac{\vartheta^2}{2!}\cos x+\hbar^2(0.1)\left(-\frac{\vartheta^2}{2!}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\frac{\vartheta^5}{5!}-\dots\right)e^{-1}\cos x$$

$$+\hbar^2(0.1)^2\left(-\frac{\vartheta^3}{3.2}+\frac{\vartheta^4}{4.3}-\frac{\vartheta^5}{5.4.2!}+\frac{\vartheta^6}{6.5.3!}-\dots\right)\cos x+\hbar^2(0.1)^2\left(-\frac{\vartheta^2}{2!}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\frac{\vartheta^5}{5!}-\dots\right)\cos x$$

$$+\hbar^2\frac{(0.1)^3}{2!}e\left(-\frac{\vartheta^4}{4.3}+\frac{\vartheta^5}{5.4}-\frac{\vartheta^6}{6.5.2!}+\frac{\vartheta^7}{7.6.3!}-\dots\right)\cos x$$

elde edilir.

$$L(u_3)=L(u_2)+\hbar R_3(u_2)\ ,\qquad u_3(0,x)=0$$

denklemi

$$\frac{\partial u_3}{\partial\vartheta}=\hbar e^{-2}\left\{1+2(0.1)e+\frac{[(0.1)e]^2}{2!}\right\}\cos x-\hbar(0.1)\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\dots\right)e^{-1}\cos x$$

$$-\hbar(0.1)^2\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+\dots\right)\cos x-\hbar(0.1)^2\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\dots\right)\cos x$$

$$-\hbar\frac{(0.1)^3}{2!}e\left(\vartheta^2-\vartheta^3+\frac{\vartheta^4}{2!}-\frac{\vartheta^5}{3!}+\dots\right)\cos x+\hbar^2e^{-2}\left\{1+2(0.1)e+\frac{[(0.1)e]^2}{2!}\right\}\cos x$$

$$-\hbar^2(0.1)\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\dots\right)e^{-1}\cos x-\hbar^2(0.1)^2\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+\dots\right)\cos x$$

$$-\hbar^2(0.1)^2\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\dots\right)\cos x-\hbar^2\frac{(0.1)^3}{2!}e\left(\vartheta^2-\vartheta^3+\frac{\vartheta^4}{2!}-\frac{\vartheta^5}{3!}+\dots\right)\cos x$$

$$+\hbar^2e^{-2}\left\{1+2(0.1)e+\frac{[(0.1)e]^2}{2!}\right\}\vartheta\cos x-\hbar^2(0.1)\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\dots\right)e^{-1}\cos x$$

$$-\hbar^2(0.1)^2\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^3}{3}+\frac{\vartheta^4}{4.2!}-\frac{\vartheta^5}{5.3!}+\dots\right)\cos x-\hbar^2(0.1)^2\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\dots\right)\cos x$$

$$-\hbar^2\frac{(0.1)^3}{2!}e\left(\frac{\vartheta^3}{3}-\frac{\vartheta^4}{4}+\frac{\vartheta^5}{5.2!}-\frac{\vartheta^6}{6.3!}+\dots\right)\cos x+\hbar^2e^{-2}\left\{1+2(0.1)e+\frac{[(0.1)e]^2}{2!}\right\}\cos x$$

$$-\hbar^2(0.1)\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\dots\right)e^{-1}\cos x-\hbar^2(0.1)^2\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+\dots\right)\cos$$

$$-\hbar^2(0.1)^2\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\dots\right)\cos x-\hbar^2\frac{(0.1)^3}{2!}e\left(\vartheta^2-\vartheta^3+\frac{\vartheta^4}{2!}-\frac{\vartheta^5}{3!}+\dots\right)\cos x$$

$$+\hbar^3e^{-2}\left\{1+2(0.1)e+\frac{[(0.1)e]^2}{2!}\right\}\cos x-\hbar^3(0.1)\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\dots\right)e^{-1}\cos x$$

$$-\hbar^3(0.1)^2\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+\dots\right)\cos x-\hbar^3(0.1)^2\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\dots\right)\cos x$$

$$-\hbar^3\frac{(0.1)^3}{2!}e\left(\vartheta^2-\vartheta^3+\frac{\vartheta^4}{2!}-\frac{\vartheta^5}{3!}+\dots\right)\cos x+\hbar^3e^{-2}\left\{1+2(0.1)e+\frac{[(0.1)e]^2}{2!}\right\}\vartheta\cos x$$

$$-\hbar^3(0.1)\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\dots\right)e^{-1}\cos x-\hbar^3(0.1)^2\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^3}{3}+\frac{\vartheta^4}{4.2!}-\frac{\vartheta^5}{5.3!}+\dots\right)\cos x$$

$$-\hbar^3(0.1)^2\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\dots\right)\cos x-\hbar^3\frac{(0.1)^3}{2!}e\left(\frac{\vartheta^3}{3}-\frac{\vartheta^4}{2!}+\frac{\vartheta^5}{5.2!}-\frac{\vartheta^6}{6.3!}\dots\right)\cos x$$

$$+\hbar^2(1+\hbar)e^{-2}\left\{1+2(0.1)e+\frac{[(0.1)e]^2}{2!}\right\}\vartheta\cos x-\hbar^2(\hbar+1)(0.1)\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\dots\right)e^{-1}\cos x$$

$$-\hbar^2(\hbar+1)(0.1)^2\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\dots\right)\cos x-\hbar^2(\hbar+1)(0.1)^2\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^3}{3}+\frac{\vartheta^4}{4.2!}-\frac{\vartheta^5}{5.3!}+\dots\right)\cos x$$

$$+\hbar^2(\hbar+1)\frac{(0.1)^3}{2!}\left(\frac{\vartheta^3}{3}-\frac{\vartheta^4}{4}+\frac{\vartheta^5}{5.2!}-\frac{\vartheta^6}{6.3!}+\dots\right)\cos x+\hbar^3e^{-2}\left\{1+2(0.1)e+\frac{[(0.1)e]^2}{2!}\right\}\frac{\vartheta^2}{2!}\cos x$$

$$+\hbar^3(0.1)\left(-\frac{\vartheta^2}{2}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\frac{\vartheta^5}{5!}-\dots\right)e^{-1}\cos x$$

$$+\hbar^3(0.1)^2\left(-\frac{\vartheta^3}{3.2}+\frac{\vartheta^4}{4.3}-\frac{\vartheta^5}{5.4.2!}-\frac{\vartheta^6}{6.5.3!}+\dots\right)\cos x$$

$$+\hbar^3(0.1)^2\left(-\frac{\vartheta^2}{2!}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\frac{\vartheta^5}{5!}-\dots\right)\cos x$$

$$+\hbar^3\frac{(0.1)^3}{2!}e\left(-\frac{\vartheta^4}{4.3}+\frac{\vartheta^5}{5.4}-\frac{\vartheta^6}{6.5.2!}-\frac{\vartheta^7}{7.6.3!}+\dots\right)\cos x\ ,\ u_3(0,x)=0$$

olur.

Bu denklemin çözümü

$$u_3(t,x) = \hbar(\hbar+1)^2 e^{-2}\left\{1+2(0.1)e+\frac{[(0.1)e]^2}{2!}\right\}(t-2)\cos x$$

$$-2\hbar^2(\hbar+1)e^{-2}\left\{1+2(0.1)e+\frac{[(0.1)e]^2}{2!}\right\}\frac{(t-2)^2}{2!}\cos x-\hbar(\hbar+1)^2(0.1)e^{-1}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^{k-2}}{(k-2)!}\cos x$$

$$-\hbar(\hbar+1)^2(0.1)\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^{k-2}}{(k-2)!}\cos x-3\hbar(\hbar+1)(0.1)^2\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^{k-1}}{(k-1)!}\cos x$$

$$-\hbar^2(\hbar+1)(0.1)^2\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^{k-1}}{(k-1)!}\cos x-2\hbar^2(\hbar+1)^2 e^{-1}(0.1)\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^{k-1}}{(k-1)!}\cos x$$

$$-\hbar(\hbar+1)^2\frac{(0.1)^3}{2!}e\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^{k}}{k(k-3)!}\cos x-2\hbar^2(\hbar+1)(0.1)^2\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^{k}}{k(k-1)(k-3)!}\cos x$$

$$-2\hbar^2(\hbar+1)^2\frac{(0.1)^3}{2!}e\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^{k+1}}{(k+1)k(k-3)!}\cos x+\hbar^3 e^{-2}\left\{1+2(0.1)e+\frac{[(0.1)e]^2}{2!}\right\}\frac{(t-2)^3}{3!}\cos x$$

$$-\hbar^3 e^{-1}(0.1)\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^{k}}{k!}\cos x-\hbar^3(0.1)^2\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^{k+1}}{(k+1)k(k-1)(k-3)!}\cos x$$

$$\hbar^3(0.1)^2\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^{k}}{k!}\cos x-\hbar^3 e\frac{(0.1)^3}{2!}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^{k+2}}{(k+2)(k+1)k(k-3)!}\cos x$$

bulunur.

