

T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KİRİŞLERİN DİNAMİK DAVRANIŞLARININ KAYMA DEFORMASYONLU
KİRİŞ TEORİLERİ İLE ANALİZİ**

UFUK GÜL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı: PROF. DR. METİN AYDOĞDU

EDİRNE-2015

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü onayı



Prof. Dr. Mustafa ÖZCAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.



Prof. Dr. Taner TIMARCI
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tez tarafımda tarafımızca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.



Prof. Dr. Metin AYDOĞDU
Tez Danışmanı

Bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından Makine Mühendisliği Anabilim Dalında bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Prof. Dr. Metin AYDOĞDU



Doç. Dr. Çetin YILMAZ



Yrd. Doç. Dr. Nusret MEYDANLIK

Tarih: 10/12/2015

T.Ü. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ YÜKSEK LİSANS PROGRAMI
DOĞRULUK BEYANI

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

10/12/2015

Ufuk GÜL



Yüksek Lisans Tezi

Kirişlerin Dinamik Davranışlarının Kayma Deformasyonlu Kiriş Teorileri ile Analizi

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

ÖZET

Bu çalışmada, Euler-Bernoulli, Timoshenko ve Reddy kiriş teorileri gibi farklı kiriş teorilerinde dalga yayılımı çalışılmıştır. Bu kiriş teorilerine ait dalga yayılım eğrileri elde edilmiş ve elde edilen eğriler düzlem elastisite çözümleriyle kıyaslanmıştır. Timoshenko kiriş teorisindeki gibi Reddy kiriş teorisinde de iki adet dalga yayılım eğrisi elde edilmiştir. Buna karşılık, Euler-Bernoulli kiriş teorisinde bir adet dalga yayılım eğrisi elde edilmiştir.

Timoshenko ve Reddy kiriş teorilerinde düzlem içi kuvvetin etkileri incelenmiş ve Timoshenko ve Reddy kirişlerine ait dalga yayılım eğrileri düzlem elastisite çözümüyle kıyaslanmıştır.

Euler-Bernoulli, Timoshenko ve Reddy kiriş modellerinin serbest titreşim frekans denklemleri farklı sınır koşullarında elde edilmiştir.

Timoshenko kiriş teorisinde farklı kayma düzeltme faktörleri kullanılarak analiz yapılmış ve Timoshenko kirişi için faz hızı ve grup hızı değerleri bulunmuştur.

Yıl : 2015

Sayfa Sayısı : 93

Anahtar Kelimeler : Dalga yayılımı, düzlem içi kuvvet, kayma düzeltme faktörü.

Master's Thesis

Dynamic Behaviour Analysis of Beams by Using Shear Deformation Beam Theories

Trakya University Institute of Natural Sciences

Department of Mechanical Engineering

ABSTRACT

In this study wave propagation in beams is studied using different beam theories like Euler-Bernoulli, Timoshenko and Reddy beam theories. Dispersion curves are obtained for these beam theories compared with plane elasticity solutions. It is obtained that there are two branches for the Reddy beam theory similar to Timoshenko beam theory. However one branch is obtained for the Euler-Bernoulli beam theory.

The effects of in-plane load on the Timoshenko and Reddy beam theories are examined and dispersion curves of the Timoshenko and Reddy beams are compared with plane elasticity solution.

Free vibration frequency equations of Euler-Bernoulli, Timoshenko and Reddy beam models are obtained for different boundary conditions.

Different shear correction factors are used for analysis of Timoshenko beam theory and phase velocity and group velocity values are determined for the Timoshenko beam.

Year : 2015

Number of Pages : 93

Keywords : Wave propagation, in-plane load, shear correction factor.

ÖNSÖZ

Birçok mühendislik yapısında zamanla ortaya çıkan hasarlar, yapıların mekanik özelliklerini değiştirerek mukavemetlerinin azalmasına neden olurlar. Bu nedenle mühendislik yapılarından biri olan kirişlerin de mekanik davranışlarının belirlenmesi ve buna bağlı olarak mühendislik yapılarının tasarlanması oldukça önemlidir. Bu çalışmada, dikdörtgen kesitli izotropik kirişlerin yüksek mertebeli kayma deformasyon teorileri ile dalga yayılımı analizi ve serbest titreşim analizi yapılmıştır. Kayma deformasyon teorilerinden biri olan Timoshenko kiriş teorisinde, ikinci spektrum frekans değerlerinin fiziksel anlamı üzerine araştırmalar yapılmıştır.

Bu tez çalışmasının hazırlanmasında, her konuda benden yardımlarını ve bilgilerini esirgemeyen, bana her zaman yol gösteren ve teşvik eden değerli hocam, tez danışmanım Prof. Dr. Metin AYDOĞDU'ya çok teşekkür ederim.

Çalışmam süresince makale sağlamama yardımcı olan ULAKBİM çalışanlarına teşekkür ederim.

Hayatım boyunca bana en büyük desteği sağlayan, bu noktaya gelmemde çok büyük katkıları olan annem, babam ve ablama en içten teşekkürlerimi sunarım.

Aralık-2015

Ufuk GÜL

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1

GİRİŞ.....	1
1.1. Problem ve Önemi	1
1.2. Daha Önce Yapılan Çalışmalar	2
1.3. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı	6

BÖLÜM 2

EULER-BERNOULLİ, TIMOSHENKO VE REDDY KİRİŞ TEORİLERİNİN HAREKET DENKLEMLERİ VE SINIR KOŞULLARI.....	8
2.1. Giriş	8
2.2. Euler-Bernoulli (EB) Kiriş Teorisi	8
2.2.1. EB Kiriş Teorisinin Hareket Denklemi ve Sınır Koşulları.....	8
2.3. Timoshenko Kiriş Teorisi	11
2.3.1. Timoshenko Kiriş Teorisinin Hareket Denklemi ve Sınır Koşulları.....	11
2.4. Reddy Kiriş Teorisi.....	14
2.4.1. Reddy Kiriş Teorisinin Hareket Denklemi ve Sınır Koşulları.....	14

BÖLÜM 3

KİRİŞ TEORİLERİNDE DALGA YAYINIMI.....	18
3.1. Giriş	18
3.2. EB Kiriş Modelinde Dalga Yayınımı	18
3.3. Timoshenko Kiriş Modelinde Dalga Yayınımı	19
3.4. Reddy Kiriş Modelinde Dalga Yayınımı	20
3.5. Düzlem Gerilme Elastisite Çözümü	21
3.6. Timoshenko Kiriş Teorisinde Düzlem İçi Kuvvetin Etkisi	23
3.7. Reddy Kiriş Teorisinde Düzlem İçi Kuvvetin Etkisi	24

BÖLÜM 4

KİRİŞ TEORİLERİNİN FARKLI SINIR KOŞULLARI İÇİN ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ.....	25
4.1. Giriş	25
4.2. EB Kiriş Teorisinde Serbest Titreşim Analizi.....	25
4.2.1. Her İki Ucu Basit Mesnetli EB Kirişi	26
4.2.2. Her İki Ucu Ankastre EB Kirişi	27

4.2.3. Her İki Ucu Serbest EB Kiriş	28
4.2.4. Bir Ucu Ankastre Diğer Ucu Serbest EB Kiriş	29
4.3. Timoshenko Kiriş Teorisinde Serbest Titreşim Analizi	30
4.4. Reddy Kiriş Teorisinde Serbest Titreşim Analizi	36
BÖLÜM 5	
SAYISAL SONUÇLAR	42
5.1. Giriş	42
5.2. Dalga Yayınım Eğrileri	42
5.3. Timoshenko Kiriş Teorisinde Faz İlişkileri	46
5.4. Reddy Kiriş Teorisinde Faz İlişkileri	48
5.5. Kirişlerin Titreşimi	49
5.6. Mod Şekilleri ve Genlik Oranları	51
5.7. Faz Hızı ve Grup Hızı Değerleri	72
5.8. Farklı Düzeltme Faktörlerinin Timoshenko'nun İkinci Spektrumuna Etkisi	73
BÖLÜM 6	
GENEL SONUÇLAR	77
KAYNAKLAR	79
ÖZGEÇMİŞ	82

SİMGELER DİZİNİ

A	Kesit alanı
a, b	Timoshenko kirişinde dalganın maksimum genlikleri
C_i, D_i	Keyfi sabitler ($i=1,2,3,4$)
E	Elastisite Modülü
(EB)	Euler-Bernoulli kirişine ait dalga yayılım eğrisi
$f(z)$	Şekil fonksiyonu
$f(x,t)$	Korunumsuz kuvvet
G	Kayma modülü
h	Kiriş kalınlığı
I, I'_1, I''_1, I_i	Kiriş kesitinin alan atalet momentleri ($i=1,2,3,4$)
KE	Kinetik enerji
k	Dalga sayısı
L	Kiriş uzunluğu
N_0	Eksenel yük
n	Mod sayısı
PE	Potansiyel enerji
P	Düzlem içi kuvvet
Q_{ij}	Elastik sabitler
r	Boyutsuz atalet yarıçapı
$(R_1), (R_2)$	Reddy kiriş teorisine ait 1. ve 2. spektrum frekans eğrileri
s	Narinlik oranı
t	Zaman
$(T_1), (T_2)$	Timoshenko kiriş teorisine ait 1. ve 2. spektrum frekans eğrileri
U, V, W	Kirişteki herhangi bir noktanın x, y ve z eksenleri doğrultularındaki yer değiştirmeleri
u, v, w	Kiriş orta düzlemindeki bir noktanın x, y ve z eksenleri doğrultularındaki yer değiştirmeleri
$W(x,t)$	Kirişin z yönündeki yer değiştirme fonksiyonu
W_m	Euler-Bernoulli kirişinde orta düzlemdeki yer değiştirme

β	Frekans parametresi
$\varepsilon_x, \gamma_{xz}$	Genleme bileşenleri
γ	Boyutsuz frekans parametresi
$\varphi(x, t)$	Eğilme momentine bağlı dönme açısı
σ_x, σ_y	Normal gerilme
τ_{xz}	Kayma gerilmesi
κ	Timoshenko kirişinin kayma düzeltme faktörü
ν	Poisson oranı
η_R	Kayma titreşim frekansı
(Y)	Reddy kirişinde kayma açısı
(ψ)	Reddy kiriş kesitindeki toplam dönme açısı
ρ	Yoğunluk
ρ_{ij}	Atalet katsayıları
ω	Açısal frekans
δ	Varyasyon sembolü
$(1), (2), (3)$	Düzlem gerilme elastisite frekans eğrileri

KISALTMALAR

A	Ankastre destekli
B	Basit destekli
EB	Euler-Bernoulli
EBKT	Euler-Bernoulli kiriş teorisi
PKDT	Parabolik kayma deformasyon teorisi
S	Serbest kenar
TKT	Timoshenko kiriş teorisi

ŞEKİLLER VE TABLOLAR LİSTESİ

Şekil 2.1.	Kiriş geometrisi ve eksen takımları	9
Şekil 2.2.	EB kirişinde yer değiştirme	10
Şekil 2.3.	Timoshenko kirişinde yer değiştirme	12
Şekil 2.4.	Reddy kirişinde yer değiştirme	15
Şekil 3.1.	Düzlem gerilme durumunda diferansiyel eleman	22
Şekil 5.1.	Euler-Bernoulli, Timoshenko ve Reddy kiriş modellerinin yayılım eğrilerinin düzlem elastisite çözümü ile kıyaslanması	43
Şekil 5.2.	Euler-Bernoulli, Timoshenko ve Reddy kiriş modellerinin yayılım eğrilerinin düzlem elastisite çözümü ile kıyaslanması	44
Şekil 5.3.	Euler-Bernoulli, Timoshenko ve Reddy kiriş modellerinin yayılım eğrilerinin düzlem elastisite çözümü ile kıyaslanması	44
Şekil 5.4.	Euler-Bernoulli, Timoshenko ve Reddy kiriş modellerinin yayılım eğrilerinin düzlem elastisite çözümü ile kıyaslanması	45
Şekil 5.5.	Euler-Bernoulli, Timoshenko ve Reddy kiriş modellerinin yayılım eğrilerinin düzlem elastisite çözümü ile kıyaslanması	45
Şekil 5.6.	Timoshenko kirişinde açı oranlarının dalga sayısı ile değişimi	46
Şekil 5.7.	Timoshenko kirişinde açı oranlarının dalga sayısı ile değişimi	47
Şekil 5.8.	Timoshenko kirişinde açı oranlarının dalga sayısı ile değişimi	47
Şekil 5.9.	Timoshenko kirişinde açı oranlarının dalga sayısı ile değişimi	48
Şekil 5.10.	Reddy kirişinde açı oranlarının dalga sayısı ile değişimi	48
Şekil 5.11.	Reddy kirişinde açı oranlarının dalga sayısı ile değişimi	49
Şekil 5.12.	Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli	51
Şekil 5.13.	Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli	52
Şekil 5.14.	Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli	52
Şekil 5.15.	Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli	53
Şekil 5.16.	Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli	53
Şekil 5.17.	Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli	54
Şekil 5.18.	Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli	54
Şekil 5.19.	Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli	55

Şekil 5.20.	Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli	55
Şekil 5.21.	Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli	56
Şekil 5.22.	Her iki ucu ankastre (A-A) sınır şartındaki mod şekli	56
Şekil 5.23.	Her iki ucu ankastre (A-A) sınır şartındaki mod şekli	57
Şekil 5.24.	Her iki ucu ankastre (A-A) sınır şartındaki mod şekli	57
Şekil 5.25.	Her iki ucu ankastre (A-A) sınır şartındaki mod şekli	58
Şekil 5.26.	Her iki ucu ankastre (A-A) sınır şartındaki mod şekli	58
Şekil 5.27.	Her iki ucu ankastre (A-A) sınır şartındaki mod şekli	59
Şekil 5.28.	Her iki ucu ankastre (A-A) sınır şartındaki mod şekli	59
Şekil 5.29.	Her iki ucu ankastre (A-A) sınır şartındaki mod şekli	60
Şekil 5.30.	Her iki ucu ankastre (A-A) sınır şartındaki mod şekli	60
Şekil 5.31.	Her iki ucu ankastre (A-A) sınır şartındaki mod şekli	61
Şekil 5.32.	Bir ucu ankastre diğer ucu serbest (A-S) sınır şartındaki mod şekli	61
Şekil 5.33.	Bir ucu ankastre diğer ucu serbest (A-S) sınır şartındaki mod şekli	62
Şekil 5.34.	Bir ucu ankastre diğer ucu serbest (A-S) sınır şartındaki mod şekli	62
Şekil 5.35.	Bir ucu ankastre diğer ucu serbest (A-S) sınır şartındaki mod şekli	63
Şekil 5.36.	Bir ucu ankastre diğer ucu serbest (A-S) sınır şartındaki mod şekli	63
Şekil 5.37.	Bir ucu ankastre diğer ucu serbest (A-S) sınır şartındaki mod şekli	64
Şekil 5.38.	Bir ucu ankastre diğer ucu serbest (A-S) sınır şartındaki mod şekli	64
Şekil 5.39.	Bir ucu ankastre diğer ucu serbest (A-S) sınır şartındaki mod şekli	65
Şekil 5.40.	Bir ucu ankastre diğer ucu serbest (A-S) sınır şartındaki mod şekli	65
Şekil 5.41.	Bir ucu ankastre diğer ucu serbest (A-S) sınır şartındaki mod şekli	66
Şekil 5.42.	Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli	66
Şekil 5.43.	Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli	67
Şekil 5.44.	Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli	67
Şekil 5.45.	Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli	68
Şekil 5.46.	Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli	68
Şekil 5.47.	Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli	69
Şekil 5.48.	Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli	69
Şekil 5.49.	Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli	70
Şekil 5.50.	Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli	70
Şekil 5.51.	Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli	71

Şekil 5.52.	Timoshenko kirişinde genlik oranı	71
Şekil 5.53.	Reddy kirişinde genlik oranı	72
Şekil 5.54.	Timoshenko ve EB kirişlerinde faz hızı	72
Şekil 5.55.	Timoshenko ve EB kirişlerinde grup hızı	73
Şekil 5.56.	Farklı düzeltme faktörleri kullanılarak oluşturulan dalga yayılım eğrileri	74
Şekil 5.57.	Farklı düzeltme faktörleri kullanılarak oluşturulan dalga yayılım eğrileri	74
Şekil 5.58.	Farklı düzeltme faktörleri kullanılarak oluşturulan dalga yayılım eğrileri	75
Şekil 5.59.	Farklı düzeltme faktörleri kullanılarak oluşturulan dalga yayılım eğrileri	75
Şekil 5.60.	Farklı düzeltme faktörleri kullanılarak oluşturulan dalga yayılım eğrileri	76
Tablo 4.1.	Timoshenko kirişinin dört farklı sınır koşulu için frekans denklemleri ($a < a_k$)	35
Tablo 4.2.	Timoshenko kirişinin dört farklı sınır koşulu için frekans denklemleri ($a > a_k$)	36
Tablo 5.1.	İlk beş boyutsuz frekans parametresi	50
Tablo 5.2.	İlk beş boyutsuz frekans parametresi	50
Tablo 5.3.	İlk beş boyutsuz frekans parametresi	50

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu tez çalışmasında, dikdörtgen kesitli, izotropik kirişlerin dalga yayılımı analizi yapılmış ve kirişlerin serbest titreşimi sırasıyla Euler-Bernoulli, Timoshenko ve Reddy kiriş teorileri çerçevesinde incelenmiştir. Dalga yayılımı analizi ile Timoshenko ve Reddy kiriş teorilerine ait ikinci spektrum frekans değerlerinin fiziksel anlamı araştırılmıştır.

Bu bölümde ilk olarak problem ve önemi açıklanmış, konuyla ilgili daha önce yapılan çalışmalara yer verilmiş ve son olarak da çalışmanın amacı ve kapsamı anlatılmıştır.

1.1. Problem ve Önemi

Kirişlerin dinamik davranışlarının analizi mühendislikte önemli bir araştırma konusu olmuştur. Demiryolu mühendisliği, sıvı ve gaz iletim hatlarında kullanılan borular, gemi iskeletlerinde ve köprü ayaklarında kullanılan kiriş kolon bağlantıları kirişlerin kullanım alanlarından bazılarıdır. Kiriş, kalınlık ve genişlikleri uzunluklarına göre daha az olan, eksenine düşey yönde etkiyen yükleri taşıyan narin yapı elemanları olarak tanımlanır.

Tüm elastik cisimlerde olduğu gibi, kirişler de bir dış uyaran etkisinde kendi denge noktası etrafında mekanik salınım hareketi yapar ve uyaran kaldırıldığında da salınım hareketine devam eder. Meydana gelen bu salınım hareketine serbest titreşim hareketi denir. Cismin sadece esnekliğine ve kütesine bağlı olan ve cismin o frekansta uyarılırsa yüksek genlikle ve sürekli olarak titreşeceği frekansa doğal frekans denir. Diğer bir deyişle frekans cismin bir saniyedeki toplam salınım sayısıdır. Bir cismin doğal frekansıyla çakışan bir frekansta uyarılması sonucunda ortaya çıkan fiziksel olaya rezonans denir. Rezonansa girmiş bir kiriş aşırı şekilde titreşir ve genlik değeri artarak

sonsuzu gider. Bundan dolayı mühendislik yapısının doğal frekanslarının bilinmesi, yapının zarar görmeden emniyetli bir şekilde çalışabilmesi açısından oldukça önemlidir.

1.2. Daha Önce Yapılan Çalışmalar

Bir kirişin elastik deformasyonu genel elastisite denklemleri kullanılarak ilk kez Jacob Bernoulli tarafından incelenmiştir. 18.yy'da Jacob Bernoulli (1654-1705), elastik bir kirişin eğilmesinin, kirişin her noktası için eğilme momenti ile orantılı olduğunu belirtmiştir. Daniel Bernoulli (1700-1782) ise titreşen bir kirişin diferansiyel hareket denklemini çıkarmıştır. Leonhard Euler (1707-1783), çeşitli yükleme durumu altında çalışan elastik kirişlerin şekil değişimlerini incelemiş ve Bernoulli teorisini doğrulamıştır. Bu yaklaşım Euler-Bernoulli kiriş teorisi olarak adlandırılır ve mühendislikte klasik kiriş teorisi olarak bilinir. Bu teori ile mühendislikte kirişlerin yük taşıma ve çökme karakteristikleri hesaplanmaktadır. Euler-Bernoulli kiriş teorisi birçok mühendislik problemlerine basit ve makul bir çözüm sunmaktadır. Ancak bu teori yüksek modlardaki doğal frekanslar için yetersiz kalmaktadır. Aynı zamanda bu teoride, ince ve uzun narin kirişler için doğal frekans değerleri doğru olarak bulunabilirken, teori kısa ve kalın kirişlere uygulandığında yetersiz kalmaktadır. Bunun temel nedeni kirişte meydana gelen kayma şekil değişiminin etkisinin göz ardı edilmesidir.

Euler-Bernoulli klasik kiriş teorisine alternatif olarak Timoshenko tarafından farklı bir yaklaşım sunulmuştur. Dönme etkilerinin yanında, kayma etkilerinin de dikkate alındığı bu yaklaşım Timoshenko kiriş teorisi olarak bilinir (1921). Timoshenko kiriş teorisi, narin kirişlerin yanında kısa ve kalın kirişler için de anlamlı sonuçlar vermektedir. Timoshenko kiriş teorisinde kesitte sabit bir kayma şekil değişimi (sabit kayma gerilmesi) dağılımı kabul edilir. Ancak elastisiteden de bilindiği gibi kayma gerilmesi dağılımı sabit değildir. Bu sebepten dolayı oluşan hatayı düzeltmek için Timoshenko kiriş teorisinde düzeltme faktörü kullanılır.

Cowper (1966) tarafından Timoshenko kirişine ait kayma düzeltme faktörü Poisson oranının bir fonksiyonu olarak ifade edilmiştir. Renton (1997), kullandığı düzeltme faktörü değerleriyle düzlem gerilme elastisite teorisi sonucuna daha da yaklaşmıştır.

Timoshenko kirişlerinin eğilme titreşimlerine, dönme ataletinin ve kayma rijitliğinin etkisi, Traill-Nash ve Collar (1953) tarafından ortaya konmuştur.

Anderson (1953), üniform kirişlerin titreşimlerini Timoshenko kiriş teorisine göre incelemiş, Dolph (1954), genel anlamda eğilme titreşimini, Timoshenko teorisi esaslarına uygun araştırmıştır.

Dolph ve Herrman (1955), iki tarafı basit destekli kirişin, dış kuvvetleri dikkate almadan sınır değer problemini elde etmişlerdir.

Huang (1961), altı sınır koşulu için Timoshenko kiriş modelinin frekans denklemlerini ve mod şekillerini oluşturmuştur.

Statik olarak aksenal kuvvete maruz Timoshenko kiriş-kolon bağlantılarının dinamik davranışı, Cheng ve Tseng (1973) tarafından incelenmiştir.

Chen (1987), Timoshenko kirişinin eğilme titreşim analizini genelleştirilmiş dinamik rijitlik matrisini kullanarak gerçekleştirmiştir. Timoshenko kirişinin, farklı sınır koşullarına göre dinamik analizi Kim ve Renardy (1987) tarafından gerçekleştirilmiştir.

Kayma deformasyonunu ayrıntılı olarak inceleyen Reddy, Wang ve Lam (1997), Timoshenko teorisine alternatif teoriler üzerinde çalışmışlardır.

Geist ve McLaughlin (1998), üniform her iki ucu serbest Timoshenko kirişinin özdeğerlerinin elde edileceği bağıntıları ortaya koymuşlardır.

Kruszewski (1949), ankastre kirişin ilk üç antisimetrik modunu, iki tarafından serbest kiriş için ise simetrik ve anti simetrik modlarını elde etmiştir.

Goens (1931), iki ucu serbest Timoshenko kirişleri ile yapmış olduğu çalışmada diferansiyel hareket denklemlerinin iki adet çözümünün olduğunu gözlemlemiştir. Bir çözüm hiperbolik ve trigonometrik fonksiyonlardan oluşurken, diğer çözüm ise sadece trigonometrik fonksiyonlardan oluşmaktadır. Bu çözümlerin kritik frekansın üstündeki titreşim modlarında kayma ve dönme ataleti parametrelerine bağlı olarak farklı doğal frekans değerleri verdiğini gözlemlemiştir. Traill-Nash ve Collar (1953), bu değişimi Timoshenko kiriş teorisinde ikinci spektrumun varlığı ile açıklamıştır. İkinci spektrumun varlığını iki ucu basit destekli ve iki ucu serbest kirişlerde yapmış oldukları nümerik çözümlerle göstermişlerdir.

Anderson (1953), Timoshenko kirişinde eğilme titreşimini incelemiş ve her iki ucu basit destekli kirişler için iki ayrı frekans spektrumunun varlığını keşfetmişlerdir.

Dolph (1954) ve Kapur (1966) da basit destekli sınır koşulları için Timoshenko kirişlerinde ikinci spektrumun varlığını ispat etmişler, ancak diğer sınır koşulları için ikinci spektrumun varlığı hakkında yorum yapamamışlardır.

Abbas ve Thomas (1977), sonlu elemanlar modelini kullanarak her iki ucu basit destekli kiriş için ikinci spektrumun varlığını doğrulamışlardır. O zamandan beri, Timoshenko'nun ikinci spektrumu ile ilgili iki sorun araştırmacıların oldukça ilgisini çekmiştir. İlk olarak basit destekli sınır koşulları dışındaki farklı sınır koşullarında ikinci spektrum frekans değerlerinin geçerliliği araştırılmıştır. Ayrıca ikinci spektrumun fiziksel bir anlamının olup olmadığı birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir.

Stephen (1982), bu araştırmalarının sonucunda "Timoshenko kiriş teorisinin ikinci spektrum frekans değerlerinin varlığının kaçınılmaz olduğunu ancak anlamsız sonuçlar vermesi sebebiyle önem verilmemesi gereken bir teori olduğunu ifade etmiştir." Stephen bu düşüncesini, bulunan faz hızlarının elastisite teorisindeki değerlere göre oldukça yanlış sonuçlar vermesine dayandırmıştır. Küçük titreşim modlarında geniş bir dalga boyu aralığında birinci spektrum frekans sonuçlarının mükemmel bir şekilde uyumlu olduğunu, fakat ikinci spektrum frekans değerlerinin PC teorisi ile uyumlu olmadığını belirtmiştir.

Yine Stephen (1982), dairesel kesitli sonsuz bir kirişte dalga yayılımını inceleyerek düzlem gerilme elastisite sonuçlarıyla Timoshenko kirişindeki birinci ve ikinci spektrum değerlerinin karşılaştırmasını yapmıştır. Birinci spektrumun ilk yirmi doğal frekans değeri için düzlem gerilme elastisite teorisiyle oldukça uyumlu olduğu gözlenirken, ikinci spektrum değerlerinin sadece ilk iki moddaki değerlerde düzlem gerilme elastisite sonuçlarıyla uyumlu olduğunu gözlemlemiştir. Daha yüksek titreşim modlarında aynı uyumun olmadığını belirtmiştir. Böylece ikinci spektrumun fiziksel anlamının olmadığı sonucuna varmıştır.

Levinson ve Cooke (1982), Timoshenko kiriş teorisinde öz değer ve öz vektör problemlerini çalışırken ikinci spektrumun varlığını dikkate almanın gerekli olmadığını savunmuşlardır. Yapmış oldukları çalışmada karakteristik denklemin yalnızca her iki ucu basit destekli kiriş için çarpanlarına ayrılabilmesini söylemişler ve ikinci spektrum kavramının ancak diğer sınır koşulları için de bulunması şartıyla kabul edilebilir olduğunu savunmuşlardır.

Chervyakov ve Nesterenko (1993), ikinci spektrumun fiziksel anlamını araştırmışlar ve yaptıkları çalışmada Timoshenko kiriş teorisindeki birinci spektrumun mekanik enerji değerinin pozitif çıktığını, ikinci spektrumun mekanik enerji değerinin ise

negatif çıktığını belirtmişlerdir. Bu yüzden ikinci spektrum değerlerinin fiziksel bir anlamının olamayacağını ifade etmişlerdir.

Han vd. (1999), ikinci spektrumu kısaca açıklayarak eğilme momenti ve kesme kuvveti ifadelerinin birinci spektrum için eş fazlı iken, ikinci spektrum değerlerinde eş fazlı olmadığını göstermişlerdir.

Renton (2001), Timoshenko'nun ikinci spektrum teorisinin doğruluğunu dalga yayılımı yoluyla araştırmıştır. Dalga boyunun kiriş yüksekliğinden daha büyük olduğu durumlar için ikinci spektrum frekans eğrisinin düzlem gerilme elastisite çözümüyle uyumlu olduğunu ancak daha düşük dalga boylarında ikinci spektrum ile düzlem elastisite çözümü arasındaki farkın giderek arttığını gözlemlemiştir.

Stephen (2006) ve Puchegger (2006), Timoshenko kirişinin titreşimini incelemişler ve elde ettikleri sonuçları her iki ucu serbest sınır koşulu için deneysel sonuçlarla kıyaslamışlardır. Bu kıyaslanmanın sonucunda Timoshenko ikinci spektrum frekans değerlerinin kritik frekans değerinin üstünde çıktığını gözlemlemişler ve ikinci spektrum değerlerinin ihmal edilmesi gerektiğini belirtmişlerdir.

Bhaskar (2009), Timoshenko kirişinin elastik dalgalarda çözümünü yapmıştır ve ikinci spektrumun ihmal edilmesinin istatistiksel enerji analizi metodu kullanıldığında önemli hatalara sebep olacağını belirtmiştir.

Manevich (2015), ikinci spektrumun fiziksel anlamını elastik zemin etkisiyle açıklamıştır. Zemin etkisinin ikinci spektrum frekans değerlerinden bağımsız olarak açıklanamayacağını ifade etmiştir.

Bickford (1982), düşey kayma gerilmelerinin kalınlık boyunca parabolik olarak değişimini dikkate alarak bir kiriş teorisi ortaya koymuştur.

Reddy (1984), bir plağın alt ve üst yüzeylerinin gerilmeden bağımsız olma şartını kullanarak Parabolik Kayma Deformasyon Teorisini (PKDT) geliştirmiştir. Düzlem içi yer değiştirmelerin kübik olarak seçilmesiyle dik kayma genlemelerinin parabolik olarak değişimini sağlamıştır.

Bickford (1982) Reddy (1988), yer değiştirme alanına bağlı sürekli hareket denklemleri türetmişlerdir. Bickford'un çalışması izotropik kirişlerle sınırlı iken, Reddy çalışmasında tabakalı kompozit plakları dikkate almıştır. Reddy'nin üçüncü mertebe tabakalı plak teorisi Heyliger ve Reddy (1988) tarafından izotropik kirişlerin lineer ve nonlineer eğilme ve titreşimlerinin incelenmesinde kullanılmıştır.

Petrolito (1995), Reddy kiriş teorisini kalın kirişlerin tam katılık analizine uygulamıştır. Kirişin şekil fonksiyonlarını diferansiyel denklemlerin çözümünden türeterek sonlu elemanlar metodunu kullanmışlardır.

