MODÜLÜS FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLI GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Derya DENİZ
(161121121)

Anabilim Dalı : Matematik
Program : Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hıfsı ALTINOK

Kasım-2018

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MODÜLÜS FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLI GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Derya DENİZ
(161121121)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 06.11.2018
Tezin Savunulduğu Tarih : 30.11.2018

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Hıfsı ALTINOK (F.Ü.)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mikail ET (F.Ü.)
: Doç. Dr. Muhammed ÇINAR (M.A.Ü.)

Kasım-2018

ÖNSÖZ

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygıdeğer hocam Prof. Dr. Hıfsı ALTINOK'a üzerimdeki emeklerinden dolayı çok teşekkür eder, saygılar sunarım. Bu tez çalışması Fırat Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (FÜBAP) Birimi tarafından FF.18.07 nolu proje ile desteklenmiştir. Desteklerinden dolayı FÜBAP Birimine teşekkür ederiz.

Derya DENİZ

ELAZIĞ-2018

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Modülüs Fonksiyonu Yardımıyla Tanımlı
Genelleştirilmiş İstatistiksel Yakınsaklık

Dört esas bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde istatistiksel yakınsaklık ve bulanık sayıların kısa bir tarihçesinden bahsedilmiştir. İkinci bölümde, bulanık küme, bulanık sayı, bulanık sayılarda temel işlemler ve bulanık sayı dizisi tanımları verilerek bulanık sayı dizilerinin yakınsaklığı, sınırlılığı, istatistiksel yakınsaklığı ve kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilme gibi bazı özelliklerinden bahsedilmiştir. Çalışmamızın üçüncü bölümü orjinal olup, sınırsız bir f modülüs fonksiyonu kullanılarak $\beta \in (0,1]$ reel sayısı için bulanık sayı dizilerinde $\beta-$dereceden $(\Delta^m, f)-$istatistiksel yakınsaklık ve $\beta-$dereceden kuvvetli $(\Delta^m, f)-$Cesàro toplanabilme kavramları tanımlanmış ve aralarındaki bazı kapsama bağıntıları incelenmiştir. Dördüncü ve son bölümde ise tez çalışmasında elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık sayı dizisi, Modülüs fonksiyonu, İstatistiksel yakınsaklık, Cesàro toplanabilme, Fark dizisi.

SUMMARY

Generalized Statistical Convergence Defined By A Modulus Function

This study consists of the four main chapters. In the first chapter, we give some informations about the historical development of statistical convergence and fuzzy numbers. In the second chapter, we give the concepts of fuzzy set, fuzzy number and sequence of fuzzy numbers and mention convergence, boundedness, statistical convergence and strongly $p-$Cesàro summability of the sequences of fuzzy numbers. In the third chapter which is original, we introduce the notions $(\Delta^m, f)-$statistical convergence of order β and strong $(\Delta^m, f)-$Cesàro summability of order β for $\beta \in (0,1]$ with respect to an unbounded modulus function f for sequences of fuzzy numbers and examine some inclusion theorems. In the fourth and last chapter, we give the results obtained from the thesis.

Keywords: Sequence of fuzzy numbers, Modulus function, Statistical convergence, Cesàro summability, Difference sequence.

ŞEKİLLER LİSTESİ

SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı semboller açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
$L(\mathbb{R}^n)$	:	$n-$boyutlu reel bulanık sayılar kümesi
A^α	:	A bulanık kümesinin $\alpha-$seviye kümesi
$cl(A)$	:	A kümesinin kapanışı
$\operatorname{supp} A$	:	A bulanık kümesinin desteği (support)
$h.h.k$	:	hemen hemen her k
$S^\beta(\Delta^m, F, f)$	:	Bir modülüs fonksiyonuna göre $\beta-$dereceden $(\Delta^m, f)-$istatistiksel yakınsak bulanık sayı dizilerin kümesi
$S^{\beta,0}(\Delta^m, F, f)$	:	Bir modülüs fonksiyonuna göre $\beta-$dereceden sıfıra $(\Delta^m, f)-$istatistiksel yakınsak bulanık sayı dizilerin kümesi
$w^\beta(\Delta^m, F, f)$	:	Bir modülüs fonksiyonuna göre $\beta-$dereceden kuvvetli $(\Delta^m, f)-$Cesàro toplanabilir bulanık sayı dizilerin kümesi
$w^{\beta,0}(\Delta^m, F, f)$	:	Bir modülüs fonksiyonuna göre sıfıra $\beta-$dereceden kuvvetli $(\Delta^m, f)-$Cesàro toplanabilir bulanık sayı dizilerin kümesi

1. GİRİŞ

Alışılmış yakınsaklığın bir genelleştirilmiş hali olan istatistiksel yakınsaklık fikri Zygmund'ın [1] bir monografisine kadar gider. Steinhaus [2] ve Fast [3] birbirlerinden bağımsız olarak bu kavramı tanımlayarak daha sağlam matematiksel temellere oturtmuşlar ve daha sonraki yıllarda Schoenberg [4] tarafından tekrar bir tanımı da yapılmıştır. Salat [5] ve Fridy [6] nin bu alandaki öncü çalışmalarından sonra toplanabilme teorisindeki en aktif alanlardan biri olarak ortaya çıkmış ve pek çok araştırmacı tarafından çalışılmaya başlanılan bir konu haline gelmiştir. ([7],[8],[9],[10])

1981 yılında Kızmaz [11] tarafından bir $x = (x_k)$ reel sayı dizisinin ardışık iki teriminin farklarından oluşan yeni bir $\Delta x_k = x_k - x_{k+1}$ dizisi tanımlanmış ve bu çalışmada tanımlanan fark dizi uzaylarının Banach uzayları oldukları gösterilmiştir. Fark işlemine aynı mantıkla devam edildiğinde $\Delta^2 x_k = \Delta x_k - \Delta x_{k+1}$ şeklinde ikinci farklar, $\Delta^3 x_k = \Delta^2 x_k - \Delta^2 x_{k+1}$ şeklinde üçüncü farklar ve bu şekilde devam edilerek $\Delta^m x_k = \Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}$ şeklinde m-yinci farklar Et ve Çolak [12] tarafından elde edilerek genelleştirilmiş fark dizilerinin tanımı, Banach uzayı olma durumları ve bazı cebirsel özellikleri verilmiştir. Özellikle Et ve Çolak [12]'ın bu çalışmasından sonra fark dizisi üzerine çalışmalar yoğun bir şekilde artmaya başlamıştır.

Modülüs fonksiyonu fikri ilk defa 1953 yılında Nakano [13] tarafından ortaya atılarak bu fonksiyonun temel özellikleri ilgili makalede verilmiştir. Buna göre bir modülüs fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığından $[0, \infty)$ aralığına tanımlı bir ϕ fonksiyonu olup şu şartları sağlaması gerekmektedir:

(i) $\phi(t) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $t = 0$ olmasıdır,

(ii) $\phi(t+s) \leq \phi(t) + \phi(s)$, ($t \geq 0$ ve $s \geq 0$),

(iii) ϕ artan bir fonksiyondur,

(iv) ϕ, sıfırda sağdan süreklidir.

Toplanabilme teorisinde bir modülüs fonksiyonu kullanılarak pek çok dizi uzayı inşa edilmiş ve bu fonksiyonun özel hallerine göre alanla ilgili daha önceden tanımlanmış dizi uzayları elde edilerek kıyaslama yapılmıştır. ([14],[15],[16]) Bulanık sayı dizileriyle ilgili ilk çalışma Matloka'nın [17], 1986 yılında yaptığı "Sequences of fuzzy numbers" adlı makalesidir. Bu makalede bir bulanık sayı dizisinin tanımı verilerek bazı topolojik özelikleri açıklanmıştır. Daha sonraki yıllarda bu dizilerin istatistiksel yakınsaklığı Nuray ve Savaş [18] tarafından tanımlanmış ve bu makale o günden beri pek çok araştırmacıya önemli bir kaynak teşkil etmiştir. ([19],[20],[21],[22],[23]).