Denklemler sırasıyla çözülürse

$$u_n(t,x)=g_3(\hbar+1,t,x)+\hbar^n e^{-2}\left[\frac{[(0.1)e]^2}{2!}+2(0.1)e+1\right]\frac{(t-2)^n}{n!}\cos x$$

$$+(-1)^n\hbar^n e^{-1}(0.1)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^{k}}{k!}\cos x$$

$$+(-1)^n\hbar^n(0.1)^2\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^{k+1}}{(k+1)k(k-1)\ldots(k-(n-2))(k-n)!}\cos x$$

$$+(-1)^n\hbar^n(0.1)^2\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^{k}}{k!}\cos x$$

$$+(-1)^n\hbar^n e\frac{(0.1)^3}{2!}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^{k+2}}{(k+2)(k+1)k\ldots(k-(n-3))(k-n)!}\cos x$$

elde edilir. $\hbar=-1$ seçilirse

$$u_0(t,x)=e^{-2}\left[\frac{[(0.1)e]^2}{2!}+2(0.1)e+1\right]\cos x\,,$$

$$u_1(t,x) = -e^{-2}\left[\frac{[(0.1)e]^2}{2!} + 2(0.1)e + 1\right](t-2)\cos x + e^{-1}(0.1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^k}{k!}\cos x$$

$$+(0.1)^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^{k+1}}{(k+1)(k-1)!}\cos x + (0.1)^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^k}{k!}\cos x$$

$$+e\frac{(0.1)^3}{2!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^{k+2}}{(k+2)(k-1)!}\cos x\ ,$$

$$u_2(t,x) = e^{-2}\left[\frac{[(0.1)e]^2}{2!} + 2(0.1)e + 1\right]\frac{(t-2)^2}{2!}\cos x + e^{-1}(0.1)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^k}{k!}\cos x$$

$$+(0.1)^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^{k+1}}{(k+1)k(k-2)!}\cos x + (0.1)^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^k}{k!}\cos x$$

$$+e\frac{(0.1)^3}{2!}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^{k+2}}{(k+2)(k+1)(k-2)!}\cos x\ ,$$

$$u_3(t,x) = -e^{-2}\left[\frac{[(0.1)e]^2}{2!} + 2(0.1)e + 1\right]\cos x\frac{(t-2)^3}{3!} + e^{-1}(0.1)\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^k}{k!}\cos x$$

$$+(0.1)^2\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^{k+1}}{(k+1)k(k-1)(k-3)!}\cos x + (0.1)^2\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^k}{k!}\cos x$$

$$+e\frac{(0.1)^3}{2!}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^{k+2}}{(k+2)(k+1)k(k-3)!}\cos x\ ,$$

.

.

.

$$u_n(t,x) = (-1)^n e^{-2}\left[\frac{[(0.1)e]^2}{2!} + 2(0.1)e + 1\right]\cos x\frac{(t-2)^n}{n!} + e^{-1}(0.1)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^k}{k!}\cos x$$

$$+(0.1)^2\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^{k+1}}{(k+1)k(k-1)\ldots(k-(n-2))(k-n)!}\cos x + (0.1)^2\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^k}{k!}\cos x$$

$$+e\frac{(0.1)^3}{2!}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-2)^{k+2}}{(k+2)(k+1)k\ldots(k-(n-3))(k-n)!}\cos x$$

elde edilir. $\hbar = -1$ için (4.30) probleminin çözümü

$$u(t,x) = \left(\frac{[(0.1)e(t-2)]^3}{3!} + \frac{[(0.1)e(t-1)]^2}{2!} + (0.1)et + 1 \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} \cos x \,, \tag{4.34}$$

bulunur. Bu serinin kapalı formu

$$u(t,x) = \left(\frac{[(0.1)e(t-2)]^3}{3!} + \frac{[(0.1)e(t-1)]^2}{2!} + (0.1)et + 1 \right) e^{-t} \cos x \tag{4.35}$$

(4.30) probleminin tam çözümüdür.

Son olarak (2.1) probleminin $t \in [3,4]$ için çözümü göz önüne alalım. Denklemi yeniden düzenlersek:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = (0.1)e^{-(t-1)} \left[\dfrac{[(0.1)e(t-3)]^3}{3!} + \dfrac{[(0.1)e(t-2)]^2}{2!} + (0.1)e(t-1) + 1 \right] \cos x \,, \\ 3 < t \le 4 \quad , \quad 0 < x < \pi, \\ u(3,x) = e^{-3} \left[\dfrac{[(0.1)e]^3}{3!} + \dfrac{[2(0.1)e]^2}{2!} + 3(0.1)e + 1 \right] \cos x \,, \quad 0 \le x \le \pi, \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, \quad 3 \le t \le 4 \,, \end{cases} \tag{4.36}$$

(4.36) probleminin çözümü için başlangıç yaklaşımı olarak

$$u_0(t,x) = e^{-3} \left[\frac{[(0.1)e]^3}{3!} + \frac{[2(0.1)e]^2}{2!} + 3(0.1)e + 1 \right] \cos x \tag{4.37}$$

seçelim. (4.14) lineer operatörünü alıp (4.36) denklemi için (4.15) operatörünü tanımlarsak (4.2) sıfırıncı-derece deformasyon denklemini oluştururuz.

$m \ge 1$ için

$$\begin{aligned} R_m(\vec{u}_{m-1}) &= \frac{\partial u_{m-1}(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_{m-1}(t,x)}{\partial x^2} \\ &\quad - (1-\chi_m)(0.1)e^{-(t-1)} \left(\frac{[(0.1)e(t-3)]^3}{3!} \frac{[(0.1)e(t-2)]^2}{2!} + (0.1)e(t-1) + 1 \right) \cos x \end{aligned} \tag{4.38}$$

olmak üzere;

$$u_m(3,x) = 0 \tag{4.39}$$

başlangıç koşulları ile (4.9) $m.$ derece deformasyon denklemini elde ederiz. (4.18) denkleminden, $m.$ derece deformasyon denkleminin çözümleri:

$$R_1(u_0)=\frac{\partial u_0}{\partial t}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}-(0.1)e^{-(t-1)}\left\{1+(0.1)e(t-1)+\frac{[(0.1)e(t-2)]^2}{2!}+\frac{[(0.1)e(t-3)]^3}{3!}\right\}\cos x$$
$$=e^{-3}\left\{1+3(0.1)e+\frac{[2(0.1)e]^2}{2!}+\frac{[(0.1)e]^3}{3!}\right\}\cos x-(0.1)e^{-(t-1)}\{1+(0.1)e(t-1)$$
$$+\frac{[(0.1)e(t-2)]^2}{2!}+\frac{[(0.1)e(t-3)]^3}{3!}\Bigg\}\cos x$$

olmak üzere;

$L(u_1)=\hbar R_1(u_0)\quad , \quad u_1(3,x)=0$

denklemi

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=\hbar e^{-3}\left\{1+3(0.1)e+\frac{[2(0.1)e]^2}{2!}+\frac{[(0.1)e]^3}{3!}\right\}\cos x$$
$$-\hbar(0.1)e^{-(t-1)}\left\{1+(0.1)e(t-1)+\frac{[(0.1)e(t-2)]^2}{2!}+\frac{[(0.1)e(t-3)]^3}{3!}\right\}\cos x,\quad u_1(3,x)=0$$

olarak yazılır. Bu denklemde $t-3=\vartheta$ değişken dönüşümü yaparsak

$$\frac{\partial u_1}{\partial \vartheta}=\hbar e^{-3}\left\{1+3(0.1)e+\frac{[2(0.1)e]^2}{2!}+\frac{[(0.1)e]^3}{3!}\right\}\cos x-\hbar(0.1)\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+...\right)e^{-2}\cos x$$
$$-\hbar(0.1)^2e^{-1}\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+...\right)\cos x-2\hbar(0.1)^2e^{-1}\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+...\right)\cos x$$
$$-\hbar\frac{(0.1)^3}{2}\left(\vartheta^2-\vartheta^3+\frac{\vartheta^4}{2!}-\frac{\vartheta^5}{3!}+...\right)\cos x-\hbar(0.1)^3\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+...\right)\cos x$$
$$-\hbar\frac{(0.1)^3}{2}\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+...\right)\cos x-\hbar\frac{(0.1)^4}{3!}e\left(\vartheta^3-\vartheta^4+\frac{\vartheta^5}{2!}-\frac{\vartheta^6}{3!}+...\right)\cos x\quad , u_1(0,x)=0$$

denklemine dönüşür. Bu denklemin çözümü

$$u_1(t,x)=\hbar e^{-3}\left[\frac{[(0.1)e]^3}{3!}+\frac{[2(0.1)e]^2}{2!}+3(0.1)e+1\right](t-3)\cos x-\hbar e^{-2}(0.1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^k}{k!}\cos x$$
$$-\hbar e^{-1}(0.1)^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+1}}{(k+1)(k-1)!}\cos x-2\hbar e^{-1}(0.1)^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^k}{k!}\cos x$$
$$-\hbar\frac{(0.1)^3}{2!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+2}}{(k+2)(k-1)!}\cos x-\hbar(0.1)^3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+1}}{(k+1)(k-1)!}\cos x$$
$$-\hbar\frac{e(0.1)^3}{2!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^k}{k!}\cos x-\hbar\frac{e(0.1)^4}{3!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+3}}{(k+3)(k-1)!}\cos x$$

olarak bulunur. (4.9)'dan

$L(u_2)=L(u_1)+\hbar R_2(u_1)$, $u_2(3,x)=0$

denkleminde $t-3=\vartheta$ değişken dönüşümü yaparsak

$$R_2(u_1)=\frac{\partial u_1}{\partial\vartheta}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$$