Soldatos ve Tımarcı (1993)'nın yer değiştirme alanına eklenen şekil fonksiyonları yardımı ile birleştirilmiş kayma deformasyonu teorisi, dik katmanlı kabuk yapıların dinamik analizi (1995) ve dik katmanlı plakların burkulma analizinde (Aydoğdu ve Tımarcı, 2005) kullanılmıştır.

1.3. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı

Kiriş problemlerinde analitik çözümler kiriş uçlarına uygulanan farklı sınır şartlarına göre yapılmaktadır. Bu sınır şartları kiriş uçlarının basit destekli, ankastre ve serbest olması durumlarının farklı varyasyonları alınarak belirlenir.

18. yy' da, bir kirişin eğilme titreşimini, sadece eylemsizlik kuvveti ve eğilme oluşturan kuvvetleri dikkate alarak inceleyen Euler (1744), mühendislikte klasik kiriş teorisi olarak adlandırılan bir teorinin ortaya çıkmasını sağlamıştır. Klasik kiriş teorisi, düzgün izotropik bir kirişin elastikliğinin basitleştirilmiş bir ifadesidir.

Timoshenko (1921), kayma şekil değişiminin de dikkate alındığı bir kiriş teorisini ortaya çıkarmıştır. Matematiksel bakış açısına göre Timoshenko kiriş teorisinin ana özelliği bir noktadaki gerilme-şekil değiştirme durumu, toplam çökme ve eğilme eğimi olacak şekilde iki adet boyutlu vektör ile tanımlanabilmektedir. Bunun sunucunda farklı fazlarda iki adet dalga yayılımı eğrisi (iki ayrı spektrum) görmek mümkündür.

Farklı sınır koşullarına sahip Timoshenko kirişlerine ait serbest titreşim frekans denklemlerinin analitik çözümü Timoshenko ve Young (1955) tarafından yapılmıştır.

Fybra (1972), kitabında kirişlerin serbest ve zorlanmış titreşim problemlerinin analitik olarak çözümlerini vermiştir.

Timoshenko kiriş teorisinde varsayılan yer değiştirme yaklaşımı kirişin alt ve üst yüzeylerinde kayma sınır koşulunu sağlamamaktadır. Bunun üzerine Reddy (1984), kirişlerin yüzeylerinde kayma gerilmelerinin sıfır olması şartını sağlayan ve böylece Timoshenko kiriş teorisindeki gibi kayma düzeltme faktörüne ihtiyaç duymayan bir yüksek mertebeli kiriş teorisi ortaya koymuştur.

Bu tez çalışmasının temel amacı kirişlerde yüksek mertebeli kayma deformasyon teorisini (Reddy kiriş teorisi) kullanarak Timoshenko kirişlerinde ortaya çıkan ikinci

spektrumun fiziksel anlamının olup olmadığını araştırmaktır. Literatürde Timoshenko kirişlerinde ikinci spektrumun varlığı ispatlanmış ancak fiziksel anlamı konusunda günümüze kadar birçok araştırmacı farklı görüşler ortaya koymuştur. Bu çalışma ile Timoshenko kirişlerinde ikinci spektrum frekanslarının fiziksel anlamı araştırılacak ve bu konu ile ilgili literatüre katkı sağlanacaktır.

Bu kapsamda, çalışmanın 2. bölümünde, Euler-Bernoulli (EB), Timoshenko ve Reddy kiriş teorilerinin diferansiyel hareket denklemleri ve genel sınır koşullarını veren ifadeler Hamilton prensibi kullanılarak çıkarılmıştır. 3. bölümde düzlem gerilme elastisite çözümleri ile EB, Timoshenko ve Reddy kiriş teorilerinin hareket denklemlerinin dalga yayınınu metodu ile analitik çözümleri yapılmıştır. Buna ek olarak, Timoshenko kiriş modelinin uçlarına düzlem içi (P) kuvveti uygulanarak kirişte meydana gelen yer değiştirme açıları arasındaki faz durumları incelenmiştir. 4. bölümde, uçlarından basit destekli, ankastre ve serbest sınır koşullarının farklı kombinasyonlarının etkisindeki izotropik kirişlerin üç kiriş teorisi için titreşim analizleri yapılmıştır. 5. bölümde elde edilen sonuçlar, tablo ve grafiklerle gösterilmiştir. Son bölüm olan 6. bölümde çalışmadan elde edilen genel sonuçlara yer verilmiştir.

BÖLÜM 2

EULER-BERNOULLI, TIMOSHENKO VE REDDY KIRIŞ TEORİLERİNİN HAREKET DENKLEMLERİ VE SINIR KOŞULLARI

2.1. Giriş

Bu bölümde, izotropik kirişlerin hareket denklemleri genişletilmiş Hamilton prensibi kullanılarak elde edilmiştir. Kirişlere ait yer değiştirme fonksiyonlarına yer verilmiş ve klasik kiriş teorisi ile birlikte Timoshenko ve yüksek mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorileri (Reddy kiriş teorisi) incelenmiştir.

2.2. Euler-Bernoulli (EB) Kiriş Teorisi

EB kiriş teorisine göre, eğilmeden önce tarafsız eksene dik ve düzlem olan kesitler, eğilmeden sonra da tarafsız eksene dik ve düzlem kalırlar. Bu çalışmada, tüm kiriş modelleri için aşağıda verilen kabuller yapılmıştır.

-Malzeme lineer elastiktir.

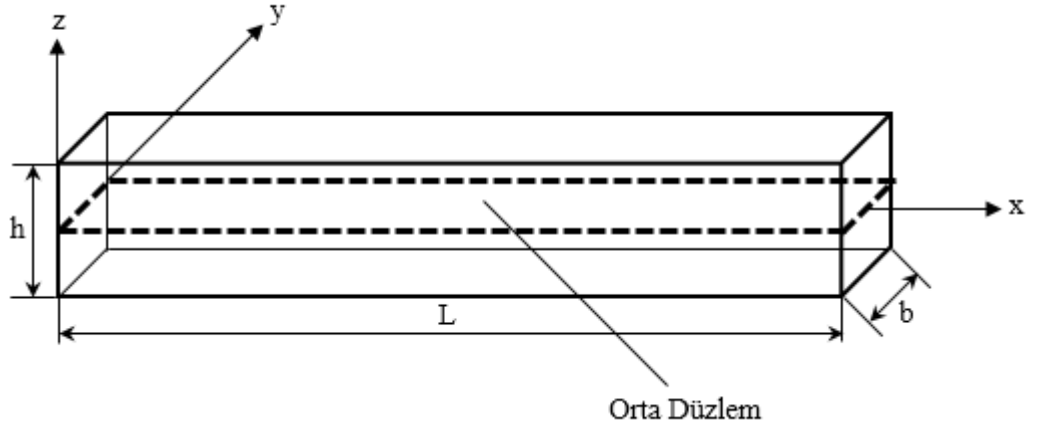
-Poisson etkisi ihmal edilmiştir.

-Dönme açısı çok küçük olduğu için, küçük açı varsayımı yapılabilir.

-Kütle merkezinden geçen eksen ile nötral eksen kesişmektedir. Bu yüzden kesit alanı simetriktr.

2.2.1. EB Kiriş Teorisinin Hareket Denklemi ve Sınır Koşulları

Bir kiriş modelinin geometrisi ve boyutları kartezyen koordinat sisteminde (x, y, z) Şekil 2.1' deki gibi tanımlanmıştır.



Şekil 2.1. Kiriş geometrisi ve eksen takımları

Buna göre, EB kirişi için yer değiştirme alanı ifadeleri izleyen şekilde verilmektedir [2].

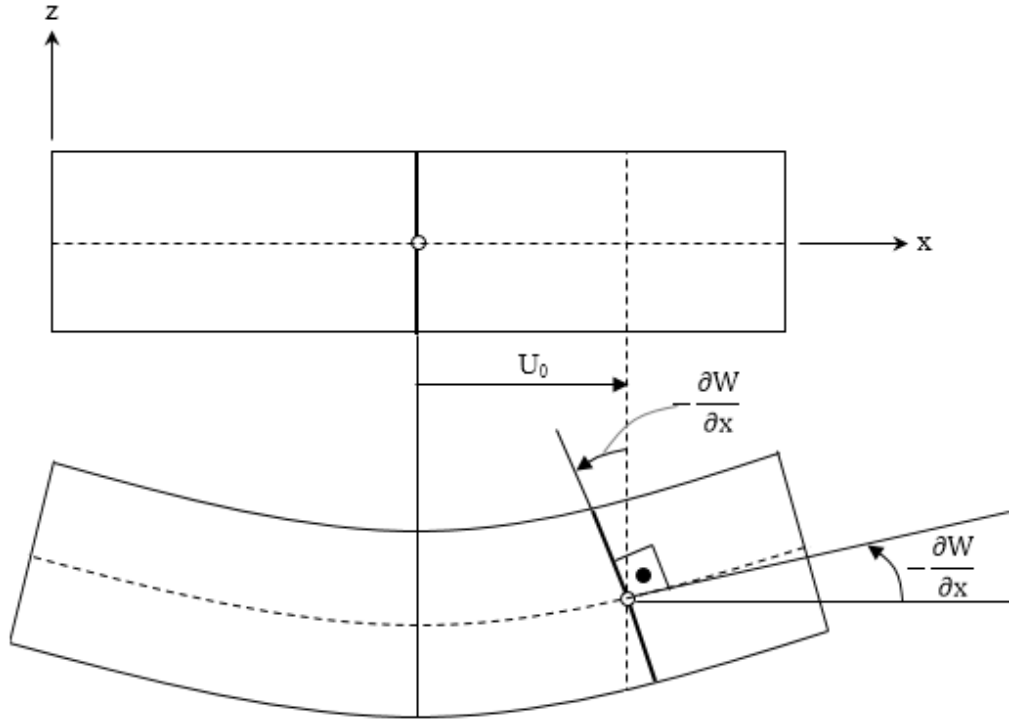
$$U(x, z; t) = u(x; t) - zw_{,x} + f(z)u_1(x; t) ,$$

$$V(x, z; t) = 0 ,$$

$$W(x, z; t) = w(x; t) ,$$

$$\text{EBKT: } f(z) = 0 . \tag{2.1}$$

Burada, U , V , W kirişe ait bir noktanın sırasıyla x, y ve z eksenlerindeki yer değiştirmelerini, u , v ve w ise orta düzlemdeki bir noktanın “ t ” anındaki yer değiştirmelerini, u_1 ise orta düzleme etki eden kayma genlemesini göstermektedir. “ $_{,x}$ ” ifadesi, x ’ e göre kısmi türevi, $f(z)$ ise kiriş teorisine ait şekil fonksiyonunu temsil etmektedir. EB kiriş modelinin şekil değiştirdikten sonraki hali Şekil 2.2 ile gösterilmektedir.



Şekil 2.2. EB kirişinde yer değiştirme

Burada, eksen yer değiştirmesi olan “ U_0 ” değeri çok küçük olduğundan ihmal edilmekte ve kirişin yer değiştirme denklemlerinde dikkate alınmamaktadır.

Bir EB kirişi için genleme potansiyel enerji ifadesi aşağıdaki gibi ifade edilir [30].

$$PE_{\text{eğilme}} = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (2.2)$$

Burada E elastisite modülü, I kiriş kesitinin alan atalet momentini, $W(x, t)$ kirişin yer değiştirme fonksiyonunu, t zamanı ve L kirişin boyunu göstermektedir. Bu kiriş için kinetik enerji ifadesi;

$$KE_{\text{eğilme}} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2.3)$$

şeklinde yazılabilir. Burada ρ kiriş malzemesinin yoğunluğunu, A ise kirişin kesit alanını ifade eder. Böylece EB kiriş teoremi için Lagrange fonksiyonu;

$$L = KE_{\text{eğilme}} - PE_{\text{eğilme}} \quad (2.4)$$

$$L = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho A \left(\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} \right)^2 - EI \left(\frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx \quad (2.5)$$

olacak şekilde yazılabilir.

$$L = \frac{1}{2} \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\rho A \left(\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} \right)^2 - EI \left(\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx dt + \int_{t_1}^{t_2} f(x,t) \delta W dt = 0 \quad (2.6)$$

Burada $f(x,t)$ korunumsuz kuvveti, " δ " ise varyasyonel sembolü göstermektedir. "Genişletilmiş Hamilton Prensi" kullanılarak ve denklem (2.6)'nın ayrı ayrı varyasyonları alınarak EB kirişi için Hareket Denklemi (2.7) ve sınır koşullarını veren denklemler (2.8) bulunabilir.

Diferansiyel hareket denklemi ve sınır koşullarını veren ifadeler sırasıyla;

$$EI \frac{\partial^4 W(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.7)$$

$$W = 0 \text{ veya } EI \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = 0, x = 0, L, \quad \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \text{ veya } EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, x = 0, L. \quad (2.8)$$

olacak şekilde bulunur.

Bu sınır şartlarından yer değiştirme bileşenleri ile ilgili olanlara geometrik sınır şartları denir. Kirişlerin uçlarındaki bağlantılara göre farklılık gösteren ve bu çalışmada kullanılacak, geometrik sınır koşullarından bazıları aşağıdaki gibidir.

Basit destekli (B) sınır şartı:

$$W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad x = 0, L, \quad (2.9)$$

Ankastre (A) sınır şartı:

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad x = 0, L, \quad (2.10)$$

Serbest (S) sınır şartı:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = 0, \quad x = 0, L. \quad (2.11)$$

2.3. Timoshenko Kiriş Teorisi

Timoshenko kiriş teorisinde, eğilmeden önce tarafsız eksene dik ve düzlem olan kesitler, eğilmeden sonra yine düzlem kalır, ancak tarafsız eksene dik kalmazlar. Böylece kayma gerilmelerinin kirişin eğilmesine olan etkisi dikkate alınmış olur.

2.3.1. Timoshenko Kiriş Teorisinin Hareket Denklemi ve Sınır Koşulları

Bir Timoshenko kiriş modeli için yer değiştirme alanı ifadeleri izleyen şekilde verilmektedir.

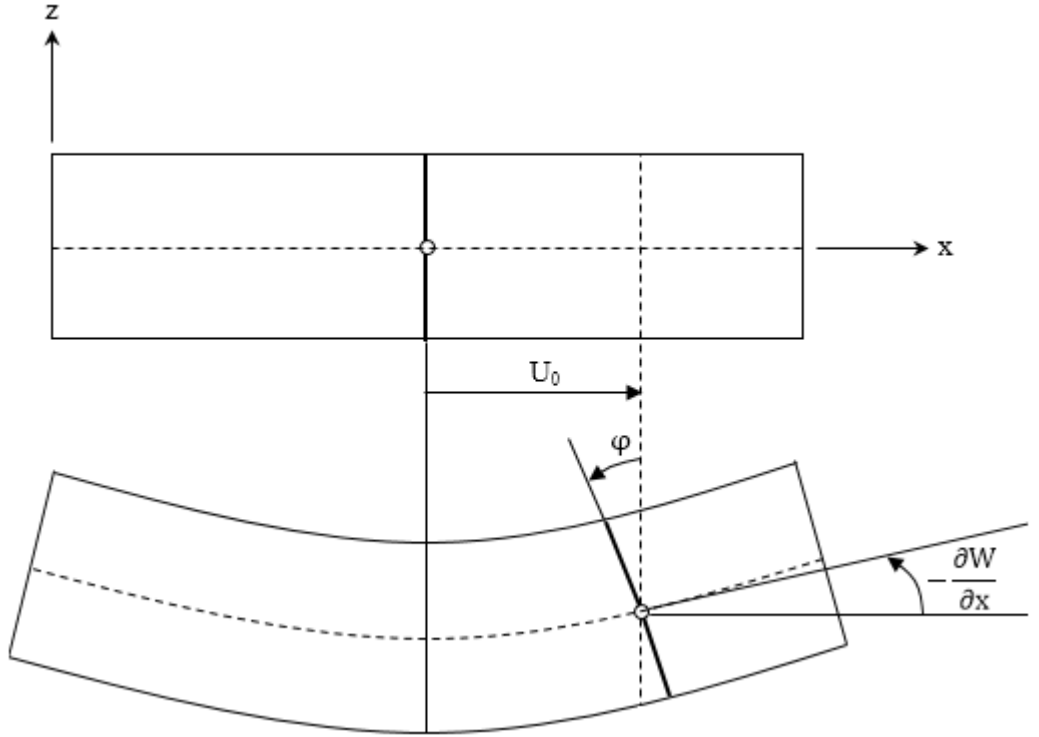
$$U(x, z; t) = u(x, t) - zw_{,x} + f(z)u_1(x; t) ,$$

$$V(x, z; t) = 0 ,$$

$$W(x, t) = w(x; t) ,$$

$$\text{TKT: } f(z) = z . \quad (2.12)$$

Burada, $f(z)$ Timoshenko kiriş teorisinde (TKT), kalınlık boyunca enine kayma gerilmesi ve genleme dağılımını gösteren şekil fonksiyonunu temsil etmektedir.



Şekil 2.3. Timoshenko kirişinde yer değiştirme

Bir Timoshenko kirişi için toplam genleme potansiyel enerji ifadesi kartezyen koordinatlarda izleyen şekilde ifade edilir [30].

$$PE_{\text{toplam}} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EI \left(\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \right)^2 + \kappa GA \left(\frac{\partial W(x, t)}{\partial x} - \varphi(x, t) \right)^2 \right] dx \quad (2.13)$$

Burada G kayma modülü, κ Timoshenko'nun düzeltme faktörü, $W(x, t)$ yerdeğiştirme, $\varphi(x, t)$ ise eğilme momentine bağlı olan dönme açısını göstermektedir.

Timoshenko kirişinin yatay yer değiştirmesinden kaynaklı kinetik enerji ifadesi;

$$KE_{\text{eğilme}} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho A \left(\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} \right)^2 \right] dx \quad (2.14)$$

ve kiriş kesitinin dönmesinden kaynaklanan kinetik enerji denklemi;

$$KE_{\text{dönme}} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho I \left(\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} \right)^2 \right] dx \quad (2.15)$$

olacak şekilde yazılır. Böylece Timoshenko kirişinin toplam kinetik enerji ifadesi denklem (2.16)'daki gibi elde edilir.

$$KE_{\text{toplam}} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho A \left(\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} \right)^2 + \rho I \left(\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} \right)^2 \right] dx \quad (2.16)$$

Böylece Timoshenko kiriş teoremi için Lagrange fonksiyonu;

$$L = KE_{\text{top}} - PE_{\text{top}} \quad (2.17)$$

$$L = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho A \left(\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} \right)^2 + \rho I \left(\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} \right)^2 - EI \left(\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} \right)^2 - \kappa GA \left(\frac{\partial W(x,t)}{\partial x} - \varphi \right)^2 \right] dx \quad (2.18)$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\rho A \left(\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} \right)^2 + \rho I \left(\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} \right)^2 - EI \left(\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} \right)^2 - \kappa GA \left(\frac{\partial W(x,t)}{\partial x} - \varphi(x,t) \right)^2 \right] dx dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} f(x,t) \delta w dt = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

“Hamilton Prensipleri” uygulanarak ve denklem (2.19)'un ayrı ayrı varyasyonları alınarak Timoshenko kiriş modelinin hareket denklemleri (2.20), (2.21) ve genel sınır koşullarını veren denklemler (2.22) bulunabilir.

Diferansiyel hareket denklemlerini ve sınır koşullarını veren ifadeler sırasıyla;

$$-\kappa GA \left(\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} \right) + f(x,t) = \rho A \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2}, \quad (2.20)$$

$$EI \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2} - \kappa GA \left(\varphi - \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} \right) = \rho I \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2}. \quad (2.21)$$

$$\varphi = 0 \text{ veya } EI \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad x = 0, L, \quad W = 0 \text{ veya } \kappa GA \left(\varphi - \frac{\partial W}{\partial x} \right) = 0, \quad x = 0, L. \quad (2.22)$$

olacak şekilde bulunur.

Burada, $EI \partial \varphi / \partial x$ moment, $\kappa GA(\varphi - \partial W / \partial x)$ ise kesme kuvvetidir.

2.4. Reddy Kiriş Teorisi

Düzlem içi yer değiştirmelerin kalınlık ile yüksek mertebeden değiştiği ve kirişin alt ve üst yüzeylerinde kayma gerilmelerinin sıfır olması şartını sağlayan bir teori Reddy (1984) tarafından ortaya konmuştur. Kalınlık koordinatına bağlı bir şekil fonksiyonu seçilerek kayma deformasyon teorileri elde edilebilmektedir. Klasik kiriş teorisi ve Timoshenko kiriş teorisi, şekil fonksiyonunun $(f(z))$, sırasıyla 0 ve z' ye eşit olması durumlarında elde edilmişti. Reddy (1984) ise, şekil fonksiyonunu kalınlık koordinatının kübik bir fonksiyonu olacak şekilde seçerek Parabolik Kayma Deformasyon Teorisini (PKDT) önermiştir.

2.4.1. Reddy Kiriş Teorisinin Hareket Denklemi ve Sınır Koşulları

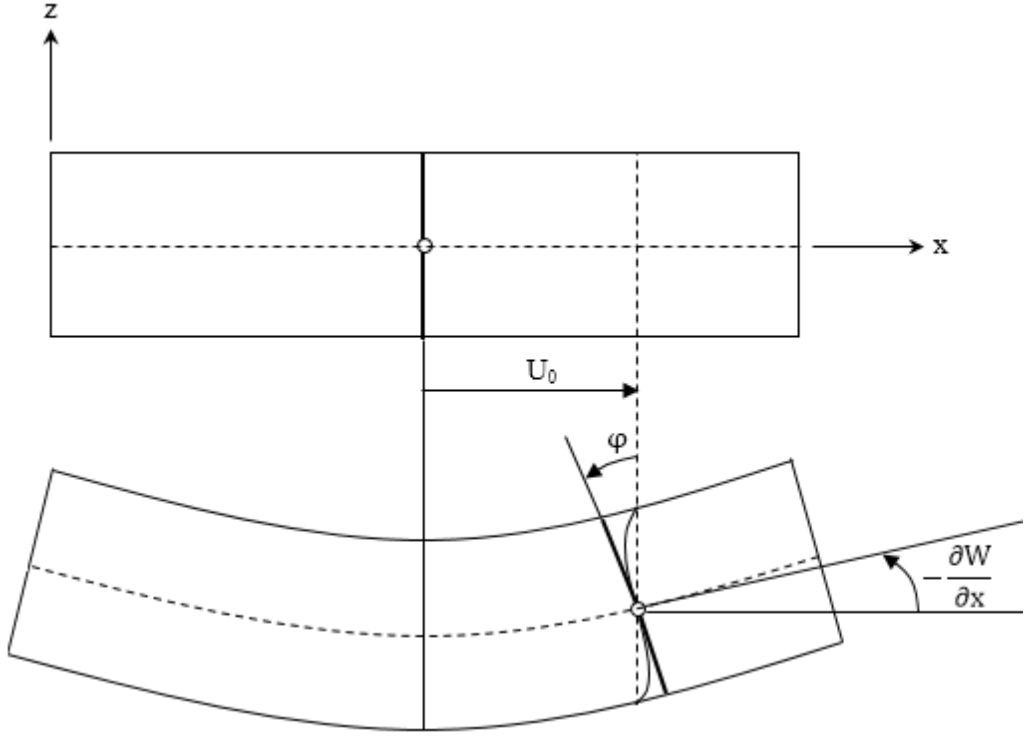
Reddy kiriş teorisinde büyüklükler y -ekseninden bağımsız olacak şekilde yer değiştirme alanı aşağıdaki hali alır.

$$U(x, z; t) = u(x, t) - zw_{,x} + f(z)u_1(x; t),$$

$$V(x, z; t) = 0,$$

$$W(x, t) = w(x; t),$$

$$\text{PKDT: } f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right). \quad (2.23)$$



Şekil 2.4. Reddy kirişinde yer değiştirme

PKDT için verilen kinematik ilişkiler aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\varepsilon_x = u_{,x} - zw_{,xx} + f(z)u_{1,x}$$

$$\gamma_{xz} = f'(z)u_1 \quad (2.24)$$

Burada ε_x ve γ_{xz} genleme bileşenlerini göstermektedir.

Reddy kiriş modeli için gerilme ifadesi Hooke Yasası yardımıyla,

$$\sigma_x = E\varepsilon_x,$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}. \quad (2.25)$$

σ_x normal gerilme ve τ_{xz} kayma gerilmesi bileşenleri bulunabilir.

Reddy kiriş teorisinin hareket denklemlerini ve genel sınır koşullarını veren denklemler Hamilton'un Varyasyonel ilkesi uygulanarak elde edilecektir. Bu amaçla, Reddy kiriş modeli için genleme enerjisi,

$$U_G = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^A (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dx dA \quad (2.26)$$

şeklinde yazılabilir. Burada A kirişin kesit alanını ifade etmektedir.

q dış yükünün oluşturduğu potansiyel enerji ise U_D ile gösterilmektedir.

$$U_D = \frac{1}{2} \int_0^L \left(q(x)W + N_0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) dx \quad (2.27)$$

Burada, $q(x)$ kiriş kesitinde enine uygulanan dış yükü, N_0 ise aksenal yükü göstermektedir. Kinetik enerji ifadesi ise,

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^A \rho (U_{,t}^2 + W_{,t}^2) dx dA \quad (2.28)$$

şeklinde tanımlanır. Bu eşitliklerde " $_{,t} = \frac{\partial}{\partial t}$ " ifadesi zamana göre türevi göstermektedir. Böylece Reddy kiriş modeli için belli bir zaman aralığında Hamilton'un Varyasyonel İlkesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U_G + \delta U_D - \delta K) dt = 0 \quad (2.29)$$

Denklem (2.29) çözüldüğünde hareket denklemleri, kuvvet ve moment bileşenlerine bağlı olarak,

$$\begin{aligned} N_{,x}^c &= (\rho_0 u + \rho_{01} u_1 - \rho_1 w_{,x})_{,tt} , \\ M_{,xx}^c &= (\rho_1 u_{,x} + \rho_{11} u_{1,x} + \rho_0 w - \rho_2 w_{,xx})_{,tt} , \\ M_{,x}^a - Q^a &= (\rho_{01} u + \rho_{02} u_1 - \rho_{11} w_{,x})_{,tt} . \end{aligned} \quad (2.30)$$

şeklinde elde edilir. Burada, "c" ile gösterilen üst simge, orta düzlemde meydana gelen ve EB teorisini tanımlayan genleme bileşenlerini ifade eder. "a" simgesi ise EB genleme bileşenlerine ek olarak kayma deformasyon etkilerini de dikkate alan orta düzlemdeki genleme bileşenlerini tanımlamaktadır. Bu eşitliklerde ifade edilen kuvvet ve moment bileşenleri aşağıda tanımlanmıştır [20].

$$\begin{aligned} N^c &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz , & M^c &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz , & Q^a &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} f'(z) dz , \\ M^a &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x f(z) dz . \end{aligned} \quad (2.31)$$

ρ_{ij} , ($i=0,1$; $j=1,2$) ile gösterilen atalet katsayıları da aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\rho_i = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^i dz \quad (i = 0,1,2),$$

$$\rho_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^i [f(z)]^j dz \quad (i = 0,1 ; j = 1,2). \quad (2.32)$$

Bununla birlikte, Reddy kiriş modelinin $x=0,L$ uçlarındaki sınır koşulları her çiftten biri seçilerek aşağıdaki gibi farklı kombinasyonlarda uygulanabilir.

u veya N^c

w veya $M_{,x}^c$

$w_{,x}$ veya M^c

u_1 veya M^a (2.33)

Sunulan çalışmada aşağıdaki sınır koşulları kullanılacaktır.

$x = 0, L$ 'de Basit Destekli Sınır Şartı:

$$u = w = M^c = M^a = 0 \quad (2.34)$$

$x = 0, L$ 'de Ankastre Sınır Şartı:

$$u = w = w_{,x} = u_1 = 0 \quad (2.35)$$

$x = 0, L$ 'de Serbest Sınır Şartı:

$$N^c = M_{,x}^c = M^c = M^a = 0 \quad (2.36)$$

Denklem (2.30)'daki kuvvet, moment ve atalet katsayıları ifadeleri açık bir şekilde yazılıp düzenlenirse, Reddy kiriş modelinin hareket denklemi,

$$-EI_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + E \left(I_1 - \frac{4}{3h^2} I_1' \right) \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho \left(I_1 - \frac{4}{3h^2} I_1' \right) \frac{\partial^3 u_1}{\partial t^2 \partial x} - \rho I_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2},$$

$$-E \left(I_1 - \frac{4}{3h^2} I_1' \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + E \left(I_1 - \frac{8}{3h^2} I_1' + \frac{16}{9h^4} I_1'' \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - G \left(A - \frac{8}{h^2} I_1 + \frac{16}{h^4} I_1' \right) u_1$$

$$= \rho \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right) \left(I_1 - \frac{8}{3h^2} I_1' + \frac{16}{9h^4} I_1'' \right) - \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \rho \left(I_1 - \frac{4}{3h^2} I_1' \right). \quad (2.37)$$

olacak şekilde elde edilir [20].

Bu eşitlikte verilen I_1, I_1', I_1'' atalet momenti terimleri kiriş kesit alanına bağlı olarak izleyen şekilde tanımlanabilir.

$$(I_1, I_1', I_1'') = \int (z^2, z^4, z^6) dA \quad (2.38)$$

BÖLÜM 3

KİRİŞ TEORİLERİNDE DALGA YAYINIMI

3.1. Giriş

Sistemin sonsuz olması halinde herhangi bir frekansta serbestçe titreşmesi, dalgaların yayınımları ile ilgilidir. Dalga hareketi, bir parçanın uyarılması ve ona bitişik parçalara çarpmasıyla momentumu onlara iletmesi olarak tanımlanabilir. Dalga hareketi, potansiyel ve kinetik enerjiler arasındaki bir dengedir. Boyuna dalgalar, boyuna şekil değiştirmede, eğilme dalgaları ise eğilme şekil değiştirmesinde potansiyel enerji depolarlar. Metal bir levhanın eğilme hareketi, akan bir suyun içine taş atılmasından dolayı oluşan dalgacıklar dalga hareketine ait bazı örneklerdir.

Yapılardaki hasarların tespit edilebilmesi için yüksek frekanslı uyarımlar gerekmektedir. Hasarı belirlemede kullanılan bir kavram olan dalga frekansları malzemenin ve hasarın çeşidine bağlıdır. Sonlu elemanların birleştirilerek, yüksek titreşim modlarında yapısal süreksizlikler vasıtasıyla dalga hareketinin etkilerini yakalamak mümkündür. Elastik dalga yayınımları için birçok nümerik teknik ve analitik çözüm yöntemleri kullanılmıştır. Nümerik teknikler sonlu farklar metodu, sonlu elemanlar metodu ve sınır eleman metodu olarak sıralanabilir. Kirişlerde dalga yayınımları çözümü ise sürekli ortamda, (Seon M. Han vd.,1999) ve (Renton, 2000) tarafından yapılmıştır.

Bu bölümde, 2. Bölümde diferansiyel hareket denklemleri çıkarılan EB, Timoshenko ve Reddy kiriş teorilerinin dalga yayınımları analizi yapılmıştır. Her bir kiriş teorisine ait olan dalga yayınımları denklemleri çıkarılmış ve “düzlem gerilme elastisite çözümü” yapılmıştır. Son kısımda ise, Timoshenko ve Reddy kirişinin uçlarına düzlem içi kuvvet uygulanarak, birinci ve ikinci spektrum eğrilerinin faz ilişkileri incelenmiştir.

