

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**BERNOULLI ALT-DENKLEM FONKSİYON METODUNUN
CAHN-ALLEN VE FISHER DENKLEMLERİNE UYGULANMASI**

**Sibel Şehriban ATAŞ
(151121124)**

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Bölümü**

**Danışman: Prof. Dr. Hasan BULUT
Mayıs-2017**

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BERNOULLI ALT-DENKLEM FONKSİYON METODUNUN CAHN-ALLEN VE
FISHER DENKLEMLERİNE UYGULANMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Sibel Şehriban ATAŞ
151121124

Anabilim Dalı: Matematik Anabilim
Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hasan BULUT

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 09 Mayıs 2017

MAYIS-2017

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BERNOULLI ALT-DENKLEM FONKSİYON METODUNUN CAHN-ALLEN VE
FISHER DENKLEMLERİNE UYGULANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sibel Şehriban ATAŞ

(151121124)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 09.05.2017

Tezin Savunulduğu Tarih: 30.05.2017

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hasan BULUT (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri: Doç. Dr. Reşat YILMAZER (F.Ü)

Doç.Dr. Hacı Mehmet BAŞKONUŞ (M.Ü)

MAYIS-2017

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**BERNOULLI ALT-DENKLEM FONKSİYON METODUNUN CAHN-ALLEN VE
FISHER DENKLEMLERİNE UYGULANMASI**

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

DANIŞMAN

Prof. Dr. Hasan BULUT

HAZIRLAYAN

Sibel Şehriban ATAŞ

ELAZIĞ – 2017

İÇİNDEKİLER

| | <u>Sayfa No</u> |
|---|-----------------|
| ÖNSÖZ | III |
| ÖZET | IV |
| SUMMARY | V |
| ŞEKİLLER LİSTESİ | VI |
| 1. GİRİŞ | 1 |
| 2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER | 3 |
| 3. MATERYAL VE METOTLAR | 6 |
| 3.1 Bernoulli Alt-Denklem Fonksiyon Metodu (BSEFM)..... | 6 |
| 4. METODUN UYGULANMASI | 8 |
| 4.1 Cahn-Allen denkleminde metodun uygulaması..... | 8 |
| 4.1.1 Durum-I..... | 8 |
| 4.1.2 Durum -II..... | 13 |
| 4.2 Fisher denkleminde metodun uygulaması..... | 17 |
| 4.2.1 Durum-I..... | 18 |
| 4.3 Combined KdV-mKdV denkleminde metodun uygulaması..... | 23 |
| 4.3.1 Durum-I..... | 24 |
| 5. SONUÇ | 29 |
| KAYNAKLAR | 31 |
| ÖZGEÇMİŞ | 34 |

ÖNSÖZ

Bu çalışmaya başladığımdan beri zamanlarını, araştırmalarını, bilgi ve birikimlerini esirgemeyen, sonuna kadar destek veren ve titizlikle çalışmalarımı gözden geçiren çok değerli hocalarım Prof. Dr. Hasan BULUT ve Doç. Dr. Hacı Mehmet BAŞKONUŞ'a sonsuz teşekkürlerimi bir borç bilir ve saygılarımı sunarım. Bu yolda beni destekleyen ve hep yanımda olan değerli eşim Deniz ATAŞ' a teşekkür ederim.

Sibel Şehriban ATAŞ



ÖZET

Yapılan çalışma beş bölüme ayrılmıştır.

Birinci bölümde, genel olarak bir literatür taraması yapıldı. İkinci bölümde, çalışmamızda başvurduğumuz temel tanım ve teoremler verildi. Üçüncü bölümde, Bernoulli Alt-Denklem Fonksiyon metodunun genel yapısı ele alındı. Dördüncü bölümde, Cahn-Allen, Fisher ve Combined KdV-mKdV denklemlerine Bernoulli alt-denklemler fonksiyon metodu uygulandı. Wolfram Mathematica 9 programı ele alınarak denklemlere ait çözümlerin yüzey grafikleri çizildi. Beşinci bölümde ise, bulunan salınımlı dalga çözümleri hakkında bir sonuç verildi.

SUMMARY

Application of Bernoulli Sub-equation function method to the Cahn-Allen and Fisher equation

This study is consisted of the five chapters.

In the first chapter, a literature survey was made in general. In two chapter, some fundamental definitions and theorems which are necessary in this study was introduced. In chapter three, the general structures of BSEFM has been presented. In chapter four, the travelling wave solution of, Cahn-Allen, Fisher and Combined KdV-mKdV differential equations by using BSEFM 2D and 3D surfaces of results have been plotted with the help of Wolfram Mathematica 9 program. In chapter five, we have arrived a different conclusion with travelling wave solutions.

ŞEKİLLER LİSTESİ

- Şekil-1** (4.14) çözümünün $a_2 = 6, E = 8, -30 < x < 30, -8 < t < 8, t = 0.001$ değerleri için yüzey grafiği.....9
- Şekil 2.**(4.16) çözümünün $a_2 = 16, E = -8, -10 < x < 10, -10 < t < 10, t = 0.1$ değerleri için yüzey grafiği.....10
- Şekil-3** (4.18) çözümünün $d = 17, E = 8, -15 < x < 15, -15 < t < 15, t = 0.01$ değerleri için yüzey grafiği.....11
- Şekil-4** (4.20) çözümünün $a_2 = 7, E = -8, -15 < x < 15, -15 < t < 15, t = 0.001$ değerleri için yüzey grafiği..... 12
- Şekil-5** (4.22) çözümünün $d = 17, E = 8, -15 < x < 15, -15 < t < 15, t = 0.1$ değerleri için yüzey grafiği13
- Şekil-6** (4.27) çözümünün $d = 30, E = 17, -20 < x < 20, -20 < t < 20, t = 0.1$ değerleri için yüzey grafiği.....14
- Şekil-7** (4.29) çözümünün $d = 20, E = 5, -10 < x < 10, -10 < t < 10, t = 0.1$ değerleri için yüzey grafiği.....15
- Şekil-8** (4.43) çözümünün reel kısmının $d = 0.2, E = -0.7, \omega = 4, \rho = 3, -30 < x < 30, -3 < t < 3, t = 0.02$ değerleri için yüzey grafiği 19
- Şekil-9** (4.43) çözümünün imajiner kısmının $d = 0.2, E = -0.7, \omega = 4, \rho = 3, -30 < x < 30, -3 < t < 3, t = 0.02$ değerleri için yüzey grafiği.....19
- Şekil-10** (4.45) çözümünün $d = 0.9, \omega = 4, E = -0.7, \rho = 5, -40 < x < 40, -1.5 < t < 1, t = 0.1$ değerleri için yüzey grafiği..... 20

| | |
|---|----|
| Şekil-11 (4.47) çözümünün reel kısmının $d = 10, \rho = 3, E = 27, \omega = 5, -30 < x < 30,$ $-0.5 < t < 0.5, t = -1$ değerleri için yüzey grafiği..... | 21 |
| Şekil-12 (4.47) çözümünün imajiner kısmının $d = 10, \rho = 3, E = 27, \omega = 5, -30 < x < 30,$ $-0.5 < t < 0.5, t = -1$ değerleri için yüzey grafiği..... | 21 |
| Şekil-13 (4.49) çözümünün reel kısmının $d = 20, E = 7, \omega = 3, \rho = 13, -30 < x < 30,$ $-1 < t < 0.41, t = -0.43$ değerleri için yüzey grafiği..... | 22 |
| Şekil-14 (4.49) çözümünün imajiner kısmının $d = 20, E = 7, \omega = 3, \rho = 13, -30 < x < 30,$ $-1 < t < 0.41, t = -0.43$ değerleri için yüzey grafiği..... | 23 |
| Şekil-15 (4.63) çözümünün reel kısmının $d = 10, \rho = 3, E = 27, \omega = 5, -25 < x < 25,$ $-15 < t < 15, t = 0.5$ değerleri için yüzey grafiği..... | 25 |
| Şekil-16 (4.63) çözümünün imajiner kısmı $d = 10, \rho = 3, E = 27, \omega = 5, -25 < x < 25,$ $-15 < t < 15, t = 0.5$ değerleri için yüzey grafiği..... | 25 |
| Şekil-17 (4.65) çözümünün reel kısmının $a_2 = 15, \alpha = 13, \beta = 25, \mu = 14, E = 8, -25 < x < 25,$ $-15 < t < 15, t = 0.5$ değerleri için yüzey grafiği..... | 26 |
| Şekil-18 (4.65) çözümünün imajiner kısmı $a_2 = 15, \alpha = 13, \beta = 25, \mu = 14, E = 8, -25 < x < 25,$ $-15 < t < 15, t = 0.5$ değerleri için yüzey grafiği..... | 26 |
| Şekil-19 (4.67) çözümünün reel kısmının $a_2 = -0.5, \alpha = 23, \beta = 24, \mu = 14, E = 0.8,$ $-10 < x < 10, -1 < t < 1, t = 0.5$ değerleri için yüzey grafiği..... | 27 |
| Şekil-20 (4.67) çözümünün imajiner kısmının $a_2 = -0.5, \alpha = 23, \beta = 24, \mu = 14, E = 0.8,$ $-10 < x < 10, -1 < t < 1, t = 0.5$ değerleri için yüzey grafiği..... | 27 |

1.GİRİŞ

Günümüzde hayatımızı etkileyen ve hayatımıza yön veren birçok olay diferansiyel denklemlerle açıklanabilmektedir. Yaşamımızdaki olayların birçoğunun matematiksel modellenmesi diferansiyel denklemlerle çözüm bulmuştur. Bu diferansiyel denklemlerin çözümleri, modellenmesi yapılan olayların doğası hakkında insanlara çok büyük katkılar sağlar. Fen ve Mühendislikte ortaya çıkan problemlerin farklı fiziksel özelliklerinin araştırılması, incelenmesi, yorumlanması ve literatüre sunulması son yıllarda birçok araştırmacının başlıca ilgi alanlarından biri haline gelmiştir. Modern zamanın getirmiş olduğu birçok farklı fiziksel problemi tanımlamada daha başarılı sonuçlara sahip diferansiyel denklemler literatüre sunulmuştur. Bu tür diferansiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesi, birbirinden farklı simülasyonlarının oluşturulması her geçen gün daha önem kazanmıştır. Bu yüzden diferansiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılan birçok teknik ve methodlar geliştirilmiştir.

Güncel problemlerin matematiksel modellerinin literatüre sunulması, bilim insanları arasında bir diğer ilgi alanı olmuştur. Bu anlamda, ciddi sağlık problemi oluşturan tüberkülozun matematiksel modellemeleri ve kanserin simülasyonları gibi çalışmalar birçok araştırmacı tarafından ele alınmıştır [1]. A. Atangana ve ekibi, Tüberküloz üzerine birçok önemli çalışma üzerinde yoğunlaşmıştır [2]. Günümüzde, dünyadaki insan popülasyonunun 3'de 1'i tüberküloz hastalığı tanısı verildiği birçok araştırma ispat edilmiştir [3]. Tüberküloz tanısı verilen bir kişi, tedavi edilmeden düzelmeye olasılığı çok kolay olmadığı ve tanısı konmuş bir hastanın, bu hastalıktan tedavisiz kurtulma oranı çok düşük olmasına rağmen, tanı alanının genişletilmesi tedavinin en etkili çaresi bulunarak hastalığın iyileştirilmesi mümkün kılınmıştır. Tüberküloz hastalığının iyileştirilmesi için daha kapsamlı metotlar Dünya Sağlık Örgütü'nün 2010 ifadesinde ortaya koyduğu belirlenmiştir [4]. Bir diğer bilim alanındaki gelişme Osvaldo Chara ve Lutz Brusch ile biyolojideki, sıvıların iletimi ile ilgili çalışmalarını da mevcuttur [5].

Çalışmamızda, Bernoulli Alt-Denklem fonksiyon metodu (BSEFM) [6];

$$u_{xx} - u_t - u^3 + u = 0, \quad (1.1)$$

olarak tanımlanan lineer olmayan Cahn-Allen denklemine uygulamak için ele alınır [23]. Bu denkleme, Bernoulli Alt-Denklem fonksiyon metodunun uygulanmasıyla kompleks üstel,

rasyonel, hiperbolik gibi salınımlı dalga çözümleri elde edilir. Cahn-Allen denklemi kompleks problemleri modellemek için kullanılır.

Hedayati ve çalışma ekibi serbest elektron dinamikleri ve lazer pompalamaya dayalı bir serbest elektron lazeri üzerine araştırma yapmışlardır [7]. Salik ve çalışma ekibi sönmüş kireç plazması lazer tabanlı teşhis üzerinde çalışmışlardır [8].