ve

$$R_2(u_1)=\hbar e^{-3}\left\{1+3(0.1)e+\frac{[2(0.1)e]^2}{2!}+\frac{[(0.1)e]^3}{3!}\right\}\cos x-\hbar(0.1)\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\ldots\right)e^{-2}\cos x$$
$$-\hbar(0.1)^2e^{-1}\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+\ldots\right)\cos x-2\hbar(0.1)^2e^{-1}\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\ldots\right)\cos x$$
$$-\hbar\frac{(0.1)^3}{2}\left(\vartheta^2-\vartheta^3+\frac{\vartheta^4}{2!}-\frac{\vartheta^5}{3!}+\ldots\right)\cos x-\hbar(0.1)^3\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+\ldots\right)\cos x$$
$$-\hbar\frac{(0.1)^3}{2}e\left(\vartheta-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\ldots\right)\cos x-\hbar\frac{(0.1)^4}{3!}e\left(\vartheta^3-\vartheta^4+\frac{\vartheta^5}{2!}-\frac{\vartheta^6}{3!}+\ldots\right)\cos x$$
$$+\hbar e^{-3}\left\{1+3(0.1)e+\frac{[2(0.1)e]^2}{2!}+\frac{[(0.1)e]^3}{3!}\right\}\cos x\vartheta-\hbar(0.1)\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2!}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\ldots\right)e^{-2}\cos x$$
$$-\hbar(0.1)^2e^{-1}\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^3}{3}+\frac{\vartheta^4}{4.2}-\frac{\vartheta^5}{5.3.2}+\ldots\right)\cos x-2\hbar(0.1)^2e^{-1}\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\ldots\right)\cos x$$
$$-\hbar\frac{(0.1)^3}{2}\left(\frac{\vartheta^3}{3}-\frac{\vartheta^4}{4}+\frac{\vartheta^5}{5.2}-\frac{\vartheta^6}{6.3.2}+\ldots\right)\cos x-\hbar(0.1)^3\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^3}{3}+\frac{\vartheta^4}{4.2}-\frac{\vartheta^5}{5.3.2}+\ldots\right)\cos x$$
$$-\hbar\frac{(0.1)^3}{2}\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2!}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\ldots\right)\cos x-\hbar\frac{(0.1)^4}{3!}e\left(\frac{\vartheta^4}{4}-\frac{\vartheta^5}{5}+\frac{\vartheta^6}{6.2}-\frac{\vartheta^7}{7.3.2}+\ldots\right)\cos x$$

olur.

Böylece

$L(u_2) = L(u_1) + \hbar R_2(u_1)$, $u_2(0,x) = 0$

denklemi

$$\frac{\partial u_2}{\partial \vartheta} = \hbar e^{-3}\left\{1 + 3(0.1)e + \frac{[2(0.1)e]^2}{2!} + \frac{[(0.1)e]^3}{3!}\right\}\cos x - \hbar(0.1)\left(1 - \vartheta + \frac{\vartheta^2}{2!} - \frac{\vartheta^3}{3!} + \ldots\right)e^{-2}\cos x$$

$$-\hbar(0.1)^2 e^{-1}\left(\vartheta - \vartheta^2 + \frac{\vartheta^3}{2!} - \frac{\vartheta^4}{3!} + \ldots\right)\cos x - 2\hbar(0.1)^2 e^{-1}\left(1 - \vartheta + \frac{\vartheta^2}{2!} - \frac{\vartheta^3}{3!} + \ldots\right)\cos x$$

$$-\hbar\frac{(0.1)^3}{2}\left(\vartheta^2 - \vartheta^3 + \frac{\vartheta^4}{2!} - \frac{\vartheta^5}{3!} + \ldots\right)\cos x - \hbar(0.1)^3\left(\vartheta - \vartheta^2 + \frac{\vartheta^3}{2!} - \frac{\vartheta^4}{3!} + \ldots\right)\cos x$$

$$-\hbar\frac{(0.1)^3}{2!}\left(1 - \vartheta + \frac{\vartheta^2}{2!} - \frac{\vartheta^3}{3!} + \ldots\right)\cos x + \frac{\hbar(0.1)^4}{3!}e\left(\vartheta^3 - \vartheta^4 + \frac{\vartheta^5}{2!} - \frac{\vartheta^6}{3!} + \ldots\right)\cos x$$

$$-\hbar^2 e^{-3}\left\{1 + 3(0.1)e + \frac{[2(0.1)e]^2}{2!} + \frac{[(0.1)e]^3}{3!}\right\}\cos x - \hbar^2(0.1)\left(1 - \vartheta + \frac{\vartheta^2}{2!} - \frac{\vartheta^3}{3!} + \ldots\right)e^{-2}\cos x$$

$$-\hbar^2(0.1)^2 e^{-1}\left(\vartheta - \vartheta^2 + \frac{\vartheta^3}{2!} - \frac{\vartheta^4}{3!} + \ldots\right)\cos x - 2\hbar^2(0.1)^2 e^{-1}\left(1 - \vartheta + \frac{\vartheta^2}{2!} - \frac{\vartheta^3}{3!} + \ldots\right)\cos x$$

$$-2\hbar\frac{(0.1)^3}{2}\left(\vartheta^2 - \vartheta^3 + \frac{\vartheta^4}{2!} - \frac{\vartheta^5}{3!} + \ldots\right)\cos x - \hbar^2(0.1)^3\left(\vartheta - \vartheta^2 + \frac{\vartheta^3}{2!} - \frac{\vartheta^4}{3!} + \ldots\right)\cos x$$

$$-\hbar^2\frac{(0.1)^3}{2}\left(1 - \vartheta + \frac{\vartheta^2}{2!} - \frac{\vartheta^3}{3!} + \ldots\right)\cos x - \hbar^2\frac{(0.1)^4}{3!}e\left(\vartheta^3 - \vartheta^4 + \frac{\vartheta^5}{2!} - \frac{\vartheta^6}{3!} + \ldots\right)\cos x$$

$$-\hbar^2 e^{-3}\left\{1 + 3(0.1)e + \frac{[2(0.1)e]^2}{2!} + \frac{[(0.1)e]^3}{3!}\right\}\cos x\,\vartheta - \hbar^2(0.1)^2\left(\vartheta - \frac{\vartheta^2}{2!} + \frac{\vartheta^3}{3!} - \frac{\vartheta^4}{4!} + \ldots\right)e^{-2}\cos x$$

$$\hbar^2(0.1)^2 e^{-1}\left(\frac{\vartheta^2}{2} - \frac{\vartheta^3}{3} + \frac{\vartheta^4}{4.2} - \frac{\vartheta^5}{5.3.2} + \ldots\right)\cos x - 2\hbar^2(0.1)^2 e^{-1}\left(\vartheta - \frac{\vartheta^2}{2} + \frac{\vartheta^3}{3!} - \frac{\vartheta^4}{4!} + \ldots\right)\cos x$$

$$-\hbar^2\frac{(0.1)^3}{2}\left(\frac{\vartheta^3}{3} - \frac{\vartheta^4}{4} + \frac{\vartheta^5}{5.2} - \frac{\vartheta^6}{6.3.2} + \ldots\right)\cos x - \hbar^2(0.1)^3\left(\frac{\vartheta^2}{2} - \frac{\vartheta^3}{3} + \frac{\vartheta^4}{4.2} - \frac{\vartheta^5}{5.3.2} + \ldots\right)\cos x$$

$$-\hbar^2\frac{(0.1)^3}{2}\left(\vartheta - \frac{\vartheta^2}{2!} + \frac{\vartheta^3}{3!} - \frac{\vartheta^4}{4!} + \ldots\right)\cos x - \hbar^2\frac{(0.1)^4}{3!}e\left(\frac{\vartheta^4}{4} - \frac{\vartheta^5}{5} + \frac{\vartheta^6}{6.2} - \frac{\vartheta^7}{7.3.2} + \ldots\right)\cos x,$$

$u_2(0,x) = 0$

elde edilir.

Bu denklemin çözümü

$$u_2(t,x)=\hbar(\hbar+1)e^{-3}\left[\frac{[(0.1)e]^3}{3!}+\frac{[2(0.1)e]^2}{2!}+3(0.1)e+1\right](t-3)\cos x.$$

$$-\hbar(\hbar+1)(0.1)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k(t-3)^{k-1}}{(k-2)!}\cos x-\hbar(\hbar+1)(0.1)^2e^{-1}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k(t-3)^k}{k!}\cos x$$

$$-2\hbar(\hbar+1)(0.1)e^{-1}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k(t-3)^{k-1}}{(k-1)!}\cos x-\hbar(\hbar+1)\frac{(0.1)^3}{2!}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k(t-3)^{k-1}}{(k-1)!}\cos x$$

$$-\hbar(\hbar+1)(0.1)^3\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k(t-3)^k}{k(k-2)!}\cos x+e\hbar(\hbar+1)(0.1)^3\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k(t-3)^{k+1}}{(k+1)(k-2)!}\cos x$$

$$-\hbar(\hbar+1)\frac{(0.1)^4}{3!}e\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k(t-3)^{k+2}}{(k+2)(k-2)!}\cos x+-\hbar^2e^{-3}\left[\frac{[(0.1)e]^3}{3!}+\frac{[2(0.1)e]^2}{2!}+3(0.1)e+1\right]\frac{(t-3)^2}{2!}\cos x$$

$$-\hbar^2e^{-2}(0.1)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^k}{k!}\cos x-\hbar^2e^{-1}(0.1)^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+1}}{(k+1)k(k-2)!}\cos x$$

$$+2\hbar^2e^{-1}(0.1)^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^k}{k!}\cos x-\hbar^2\frac{(0.1)^3}{2!}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+2}}{(k+2)(k+1)(k-2)!}\cos x$$

$$-\hbar^2(0.1)^3\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+1}}{(k-1)k(k-2)!}\cos x-\hbar^2\frac{(0.1)^3}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^k}{k!}\cos x$$

$$-\hbar^2e\frac{(0.1)^4}{3!}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+3}}{(k+3)(k+2)(k-2)!}\cos x$$

bulunur. (4.9)'dan

$L(u_3)=L(u_2)+\hbar R_3(u_2)$, $u_3(3,x)=0$

denkleminde $t-3=\vartheta$ değişken dönüşümü yaparsak

$$R_3(u_2)=\frac{\partial u_2}{\partial\vartheta}-\frac{\partial^2u_2}{\partial x^2}$$