3.2. EB Kiriş Modelinde Dalga Yayınımları

Bir EB kirişinin dalga yayınımları denklemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir [1].

$$W = W_m e^{i(\omega t - kx)} \quad (3.1)$$

Burada W_m orta düzlemdeki yer değiştirmeyi, ω açısal frekansı ve k ise dalga sayısını göstermektedir. Kiriş malzemesinin elastisite modülü E , kayma modülü G ve Poisson oranına ν bağlı olarak izleyen şekilde ifade edilir.

$$E = 2G(1 + \nu) \quad (3.2)$$

Bölüm 2' de çıkarılan EB kiriş teorisinin diferansiyel hareket denklemi (2.7), denklem (3.2)'de verilen dalga yayılımı ifadesi ile çözülecek olursa,

$$EI k^4 - \rho A \omega^2 = 0, \quad (3.3)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{EI k^4}{\rho A}} \quad (3.4)$$

olacak şekilde dalga sayısına bağlı boyutlu açısal frekans denklemi elde edilebilir. Kiriş malzemesinin genişliği b , kalınlığı $2h$ olacak şekilde kiriş kesitinin alanı ve atalet momenti sırasıyla,

$$A = 2bh \quad (3.5)$$

$$I = \frac{b(2h)^3}{12} \quad (3.6)$$

olarak bulunur.

(3.4)' de verilen açısal frekans ifadesi, $\gamma = \rho \omega^2 / G k^2$ boyutsuz frekans parametresi ile boyutsuzlaştırılıp, kesit alanı (3.5) ve atalet momentini (3.6) veren ifadeler yerine yazılırsa,

$$\gamma = \frac{2}{3} (1 + \nu) k^2 h^2 \quad (3.7)$$

olacak şekilde EB kiriş modelinin boyutsuz frekans parametresini veren eşitlik yazılabilir [1].

3.3. Timoshenko Kiriş Modelinde Dalga Yayılımı

Bir Timoshenko kirişinde dalga yayılımı denklemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$W = a e^{i(kx - \omega t)},$$

$$\varphi = b e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.8)$$

Burada W yer değiştirme fonksiyonunu, φ eğilme momentine bağlı olan dönme açısını, a ve b parametreleri ise dalganın maksimum genliğini göstermektedir. Bölüm 2' de

çıkarılan Timoshenko kiriş teorisinin diferansiyel hareket denklemi (2.20, 2.21), denklem (3.8)'de verilen dalga yayını ifadesi ile çözülecek olursa,

$$\begin{bmatrix} -\kappa G A k^2 + \rho A \omega^2 & -\kappa G A k i \\ \kappa G A k i & -E I k^2 - \kappa G A + \rho I \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

matrisi elde edilir. Burada a ve b genlikleri sıfıra eşit olamayacağı için katsayılar matrisinin determinanı sıfıra eşitlenmelidir. Eğer katsayılar matrisinin determinantını sıfıra eşitleyecek olursak;

$$\alpha \omega^4 - \beta \omega^2 + \epsilon = 0 \quad (3.10)$$

olacak şekilde açılmal frekans denklemi bulunur. Burada,

$$\alpha = \rho^2 A I,$$

$$\beta = -[\kappa G A \rho I k^2 + \rho A E I k^2 + \rho A \kappa G A],$$

$$\epsilon = E I \kappa G A k^4$$

değerlerini göstermektedir. Bu eşitliklerde dikdörtgen kesitli Timoshenko kirişinin düzeltme faktörü Poisson oranına bağlı olarak aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir [16].

$$\kappa = \frac{10(1 + \nu)}{12 + 11\nu} \quad (3.11)$$

(3.10)' da verilen açılmal frekans ifadesi, $\gamma = \rho \omega^2 / G k^2$ boyutsuz frekans parametresi ile boyutsuzlaştırılıp, kesit alanı (3.5) ve atalet momentini (3.6) veren ifadeler yerine yazılırsa, Timoshenko kiriş modelinin boyutsuz frekans parametresini veren eşitlik aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$\gamma_{1,2} = (1 + \nu) + \frac{5}{12} + \frac{5}{4k^2 h^2} \pm \sqrt{\left[(1 + \nu) + \frac{5}{12} + \frac{5}{4k^2 h^2} \right]^2 - \frac{5}{3}(1 + \nu)} \quad (3.12)$$

3.4. Reddy Kiriş Modelinde Dalga Yayını

Bir Reddy kirişinin dalga yayını denklemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$U_1 = u_m e^{i(\omega t - kx)},$$

$$W = W_m e^{i(\omega t - kx)} \quad (3.13)$$

Burada U_1 ve W ifadeleri yer değiştirme fonksiyonlarını, u_m ve W_m ifadeleri ise kirişin orta düzleminde meydana gelen yer değiştirmeleri göstermektedir. Bölüm 2' de çıkarılan Reddy kiriş teorisinin diferansiyel hareket denklemi (2.37), denklem (3.13)'de verilen dalga yayını ifadesi ile çözülecek olursa,

$$\begin{bmatrix} -EI_1k^4 + \rho A\omega^2 + \rho I_1k^2\omega^2 & EI_2k^3i - \rho I_2\omega^2ki \\ -EI_2k^3i + \rho I_2\omega^2ki & -EI_3k^2 - GI_4 + \rho I_3\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_m \\ u_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

matrisi elde edilir. Kiriş malzemesinin genişliği b , kalınlığı da $2h$ olacak şekilde matriste verilen atalet büyüklükleri sırasıyla,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{b(2h)^3}{12}, & I_2 &= \left(I_1 - \frac{4}{3h^2} I_1' \right), \\ I_3 &= \left(I_1 - \frac{8}{3h^2} I_1' + \frac{16}{9h^4} I_1'' \right), & I_4 &= \left(A - \frac{8}{h^2} I_1 + \frac{16}{h^4} I_1' \right), \\ I_1' &= \frac{b(2h)^5}{80}, & I_1'' &= \frac{b(2h)^7}{448}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

olacak şekilde tanımlanmaktadır. Elde edilen matriste (3.14), W_m ve u_m ifadeleri sıfıra eşit olamayacağı için katsayılar matrisinin determinanı sıfıra eşitlenmelidir. Eğer katsayılar matrisinin determinantını sıfıra eşitleyecek olursak;

$$\alpha\omega^4 - \beta\omega^2 + \epsilon = 0 \quad (3.16)$$

açısal frekans denklemi bulunur. Burada,

$$\begin{aligned} \alpha &= \rho^2 AI_3 + \rho^2 I_1 I_3 k^2 - \rho^2 I_2^2 k^2, \\ \beta &= 2EI_1 I_3 \rho k^4 + \rho AEI_3 k^2 + \rho AGI_4 + \rho I_1 GI_4 k^2 - 2\rho EI_2^2 k^4, \\ \epsilon &= E^2 I_1 I_3 k^6 + EGI_1 I_4 k^4 - E^2 I_2^2 k^6. \end{aligned}$$

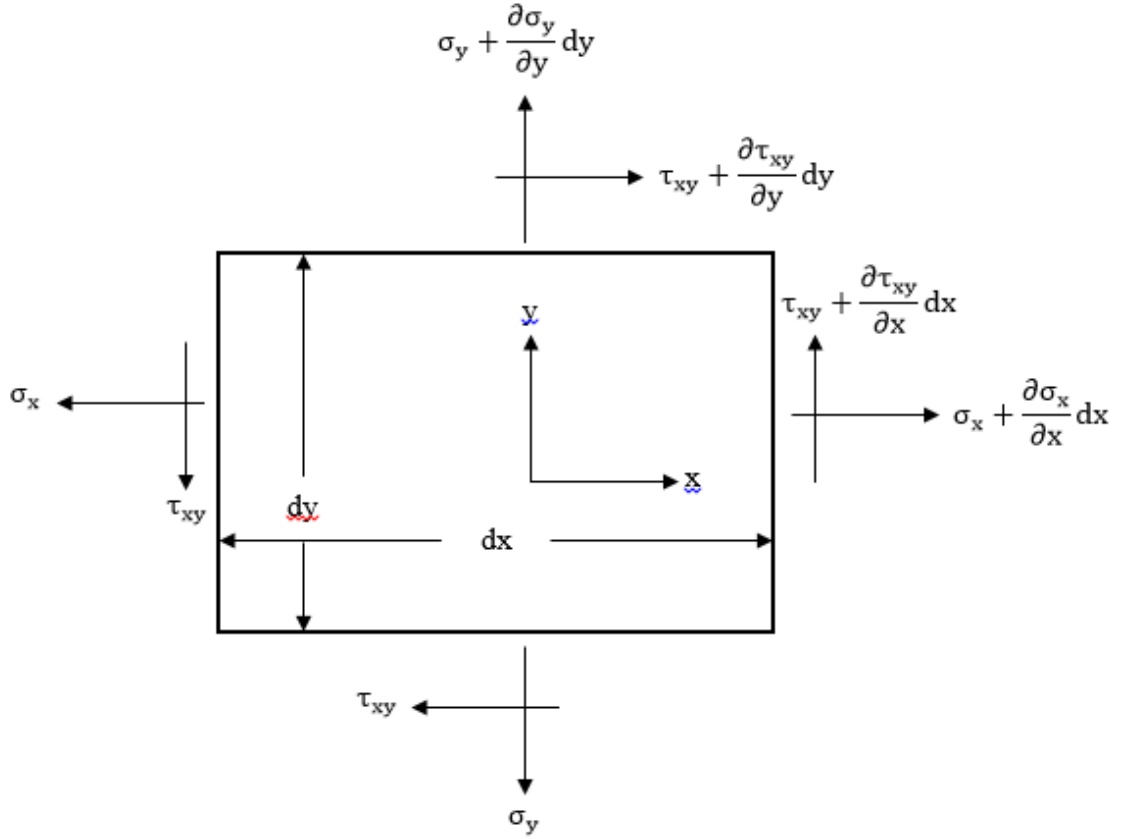
değerlerini göstermektedir.

(3.16)' da verilen açısal frekans ifadesi, $\gamma = \rho\omega^2/Gk^2$ boyutsuz frekans parametresi ile boyutsuzlaştırılıp, kesit alanı (3.5) ve atalet momentlerini (3.15) veren ifadeler yerine yazılırsa, Reddy kiriş modelinin boyutsuz frekans parametresini veren denklem aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$\gamma_{1,2} = \left(\frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\epsilon}}{2\alpha} \right) \frac{\rho}{Gk^2} \quad (3.17)$$

3.5. Düzlem Gerilme Elastisite Çözümü

x-ekseni kirişin orta yüzeyinden geçen eksen boyunca olmak üzere, y-ekseni de x-eksenine dik olacak şekilde tanımlanmaktadır. u ve w ise sırasıyla x ve y eksenlerinde meydana gelen yer değiştirme bileşenlerini ifade etmektedir. Basit harmonik hareket varsayımıyla, Şekil 3.1' de düzlem gerilme hali verilen bir diferansiyel elemanın dinamik denge eşitlikleri aşağıdaki gibi yazılabilir [1].



Şekil 3.1. Düzlem gerilme durumunda diferansiyel eleman

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho \omega^2 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho \omega^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Buradaki gerilme bileşenleri yer değiştirme bileşenlerine bağlı olarak,

$$\sigma_x = \frac{2G}{(1-\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial y} \right), \sigma_y = \frac{2G}{(1-\nu)} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial x} \right), \tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (3.19)$$

şeklinde yazılır. Yer değiştirme bileşenleri izleyen formda seriye açılırsa,

$$\begin{aligned} u &= \sum_i u_i \sinh m_i y \sin(kx + \alpha) \sin(\omega t + \varepsilon), \\ w &= \sum_i w_i \cosh m_i y \cos(kx + \alpha) \sin(\omega t + \varepsilon). \end{aligned} \quad (3.20)$$

ve denklem (3.19) daki gerilme ifadeleri denklem (3.18)'deki denge denklemlerinde yerine yazılıp, denklem (3.20) ifadesi kullanılarak çözülmüşse aşağıdaki matris elde edilir.

$$\begin{bmatrix} (1-\nu)(\mu_1^2 + \gamma) - 2 & -(1+\nu)\mu_1 \\ (1+\nu)\mu_1 & (1-\nu)(\gamma-1) + 2\mu_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Bu matriste $k\mu_i$ ifadesi m_i parametresi yerine geçmekte ve γ , boyutsuz frekans parametresini göstermektedir. Matristeki u_i ve w_i sifira eşit olamayacağından, katsayılar matrisinin determinanı sifira eşitlenirse aşağıdaki gibi boyutsuz frekansa bağlı iki adet kök elde edilmektedir.

$$\mu_1^2 = 1 - \gamma \quad \text{ve} \quad \mu_2^2 = 1 - \frac{\gamma}{2}(1 - w) \quad (3.22)$$

Kiriş kesiti x-eksenine göre simetrik olduğundan, serbest yüzey koşullarında ($2h$ giriş kalınlığı olacak şekilde) $y=h$ ve $y=-h$ koşulları sağlanmaktadır. Denklem (3.22)'de elde edilen iki kök $y=h$ 'da $\sigma_y = 0$ ve $\tau_{xy} = 0$ şartını sağlar. Bu durumda (3.21) matrisi aşağıdaki halini alır.

$$\begin{bmatrix} (2-\gamma)\cosh\mu_1 kh & 2\cosh\mu_2 kh \\ (2-2\gamma)\frac{1}{\mu_1 kh} \sinh\mu_1 kh & (2-\gamma)\frac{1}{\mu_2 kh} \sinh\mu_2 kh \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Son olarak, (3.23)'ün katsayılar matrisinin determinanı sifira eşitlenirse, boyutsuz frekans parametresi (γ) ile dalga sayısı (k) arasındaki ilişki bulunabilir.

3.6. Timoshenko Kiriş Teorisinde Düzlem İçi Kuvvetin Etkisi

Timoshenko kirişinde dalga yayılımı çözümüyle elde edilen iki adet frekans yayılım eğrisi hakkında bazı tartışmalı ve açık olmayan konular vardır. Timoshenko kirişinin uçlarına bir düzlem içi kuvvet uygulanması durumunda, elde edilen iki adet dalga yayılım eğrisini kıyaslamak oldukça avantajlı bir yöntem olacaktır. Böylece ikinci spektrum olarak da adlandırılan ikinci dalga yayılım eğrisi hakkında literatürde yer alan bazı çalışmalara katkıda bulunmak amaçlanmaktadır.

Uçlarına P kuvveti uygulanan bir Timoshenko kirişinde diferansiyel hareket denklemleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} \kappa GA \left(\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} \right) + P \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} &= 0, \\ -EI \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2} + \kappa GA \left(\varphi - \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} \right) + \rho I \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Yukarıda verilen Timoshenko kiriş teorisinin hareket denklemleri (3.24), denklem (3.8)'de verilen dalga yayılımı ifadesi ile çözülecek olursa,

$$-\rho A \omega^2 a - P k^2 a + \kappa G A k b i + \kappa G A k^2 a = 0, \quad (3.25)$$

$$-\rho I \omega^2 b + E I k^2 b + \kappa G A b - \kappa G A k a i = 0. \quad (3.26)$$

olacak şekilde iki adet denklem elde edilmektedir. Elde edilen bu denklemler vasıtasıyla bir Timoshenko kirişinde kayma açısını veren ifadenin ($\varphi - W'$), kesitteki toplam dönme açısını (φ) veren ifadeye oranı aşağıdaki şekilde bulunmaktadır.

$$\frac{\varphi - W'}{\varphi} = 1 - \frac{a}{b} k i = 1 - \frac{\kappa G A k^2}{(\kappa G A k^2 - \rho A \omega^2 - P k^2)} \quad (3.27)$$

3.7. Reddy Kiriş Teorisinde Düzlem İçi Kuvvetin Etkisi

Uçlarına P kuvveti uygulanan bir Reddy kirişinde diferansiyel hareket denklemi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} -E I_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + E I_2 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I_2 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x \partial t^2} + \rho I_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0, \\ -E I_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + E I_3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - G I_4 u_1 - \rho I_3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \rho I_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Yukarıda verilen Reddy kiriş teorisinin hareket denklemi (3.28), denklem (3.13)'de verilen dalga yayını ifadesi ile çözülecek olursa,

$$\begin{aligned} -E I_1 w_m k^4 + E I_2 u_m k^3 i + \rho A \omega^2 w_m - \rho I_2 u_m \omega^2 k i + \rho I_1 k^2 \omega^2 w_m + P k^2 w_m &= 0, \\ -E I_2 w_m k^3 i - E I_3 u_m k^2 - G I_4 u_m + \rho I_3 u_m \omega^2 + \rho I_2 w_m k \omega^2 i &= 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

olacak şekilde iki adet denklem elde edilmektedir. Elde edilen bu denklemler vasıtasıyla bir Reddy kirişinde kayma açısını veren ifadenin (γ), kesitteki toplam dönme açısını (ψ) veren ifadeye oranı aşağıdaki şekilde bulunmaktadır.

$$\frac{\gamma}{\psi} = \frac{u_1 f(z)'}{u_1 f(z)' + w_m k i} = \frac{1}{1 + \frac{E I_2 k^4 - \rho I_2 \omega^2 k^2}{-E I_1 k^4 + \rho A \omega^2 + \rho I_1 k^2 \omega^2 + P k^2} \frac{1}{f(z)'}} \quad (3.30)$$

$$\text{Burada } f(z)' = 1 - \frac{4z^2}{h^2} \quad (3.31)$$

BÖLÜM 4

KİRİŞ TEORİLERİNİN FARKLI SINIR KOŞULLARI İÇİN ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ

4.1. Giriş

Bu bölümde, farklı sınır koşullarına sahip dikdörtgen kesitli izotropik EB, Timoshenko ve Reddy kiriş modellerinde serbest titreşim frekans denklemleri elde edilmiştir. Her iki ucu basit mesnetli (B-B), her iki ucu ankastre (A-A), her iki ucu serbest (S-S) ve bir ucu ankastre diğer ucu serbest bağlı (A-S) sınır koşulları için analiz yapılmıştır.

4.2. EB Kiriş Teorisinde Serbest Titreşim Analizi

Üniform bir EB kirişi için hareket denklemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$c^2 \frac{\partial^4 W(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.1)$$

Bu denklemde c ile gösterilen boyutsuz parametre,

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (4.2)$$

şeklinde yazılmaktadır.

Konum (x) ve zamana (t) bağlı olarak elde edilen diferansiyel hareket denklemi (4.1), değişkenlerine ayırma metodu ile aşağıdaki şekilde çözülebilir [8].

$$W(x, t) = W(x)T(t) \quad (4.3)$$

Denklem (4.3), EB kirişi için verilen hareket denkleminde (4.1) yerine yazılır ve denklem düzenlenirse,

$$\frac{c^2}{W(x)} \frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} = -\frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = a = \omega^2 \quad (4.4)$$

Konum ve zamanın fonksiyonu olarak yazılan bu diferansiyel denklemde a ifadesi açılmal frekansın karesi olacak şekilde tanımlanmıştır ($a=\omega^2$). Bu denklem aynı zamanda konum ve zaman fonksiyonları ayrı olacak şekilde aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\frac{\partial^4 W(x)}{dx^4} - \beta^4 W(x) = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (4.6)$$

Burada β ile verilen frekans parametresi, aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (4.7)$$

Denklem (4.5) ve (4.6)'nın genel çözümleri sırasıyla,

$$T(t) = D_1 \sin \omega t + D_2 \cos \omega t \quad (4.8)$$

$$W(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x + C_3 \cosh \beta x + C_4 \sinh \beta x,$$

veya

$$W(x) = C_1 (\cos \beta x + \cosh \beta x) + C_2 (\cos \beta x - \cosh \beta x) + C_3 (\sin \beta x + \sinh \beta x) + C_4 (\sin \beta x - \sinh \beta x) \quad (4.9)$$

olacak şekilde bulunabilir. Burada C_i ve D_i keyfi sabitleri temsil etmektedir. Çözümlerden de görüldüğü gibi zamana bağlı fonksiyonun $T(t)$ çözümü trigonometrik, yer değiştirme fonksiyonunun $W(x)$ çözümü ise hem trigonometrik hem de hiperbolik terimleri içermektedir. EB kirişinin doğal frekans ifadesi denklem (4.7)'den aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\omega = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (\beta L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}} \quad (4.10)$$

$W(x)$ kirişin normal mod veya karakteristik fonksiyonu, ω ise kirişin doğal frekansı olarak adlandırılabilir. Her kirişte sonsuz sayıda normal mod ve her bir moda karşılık gelen bir doğal frekans değeri mevcuttur. Denklem (4.10)'daki doğal frekans değeri β , farklı sınır koşulları uygulanarak bulunabilir. Kirişteki sınır koşulları konum fonksiyonu $W(x)$ cinsinden ifade edilmektedir. Böylece sınır koşulları çözümü elde edilen konum fonksiyonuna uygulanarak, frekans denklemleri ve öz fonksiyonlar elde edilebilir.

4.2.1. Her İki Ucu Basit Mesnetli EB Kirişi

Her iki ucu basit mesnetli (B-B) bir EB kirişinde, eğilme ve eğilme momenti ifadeleri sıfıra eşit olmaktadır. Böylece sınır koşulları aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$W(0) = 0 \quad (4.11)$$

$$EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(0) = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(0) = 0 \quad (4.12)$$

$$W(L) = 0 \quad (4.13)$$

$$EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(L) = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(L) = 0 \quad (4.14)$$

(4.11) ve (4.12)' de verilen sınır koşulları (4.9)'daki konum fonksiyonunda yerine yazılırsa,

$$C_1 = C_2 = 0 \quad (4.15)$$

olarak bulunur. Bununla beraber (4.13) ve (4.14)' de verilen sınır koşulları da (4.9)' da yerine yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} \sin\beta L + \sinh\beta L & \sinh\beta L - \sin\beta L \\ \sinh\beta L - \sin\beta L & -\sin\beta L - \sinh\beta L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

matrisi elde edilir. Aşık olmayan çözüm için katsayılar matrisinin determinanı sifira eşitlenmelidir. Eğer katsayılar matrisinin determinanı sifira eşitlenirse,

$$\sin\beta L \sinh\beta L = 0 \quad (4.17)$$

eşitliği bulunur. Denklem (4.17)' den görüldüğü üzere $\sinh\beta L$, $\beta=0$ olduğu durumlar hariç hiçbir durumda sifira eşit olmaz. $\beta=0$ olması durumunu ise dikkate almaya gerek yoktur. Çünkü bu durumda denklem (4.10)' a göre $\omega=0$ olmaktadır. Bu yüzden iki ucu basit mesnetli EB kirişi için frekans denklemi izleyen şekilde ifade edilebilir.

$$\sin\beta L = 0 \quad (4.18)$$

Elde edilen frekans denkleminin kökleri,

$$\beta_n L = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.19)$$

olarak bulunur. Böylece titreşimin doğal frekans değerleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\omega_n = (\beta_n L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.20)$$

4.2.2. Her İki Ucu Ankastre EB Kirişi

Her iki ucu ankastre bağlı EB kirişinde yer değiştirme ve yer değiştirme eğimi sifira eşittir. Böylece sınır koşulları aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$W(0) = 0 \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x}(0) = 0 \quad (4.22)$$

$$W(L) = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x}(L) = 0 \quad (4.24)$$

(4.21) ve (4.22)' de verilen sınır koşulları (4.9)'daki konum fonksiyonunda yerine yazılırsa,

$$C_1 = C_3 = 0 \quad (4.25)$$

olarak bulunur. Bununla birlikte (4.23) ve (4.24)' deki sınır şartları da kullanılarak aşağıda gösterilen matris elde edilmektedir.

$$\begin{bmatrix} \cos\beta L - \cosh\beta L & \sin\beta L - \sinh\beta L \\ -\sin\beta L - \sinh\beta L & \cos\beta L - \cosh\beta L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Bu matriste $C_2 = C_4 = 0$ olması durumunda aşıkâr çözüm ortaya çıkmaktadır. Aşıkâr olmayan çözüm için katsayılar matrisinin determinanı sifira eşitlenmelidir. Eğer katsayılar matrisinin determinanı sifira eşitlenirse,

$$\cos\beta L \cosh\beta L - 1 = 0 \quad (4.27)$$

olacak şekilde frekans denklemi bulunabilir. Elde edilen frekans denkleminin kökleri,

$$\beta_n L = \frac{(2n + 1)\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.28)$$

şeklinde ifade edilebilir. Böylece titreşimin doğal frekans değerleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\omega_n = (\beta_n L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} = \frac{(2n + 1)^2 \pi^2}{4} \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.29)$$

4.2.3. Her İki Ucu Serbest EB Kirişi

Serbest uçlu kirişlerde eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri sifira eşittir.

Bu yüzden serbest uçlu kirişler için sınır koşulları aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(0) = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(0) = 0 \quad (4.30)$$

$$EI \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}(0) = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}(0) = 0 \quad (4.31)$$

$$EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(L) = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(L) = 0 \quad (4.32)$$

$$EI \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}(L) = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}(L) = 0 \quad (4.33)$$

Sınır koşullarını veren diferansiyel denklemler aşağıdaki gibi yerine yazılabilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x) = \beta^2 [C_1(-\cos\beta x + \cosh\beta x) + C_2(-\cos\beta x - \cosh\beta x) \\ + C_3(-\sin\beta x + \sinh\beta x) + C_4(-\sin\beta x - \sinh\beta x)] \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}(x) = \beta^3 [C_1(\sin\beta x + \sinh\beta x) + C_2(\sin\beta x - \sinh\beta x) \\ + C_3(-\cos\beta x + \cosh\beta x) + C_4(-\cos\beta x - \cosh\beta x)] \end{aligned} \quad (4.35)$$

İlk iki sınır şartı (4.30) ve (4.31) konum denkleminde yerine yazılırsa,

$$C_2 = C_4 = 0 \quad (4.36)$$

olarak iki keyfi sabitin değeri bulunur. Geriye kalan iki sınır şartı (4.32) ve (4.33) da konum denkleminde uygulanırsa aşağıdaki matris elde edilir.

$$\begin{bmatrix} -\cos\beta L + \cosh\beta L & -\sin\beta L + \sinh\beta L \\ \sin\beta L + \sinh\beta L & -\cos\beta L + \cosh\beta L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Aşık olmaya çözümler için verilen katsayılar matrisinin determinanı sıfıra eşitlenerek her iki ucu serbest EB kirişi için frekans denklemleri izleyen şekilde elde edilmektedir.

$$\cos\beta L \cosh\beta L - 1 = 0 \quad (4.38)$$

Görüldüğü gibi iki ucu serbest kiriş ile iki ucu ankastre bağlı EB kiriş modelinde aynı frekans denklemleri elde edilmektedir. Buradaki ana fark her iki ucu serbest EB kirişinde $\beta L = 0$ için katı cisim modu görülür. Buna bağlı olarak titreşimin doğal frekans değerleri aşağıdaki gibi genelleştirilebilir.

$$\omega_n = (\beta_n L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} = \frac{(2n-3)^2 \pi^2}{4} \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.39)$$

4.2.4. Bir Ucu Ankastre Diğer Ucu Serbest EB Kirişi

Bir ucu ankastre ($x=0$), diğer ucu serbest ($x=L$) kiriş modelinde, $x=0$ noktasında yer değiştirme ve onun eğimi sıfır, $x=L$ noktasında ise eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri sıfır olmak zorundadır. Böylece sınır koşulları aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$W(0) = 0 \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x}(0) = 0 \quad (4.41)$$

$$EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(L) = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(L) = 0 \quad (4.42)$$

$$EI \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}(L) = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}(L) = 0 \quad (4.43)$$

(4.40) ve (4.41)'deki iki sınır koşulu kullanılarak iki keyfi sabitin değeri

$$C_1 = C_3 = 0 \quad (4.44)$$

olacak şekilde bulunur. (4.42) ve (4.43)' deki diğer sınır koşullarının uygulanması durumunda aşağıdaki matris elde edilebilir.

$$\begin{bmatrix} \cos\beta L + \cosh\beta L & \sin\beta L + \sinh\beta L \\ -\sin\beta L + \sinh\beta L & \cos\beta L + \cosh\beta L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Aşık olmayaın çözüm için bulunan katsayılar matrisinin determinanı sıfıra eşitlenir ve frekans denkleminin aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\cos\beta L \cosh\beta L + 1 = 0 \quad (4.46)$$

Elde edilen frekans denkleminin kökleri,

$$\beta_n L = \frac{(2n - 1)\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.47)$$

olacak şekilde bulunur ve titreşimin doğal frekans değeri de aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\omega_n = (\beta_n L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}} = \frac{(2n - 1)^2 \pi^2}{4} \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.48)$$

4.3. Timoshenko Kiriş Teorisinde Serbest Titreşim Analizi

Üniform izotropik bir Timoshenko kirişinin hareket denkleminin aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} \rho^* A^* \frac{\partial^2 W^*(x^*, t^*)}{\partial t^{*2}} - \kappa G^* A^* \left(\frac{\partial^2 W^*(x^*, t^*)}{\partial x^{*2}} - \frac{\partial \varphi(x^*, t^*)}{\partial x^*} \right) &= 0, \\ \rho^* I^* \frac{\partial^2 \varphi(x^*, t^*)}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 \varphi(x^*, t^*)}{\partial x^{*2}} - \kappa G^* A^* \left(\frac{\partial W^*(x^*, t^*)}{\partial x^*} - \varphi(x^*, t^*) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Bu denkleminde yer alan terimler aşağıda gösterildiği şekilde boyutsuzlaştırılmıştır.

Kiriş boyunca ifade edilen koordinat eksenini $x = x^*/L^*$ şeklinde boyutsuzlaştırılmıştır.

Kirişin kesit alanı, kiriş malzemesinin yoğunluğu, kayma modülü, alan atalet momenti ve yer değiştirme ifadeleri de sırasıyla, $A = A^*/L^{*2}$, $\rho = [\rho^*(L^{*6}\omega^{*2})/(E^*I^*)]$, $G = G^*L^{*4}/(E^*I^*)$, $I = I^*/L^{*4}$, $W = W^*/L^*$ olacak şekilde boyutsuzlaştırılmaktadır. Burada “*” sembolü boyutlu parametreleri göstermektedir.

Yukarıda verilen hareket denkleminin izleyen şekilde ayrıştırılabilir.