İstatistiksel yakınsaklık tanımında derece kavramı ilk olarak Gadjiev ve Orhan [24] tarafından tanımlanmış olup özellikle Çolak'ın [25] 2010 yılında yaptığı bir çalışmadan sonra $\alpha-$dereceden istatistiksel yakınsaklık konulu çalışmalar gerek sayı dizileri gerekse bulanık sayı dizileriyle ilgili alanda hızlı bir şekilde artmaya başlamıştır ([26],[27],[28]). Bulanık sayı dizileri için dereceli istatistiksel yakınsaklığa ilk olarak Altınok vd.[29] nin çalışmasında rastlanmaktadır. Bilindiği gibi sınırlı ve istatistiksel yakınsak bir bulanık sayı dizisi kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilir olmasına rağmen Altınok vd.[29] un çalışmasında buradaki yakınsaklıklar derecelendirilip $\beta-$dereceden alındığında bu önermenin sağlanmadığı gösterilmiştir.

2014 yılına gelindiğinde Aizpuru vd. [30] sınırsız bir modülüs fonksiyonundan yararlanarak yeni bir yoğunluk kavramı tanımlamış ve bunun bir sonucu olarak adi yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasında bulunan yeni bir non-matris yakınsaklık türü elde etmiştir. Bu çalışmada modülüs fonksiyonun birim fonksiyon özelliği kullanılarak özel durumda istatistiksel yakınsaklık kavramına indirgendiği görülmüştür. Daha sonradan Bhardwaj vd. [31] tarafından yine sınırsız bir f modülüs fonksiyonu ve skalar diziler kullanılarak adi sınırlılık ve istatistiksel sınırlılık arasında bir kavram olan $f-$istatistiksel sınırlılık tanımı verilmiştir. Son zamanlarda sınırsız bir f modülüs fonksiyonunu kullanılarak Altinok ve Kasap [32] tarafından $\beta-$dereceden $f-$istatistiksel yakınsak ve kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilir bulanık sayı dizilerinin kümesi olan $S^{\beta}(F,f)$ ve $w^{\beta}(F,f)$ dizi kümeleri tanımlanmış ve bu kümeler arasında bazı bağıntılar verilmiştir.

2. BULANIK SAYILAR VE BULANIK SAYI DİZİLERİ

Bu bölümde bulanık kümeler ve bulanık sayıların temel özellikleri verildi. Ayrıca bulanık sayı dizisinin tanımı ve bazı özellikleri verilerek bu dizilerin istatistiksel yakınsaklığı ve kuvvetli Cesàro toplanabilirliği örneklerle açıklandı.

2.1. Bulanık Küme ve Bulanık Sayı

Tanım 2.1.1. χ bir küme ve $A \subset \chi$ olsun. Bir A bulanık kümesi, $X_A : \chi \to [0,1]$ şeklinde bir karakteristik fonksiyon ile temsil edilir. Bu fonksiyon

$$X_A = \begin{cases} (0,1]\,, & x \in A \text{ ise} \\ 0, & x \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Bu X_A karakteristik fonksiyonuna üyelik fonksiyonu adı verilir.

Tanım 2.1.2. Herhangi bir A bulanık kümesinin $\alpha-$seviye kümesi ($\alpha-$seviye) $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere

$$A^{\alpha} = \{x \in \chi : X_A\,(x) \geq \alpha\}$$

biçiminde bir reel aralık olarak tanımlanır. Aritmetik işlemlerde $\alpha = 0$ durumunda A^0 seviye kümesi özel olarak

$$A^0 = cl\,\{x \in \mathbb{R} : X_A\,(x) > 0\}$$

biçiminde tanımlanır. Burada "$cl\,\{x \in \mathbb{R} : X_A\,(x) > 0\}$" ile $\{x \in \mathbb{R} : X_A\,(x) > 0\}$ kümesinin kapanışı gösterilmektedir.

Tanım 2.1.3. ([33]) Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $X : \mathbb{R} \to [0,1]$ fonksiyonuna bir bulanık sayı adı verilir:

i) X normaldir, yani $X\,(x_0) = 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in \mathbb{R}$ mevcuttur,

ii) X konvekstir, yani herhangi $x, y \in \mathbb{R}$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$X\,(\lambda x + (1-\lambda)\,y) \geq \min\{X\,(x)\,, X\,(y)\}$$

eşitsizliği sağlanır,

iii) X üst-yarı-süreklidir,

iv) $cl\{x \in \mathbb{R} : X(x) > 0\}$ kümesi kompakt bir kümedir.

$L(\mathbb{R})$ ile tüm bulanık sayıların kümesi gösterilecektir.

Bulanık sayı dizileriyle ilgili yaptığımız çalışmalarda genellikle d_H Hausdorff metriğinden yararlanarak aşağıda tanımı verilen $\bar{d}$ metriğini kullanmaktayız. Bu metrik herhangi iki X ve Y bulanık sayısı için

$$\begin{aligned} \bar{d} &: L(\mathbb{R}) \times L(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ \bar{d}(X,Y) &= \sup_{0 \le \alpha \le 1} d_H(X^\alpha, Y^\alpha) \end{aligned}$$

biçimindedir. d_H Hausdorff metriğinin tanımı ise

$$d_H(X^\alpha, Y^\alpha) = \max\left(\left|\underline{X}^\alpha - \underline{Y}^\alpha\right|, \left|\overline{X}^\alpha - \overline{Y}^\alpha\right|\right)$$

şeklinde olup $\left(L(\mathbb{R}), \bar{d}\right)$ uzayı bir tam metrik uzaydır [34].

Bulanık kümeler üyelik fonksiyonlarıyla tanımlandıklarından dolayı bulanık sayıların üyelik fonksiyonları ile aynı kavram olduklarını ve bu nedenle üyelik fonksiyonu çeşidi kadar bulanık sayı çeşidi olduğunu söyleyebiliriz.

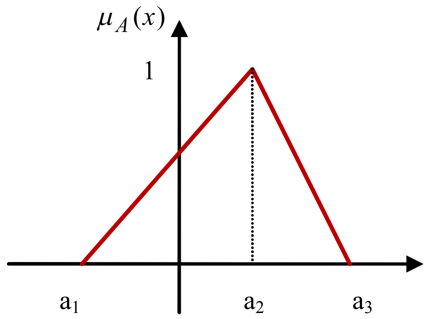
Ele alınan konuya göre değişik bulanık sayılar kullanmak mümkündür. Genel olarak pratik uygulamalarda kullanılan üçgen(triangular) ve yamuk(trapezoidal) olmak üzere iki tane bulanık sayı söz konusudur. Çalışmamızın aşağıdaki kısımlarında Baykal ve Beyan'da [35] yer alan temel işlemleri açıklayıp ve örnekler vereceğiz.

2.2. Üçgen Bulanık Sayılar

a_1 ve a_3, bulanık küme desteğinin alt ve üst sınır değerleri ve a_2, tam üyelikli tek sayı olmak üzere üçgen bulanık sayı tanımı

$$\mu_A(x) = \mu_A(x; a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} \dfrac{(x - a_1)}{(a_2 - a_1)}, & a_1 \le x \le a_2 \text{ ise} \\ \dfrac{(a_3 - x)}{(a_3 - a_2)}, & a_2 \le x \le a_3 \text{ ise} \\ 0, & x > a_3 \text{ veya } x < a_1 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak yapılabilir. $\mu_A(a_2) = 1$ olmak üzere a_2 ye üçgen bulanık sayının tepe'si denir. a_2 'nin a_1 ve a_3 'ün orta noktası olma zorunluluğu yoktur (Şekil 2.1).