Tseng ve çalışma ekibi radyasyona bağlı DNA'nın kırılmaları ve bunların revizyonu üzerine detaylı analizler yapmışlardır [9]. Manafian ve çalışma ekibi optik yönlü bazı denklemlerin önemli özelliklerini araştırmışlardır [10-12]. Baumann ve çalışma ekibi Hodgkin-Huxley modelinin bazı özelliklerini incelemiştir [13]. Son yıllarda, bazı araştırmacılar elastik çubuklar üzerine odaklanmıştır. Örneğin N. Umetani ve çalışma ekibi Literatürde karmaşık eğilme ve elastik çubuklar üzerine simüle etmek için yeni bir yöntem sunmuşlardır [14].

J.T. Miller ve çalışma ekibi yatay silindirik kısıtlaması içinde ince elastik çubuk Buckling üzerinde çalışmışlardır [15]. Asimtotik yöntemler bükme germe modelini, Rodríguez-ARoS ve J.M. Viano tarafından elastik çubuklar için kullanılmıştır [16]. J. G. Murphy gergin, ince ve bükülmüş elastik çubukların özelliklerini gözlemlemiştir [17]. M. Luo ve çalışma ekibi Kirchhoff elastik çubuka dayalı bir makale yayınlamıştır [18].

Çalışmamızın bir başka önemli matematiksel modeli ise

$$\omega u_{xx} - u_t + \rho u - \rho u^2 = 0, \quad (1.2)$$

olarak tanımlanan lineer olmayan Fisher diferansiyel denklemdir [25]. Bu denklemde $u(x,t)$ kanser hücrelerinin konsantrasyonunu veya yoğunluğunu simgeler. ω hücrelerin difüzyon katsayısıdır, ρ ise büyüme oranıdır [25]. Aynı zamanda (1.2) Fisher denklemi, medikal olarak sağlıklı dokuyu envaze eden tümörlerin salınımlı dalga yapılarını ifade etmek için de kullanılır. Bu çalışmada ise, BSEFM'u kullanılarak (1.2) Fisher denkleminde daha farklı salınımlı dalga yapıları elde edilmiştir.

Çalışmamızın son olarak ele alınan önemli matematiksel modeli ise

$$u_t + \alpha u_x u + \beta u^2 u_x + u_{xxx} = 0, \quad (1.3)$$

olarak tanımlanan lineer olmayan Combined KdV-mKdV denklemdir [26]. Bu denkleminde BSEFM'nun kullanılmasıyla üstel, rasyonel, kompleks salınımlı dalga çözümleri elde edilmiştir. Bu denklem ses dalgası, termal dalga ve parçacıklar arası gibi salınımlı dalga dağılımlarını tanımlamak için kullanılmaktadır [27,28,29].

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1. Bir diferansiyel denklem, bir bilinmeyen fonksiyonu ve türevlerini içeren denklemdir [19].

Tanım 2.2. Eğer bilinmeyen fonksiyon sadece bir bağımsız değişkene bağlı ise diferansiyel denklem bir *bayağı diferansiyel denklemdir* [19].

Tanım 2.3. Bir diferansiyel denklem birden fazla (iki veya daha fazla) sayıda bağımsız değişken ve bu değişkenlerin fonksiyonu ve fonksiyonun kısmi (parça) türevlerini ihtiva ediyorsa bu diferansiyel denklemlere *kısmi türevli denklemler* denilir [20].

Tanım 2.4. Bir denklem sistemi iki veya daha fazla sayıda bağımsız değişken ile bu değişkenlerin bir fonksiyonu ve fonksiyonun türevlerini ihtiva ediyorsa, bu denklem sistemlerine *kısmi türevli denklem sistemi* denir. Bazen de *kısmi türevli diferansiyel denklem sistemi* denildiği de görülmektedir [20].

Tanım 2.5. Bir diferansiyel denklemde görülen en yüksek mertebeden türevin mertebesine denklemin *mertebesi* denir [20].

Tanım 2.6. Bir diferansiyel denklemin bilinmeyen fonksiyonunun ve onun en yüksek mertebeden türevinin polinom şeklinde yazılışındaki derecesine, denklemin *derecesi* denir [20].

Bir diferansiyel denklem, bilinmeyen fonksiyon y ve bağımsız değişken x olmak üzere,

$$b_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + b_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + b_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + b_1(x) \frac{dy}{dx} + b_0(x)y = g(x), \quad (2.1)$$

biçiminde yazılabiliyorsa bu diferansiyel denkleme *lineer diferansiyel denklem* denir [20].

Tanım 2.7. Bir diferansiyel denklemin herhangi bir çözümüne o denklemin *özel çözümü* denir. Diğer bir ifade ile denklemin gerçekteyeni bilinmeyen fonksiyonda, bulunan keyfi sabitlere özel değerler verilerek elde edilen çözümdür. Diferansiyel denklemin bütün çözümlerinin kapsayan çözüme *genel çözümü* denir. Diğer bir deyişle bu genel çözüme diferansiyel denklemin *genel integrali* denildiğini de görmekteyiz. Bu genel çözümde keyfi sabitlerin bulunduğunu görürüz.

Bir diferansiyel denklemin çözümünde denklemin mertebesi kadar sayıda keyfi sabitler bulunur [20].

Tanım 2.8. Diferansiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin aynı değerleri için verilen şartlar altında çözümlerin bulunması problemine *başlangıç değer problemi* denir. Verilen şartlara da *başlangıç şartları* ismi verilir [20].

Tanım 2.9. Diferansiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin farklı değerleri için verilen şartlar altında çözümlerin bulunması problemine *sınır değer problemi* denir. Verilen şartlara da *sınır şartları* ismi verilir [20].

Diferansiyel denklem bir fiziksel olayın modeli olduğundan kolaylık olması bakımından genellikle ikinci mertebeden sabit katsayılı bir kısmi diferansiyel denklem alınarak sınıflandırmaya gidilmiştir, ikinci mertebeden bir kısmi diferansiyel denklemin genel hali;

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0, \quad (2.2)$$

şekliyle verilebilir. (2.2) da yer alan A,B,C,D,E,F ve G sabitler olsun. Diğer taraftan

$$\Delta = B^2 - 4AC, \quad (2.3)$$

diskriminantı tanımlayalım.

| <i>Diskriminant</i> | <i>Denklem tipi</i> | <i>Örnek</i> | <i>İsmlendirme</i> |
|---------------------|---------------------|----------------------------|--------------------|
| $\Delta > 0$ | <i>hiperbolik</i> | $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0,$ | Dalga denklemi |
| $\Delta = 0$ | <i>parabolik</i> | $u_t - k u_{xx} = 0,$ | Isıdenklemi |
| $\Delta < 0$ | <i>eliptik</i> | $u_{xx} + u_{yy} = 0,$ | Laplace denklemi |

Pratikte bir denklemin çözümünün varlığını tarif etmenin en iyi yolu problemdeki bütün şartları sağlayan ve problemde yerine konulduğunda denklemi sağlayan bir çözüm bulmaktır. Eğer çözümün tekliği gösterilirse denklemin çözümü bulunmuş demektir [21].

Tanım 2.10. $f(x)$ fonksiyonu x_0 da Analitik fonksiyondur denir. Eğer bu fonksiyonun x_0 noktasındaki

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)(x-x_0)^n}{n!}, \quad (2.4)$$

Taylor serisi, x_0 in bir komşuluğunda $f(x)$ 'e yakınsıyorsa. Polinomlar $\text{Sin}x, \text{Cos}x$ ve e^x fonksiyonları her yerde Analitik fonksiyonlar olup, bu biçimdeki fonksiyonların toplamları, farkları ve çarpımları da Analitik fonksiyonlardır [20].

3. MATERYAL VE METOTLAR

3.1. BERNOULLİ ALT-DENKLEM FONKSİYON METODU

Üçüncü bölümde, metodun genel hali verilecektir. Bu metot birçok diferansiyel denklem için yeni salınımlı dalga çözümleri verir [22].

1.Adım: Bağımsız iki değişken ve bağımlı bir değişkeni olan (3.1.1)'deki gibi bir kısmi diferansiyel denklemi ele alıp, inceleyelim;

$$P(u_x, u_t, u_{xt}, u_{xx}, \dots) = 0, \quad (3.1.1)$$

ve

$$u(x, t) = U(\eta), \quad \eta = x - ct, \quad (3.1.2)$$

şeklinde tanımlanmış özel bir dalga dönüşümü, $c \neq 0$ olmak üzere düşünelim. (3.1.2)'yi (3.1.1) denkleminde yazarsak

$$N(U, U', U'', U''', \dots) = 0, \quad (3.1.3)$$

şeklinde bir adi diferansiyel denklem bulunur.

2.Adım: (3.1.3) denklemini için deneme çözümü

$$U = \sum_{i=0}^n a_i F^i, \quad (3.1.4)$$

ve

$$F' = bF + dF^M, \quad b \neq 0, \quad d \neq 0, \quad M \in \mathbb{R} - \{0, 1\}, \quad (3.1.5)$$

şeklinde olsun. (3.1.5)'teki $F(\eta)$ polinomu bir Bernoulli polinomudur. (3.1.4) ve (3.1.5) denklemleri alıp (3.1.3) denkleminde yazarsak

$$\Omega(F(\eta)) = \rho_s F(\eta)^s + \dots + \rho_1 F(\eta) + \rho_0 = 0, \quad (3.1.6)$$

şeklinde $F(\eta)$ 'i de bulunduran $\Omega(F(\eta))$ polinomuna ait denklem elde edilir. Elde ettiğimiz bu denklemde, balans prensibi gereğince n ve M arasında bir bağıntı buluruz.

3.Adım: $\Omega(F(\eta))$ polinomuna ait katsayıların sıfıra eşitlenmesiyle de,

$$\rho_i = 0, i = 0, \dots, s. \quad (3.1.7)$$

denklem sistemi bulunur. Elde edilen bu sistemin çözülmesiyle a_0, \dots, a_n katsayılarına ait değerler bulunur.

4.Adım: (3.1.5) Bernoulli denkleminin bildiğimiz yöntemle çözüldüğünde b ve d 'ye ait

$$F(\eta) = \left[\frac{-d}{b} + \frac{c}{e^{b(M-1)\eta}} \right]^{\frac{1}{1-M}}, \quad b \neq d, \quad (3.1.8)$$

$$F(\eta) = \left[\frac{(c-1) + (c+1) \tanh\left(\frac{b(1-M)\eta}{2}\right)}{1 - \tanh\left(\frac{b(1-M)\eta}{2}\right)} \right]^{\frac{1}{1-M}}, \quad b = d, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (3.1.9)$$

şeklinde iki farklı durum buluruz. (3.1.8) ve (3.1.9) çözümlerinin iki farklı durumu göz önüne alınarak (3.1.4) denkleminde ait bazı yeni analitik çözümler bulunabilir. Çalışmamızda sunduğumuz bu metotla elde edilen analitik çözümlerin fiziksel yorumlarının daha anlaşılabilir olması için, parametrelerin uygun değerleri göz önüne alınarak yüzey grafiklerini Wolfram Mathematica 9 programından yararlanılarak çizdik.

4. METODUN UYGULANMASI

Bu bölümde, ele aldığımız metot kullanılarak lineer olmayan Cahn-Allen, Fisher ve Combined KdV-mKdV denklemlerinin rasyonel, üstel, hiperbolik ve kompleks fonksiyon çözümler gibi yeni salınımlı dalga çözümleri bulunmuştur.

4.1. Cahn-Allen denkleminin BSEFM'nun uygulanması

$$u_{xx} - u_t - u^3 + u = 0, \quad (4.1)$$

lineer olmayan Cahn-Allen denklemi [23] olarak bilinen diferansiyel denklemi göz önüne alalım. (4.1) denklemi için

$$u(x, t) = U(\eta) = U, \quad \eta = x - ct, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U', \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -cU', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = U'', \quad (4.3)$$

dönüşümünü ele alalım. Burada c reel sabittir. (4.3), (4.1)'de yerine yazılırsa

$$U'' + cU' - U^3 + U = 0, \quad (4.4)$$

şeklinde lineer olmayan adi diferansiyel denkleme dönüşür.

$$U = \sum_{i=0}^n a_i F^i, \quad (4.5)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$F' = bF + dF^M, \quad b \neq 0, \quad d \neq 0, \quad M \in \mathbb{R} - \{0, 1\}, \quad (4.6)$$

dir. (4.5) denkleminin birinci ve ikinci mertebeden türevleri için

$$U' \approx F^{n-1+M}, \quad (4.7)$$

$$U'' \approx F^{n-2+2M}, \quad (4.8)$$

eşitlikleri yazılabilir. Balans prensibince, U^3 ve U'' terimleri dikkate alındığında;

$$M = n + 1, \quad (4.9)$$

şeklinde bulunur.