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \left(\rho I + \frac{\rho}{\kappa G} \right) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{\kappa G} \frac{\partial^4 W}{\partial t^4} = 0,$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - \left(\rho I + \frac{\rho}{\kappa G} \right) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{\kappa G} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} = 0. \quad (4.50)$$

Burada W ve φ 'nin x ve t 'nin bir fonksiyonu olduğu açık bir şekilde görülmektedir. $W(x,t)$ ve $\varphi(x,t)$ aynı diferansiyel denklem formunda elde edilmektedir. Böylece yer değiştirme $W(x,t)$ ve dönme açısı $\varphi(x,t)$ terimleri için aynı formda davranış gösterirler yorumu yapılabilir. Bundan sonraki adımda denklemler değişkenlerine ayırma metodu ile çözülebilir. Zamana bağlı olan diferansiyel denklem, EB kiriş modelinde elde edilen diferansiyel denklemle (8.6) aynı formda elde edilmektedir. Konum denklemi ise matris formatında,

$$\begin{bmatrix} \kappa GA & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W''(x) \\ \varphi''(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\kappa GA \\ \kappa GA & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W'(x) \\ \varphi'(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho A \omega^2 & 0 \\ 0 & I \omega^2 - \kappa GA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(x) \\ \varphi(x) \end{bmatrix} = 0 \quad (4.51)$$

olacak şekilde yazılabilir. Bu eşitlikte “ ’ = $\frac{\partial}{\partial x}$ ” konuma göre türevi göstermektedir. (4.51) denklemi çözülrse, öz değerleri veren karakteristik denklem izleyen şekilde bulunabilir.

$$r^4 + \left(\rho I + \frac{\rho}{\kappa G} \right) \omega^2 r^2 - \rho A \omega^2 + \frac{\rho^2 I}{\kappa G} \omega^4 = 0 \quad (4.52)$$

$$r = \pm \sqrt{- \left(I + \frac{1}{\kappa G} \right) \frac{\rho \omega^2}{2} \pm \sqrt{\left(I - \frac{1}{\kappa G} \right)^2 \frac{\rho^2 \omega^4}{4} + \rho A \omega^2}} \quad (4.53)$$

Böylece öz değerler gerçek ve imajiner kök verecek şekilde aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{- \left(I + \frac{1}{\kappa G} \right) \frac{\rho \omega^2}{2} - \sqrt{\left(I - \frac{1}{\kappa G} \right)^2 \frac{\rho^2 \omega^4}{4} + \rho A \omega^2}} \quad (4.54)$$

(4.54)' deki denklemin kökleri sadece imajiner kök verirken,

$$r_{3,4} = \pm \sqrt{- \left(I + \frac{1}{\kappa G} \right) \frac{\rho \omega^2}{2} + \sqrt{\left(I - \frac{1}{\kappa G} \right)^2 \frac{\rho^2 \omega^4}{4} + \rho A \omega^2}} \quad (4.55)$$

denklem (4.55) doğal frekansın (ω) değerine bağlı olarak ya gerçek ya da imajiner kök vermektedir. Frekans değeri $\sqrt{\kappa GA / \rho I}$ ifadesinden küçük ise gerçek kökler, frekans değeri $\sqrt{\kappa GA / \rho I}$ ifadesinden büyük ise imajiner kökler ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle elde edilen çözümde her iki durum da dikkate alınmalıdır. Burada $\sqrt{\kappa GA / \rho I}$ ifadesi Timoshenko kirişlerinde kritik frekans değerini (ω_k) göstermektedir. Bir Timoshenko

kiriş modelinde doğal frekans değeri, kritik frekans değerinden küçük olduğu durumlarda ($\omega < \omega_k$),

$$\begin{bmatrix} W(x) \\ \varphi(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} \sin ax + \begin{bmatrix} C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} \cos ax + \begin{bmatrix} C_3 \\ D_3 \end{bmatrix} \sinh bx + \begin{bmatrix} C_4 \\ D_4 \end{bmatrix} \cosh bx \quad (4.56)$$

olacak şekilde trigonometrik ve hiperbolik terimler içeren konuma bağlı çözüm yazılabilir. Burada a ve b terimleri aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\left(I + \frac{1}{\kappa G}\right) \frac{\rho \omega^2}{2} + \sqrt{\left(I - \frac{1}{\kappa G}\right)^2 \frac{\rho^2 \omega^4}{4} + \rho A \omega^2}}, \\ b &= \sqrt{-\left(I + \frac{1}{\kappa G}\right) \frac{\rho \omega^2}{2} + \sqrt{\left(I - \frac{1}{\kappa G}\right)^2 \frac{\rho^2 \omega^4}{4} + \rho A \omega^2}}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

C ve D katsayıları arasındaki ilişki ise izleyen şekilde ifade edilmektedir.

$$\begin{aligned} D_1 &= -\frac{\kappa G A a^2 - \rho A \omega^2}{\kappa G A a} C_2, & D_2 &= \frac{\kappa G A a^2 - \rho A \omega^2}{\kappa G A a} C_1, \\ D_3 &= \frac{\kappa G A b^2 + \rho A \omega^2}{\kappa G A b} C_4, & D_4 &= \frac{\kappa G A b^2 + \rho A \omega^2}{\kappa G A b} C_3. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Doğal frekans değeri, kritik frekans değerinden büyük olduğu durumlarda ise ($\omega > \omega_k$),

$$\begin{bmatrix} W(x) \\ \varphi(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \check{C}_1 \\ \check{D}_1 \end{bmatrix} \sin ax + \begin{bmatrix} \check{C}_2 \\ \check{D}_2 \end{bmatrix} \cos ax + \begin{bmatrix} \check{C}_3 \\ \check{D}_3 \end{bmatrix} \sin \check{b}x + \begin{bmatrix} \check{C}_4 \\ \check{D}_4 \end{bmatrix} \cos \check{b}x \quad (4.59)$$

olacak şekilde sadece trigonometrik terimler içeren çözüm bulunur.

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\left(I + \frac{1}{\kappa G}\right) \frac{\rho \omega^2}{2} + \sqrt{\left(I - \frac{1}{\kappa G}\right)^2 \frac{\rho^2 \omega^4}{4} + \rho A \omega^2}}, \\ \check{b} &= \sqrt{\left(I + \frac{1}{\kappa G}\right) \frac{\rho \omega^2}{2} - \sqrt{\left(I - \frac{1}{\kappa G}\right)^2 \frac{\rho^2 \omega^4}{4} + \rho A \omega^2}}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} \check{D}_1 &= -\frac{\kappa G A a^2 - \rho A \omega^2}{\kappa G A a} \check{C}_2, & \check{D}_2 &= \frac{\kappa G A a^2 - \rho A \omega^2}{\kappa G A a} \check{C}_1, \\ \check{D}_3 &= -\frac{\kappa G A \check{b}^2 - \rho A \omega^2}{\kappa G A \check{b}} \check{C}_4, & \check{D}_4 &= \frac{\kappa G A \check{b}^2 - \rho A \omega^2}{\kappa G A \check{b}} \check{C}_3. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Burada b ile \check{b} arasındaki ilişkinin $b = i\check{b}$ olduğuna dikkat edilmelidir. Şimdi frekans ile dalga sayısı arasındaki ilişkiyi inceleyecek olursak, daha önce bulduğumuz kritik frekans değerini aşağıda gösterilen formda tekrar yazabiliriz.

$$\omega_k = \sqrt{\frac{\kappa GA}{\rho I}} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\kappa G}{\rho}} \quad (4.62)$$

Burada r , boyutsuz atalet yarıçapı veya narinlik oranının (s) tersidir. Atalet yarıçapının değeri narinlik oranına (s) bağlı olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$r = \sqrt{\frac{I^*}{A^* L^*}} = \frac{1}{s} \quad (4.63)$$

Denklem (4.62) alınarak, denklem (4.57) ve (4.60) da yerine yazılırsa, boyutsuz kritik dalga sayıları izleyen şekilde bulunur.

$$a_k = \frac{1}{k} \sqrt{(\kappa GI + 1)}, \quad b_k = \check{b}_k = 0. \quad (4.64)$$

Düzeltilme faktörü (κ) nün Poisson oranına bağlı olarak değiştiği gösterilmişti. Poisson oranının da aynı malzemelerde çok fazla değişmediği göz önüne alınırsa, kritik dalga sayısının daha çok narinlik oranı ($s=I/r$) ile değiştiğini söylemek mümkündür. Aynı zamanda $\omega < \omega_k$ durumunun $a < a_k$ durumuna karşılık geldiğini söylemek de mümkündür. Bu durum denklem (4.57) veya (4.60) da a' nın ω' ya göre türetilmesiyle doğrulanabilir.

Timoshenko girişinde a ve b olacak şekilde iki adet dalga sayısı bulunmuştu. Dolayısıyla frekans denklemi de hem a' ya hem de b' ye bağlı olacak şekilde iki adet dalga sayısı içerecektir. Frekans denkleminin sonucunu bulmak için ise bir dalga sayısı diğeri cinsinden yazılmalı ve böylece frekans denklemi de tek bir dalga sayısının fonksiyonu olacak şekilde ifade edilmelidir. Not olarak, b hiperbolik fonksiyonun dalga sayısıdır ve fiziksel bir anlama sahip değildir. Çünkü zaten frekans denkleminde trigonometrik fonksiyona sahip a dalga sayısı mevcuttur. Yine de b dalga sayısı, a dalga sayısı cinsinden yazılarak frekans denklemindeki etkisi hesaba katılacaktır. Buna göre denklem (4.57) ve (4.60) ile verilen dağılım ilişkisi aşağıdaki formda yazılabilir.

$$B_1 = \frac{\rho I \omega^2}{2}, \quad B_2 = \frac{\rho \omega^2}{2\kappa G} = B_1 \Omega^2, \quad B_3 = \rho A \omega^2 \quad (4.65)$$

$$a = \sqrt{(B_1 + B_2) + \sqrt{(B_1 - B_2)^2 + B_3}},$$

$$b = \sqrt{-(B_1 + B_2) + \sqrt{(B_1 - B_2)^2 + B_3}} = i\check{b}. \quad (4.66)$$

Burada Ω bir sabit olmak üzere aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\Omega^2 = \frac{2(1 + \nu)}{\kappa} \quad (4.67)$$

Denklem (4.66)' da verilen B_1, B_2, B_3 katsayıları,

$$B_1 = \frac{a^2 - b^2}{2(1 + \Omega^2)}, \quad B_2 = \frac{\Omega^2(a^2 - b^2)}{2(1 + \Omega^2)},$$

$$B_3 = \frac{1}{4} \left\{ (a^2 + b^2)^2 - \frac{(1 - \Omega^2)^2}{(1 + \Omega^2)^2} (a^2 - b^2)^2 \right\}. \quad (4.68)$$

olarak bulunur. Denklem (4.65)' den faydalanarak B_3 ün B_1 e oranı bulunup, bu oran (4.68)' de kullanılırsa dalga sayıları arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki denklem bulunabilir.

$$s^2 = \frac{(\Omega^2 b^2 + a^2)(\Omega^2 a^2 + b^2)}{(a^2 - b^2)(1 + \Omega^2)} \quad (4.69)$$

Denklem (4.69)' da görüldüğü gibi dalga sayıları narinlik oranına bağlı olarak değişmektedir. Benzer şekilde, a ve \check{b} dalga sayıları da denklem (4.69)' da b yerine $i\check{b}$ yazılması sonucunda aşağıdaki gibi elde edilir.

$$s^2 = \frac{(-\Omega^2 \check{b}^2 + a^2)(\Omega^2 a^2 - \check{b}^2)}{(a^2 + \check{b}^2)(1 + \Omega^2)} \quad (4.70)$$

(4.65) ve (4.68)' deki eşitlikler kullanılarak konum denkleminin çözümünde yer alan katsayılar dalga sayısına bağlı olacak şekilde aşağıdaki gibi elde edilir.

$$D_1 = -\frac{\Omega^2 b^2 + a^2}{(1 + \Omega^2)a} C_2, \quad D_2 = \frac{\Omega^2 b^2 + a^2}{(1 + \Omega^2)a} C_1,$$

$$D_3 = -\frac{\Omega^2 a^2 + b^2}{(1 + \Omega^2)b} C_4, \quad D_4 = \frac{\Omega^2 a^2 + b^2}{(1 + \Omega^2)b} C_3. \quad (4.71)$$

Böylece $\omega < \omega_k$ durumu için dalga sayıları cinsinden çözüm bulunmaktadır. Benzer şekilde yine (4.65) ve (4.68) eşitlikleri kullanılarak ve b yerine $i\check{b}$ yazılarak \check{C}_i ve \check{D}_i sabit katsayıları da izleyen şekilde ifade edilmektedir.

$$\check{D}_1 = -\frac{a^2 - \Omega^2 \check{b}^2}{(1 + \Omega^2)a} \check{C}_2, \quad \check{D}_2 = \frac{a^2 - \Omega^2 \check{b}^2}{(1 + \Omega^2)a} \check{C}_1,$$

$$\check{D}_3 = -\frac{\check{b}^2 - \Omega^2 a^2}{(1 + \Omega^2)\check{b}} \check{C}_4, \quad \check{D}_4 = \frac{\check{b}^2 - \Omega^2 a^2}{(1 + \Omega^2)\check{b}} \check{C}_3. \quad (4.72)$$

Her sınır koşulu için bir tane frekans denklemi elde edilmektedir. Bir Timoshenko kirişinde verilen üç farklı uç koşullarındaki sınır koşulları aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.

$$\begin{aligned}
 (B) : \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad W = 0, \\
 (A) : \varphi = 0, \quad W = 0, \\
 (S) : \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \kappa GA \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \varphi \right) = 0.
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

Bu sınır koşullarındaki frekans denklemleri $a < a_k$ ve $a > a_k$ durumları için ayrı ayrı elde edilmektedir. $a > a_k$ durumunda, frekans denkleminde b yerine $i\check{b}$ ifadesi gelmektedir. Her iki durumda elde edilen frekans denklemleri Ω , a , b , veya \check{b} ye bağlıdır. Aynı zamanda (4.69) ve (4.70) denklemleri kullanılarak frekans denklemleri sadece a veya b dalga sayısına bağlı olarak da ifade edilebilir. Boyutsuz dalga sayısının kritik dalga sayısından küçük veya büyük olduğu durumlar için verilen sınır koşullarında frekans denklemleri aşağıdaki tablolarda gösterilmektedir.

Tablo 4.1. Timoshenko kirişinin dört farklı sınır koşulu için frekans denklemleri ($a < a_k$)

$$(B - B) \quad \sin \operatorname{asinh} b = 0$$

$$\begin{aligned}
 (A - A) \quad & \frac{(a^2 - b^2)(\Omega^2 a^2 + \Omega^2 b^2 + \Omega^2 ab - ab)(\Omega^2 a^2 + \Omega^2 b^2 - \Omega^2 ab + ab)}{2ab(b^2 + \Omega^2 a^2)(a^2 + \Omega^2 b^2)} \sin \operatorname{asinh} b \\
 & - \cos \operatorname{acosh} b + 1 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (A - S) \quad & (a^2 - b^2) \sin \operatorname{asinh} b - ab \frac{(a^4 + \Omega^4 b^4 + 4\Omega^2 a^2 b^2 + b^4 \Omega^4 + b^4)}{(b^2 + \Omega^2 a^2)(a^2 + \Omega^2 b^2)} \cos \operatorname{acosh} b \\
 & - 2ab = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (S - S) \quad & \frac{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2 + \Omega^2 ab - ab)(a^2 + b^2 - \Omega^2 ab + ab)}{2ab(b^2 + \Omega^2 a^2)(a^2 + \Omega^2 b^2)} \sin \operatorname{asinh} b \\
 & - \cos \operatorname{acosh} b + 1 = 0
 \end{aligned}$$

Tablo 4.2. Timoshenko kirişinin dört farklı sınır koşulu için frekans denklemleri ($a > a_k$)

$$(B - B) \quad \sin a \sin \check{b} = 0$$

$$(A - A) \quad \frac{(a^2 + \check{b}^2) [(\Omega^2 a^2 - \Omega^2 \check{b}^2)^2 + (\Omega^2 a \check{b} - a \check{b})^2]}{2a \check{b} (-\check{b}^2 + \Omega^2 a^2)(a^2 - \Omega^2 \check{b}^2)} \sin a \sin \check{b} - \cos a \cos \check{b} + 1 = 0$$

$$(A - S) \quad (a^2 + \check{b}^2) \sin a \sin \check{b} - a \check{b} \frac{(a^4 + \Omega^4 a^4 - 4\Omega^2 a^2 \check{b}^2 + \check{b}^4 \Omega^4 + \check{b}^4)}{(-\check{b}^2 + \Omega^2 a^2)(a^2 - \Omega^2 \check{b}^2)} \cos a \cos \check{b} - 2a \check{b} = 0$$

$$(S - S) \quad \frac{(a^2 + \check{b}^2) [(a^2 - \check{b}^2)^2 + (\Omega^2 a \check{b} - a \check{b})^2]}{2a \check{b} (-\check{b}^2 + \Omega^2 a^2)(a^2 - \Omega^2 \check{b}^2)} \sin a \sin \check{b} - \cos a \cos \check{b} + 1 = 0$$

4.4. Reddy Kiriş Teorisinde Serbest Titreşim Analizi

Farklı şekil fonksiyonlarının seçilmesiyle, kayma deformasyonlu kiriş teorileri elde edilmektedir. Şekil fonksiyonunun $f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right)$ seçilmesi sonucunda, kayma deformasyonlu kiriş teorilerinden biri olan Reddy kiriş teorisinin hareket denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$D_{11}^c w_{,xxxx} - D_{11}^a u_{1,xxx} = -(\rho_0 w - \rho_2 w_{,xx} + \rho_{11} u_{1,x})_{,tt} ,$$

$$D_{11}^a w_{,xxx} - D_{11}^{aa} u_{1,xx} + A_{55}^a u_1 = (\rho_{11} w_{,x} - \rho_{02} u_1)_{,tt} . \quad (4.74)$$

Buradaki atalet terimleri (ρ_{ij}) , denklem (2.32)' de tanımlanmaktadır. Rijitlik değerleri ise aşağıdaki şekilde belirtilmektedir.

$$(D_{11}^c, D_{11}^a, D_{11}^{aa}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(z^2, zf(z), f^2(z)) dz \quad (4.75)$$

$$A_{55}^a = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{55} [f'(z)]^2 dz \quad (4.76)$$

$$\sigma_x = Q_{11} \varepsilon_x , \quad \tau_{xz} = Q_{55} \gamma_{xz} \quad (4.77)$$

Hareket denklemi, serbest harmonik titreşim varsayımı yapılarak boyutsuz bir şekilde aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\bar{w}^{(IV)} - \frac{D_{11}^a}{D_{11}^c} \bar{u}''' = \bar{\omega}^2 \left(\bar{w} - \frac{\rho_2}{\rho_0 L^2} \bar{w}'' + \frac{\rho_{11}}{\rho_0 L^2} \bar{u}' \right),$$

$$\frac{D_{11}^a}{D_{11}^c} \bar{w}''' - \frac{D_{11}^{aa}}{D_{11}^c} \bar{u}'' + \frac{A_{55}^a L^2}{D_{11}^c} \bar{u} = -\bar{\omega}^2 \left(\frac{\rho_{11}}{\rho_0 L^2} \bar{w}' - \frac{\rho_{02}}{\rho_0 L^2} \bar{u} \right). \quad (4.78)$$

Parametreleri boyutsuzlaştırma işlemi izleyen şekilde gösterilmiştir.

$$w/L = \bar{w}(\xi) \cos(\omega t), \quad u_1 = \bar{u}(\xi) \cos(\omega t) \quad (0 \leq \xi = x/L \leq 1). \quad (4.79)$$

$$\bar{\omega}^2 = \omega^2 \frac{\rho_0 L^4}{D_{11}^c} \quad (4.80)$$

Aynı zamanda denklem (4.78), yer değiştirme bileşenleri cinsinden izleyen formdaki gibi ayrıklaştırılarak yazılabilir.

$$\left[\left(\frac{D_{11}^a}{D_{11}^c} \right)^2 - \frac{D_{11}^{aa}}{D_{11}^c} \right] \bar{w}^{(VI)} + \left[\left(2 \frac{D_{11}^a}{D_{11}^c} \frac{\rho_{11}}{\rho_0 L^2} - \frac{D_{11}^{aa}}{D_{11}^c} \frac{\rho_2}{\rho_0 L^2} - \frac{\rho_{02}}{\rho_0 L^2} \right) \bar{\omega}^2 + \frac{A_{55}^a L^2}{D_{11}^c} \right] \bar{w}^{(IV)}$$

$$+ \left[\left(\frac{A_{55}^a L^2}{D_{11}^c} \frac{\rho_2}{\rho_0 L^2} + \frac{D_{11}^{aa}}{D_{11}^c} \right) \bar{\omega}^2 + \left(\left(\frac{\rho_{11}}{\rho_0 L^2} \right)^2 - \frac{\rho_2 \rho_{02}}{\rho_0^2 L^4} \right) \bar{\omega}^4 \right] \bar{w}''$$

$$+ \left[\frac{\rho_{02}}{\rho_0 L^2} \bar{\omega}^4 - \frac{A_{55}^a L^2}{D_{11}^c} \bar{\omega}^2 \right] \bar{w} = 0,$$

$$\left[\left(\frac{D_{11}^a}{D_{11}^c} \right)^2 - \frac{D_{11}^{aa}}{D_{11}^c} \right] \bar{u}^{(VI)} + \left[\left(2 \frac{D_{11}^a}{D_{11}^c} \frac{\rho_{11}}{\rho_0 L^2} - \frac{D_{11}^{aa}}{D_{11}^c} \frac{\rho_2}{\rho_0 L^2} - \frac{\rho_{02}}{\rho_0 L^2} \right) \bar{\omega}^2 + \frac{A_{55}^a L^2}{D_{11}^c} \right] \bar{u}^{(IV)}$$

$$+ \left[\left(\frac{A_{55}^a L^2}{D_{11}^c} \frac{\rho_2}{\rho_0 L^2} + \frac{D_{11}^{aa}}{D_{11}^c} \right) \bar{\omega}^2 + \left(\left(\frac{\rho_{11}}{\rho_0 L^2} \right)^2 - \frac{\rho_2 \rho_{02}}{\rho_0^2 L^4} \right) \bar{\omega}^4 \right] \bar{u}''$$

$$+ \left[\frac{\rho_{02}}{\rho_0 L^2} \bar{\omega}^4 - \frac{A_{55}^a L^2}{D_{11}^c} \bar{\omega}^2 \right] \bar{u} = 0. \quad (4.81)$$

(2.23)' deki şekil fonksiyonu (2.32), (4.75) ve (4.76) eşitliklerinde yerine yazılırsa, tam kayma titreşim frekansı parametresi homojen bir Reddy kiriş modeli için izleyen şekilde bulunur.

$$\eta_R = 12 \left(\frac{L}{h} \right)^2 \sqrt{\frac{14 Q_{55}}{17 Q_{11}}} \quad (4.82)$$

(2.32), (4.75) ve (4.76) denklemleri arasında sabit yoğunluklu bir kiriş malzemesi için aşağıdaki durum yazılabilir.

$$\frac{D_{11}^a}{D_{11}^c} = \frac{\rho_{11}}{\rho_2} = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} z f(z) dz}{\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz}, \quad \frac{D_{11}^{aa}}{D_{11}^c} = \frac{\rho_{02}}{\rho_2} = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} [f(z)]^2 dz}{\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz}. \quad (4.83)$$

Böylece yukarıdaki eşitlikler kullanılarak, (4.81) ifadesi daha da basit bir şekilde,

$$\begin{aligned} \bar{w}^{(VI)} + (2Y^2 + A_1)\bar{w}^{(IV)} + [Y^4 + (A_1 + A_2)Y^2]\bar{w}'' + (A_2Y^4 - gA_1Y^2)\bar{w} &= 0, \\ \bar{u}^{(VI)} + (2Y^2 + A_1)\bar{u}^{(IV)} + [Y^4 + (A_1 + A_2)Y^2]\bar{u}'' + (A_2Y^4 - gA_1Y^2)\bar{u} &= 0. \end{aligned} \quad (4.84)$$

yazılır. Bu denklemdeki ifadeler aşağıda tanımlanmaktadır.

$$A_1 = \frac{A_{55}L^2}{YD_{11}^c}, \quad A_2 = \frac{\rho_0\rho_{02}L^2}{Y\rho_2^2}, \quad Y = \frac{\rho_{11}^2 - \rho_2\rho_{02}}{\rho_2^2}, \quad g = \frac{\rho_0L^2}{\rho_2}, \quad Y^2 = \frac{\rho_2\bar{\omega}^2}{\rho_0L^2}. \quad (4.85)$$

Şekil fonksiyonu $f(z) = 0$ veya $f(z) = z$ seçilirse, $Y = 0$ olur ve bu durum A_1 ve A_2 'nin tekil olmasını sağlar. Bu koşulda denklem (4.84), daha basit bir hal alarak 4.mertebeden diferansiyel denklem haline gelir. $Y \neq 0$ durumunda ise denklem (4.84)'de görüldüğü gibi 6.mertebeden diferansiyel hareket denklemi elde edilmektedir. Bu bilgiler ışığında, şekil fonksiyonunun Reddy kiriş teorisinde olduğu gibi non-lineer seçilmesi durumunda Y değeri negatif olur ve buna bağlı olarak da A_1 ve A_2 ifadeleri de negatif değer alır. Bu durumda, (4.84)'de ortaya çıkan üç çift kökün karesi reel kök olarak ortaya çıkmaktadır. Bu ifade yardımcı denklemle şu şekilde gösterilebilir.

$$\begin{aligned} \lambda_i^2 &= M_i + v \quad (i = 1, 2, 3), \\ v &= -\frac{1}{3}(2Y^2 + A_1). \end{aligned} \quad (4.86)$$

Böylece denklem (4.84), yardımcı diferansiyel denklem vasıtasıyla,

$$\lambda^6 = (2Y^2 + A_1)\lambda^4 + (Y^2 + A_1 + A_2)Y^2\lambda^2 + (A_2Y^2 - gA_1)Y^2 = 0 \quad (4.87)$$

olacak şekilde tanımlanabilir. Aynı zamanda bu denkleme izleyen dönüşüm de uygulanabilir.

$$\lambda^2 = M - \frac{1}{3}(2Y^2 + A_1) \quad (4.88)$$

Bu dönüşüm vasıtasıyla (4.87) eşitliği aşağıdaki halini alır.

$$\begin{aligned} M^3 + \frac{1}{3}[-(A_1 + Y^2)^2 + (A_1 + 3A_2)Y^2]M + \frac{2}{27}(A_1 + Y^2)^3 \\ - \frac{1}{27}[3A_1(A_1 + 3A_2 + 9g + 3Y^2) + (4Y^2 - 9A_2)Y^2]Y^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.89)$$

$A_1 < 0$ ve $A_2 < 0$ için, denklem (4.89)'daki M katsayısı negatif olmaktadır. Bu önemli sonuç kullanılarak, (4.89) eşitliği daha basit hale indirgenerek izleyen şekilde yazılabilir.

$$M^3 - \left(\frac{q^2 + f^2}{4}\right)M + \frac{f}{3\sqrt{3}} = 0 \quad (4.90)$$

Burada f ve r parametreleri izleyen şekilde ifade edilmektedir.

$$f = 3\sqrt{3} \left[\frac{2}{27}(A_1 + 2Y^2)^3 - \frac{1}{3}(A_1 + 2Y^2)(A_1 + A_2 + Y^2)Y^2 + (A_2Y^2 - gA_1)Y^2 \right],$$

$$q^2 = 4 \left[\frac{1}{3} (A_1 + 2Y^2)^2 - (A_1 + A_2 + Y^2) \right]^3 - f^2. \quad (4.91)$$

Eğer denklem (4.90) çözülürse ortaya çıkan üç reel kök aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} M_1 &= - \left[\frac{16(f^2 - q^2)}{27} \right]^{\frac{1}{6}} \cos \left[\frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{q}{r} \right) + \frac{\pi}{3} \right], \\ M_2 &= - \left[\frac{16(f^2 + q^2)}{27} \right]^{\frac{1}{6}} \cos \left[\frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{q}{r} \right) - \frac{\pi}{3} \right], \\ M_3 &= \left[\frac{16(f^2 + q^2)}{27} \right]^{\frac{1}{6}} \cos \left[\frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{q}{r} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Reddy kiriş teorisinde doğal frekansın büyüklüğüne göre aşağıda gösterilen eşitliği yazmak mümkündür.

$$\lambda_1^2 < 0, \quad \lambda_2^2 \begin{cases} > 0, & 0 \leq \bar{\omega} < \eta_R \\ < 0, & \bar{\omega} > \eta_R \end{cases} \quad \lambda_3^2 > 0. \quad (4.93)$$

Bu denklemde de görüldüğü gibi doğal frekans değerleri, tam kayma titreşim frekansı parametresinden (η_R) büyük veya küçük olduğu durumlarda farklı yolla hesaplanmaktadır. Bu nedenle denklem (4.87)' nin genel çözümü $0 \leq \bar{\omega} < \eta_R$ durumu için,

$$\begin{aligned} \bar{w} &= B_1 \cos(\lambda_1 \xi) + B_2 \sin(\lambda_1 \xi) + B_3 \cosh(\lambda_2 \xi) + B_4 \sinh(\lambda_2 \xi) \\ &\quad + B_5 \cosh(\lambda_3 \xi) + B_6 \sinh(\lambda_3 \xi), \\ \bar{u} &= R_1 B_2 \cos(\lambda_1 \xi) - R_1 B_1 \sin(\lambda_1 \xi) + R_2 B_4 \cosh(\lambda_2 \xi) + R_2 B_3 \sinh(\lambda_2 \xi) \\ &\quad + R_3 B_6 \cosh(\lambda_3 \xi) + R_3 B_5 \sinh(\lambda_3 \xi). \end{aligned} \quad (4.94)$$

ve $\bar{\omega} > \eta_R$ durumu için,

$$\begin{aligned} \bar{w} &= C_1 \cos(\lambda_1 \xi) + C_2 \sin(\lambda_1 \xi) + C_3 \cos(\lambda_4 \xi) + C_4 \sin(\lambda_4 \xi) \\ &\quad + C_5 \cosh(\lambda_3 \xi) + C_6 \sinh(\lambda_3 \xi), \\ \bar{u} &= R_1 C_2 \cos(\lambda_1 \xi) - R_1 C_1 \sin(\lambda_1 \xi) + R_4 C_4 \cos(\lambda_4 \xi) - R_4 C_3 \sin(\lambda_4 \xi) \\ &\quad + R_3 C_6 \cosh(\lambda_3 \xi) + R_3 C_5 \sinh(\lambda_3 \xi). \end{aligned} \quad (4.95)$$

olacak şekilde bulunmaktadır. Elde edilen genel çözümlerde $\lambda_4^2 = -\lambda_2^2$ dir. Aynı zamanda B_i ve C_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) keyfi sabitler olmak üzere,

$$R_i = \begin{cases} \frac{5(h^2 \lambda_i^2 \bar{\omega}^2 - 12\lambda_i^4 + 12\bar{\omega}^2)}{4\lambda_i(h^2 \bar{\omega}^2 - 12\lambda_i^2)} & i = 1, 4, \\ \frac{5(h^2 \lambda_i^2 \bar{\omega}^2 + 12\lambda_i^4 - 12\bar{\omega}^2)}{4\lambda_i(h^2 \bar{\omega}^2 + 12\lambda_i^2)} & i = 2, 3. \end{cases} \quad (4.96)$$

eşitliği görülmektedir. Denklem (4.94) ve (4.95)' e sınır koşullarının uygulanmasıyla ve aşikar olmayan çözüm için elde edilen katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşitlenmesiyle, istenen sınır koşulları için aranan doğal frekans denklemleri elde edilebilir. $\xi = 0$ veya $\xi = 1$ durumlarında kirişe uygulanan farklı sınır şartları aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.

$$1. \text{ Ankastre Uç (A) : } \quad \bar{w} = \bar{w}_{,\xi} = \bar{u} = 0.$$

$$2. \text{ Basit Destekli Uç (B) : } \quad \bar{w} = \bar{w}_{,\xi\xi} = \bar{u}_{,\xi} = 0.$$

$$3. \text{ Serbest Uç (S) : } \quad \bar{w}_{,\xi\xi\xi} - \frac{D_{11}^a}{D_{11}^c} \bar{u}_{,\xi\xi} + \bar{\omega}^2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_0 L^2} \bar{w}_{,\xi} - \frac{\rho_{11}}{\rho_0 L^2} \bar{u} \right) = \bar{w}_{,\xi\xi} = \bar{u}_{,\xi} = 0. \quad (4.97)$$

Yukarıda gösterilen sınır koşullarının farklı kombinasyonlarının kullanılmasıyla bir Reddy kiriş modeline ait frekans denklemleri aşağıdaki şekilde elde edilmektedir.