Şekil 2.1. A=[a_1, a_2, a_3] üçgen bulanık sayısı

Bir üçgen bulanık sayı, α seviye kümeleri (güven aralığı) ile ifade edilebilir. $\forall\alpha \in [0,1]$ ve a_1^α, $a_3^\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{(a_1^\alpha - a_1)}{(a_2 - a_1)} \Rightarrow a_1^\alpha = (a_2 - a_1)\,\alpha + a_1 \\ \alpha &= \frac{(a_3 - a_3^\alpha)}{(a_3 - a_2)} \Rightarrow a_3^\alpha = -\,(a_3 - a_2)\,\alpha + a_3\end{aligned}$$

$$A^\alpha = [a_1^\alpha, a_3^\alpha] = [(a_2 - a_1)\,\alpha + a_1, -\,(a_3 - a_2)\,\alpha + a_3]$$

elde edilmiş olur.

Üçgen bulanık sayılarda aritmetik işlemler α seviye kümeleri kullanılarak veya aralık sayı işlemleri kullanılarak yapılabilir.

Üçgen bir bulanık sayı, merkezi a_2 olmak üzere, "x, a ' ya yaklaşık olarak eşittir" gibi bir bulanık nicelik olarak görülebilir.

Örneğin $A = (-5, -1, 1)$ üçgen bulanık sayısının üyelik fonksiyonu

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{(x+5)}{4}, & -5 \le x \le -1 \text{ ise} \\ \frac{(1-x)}{2}, & -1 \le x \le 1 \text{ ise} \\ 0, & x > 1 \text{ veya } x < -5 \text{ ise} \end{cases}$$

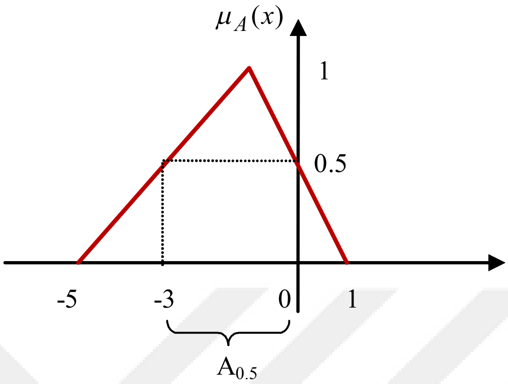
şeklinde olup bu sayının α seviye kümesi

$$\begin{aligned}\frac{(x+5)}{4} &= \alpha \Rightarrow x = 4\alpha - 5 \\ \frac{(1-x)}{2} &= \alpha \Rightarrow x = -2\alpha + 1 \\ A^\alpha &= \left[a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}\right] = [4\alpha - 5, -2\alpha + 1]\end{aligned}$$

şeklinde bir aralıktır. Buradan özel olarak $\alpha = 0,5$ olarak $A^{0,5}$ hesaplanırsa

$$A^{0,5} = \left[a_1^{(0,5)}, a_3^{(0,5)}\right] = [-3, 0]$$

elde edilir (Şekil 2.2).



Şekil 2.2. Bir üçgen bulanık sayısının α seviye kümesi

Üçgen bulanık sayı işlemlerinde bazı önemli özellikler bulunmaktadır. Üçgen bulanık sayılar arasındaki toplama ve çıkarma sonuçları üçgen bulanık sayı olur. Fakat çarpma ve bölme işlemlerinin sonucu üçgen bulanık sayı olmak zorunda değildir. En büyük (maksimum) ve en küçük (minimum) işlemleri üçgen bulanık sayı vermez. Fakat sıklıkla çarpma ve bölmenin işlem sonuçları da yaklaşık değerler kullanılarak üçgen bulanık sayı olarak kabul edilir.

Toplama ve çıkarma işlemlerinde üyelik fonksiyonu kullanımına gerek yoktur. Bu işlemler aşağıdaki olduğu gibi α seviye kümesi işlemleri kullanılarak da yapılabilir. Üyelik fonksiyonları ile de aynı sonuçlar elde edilebilir.

2.2.1. Toplama ve Çıkarma İşlemi

A ve B gibi iki üçgen bulanık sayı arasında toplama ve çıkarma işlemi

$$A + B = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \tag{2.1}$$

$$A - B = (a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3) = (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1) \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.2.1.1. $A = (-3,2,4)$, $B = (-1,0,6)$ olmak üzere A ve B bulanık sayıları verilsin.

(a) (2.1) formülünden

$$A + B = (-3 + (-1), 2 + 0, 4 + 6) = (-4, 2, 10)$$

bulunur.

(b) $A = (-3,2,4)$, $B = (-1,0,6)$ için α seviye aralıklarını kullanarak da aynı sonuçlar elde edilebilir. Gerekli işlemlerden sonra α seviye aralıkları

$$\begin{aligned}
A^\alpha &= \left[a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}\right] = \left[(a_2 - a_1)\,\alpha + a_1, -(a_3 - a_2)\,\alpha + a_3\right] \\
&= [5\alpha - 3, -2\alpha + 4] \\
B^\alpha &= \left[b_1^{(\alpha)}, b_3^{(\alpha)}\right] = \left[(b_2 - b_1)\,\alpha + b_1, -(b_3 - b_2)\,\alpha + b_3\right] \\
&= [\alpha - 1, -6\alpha + 6]
\end{aligned}$$

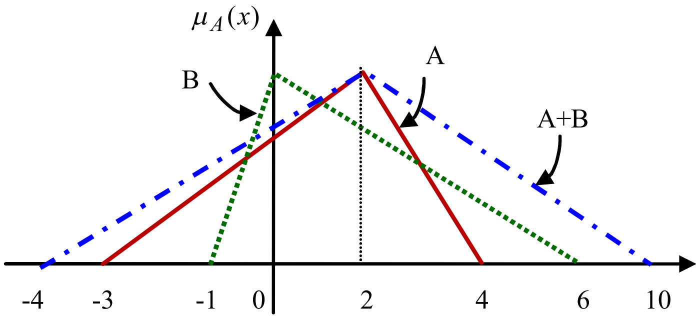
şeklinde bulunur. A^α ve B^α, α seviye aralıklarının toplamı

$$A^\alpha + B^\alpha = [6\alpha - 4, -8\alpha + 10]$$

olacaktır. Özellikle $\alpha = 0$ ve $\alpha = 1$ için

$$\begin{aligned}
A^0 + B^0 &= [-4, 10] \\
A^1 + B^1 &= [2, 2] = 2
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu işlemden elde edilen üç nokta önceki örnekte verilen $A + B$ nin sonucu olarak elde edilen $(-4, 2, 10)$ sayısı ile uyum içindedir (Şekil 2.3).



Şekil 2.3. İki üçgen bulanık sayının toplamı

Örnek 2.2.1.2. **(a)** $A = (-3, 2, 4)$, $B = (-1, 0, 6)$ için

$A - B = (-3 - 6, 2 - 0, 4 - (-1)) = (-9, 2, 5)$ dir.

(b) Yine $A^\alpha - B^\alpha$ işlemini yaptıktan sonra $\alpha = 0$ ve $\alpha = 1$ durumlarını ele alalım. α seviye kümesi işlemleri yapıldıktan sonra

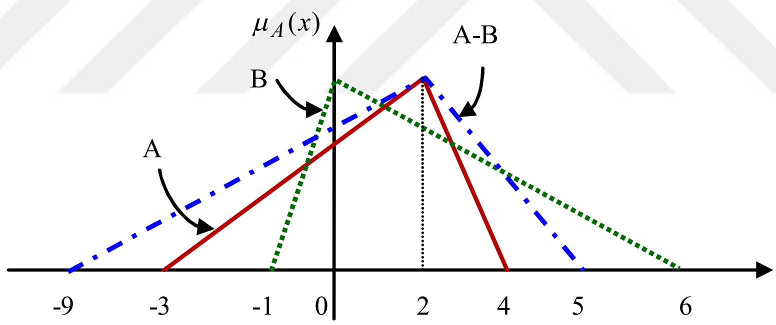
$$A^\alpha - B^\alpha = [11\alpha - 9, -3\alpha + 5] \tag{2.3}$$

bulunur. (2.3) ifadesinde $\alpha = 0$ ve $\alpha = 1$ değerlerini yerlerine koyarsak

$$\begin{aligned} A^0 - B^0 &= [-9, 5] \\ A^1 - B^1 &= [2, 2] = 2 \end{aligned}$$

bulunur. Bu sonuç $A - B = (-9, 2, 5)$ üç noktası ile eşittir (Şekil 2.4).