ve

$$R_3(u_2)=\hbar e^{-3}\left\{1+3(0.1)e+\frac{[2(0.1)e]^2}{2!}+\frac{[(0.1)e]^3}{3!}\right\}\cos x-\hbar(0.1)\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\ldots\right)e^{-2}\cos x$$

$$-\hbar(0.1)^2e^{-1}\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+\ldots\right)\cos x-2\hbar(0.1)^2e^{-1}\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\ldots\right)\cos x$$

$$-\hbar\frac{(0.1)^3}{2}\left(\vartheta^2-\vartheta^3+\frac{\vartheta^4}{2!}-\frac{\vartheta^5}{3!}+\ldots\right)\cos x-\hbar(0.1)^3\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+\ldots\right)\cos x$$

$$-\hbar\frac{(0.1)^3}{2!}\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\ldots\right)\cos x+\frac{\hbar(0.1)^4}{3!}e\left(\vartheta^3-\vartheta^4+\frac{\vartheta^5}{2!}-\frac{\vartheta^6}{3!}+\ldots\right)\cos x$$

$$+\hbar^2e^{-3}\left\{1+3(0.1)e+\frac{[2(0.1)e]^2}{2!}+\frac{[(0.1)e]^3}{3!}\right\}\cos x-\hbar^2(0.1)\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\ldots\right)e^{-2}\cos x$$

$$-\hbar^2(0.1)^2e^{-1}\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+\ldots\right)\cos x-2\hbar^2(0.1)^2e^{-1}\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\ldots\right)\cos x$$

$$-\frac{(0.1)^3}{2}\left(\vartheta^2-\vartheta^3+\frac{\vartheta^4}{2!}-\frac{\vartheta^5}{3!}+\ldots\right)\cos x-\hbar^2(0.1)^3\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+\ldots\right)\cos x$$

$$-\hbar^2\frac{(0.1)^3}{2}\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\ldots\right)\cos x-\hbar^2\frac{(0.1)^4}{3!}e\left(\vartheta^3-\vartheta^4+\frac{\vartheta^5}{2!}-\frac{\vartheta^6}{3!}+\ldots\right)\cos x$$

$$+\hbar^2e^{-3}\left\{1+3(0.1)e+\frac{[2(0.1)e]^2}{2!}+\frac{[(0.1)e]^3}{3!}\right\}\cos x\,\vartheta-\hbar^2(0.1)\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2!}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\ldots\right)e^{-2}\cos x$$

$$-\hbar^2(0.1)^2e^{-1}\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^3}{3}+\frac{\vartheta^4}{4.2}-\frac{\vartheta^5}{5.3.2}+\ldots\right)\cos x-2\hbar^2(0.1)^2e^{-1}\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\ldots\right)\cos x$$

$$-\hbar^2\frac{(0.1)^3}{2}\left(\frac{\vartheta^3}{3}-\frac{\vartheta^4}{4}+\frac{\vartheta^5}{5.2}-\frac{\vartheta^6}{6.3.2}+\ldots\right)\cos x-\hbar^2(0.1)^3\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^3}{3}+\frac{\vartheta^4}{4.2}-\frac{\vartheta^5}{5.3.2}+\ldots\right)\cos x$$

$$-\hbar^2\frac{(0.1)^3}{2}\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2!}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\ldots\right)\cos x-\hbar^2\frac{(0.1)^4}{3!}e\left(\frac{\vartheta^4}{4}-\frac{\vartheta^5}{5}+\frac{\vartheta^6}{6.2}-\frac{\vartheta^7}{7.3.2}+\ldots\right)\cos x$$

$$+\hbar(\hbar+1)e^{-3}\left\{1+3(0.1)e+\frac{[2(0.1)e]^2}{2!}+\frac{[(0.1)e]^3}{3!}\right\}\vartheta\cos x-\hbar(\hbar+1)(0.1)\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2!}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\ldots\right)e^{-2}\cos x$$

$$-\hbar(\hbar+1)(0.1)^2e^{-1}\left(\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\frac{\vartheta^4}{4!}-\frac{\vartheta^5}{5!}+\ldots\right)\cos x-2\hbar(\hbar+1)(0.1)^2e^{-1}\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2!}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\ldots\right)\cos x$$

$$-\hbar(\hbar+1)\frac{(0.1)^3}{2}\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2!}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\ldots\right)\cos x-\hbar(\hbar+1)(0.1)^3\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^3}{3}+\frac{\vartheta^4}{3!}-\frac{\vartheta^5}{4!}+\ldots\right)\cos x$$

$$-\hbar(\hbar+1)\frac{(0.1)^3}{2!}\left(\frac{\vartheta^3}{3}-\frac{\vartheta^4}{4}+\frac{\vartheta^5}{5.2!}-\frac{\vartheta^6}{6.3!}+\ldots\right)\cos x-\frac{\hbar(\hbar+1)(0.1)^4}{3!}e\left(\frac{\vartheta^4}{4}-\frac{\vartheta^5}{5}+\frac{\vartheta^6}{6.2!}+\ldots\right)\cos x$$

$$+\hbar^2e^{-3}\left\{1+3(0.1)e+\frac{[2(0.1)e]^2}{2!}+\frac{[(0.1)e]^3}{3!}\right\}\cos x.\frac{\vartheta^2}{2}-\hbar^2(0.1)\left(\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\frac{\vartheta^4}{4!}-\frac{\vartheta^5}{5!}+\ldots\right)e^{-2}\cos x$$

$$-\hbar^2(0.1)^2e^{-1}\left(\frac{\vartheta^3}{3.2}-\frac{\vartheta^4}{4.3}+\frac{\vartheta^5}{5.4.2}-\frac{\vartheta^6}{6.5.3.2}+\ldots\right)\cos x-\frac{\hbar^2(0.1)^3}{2}\left(\frac{\vartheta^4}{4.3}-\frac{\vartheta^5}{5.4}+\frac{\vartheta^6}{6.5.2}-\frac{\vartheta^7}{7.6.5.2}+\ldots\right)\cos x$$

$$-\hbar^2(0.1)^3\left(\frac{\vartheta^3}{3.2}-\frac{\vartheta^4}{4.3}+\frac{\vartheta^5}{5.4.2}+\ldots\right)\cos x-\frac{\hbar^2(0.1)^3}{2}\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\frac{\vartheta^4}{4!}-\ldots\right)\cos x$$

$$-\hbar^2\frac{(0.1)^4}{3!}\left(\frac{\vartheta^5}{5.4}-\frac{\vartheta^6}{6.5}+\frac{\vartheta^7}{7.6.2}-\ldots\right)\cos x-2\hbar^2(0.1)^2e^{-1}\left(\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\frac{\vartheta^4}{4!}-\ldots\right)\cos x$$

olmak üzere;

$L(u_3)=L(u_2)+\hbar R_3(u_2)$, $u_3(0,x)=0$

denklemi

$$\frac{\partial u_3}{\partial \vartheta}=\hbar e^{-3}\left\{1+3(0.1)e+\frac{[2(0.1)e]^2}{2!}+\frac{[(0.1)e]^3}{3!}\right\}\cos x-\hbar(0.1)\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\dots\right)e^{-2}\cos x$$

$$-\hbar(0.1)^2e^{-1}\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+\dots\right)\cos x-2\hbar(0.1)^2e^{-1}\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\dots\right)\cos x$$

$$-\hbar\frac{(0.1)^3}{2}\left(\vartheta^2-\vartheta^3+\frac{\vartheta^4}{2!}-\frac{\vartheta^5}{3!}+\dots\right)\cos x-\hbar(0.1)^3\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+\dots\right)\cos x$$

$$-\hbar\frac{(0.1)^3}{2!}\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\dots\right)\cos x+\frac{\hbar(0.1)^4}{3!}e\left(\vartheta^3-\vartheta^4+\frac{\vartheta^5}{2!}-\frac{\vartheta^6}{3!}+\dots\right)\cos x$$

$$+\hbar^2e^{-3}\left\{1+3(0.1)e+\frac{[2(0.1)e]^2}{2!}+\frac{[(0.1)e]^3}{3!}\right\}\cos x-\hbar^2(0.1)\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\dots\right)e^{-2}\cos x$$

$$-\hbar^2(0.1)^2e^{-1}\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+\dots\right)\cos x-2\hbar^2(0.1)^2e^{-1}\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\dots\right)\cos x$$

$$-\hbar^2\frac{(0.1)^3}{2}\left(\vartheta^2-\vartheta^3+\frac{\vartheta^4}{2!}-\frac{\vartheta^5}{3!}+\dots\right)\cos x-\hbar^2(0.1)^3\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+\dots\right)\cos x$$

$$-\hbar^2\frac{(0.1)^3}{2}\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\dots\right)\cos x-\hbar^2\frac{(0.1)^4}{3!}e\left(\vartheta^3-\vartheta^4+\frac{\vartheta^5}{2!}-\frac{\vartheta^6}{3!}+\dots\right)\cos x$$

$$+\hbar^2e^{-3}\left\{1+3(0.1)e+\frac{[2(0.1)e]^2}{2!}+\frac{[(0.1)e]^3}{3!}\right\}\cos x\vartheta-\hbar^2(0.1)^2\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2!}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\dots\right)e^{-2}\cos x$$

$$\hbar^2(0.1)^2e^{-1}\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^3}{3}+\frac{\vartheta^4}{4.2}-\frac{\vartheta^5}{5.3.2}+\dots\right)\cos x-2\hbar^2(0.1)^2e^{-1}\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\dots\right)\cos x$$

$$-\hbar^2\frac{(0.1)^3}{2}\left(\frac{\vartheta^3}{3}-\frac{\vartheta^4}{4}+\frac{\vartheta^5}{5.2}-\frac{\vartheta^6}{6.3.2}+\dots\right)\cos x-\hbar^2(0.1)^3\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^3}{3}+\frac{\vartheta^4}{4.2}-\frac{\vartheta^5}{5.3.2}+\dots\right)\cos x$$