$0 \leq \bar{\omega} < \eta_R$ için frekans denklemleri:

A) Her İki Ucu Basit Destekli Kiriş (B-B):

$$\sin\lambda_1 = 0 \quad (4.98)$$

B) Her İki Ucu Ankastre Kiriş (A-A):

$$P_2 P_3 \sin\lambda_1 (1 - \cos\lambda_2 \cosh\lambda_3) + P_1 P_3 \sinh\lambda_2 (1 - \cos\lambda_1 \cosh\lambda_3) - P_1 P_2 \sinh\lambda_3 (1 - \cos\lambda_1 \cosh\lambda_2) + \frac{1}{2} (-P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) \sin\lambda_1 \sinh\lambda_2 \sinh\lambda_3 = 0 \quad (4.99)$$

burada P_1, P_2, P_3 değerleri sırasıyla,

$$\begin{aligned} P_1 &= \lambda_1 (\lambda_2^2 - \lambda_3^2) (h^2 \bar{\omega}^2 - 12\lambda_1^2) (h^2 \bar{\omega}^2 + 12\lambda_2^2 + 12\lambda_3^2), \\ P_2 &= \lambda_2 (\lambda_1^2 + \lambda_3^2) (h^2 \bar{\omega}^2 + 12\lambda_2^2) (h^2 \bar{\omega}^2 - 12\lambda_1^2 + 12\lambda_3^2), \\ P_3 &= \lambda_3 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) (h^2 \bar{\omega}^2 + 12\lambda_3^2) (h^2 \bar{\omega}^2 - 12\lambda_1^2 + 12\lambda_2^2). \end{aligned} \quad (4.100)$$

eşittir.

C) Her İki Ucu Serbest Kiriş (S-S):

$$\begin{aligned} & \frac{P_2 P_3}{\lambda_2^2 \lambda_3^2} \sin\lambda_1 (1 - \cosh\lambda_2 \cosh\lambda_3) - \frac{P_1 P_3}{\lambda_1^2 \lambda_3^2} \sinh\lambda_2 (1 - \cos\lambda_1 \cosh\lambda_3) \\ & + \frac{P_1 P_2}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \sinh\lambda_3 (1 - \cos\lambda_1 \cosh\lambda_2) + \frac{1}{2} \left(-\frac{P_1^2}{\lambda_1^4} + \frac{P_2^2}{\lambda_2^4} + \frac{P_3^2}{\lambda_3^4} \right) \sin\lambda_1 \sinh\lambda_2 \sinh\lambda_3 = 0 \end{aligned} \quad (4.101)$$

D) Bir Ucu Ankastre Diğer Ucu Serbest Kiriş (A-S):

$$\begin{aligned} & \frac{P_2 P_3}{\lambda_2 \lambda_3} \cos \lambda_1 \left(1 + \frac{\lambda_2^2 + \lambda_3^2}{2 \lambda_2 \lambda_3} \sinh \lambda_2 \sinh \lambda_3 \right) + \frac{P_1 P_3}{\lambda_1 \lambda_3} \cosh \lambda_2 \left(1 - \frac{\lambda_1^2 - \lambda_3^2}{2 \lambda_1 \lambda_3} \sin \lambda_1 \sinh \lambda_3 \right) \\ & - \frac{P_1 P_2}{\lambda_1 \lambda_2} \cosh \lambda_3 \left(1 - \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{2 \lambda_1 \lambda_2} \sin \lambda_1 \sinh \lambda_2 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{P_1^2}{\lambda_1^2} + \frac{P_2^2}{\lambda_2^2} + \frac{P_3^2}{\lambda_3^2} \right) \cos \lambda_1 \cosh \lambda_2 \cosh \lambda_3 = 0 \quad (4.102) \end{aligned}$$

$\bar{\omega} > \eta_R$ için frekans denklemleri:

E) Her İki Ucu Basit Destekli Kiriş (B-B):

$$\sin \lambda_1 \sin \lambda_4 = 0 \quad (4.103)$$

F) Her İki Ucu Ankastre Kiriş (A-A):

$$\begin{aligned} & S_2 S_3 \sin \lambda_1 (1 - \cos \lambda_4 \cosh \lambda_3) - S_1 S_3 \sin \lambda_4 (1 - \cos \lambda_1 \cosh \lambda_3) \\ & + S_1 S_2 \sinh \lambda_3 (1 - \cos \lambda_1 \cos \lambda_4) - \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 - S_3^2) \sin \lambda_1 \sin \lambda_4 \sinh \lambda_3 = 0 \quad (4.104) \end{aligned}$$

burada S_1, S_2, S_3 değerleri sırasıyla,

$$\begin{aligned} S_1 &= \lambda_1 (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) (h^2 \bar{\omega}^2 - 12 \lambda_1^2) (h^2 \bar{\omega}^2 - 12 \lambda_4^2 + 12 \lambda_3^2), \\ S_2 &= \lambda_4 (\lambda_1^2 + \lambda_3^2) (h^2 \bar{\omega}^2 - 12 \lambda_4^2) (h^2 \bar{\omega}^2 - 12 \lambda_1^2 + 12 \lambda_3^2), \\ S_3 &= \lambda_3 (\lambda_1^2 - \lambda_4^2) (h^2 \bar{\omega}^2 + 12 \lambda_3^2) (h^2 \bar{\omega}^2 - 12 \lambda_1^2 - 12 \lambda_4^2). \quad (4.105) \end{aligned}$$

eşittir.

G) Her İki Ucu Serbest Kiriş (S-S):

$$\begin{aligned} & \frac{S_2 S_3}{\lambda_4^2 \lambda_3^2} \sin \lambda_1 (1 - \cosh \lambda_4 \cosh \lambda_3) - \frac{S_1 S_3}{\lambda_1^2 \lambda_3^2} \sinh \lambda_4 (1 - \cos \lambda_1 \cosh \lambda_3) \\ & - \frac{S_1 S_2}{\lambda_1^2 \lambda_4^2} \sinh \lambda_3 (1 - \cos \lambda_1 \cos \lambda_4) + \frac{1}{2} \left(\frac{S_1^2}{\lambda_1^4} + \frac{S_2^2}{\lambda_4^4} - \frac{S_3^2}{\lambda_3^4} \right) \sin \lambda_1 \sin \lambda_4 \sinh \lambda_3 = 0 \quad (4.106) \end{aligned}$$

H) Bir Ucu Ankastre Diğer Ucu Serbest Kiriş (A-S):

$$\begin{aligned} & - \frac{S_2 S_3}{\lambda_4 \lambda_3} \cos \lambda_1 \left(1 - \frac{\lambda_4^2 - \lambda_3^2}{2 \lambda_4 \lambda_3} \sinh \lambda_4 \sinh \lambda_3 \right) + \frac{S_1 S_3}{\lambda_1 \lambda_3} \cos \lambda_4 \left(1 - \frac{\lambda_1^2 - \lambda_3^2}{2 \lambda_1 \lambda_3} \sin \lambda_1 \sinh \lambda_3 \right) \\ & - \frac{S_1 S_2}{\lambda_1 \lambda_4} \cosh \lambda_3 \left(1 - \frac{\lambda_1^2 + \lambda_4^2}{2 \lambda_1 \lambda_4} \sin \lambda_1 \sin \lambda_4 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{S_1^2}{\lambda_1^2} + \frac{S_2^2}{\lambda_4^2} + \frac{S_3^2}{\lambda_3^2} \right) \cos \lambda_1 \cosh \lambda_4 \cosh \lambda_3 = 0 \quad (4.107) \end{aligned}$$

BÖLÜM 5

SAYISAL SONUÇLAR

5.1. Giriş

Bu bölümde, 3. ve 4. bölümde açıklanan çözüm yöntemleriyle, kiriş teorilerine ait dalga yayılım eğrileri, düzlem içi kuvvetin Timoshenko kiriş teorisine etkisi ve kirişlerin serbest titreşim davranışı için elde edilen sonuçlar sunulmuştur.

5.2. Dalga Yayılım Eğrileri

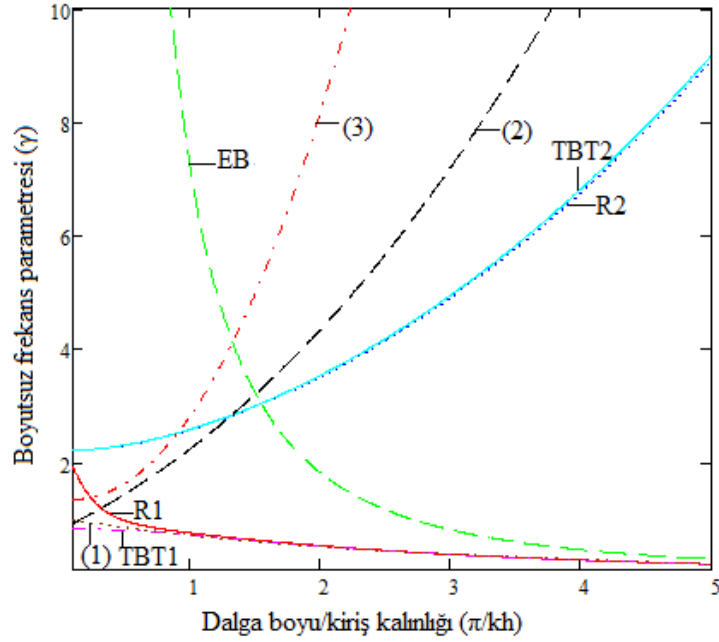
Bu bölümde, EB, Timoshenko ve Reddy kiriş teorilerine ait dalga yayılım eğrileri elde edilmiş ve bu eğriler düzlem elastisite çözümü ile kıyaslanmıştır. Timoshenko ve Reddy kiriş modellerinde iki adet dalga yayılım eğrisi gözlenirken, EB kiriş modelinde sadece bir adet dalga yayılım eğrisi gözlemlenmiştir. Dalga yayılım eğrilerinin Poisson oranına bağlı olarak değiştiği görülmektedir. Farklı Poisson oranlarına bağlı olarak çizilen bu grafiklerde, boyutsuz frekans parametresinin farklı dalga boylarındaki değişimi gösterilmektedir. Grafiklerde gösterilen Euler-Bernoulli kirişine ait dalga yayılım eğrisi (*EB*), Timoshenko kirişinde birinci spektrum ve ikinci spektrum frekans değerlerini gösteren eğriler sırasıyla (*TBT1*) ve (*TBT2*), Reddy kiriş modeline ait dalga yayılım eğrileri ise (*R1*) ve (*R2*) ile ifade gösterilmektedir. Düzlem elastisite çözümü ile elde edilen dalga yayılım eğrileri ise (*1*), (*2*), (*3*) olacak şekilde belirtilmektedir.

Tüm Poisson oranlarında ve yüksek dalga boylarında, EB kirişine ait dalga yayılım eğrisi (*EB*), birinci düzlem elastisite eğrisine (*1*) yakınsamaktadır. Bu durum özellikle boyutsuz dalga boyunun $\pi/kh > 3$ olduğu durumlarda görülebilir. Buna karşılık küçük dalga boylarında (*EB*) yayılım eğrisi, birinci düzlem elastisite çözümünden oldukça farklı frekans değerleri vermektedir.

Timoshenko'nun birinci spektrum frekans eğrisi (*TBT1*) ile Reddy kirişinin birinci spektrum eğrisi (*R1*) tüm Poisson oranlarında birinci düzlem elastisite çözümü ile birebir uyumlu sonuçlar vermektedir. (*TBT1*) eğrisine göre (*R1*) eğrisi, küçük dalga boylarında

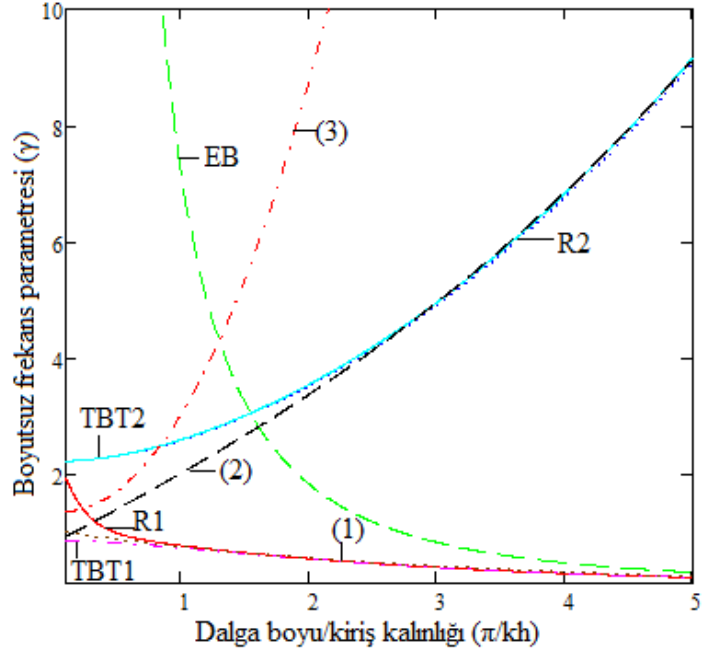
$(\pi/kh < 1)$ birinci düzlem elastisite çözümünden farklı olacak şekilde sonuç vermektedir. Bu aralıkta ($R1$) dalga yayılım eğrisi ikinci ve üçüncü (2,3) düzlem elastisite çözümlerine daha çok yakınsamaktadır.

Timoshenko kirişinin ikinci spektrum eğrisi ($TBT2$) ile Reddy kirişinin ikinci spektrum eğrisi ($R2$), Poisson oranının $\nu > 0.2$ ve boyutsuz dalga boyunun $\pi/kh > 2$ olduğu durumlarda ikinci düzlem elastisite eğrisi (2) ile oldukça uyumlu görünmektedir. Özellikle yüksek dalga boylarında ($TBT2$), ($R2$) ve (2) eğrileri birebir kesişmektedir. Buna karşılık Poisson oranının $\nu = 0.1$ olması halinde ($TBT2$) dalga yayılım eğrisi yüksek dalga boylarında ($\pi/kh > 2$), ikinci düzlem elastisite çözümüne (2) yakınsamaktadır (Şekil 5.1).



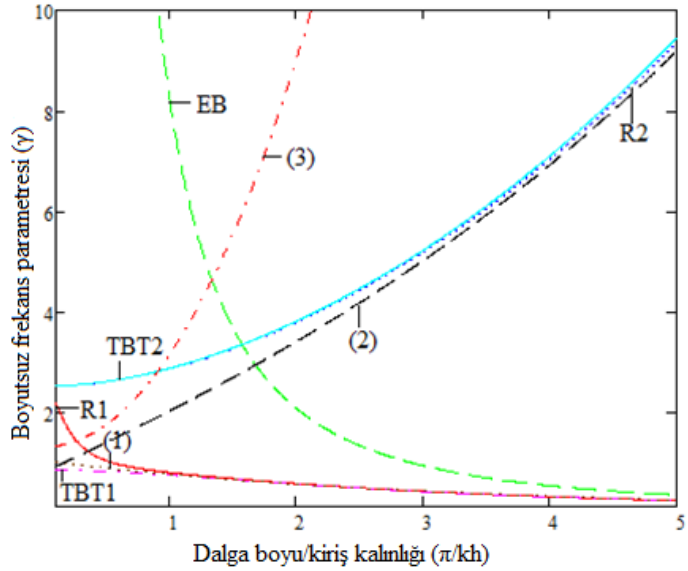
$$\nu = 0.1, h = 0.1, b = 0.1, E = 200 \times 10^9$$

Şekil 5.1. Euler-Bernoulli (EB), Timoshenko ($TBT1, TBT2$) ve Reddy ($R1, R2$) kiriş modellerinin yayılım eğrilerinin düzlem elastisite çözümü (1,2,3) ile kıyaslanması



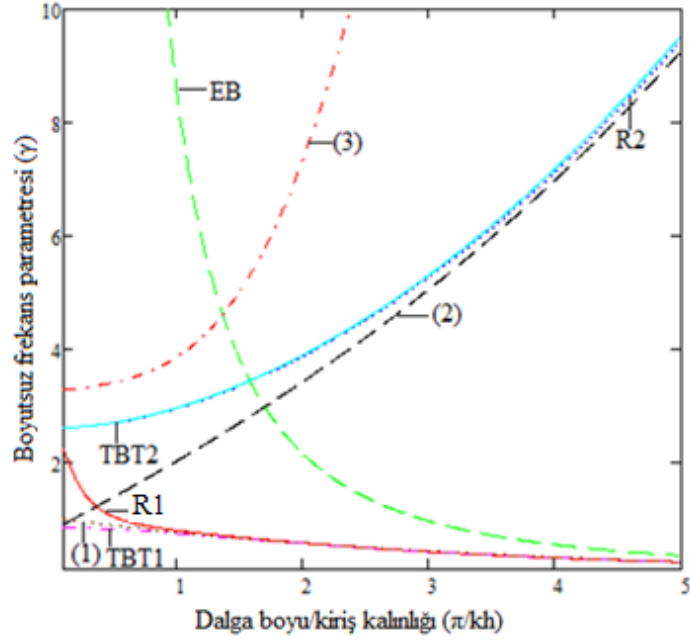
$$\nu = 0.2, h = 0.1, b = 0.1, E = 200 \times 10^9$$

Şekil 5.2. Euler-Bernoulli (EB), Timoshenko (TBT1, TBT2) ve Reddy (R1, R2) kiriş modellerinin yayınım eğrilerinin düzlem elastisite çözümü (1,2,3) ile kıyaslanması



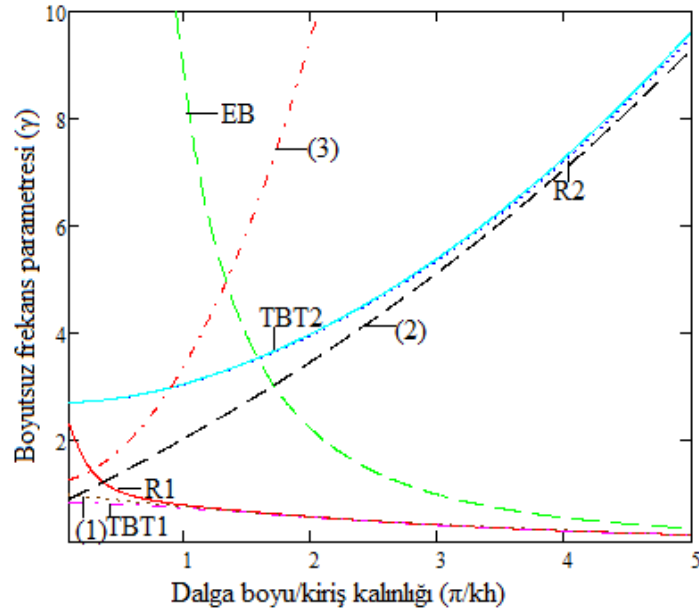
$$\nu = 0.25, h = 0.1, b = 0.1, E = 200 \times 10^9$$

Şekil 5.3. Euler-Bernoulli (EB), Timoshenko (TBT1, TBT2) ve Reddy (R1, R2) kiriş modellerinin yayınım eğrilerinin düzlem elastisite çözümü (1,2,3) ile kıyaslanması



$$\nu = 0.3, h = 0.1, b = 0.1, E = 200 \times 10^9$$

Şekil 5.4. Euler-Bernoulli (*EB*), Timoshenko (*TBT1, TBT2*) ve Reddy (*R1, R2*) kiriş modellerinin yayılım eğrilerinin düzlem elastisite çözümü (*1, 2, 3*) ile kıyaslanması

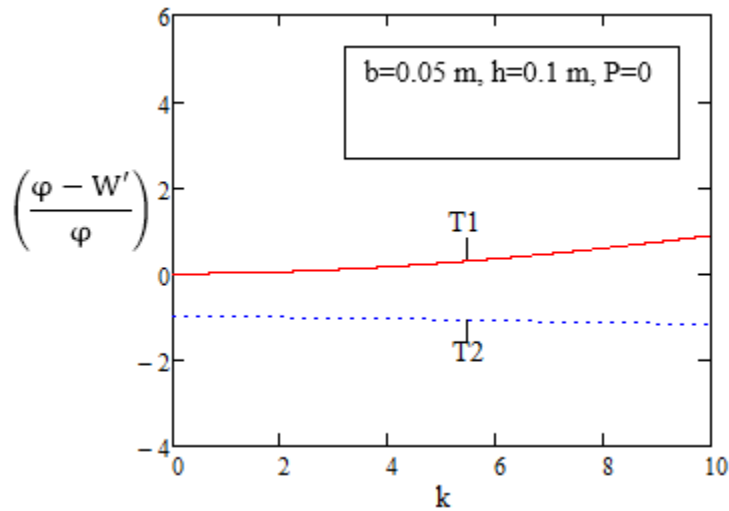


$$\nu = 0.35, h = 0.1, b = 0.1, E = 200 \times 10^9$$

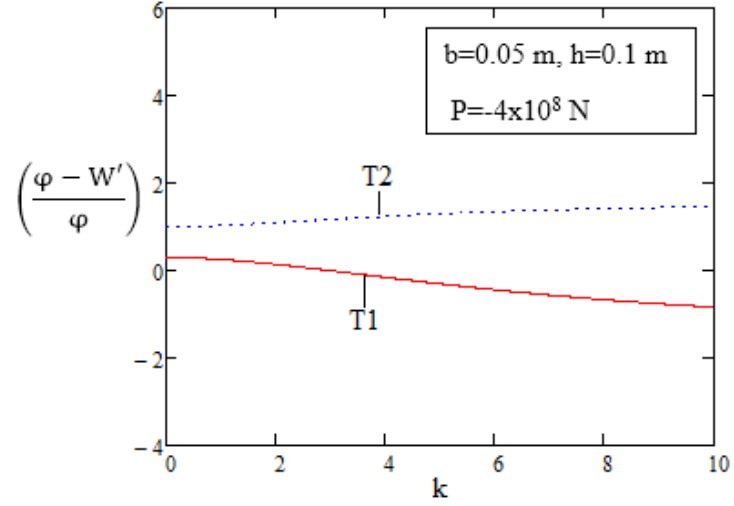
Şekil 5.5. Euler-Bernoulli (*EB*), Timoshenko (*TBT1, TBT2*) ve Reddy (*R1, R2*) kiriş modellerinin yayılım eğrilerinin düzlem elastisite çözümü (*1, 2, 3*) ile kıyaslanması

5.3. Timoshenko Kiriş Teorisinde Faz İlişkileri

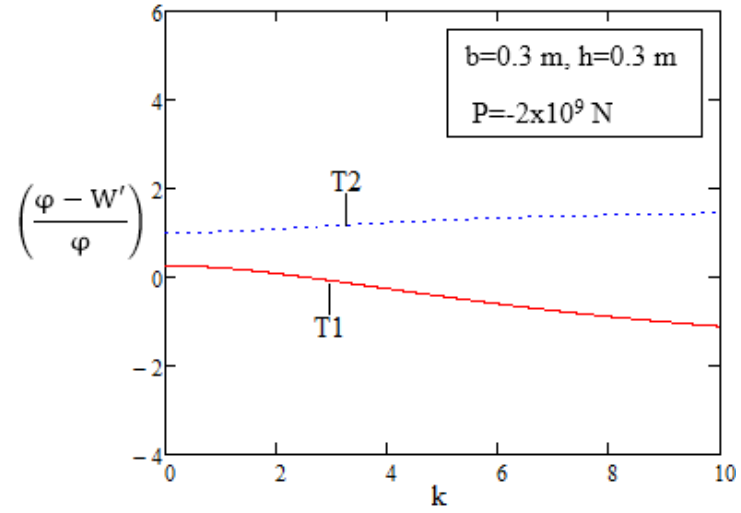
Traill-Nash ve Collar (1953), Timoshenko kirişinin birinci spektrumunda eğilme ve kayma açılarının eş fazlı yani aynı işaretli, ikinci spektrumda ise bu açıların zıt fazlı olduğunu belirtmişlerdir. Bu durum düzlem içi kuvvetlerin dikkate alındığı durumlarda geçerli değildir. Düzlem içi kuvvetlerin etkisi dikkate alınarak, Timoshenko kiriş kesitinin kayma açısının $(\varphi - W')$ toplam dönme açısına (φ) oranına olan etkisi incelendiğinde, ikinci spektrum eğrisinin eş fazlı olduğu görülürken buna karşılık birinci spektrum eğrisinin eş fazlı olmadığı sonucuna varılmaktadır. Bu nedenle iki spektrum arasında yapılan niteliksel ayırım, kesitin dönme ve kayma açıları arasındaki faz ilişkilerine indirgenemez sonucuna ulaşılabilir. Düzlem içi kuvvetin etkisi altında açı oranlarıyla yapılan bu analizde farklı dalga sayılarında, ikinci spektrum eğrisinin her zaman pozitif değerler aldığı, birinci spektrum eğrisinin ise belli düzlem içi kuvveti değerlerinde pozitif değerden negatif değere geçtiği aşağıdaki grafiklerde gösterilmektedir.



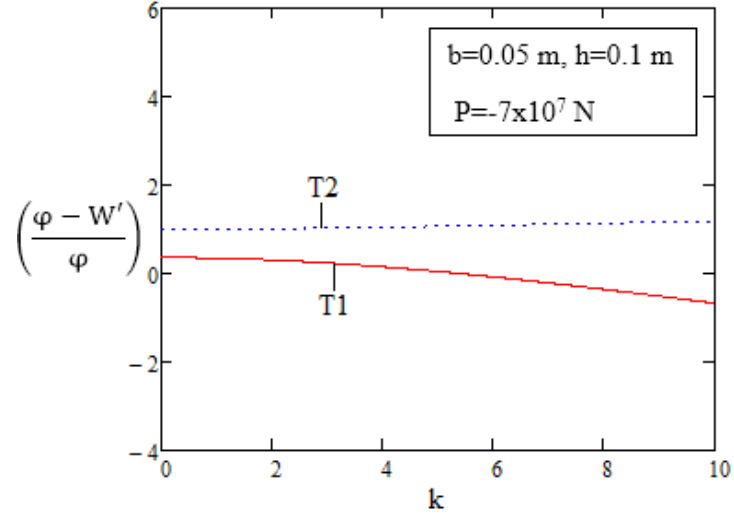
Şekil 5.6. Timoshenko kirişinde açı oranlarının dalga sayısı ile değişimi ($T1$ ve $T2$ sırasıyla birinci ve ikinci spektrumu göstermektedir).



Şekil 5.7. Timoshenko kirişinde açı oranlarının dalga sayısı ile değişimi ($T1$ ve $T2$ sırasıyla birinci ve ikinci spektrumu göstermektedir).



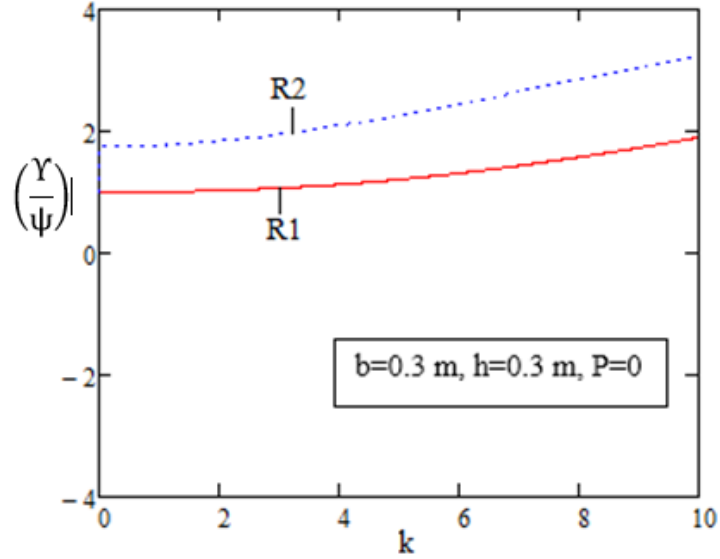
Şekil 5.8. Timoshenko kirişinde açı oranlarının dalga sayısı ile değişimi ($T1$ ve $T2$ sırasıyla birinci ve ikinci spektrumu göstermektedir).



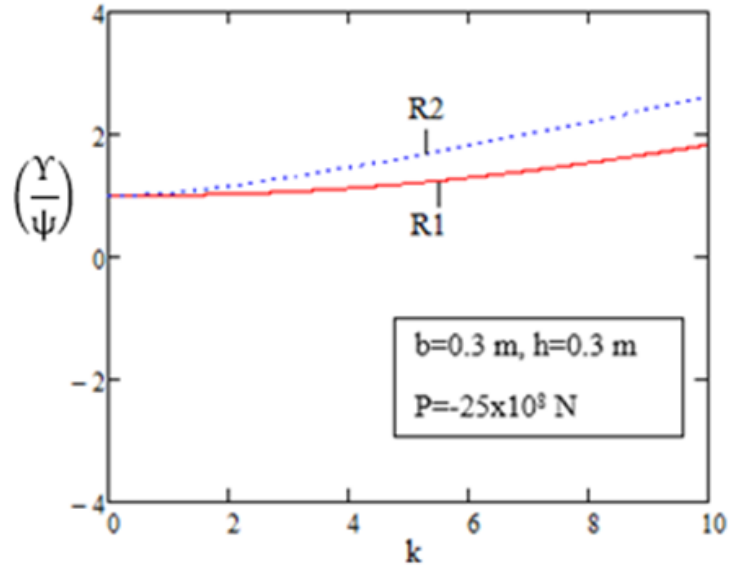
Şekil 5.9. Timoshenko kirişinde açı oranlarının dalga sayısı ile değişimi ($T1$ ve $T2$ sırasıyla birinci ve ikinci spektrumu göstermektedir).

5.4. Reddy Kiriş Teorisinde Faz İlişkileri

Düzlem içi kuvvetlerin etkisinin dikkate alındığı ve alınmadığı durumlarda, Reddy kiriş kesitinin kayma açısının (Y) toplam dönme açısına (ψ) oranına olan etkisi incelendiğinde, birinci ve ikinci spektrum eğrilerinin eş fazlı olduğu görülmektedir.



Şekil 5.10. Reddy kirişinde açı oranlarının dalga sayısı ile değişimi ($R1$ ve $R2$ sırasıyla birinci ve ikinci spektrumu göstermektedir).