4.1.1 Durum-1:

(4.9)'da ele aldığımız denklemde $M = 3$ ve $n = 2$ için, U , U' ve U'' ,

$$U = a_0 + a_1 F + a_2 F^2, \quad (4.10)$$

$$U' = a_1 b F + a_1 d F^3 + 2a_2 b F^2 + 2a_2 d F^4, \quad (4.11)$$

ve

$$U'' = a_1 b^2 F + 4a_2 b^2 F^2 + 2a_1 b d F^3 + 14a_2 b d F^4 + 3a_1 d^2 F^5 + 8a_2 d^2 F^6, \quad (4.12)$$

⋮

şeklinde hesaplanır. (4.10) , (4.11) ve (4.12)'de elde ettiğimiz değerleri (4.4) de yerine yazarsak F 'nin birçok kuvvetini içeren terimlerinden meydana gelen bir denklem buluruz. Denklem sisteminin oluşması için F 'nin aynı kuvvetinden olan terimlerine ait bütün katsayılarını sıfıra eşitleyerek alırız. Bu denklem sistemi Wolfram Mathematica 9 programı yardımıyla çözümlenerek aşağıdaki gibi sıralanır;

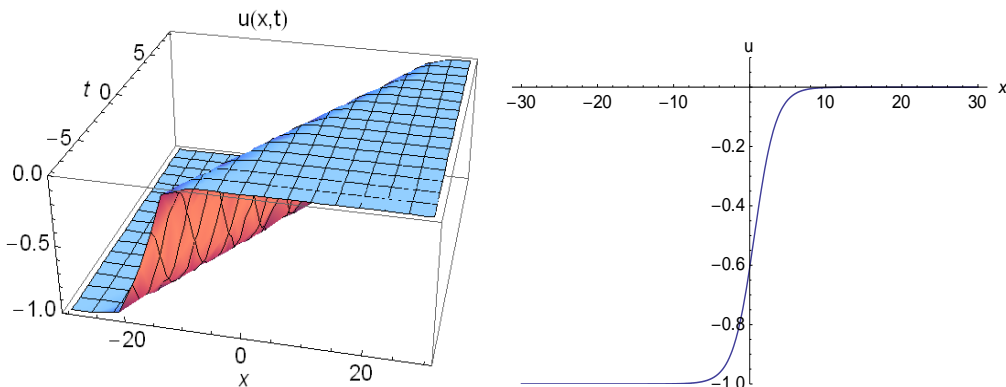
Durum 1.a.

$$a_0 = -1, a_1 = 0, b = \frac{1}{2\sqrt{2}}, d = -\frac{a_2}{2\sqrt{2}}, c = \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad (4.13)$$

şeklinde olup (4.13)'deki sayılar, (4.10)' da yazılırsa, ele alınan Cahn-Allen denklemi için bir çözümü

$$u_1(x, t) = -E \left[E + a_2 e^{\left(\frac{-3t + x}{2 + \sqrt{2}} \right)} \right]^{-1}, \quad (4.14)$$

şeklinde elde edilir. Burada a_2, E reel sabitlerdir. (4.1) Cahn-Allen denklemine BSEFM ile elde edilen $u_1(x, t)$ üstel fonksiyon çözümünün yüzey grafikleri Wolfram Mathematica 9 programı yardımıyla bulunmuştur.



Şekil-1 (4.14) çözümünün $a_2 = 6, E = 8, -30 < x < 30, -8 < t < 8, t = 0.001$ için yüzey grafiği

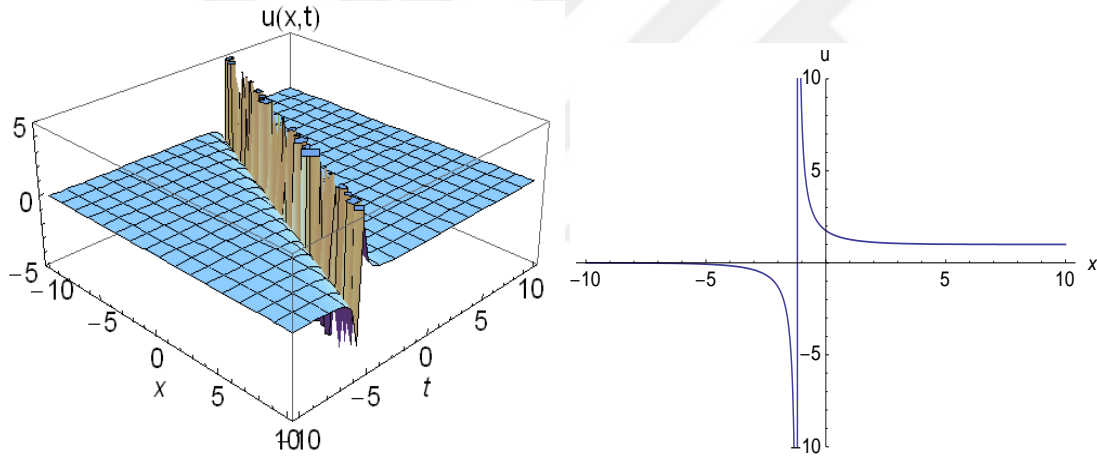
Durum 1b.

$$a_0 = 0, a_1 = 1, b = \frac{1}{2\sqrt{2}}, d = -\frac{a_2}{2\sqrt{2}}, c = -\frac{3}{\sqrt{2}}, \quad (4.15)$$

şeklinde olup (4.15) te bulunan sayılar (4.10) da yazılırsa,

$$u_2(x,t) = 1 - \frac{E}{E + e^{\left(\frac{3t+x}{2\sqrt{2}}\right) a_2}}, \quad (4.16)$$

biçiminde denklemin bir diğer çözümü elde edilir. Burada a_2, E reel sabitlerdir. (4.1) Cahn-Allen denkleminde BSEFM ile elde edilen $u_2(x,t)$ üstel fonksiyon çözümünün yüzey grafikleri Wolfram Mathematica 9 programı yardımıyla bulunmuştur.



Şekil-2 (4.16) çözümünün $a_2 = 16, E = -8, -10 < x < 10, -10 < t < 10, t = 0.1$ için yüzey grafiği

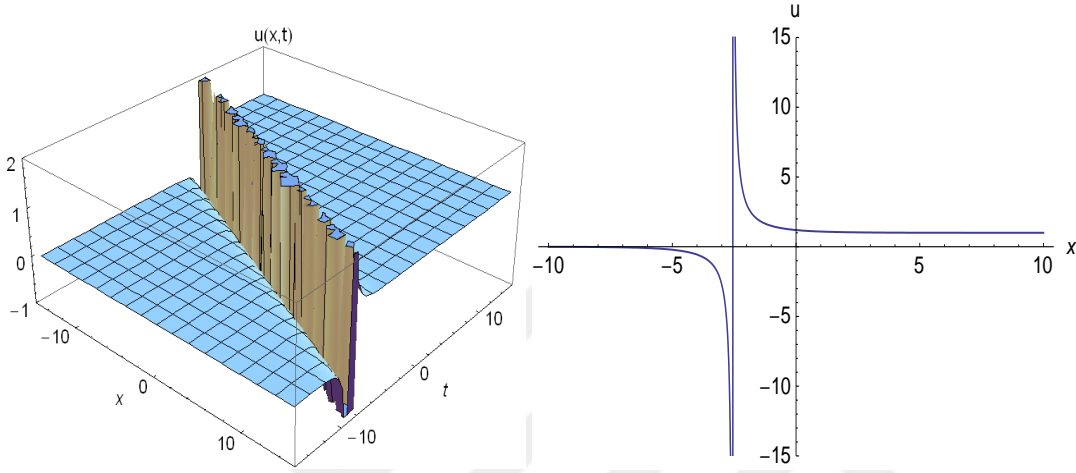
Durum 1c.

$$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = -2\sqrt{2}d, c = \frac{3}{\sqrt{2}}, b = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad (4.17)$$

şeklinde olup (4.17) deki sayılar (4.10) da yazılırsa;

$$u_3(x,t) = 1 + \frac{E}{2\sqrt{2}de^{\left(\frac{3t+x}{2} + \sqrt{2}\right)} - E}, \quad (4.18)$$

şeklinde bir diğer çözüm daha elde edilir. Burada d, E reel sabitlerdir. (4.1) Cahn-Allen denkleminde BSEFM ile elde edilen $u_3(x,t)$ üstel fonksiyon çözümünün yüzey grafikleri Wolfram Mathematica 9 programı yardımıyla bulunmuştur.



Şekil-3 (4.18) çözümünün $d=17, E=8, -15 < x < 15, -15 < t < 15, t=0.01$ için yüzey grafiği

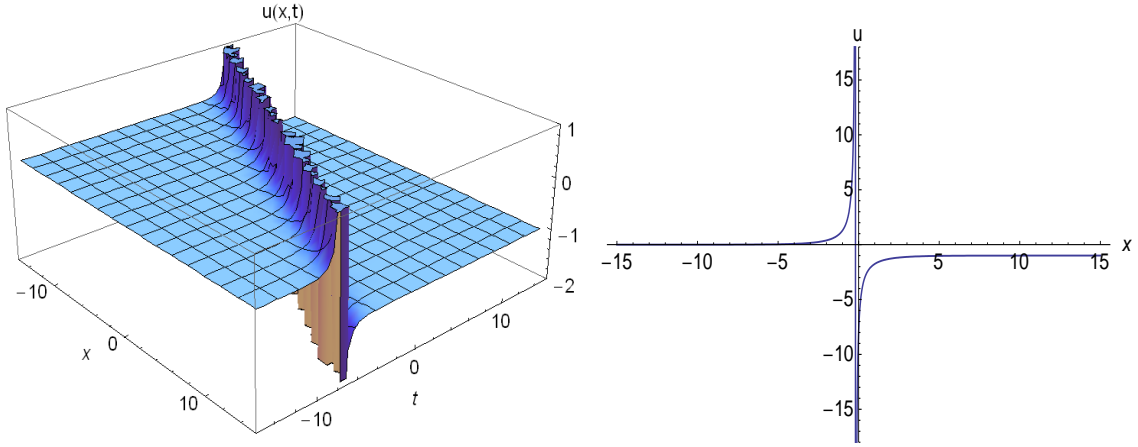
Durum 1d.

$$a_0 = -1, a_1 = 0, b = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, d = \frac{a_2}{2\sqrt{2}}, c = -\frac{3}{\sqrt{2}}, \quad (4.19)$$

şeklinde olup (4.19) daki sayılar (4.10) da yazılırsa, denklemin bir diğer çözümü

$$u_4(x,t) = -1 + \frac{a_2}{e^{\left(\frac{3t+x}{2} + \sqrt{2}\right)} E + a_2}, \quad (4.20)$$

şeklinde elde edilir. Burada a_2, E reel sabitlerdir. (4.1) Cahn-Allen denkleminde BSEFM ile elde edilen $u_4(x,t)$ üstel fonksiyon çözümünün yüzey grafikleri Wolfram Mathematica 9 programı yardımıyla bulunmuştur.



Şekil-4 (4.20) çözümünün $a_2=7, E=-8, -15 < x < 15, -15 < t < 15, t=0.001$ için yüzey grafiği

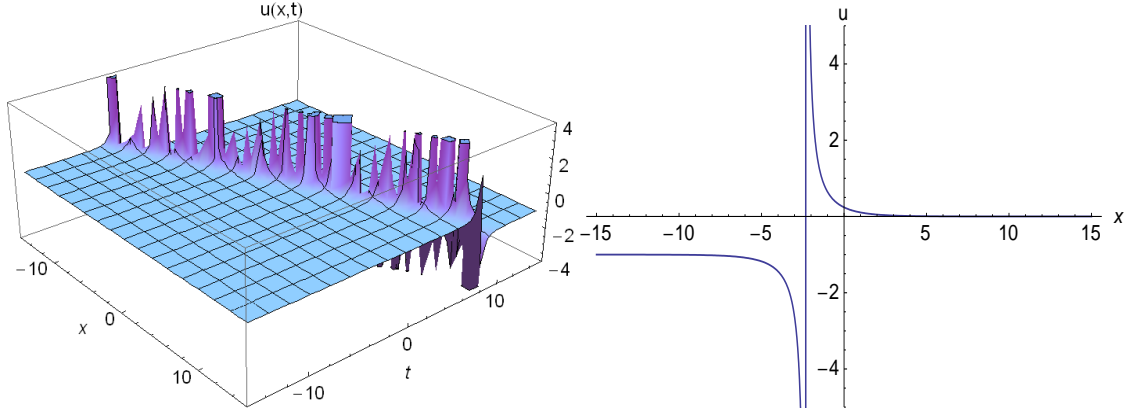
Durum 1e.

$$a_0 = -1, a_1 = 0, a_2 = -2\sqrt{2d}, c = \frac{3}{\sqrt{2}}, b = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad (4.21)$$

şeklinde olup (4.21) deki sayılar (4.10) da yazılırsa, denklemin bir diğer çözümü

$$u_5(x, t) = \frac{E}{2\sqrt{2}de^{\left(\frac{-3t+x}{2} + \frac{x}{\sqrt{2}}\right)} - E}, \quad (4.22)$$

biçiminde bulunur. Burada d, E reel sabitlerdir.(4.1) Cahn-Allen denkleminde BSEFM ile elde edilen $u_5(x, t)$ üstel fonksiyon çözümünün yüzey grafikleri Wolfram Mathematica 9 programı yardımıyla bulunmuştur.