Sonuç olarak bulanık sayılar arasındaki işlemleri α seviye kümesi işlemlerini kullanarak da yapabileceğimiz açıktır.



Şekil 2.4. İki üçgen bulanık sayının farkı

2.2.2. Çarpma İşlemi

Üçgen bulanık sayıların çarpma işlemi yaklaşıklaştırma kullanılarak yapılır. Bunun için önce ilgili sayıların α seviye kümeleri alınıp çarpılır. Ardından $\alpha = 0$ ve $\alpha = 1$ değerleri için sonuçlar elde edilir.

Örnek 2.2.2.1. $A = (1, 2, 4)$ ve $B = (2, 4, 6)$ olsun. Bu iki bulanık sayının α seviye kümeleri

$$\begin{aligned} A^{\alpha} &= [(2-1)\,\alpha+1,-(4-2)\,\alpha+4] \\ &= [\alpha+1,-2\alpha+4] \\ B_{a} &= [(4-2)\,\alpha+2,-(6-4)\,\alpha+6] \\ &= [2\alpha+2,-2\alpha+6] \end{aligned}$$

şeklindedir. Tüm $\alpha \in [0,1]$ değerleri için, iki seviye aralığı olan A^{α} ve B^{α} yi çarpalım. $\alpha \in [0,1]$ 'de her aralığın elemanlarının pozitif sayılar olduğunu göreceğiz. Böylece iki aralığın çarpma işlemi kolay olacaktır:

$$\begin{aligned} A\cdot B &= [\alpha+1,-2\alpha+4]\cdot[2\alpha+2,-2\alpha+6] \\ A\cdot B &= [(\alpha+1)\,(2\alpha+2)\,,(-2\alpha+4)\,(-2\alpha+6)] \\ A\cdot B &= \left[2\alpha^{2}+4\alpha+2,4\alpha^{2}-20\alpha+24\right] \end{aligned} \tag{2.4}$$

(2.4) de özel olarak

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \text{ için ; } A^{0}\cdot B^{0}=[2,24] \\ \alpha &= 1 \text{ için ; } A^{1}\cdot B^{1}=[2+4+2,4-20+24]=[8,8]=8 \end{aligned}$$

elde edilir.

$A\cdot B$ ' nin yaklaşıklaştırılmasıyla ile $A\cdot B\cong(2,8,24)$ üçgen bulanık sayıyı elde ederiz.

2.2.3. Bölme İşlemi

Çarpmada yapılana benzer bir yolla, bir üçgen bulanık sayıda A: B nin yaklaşık değeri ifade edilir. Önce A^{α} aralığı B^{α} ile bölünür ve $\alpha=0$ ve $\alpha=1$ değerleri için sonuçlar elde edilir.

Örnek 2.2.3.1. $A=(1,2,4)$ ve $B=(2,4,6)$ bulanık sayıları verilsin. $\alpha\in[0,1]$ için her aralığın elemanı pozitif sayı olacağından, A^{α}: B^{α} yı

$$A^{\alpha}{:}B^{\alpha}=\left[\frac{(\alpha+1)}{(-2\alpha+6)},\frac{(-2\alpha+4)}{(2\alpha+2)}\right] \tag{2.5}$$

şeklinde elde ederiz. (2.5) kümesinde α nın özel değerleri için

$$\begin{aligned}\alpha &= 0 \text{ için } ; A^0{:}B^0 = \left[\frac{1}{6}, \frac{4}{2}\right] = [0.17, 2] \\ \alpha &= 1 \text{ için } ; A^1{:}B^1 = \left[\frac{1+1}{-2+6}, \frac{-2+4}{2+2}\right] = \left[\frac{2}{4}, \frac{2}{4}\right] = 0.5\end{aligned}$$

bulunur. Buradan yaklaşıklaştırılmış $A{:}B$ ' in değeri

$$A{:}B \cong (0.17, 0.5, 2)$$

olarak elde edilir.

2.3. Yamuk Bulanık Sayılar

Yamuk bulanık sayı en sık kullanılan bulanık sayı çeşididir. Yamuk bulanık sayıların daha sık kullanılma nedeni üçgen bulanık sayıların yamuk bulanık sayıların özel bir şekli olması ve sözel değişkenlerle kolay kavranabilir olmasıdır.

Yamuk bulanık sayı üyelik derecesi en büyük olan ($\alpha = 1$) birden çok nokta olması anlamına gelir.

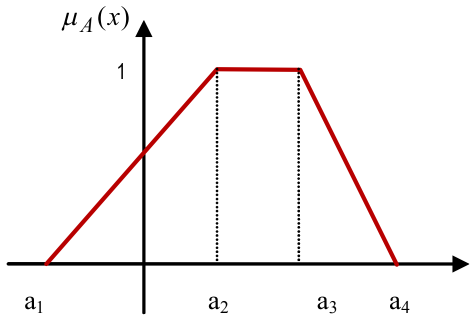
Yamuk bulanık sayı dört parametre ile tanımlanır.a_1 ve a_4, bulanık küme desteğinin alt ve üst sınır değerleri ve a_2 ve a_3 tam üyelikli sayıların kümesinin sınırlarını göstermek üzere,

$$\mu_A(x) = \mu_A(x; a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{cases} \dfrac{(x-a_1)}{(a_2-a_1)}, & a_1 \le x \le a_2 \text{ ise} \\ 1, & a_2 \le x \le a_3 \text{ ise} \\ \dfrac{(a_4-x)}{(a_4-a_3)}, & a_3 \le x \le a_4 \text{ ise} \\ 0, & x > a_4 \text{ veya } x < a_1 \text{ ise} \end{cases}$$

üyelik fonksiyonuyla tanımlanır. Yamuk bulanık sayının aritmetik işlemleri için α seviye küme işlemleri kullanılır. $\forall \alpha \in [0,1]$ için

$$A^\alpha = [a_1^\alpha, a_4^\alpha] = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, -(a_4 - a_3)\alpha + a_4]$$

bulunur. Açıkça görüldüğü gibi $a_2 = a_3$ olduğunda sayı üçgen bulanık sayı olmaktadır (Şekil 2.5).



Şekil 2.5. Yamuk bulanık sayısı

Yamuk bulanık sayılarla yapılan işlemlerde toplama ve çıkarma sonucu yine bir yamuk bulanık sayıdır. Çarpma ve bölme ile tersine çevirme sonuçları yamuk olmak zorunda değildir. Bulanık sayıların en büyük ve en küçük işlemleri her zaman yamuk bulanık sayı değildir. Fakat yine pek çok çarpma ve bölme işlemi sonucunda yaklaşık yamuk biçimi kullanılır. Üçgen bulanık sayılarda olduğu gibi toplama, çıkarma basitçe tanımlanır ve çarpma ve bölme işlemleri üyelik fonksiyonları kullanılarak yapılmalıdır.

2.3.1. Toplama ve Çıkarma İşlemi

A ve B gibi iki yamuk bulanık sayı arasında toplama ve çıkarma işlemi

$$\begin{aligned} A + B &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4) \\ A - B &= (a_1 - b_4, a_2 - b_3, a_3 - b_2, a_4 - b_1) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

2.3.2. Çarpma İşlemi

Yamuk bulanık sayıların çarpma işlemi de yaklaşıklaştırma kullanılarak yapılır. Bunun için üçgen bulanık sayıdaki gibi önce ilgili sayıların α seviye kümeleri bulunup bunlar çarpılır. Ardından $\alpha = 0$ ve $\alpha = 1$ değerleri için sonuçlar elde edilir.

Örnek 2.3.2.1. $A = (1, 5, 6, 9)$ ve $B = (2, 3, 5, 8)$ şeklindeki iki yamuk bulanık sayının çarpma işlemini yapalım.