Şekil 5.11. Reddy kirişinde aç ı oranlarının dalga sayısı ile değişimi (R1 ve R2 sırasıyla birinci ve ikinci spektrumunu göstermektedir).

5.5. Kirişlerin Titreşimi

Bu bölümde, 4. bölümde farklı sınır koşulları için elde edilen EB, Timoshenko ve Reddy kiriş teorilerine ait frekans denklemlerinin kökleri bulunarak, ilk beş moddaki titreşim frekansı değerleri boyutsuz olarak tablolar halinde sunulmaktadır. Boyutsuz titreşim frekansı değerleri (B-B), (A-A) ve (A-S) sınır koşullarında hesaplanmış ve bulunan frekans değerleri literatürde yer alan değerler ile kıyaslanmıştır (Tablo5.1, Tablo 5.2, Tablo 5.3). Timoshenko kiriş teorisinde, ikinci spektrum frekans değerleri sadece (B-B) sınır koşulunda gösterilmektedir. Çünkü (B-B) sınır şartı için Timoshenko kiriş modelinin karakteristik denklemi çarpanlarına ayrılabilir. Buna karşılık, diğer sınır koşullarında Timoshenko kirişinin karakteristik denklemlerini çarpanlarına ayırmak mümkün değildir. Ancak, diğer sınır koşulları için ikinci spektrum frekans değerlerinin etkisi mod şekillerinin çizilmesiyle gösterilebilir.

Tablo 5.1. İlk beş boyutsuz frekans parametresi

(B-B)							
	EB	EB [31]	T1	T1 [31]	T2	R	R [31]
$\bar{\omega}_1$	3.141	3.141	3.115	3.115	10.92	3.115	3.115
$\bar{\omega}_2$	6.283	6.283	6.091	6.090	12.03	6.090	6.090
$\bar{\omega}_3$	9.424	9.424	8.840	8.840	13.30	8.841	8.841
$\bar{\omega}_4$	12.56	12.56	11.35	11.34	14.59	11.34	11.34
$\bar{\omega}_5$	15.70	15.70	13.61	13.61	15.84	13.62	13.62

(*T*: Timoshenko, *T1*: Birinci spektrum, *T2*: İkinci spektrum, *R*: Reddy, $L/h=10$)

Tablo 5.2. İlk beş boyutsuz frekans parametresi

(A-A)						
	EB	EB [31]	T	T [31]	R	R [31]
$\bar{\omega}_1$	4.730	4.730	4.579	4.579	4.611	4.582
$\bar{\omega}_2$	7.853	7.853	7.531	7.331	7.431	7.340
$\bar{\omega}_3$	10.99	10.99	9.856	9.855	10.05	9.881
$\bar{\omega}_4$	14.13	14.13	12.14	12.14	12.46	12.18
$\bar{\omega}_5$	17.27	17.27	14.23	14.23	14.68	14.30

(*EB*: Euler-Bernoulli, *T*: Timoshenko, *R*: Reddy, $L/h=10$)

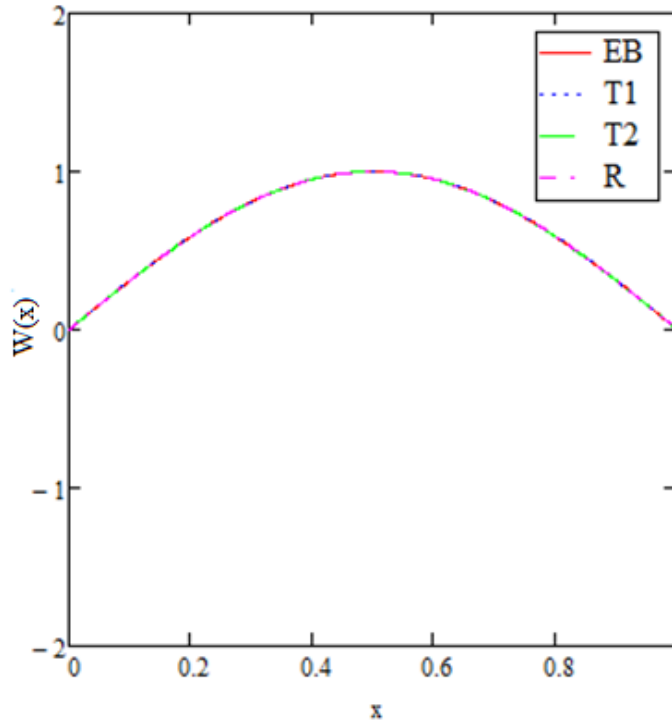
Tablo 5.3. İlk beş boyutsuz frekans parametresi

(A-S)					
	EB	EB [37]	T	T [37]	R
$\bar{\omega}_1$	1.875	1.875	1.867	1.867	1.880
$\bar{\omega}_2$	4.694	4.694	4.572	4.572	4.820
$\bar{\omega}_3$	7.855	7.854	7.415	7.415	8.720
$\bar{\omega}_4$	10.99	10.99	9.987	10.57	11.80
$\bar{\omega}_5$	14.14	14.13	12.32	12.65	14.26

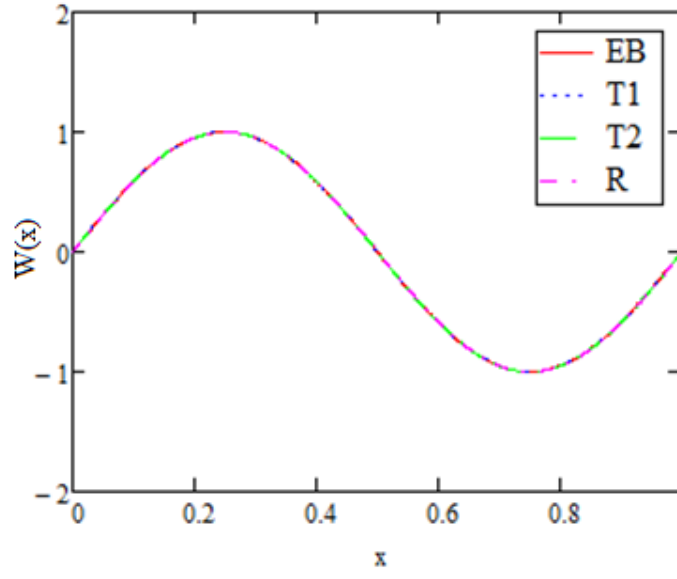
(*EB*: Euler-Bernoulli, *T*: Timoshenko, *R*: Reddy, $L/h=10$)

5.6. Mod Şekilleri ve Genlik Oranları

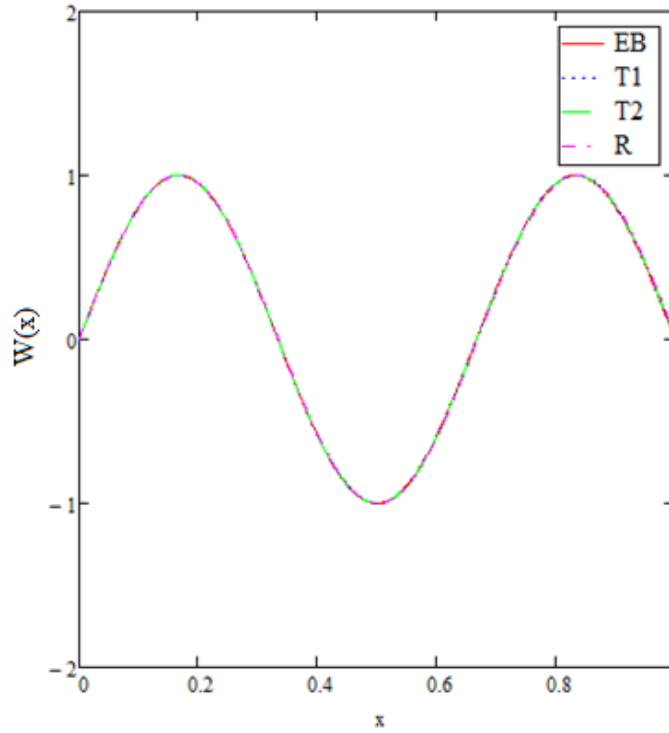
EB, Timoshenko ve Reddy kiriş modellerinin farklı sınır şartlarında ilk on moddaki mod şekilleri ile birlikte Timoshenko ve Reddy kirişlerine ait maksimum genlik oranları aşağıdaki grafiklerde gösterilmektedir. Aşağıdaki grafiklerde EB, T ve R ile gösterilen eğriler sırasıyla EB, Timoshenko ve Reddy kiriş teorilerine ait farklı mod sayılarındaki ve o mod sayılarına ait boyutsuz frekanslardaki mod şekillerini temsil etmektedir. T1 ve T2 ile gösterilen mod şekli eğrileri de Timoshenko' nun 1. ve 2. spektrum eğrilerini göstermektedir. B-B sınır şartı için Timoshenko' nun 1. ve 2. spektrum frekans değerlerindeki mod şekilleri ayrı ayrı çizilmiştir. Ayrıca B-B sınır şartı için Timoshenko' nun 1. ve 2. spektrum frekans değerlerindeki mod şekilleri $\varphi(x)$ yer değiştirme fonksiyonuna bağlı olarak da verilmektedir. Grafiklerde de görüldüğü gibi verilen sınır şartlarında kirişler için elde edilen mod şekilleri aynı kalmaktadır.



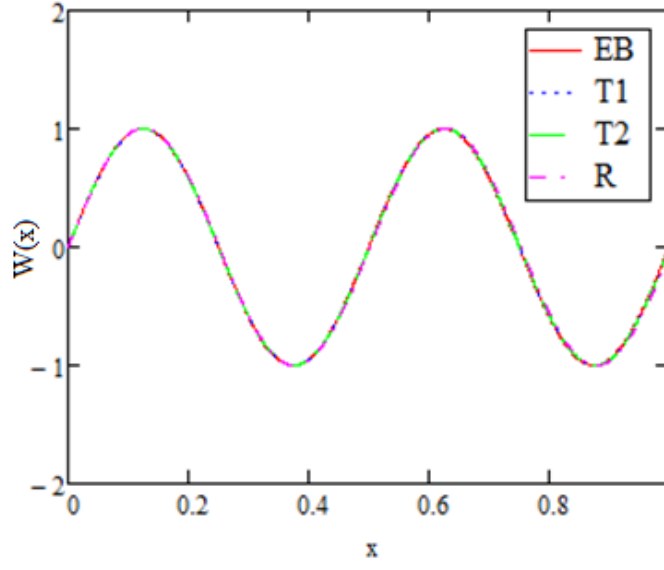
Şekil 5.12. Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli
(EB=3.141, T1=3.115, T2=10.92, R=3.115, $n=1$. mod).



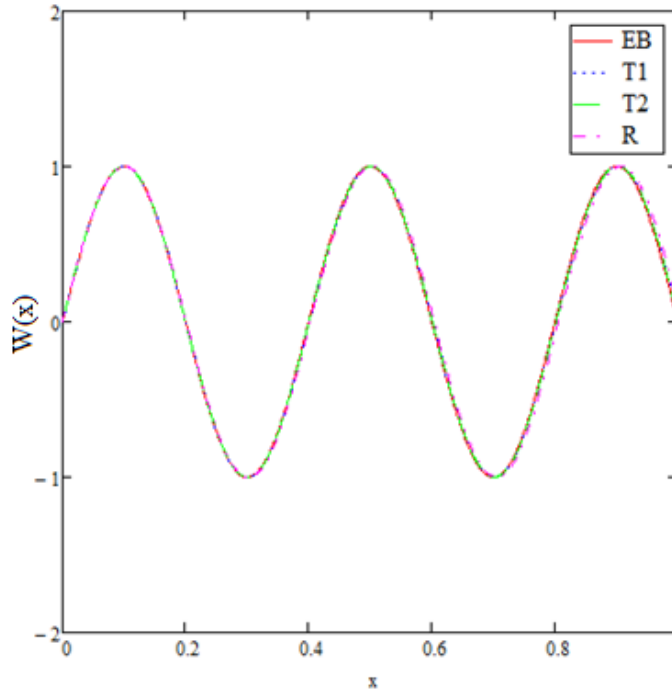
Şekil 5.13. Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli
(EB=6.283, T1=6.091, T2=12.03, R=6.090, $n=2$. mod).



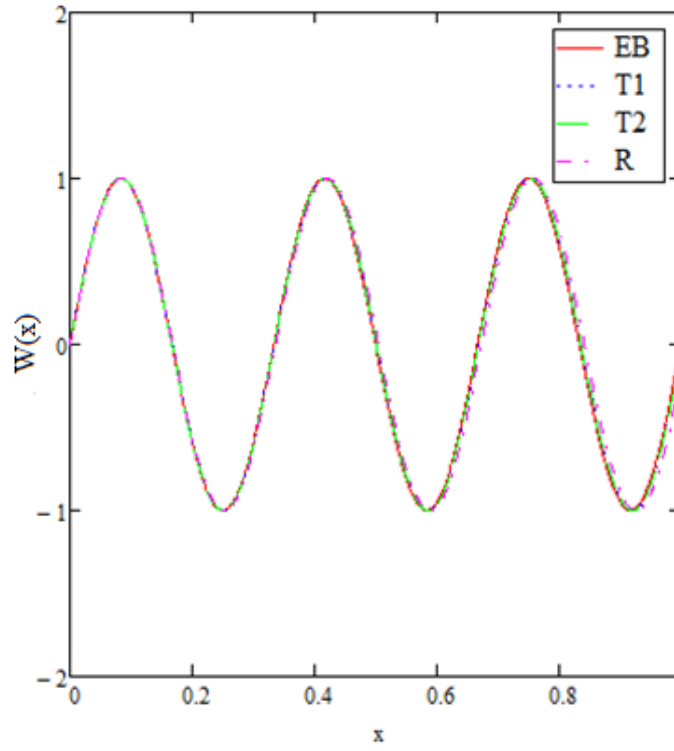
Şekil 5.14. Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli
(EB=9.424, T1=8.840, T2=13.30, R=8.841, $n=3$. mod).



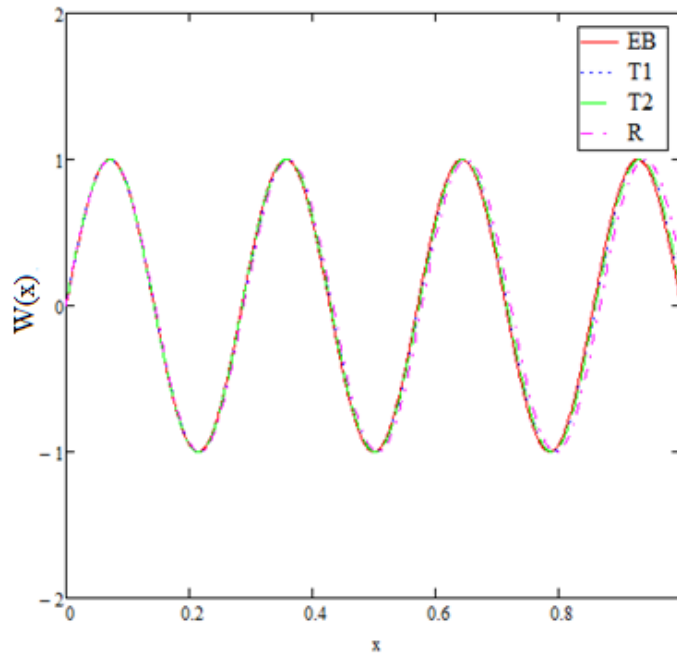
Şekil 5.15. Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli
(EB=12.56, T1=11.35, T2=14.59, R=11.34, $n=4$. mod).



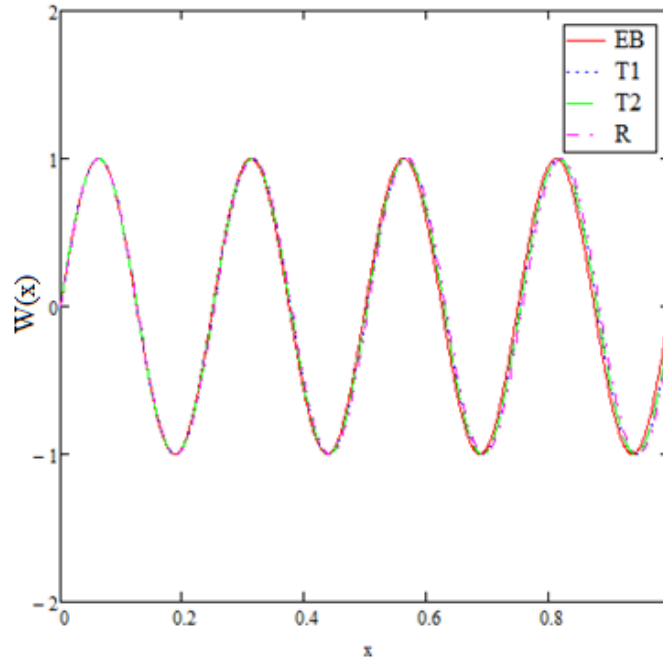
Şekil 5.16. Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli
(EB=15.70, T1=13.61, T2=15.84, R=13.62, $n=5$. mod).



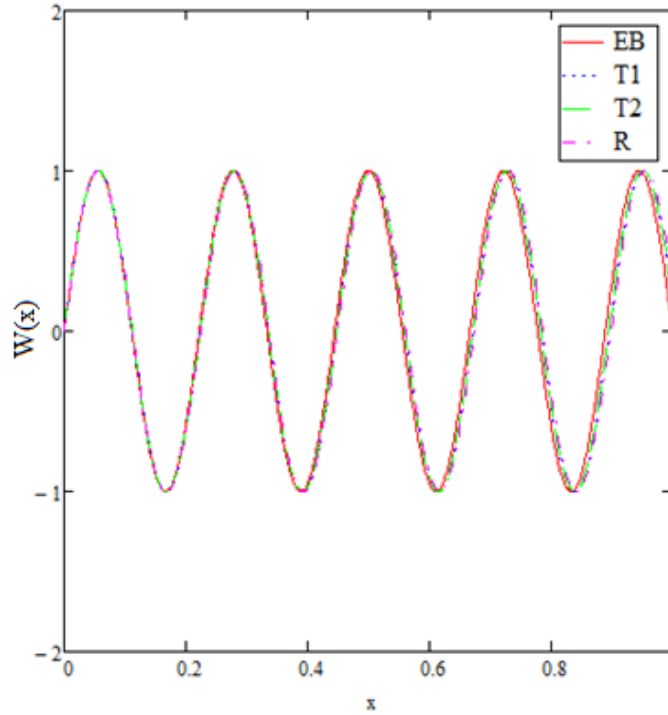
Şekil 5.17. Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli
(EB=18.85, T1=15.67, T2=17.04, R=15.69, $n=6$. mod).



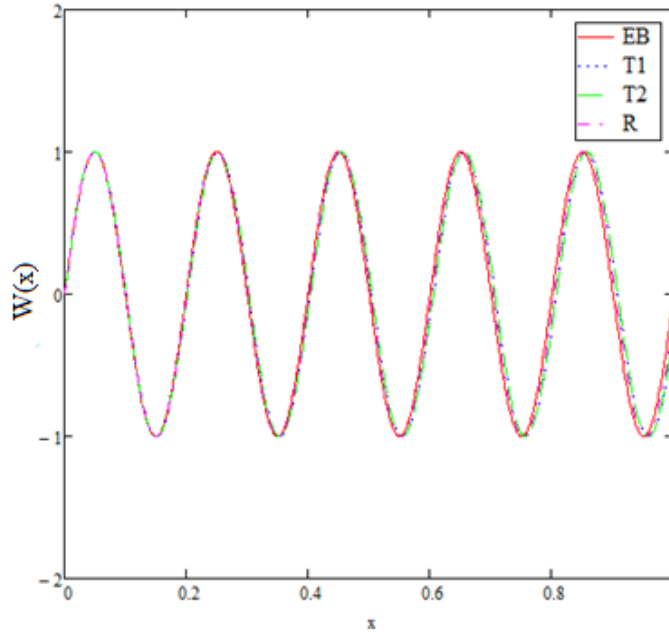
Şekil 5.18. Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli
(EB=21.99, T1=17.57, T2=18.18, R=17.54, $n=7$. mod).



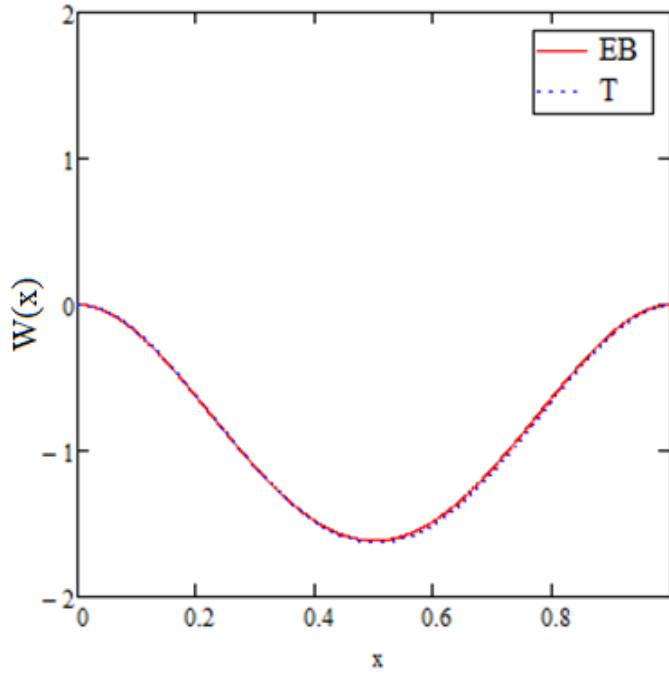
Şekil 5.19. Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli
(EB=25.13, T1=19.31, T2=19.47, R=19.29, $n=8$. mod).



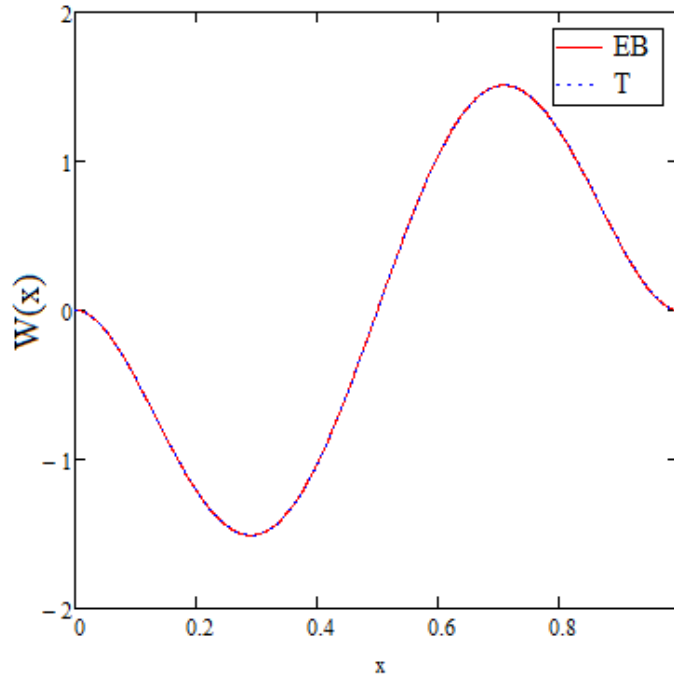
Şekil 5.20. Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli
(EB=28.27, T1=20.93, T2=20.95, R=20.89, $n=9$. mod).



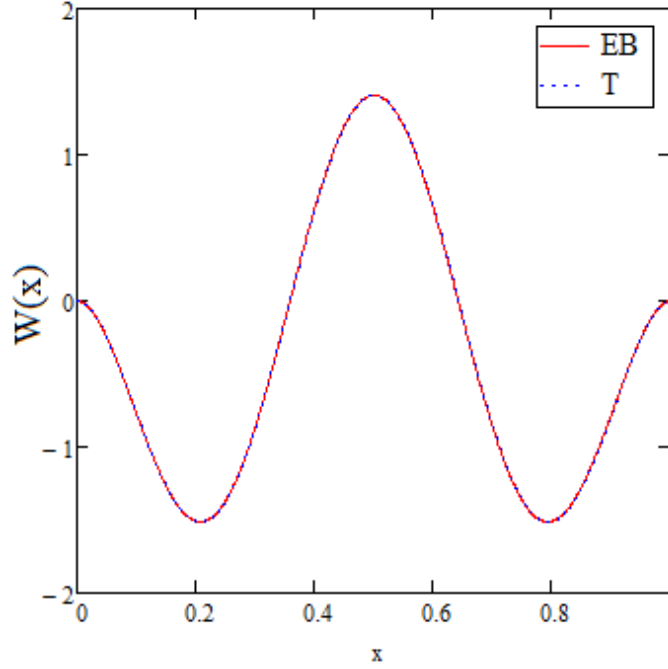
Şekil 5.21. Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli
(EB=31.41, T1=22.44, T2=23.32, R=22.41, $n=10$. mod).



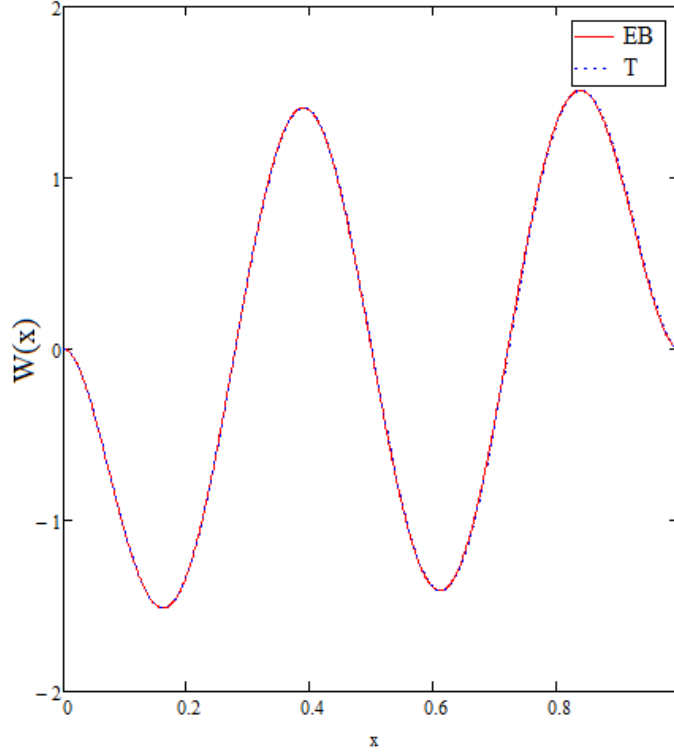
Şekil 5.22. Her iki ucu ankastre (A-A) sınır şartındaki mod şekli
(EB=4.730, T=4.579, $n=1$. mod).



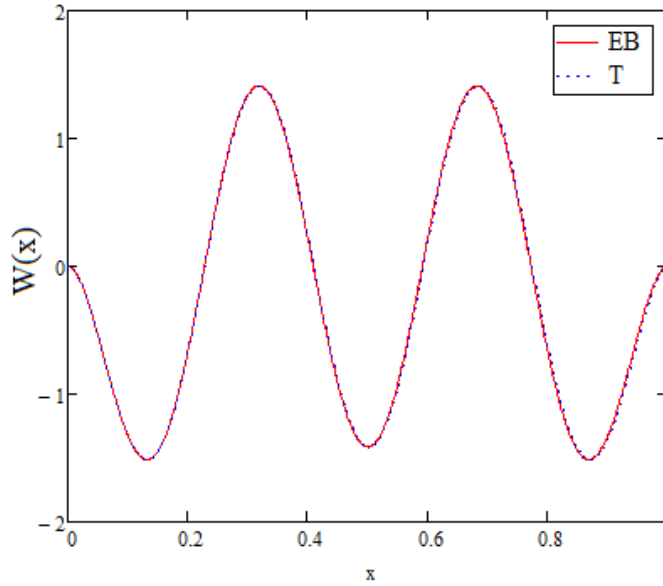
Şekil 5.23. Her iki ucu ankastre (A-A) sınır şartındaki mod şekli
(EB=7.853, T=7.531, $n=2$. mod).



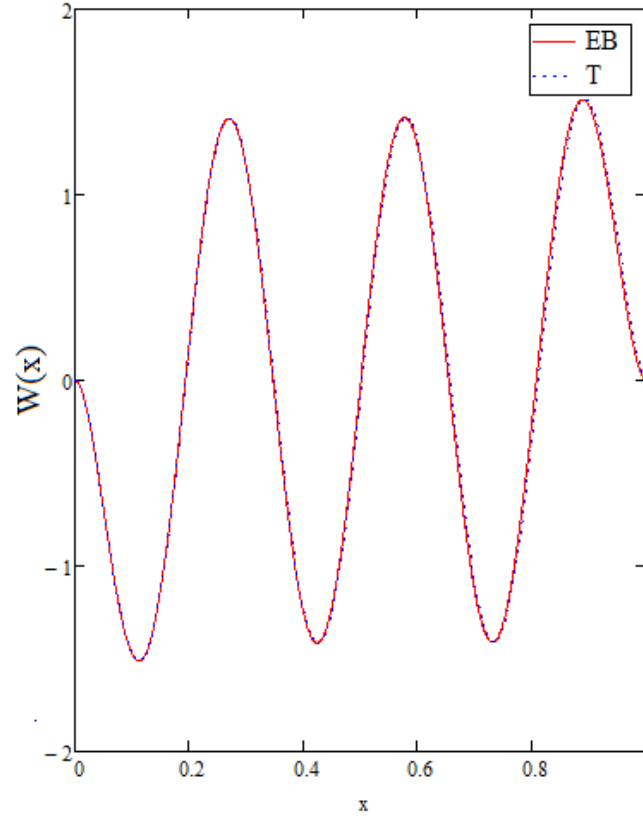
Şekil 5.24. Her iki ucu ankastre (A-A) sınır şartındaki mod şekli
(EB=10.99, T=9.856, $n=3$. mod).



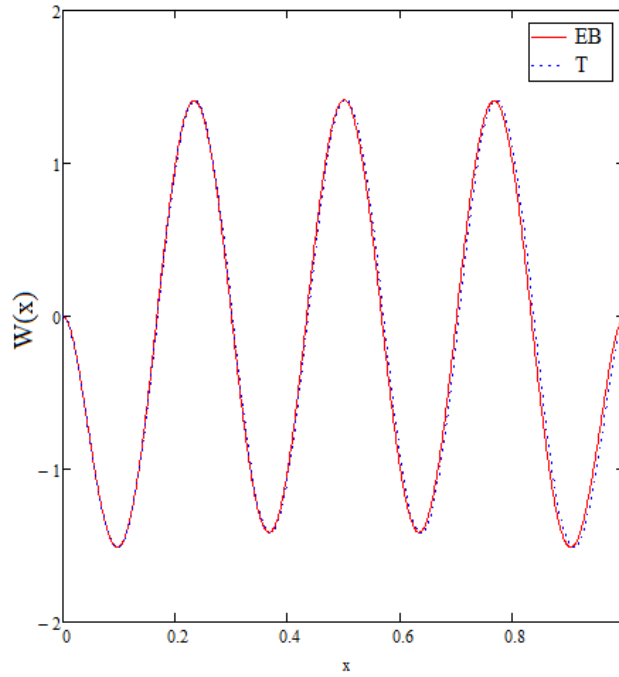
Şekil 5.25. Her iki ucu ankastre (A-A) sınır şartındaki mod şekli
(EB=14.14, T=12.14, $n=4$. mod).