Şekil-5 (4.22) çözümünün $d=17, E=8, -15 < x < 15, -15 < t < 15, t=0.1$ için yüzey grafiği

4.1.2 Durum 2:

(4.9) denkleminde $M = 4$ ve $n = 3$ için,

$$U = a_0 + a_1 F + a_2 F^2 + a_3 F^3, \quad (4.23)$$

$$U' = a_1 b F + a_1 d F^3 + 2a_2 b F^2 + 2a_2 d F^4 + 3a_3 b F^3 + 3a_3 d F^6, \quad (4.24)$$

ve

$$\begin{aligned} U'' &= a_1 b^2 F + 4a_2 b^2 F^2 + 2a_1 b d F^3 + 14a_2 b d F^4 + 3a_1 d^2 F^5 + 8a_2 d^2 F^6 \\ &\quad + 9a_3 b^2 F^3 + 9a_3 b d F^6 + 18a_3 d b F^5 F + 18a_3 d^2 F^9, \end{aligned} \quad (4.25)$$

⋮

şeklinde hesaplanır. (4.23) , (4.24) ve (4.25) gibi elde ettiğimiz denklemleri (4.4) de yerine yazarsak F 'nin birçok kuvvetini içeren terimlerinden meydana gelen bir denklem buluruz. Denklem sisteminin oluşması için F 'nin aynı kuvvetinden olan terimlerine ait bütün katsayılarını sıfıra eşitleyerek alırız. Bu denklem sistemi Wolfram Mathematica 9 programı yardımıyla çözümlenerek aşağıdaki gibi sıralanır;

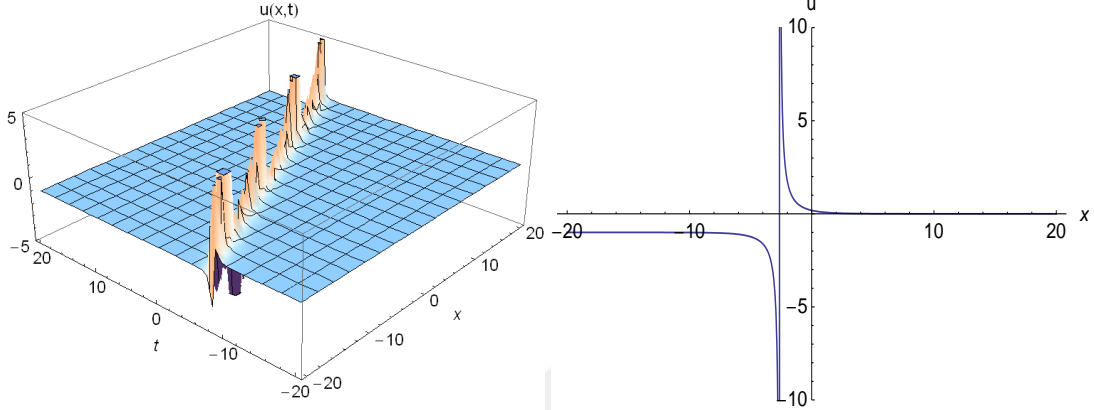
Durum 2.a

$$a_0 = -1, a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = -3\sqrt{2}d, c = \frac{3}{\sqrt{2}}, b = \frac{1}{3\sqrt{2}}, \quad (4.26)$$

şeklinde olup (4.26) daki sayıları (4.23) de yazılırsa, ele alınan Cahn-Allen denklemi için çözümün bir ifadesi

$$u_6(x,t) = E \left[-E + 3\sqrt{2}de^{\frac{-3t+x}{\sqrt{2}}} \right]^{-1}, \quad (4.27)$$

şeklindedir. Burada d, E reel sabitlerdir. (4.1) Cahn-Allen denkleminin BSEFM ile elde edilen $u_6(x,t)$ üstel fonksiyon çözümünün yüzey grafikleri Wolfram Mathematica 9 programı yardımıyla bulunmuştur.



Şekil-6 (4.27) çözümünün $d=30, E=17, -20 < x < 20, -20 < t < 20, t=0.1$ için yüzey grafiği

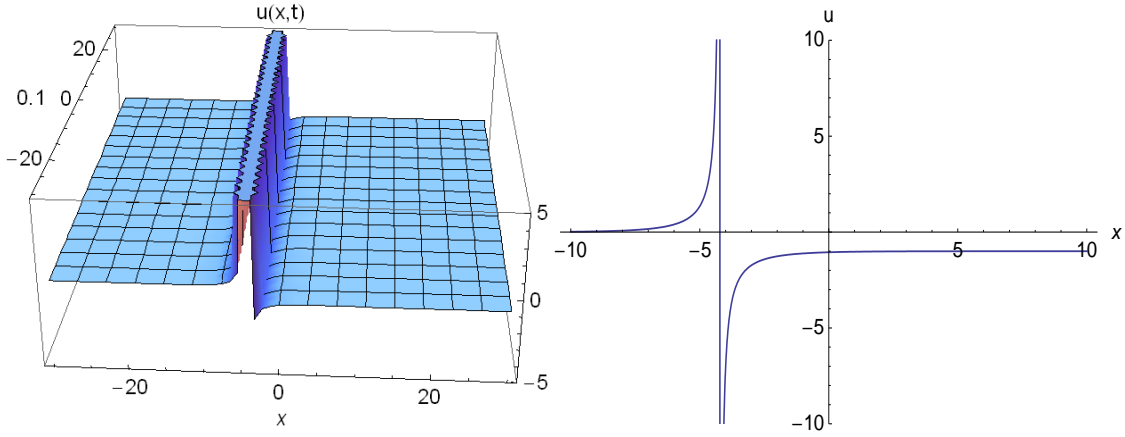
Durum 2.b

$$a_0 = a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 3\sqrt{2}d, c = \frac{-3}{\sqrt{2}}, b = \frac{1}{3\sqrt{2}}, \quad (4.28)$$

şeklinde olup (4.28) deki sayılar, (4.23) de yazılırsa, ele alınan Cahn-Allen denklemi için çözümün bir ifadesi

$$u_7(x,t) = -1 + \left[1 - \frac{3\sqrt{2}de^{\frac{3t+x}{\sqrt{2}}}}{E} \right]^{-1}, \quad (4.29)$$

şeklindedir. Burada d, E reel sabitlerdir. (4.1) Cahn-Allen denkleminin BSEFM ile elde edilen $u_7(x,t)$ üstel fonksiyon çözümünün yüzey grafikleri Wolfram Mathematica 9 programı yardımıyla bulunmuştur.



Şekil-7 (4.29) çözümünün $d = 20, E = 5, -10 < x < 10, -10 < t < 10, t = 0.1$ için yüzey grafiği

Yorum-1. Çalışmamızda bulduğumuz $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7$ çözümleri (4.1) deki ele alınan denklem için bir salınımlı dalga çözümleridir. Referanslarımızdan [23]'de ele alınan diğer yaklaşımlardan yararlanarak bulunan analitik çözümlerin diğerleri ile karşılaştırıldığında, elde edilen çözümler (4.1) de ele aldığımız denklemin yeni salınımlı dalga çözümü olarak ifade edilir [24]. Ayrıca elde edilen bu üstel fonksiyon çözümler hiperbolik fonksiyonların temel özellikleri kullanılarak üstel fonksiyon çözümlerin hiperbolik fonksiyon türünden

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad (a)$$

biçiminde yazılabilir. (a) denkleminde gerekli işlemler yapılırsa

$$e^x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \operatorname{sech}^2(x)}}{\operatorname{sech}(x)}, \quad (b)$$

eşitliği elde edilir. O halde Cahn-Allen denklemi için elde edilen $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7$ çözümleri üstel ve hiperbolik fonksiyonların temel özelliklerine göre aşağıdaki

$$u_1(x, t) = -E \left(E + a_2 e^{\left(\frac{-3t + x}{2 + \sqrt{2}} \right)} \right)^{-1}$$

formunda yazılabilir. Üstel fonksiyon çözümü aşağıdaki şekilde hiperbolik fonksiyon formunda

$$u_1 = -E \left(E + \frac{a_2 \pm a_2 \sqrt{1 - \operatorname{sech}^2(T)}}{\operatorname{sech}(T)} \right)^{-1},$$

yeniden yazılabilir.

Burada $T = -\frac{3t}{2} + \frac{x}{\sqrt{2}}$ dir.

$$u_2(x, t) = 1 - \frac{E}{E + e^{\left(\frac{3t}{2} + \frac{x}{\sqrt{2}}\right)} a_2}.$$

Üstel fonksiyon çözümü aşağıdaki şekilde hiperbolik fonksiyon formunda

$$u_2 = 1 - E \left(E + \frac{a_2 \pm a_2 \sqrt{1 - \operatorname{sech}^2(T)}}{\operatorname{sech}(T)} \right)^{-1},$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

Burada $T = \frac{3t}{2} + \frac{x}{\sqrt{2}}$ dir.

$$u_3(x, t) = 1 + \frac{E}{2\sqrt{2}de^{\left(\frac{3t}{2} + \frac{x}{\sqrt{2}}\right)} - E}.$$

Üstel fonksiyon çözümü aşağıdaki şekilde hiperbolik fonksiyon formunda

$$u_3 = 1 + E \left(\frac{2\sqrt{2}d \pm 2\sqrt{2}d \sqrt{1 - \operatorname{sech}^2(T)}}{\operatorname{sech}(T)} - E \right)^{-1},$$

yeniden yazılabilir.

Burada $T = \frac{3t}{2} + \frac{x}{\sqrt{2}}$ dir.

$$u_4(x, t) = -1 + \frac{a_2}{e^{\left(\frac{3t}{2} + \frac{x}{\sqrt{2}}\right)} E + a_2}.$$

Üstel fonksiyon çözümü aşağıdaki şekilde hiperbolik fonksiyon formunda

$$u_4 = -1 + a_2 \left(\frac{E \pm E \sqrt{1 - \operatorname{sech}^2(T)}}{\operatorname{sech}(T)} + a_2 \right)^{-1},$$

yeniden yazılabilir.

Burada $T = \frac{3t}{2} + \frac{x}{\sqrt{2}}$ dir.

$$u_5(x, t) = \frac{E}{2\sqrt{2}de^{\left(\frac{-3t}{2} + \frac{x}{\sqrt{2}}\right)} - E}.$$

Üstel fonksiyon çözümü aşağıdaki şekilde hiperbolik fonksiyon formunda

$$u_5 = E \left(\frac{2\sqrt{2}d \pm 2\sqrt{2}d\sqrt{1 - \operatorname{sech}^2(T)}}{\operatorname{sech}(T)} - E \right)^{-1},$$

yeniden yazılabilir.

Burada $T = \frac{-3t}{2} + \frac{x}{\sqrt{2}}$ dir.

$$u_6(x, t) = E \left[-E + 3\sqrt{2}de^{\frac{-3t+x}{2+\sqrt{2}}} \right]^{-1}.$$

Üstel fonksiyon çözümü aşağıdaki şekilde hiperbolik fonksiyon formunda yeniden yazılabilir:

$$u_6 = E \left(\frac{-E \operatorname{sech}(T) + 3\sqrt{2}d \pm 3\sqrt{2}d\sqrt{1 - \operatorname{sech}^2(T)}}{\operatorname{sech}(T)} \right)^{-1}.$$

Burada $T = \frac{-3t}{2} + \frac{x}{\sqrt{2}}$ dir.

$$u_7(x, t) = -1 + \left[1 - \frac{3\sqrt{2}de^{\frac{3t+x}{2+\sqrt{2}}}}{E} \right]^{-1}.$$

Üstel fonksiyon çözümü aşağıdaki şekilde hiperbolik fonksiyon formunda yeniden yazılabilir:

$$u_7 = -1 + \left(\frac{E \operatorname{sech}(T) - 3\sqrt{2}d \pm 3\sqrt{2}d\sqrt{1 - \operatorname{sech}^2(T)}}{E \operatorname{sech}(T)} \right)^{-1}.$$

Burada $T = \frac{3t}{2} + \frac{x}{\sqrt{2}}$ dir.