$$-\hbar^2\frac{(0.1)^3}{2}\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2!}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+\dots\right)\cos x-\hbar^2\frac{(0.1)^4}{3!}e\left(\frac{\vartheta^4}{4}-\frac{\vartheta^5}{5}+\frac{\vartheta^6}{6.2}-\frac{\vartheta^7}{7.3.2}+\dots\right)\cos x$$

$$+\hbar^2e^{-3}\left\{1+3(0.1)e+\frac{[2(0.1)e]^2}{2!}+\frac{[(0.1)e]^3}{3!}\right\}\cos x-\hbar^2(0.1)\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\dots\right)e^{-2}\cos x$$

$$-\hbar^2(0.1)^2e^{-1}\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+\dots\right)\cos x-2\hbar^2(0.1)^2e^{-1}\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\dots\right)\cos x$$

$$-\hbar^2\frac{(0.1)^3}{2}\left(\vartheta^2-\vartheta^3+\frac{\vartheta^4}{2!}-\frac{\vartheta^5}{3!}+\dots\right)\cos x-\hbar^2(0.1)^3\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+\dots\right)\cos x$$

$$-\hbar^2\frac{(0.1)^3}{2!}\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\dots\right)\cos x+\frac{\hbar^2(0.1)^4}{3!}e\left(\vartheta^3-\vartheta^4+\frac{\vartheta^5}{2!}-\frac{\vartheta^6}{3!}+\dots\right)\cos x$$

$$+\hbar^3 e^{-3}\left\{1+3(0.1)e+\frac{[2(0.1)e]^2}{2!}+\frac{[(0.1)e]^3}{3!}\right\}\cos x-\hbar^3(0.1)\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+...\right)e^{-2}\cos x$$

$$-\hbar^3(0.1)^2e^{-1}\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+...\right)\cos x-2\hbar^3(0.1)^2e^{-1}\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+...\right)\cos x$$

$$-\hbar^3\frac{(0.1)^3}{2}\left(\vartheta^2-\vartheta^3+\frac{\vartheta^4}{2!}-\frac{\vartheta^5}{3!}+...\right)\cos x-\hbar^3(0.1)^3\left(\vartheta-\vartheta^2+\frac{\vartheta^3}{2!}-\frac{\vartheta^4}{3!}+...\right)\cos x$$

$$-\hbar^3\frac{(0.1)^3}{2!}\left(1-\vartheta+\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+...\right)\cos x+\frac{\hbar^3(0.1)^4}{3!}e\left(\vartheta^3-\vartheta^4+\frac{\vartheta^5}{2!}-\frac{\vartheta^6}{3!}+...\right)\cos x$$

$$+\hbar^3\left\{1+3(0.1)e+\frac{[2(0.1)e]^2}{2!}+\frac{[(0.1)e]^3}{3!}\right\}\vartheta\cos x-\hbar^3(0.1)\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2!}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+...\right)e^{-2}\cos x$$

$$\hbar^3(0.1)^2e^{-1}\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^3}{3}+\frac{\vartheta^4}{4.2}-\frac{\vartheta^5}{5.3.2}+...\right)\cos x-2\hbar^3(0.1)^2e^{-1}\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+...\right)\cos x$$

$$-\hbar^3\frac{(0.1)^3}{2}\left(\frac{\vartheta^3}{3}-\frac{\vartheta^4}{4}+\frac{\vartheta^5}{5.2}-\frac{\vartheta^6}{6.3.2}+...\right)\cos x-\hbar^3(0.1)^3\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^3}{3}+\frac{\vartheta^4}{4.2}-\frac{\vartheta^5}{5.3.2}+...\right)\cos x$$

$$-\hbar^3\frac{(0.1)^3}{2}\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2!}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+...\right)\cos x-\hbar^3\frac{(0.1)^4}{3!}e\left(\frac{\vartheta^4}{4}-\frac{\vartheta^5}{5}+\frac{\vartheta^6}{6.2}-\frac{\vartheta^7}{7.3.2}+...\right)\cos x$$

$$+\hbar^2(\hbar+1)e^{-3}\left\{1+3(0.1)e+\frac{[2(0.1)e]^2}{2!}+\frac{[(0.1)e]^3}{3!}\right\}\vartheta\cos x-\hbar^2(\hbar+1)(0.1)\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2!}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+...\right)e^{-2}\cos x$$

$$-\hbar^2(\hbar+1)(0.1)^2e^{-1}\left(\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\frac{\vartheta^4}{4!}-\frac{\vartheta^5}{5!}+...\right)\cos x-2\hbar^2(\hbar+1)(0.1)^2e^{-1}\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2}+\frac{\vartheta^3}{3!}-\frac{\vartheta^4}{4!}+...\right)\cos x$$

$$-\hbar^2(\hbar+1)\frac{(0.1)^3}{2}\left(\vartheta-\frac{\vartheta^2}{2!}+\frac{\vartheta^3}{3!}-...\right)\cos x-\hbar^2(\hbar+1)(0.1)^3\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^3}{3}+\frac{\vartheta^4}{3!}-\frac{\vartheta^5}{4!}+...\right)\cos x$$

$$-\hbar^2(\hbar+1)\frac{(0.1)^3}{2}\left(\frac{\vartheta^3}{3}-\frac{\vartheta^4}{4}+\frac{\vartheta^5}{5.2!}-\frac{\vartheta^6}{6.3!}+...\right)\cos x-\hbar^2(\hbar+1)\frac{(0.1)^4}{3!}e\left(\frac{\vartheta^4}{4}-\frac{\vartheta^5}{5}+\frac{\vartheta^6}{6.2}-...\right)\cos x$$

$$+\hbar^3e^{-3}\left\{1+3(0.1)e+\frac{[2(0.1)e]^2}{2!}+\frac{[(0.1)e]^3}{3!}\right\}\frac{\vartheta^2}{2}\cos x-\hbar^3(0.1)\left(\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\frac{\vartheta^4}{4!}-\frac{\vartheta^5}{5!}+...\right)e^{-2}\cos x$$

$$-\hbar^3(0.1)^2e^{-1}\left(\frac{\vartheta^3}{3.2}-\frac{\vartheta^4}{4.3}+\frac{\vartheta^5}{5.4.2}-\frac{\vartheta^6}{6.5.3.2}+...\right)\cos x-\hbar^3(0.1)^3\left(\frac{\vartheta^4}{4.3}-\frac{\vartheta^5}{5.4}+\frac{\vartheta^6}{6.5.2}-\frac{\vartheta^7}{7.6.5.2}+...\right)\cos x$$

$$-\hbar^3(0.1)^3\left(\frac{\vartheta^3}{3.2}-\frac{\vartheta^4}{4.3}+\frac{\vartheta^5}{5.4.2}+...\right)\cos x-\frac{\hbar^3}{2}(0.1)^3\left(\frac{\vartheta^2}{2}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\frac{\vartheta^4}{4!}+...\right)\cos x$$

$$-\frac{\hbar^3(0.1)^3}{3!}e\left(\frac{\vartheta^5}{5.4}-\frac{\vartheta^6}{6.5}+\frac{\vartheta^7}{7.6.2}+...\right)\cos x-2\hbar^3(0.1)^2e^{-1}\left(\frac{\vartheta^2}{2!}-\frac{\vartheta^3}{3!}+\frac{\vartheta^4}{4!}-...\right)\cos x$$

olur.

Bu denklemin çözümü

$$
\begin{aligned}
u_3(t,x) &= \hbar(\hbar+1)^2 e^{-3}\left[\frac{[(0.1)e]^3}{3!}+\frac{[2(0.1)e]^2}{2!}+3(0.1)e+1\right](t-3)\cos x \\
&- \hbar(\hbar+1)^2(0.1)e^{-2}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k-2}}{(k-2)!}\cos x-\hbar(\hbar+1)^2(0.1)^2e^{-1}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k-1}}{(k-1)(k-3)!}\cos x \\
&- 2\hbar(\hbar+1)^2(0.1)^2e^{-1}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k-2}}{(k-2)!}\cos x-\hbar(\hbar+1)^2\frac{(0.1)^3}{2!}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k}}{k(k-3)!}\cos x \\
&- \hbar(\hbar+1)^2(0.1)^3\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k-1}}{(k-1)(k-3)!}\cos x+\hbar(\hbar+1)^2\frac{(0.1)^3}{2!}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k-2}}{(k-2)!}\cos x \\
&- \hbar(\hbar+1)^2e\frac{(0.1)^4}{3!}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+1}}{(k+1)(k-3)!}\cos x+2\hbar^2(\hbar+1)e^{-3}\left[\frac{[(0.1)e]^3}{3!}+\frac{[2(0.1)e]^2}{2!}+3(0.1)e+1\right]\frac{(t-3)^2}{2!}\cos x \\
&- 2\hbar^2(\hbar+1)e^{-2}(0.1)\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k-1}}{(k-1)!}\cos x-\hbar^2(\hbar+1)e^{-1}(0.1)^2\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k}}{k(k-1)(k-3)!}\cos x \\
&- 4\hbar^2(\hbar+1)e^{-1}(0.1)^2\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k-1}}{(k-1)!}\cos x-2\hbar^2(\hbar+1)\frac{(0.1)^3}{2!}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+1}}{(k+1)k(k-3)!}\cos x \\
&- 2\hbar^2(\hbar+1)(0.1)^3\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k}}{k(k-1)(k-3)!}\cos x-2\hbar^2(\hbar+1)\frac{(0.1)^3}{2}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k-1}}{(k-1)!}\cos x \\
&- 2\hbar^2(\hbar+1)e\frac{(0.1)^4}{3!}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+2}}{(k+2)(k+1)(k-3)}\cos x+\hbar^3e^{-3}\left[\frac{[(0.1)e]^3}{3!}+\frac{[2(0.1)e]^2}{2!}+3(0.1)e+1\right]\frac{(t-3)^3}{3!}\cos x \\
&- \hbar^3e^{-2}(0.1)\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k}}{k!}\cos x-\hbar^3e^{-1}(0.1)^2\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+1}}{(k+1)k(k-1)(k-3)!}\cos x \\
&- 2\hbar^3e^{-1}(0.1)^2\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k}}{k!}\cos x-\frac{\hbar^3(0.1)^3}{2!}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+2}}{(k+2)(k+1)k(k-3)!}\cos x \\
&- \hbar^3(0.1)^3\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+1}}{(k+1)k(k-1)(k-3)!}\cos x-\frac{\hbar^3(0.1)^3}{2!}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k}}{k!}\cos x \\
&- \frac{\hbar^3e(0.1)^4}{3!}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+3}}{(k+3)(k+2)(k+1)(k-3)!}\cos x
\end{aligned}
$$

bulunur.