İşlemin tam değeri için üyelik fonksiyonu kullanılmalıdır. Yaklaşık değerler için α seviye kümesi işlemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} A^{\alpha} &= [4\alpha+1, -3\alpha+9] \\ B^{\alpha} &= [\alpha+2, -3\alpha+8] \end{aligned}$$

kümeleri bulunur. Tüm $\alpha \in [0,1]$ değerleri için, her aralığın her elemanı pozitif olduğundan dolayı, α seviye kümeleri ile çarpma

$$\begin{aligned} A^{\alpha} \cdot B^{\alpha} &= [(4\alpha+1)(\alpha+2), (-3\alpha+9)(-3\alpha+8)] \\ A^{\alpha} \cdot B^{\alpha} &= \left[4\alpha^2+9\alpha+2, 9\alpha^2-51\alpha+72\right] \end{aligned} \tag{2.6}$$

şeklinde olacaktır. Özel olarak (2.6) da

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \text{ için } ;A^0 \cdot B^0 = [2,72] \\ \alpha &= 1 \text{ için } ;A^1 \cdot B^1 = [4+9+2, 9-51+72] = [15,30] \end{aligned}$$

olacağından $\alpha = 0$ ve $\alpha = 1$ değerlerindeki dört nokta kullanılarak, yamuk bulanık sayının yaklaşık değerini $A \cdot B \cong (2, 15, 30, 72)$ olarak elde edebiliriz.

2.3.3. Bölme İşlemi

Yamuk bulanık sayıların toplama ve çıkarma işlemleri yine yamuk bulanık sayı verir. Ancak iki yamuk bulanık sayının çarpımı ya da bölümü yine bir yamuk bulanık sayı vermez. Çünkü çarpım sonucunda ikinci dereceden bir denklem elde edilir. Bu da çarpım sonucunun eğrisel bir şekli olduğu anlamına gelir. Bu maksatla eğrisel olan çarpım sonucu grafiği α kesmeleri ile doğrusal olan yamuk bulanık grafiğe yaklaştırılır. Bu nedenle çarpım işlemleri yaklaşık bir değerdir.

2.4. Bulanık Sayı Dizileri ve Temel Özellikleri

Bulanık sayı dizileriyle ilgili ilk çalışmayı Matloka [17], 1986 yılında yapmış ve bu çalışmasında bir bulanık sayı dizisinin tanımını ve bazı temel özelliklerini aşağıdaki şekilde vererek bu tanımı literatüre kazandırmıştır.

Tanım 2.4.1. $L(\mathbb{R})$, bulanık sayılar kümesi olmak üzere $X : \mathbb{N} \to L(\mathbb{R})$ şeklinde tanımlı bir üyelik fonksiyonuna bir bulanık sayı dizisi adı verilir. Burada dizinin terimleri olan $X(k)$ bulanık sayısını reel sayı dizileriyle de uyumlu olması açısından X_k ile göstereceğiz.

Tanım 2.4.2. Her $\varepsilon > 0$ için $k > k_0$ iken $d(X_k, X_0) < \varepsilon$ sağlanacak biçimde bir k_0 doğal sayısı mevcut ise (X_k) bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına yakınsaktır ve $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = X_0$ ile gösterilir. $c(F)$ ile tüm yakınsak bulanık sayı dizilerinin kümesi gösterilir.

Aşağıda yakınsak bir bulanık sayı dizisi örnek olarak verilmiştir:

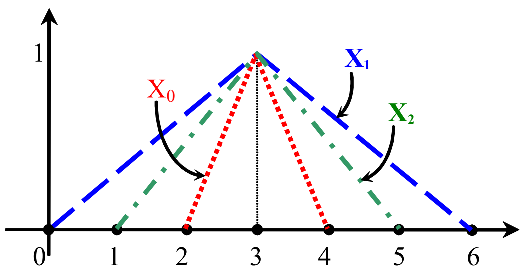
Örnek 2.4.3. $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisinin üyelik fonksiyonunu

$$X_k(x) = \begin{cases} \frac{k}{k+2}x + \frac{2-2k}{k+2}, & x \in \left[\frac{2k-2}{k}, 3\right] \text{ ise} \\ -\frac{k}{k+2}x + \frac{4k+2}{k+2}, & x \in \left[3, \frac{4k+2}{k}\right] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlarsak bu dizinin yakınsak ve limitinin

$$X_0(x) = \begin{cases} x-2, & x \in [2,3] \quad \text{ise} \\ -x+4, & x \in [3,4] \quad \text{ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde bir bulanık sayı olduğu görülür (Şekil 2.6).



Şekil 2.6. (X_k) bulanık sayı dizisinin X_0 bulanık sayısına yakınsaması

Tanım 2.4.4. Her $k \in \mathbb{N}$ sayısı için $L \leq X_k \leq U$ olacak şekilde L ve U bulanık sayıları mevcut ise $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisine sınırlıdır denir. $\ell_\infty(F)$ ile tüm sınırlı bulanık sayı dizilerinin kümesi gösterilecektir.

Yukarıda verilen örnekteki (X_k) bulanık sayı dizisi sınırlı bir dizidir.

Tanım 2.4.5. ([18]) $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_n \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

olacak şekilde bir X_0 bulanık sayısı mevcut ise, yani $h.h.k$ için $d\left(X_k, X_0\right) < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir X_0 bulanık sayısı varsa $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. (X_k) dizisi X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsak ise $S(F) - \lim X_k = X_0$ veya $X_k \to X_0 \left(S\left(F\right)\right)$ yazılır.

$S\left(F\right)$ ile istatistiksel yakınsak bulanık sayı dizilerinin kümesini göstereceğiz. Özel olarak $X_0 = \bar{0}$ alınırsa $S\left(F\right)$ yerine $S_0\left(F\right)$ yazacağız.

Bilindiği gibi sonlu bir kümenin doğal yoğunluğu sıfırdır. Bundan dolayı $c\left(F\right) \subset S\left(F\right)$ kapsaması açıktır. Bu kapsamanın kesin olduğunu da aşağıdaki örnekte görebiliriz.

Örnek 2.4.6. $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini

$$X_k\left(x\right) = \begin{cases} \left.\begin{array}{cc} 2x - (2k-1), & x \in \left[k - \frac{1}{2}, k\right] \text{ ise} \\ -2x + (2k+1), & x \in \left[k, k + \frac{1}{2}\right] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & \begin{array}{c} k = n^3 \text{ ise} \\ (n = 1, 2, 3, ...) \end{array} \\ X_0\left(x\right), & k \neq n^3 \text{ ise} \end{cases}$$

olacak biçimde tanımlayalım. Burada

$$X_0\left(x\right) = \begin{cases} 2x - 1, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ ise} \\ -2x + 3, & x \in \left[1, \frac{3}{2}\right] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olup, her $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : d\left(X_k, X_0\right) \geq \varepsilon\} \subseteq \{8, 27, 64, ...\}$$

olduğundan $\delta\left(\{k \in \mathbb{N} : d\left(X_k, X_0\right) \geq \varepsilon\}\right) = 0$ dır. Bu nedenle $X = (X_k)$ dizisi X_0 a istatistiksel yakınsaktır. Ancak $\{k \in \mathbb{N} : d\left(X_k, X_0\right) \geq \varepsilon\}$ kümesi sonlu olmadığı için (X_k) dizisi X_0 a yakınsak değildir.

$S\left(F\right)$ ve $\ell_\infty\left(F\right)$ dizi kümeleri birbirlerini kapsamazlar. Yukarıdaki örnekte verilen $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini göz önüne alalım. Bu dizi istatistiksel yakınsaktır fakat sınırlı değildir. Şimdi de sınırlı olup istatistiksel yakınsak olmayan bir dizi örneği verelim.