4.2. Fisher denklemine BSEFM'nun uygulanması

Fisher denklemi [25] olarak bilinen

$$\omega u_{xx} - u_t + \rho u - \rho u^2 = 0, \quad (4.30)$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada ω, ρ reel sabitlerdir. (4.30) denklemi

için

$$u(x, t) = U(\mu) = U, \quad \mu = x - ct, \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} = U', \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial t} = -cU',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial[U']}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} = U'',$$
(4.32)

dönüşümünü ele alalım. Burada c reel sabittir. (4.32), (4.30) denkleminde yerine yazılırsa

$$\omega U'' + cU' + \rho U - \rho U^2 = 0, \quad (4.33)$$

şeklinde lineer olmayan adi diferansiyel denkleme dönüşür. Denklemin çözümü (3.4)' e göre

$$U = \sum_{i=0}^n a_i F^i = a_0 + a_1 F + a_2 F^2 + \dots + a_n F^n, \quad (4.34)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$F' = bF + dF^M, \quad b \neq 0, \quad d \neq 0, \quad M \in \mathbb{R} - \{0,1\}, \quad (4.35)$$

dir. (4.34) denkleminin birinci ve ikinci mertebeden türevleri için

$$U' \approx F^{n-1+M}, \quad (4.36)$$

$$U'' \approx F^{n-2+2M}, \quad (4.37)$$

eşitlikleri yazılabilir. Balans prensibince, U^2 ve U'' terimleri dikkate alındığında;

$$2M = n + 2, \quad (4.38)$$

şeklinde bulunur.

4.2.1 Durum-1:

(4.38) ele alınan denklemde $M = 3$ ve $n = 4$ için alırsak, U , U' ve U'' ,

$$U = a_0 + a_1 F + a_2 F^2 + a_3 F^3 + a_4 F^4 \quad (4.39)$$

$$U' = a_1 b F + a_1 d F^3 + 2a_2 b F^2 + 2a_2 d F^4 + 3a_3 b F^3 + 3a_3 d F^5 + 4a_4 b F^4 + 4a_4 d F^6, \quad (4.40)$$

ve

$$U'' = b^2 F a_1 + 4bd F^3 a_1 + 3d^2 F^5 a_1 + 4b^2 F^2 a_2 + 12bd F^4 a_2 + 8d^2 F^6 a_2 + 9b^2 F^3 a_3 + 24bd F^5 a_3 + 15d^2 F^7 a_3 + 16b^2 F^4 a_4 + 40bd F^6 a_4 + 24d^2 F^8 a_4, \quad (4.41)$$

⋮

şeklinde hesaplanır. (4.39), (4.40) ve (4.41)' de elde ettiğimiz değerleri (4.33) de yerine yazarsak F ' nin birçok kuvvetini içeren terimlerinden meydana gelen bir denklem buluruz.

Denklem sisteminin oluşması için F ' nin aynı kuvvetinden olan terimlerine ait

bütün katsayılarını sıfıra eşitleyerek alırız. Bu denklem sistemi Wolfram Mathematica 9 programı yardımıyla çözümlenerek aşağıdaki gibi sıralanır;

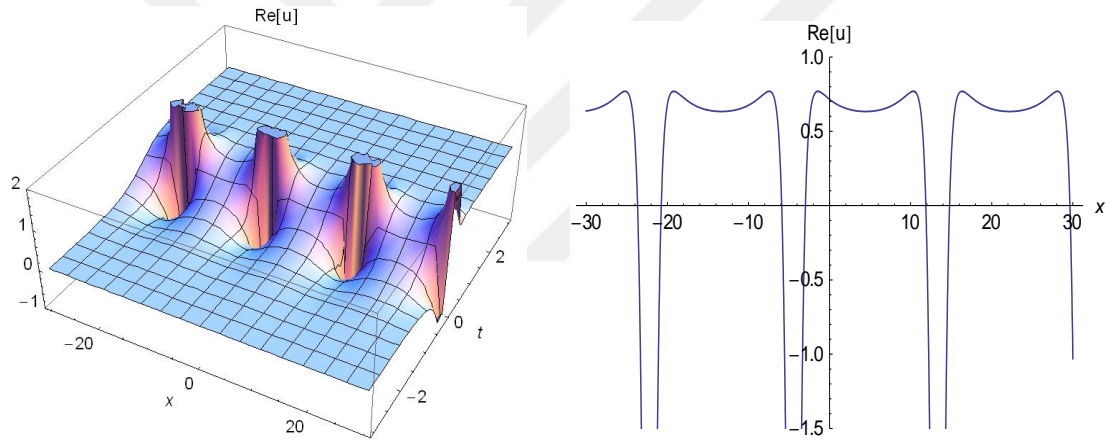
Durum 1a.

$$a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = \frac{24d^2\omega}{\rho}, b = -\frac{i\sqrt{\rho}}{2\sqrt{6}\sqrt{\omega}}, c = \frac{5i\sqrt{\rho}\sqrt{\omega}}{\sqrt{6}}, \quad (4.42)$$

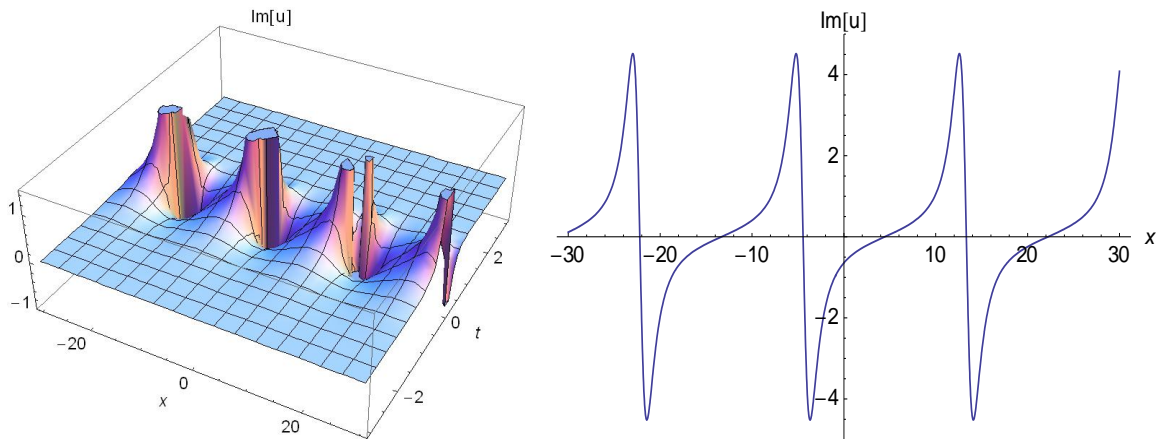
şeklinde olup (4.42)'deki sayılar (4.39)'da yazılırsa, elde alınan Fisher denklemi için çözümü

$$u_1(x,t) = 1 + 24d^2\omega \left(e^{\frac{5t\rho + ix\sqrt{\rho}}{6 + \sqrt{6}\sqrt{\omega}}} E\sqrt{\rho} - 2i\sqrt{6}d\sqrt{\omega} \right)^{-2}, \quad (4.43)$$

şeklinde elde edilir. Burada d, ω, E, ρ reel sabitlerdir. (4.43) çözümünde bulunan parametrelerin uygun fiziki koşullar altındaki değerlerine karşılık gelen yüzey eğrileri aşağıdaki gibi elde edilir:



Şekil-8 (4.43) çözümünün reel kısmının $d = 0.2, E = -0.7, \omega = 4, \rho = 3, -30 < x < 30, -3 < t < 3;$
 $t = 0.02$ için yüzey grafiği



Şekil-9 (4.43) çözümünün imajiner kısmının $d = 0.2, E = -0.7, \omega = 4, \rho = 3, -30 < x < 30$
 $-3 < t < 3, t = 0.02$ için yüzey grafiği

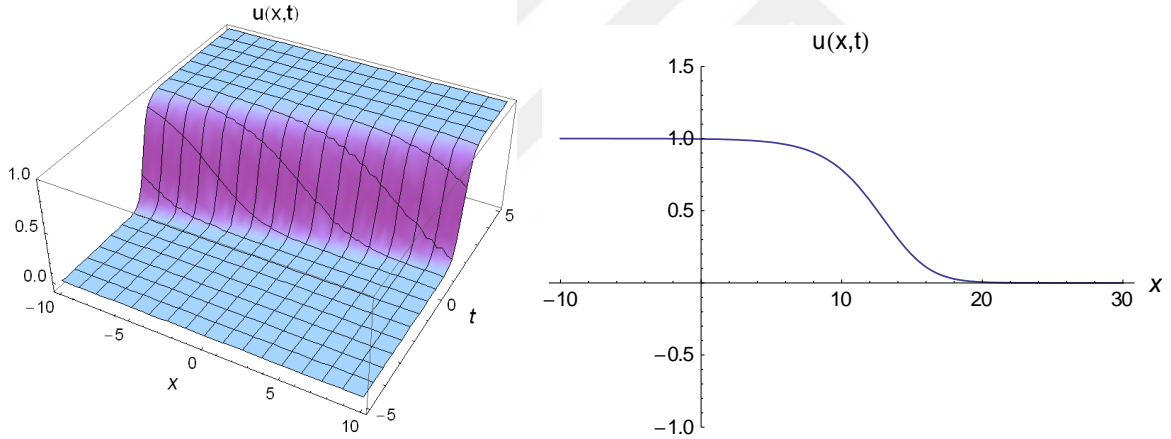
Durum 1b.

$$a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = \frac{4\sqrt{6}d\sqrt{\omega}}{\sqrt{\rho}}, a_3 = 0, a_4 = \frac{24d^2\omega}{\rho}, b = \frac{\sqrt{\rho}}{2\sqrt{6}\sqrt{\omega}}, c = \frac{5\sqrt{\rho}\sqrt{\omega}}{\sqrt{6}}, \quad (4.44)$$

şeklinde olup (4.44)'deki sayılar, (4.39) da yazılırsa, ele alınan Fisher denklemi için çözümü

$$u_2(x, t) = E^2 \sqrt{\rho} \left(E\sqrt{\rho} - 2\sqrt{6}de^{-\frac{5t\rho + x\sqrt{\rho}}{6} + \frac{x\sqrt{\rho}}{\sqrt{6}\sqrt{\omega}}} \sqrt{\omega} \right)^{-2}, \quad (4.45)$$

şeklinde elde edilir. Burada d, ω, E, ρ reel sabitlerdir. (4.45) çözümünde bulunan parametrelerin uygun fiziki koşullar altındaki değerlerine karşılık gelen yüzey eğrileri aşağıdaki gibi elde edilir:



Şekil-10 (4.45) çözümünün $d = 0.9, \omega = 4, E = -0.7, \rho = 5, -10 < x < 10, -5 < t < 5, t = 2$ için yüzey grafiği

Durum 1c.