Denklemler sırasıyla çözülürse

$$
u_n(t,x)=g_4(\hbar+1,t,x)+\hbar^n e^{-3}\left[\frac{[(0.1)e]^3}{3!}+\frac{[2(0.1)e]^2}{2!}+3(0.1)e+1\right]\frac{(t-3)^n}{n!}\cos x
$$

$$+(-1)^n\hbar^n(0.1)e^{-2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^k}{k!}\cos x+(-1)^n\hbar^n(0.1)^2e^{-1}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+1}}{(k+1)k(k-1)\ldots(k-(n-2))(k-n)!}\cos x$$

$$+(-1)^n\hbar^n 2(0.1)^2e^{-1}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^k}{k!}\cos x+(-1)^n\hbar^n\frac{(0.1)^3}{2!}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+2}}{(k+2)(k+1)k(k-3)\ldots(k-(n-3))(k-n)!}\cos x$$

$$+(-1)^n\hbar^n(0.1)^3\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+1}}{(k+1)k(k-1)\ldots(k-(n-2))(k-n)!}\cos x+(-1)^n\hbar^n\frac{(0.1)^3}{2!}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^k}{k!}\cos x$$

$$+(-1)^n\hbar^n e\frac{(0.1)^4}{3!}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+1}}{(k+2)(k+1)k\ldots(k-(n-4))(k-n)!}\cos x$$

elde edilir.

$\hbar=-1$ seçilirse

$$u_0(t,x)=e^{-3}\left[\frac{[(0.1)e]^3}{3!}+\frac{[2(0.1)e]^2}{2!}+3(0.1)e+1\right]\cos x,$$

$$u_1(t,x)=-e^{-3}\left[\frac{[(0.1)e]^3}{3!}+\frac{[2(0.1)e]^2}{2!}+3(0.1)e+1\right](t-3)\cos x$$

$$+(0.1)e^{-2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^k}{k!}\cos x+(0.1)^2e^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+1}}{(k+1)(k-1)!}\cos x$$

$$+2(0.1)^2e^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^k}{k!}\cos x+\frac{(0.1)^3}{2!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+2}}{(k+2)(k-1)!}\cos x$$

$$+(0.1)^3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+1}}{(k+1)(k-1)!}\cos x+\frac{(0.1)^3}{2!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^k}{k!}\cos x$$

$$+e\frac{(0.1)^4}{3!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+1}}{(k+3)(k-1)!}\cos x,$$

$$u_2(t,x)=e^{-3}\left[\frac{[(0.1)e]^3}{3!}+\frac{[2(0.1)e]^2}{2!}+3(0.1)e+1\right]\frac{(t-3)^2}{2!}\cos x$$

$$+(0.1)e^{-2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^k}{k!}\cos x+(0.1)^2e^{-1}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+1}}{(k+1)k(k-2)!}\cos x$$

$$+2(0.1)^2e^{-1}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^k}{k!}\cos x+\frac{(0.1)^3}{2!}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+2}}{(k+2)(k+1)(k-2)!}\cos x$$

$$+(0.1)^3\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+1}}{(k+1)k(k-2)!}\cos x+\frac{(0.1)^3}{2!}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^k}{k!}\cos x$$

$$+e\frac{(0.1)^4}{3!}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+1}}{(k+3)(k+2)(k-2)!}\cos x,$$

$$u_3(t,x) = -e^{-3}\left[\frac{[(0.1)e]^3}{3!} + \frac{[2(0.1)e]^2}{2!} + 3(0.1)e + 1\right]\cos x.\frac{(t-3)^3}{3!}$$
$$+(0.1)e^{-2}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^k}{k!}\cos x + (0.1)^2 e^{-1}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+1}}{(k+1)k(k-1)(k-3)!}\cos x$$
$$+2(0.1)^2 e^{-1}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^k}{k!}\cos x + \frac{(0.1)^3}{2!}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+2}}{(k+2)(k+1)k(k-3)!}\cos x$$
$$+(0.1)^3\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+1}}{(k+1)k(k-1)(k-3)!}\cos x + \frac{(0.1)^3}{2!}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^k}{k!}\cos x$$
$$+e\frac{(0.1)^4}{3!}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+3}}{(k+3)(k+2)(k+1)(k-3)!}\cos x,$$

.

.

.

$$u_n(t,x) = (-1)^n e^{-3}\left[\frac{[(0.1)e]^3}{3!} + \frac{[2(0.1)e]^2}{2!} + 3(0.1)e + 1\right]\frac{(t-3)^n}{n!}\cos x$$
$$+(0.1)e^{-2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^k}{k!}\cos x + (0.1)^2 e^{-1}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+1}}{(k+1)k(k-1)\ldots(k-(n-2))(k-n)!}\cos x$$
$$+2(0.1)^2 e^{-1}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^k}{k!}\cos x + \frac{(0.1)^3}{2!}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+2}}{(k+2)(k+1)k(k-3)\ldots(k-(n-3))(k-n)!}\cos x$$
$$+(0.1)^3\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+1}}{(k+1)k(k-1)\ldots(k-(n-2))(k-n)!}\cos x + \frac{(0.1)^3}{2!}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^k}{k!}\cos x$$
$$+e\frac{(0.1)^4}{3!}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t-3)^{k+3}}{(k+2)(k+1)k\ldots(k-(n-4))(k-n)!}\cos x,\ n>3$$

elde edilir. $\hbar = -1$ için (4.36) probleminin çözümü

$$u(t,x) = \left(\frac{[(0.1)e(t-3)]^4}{4!} + \frac{[(0.1)e(t-2)]^3}{3!} + \frac{[(0.1)e(t-1)]^2}{2!} + (0.1)et + 1\right).\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^k}{k!}\cos x \quad (4.40)$$

bulunur. Bu serinin kapalı formu

$$u(t,x) = \left(\frac{[(0.1)e(t-3)]^4}{4!} + \frac{[(0.1)e(t-2)]^3}{3!} + \frac{[(0.1)e(t-1)]^2}{2!} + (0.1)et + 1\right).e^{-t}\cos x \quad (4.41)$$

(4.36) probleminin tam çözümüdür.

Böylece homotopi analiz metodu ile $\hbar = -1$ seçtiğimizde (2.1) problemi için $t \in [0,1], t \in [1,2], t \in [2,3], t \in [3,4]$ aralıklarında denklemlerin tam çözümlerini elde ederiz.

$u_{app} = \sum_{k=0}^{3} u_k(t,x)$ yaklaşık çözümünü kullanıp $\gamma = u_{xxt}(0,0)$ için $\hbar$-eğrisini çizersek çözüm serisi $t \in [0,1]$, $t \in [1,2]$, $t \in [2,3]$, $t \in [3,4]$ aralıklarında sırasıyla $-1.48 \le \hbar \le 0.48$, $-1.41 \le \hbar \le 02.10$, $-1.19 \le \hbar \le 0.12$, $-1.02 \le \hbar \le 0$ bölgelerinde yakınsak olur. Bu bölgelerin her birinde $\hbar = -1$ aldığımızda problemin tam çözümünü buluruz. $(0.5, \pi/3), (1.5, \pi/3), (2.5, \pi/3)$, $(3.5, \pi/3)$ noktalarındaki $u_{er} = |u_{ex} - u_{app}|$ mutlak hatalar Tablo 4.1'de verilmiştir.

Tablo 4.1. HAM ile $\hbar = -1$ için $x = \frac{\pi}{3}$ 'deki Mutlak Hata

t	u_{ex}	u_{app}	u_{er}
0.5	0.22965557441588	0.22906172466806	0.00059384974782
1.5	0.10539022023123	0.10509479577247	0.00029542445876
2.5	0.04824178564753	0.04810733327449	0.00013445237303
3.5	0.22080517765307	0.02206433149559	0.00016186269046

BÖLÜM 5

SONUÇLAR

Gecikmeli kısmi diferansiyel denklemler için bazı başlangıç ve sınır değer problemleri, E Banach uzayında

$$\begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} + Av(t) = B(t)v(t-w),\ t \geq 0, \\ v(t) = g(t)\ \ (-w \leq t \leq 0) \end{cases} \tag{5.1}$$

başlangıç değer problemine indirgenebilir. $D(A) \subseteq D(B(t))$ yoğun tanım kümesine sahip E Banach uzayında A sınırsız lineer operatörü kuvvetli pozitif operatör olsun. Yani $\exists M < 1, \delta > 0$ için

$$\left\| e^{-tA} \right\|_{E \to E} \leq Me^{-\delta t}, \quad \left\| tAe^{-tA} \right\|_{E \to E} \leq M,\ t > 0 \tag{5.2}$$

eşitsizlikleri sağlansın.