Örnek 2.4.7. (X_k) bulanık sayı dizisini şu şekilde tanımlayalım:

$$X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{cc} x+3, & x \in [-3,-2] \text{ ise} \\ -x-1, & x \in [-2,-1] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\}, & k \text{ tek ise} \\ \left.\begin{array}{cc} x-1, & x \in [1,2] \text{ ise} \\ -x+3, & x \in [2,3] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\}, & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

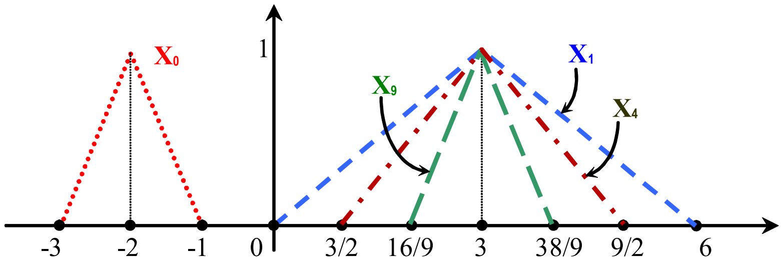
Bu dizinin terimleri sayı doğrusu üzerinde işaretlendiğinde üstten ve alttan en az iki tane bulanık sayısı tarafından sınırlandırıldığı görülecektir. Bu nedenle dizi sınırlıdır. Diğer taraftan verilen dizinin istatistiksel yakınsayacağı herhangi bir bulanık sayı mevcut olmadığından dizi istatistiksel yakınsak değildir.

Yakınsak her bulanık sayı dizisi aynı zamanda hem istatistiksel yakınsak hem de sınırlı olduğundan $S(F) \cap \ell_\infty(F) \neq \emptyset$ dir. Hatta $c(F) \subset S(F) \cap \ell_\infty(F)$ kapsaması kesindir. Bununla ilgili bir örnek aşağıda verilmiştir:

Örnek 2.4.8. Şimdi ki (X_k) bulanık sayı dizisini öyle tanımlamalıyız ki bu dizi hem istatistiksel yakınsak olmalı hem de sınırlı olmalıdır. Yukarıda verilen kapsama bağıntısının kesinliğinden bahsedebilmek için dizinin aynı zamanda yakınsak olmaması da gerekmektedir. Tüm bunlar göz önüne alındığında diziyi

$$X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{cc} \frac{k}{k+2}x + \frac{2-2k}{k+2}, & x \in \left[\frac{2k-2}{k}, 3\right] \text{ ise} \\ -\frac{k}{k+2}x + \frac{4k+2}{k+2}, & x \in \left[3, \frac{4k+2}{k}\right] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & \begin{array}{c} k = n^2 \text{ ise} \\ (n = 1, 2, 3, ...) \end{array} \\ \left.\begin{array}{cc} x+3, & x \in [-3,-2] \text{ ise} \\ -x-1, & x \in [-2,-1] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\}, & k \neq n^2 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlayabiliriz. Aşağıdaki şekilde de görüleceği üzere bu dizi sınırlı bir dizidir. İstatistiksel yakınsaklığın tanımı hatırlanırsa doğal yoğunluk hesabından dolayı bu dizinin X_0 üçgen bulanık sayısına istatistiksel yakınsak olduğu anlaşılır. Fakat, bu dizi yakınsak olmayıp yukarıda verilen kapsama kesindir (Şekil 2.7).



Şekil 2.7. İstatistiksel yakınsak ve sınırlı, fakat yakınsak olmayan bir bulanık sayı dizisi

Teorem 2.4.9. ([36]) $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi olsun. Bu durumda $h.h.k.$ için $X_k = Y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $Y = (Y_k)$ dizisi varsa X dizisi istatistiksel yakınsaktır.

Tanım 2.4.10. ([37]) $X = (X_k)$ bir bulanık sayı dizisi ve $p > 0$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[d\left(X_k, X_0\right)\right]^p = 0$$

olacak şekilde bir X_0 bulanık sayısı varsa $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına kuvvetli $p-$Cesàro yakınsaktır denir. Kuvvetli $p-$Cesàro yakınsak bulanık sayı dizilerinin kümesini $w\left(F, p\right)$ ile göstereceğiz. Bir başka ifadeyle

$$w\left(F, p\right) = \left\{ X = (X_k) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[d\left(X_k, X_0\right)\right]^p = 0, \text{ en az bir } X_0 \text{ için} \right\}$$

dir. $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına kuvvetli $p-$Cesàro yakınsak ise $X_k \to X_0\left(w\left(F, p\right)\right)$ yazacağız.

Teorem 2.4.11. ([37]) $0 < p < \infty$ olsun. Eğer bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına kuvvetli $p-$Cesàro yakınsak ise aynı zamanda X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 2.4.12. ([37]) $0 < p < \infty$ olsun. Eğer sınırlı bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsak ise bu takdirde X_0 bulanık sayısına kuvvetli $p-$Cesàro yakınsaktır.

3. BULANIK SAYI DİZİLERİNDE $\beta-$DERECEDEN $(\boldsymbol{\Delta}^m, \mathbf{f})-$İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE KUVVETLİ $(\boldsymbol{\Delta}^m, \mathbf{f})-$CESARO TOPLANABİLME

3.1. Giriş

Bu kısımda reel sayı dizileri için $\beta-$yoğunluk ve $f_\beta-$yoğunluk kavramları verilecektir.

Tanım 3.1.1. [25] $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir A alt kümesinin $\beta-$yoğunluğu

$$d_\beta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\beta} |\{k \le n : k \in A\}| \tag{3.1}$$

şeklindeki limitle tanımlanır. Burada β sayısı $(0,1]$ aralığının herhangi bir elemanıdır. (3.1) ifadesinde β sayısının özel olarak 1 olması halinde $\beta-$yoğunluk, doğal yoğunlukla denk olur.

Tanım 3.1.2. [38] β yukarıdaki gibi bir reel sayı ve f fonksiyonu da sınırsız bir modülüs olmak üzere $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir A alt kümesinin $f_\beta-$yoğunluğu

$$d_\beta^f(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(n^\beta)} f(|\{k \le n : k \in A\}|) \tag{3.2}$$

biçiminde tanımlanır.

Uyarı 3.1.3. [38] Eğer (3.2) ifadesinde $\beta = 1$ ve $f(x) = x$ alınırsa bu durumda bir kümenin $f_\beta-$yoğunluğu doğal yoğunluğa indirgenir. Sadece $\beta = 1$ alınırsa $f-$yoğunluğa ve yine sadece $f(x) = x$ alınması durumunda da $\beta-$yoğunluğa indirgenmiş olur.

3.2. Bulanık Sayı Dizilerinde $\beta-$Dereceden $(\boldsymbol{\Delta}^m, \mathbf{f})-$İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda $S^\beta(\Delta^m, F, f)$ dizi kümesini tanımlanarak β nın farklı değerleri için çeşitli kapsama teoremleri verilecektir.

Tanım 3.2.1. $0 < \beta \le 1$ sayısı ve sınırsız bir f modülüs fonksiyonu verilsin. Eğer herbir $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(n^\beta)} f(|\{k \le n : d(\Delta^m X_k, X_0) \ge \varepsilon\}|) = 0$$

limiti mevcut ise $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına $\beta-$dereceden $(\Delta^m, f)-$istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda (X_k) dizisi X_0 'a $S^\beta(\Delta^m, F, f)-$yakınsak olur. Bu yakınsama aynı zamanda $S^\beta(\Delta^m, F, f) - \lim X_k = X_0$ şeklinde de yazılabilir. Bu şekildeki bütün bulanık sayı dizilerin kümesi $S^\beta(\Delta^m, F, f)$ ile gösterilecektir. Eğer dizi özel olarak 0 sayısına $\beta-$dereceden $(\Delta^m, f)-$istatistiksel yakınsak ise bu durumda böyle dizilerin kümesi de $S^{\beta,0}(\Delta^m, F, f)$ ile gösterilecektir. Ayrıca tanımladığımız bu iki dizi kümesi arasında bir $S^{\beta,0}(\Delta^m, F, f) \subset S^\beta(\Delta^m, F, f)$ şeklinde bir kapsama bağıntısının olduğunu da belirtelim.