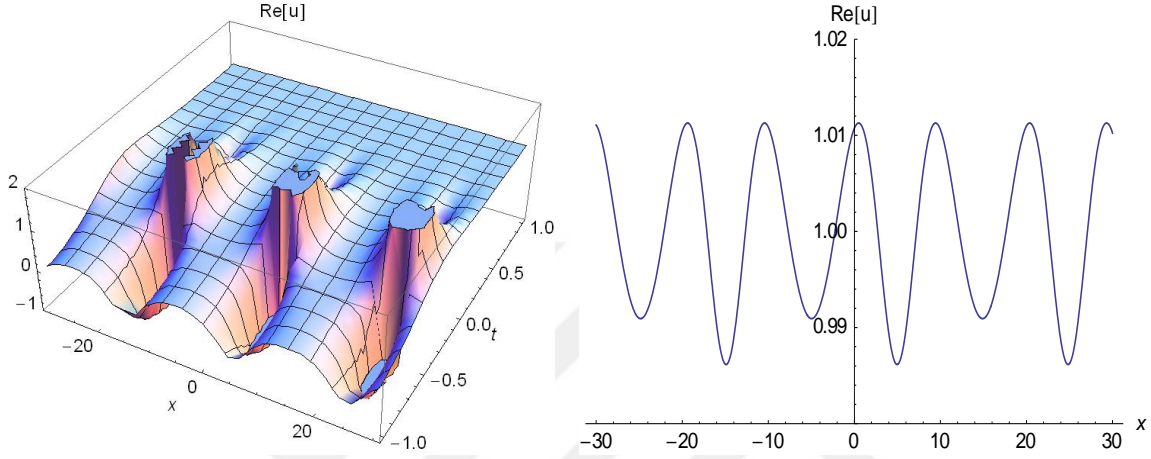
$$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = \frac{4i\sqrt{6}d\sqrt{\omega}}{\sqrt{\rho}}, a_3 = 0, a_4 = \frac{24d^2\omega}{\rho}, \quad (4.46)$$

$$b = \frac{i\sqrt{\rho}}{2\sqrt{6}\sqrt{\omega}}, c = \frac{5i\sqrt{\rho}\sqrt{\omega}}{\sqrt{6}}.$$

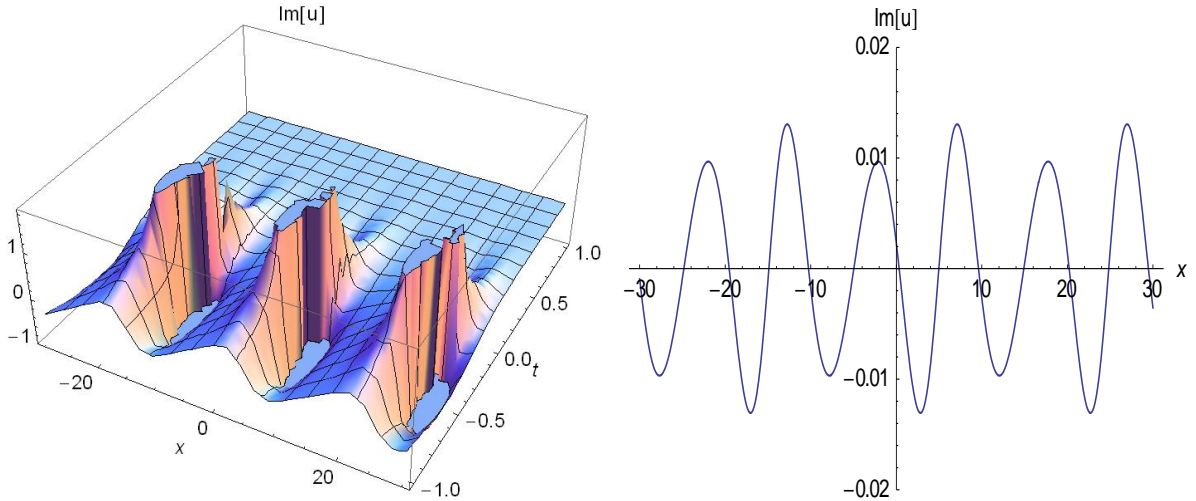
şeklinde olup (4.46)'daki sayılar, (4.39)'da yazılırsa, ele alınan Fisher denklemi için çözümü

$$u_3(x,t) = 1 - E^2 \rho \left(E\sqrt{\rho} + 2i\sqrt{6}de^{\frac{5t\rho + ix\sqrt{\rho}}{6} + \frac{ix\sqrt{\rho}}{\sqrt{6}\sqrt{\omega}}}\sqrt{\omega} \right)^{-2}, \quad (4.47)$$

şeklinde bir diğer çözüm daha elde edilir. Burada d, ω, E, ρ reel sabitlerdir. (4.47) çözümünde bulunan parametrelerin uygun fiziki koşullar altındaki değerlerine karşılık gelen yüzey eğrileri aşağıdaki gibi elde edilir:



Şekil-11 (4.47) çözümünün reel kısmı $d = 10, \rho = 3, E = 27, \omega = 5, -30 < x < 30$
 $-1 < t < 1, t = 0.02$ için yüzey grafiği



Şekil-12 (4.47) çözümünün imajiner kısmı $d = 10, \rho = 3, E = 27, \omega = 5, -30 < x < 30$
 $-1 < t < 1, t = 0.02$ için yüzey grafiği

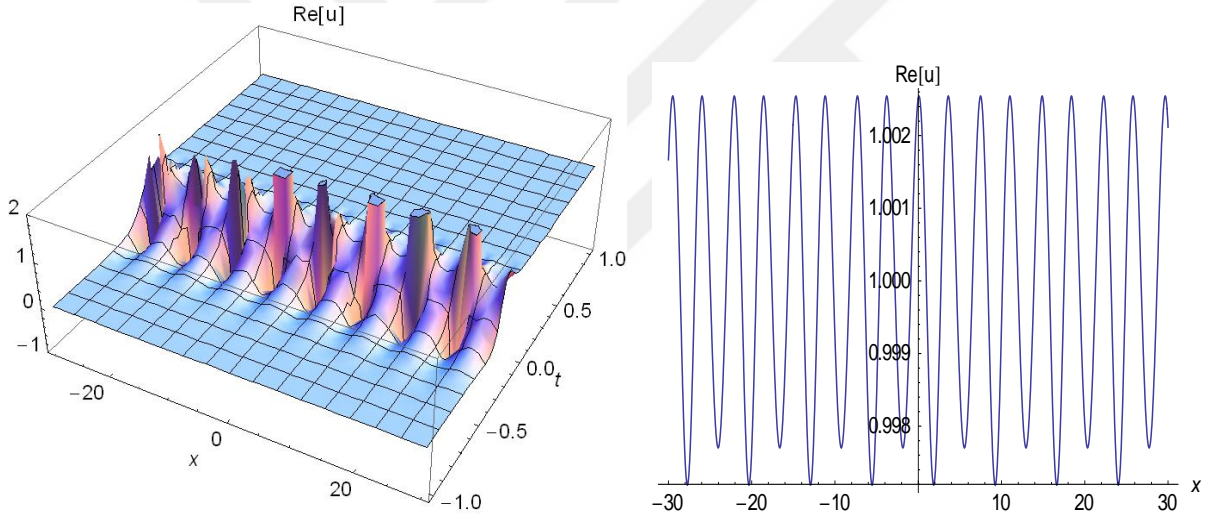
Durum 1d.

$$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = -\frac{4i\sqrt{6}d\sqrt{\omega}}{\sqrt{\rho}}, a_3 = 0, a_4 = \frac{24d^2\omega}{\rho},$$
$$b = -\frac{i\sqrt{\rho}}{2\sqrt{6}\sqrt{\omega}}, c = -\frac{5i\sqrt{\rho}\sqrt{\omega}}{\sqrt{6}},$$
(4.48)

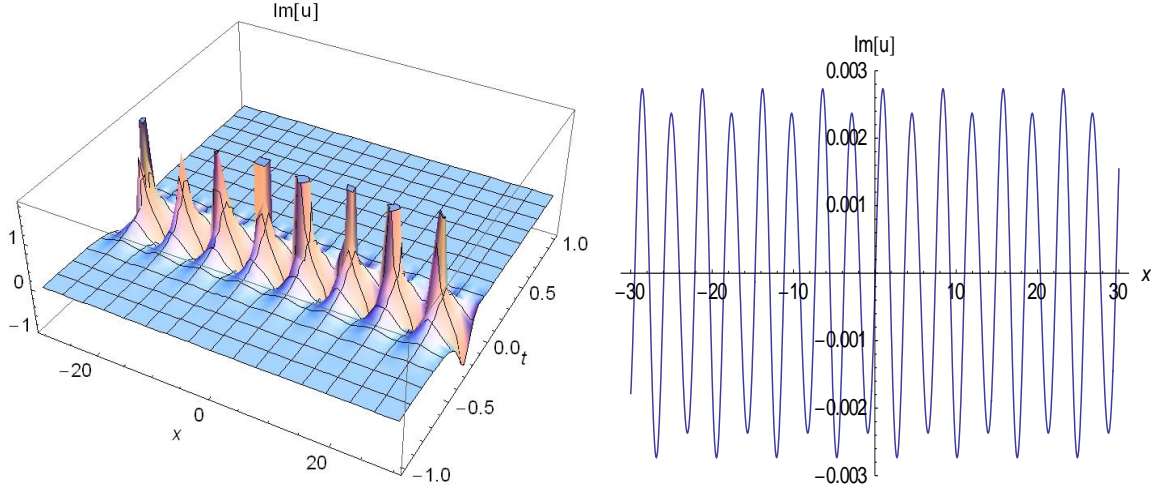
şeklinde olup (4.48)'deki sayılar, (4.39) da yazılırsa, Fisher denklemi bir çözümü

$$u_4(x,t) = \frac{4i\sqrt{6}de^{-\frac{5t\rho}{6} + \frac{ix\sqrt{\rho}}{\sqrt{6}\sqrt{\omega}}} E\sqrt{\rho}\sqrt{\omega} + 24d^2\omega}{\left(ie^{-\frac{5t\rho}{6} + \frac{ix\sqrt{\rho}}{\sqrt{6}\sqrt{\omega}}} E\sqrt{\rho} + 2\sqrt{6}d\sqrt{\omega}\right)^2},$$
(4.49)

şeklinde elde edilir. Burada d, ω, E, ρ reel sabitlerdir. (4.49) çözümünde bulunan parametrelerin uygun fiziki koşullar altındaki değerlerine karşılık gelen yüzey eğrileri aşağıdaki gibi elde edilir:



Şekil-13 (4.49) çözümünün reel kısmının $d = 20, E = 7, \omega = 3, \rho = 13, -30 < x < 30$
 $-1 < t < 1, t = 0.1$ için yüzey grafiği



Şekil-14 (4.49) çözümünün imajiner kısmının $d = 20, E = 7, \omega = 3, \rho = 13, -30 < x < 30$
 $-1 < t < 1, t = 0.1$ için yüzey grafiği

4.3. Combined KdV-mKdV denkleminin BSEFM'nun uygulanması

Combined KdV-mKdV denklemini [29] olarak bilinen

$$u_t + \alpha u_x u + \beta u^2 u_x + u_{xxx} = 0, \quad (4.50)$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada α, β reel sabitlerdir. (4.50) denklemini için

$$u(x, t) = U(\zeta) = U, \quad \zeta = \mu(x - ct), \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu U', \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -c\mu U', \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \mu^3 U''', \quad (4.52)$$

dönüşümünü ele alalım. Burada c ve μ reel sabittir. (4.52), (4.50) denkleminde yerine yazılırsa

$$6\mu^2 U'' + 2\beta U^3 + 3\alpha U^2 - 6cU = 0, \quad (4.53)$$

şeklinde lineer olmayan adi diferansiyel denkleme dönüşür. Denkleminin çözümü (3.4)'e göre

$$U = \sum_{i=0}^n a_i F^i = a_0 + a_1 F + a_2 F^2 + \dots + a_n F^n, \quad (4.54)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$F' = bF + dF^M, \quad b \neq 0, \quad d \neq 0, \quad M \in \mathbb{R} - \{0, 1\}, \quad (4.55)$$

dir. (4.54) denkleminin birinci ve ikinci mertebeden türevleri için

$$U' \approx F^{n-1+M}, \quad (4.56)$$

$$U'' \approx F^{n-2+2M}, \quad (4.57)$$

eşitlikleri yazılabilir. Balans prensibince, U^3 ve U'' terimleri dikkate alındığında;

$$M = n+1, \quad (4.58)$$

şeklinde bulunur.