$B(t)$ kapalı operatörleri, $D(A)$ üzerinde sürekli ve

$$A^{-1}B(t)u = B(t)A^{-1}u, u \in D(A) \tag{5.3}$$

eşitliği sağlansın. Kuvvetli pozitif A operatörü, her $u \in E$ 'yi içeren

$$\|u\|_{E_\alpha} = \sup_{\lambda > 0} \left\| \lambda^{1-\alpha} Ae^{-\lambda A} u \right\|_E$$

normlarının sonlu olduğu $E_\alpha = E_\alpha(A, E)$ fractional uzaylarını tanımlar. Her $t \geq 0$ için M sabit olmak üzere;

$$\left\| B(t)A^{-} \right\|_{E \to E} \leq \frac{1-\alpha}{M2^{2-\alpha}} \tag{5.4}$$

sağlansın. (2.1) denkleminin nümerik çözümünü bulmak için (5.1) denklemine karşı gelen birinci basamaktan doğruluklu fark şeması [43]

$$\begin{cases} \dfrac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + Au_k = B_k u_{k-N}, \; B_k = B(t_k), t_k = k\tau, 1 \le k, \\ N\tau = w, u_k = g(t_k), t_k = k\tau, -N \le k \le 0, \end{cases} \tag{5.5}$$

ve

$$[-1,\infty]_\tau \times [0,\pi]_h = \{(t_k, x_n) : t_k = k\tau, -N \le k, N\tau = 1, x_n = nh, 0 \le n \le M, Mh = \pi\}$$

ızgara noktalarının kümesini kullanılarak

$$\varphi_n^k = -(0.1)\frac{u_{n+1}^{k-N} - 2u_n^{k-N} + u_{n-1}^{k-N}}{h^2},$$

$$mN + 1 \le k \le (m+1)N, m = 0,1,\ldots,1 \le n \le M - 1,$$

olmak üzere;

$$\begin{cases} \dfrac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \dfrac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + (0.1)\dfrac{u_{n+1}^{k-N} - 2u_n^{k-N} + u_{n-1}^{k-N}}{h^2} = 0, \\ mN + 1 \le k \le (m+1)N, m = 0,1,\ldots,1 \le n \le M - 1, \\ u_n^k = e^{-t_k}\cos x_n, -N \le k \le 0, 0 \le n \le M, \\ u_0^k = u_1^k, u_{M-1}^k = u_M^k, k \ge 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

denklem sistemi elde edilir.

(5.6) denklem sisteminin çözümünden (2.1) probleminin fark şemaları metodu [11-12], [19-20], [23-24], [60-64] ile nümerik çözümü bulunur. Aynı $(0.5,\pi/3), (1.5,\pi/3), (2.5,\pi/3)$, $(3.5,\pi/3)$ noktalarında, (5.5) birinci basamaktan doğruluklu fark şemasının farklı N, M değerleri için nümerik çözümleri ve (4.10)' daki $N = 3$ olduğu durumda homotopi analiz metodu ile elde edilen yaklaşık çözümü sırasıyla Tablo 5.1, 5.2, 5.3 ve 5.4 'de verilmiştir.

Bu durumda yani $\hbar = -1$ seçildiğinde $\hbar$ yakınsaklık kontrol parametresi çözüm serisinin yakınsaklık bölgesi içinden seçildiği için (2.1) denklemi için homotopi analiz metodu ile bulunan çözüm daha doğruluklu gözükmektedir.

Halbuki homotopi analiz metodunda seri çözüm yalnızca $\hbar$'nin yakınsaklık bölgesinde olduğu durumda yakınsaktır. İki metodu karşılaştırmak için $\hbar$ yakınsaklık kontrol parametresini yakınsaklık bölgesi dışından seçersek fark şemaları metodunun denklemin tanımlandığı tüm bölgede yakınsak olmasından dolayı daha hızlı ve doğruluklu olduğu görülür.

Birinci basamaktan doğruluklu fark şeması (5.5) ile $N = M = 4$ değerleri için bulunan nümerik çözümler ve $\hbar$ yakınsaklık kontrol parametresinin yakınsaklık bölgesi dışından seçildiği durumlarda $N = 3$ için homotopi analiz metodu ile $(0.5, \pi/3), (1.5, \pi/3), (2.5, \pi/3)$, $(3.5, \pi/3)$ noktalarında bulunan çözümler sırasıyla Tablo 5.5, 5.6, 5.7, 5.8' de verilmiştir.

Sonuç olarak, homotopi analiz metoduna karşın fark şemaları metodu (2.1) probleminin tanımlandığı tüm bölgede çözümün yakınsak olmasını garanti eder. Bu yüzden sonlu fark metodu homotopi analiz metodundan daha etkilidir.

Tablo 5.1. $(0.5, \pi/3)$ noktasında $\hbar = -1$ iken HAM ve Fark Şemaları Metotlarının Mutlak Hata Karşılaştırması

Metot	u_{app}	u_{er}
$N = 3$ için HAM	0.22906172466806	0.00059384974782
$N = M = 14$ için (5.5) Fark Şeması	0.22925180320754	0.00040377120833

Tablo 5.2. $(1.5, \pi/3)$ noktasında $\hbar = -1$ iken HAM ve Fark Şemaları Metotlarının Mutlak Hata Karşılaştırması

Metot	u_{app}	u_{er}
$N = 3$ için HAM	0.10509479577247	0.00029542445876
$N = M = 400$ için (5.5) Fark Şeması	0.10439229073876	0.00099792949247

Tablo 5.3. $(2.5, \pi/3)$ noktasında $\hbar = -1$ iken HAM ve Fark Şemaları Metotlarının Mutlak Hata Karşılaştırması

Metot	u_{app}	u_{er}
$N = 3$ için HAM	0.04810733327449	0.00013445237303
$N = M = 300$ için (5.5) Fark Şeması	0.04718024717717	0.00106153847036

Tablo 5.4. $(3.5, \pi/3)$ noktasında $\hbar = -1$ iken HAM ve Fark Şemaları Metotlarının Mutlak Hata Karşılaştırması

Metot	u_{app}	u_{er}
$N = 3$ için HAM	0.22064331496257	0.00001618626904
$N = M = 300$ için (5.5) Fark Şeması	0.20648374008388	0.00143214368142

Tablo 5.5. $(0.5, \pi/3)$ noktasında $\hbar = -2$ iken HAM ve Fark Şemaları Metotlarının Mutlak Hata Karşılaştırması

Metot	u_{app}	u_{er}
$N = 3$ için HAM	0.60794034646756	0.37828477205168
$N = M = 4$ için (5.5) Fark Şeması	0.19917417967644	0.03048139473944

Tablo 5.6. $(1.5, \pi/3)$ noktasında $\hbar = -2.1$ iken HAM ve Fark Şemaları Metotlarının Mutlak Hata Karşılaştırması

Metot	u_{app}	u_{er}
$N = 3$ için HAM	0.23880229550568	0.34419249070247
$N = M = 4$ için (5.5) Fark Şeması	0.01269407636052	0.11808429659175

Tablo 5.7. $(2.5, \pi/3)$ noktasında $\hbar = 1.5$ iken HAM ve Fark Şemaları Metotlarının Mutlak Hata Karşılaştırması

Metot	u_{app}	u_{er}
$N = 3$ için HAM	0.61914656094707	0.57090477529954
$N = M = 4$ için (5.5) Fark Şeması	0.05916387117235	0.10740565681988

Tablo 5.8. $(3.5, \pi/3)$ noktasında $\hbar = 2$ iken HAM ve Fark Şemaları Metotlarının Mutlak Hata Karşılaştırması

Metot	u_{app}	u_{er}
$N = 3$ için HAM	0.44651534337246	0.42443482560715
$N = M = 4$ için (5.5) Fark Şeması	0.07117968302668	0.09326020079198

KAYNAKLAR

[1] N. Minorsky, ***Self-excited oscillations in dynamical systems possessing retarded actions***, J. Applied Mechanics, 9, 65-71, (1942).

[2] N. Minorsky, ***On non-linear phenomenon of self-rolling***, Proc. National Academy of Sciences, 31, 346-349, (1945).

[3] N. Minorsky, ***Nonlinear Oscillations***, (Van Nostrand, New York, 1962).

[4] G. E. Hutchinson, ***Circular causal systems in ecology***, Ann. N.Y. Acad. Sci., 50 221-246, (1948).

[5] Y. Kuang, ***Delay Differential Equations: with Applications in Population Dynamics***, (Academic Press, Inc., San Diego, 1993).

[6] A. Bellen, ***One-step collocation for delay differential equations***, J. Comput. Appl. Math., vol. 10, 275-283, (1984).

[7] N. V. Azbelev, V.P. Maksimov, L.F. Rakhmatullina, ***Introduction to the theory of functional differential equations***, (Nauka, Moscow, 1991).

[8] J. K. Hale, ***Theory of Functional Differential Equations***, (Springer-Verlag, New York, 1993).

[9] K. L. Cooke, I. Györi, ***Numerical approximation of the solutions of delay differential equations on an infinite interval using piecewise constant arguments***, Comput. Math. Appl., 28, 81-92, (1994).

[10] O. Diekmann, S. A. van Gils, S. M. Verduyn Lunel, H.O. Walther, ***Delay equations, Functional, Complex, and Nonlinear Analysis***, (Springer-Verlag, New York, 1995).

[11] A. Ashyralyev, H. Akca, ***On difference shemes for semilinear delay differential equations with constant delay***, Proceeding of the Conference TSU: Actual Problems of Applied Mathematics, Physics and Eng. Ashgabat, 18-27, (1999).