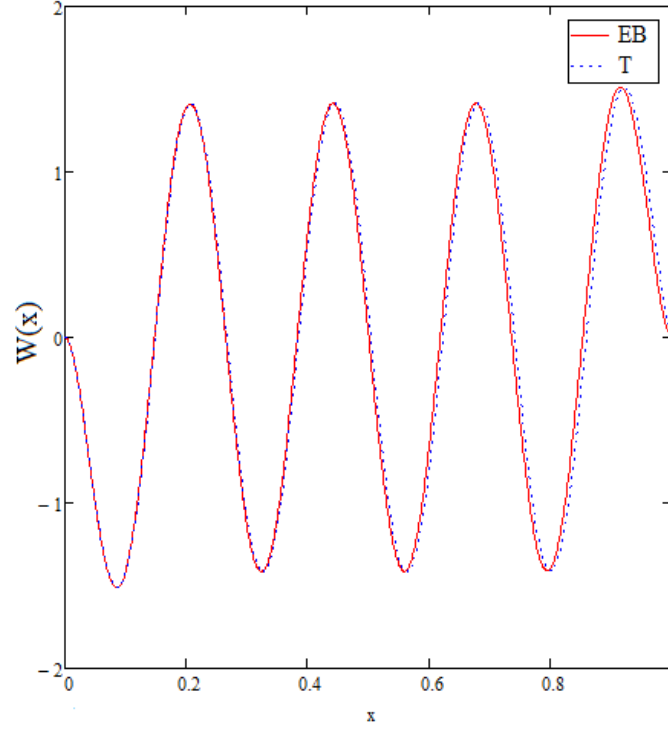
Şekil 5.26. Her iki ucu ankastre (A-A) sınır şartındaki mod şekli
(EB=17.28, T=14.23, $n=5$. mod).



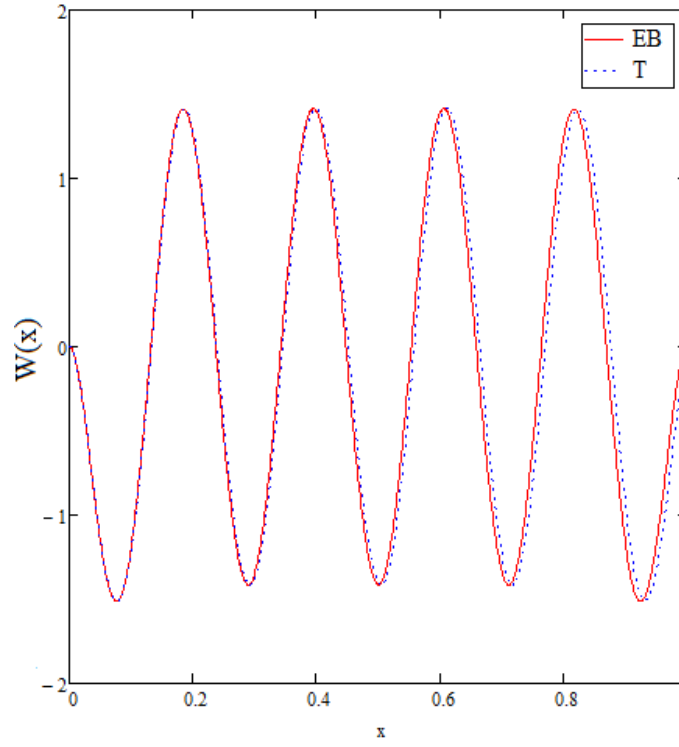
Şekil 5.27. Her iki ucu ankastre (A-A) sınır şartındaki mod şekli
(EB=20.42, T=16.14, $n=6$. mod).



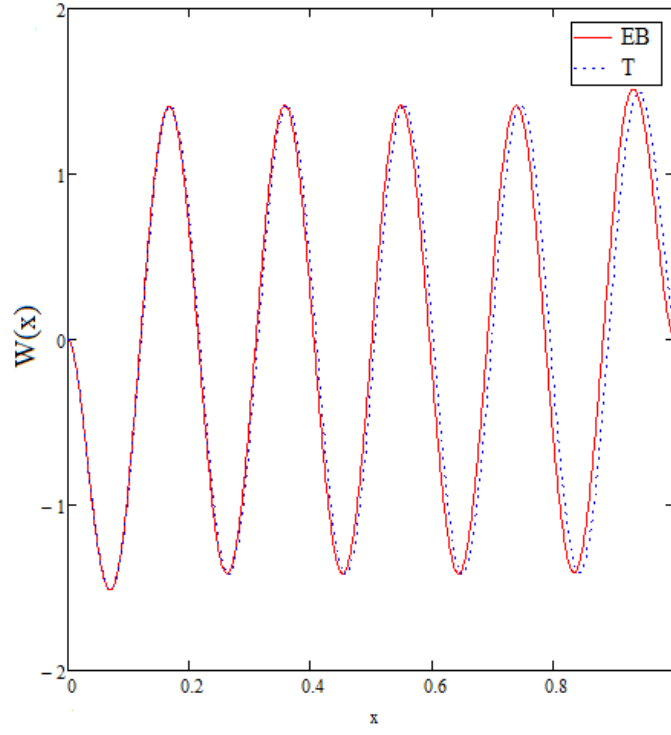
Şekil 5.28. Her iki ucu ankastre (A-A) sınır şartındaki mod şekli
(EB=23.56, T=17.92, $n=7$. mod).



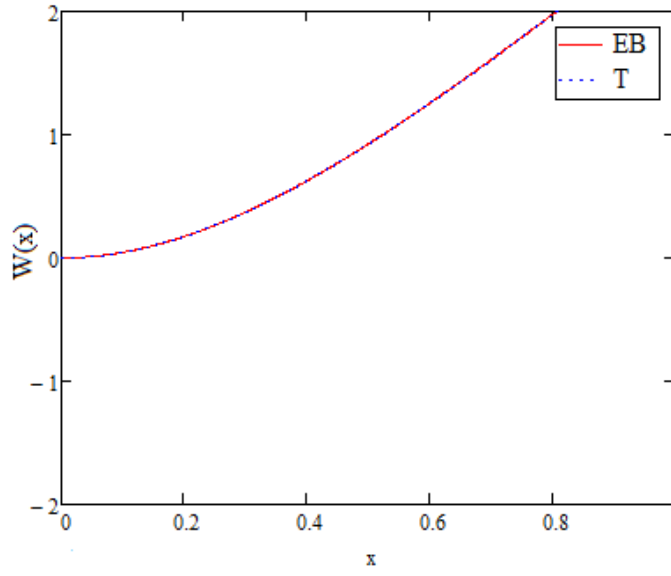
Şekil 5.29. Her iki ucu ankastre (A-A) sınır şartındaki mod şekli
(EB=26.70, T=19.57, $n=8$. mod).



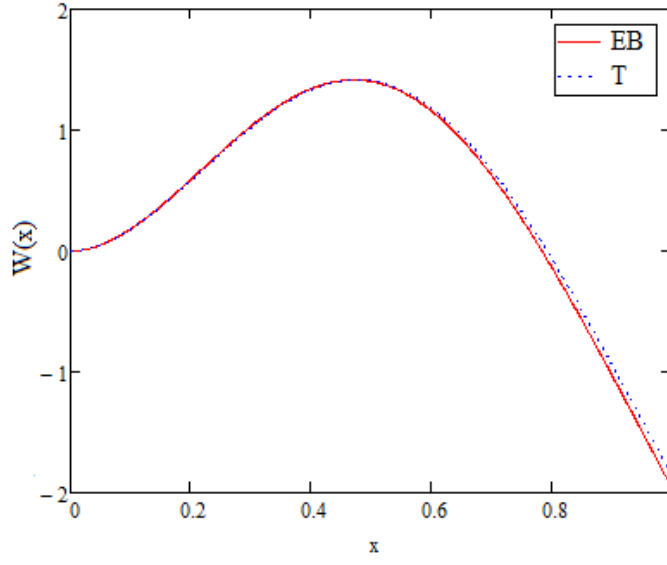
Şekil 5.30. Her iki ucu ankastre (A-A) sınır şartındaki mod şekli
(EB=29.85, T=21.11, $n=9$. mod).



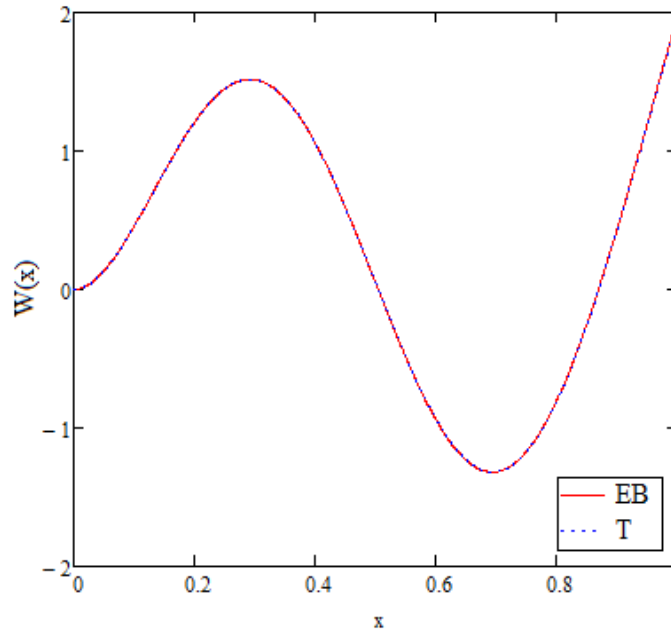
Şekil 5.31. Her iki ucu ankastre (A-A) sınır şartındaki mod şekli
(EB=32.99, T=22.57, $n=10$. mod).



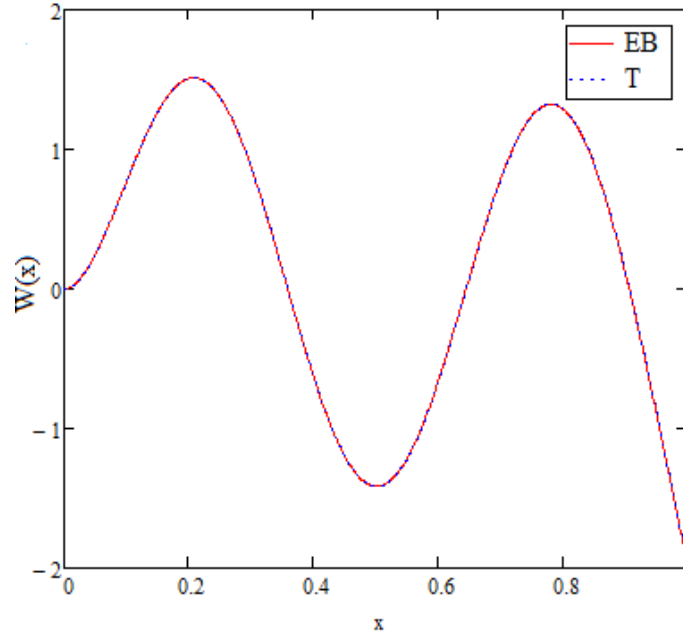
Şekil 5.32. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest (A-S) sınır şartındaki mod şekli
(EB=1.875, T=1.867, $n=1$. mod).



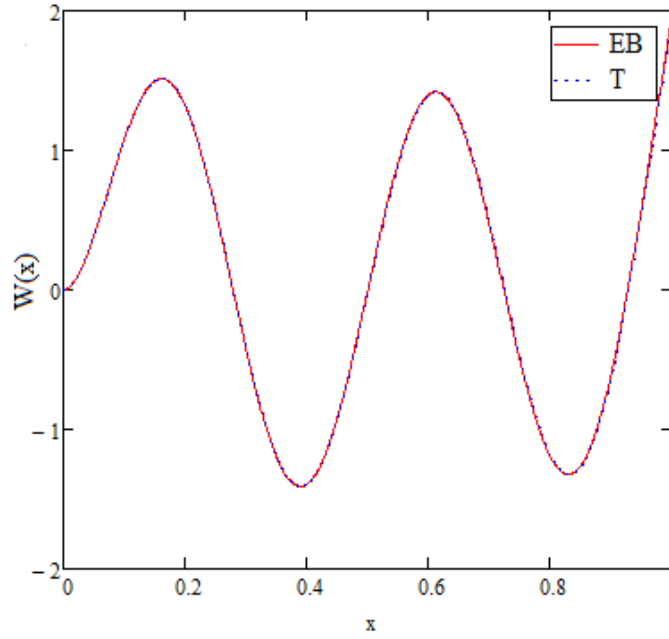
Şekil 5.33. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest (A-S) sınır şartındaki mod şekli
(EB=4.694, T=4.572, $n=2$. mod).



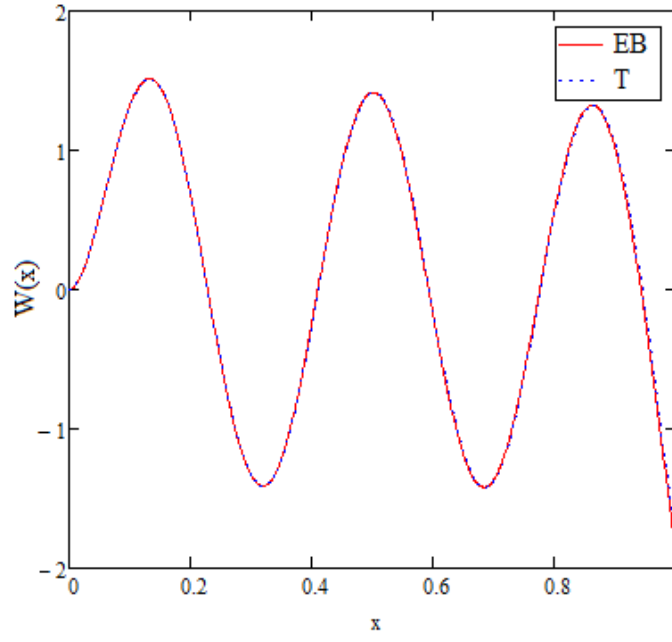
Şekil 5.34. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest (A-S) sınır şartındaki mod şekli
(EB=7.855, T=7.415, $n=3$. mod).



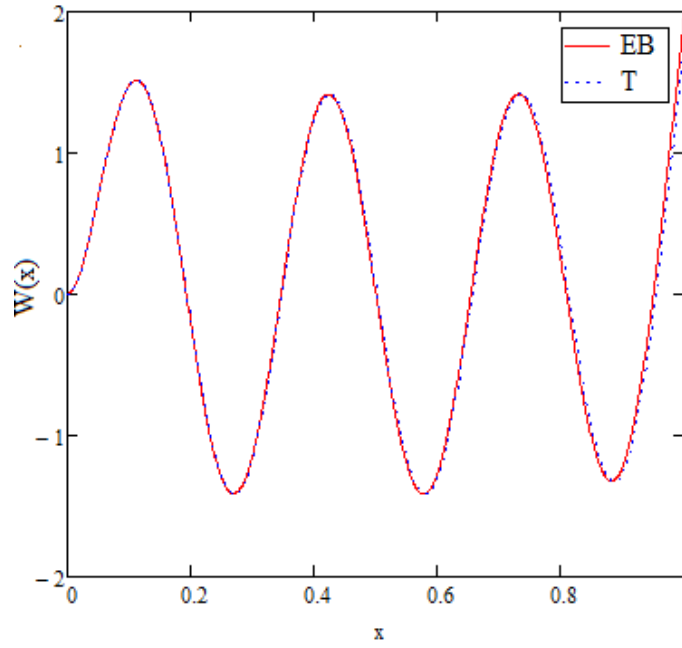
Şekil 5.35. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest (A-S) sınır şartındaki mod şekli
(EB=10.99, T=9.987, $n=4$. mod).



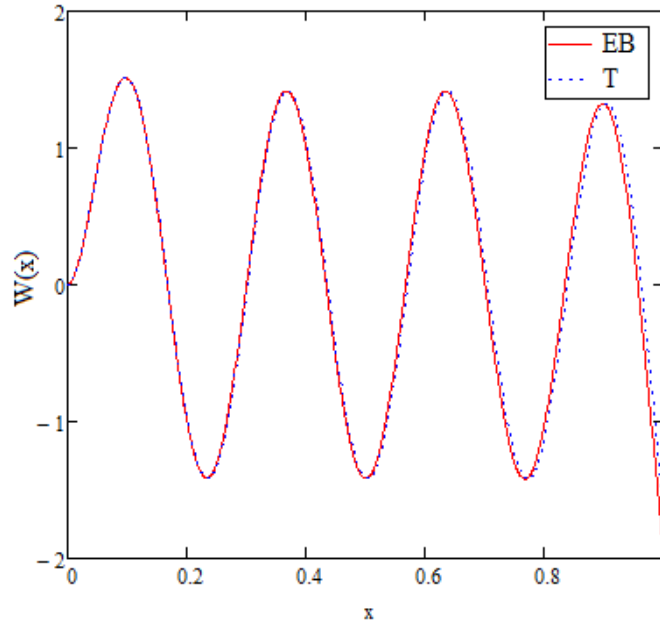
Şekil 5.36. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest (A-S) sınır şartındaki mod şekli
(EB=14.14, T=12.32, $n=5$. mod).



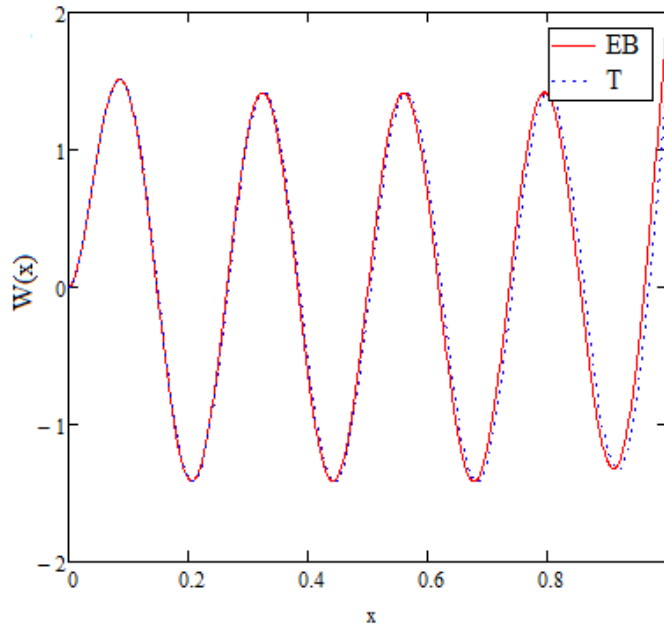
Şekil 5.37. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest (A-S) sınır şartındaki mod şekli
(EB=17.26, T=14.44, $n=6$. mod).



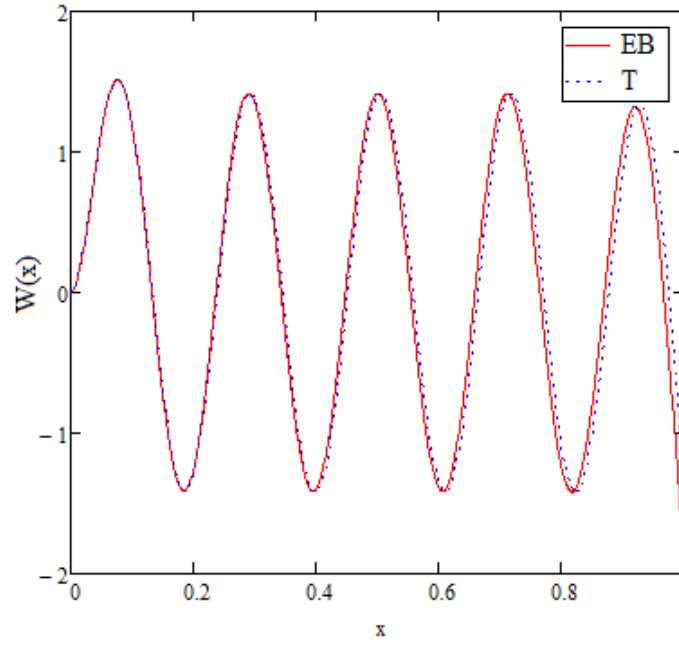
Şekil 5.38. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest (A-S) sınır şartındaki mod şekli
(EB=20.43, T=16.38, $n=7$. mod).



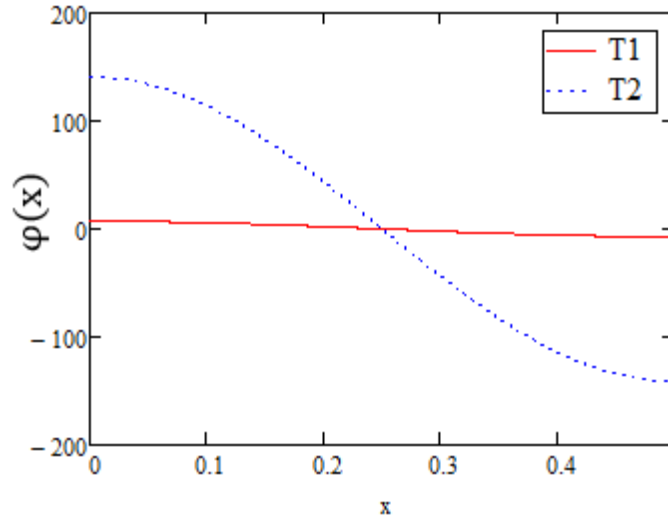
Şekil 5.39. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest (A-S) sınır şartındaki mod şekli
(EB=23.58, T=18.17, $n=8$. mod).



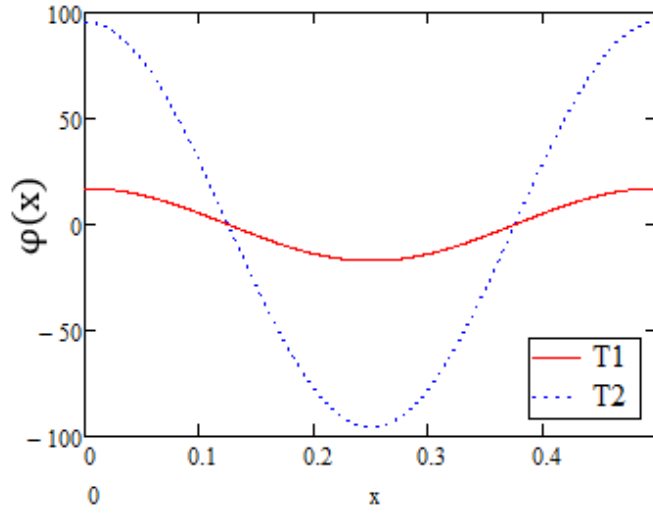
Şekil 5.40. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest (A-S) sınır şartındaki mod şekli
(EB=26.73, T=19.83, $n=9$. mod).



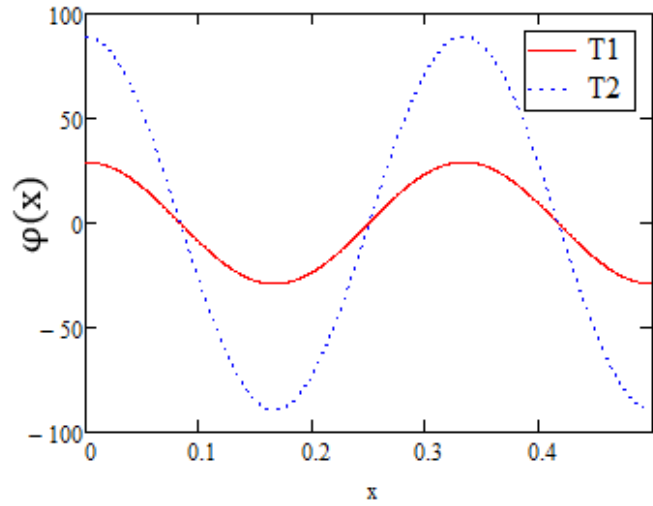
Şekil 5.41. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest (A-S) sınır şartındaki mod şekli
(EB=29.84, T=21.37, $n=10$. mod).



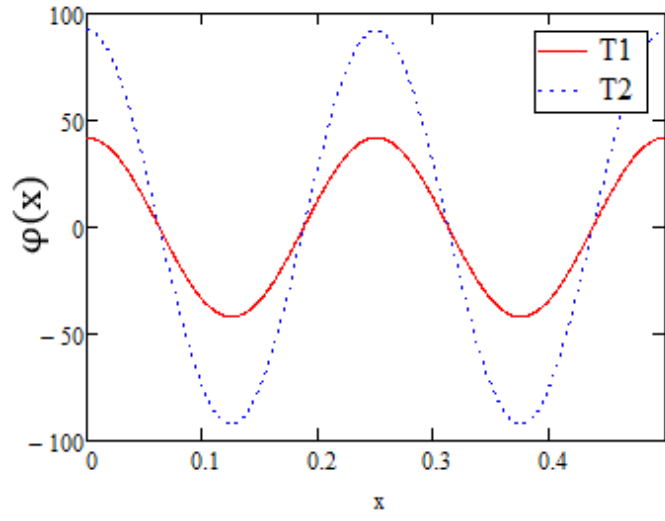
Şekil 5.42. Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli
(T1=3.115, T2=10.92, $n=1$. mod).



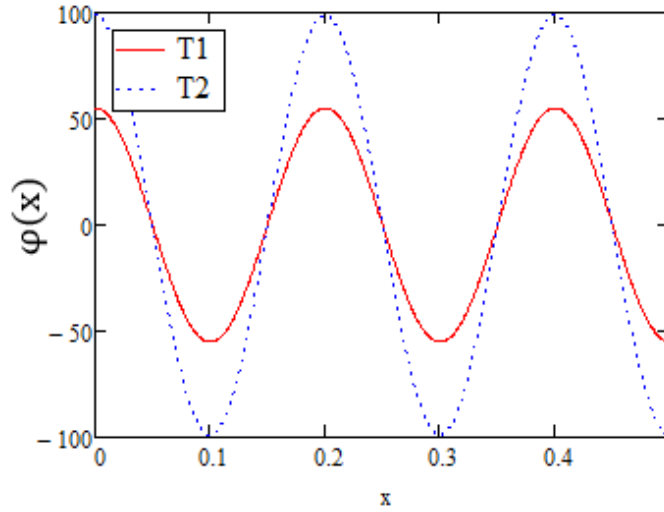
Şekil 5.43. Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli
($T_1=6.091$, $T_2=12.03$, $n=2$. mod).



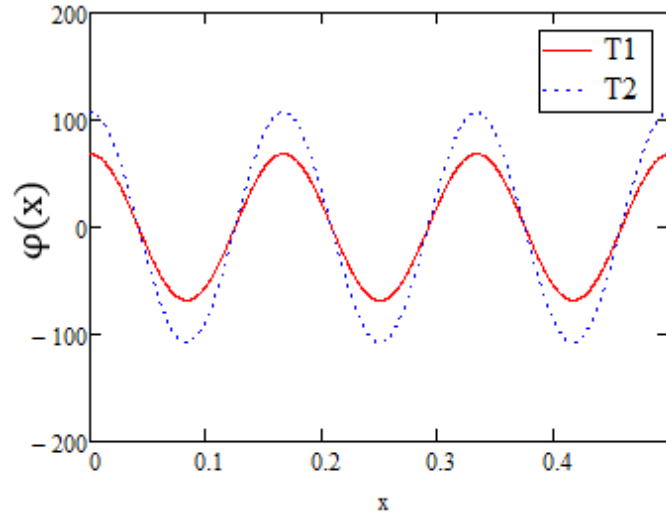
Şekil 5.44. Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli
($T_1=8.840$, $T_2=13.30$, $n=3$. mod).



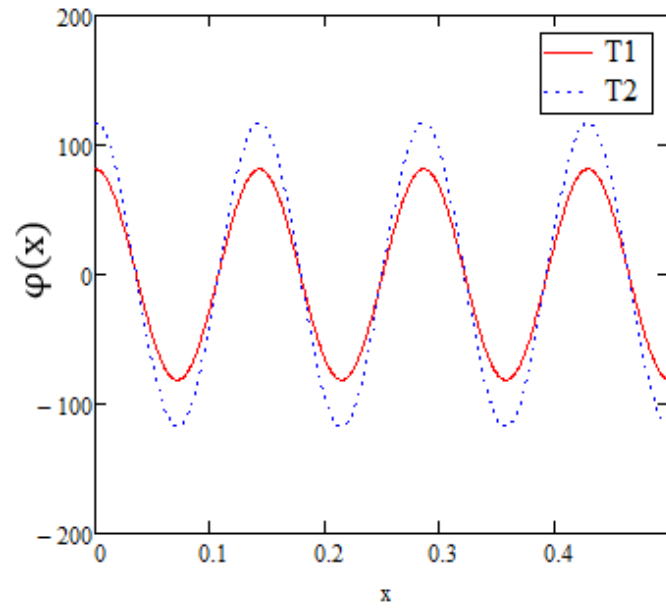
Şekil 5.45. Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli
($T_1=11.35$, $T_2=14.59$, $n=4$. mod).



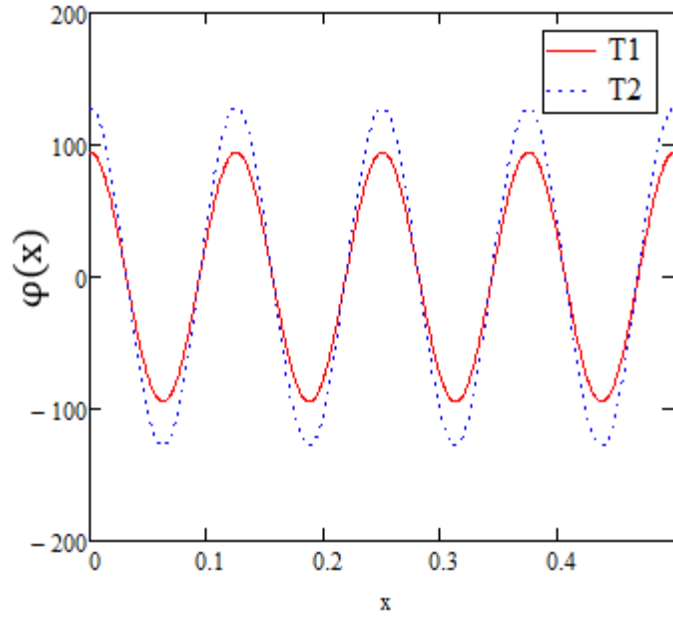
Şekil 5.46. Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli
($T_1=13.61$, $T_2=15.84$, $n=5$. mod).