4.3.1 Durum-1:

(4.58) ele alınan denklemde, $M = 3$ ve $n = 2$ için alırsak, U , U' ve U'' ,

$$U = a_0 + a_1 F + a_2 F^2, \quad (4.59)$$

$$U' = a_1 b F + a_1 d F^3 + 2a_2 b F^2 + 2a_2 d F^4, \quad (4.60)$$

ve

$$U'' = a_1 b^2 F + 4a_2 b^2 F^2 + 2a_1 b d F^3 + 14a_2 b d F^4 + 3a_1 d^2 F^5 + 8a_2 d^2 F^6, \quad (4.61)$$

∴

şeklinde hesaplanır. (4.59), (4.60) ve (4.61)'de elde ettiğimiz değerleri (4.53) de yerine yazarsak F 'nin birçok kuvvetini içeren terimlerinden meydana gelen bir denklem buluruz. Denklem sisteminin oluşması için F 'nin aynı kuvvetinden olan terimlerine ait bütün katsayılarını sıfıra eşitleyerek alırız. Bu denklem sistemi Wolfram Mathematica 9 programı yardımıyla çözümlenerek aşağıdaki gibi sıralanır;

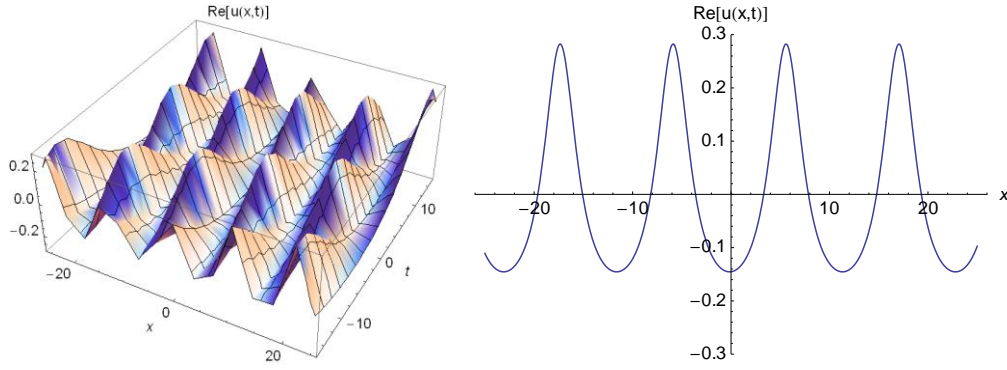
Durum 1a.

$$a_0 = -\frac{\alpha}{\beta}, a_1 = 0, b = -\frac{i\alpha}{2\sqrt{6}\sqrt{\beta\mu}}, d = \frac{i\sqrt{\beta}a_2}{2\sqrt{6}\mu}, c = -\frac{\alpha^2}{6\beta}, \quad (4.62)$$

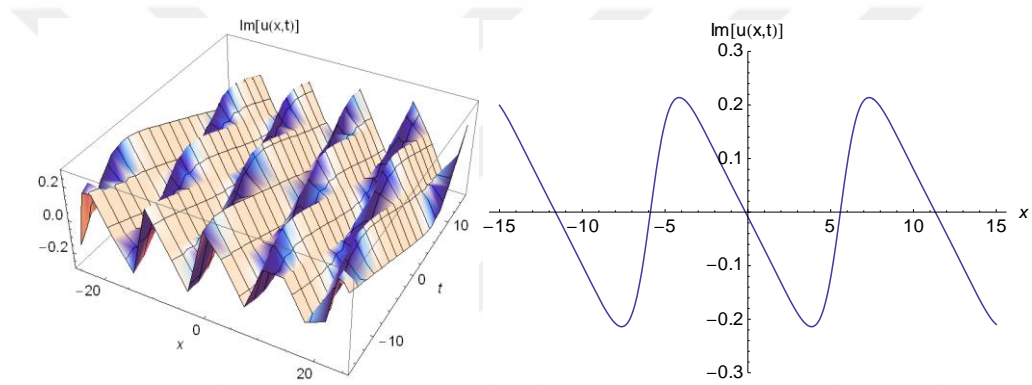
şeklinde olup (4.62)'deki sayılar, (4.59)'de yazılırsa, Combined KdV-mKdV denklemi için bir çözümü

$$u_1(x, t) = -\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha a_2}{E\alpha e^{\frac{i\alpha(t\alpha^2 + 6x\beta)}{6\sqrt{6}\beta^{3/2}}} + \beta a_2}, \quad (4.63)$$

şeklinde elde edilir. Burada α, β, a_2, E reel sabitlerdir. (4.50) Combined KdV-mKdV denklemine BSEFM ile elde edilen $u_1(x, t)$ kompleks üstel fonksiyon çözümünün yüzey grafikleri Wolfram Mathematica 9 programı yardımıyla bulunmuştur.



Şekil-15 (4.63) çözümünün reel kısmının $a_2 = 15, \alpha = 3, \beta = 5, \mu = -4, E = 8, -15 < x < 15,$
 $-15 < t < 15, t = 0.5$ için yüzey grafiği



Şekil-16 (4.63) çözümünün imajiner kısmının $a_2 = 15, \alpha = 3, \beta = 5, \mu = -4, E = 8,$
 $-25 < x < 25, -15 < t < 15, t = 0.5$ için yüzey grafiği

Durum 1b.

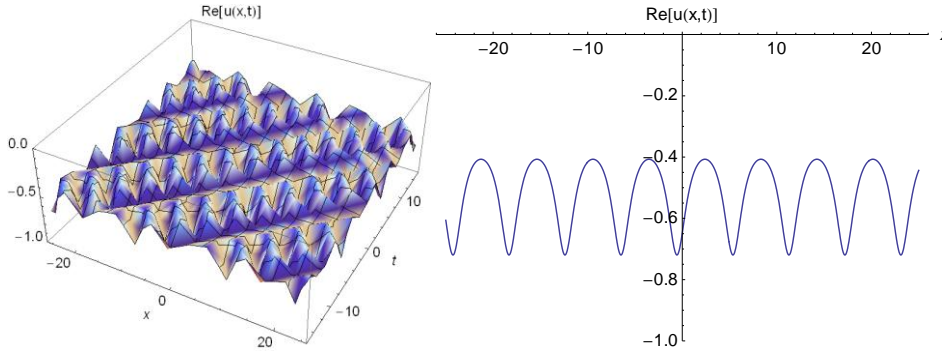
$$a_0 = 0, a_1 = 0, b = \frac{i\alpha}{2\sqrt{6}\sqrt{\beta\mu}}, d = \frac{i\sqrt{\beta}a_2}{2\sqrt{6}\mu}, c = -\frac{\alpha^2}{6\beta}, \quad (4.64)$$

şeklinde olup (4.64)'daki sayılar, (4.59) de yazılırsa, Combined KdV-mKdV denklemi için bir çözümü

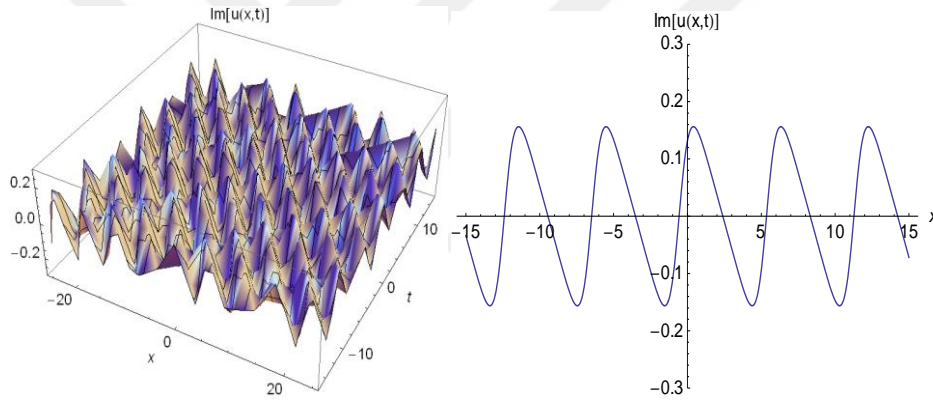
$$u_2(x,t) = \frac{1}{-\beta\alpha^{-1} + Ea_2^{-1}e^{\frac{i\alpha(t\alpha^2 + 6x\beta)}{6\sqrt{6}\beta^{3/2}}}}, \quad (4.65)$$

şeklinde elde edilir. Burada α, β, a_2, E reel sabitlerdir. (4.50) Combined KdV-mKdV denkleminde BSEFM ile elde

edilen $u_2(x, t)$ kompleks üstel fonksiyon çözümünün yüzey grafikleri Wolfram Mathematica 9 programı yardımıyla bulunmuştur.



Şekil-17 (4.65) çözümünün reel kısmının $a_2 = 15, \alpha = 13, \beta = 25, \mu = 14, E = 8,$
 $-25 < x < 25, -15 < t < 15, t = 0.5$ için yüzey grafiği



Şekil-18 (4.65) çözümünün imajiner kısmının $a_2 = 15, \alpha = 13, \beta = 25, \mu = 14, E = 8,$
 $-25 < x < 25, -15 < t < 15, t = 0.5$ için yüzey grafiği

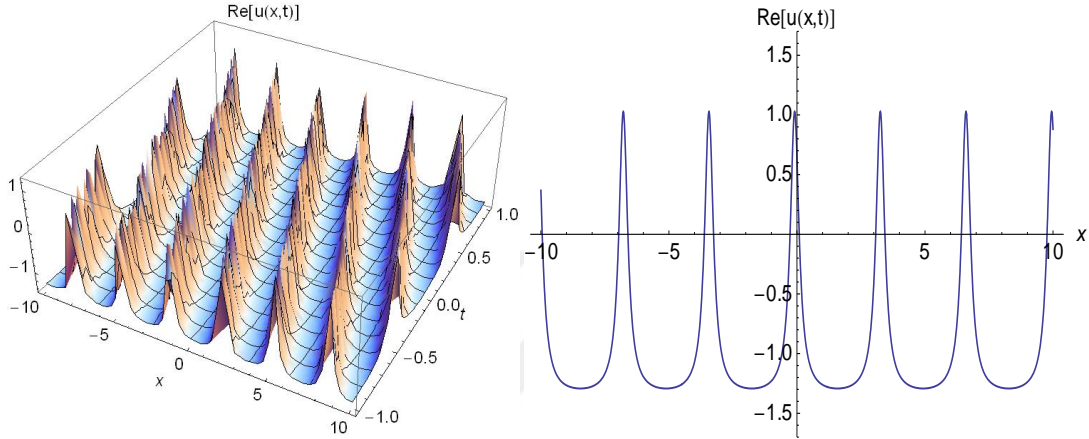
Durum 1c.

$$a_0 = 0, a_1 = 0, b = -\frac{i\alpha}{2\sqrt{6}\sqrt{\beta\mu}}, d = -\frac{i\sqrt{\beta}a_2}{2\sqrt{6}\mu}, c = -\frac{\alpha^2}{6\beta}, \quad (4.66)$$

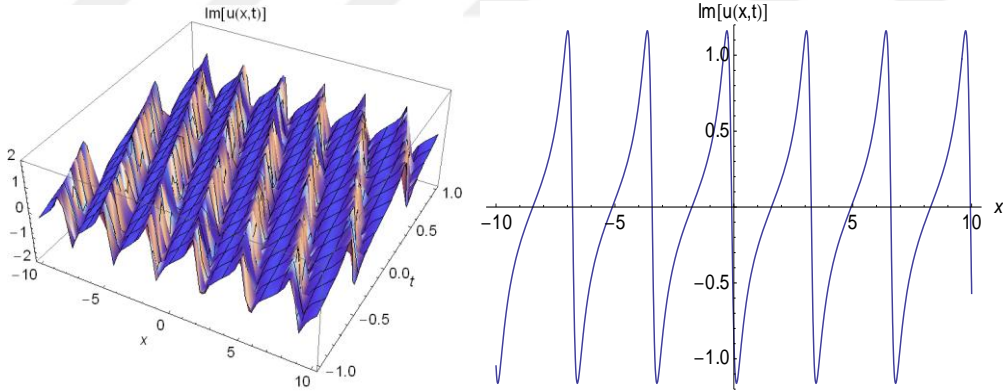
şeklinde olup (4.66)'deki sayılar, (4.59)'de yazılırsa,

$$u_3(x,t) = -\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha a_2}{\frac{ia(\alpha^2 + 6x\beta)}{Eae^{6\sqrt{6}\beta^2} - \beta a_2}}, \quad (4.67)$$

şeklinde bir diğer çözüm daha elde edilir. Burada α, β, a_2, E reel sabitlerdir. (4.50) Combined KdV-mKdV denkleminde BSEFM ile elde edilen $u_3(x,t)$ kompleks üstel fonksiyon çözümünün yüzey grafikleri Wolfram Mathematica 9 programı yardımıyla bulunmuştur.