[12] A. Ashyralyev, H. Akca, U. Guray, ***Second order of accuracy difference scheme for approximate solutions of delay differential equations***, Functional Differential Equations, vol. 6, no 3-4, pp. 223-231, (1999).

[13] A. F. Yenicerioglu, ***The behavior of solutions of second order delay differential equations***, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 332, no. 2, 1278-1290, (2007).

[14] S. Mohamad, H. Akca, V. Covachev, ***Discrete-time Cohen-Grossberg neural networks with transmission delays and impulses***, Differential and Difference Equations and Applications Book Series: Tatra Mountains Mathematical Publications, vol. 43, pp. 145-161, (2009).

[15] J. Liu, P. Dong, G. Shang, ***Sufficient conditions for inverse anticipating synchronization of unidirectional coupled chaotic systems with multiple time delays***, Proc. Chinese Control and Decision Conference IEEE, pp. 751-756, (2010).

[16] A. N. Al-Mutib, ***Stability properties of numerical methods for solving delay differential equations***, J. Comput. and Appl. Math., vol. 10, no. 1, 71-79, (1984).

[17] A. Bellen, Z. Jackiewicz, M. Zennaro, ***Stability analysis of one-step methods for neutral delay-differential equations***, Numer. Math., vol. 52, no. 6, 605-619, (1988).

[18] L. Torelli, ***Stability of numerical methods for delay differential equations***, J. Comput. and Appl. Math., vol. 25, 15-26, (1989).

[19] A. Ashyralyev, H. Akca, ***Stability estimates of difference schemes for neutral delay differential equations***, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, vol. 44, no. 4, 443-452, (2001).

[20] A. Ashyralyev, H. Akca, Yenicerioglu A. F., ***Stability properties of difference schemes for neutral differential equations***, Differential Equations and Applications, vol. 3, 57-66, (2003).

[21] A. F. Yenicerioglu, S. Yalcinbas, ***On the stability of the second-order delay differential equations with variable coefficients***, Applied Mathematics and Computation, vol. 152, no. 3, 667-673, (2004).

[22] A. F. Yenicerioglu, ***Stability properties of second order delay integro-differential equations***, Computers and Mathematics with Applications, vol. 56, no. 12, 3109-3117, (2008).

[23] A. Ashyralyev, P. E. Sobolevskii, ***On the stability of the delay differential and difference equations***, Abstract and Applied Analysis, vol. 6, no. 5, 267-297, (2001).

[24] A. Ashyralyev, P. E. Sobolevskii, ***New Difference Schemes for Partial Differential Equations***, (Birkhauser Verlag: Basel, Boston, Berlin, 2004).

[25] D. B. Gabriella, ***Delay differential equations with unbounded operators acting on delay terms***, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, vol. 52, no.1, 1-18, (2003).

[26] J.H. Wu, ***Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations***, (Springer-Verlag,New York, 1996).

[27] B. Li, M. Bohner, F. Meng, ***Periodic solutions of functional dynamic equations with infinite delay***, Nonlinear Anal. 68, 1226-1245, (2008).

[28] D. Y. Xu, S.Y. Li, X.P. Zhou, Z.L. Pu, ***Invariant set and stable region of a class of partial differential equations with time delays***, Nonlinear Anal. Real Word Appl. 2 161-169, (2001).

[29] C. C. Travis, G.F. Webb, ***Existence and stability for partial functional differential equations***, Tran. Amer. Math. Soc. 200, 395-418, (1974).

[30] V. Wolfgang**,** ***Nonlinear parabolic differential-functional inequalities with boundary-functional conditions***, Beitrge Anal. 18, 85-89, (1981).

[31] Y. Liang, T.J. Xiao, ***Solvability of the Cauchy problem for infinite delay equations***, Nonlinear Anal. 58, 271-297, (2004).

[32] S. Ahmad, M. Rama Mohana Rao, ***Stability of Volterra diffusion equations with time delays***, Appl. Math. Comput. 90,143-154, (1998).

[33] Y. Zhang, ***The stability of linear partial differential systems with time delay***, Int. J. Systems Sci. 26, 1747-1754, (1995).

[34] W. Feng, X. Lu, ***Asymptotic periodicity in diffusive logistic equations with discrete delays***, Nonlinear Anal. 26 (2), 171-178, (1996).

[35] J. Yang, C.Y. Wang, J. Li, Z.J. Meng, ***Necessary and sufficient conditions for oscillations of neutral hyperbolic partial differential equations with delays***, J. Partial Diff. Eqns. 19 (4), 319-324, (2006).

[36] M. El-Borai, F.K. Asaad, ***On the Cauchy problem for some parabolic partial differential equations with time delays***, Kyungpook Math. J. 37 (1) ,1-8, (1997).

[37] C. V. Pao, ***Coupled nonlinear parabolic systems with time delays***, J. Math. Appl. 196, 237-265, (1995).

[38] V. K. Barwell, ***Special stability problems for functional differential equations***, BIT 15,130-135, (1975).

[39] M. Z. Liu, M. N. Spijker, ***The stability of q-methods in the numerical solution of delay differential equations***, IMA J. Numer. Anal. 10 (1), 31-48, (1990).

[40] Z. Jackiewicz, B. Zubik-Kowal, ***Spectral collocation and waveform relaxation methods for nonlinear delay partial differential equations***, Appl. Numer. Math. 56 433-443, (2006).

[41] J. A. Ferreira, ***Energy estimates for delay diffusion-reaction equations***, J. Comput. Math. 26 (4), 536-553, (2008).

[42] S. J. Liao, ***Beyond perturbation: Introduction to the homotopy analysis method***, (Boca Raton:Chapman&Hall/CRC Press, 2003).

[43] A. Ashyralyev, D. Agirseven, ***On Convergence of Difference Schemes for Delay parabolic Equations,*** Computers and Mathematics with Applications, 66(7), 1232-1244, (2013).

[44] G. Doetsch, ***Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transform***, (Springer-Verlag, 1970).

[45] G. Doetsch, ***Guide to the Applications of Laplace Transforms***, (Van Nostrand Co., 1963).

[46] J. L. Schiff, ***The Laplace Transform: Theory and Applications***, (Springer, Verlag, New York, 1999).

[47] M. R. Spiegel, ***Schaum's Outline of Laplace Transforms***, (McGraw-Hill, USA, 1965)

[48] P. P. G. Dyke, ***An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series***, (Springer, USA, 2000).

[49] P. K. F. Kuhfittig, ***Introduction to the Laplace Transform,*** (Springer, USA, 1978).

[50] R. J. Beerends, H. G. ter Morsche, J. C. van den Berg and E. M. van de Vrie, ***Fourier and Laplace Transforms***, (Cambridge University Press, UK, 2003).

[51] S. J. Liao, ***A second-order approximate analytical solution of a simple pendulum by the process analysis method***, ASME J. Appl. Mech., 59, 970–975, (1992).

[52] S. J. Liao, ***An approximate solution technique not depending on small parameters: a special example***, Int. J. Non-Linear Mech., 30 (3) , 371–380, (1995).

[53] S. J. Liao, **A kind of approximate solution technique which does not depend upon small parameters—II: An application in fluid mechanics**, Int. J. Non-Linear Mech. 32(5), 815–822, (1997).

[54] S. J. Liao, **Homotopy analysis method: a new analytic method for nonlinear problems**, Appl. Math. Mech. (English-Ed.) 19 (10), 957–962, (1998).

[55] S. J. Liao, Tan Y., ***A general Approach to obtain series solutions of nonlinear differential equations***, Studies in Applied Mathematics, 119, 297-354, (2007).

[56] S. J. Liao, ***An explicit, totally analytic approximate solution for Blasius' viscous flow problem***, Int. J. Non-Linear Mech., 34, 759–778, (1999).

[57] S. J. Liao, A.T. Chwang, ***General boundary element method for nonlinear problems***, Int.J. Numer Meth Fluids, 23, 467-83, (1996).

[58] S. J. Liao, ***Notes on the homotopy analysis method: Some definitions and theorems***, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 14, 983-997, (2009).

[59] S. J. Liao, ***Comparison between the homotopy analysis method and homotopy perturbation method***, Appl. Math. Comput., 169, 1186–1194, (2005).

[60] A. Ashyralyev, D. Agirseven, ***Approximate Solutions of Delay Parabolic Equations with the Neumann Condition***, AIP Conference Proceedings, vol. 1479, ICNAAM 2012, 555-558, (2012).

[61] D. Agirseven, ***Approximate solutions of delay parabolic equations with the Drichlet condition***, Abstract and Applied Analysis, 2012, Article ID 682752, 31 pages,(2012).

[62] A. Ashyralyev, D. Agirseven, ***Finite difference method for delay parabolic equations***, AIP Conference Proceedings, vol.1389, ICNAAM 2011, 573-576, (2011).

[63] A. Ashyralyev, P. E. Sobolevskii, ***Well-Posedness of Parabolic Difference Equations***, (Operator Theory Advances and Applications, Birkhauser Verlag: Basel, Boston, Berlin, 1994).

[64] A. Ashyralyev, ***High-accuracy stable difference schemes for well-posed nonlocal boundary value problems***, Oper. Theory, Adv. Appl., vol. 191, no. 2, 229-252, (2009).

ÖZGEÇMİŞ

1970 yılında İstanbul-Üsküdar’da doğdum. İlköğretim eğitimimi Fikirtepe Arifpaşa İlkokulu' nda, Mehmet Beyazıt Lisesi Orta Bölümü(1-2) ve Yeni Gülsuyu Orta Okulu' nda tamamladım. Lise eğitimimi Kartal Endüstri Meslek Lisesi Elektrik Bölümü' nü bitirerek tamamladım. Trakya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' nden mezun oldum.