Uyarı 3.2.2. β nın 1 den büyük değerleri için $\beta-$dereceden $(\Delta^m, f)-$istatistiksel yakınsaklık iyi tanımlı değildir. Bunun sebebi aşağıdaki örnekte verilmiştir.

Örnek 3.2.3. f modülüs fonksiyonu $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ şartını sağlasın ve $X = (X_k)$ dizisini de şu şekilde tanımlayalım:

$$X_k = \begin{cases} \left.\begin{array}{cc} x+4 & -4 \le x \le -3 \\ -x-2 & -3 \le x \le -2 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & k \text{ tek ise} \\ \left.\begin{array}{cc} x-2 & 2 \le x \le 3 \\ -x+4 & 3 \le x \le 4 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & k \text{ çift ise} \end{cases},$$

(X_k) dizisinin $\alpha-$seviye kümesi hesaplanırsa $\alpha \in (0,1]$ için

$$\begin{aligned} x+4 &= \alpha \Rightarrow x = \alpha - 4 \\ -x-2 &= \alpha \Rightarrow x = -\alpha - 2 \\ [\underline{X}_k]^\alpha &= [\alpha - 4, -\alpha - 2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-2 &= \alpha \Rightarrow x = \alpha + 2 \\ -x+4 &= \alpha \Rightarrow x = -\alpha + 4 \\ [\overline{X}_k]^\alpha &= [\alpha + 2, -\alpha + 4] \end{aligned}$$

ve böylece

$$[X_k]^\alpha = \begin{cases} [\alpha - 4, -\alpha - 2] & k \text{ tek için} \\ [\alpha + 2, -\alpha + 4] & k \text{ çift için} \end{cases}$$

bulunacaktır. k tek için

$$\begin{aligned} \triangle X_k &= X_k - X_{k+1} \\ &= [[\alpha - 4, -\alpha - 2] - [\alpha + 2, -\alpha + 4]] \\ &= [\alpha - 4 + \alpha - 4, -\alpha - 2 - \alpha - 2] \\ &= [2\alpha - 8, -2\alpha - 4] \\ &= 2[\alpha - 4, -\alpha - 2] \end{aligned}$$

ve k çift için

$$\begin{aligned} \triangle X_k &= X_k - X_{k+1} \\ &= [[\alpha + 2, -\alpha + 4] - [\alpha - 4, -\alpha - 2]] \\ &= [\alpha + 2 + \alpha + 2, -\alpha + 4 - \alpha + 4] \\ &= [2\alpha + 4, -2\alpha + 8] \\ &= 2[\alpha + 2, -\alpha + 4] \end{aligned}$$

olacağından $[\triangle X_k]^\alpha$ seviye kümesi

$$[\triangle X_k]^\alpha = \begin{cases} 2[\alpha - 4, -\alpha - 2] & k \text{ tek için} \\ 2[\alpha + 2, -\alpha + 4] & k \text{ çift için} \end{cases}$$

dir. Bu kümenin üyelik fonksiyonu ise

$$\triangle X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{cc} \frac{x+8}{2}, & x \in [-8, -6] \\ \frac{-x-4}{2}, & x \in [-6, -4] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & k \text{ tek için} \\ \left.\begin{array}{cc} \frac{x-4}{2}, & x \in [4, 6] \\ \frac{-x+8}{2}, & x \in [6, 8] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & k \text{ çift için} \end{cases}$$

şeklindedir. Benzer şekilde $\Delta^2 X_k = \Delta X_k - \Delta X_{k+1}$ formülü kullanılarak

$$[\triangle^2 X_k]^\alpha = \begin{cases} 2^2[\alpha-4,-\alpha-2] & k \text{ tek için} \\ 2^2[\alpha+2,-\alpha+4] & k \text{ çift için} \end{cases}$$

seviye kümesi bulunur. Genelleme yapılarak $\Delta^m X_k = \Delta^{m-1} X_k - \Delta^{m-1} X_{k+1}$ formülünün kullanılmasıyla $m \in \mathbb{N}$ için $m.$ mertebeden

$$[\Delta^m X_k]^\alpha = \begin{cases} 2^m\left[\alpha-4,-\alpha-2\right] := [U_1]^\alpha & \text{k tek ise} \\ 2^m\left[\alpha+2,-\alpha+4\right] := [U_2]^\alpha & \text{k çift ise} \end{cases}$$

seviye kümesi bulunur. Buradan $(\Delta^m X_k)$ dizisinin üyelik fonksiyonu

$$\triangle^m X_k\left(x\right) = \begin{cases} \left.\begin{array}{cc} \frac{x}{2^m}+4, & x \in [-2^{m+2},-3.2^m] \\ -\frac{x}{2^m}-2, & x \in [-3.2^m,-2^{m+1}] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} := U_1 & k \text{ tek için} \\ \left.\begin{array}{cc} \frac{x}{2^m}-2, & x \in [2^{m+1},3.2^m] \\ -\frac{x}{2^m}+4, & x \in [3.2^m,2^{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} := U_2 & k \text{ çift için} \end{cases}$$

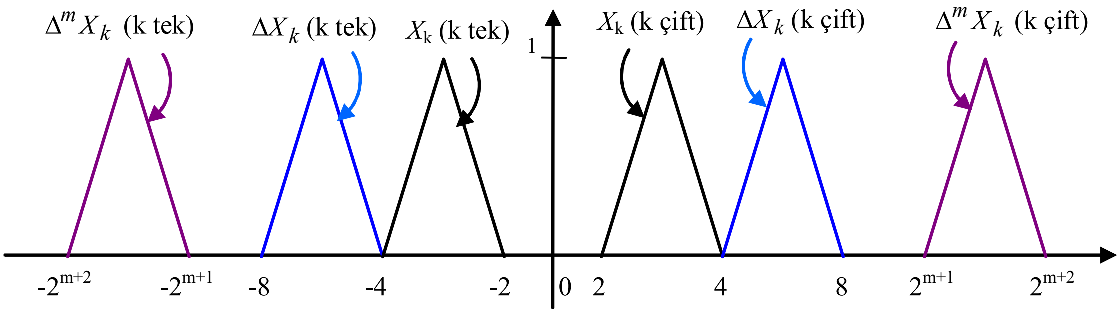
bulunur. Bu takdirde $\beta > 1$ ve her bir $\varepsilon > 0$ için $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{f\left(n^\beta\right)} f\left(\left|\left\{k \le n : d\left(\left[\Delta^m X_k\right]^\alpha, \left[U_1\right]^\alpha\right) \ge \varepsilon\right)\right\}\right|\right) &\le \frac{f\left(\frac{n}{2}\right)}{f\left(n^\beta\right)} \\ \frac{1}{f\left(n^\beta\right)} f\left(\left|\left\{k \le n : d\left(\left[\Delta^m X_k\right]^\alpha, \left[U_2\right]^\alpha\right) \ge \varepsilon\right)\right\}\right|\right) &\le \frac{f\left(\frac{n}{2}\right)}{f\left(n^\beta\right)} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{f\left(n^\beta\right)} f\left(\left|\left\{k \le n : d\left(\left[\Delta^m X_k\right]^\alpha, \left[U_1\right]^\alpha\right) \ge \varepsilon\right)\right\}\right|\right) &= 0 \\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{f\left(n^\beta\right)} f\left(\left|\left\{k \le n : d\left(\left[\Delta^m X_k\right]^\alpha, \left[U_2\right]^\alpha\right) \ge \varepsilon\right)\right\}\right|\right) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu limitlerin anlamı $X = (X_k)$ dizisinin hem U_1 hem de U_2 gibi iki farklı limiti var demektir. Halbuki bir bulanık sayı dizisinin $\beta-$dereceden $(\Delta^m, f)-$istatistiksel limiti varsa sadece bir tane olmalıdır. O halde $\beta > 1$ değerlerinde bu yakınsaklık türü tanımlanamaz. (Şekil 3.1)