Şekil-19 (4.67) çözümünün reel kısmının $a_2 = -0.5, \alpha = 23, \beta = 24, \mu = 14, E = 0.8$
 $-10 < x < 10, -1 < t < 1, t = 0.5$ için yüzey grafiği



Şekil-20 (4.67) çözümünün imajiner kısmının $a_2 = -0.5, \alpha = 23, \beta = 24, \mu = 14, E = 0.8$
 $-10 < x < 10, -1 < t < 1, t = 0.5$ için yüzey grafiği

Yorum-2: Elde edilen bu üstel fonksiyon çözümler hiperbolik fonksiyonların temel özellikleri kullanılarak üstel fonksiyon çözümleri hiperbolik fonksiyon türünden

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad (a)$$

biçiminde yazılabilir. (a) denkleminde gerekli işlemler yapılırsa

$$e^x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \sec^2 h(x)}}{\sec h(x)}, \quad (b)$$

eşitliği elde edilir. O halde Combined KdV-mKdV denklemi için elde edilen u_1, u_2, u_3 çözümleri üstel ve hiperbolik fonksiyonların temel özelliklerine göre aşağıdaki

$$u_1(x, t) = -\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha a_2}{E \alpha e^{\frac{i\alpha(t\alpha^2 + 6x\beta)}{6\sqrt{6}\beta^{3/2}}} + \beta a_2},$$

formunda yazılabilir. Üstel fonksiyon çözümü aşağıdaki şekilde hiperbolik fonksiyon formunda

$$u_1 = \frac{-\alpha}{\beta} + a_2 \alpha \left(\frac{E \alpha \pm E \alpha \sqrt{1 - \sec^2 h(T)}}{\sec h(T)} + \beta a_2 \right)^{-1},$$

yeniden yazılabilir.

Burada $T = \frac{i\alpha(t\alpha^2 + 6x\beta)}{6\sqrt{6}\beta^{3/2}}$ dir.

$$u_2(x, t) = \frac{1}{-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{E}{a_2} e^{\frac{i\alpha(t\alpha^2 + 6x\beta)}{6\sqrt{6}\beta^{3/2}}}},$$

Üstel fonksiyon çözümü aşağıdaki şekilde hiperbolik fonksiyon formunda

$$u_2 = \frac{E \alpha (1 \pm \sqrt{1 - \sec^2 h(T)})}{-\beta E (1 \pm \sqrt{1 - \sec^2 h(T)}) + \alpha a_2 \sec h(T)},$$

yeniden yazılabilir.

Burada $T = -\frac{i\alpha(t\alpha^2 + 6x\beta)}{6\sqrt{6}\beta^{3/2}}$ dir.

$$u_3(x, t) = -\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha a_2}{E \alpha e^{\frac{i\alpha(t\alpha^2 + 6x\beta)}{6\sqrt{6}\beta^{3/2}}} - \beta a_2},$$

yeniden yazılabilir.

Burada $T = \frac{i\alpha(t\alpha^2 + 6x\beta)}{6\sqrt{6}\beta^{3/2}}$ dir.

5. SONUÇLAR

Çalışmamızda ele alınan Lineer olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin salınımlı dalga çözümlerini bulmak; mühendisliğin birçok alanında, fizik, kimya gibi birçok bilim dalında oldukça önemlidir. Gerçekten de bir diferansiyel denklemin salınımlı dalga çözümü o denklemin modellenmesine yol açan olayın karakteri hakkında araştırmacılara pek çok bilgi verir. Bu nedenle lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin salınımlı dalga çözümlerini bulmamıza yarayan birçok model ve metot geliştirilmiştir. Bu model ve metotların işlevi "balance prensibi" olarak adlandırılan ve en yüksek mertebeden türev ile en yüksek mertebeden derece arasında karşılaştırılmasına dayanır.

Çalışmamızın giriş bölümünde bahsettiğimiz gibi lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin salınımlı dalga çözümlerini bulmak için kullanıldığı alanlar, literatürde yapılan çalışmalar ve çalışmalarda ele alınan denklemler hakkında bilgi verildi. Bir sonraki kısımda, bu çalışmamızda başvuru temel tanım ve teoremlere yer ayrıldı. Metodun genel yapısı ve özellikleri kapsamlı olarak bakıldı. Ele aldığımız denklemlerden Cahn-Allen, Fisher ve Combined KdV-mKdV denklemlerine metodu uyguladık ve kompleks üstel, rasyonel üstel ve kompleks periyodik fonksiyon olarak yeni salınımlı dalga çözümleri bulundu. Bulunan bu çözümler, ele aldığımız Cahn-Allen, Fisher ve Combined KdV-mKdV denklemlerini sağladığı Wolfram Mathematica 9 programı yardımıyla teyit edildi. Cahn-Allen, Fisher ve Combined KdV-mKdV denklemleri, fiziksel özellikleri bakımından daha detaylı bulunması amacıyla yüzey grafikleri ve değerlerin hangi aralıklarda uygunluk gösterdiği dikkate alınarak uygun grafikler çizildi. Dördüncü bölümde ise metodumuzun uygulaması ve çözüm alanlarıyla yapılan metotlara bakıldığında temelinde hepsi, ele alınan kısmi diferansiyel denklemleri bir değişken dönüşümü yapılarak adi diferansiyel denkleme dönüştürme çabasıdır. Biz bu dönüştürme hedefimiz, yardımcı denklem olarak Bernoulli Alt Denklem Fonksiyon Metodu kullanılarak çözüme ulaşma hedefidir.

BSEFM'nun her üç denklem için çok sayıda katsayı verilmiştir. Elde edilen katsayılardan bazıları kullanılarak Cahn-Allen, Fisher ve Combined KdV-mKdV denklemleri için yeni analitik çözümler ve salınımlı dalga çözümleri bulunmuştur. Ek olarak (4.9)'da dengeleme ifadesinde yer alan M ve n için $M = 7$ ve $n = 6$ aldığımızda

$$U = a_0 + a_1F + a_2F^2 + a_3F^3 + a_4F^4 + a_5F^5 + a_6F^6,$$
$$F' = bF + dF^7,$$

olarak analitik çözüm ve salınımlı dalga çözümlerin farklı tipleri de elde edilebilir. Benzer şekilde, Fisher denkleminde de dengeleme ifadesinde M ve n için $M = 6$ ve $n = 5$ aldığımızda

$$U = a_0 + a_1F + a_2F^2 + a_3F^3 + a_4F^4 + a_5F^5,$$
$$F' = bF + dF^6,$$

olarak çözümlerin farklı tiplerini buluruz.

Çalışmamızda, Cahn-Allen, Fisher ve Combined KdV-mKdV denklemlerinin bulunan çözümlerinde, yüzey grafiklerindeki ifadeler incelenerek dalganın yayılım özelliği ile paralellik gösterdiği görülür. Fisher denklemini için bulduğumuz bu çözümler, denklemin araştırmalarda olan ve bazı farklı özelliklerini de elde ettiği bulunmuştur.

İncelediğimiz metodun amacı, bilgisayar hesaplamaları açısından daha elverişli olması, algoritma olarak daha kolay yapılabilmesi ve Wolfram Mathematica 9 yardımıyla birçok katsayı elde edilmesi olarak çok sayıda önemli özelliğe sahiplik etmesi diferansiyel denklemlerin bu tür özellikteki yapıları için metodun ne kadar güçlü olduğunu ortaya koymaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] **Silva, C. J., Torres, D. F.M.** 2013. Optimal control for a tuberculosis model with reinfection and post-exposure interventions, *Mathematical Biosciences*, **244**, 154–164.
- [2] **Atangana, A., and Bildik, N.,** 2013. Approximate Solution of Tuberculosis Disease Population Dynamics Model, *Abstract and Applied Analysis*, Article ID 759801, **8** pages.
- [3] **Gabriela M., Gomesa, M., Rodriguesa, P., Hilker, F.M., Mantilla-Beniersa, N.B., Muehlena, M., Pauloa, A.C., Medley, G.F.,** 2007. Implications of partial immunity on the prospects for tuberculosis control by post-exposure interventions *Journal of Theoretical Biology*, **248**, 608–617.
- [4] **WHO,** 2011. Global tuberculosis control, *WHO Report, Geneva*.
- [5] **Chara, O., Brusch, L.,** 2015. Mathematical modelling of fluid transport and its regulation at multiple scales, *BioSystems*, **130**, 1–10.
- [6] **Liu, C.S.,** 2006. A new trial equation method and its applications, *Communications in Theoretical Physics*, **45**, 395-397.
- [7] **Hedayati, R., Jafari, S., Batebi, S.,** 2016. Free-electron Dynamics and gain in a free-electron laser based on the laser-pumped wiggler, *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*, **127(11)**, 4639-4644.
- [8] **Salik, M., Hanif, M., Wang, J., Zhang, X.Q.,** 2016. Laser based diagnostics of slaked lime plasma, *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*, **127(4)**, 1940-1945.
- [9] **Tseng, S., Hsu, J.P.,** 1990. A stochastics analysis of the repair of radiation-induced DNA double-strand breaks, *Mathematical Biosciences*, **100(1)**, 21-31.
- [10] **Manafian, J., Lakestani, M.,** 2016. Application of $\tan(\phi/2)$ -expansion method for solving the Biswas–Milovic equation for Kerr law nonlinearity, *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*, **127(4)**, 2040-2054.
- [11] **Manafian, J.,** 2016. Optical soliton solutions for Schrödinger type nonlinear evolution equations by the $\tan(\Phi(\xi)/2)$ -expansion method, *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*, **127(10)**, 4222-4245.
- [12] **Manafian, J., Lakestani, M.,** 2016. Abundant soliton solutions for the Kundu-Eckhaus equation via $\tan(\phi(\xi))$ -expansion method, *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*, *In Press*.

- [13] **Baumann, G., Bond, J.D.**, 1978. A novel molecular interpretation of the Hodgkin-Huxley model of electrical excitability, *Mathematical Biosciences*, **39(3-4)**,291-297
- [14] **Umetani, N., Schmidt R., and Stam, J.**, 2014. Position-based Elastic Rods, *Symposium on Computer Animation*, 1–10.
- [15] **Miller, J.T., Su, T., Pabon, J., Wicks, N., Bertoldi K., and Reis, P.M.**, 2015. Buckling of a thin elastic rod inside a horizontal cylindrical constraint, *Extreme Mechanics Letters*, **3**, 36-44.
- [16] **Rodríguez-Arós, Á., Viaño, J.M.**, 2015. A bending-stretching model in adhesive contact for elastic rods obtained by using asymptotics methods, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **22**, 632-644.
- [17] **Murphy, J.G.**, 2015. The stability of thin, stretched and twisted elastic rods, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **68**, 96-100.
- [18] **Luo, M., Xie, H., Xie, L., Cai P., and Gu, L.**, 2014. A robust and real-time vascular intervention simulation based on Kirchhoff elastic rod, *Computerized Medical Imaging and Graphics*, **38(8)**, 735-743.
- [19] **Bronson, R.**, Çeviri: Hacısalihoğlu, H.H., 1994, Diferansiyel Denklemler, *Nobel Yayın Dağıtım*, Ankara.
- [20] **Yaşar, B. İ.**, 2005, Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, *Siyasal Kitabevi*, Ankara.
- [21] **Duran, S.**, 2012. Bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin özel dönüşümler yardımıyla dalga çözümleri ve bu çözümlerin analizleri, *Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Elazığ.
- [22] **Liu, C.S.**, 2010. Applications of complete discrimination system for polynomial for classifications of traveling wave solutions to nonlinear differential equations, *Computer Physics Communications*, **181**, 317-324.
- [23] **Tascan, F., Bekir, A.**, 2009. Travelling wave solutions of the Cahn–Allen equation by using first integral method, *Applied Mathematics and Computation*, **207**,279-282.
- [24] **Bulut, H., Atas, S.S., and Baskonus, H.M.**, 2016. Some novel exponential function structures to the Cahn-Allen equation, *Cogent Physics*, **3**:1240886.
- [25] **Gerlee, P., Nelander, S.**, 2016. Travelling wave analysis of a mathematical model of glioblastoma growth, *Mathematical Biosciences*, **276**,75-81.

- [26] **Alam, Md.N., Belgacem, F.B.M., Akbar, M.A.,** 2015. Analytical Treatment of the Evolutionary(1+1)-Dimensional Combined Kdv-Mkdv Equation via the Novel (G)-Expansion Method, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, **3**,1571-1579 ,2015.
- [27] **Bekir, A.,** 2009. On traveling wave solutions to combined KdV-mKdV equation and modified Burgers-KdV equation, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* **14**:1038-1042.
- [28] **MNB, M.,** 1992. Exact solutions to the combined KdV-mKdV equation, *Math Meth Appl Sci*,**15**:73.
- [29] **Wadati M.,** 1975. Wave propagation in nonlinear lattice, *J Phys Soc Jpn* **38**:673.



ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında İstanbul'da doğmuşum. İlk ve Orta eğitim-öğretimimi İstanbul Aksaray Oruçgazi İlköğretim okulunda tamamladım. Lise eğitim-öğretimimi ise İstanbul Eyüp Otakçılar YDA Lisesinde tamamladım. 2009 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Lisans öğrenimine başladım. 2013 yılında tamamlayarak 2015 yılının güz döneminde Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladım.

Sibel Şehriban ATAŞ