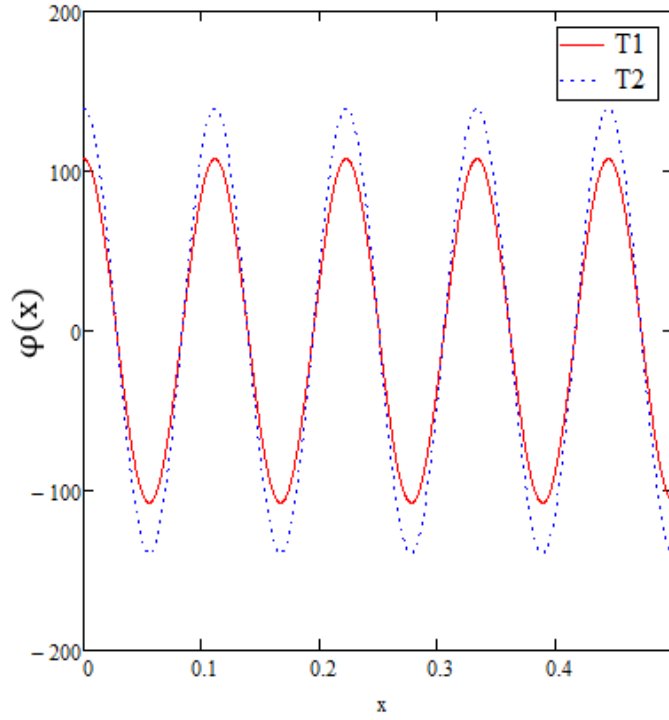
Şekil 5.47. Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli
($T_1=15.67$, $T_2=17.04$, $n=6$. mod).



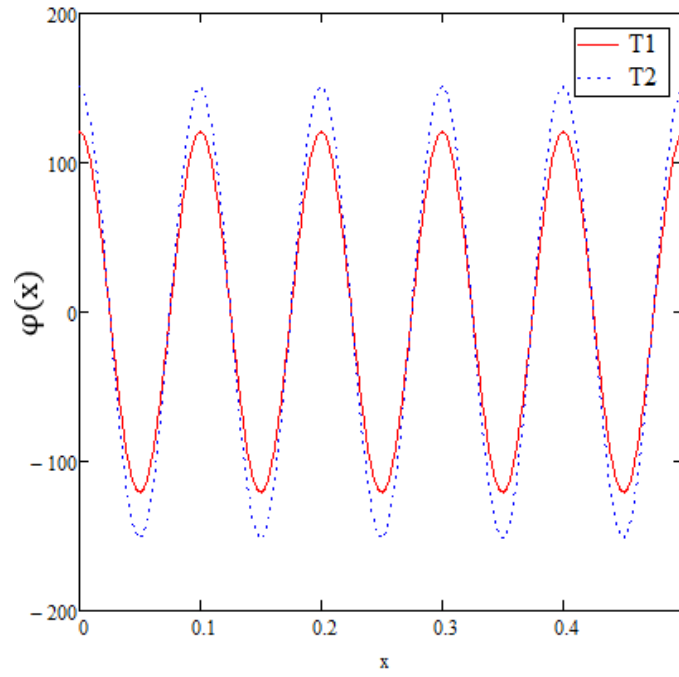
Şekil 5.48. Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli
($T_1=17.57$, $T_2=18.18$, $n=7$. mod).



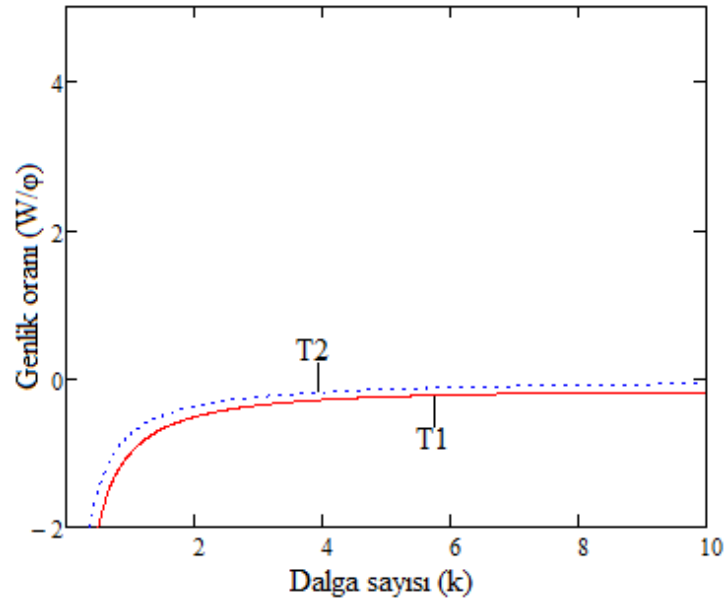
Şekil 5.49. Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli
($T_1=19.31$, $T_2=19.47$, $n=8$. mod).



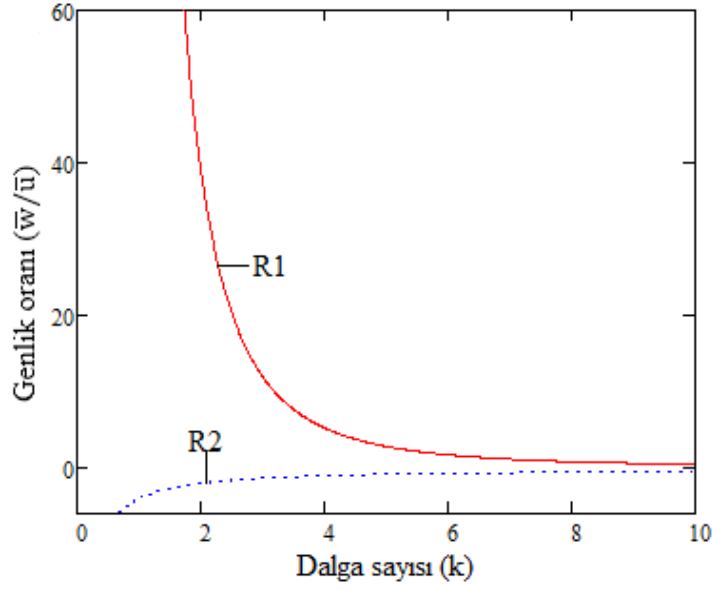
Şekil 5.50. Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli
($T_1=20.93$, $T_2=20.95$, $n=9$. mod).



Şekil 5.51. Her iki ucu basit destekli (B-B) sınır şartındaki mod şekli
($T_1=22.44$, $T_2=23.32$, $n=10$. mod).



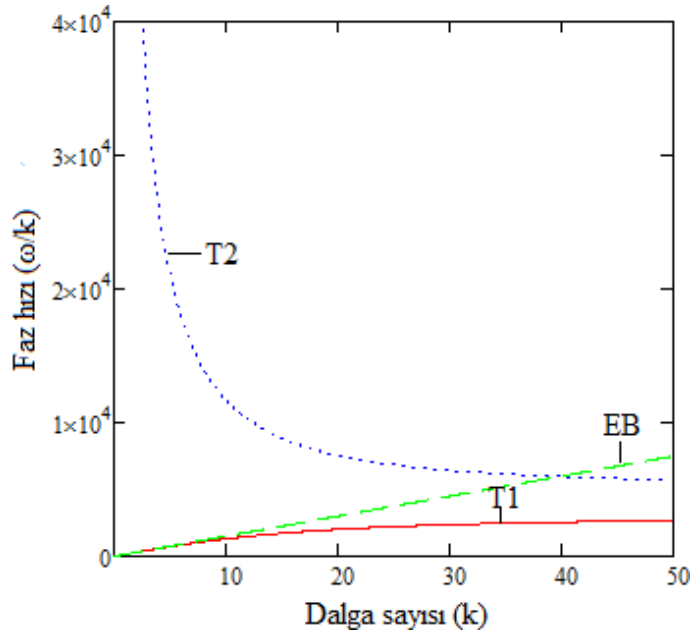
Şekil 5.52. Timoshenko kirişinde genlik oranı



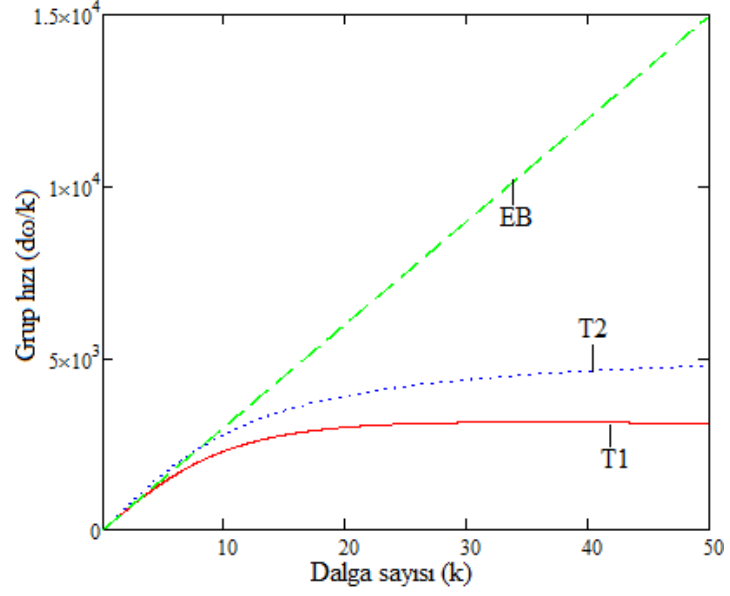
Şekil 5.53. Reddy kirişinde genlik oranı

5.7. Faz Hızı ve Grup Hızı Değerleri

3. bölümde dalga yayılımı çözümü yapılan EB ve Timoshenko kiriş modellerinin faz hızı ve grup hızı değerleri aşağıdaki grafiklerde gösterilmektedir. Timoshenko kirişine ait ikinci spektrum eğrisinin faz hızı yüksek dalga sayılarında, EB ve Timoshenko kirişinin birinci spektrum faz hızına yakınsamaktadır. Yüksek dalga sayılarında ise grup hızı değerleri arasındaki fark ortaya çıkmaktadır.



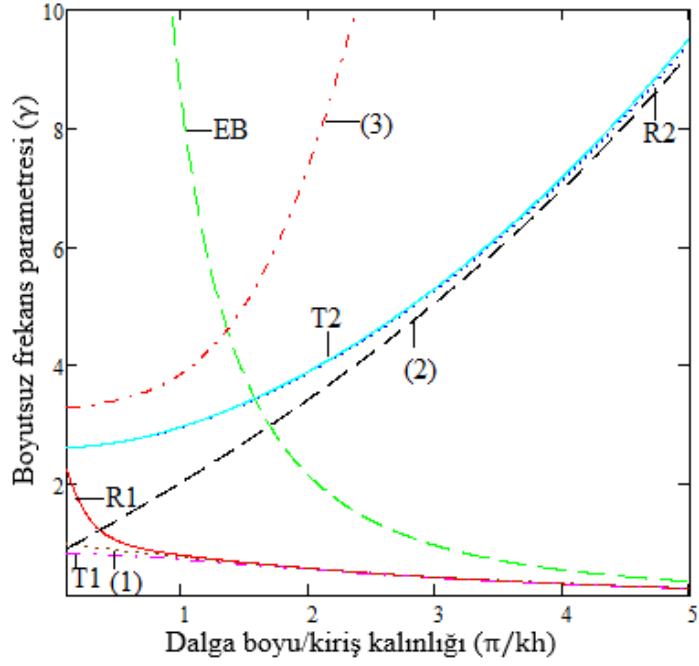
Şekil 5.54. Timoshenko ve EB kirişlerinde faz hızı



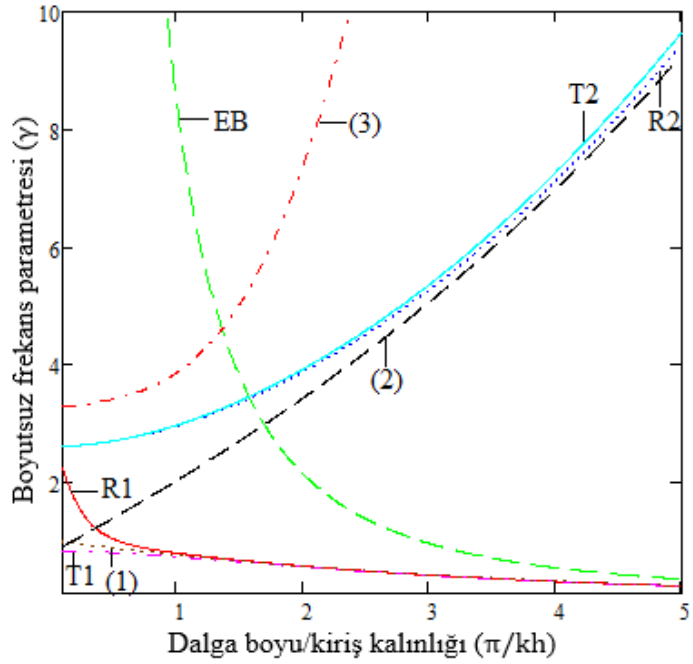
Şekil 5.55. Timoshenko ve EB kirişlerinde grup hızı

5.8. Farklı Düzeltme Faktörlerinin Timoshenko'nun İkinci Spektrumuna Etkisi

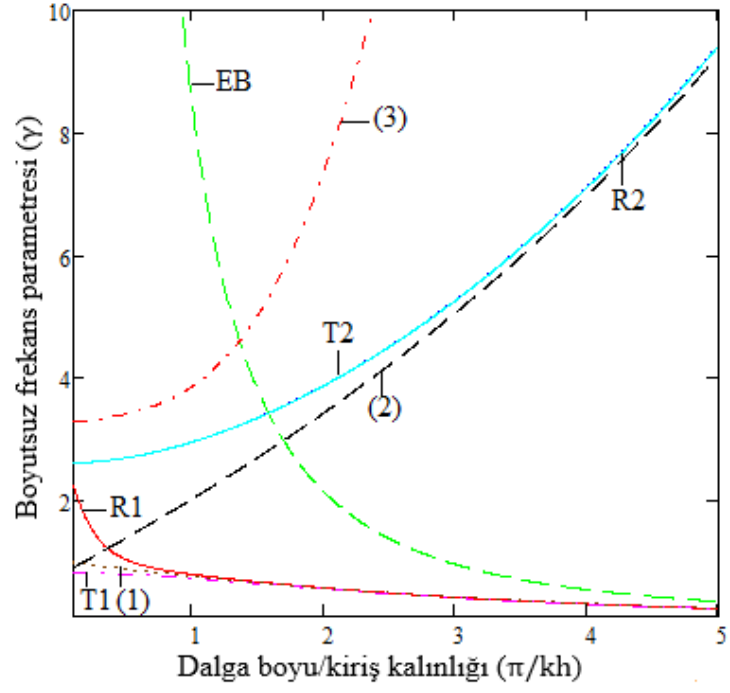
Bu bölümde, Timoshenko kirişinin dalga yayınımlı çözümünde farklı düzeltme faktörleri kullanılarak elde edilen birinci ve ikinci spektrum frekans eğrileri, düzlem elastisite çözümüyle karşılaştırılmaktadır. Böylece farklı düzeltme faktörlerinin kullanılmasıyla Timoshenko'nun ikinci spektrum frekans eğrisinin değişimi gözlemlenmektedir. Aşağıdaki grafiklerde de görüldüğü gibi, $\kappa_2 = 0.84651$ yerine $\kappa_2 = 0.80811$ veya $\kappa_2 = 0.79$ alındığında, Timoshenko'nun ikinci spektrum frekans eğrisi (T2), 2. düzlem elastisite eğrisine (2) daha da yakınsamaktadır.



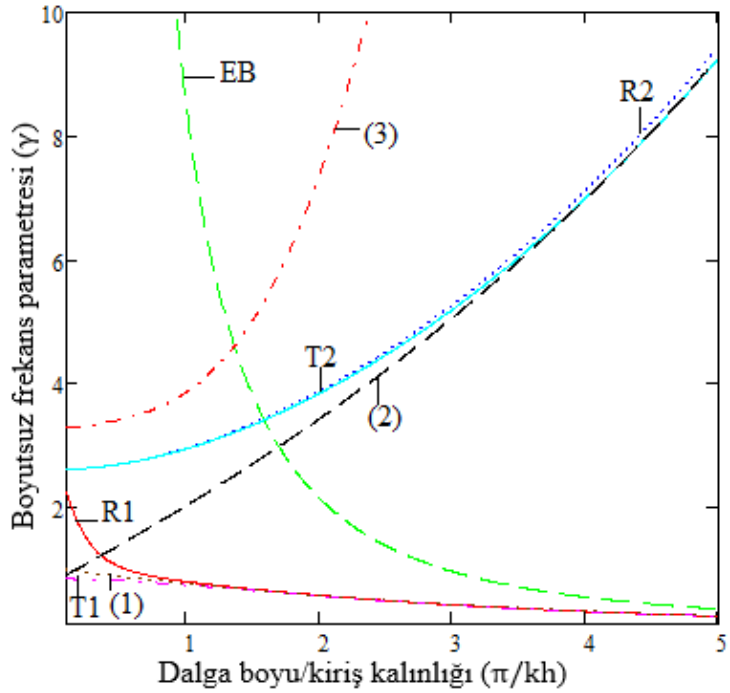
Şekil 5.56. Farklı düzeltme faktörleri kullanılarak oluşturulan dalga yayılım eğrileri ($\kappa_1 = 0.833$, $\kappa_2 = 0.833$, $\nu = 0.3$).



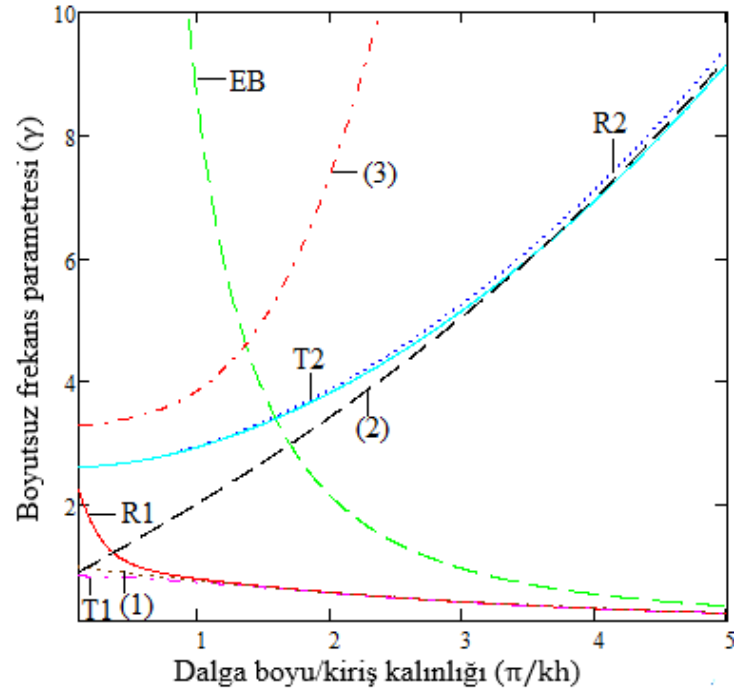
Şekil 5.57. Farklı düzeltme faktörleri kullanılarak oluşturulan dalga yayılım eğrileri ($\kappa_1 = 0.833$, $\kappa_2 = 0.84651$, $\nu = 0.3$).



Şekil 5.58. Farklı düzeltme faktörleri kullanılarak oluşturulan dalga yayılım eğrileri
 $(\kappa_1 = 0.833, \kappa_2 = 0.81923, \nu = 0.3)$.



Şekil 5.59. Farklı düzeltme faktörleri kullanılarak oluşturulan dalga yayılım eğrileri
 $(\kappa_1 = 0.833, \kappa_2 = 0.80811, \nu = 0.3)$.



Şekil 5.60. Farklı düzeltme faktörleri kullanılarak oluşturulan dalga yayılım eğrileri
 $(\kappa_1 = 0.833, \kappa_2 = 0.79, \nu = 0.3)$.

BÖLÜM 6

GENEL SONUÇLAR

Bu çalışmada, dikdörtgen kesitli izotropik kirişlerin klasik kiriş teorisi ve yüksek mertebeli kayma deformasyon teorileri kullanılarak serbest titreşim analizi yapılmıştır. Kiriş teorilerine ait diferansiyel hareket denklemleri ve genel sınır koşulları Hamilton' un Varyasyonel İlkesi ile çıkarılmıştır. Diferansiyel hareket denklemleri çıkarılan kiriş teorileri ile ilk olarak dalga yayılımı çözümü yapılarak her bir kiriş teorisine ait dalga bozunma eğrileri elde edilmiştir. Klasik kiriş teorisi olarak da adlandırılan EB kiriş teorisinde bir adet dalga bozunma eğrisi gözlenirken, kayma etkilerinin yanında dönme etkilerinin de dikkate alındığı Timoshenko kiriş teorisinde ve düzlem içi yer değiştirmelerin kalınlık koordinatına bağlı bir şekil fonksiyonu ile yüksek mertebeden değiştiği, kiriş yüzeylerinde kayma gerilmelerinin sıfır olması şartını sağlayan Reddy kiriş teorisinde ise ikişer adet dalga bozunma eğrileri gözlemlenmiştir. Elde edilen dalga bozunma eğrileri farklı Poisson oranlarında düzlem elastisite çözümü ile kıyaslanmış ve Timoshenko' nun ikinci spektrum frekans değerlerinin fiziksel anlamı tartışılmıştır. Yüksek dalga boylarında, Timoshenko ve Reddy kiriş teorilerinin ikinci spektrum eğrilerinin ikinci düzlem elastisite eğrisi ile uyumlu olduğu görülmektedir. Elde edilen bu sonuç ile daha önceki yapılan çalışmalarda varlığı ispatlanan ancak fiziksel anlamı günümüzde de tartışma konusu olan Timoshenko' nun ikinci spektrum frekans değerlerinin ihmal edilmemesi gerektiği ve fiziksel bir anlamının olduğu sonucuna varılmıştır. Ayrıca elde edilen bu sonucu desteklemek için Timoshenko kirişinin uçlarına düzlem içi kuvvet uygulanarak, düzlem içi kuvvetin Timoshenko' nun ikinci spektrum frekans eğrisine olan etkisi gösterilmiştir. Daha önceki çalışmalarda, Timoshenko' nun birinci spektrumunda eğilme ve kayma açılarının eş fazlı, ikinci spektrumda ise bu açıların eş fazlı olmadığı gösterilmiştir. Bunun üzerine bazı araştırmacılar ikinci spektrum frekans değerlerinin ihmal edilmesi gerektiğini ve fiziksel bir anlamının olmadığını belirtmiştir. Ancak bu durum düzlem içi kuvvetin dikkate alındığı durumlarda geçerli

değildir. Farklı düzlem içi kuvvetler için yapılan analizlerde Timoshenko kiriş kesitinin kayma açısının, toplam dönme açısına oranına olan etkisi incelendiğinde, ikinci spektrum eğrisinin eş fazlı olduğu görülürken, birinci spektrum frekans eğrisinin zıt fazlı olduğu görülmüştür. Reddy kiriş teorisinde, farklı düzlem içi kuvvetler için yapılan analizlerde ise birinci ve ikinci spektrum frekans eğrilerinin eş fazlı olduğu görülmektedir.

Timoshenko' nun şekil faktörü olarak da adlandırılan düzeltme faktörünün değeri farklı dalga boylarında bazı araştırmacılar tarafından araştırılmıştır. Dikdörtgen kesitli kirişlerde farklı düzeltme faktörleri kullanılarak yapılan dalga sayısı çözümleri, düzlem elastisite çözümüyle kıyaslanmıştır. Birinci ve ikinci spektrumda ayrı ayrı düzeltme faktörleri kullanılarak yapılan dalga sayısı çözümünde, ikinci spektrum eğrisinin ikinci düzlem elastisite eğrisi ile olan değişimi incelenmiştir. Yapılan bu analizlerde, ikinci spektrum da kullanılan farklı düzeltme faktörü değerlerinde, ikinci spektrum frekans değerleri ikinci düzlem elastisite çözümüyle daha uyumlu sonuçlar vermektedir.

EB, Timoshenko ve Reddy kiriş modellerinin serbest titreşim frekans denklemleri farklı sınır şartları için elde edilmiştir. (B), (A) ve (S) sınır koşullarının farklı kombinasyonlarının etkisi dikkate alınarak elde edilen frekans denklemlerinin çözümleri neticesinde ilk beş moddaki boyutsuz doğal frekans değerleri tablo halinde sunulmuştur. EB, Timoshenko ve Reddy kiriş teorilerinin farklı sınır koşullarında mod şekilleri çizilmiştir. Ayrıca dalga yayını çözümünden faydalanılarak Timoshenko ve Reddy kiriş teorilerine ait maksimum genlik oranları grafiklerle gösterilmiştir. EB ve Timoshenko kiriş modelleri için faz hızı ve grup hızı değerleri bulunmuştur.

KAYNAKLAR

- [1] J. D. Renton, *A check on the accuracy of Timoshenko's beam theory*, Journal of Sound and Vibration, 245, (3), 559-561, 2001.
- [2] Metin Aydogdu, *A general nonlocal beam theory: Its application to nanobeam bending, buckling and vibration*, Physica E, 41, 1651-1655, 2009.
- [3] J. N. Reddy, *Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams*, International Journal of Engineering Science, 45, 288-307, 2007.
- [4] A. Bhaskar, *Elastic waves in Timoshenko beams: the "lost and found" of an eigenmode*, Proc. R. Soc. A, 465, 239-255, 2009.
- [5] N. G. Stephen, S. Puchegger, *On the valid frequency range of Timoshenko beam theory*, Journal of Sound and Vibration, 297, 1082-1087, 2006.
- [6] N. F. J. van Rensburg, A. J. van der Merwe, *Natural frequencies and modes of a Timoshenko beam*, Wave Motion, 44, 58-69, 2006.
- [7] N. G. Stephen, *The second spectrum of Timoshenko beam theory-Further assessment*, Journal of Sound and Vibration, 282, 372-389, 2006.
- [8] K. P. Soldatos, C. Sophocleous, *On shear deformable beam theories: The frequency and normal mode equations of the homogenous orthotropic bickford beam*, Journal of Sound and Vibration, 242, (2), 215-245, 2001.
- [9] T. Kaneko, *On Timoshenko's correction for shear in vibrating beams*, Journal of Physics D: Applied Physics, 8, 1927-1936, 1975.
- [10] G. R. Cowper, *The shear coefficient in Timoshenko beam theory*, Trans ASME Journal of Applied Mechanics, 33, 335-340, 1966.
- [11] N. G. Stephen, M. Levinson, *A second order beam theory*, Journal of Sound and Vibration, 67, (3), 293-305, 1979.
- [12] J. R. Hutchinson, *Shear coefficients for Timoshenko beam theory*, Trans ASME Journal of Applied Mechanics, 68, 87-92, 2001.
- [13] N. G. Stephen, *On a check on the accuracy of Timoshenko's beam theory*, Journal of Sound and Vibration, 257, (4), 809-812, 2002.

- [14] K. T. Chan, K. F. Lai, N. G. Stephen, K. Young, *A new method to determine the shear coefficient of Timoshenko beam theory*, Journal of Sound and Vibration, 330, (14), 3488-3497, 2011.
- [15] R. F. S. Hearmon, *The influence of shear and rotatory inertia on the free flexural vibration of wooden beams*, Br. J. Appl. Phys, 9, 381-388, 1958.
- [16] H. E. Rosinger, I. G. Ritchie. *On Timoshenko's correction for shear in vibrating isotropic beams*, Journal of Physics D: Applied Physics, 10, 1461-1466, 1977.
- [17] R. A. M'endez-S'anchez, A. Morales, J. Flores, *Experimental check on the accuracy of Timoshenko's beam theory*, Journal of Sound and Vibration, 279, 508-512, 2005.
- [18] N. G. Stephen, *Timoshenko's Shear Coefficient from a Beam Subjected to Gravity Loading*, Trans ASME Journal of Applied Mechanics, 47, 121-127, 1980.
- [19] A.I. Manevich, *Dynamics of Timoshenko beam on linear and nonlinear foundation: Phase relations, significance of the second spectrum, stability*, Journal of Sound and Vibration, 344, 209-220, 2015.
- [20] Metin Aydogdu, *Vibration of multi-walled carbon nanotubes by generalized shear deformation theory*, International Journal of Mechanical Sciences, 50, 837-844, 2008.
- [21] G.Prathap, *The two frequency spectra of Timoshenko Beams-A re-assessment*, Journal of Sound and Vibration, 90, (3), 443-446, 1983.
- [22] G.R. Bhashyam, G. Prathap, *The second frequency spectrum of Timoshenko beams*, Journal of Sound and Vibration, 76, (3), 407-420, 1981.
- [23] N. G. Stephen, *The second frequency spectrum of Timoshenko beams*, Journal of Sound and Vibration, 80, (4), 578-582, 1982.
- [24] B. A. H. Abbas, J. Thomas, *The second frequency spectrum of Timoshenko beams*, Journal of Sound and Vibration, 51, (1), 123-137, 1977.
- [25] M. Levinson, D. W. Cooke, *On the two frequency spectra of Timoshenko beams*, Journal of Sound and Vibration, 84, (3), 319-326, 1982.
- [26] Robert W. M. Smith, *Graphical representation of Timoshenko beam modes for clamped-clamped boundary conditions at high frequency: Beyond transverse deflection*, Wave Motion, 45, 785-794, 2008.

- [27] M. Levinson, *A new rectangular beam theory*, Journal of Sound and Vibration, 74, (1), 81-87, 1981.
- [28] Jae-Hoon Kang, *An exact frequency equation in closed form for Timoshenko beam clamped at both ends*, Journal of Sound and Vibration, 333, 3332-3337, 2014.
- [29] V. V. Nesterenko, *A theory for transverse vibrations of the Timoshenko beam*, J. Appl. Maths Mechs, 57, (4), 669-677, 1993.
- [30] Seon M. Han, Haym Benaroya, Timothy Wei, *Dynamics of Transversely Vibrating Beams Using Four Engineering Theories*, Journal of Sound and Vibration, 225, (5), 935-988, 1999.
- [31] Mesut Şimşek, Turgut Kocatürk, *Free vibration analysis of beams by using a third-order shear deformation theory*, Sadhana, 32, (3), 167-179, 2007.
- [32] Bickford, W. B., *A consistent higher order beam theory*, Developments Theoretical and Applied Mechanics, 11, 137-150, 1982.
- [33] Gere J. M, Timoshenko S. P, *Mechanics of Materials*, Chapman & Hall, 1192.
- [34] J. N. Reddy, C. M. Wang, K. H. Lee, *Relationships between bending solutions of classical and shear deformation beam theories*, International Journal of Solids and Structures, 34, (26), 3373-3384, 1997.
- [35] Ufuk Gul, Metin Aydogdu, *Second Spectrum Timoshenko Beam Vibration Analysis*, The 22nd International Congress on Sound and Vibration, Florence, Italy, 2015.
- [36] R. W. Traill-Nash, A. R. Collar, *The effects of shear flexibility and rotary inertia on the bending vibrations of beams*, Quarterly Journal of Mathematics, 6, (2), 186-222, 1953.
- [37] Turgut Kocatürk, Mesut Şimşek, *Free vibration analysis of Timoshenko beams under various boundary conditions*, Sigma J. Eng. Natural Sci., 2005, 30-44, 2005.

ÖZGEÇMİŞ

Ufuk GÜL 1990 yılında İstanbul'da doğdu. Orta öğrenimini Üsküdar Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2009 yılında Uludağ Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Makina Mühendisliği Bölümü'nde lisans eğitimine başladı ve 2013 yılında mezun oldu. 2014 yılında Trakya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Makina Mühendisliği Ana Bilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı. Aynı yıl Makine Mühendisliği Bölümü, Mekanik Ana Bilim Dalı'nda Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. Halen Trakya Üniversitesi'nde bu görevine devam etmektedir.