Şekil 3.1. (X_k) ve $(\Delta^m X_k)$ bulanık sayı dizilerinin terimleri

Yakınsak her bulanık sayı dizisinin aynı zamanda $\beta-$dereceden $(\Delta^m, f)-$istatistiksel yakınsak olduğu fakat tersinin genellikle sağlanmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 3.2.4. $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} \frac{2}{5}x - \frac{2}{5}, & 1 \le x \le \frac{7}{2} \\ -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3}, & \frac{7}{2} \le x \le 5 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & k = n^3 \text{ ise } \ (n = 1, 2, 3 \ldots) \\ \left.\begin{array}{ll} \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}, & -5 \le x \le -\frac{7}{2} \\ -\frac{2}{5}x - \frac{2}{5}, & -\frac{7}{2} \le x \le -1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & k \ne n^3 \text{ ise} \end{cases}$$

$0 < p \le 1$ için $f(x) = x^p$ modülüs fonksiyonunu göz önüne alalım. (X_k) dizisinin $\alpha-$seviye kümesi hesaplanırsa

$$[X_k]^a = \begin{cases} \left[1 + \frac{5}{2}\alpha, 5 - \frac{3}{2}\alpha\right], & k = n^3 \text{ ise} \\ \left[-5 + \frac{3}{2}\alpha, -1 - \frac{5}{2}\alpha\right], & k \ne n^3 \text{ ise} \end{cases}$$

kümesi bulunur. Bu kümenin 1. fark kümesi

$$[\Delta X_k]^a = \begin{cases} [2 + 5\alpha, 10 - 3\alpha], & k = n^3 \text{ ise} \\ [-10 + 3a, -2 - 5\alpha], & k + 1 = n^3 \text{ ise} \\ [-4 + 4\alpha, 4 - 4\alpha], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve bunun üyelik fonksiyonu

$$
(\Delta X_k)(x) = \begin{cases}
\left.\begin{array}{ll} \frac{x-2}{5}, & 2 \le x \le 7 \\ \frac{-x+10}{3}, & 7 \le x \le 10 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & k = n^3 \text{ ise} \\
\left.\begin{array}{ll} \frac{x+10}{3}, & -10 \le x \le -7 \\ \frac{-x-2}{5}, & -7 \le x \le -2 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & k+1 = n^3 \text{ ise} \\
\left.\begin{array}{ll} \frac{x+4}{4}, & -4 \le x \le 0 \\ \frac{-x+4}{4}, & 0 \le x \le 4 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & \text{diğer durumlarda}
\end{cases}
$$

şeklinde hesaplanır. Benzer şekilde 2. ve 3. fark kümeleri

$$
\left[\Delta^2 X_k\right]^\alpha = \begin{cases}
[-2+9\alpha, 14-7\alpha], & k = n^3 \text{ ise} \\
[-20+6\alpha, -4-10\alpha], & k+1 = n^3 \text{ ise} \\
[-2+9\alpha, 14-7\alpha], & k+2 = n^3 \text{ ise} \\
[-8+8\alpha, 8-8\alpha], & \text{diğer durumlarda}
\end{cases}
$$

$$
\left[\Delta^3 X_k\right]^\alpha = \begin{cases}
[-10+17\alpha, 22-15\alpha], & k = n^3 \text{ ise} \\
[-34+13\alpha, -2-19\alpha], & k+1 = n^3 \text{ ise} \\
[2+19\alpha, 34-13\alpha], & k+2 = n^3 \text{ ise} \\
[-22+15\alpha, 10-17\alpha], & k+3 = n^3 \text{ ise} \\
[-16+16\alpha, 16-16\alpha], & \text{diğer durumlarda}
\end{cases}
$$

şeklindedir. Fark işlemlerine devam edildiğinde $[\Delta^m X_k]^\alpha$ seviye kümesi

$$
[\Delta^m X_k]^\alpha = \begin{cases}
[U_1]^\alpha, & k = n^3 \text{ ise} \\
[U_2]^\alpha, & k+1 = n^3 \text{ ise} \\
[U_3]^\alpha, & k+2 = n^3 \text{ ise} \\
[U_4]^\alpha, & k+3 = n^3 \text{ ise} \\
. & . \\
. & . \\
. & . \\
2^{m+1}[-1+\alpha, 1-\alpha] := [U_m]^\alpha, & \text{diğer durumlarda}
\end{cases}
$$

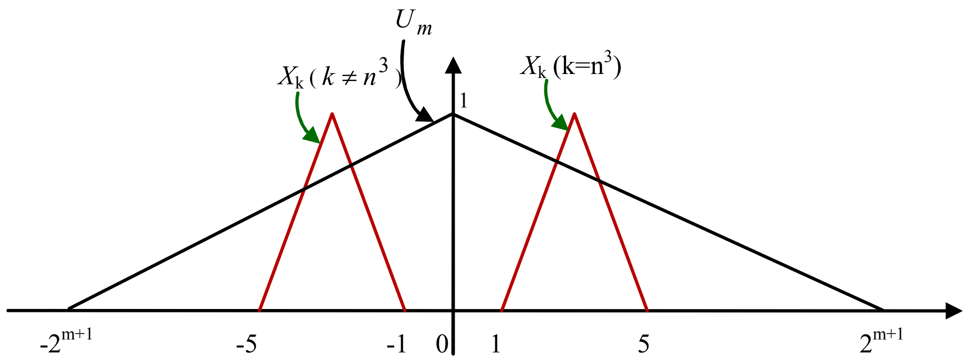
şeklinde hesaplanır. Buradan $U_1, U_2, U_3, ..., U_m$ terimleri $[U_1]^\alpha, [U_2]^\alpha, [U_3]^\alpha, ..., [U_m]^\alpha$ seviye kümelerine karşılık gelen üçgensel bulanık sayılar olmak üzere $(\Delta^m X_k)$ bulanık sayı dizisinin üyelik fonksiyonu

$$\Delta^m X_k(x) = \begin{cases} U_1, & k = n^3 \text{ ise} \\ U_2, & k+1 = n^3 \text{ ise} \\ U_3, & k+2 = n^3 \text{ ise} \\ U_4, , & k+3 = n^3 \text{ ise} \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ \left.\begin{array}{ll} \frac{x}{2^{m+1}}+1, & x \in [-2^{m+1}, 0] \\ -\frac{x}{2^{m+1}}+1, & x \in [0, 2^{m+1}] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} := U_m, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde bulunur. Bu takdirde, (X_k) bulanık sayı dizisi $\beta \in \left(\frac{1}{3}, 1\right]$ için

$$U_m(x) = \begin{cases} \frac{x}{2^{m+1}}+1, & x \in [-2^{m+1}, 0] \\ -\frac{x}{2^{m+1}}+1, & x \in [0, 2^{m+1}] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

bulanık sayısına $\beta-$dereceden $(\Delta^m, f)-$istatistiksel yakınsaktır, fakat yakınsak değildir (Şekil 3.2).



Şekil 3.2. (X_k) bulanık sayı dizisi U_m bulanık sayısına $\beta \in (\frac{1}{3}, 1]$ için $\beta-$dereceden $(\Delta^m, f)-$ istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 3.2.5. Herhangi iki (X_k) ve (Y_k) bulanık sayı dizisini göz önüne alalım. f sınırsız bir modülüs fonksiyonu ve $0 < \beta \leq 1$ olmak üzere bu iki dizinin $\beta-$dereceden $(\Delta^m, f)-$istatistiksel limitleri X_0 ve X_0' olsun. Bu durumda,

(i) Eğer $S^{\beta}(\Delta^m, F, f) - \lim X_k = X_0$ ve $c \in \mathbb{C}$ ise $S^{\beta}(\Delta^m, F, f) - \lim cX_k = cX_0$ dir.

(ii) Eğer $S^{\beta}(\Delta^m, F, f) - \lim X_k = X_0$ ve $S^{\beta}(\Delta^m, F, f) - \lim Y_k = X_0'$ ise- $S^{\beta}(\Delta^m, F, f) - \lim (X_k + Y_k) = X_0 + X_0'$ dir.

Teorem 3.2.6. β ve γ sayıları $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ eşitsiziliğini sağlayan herhangi iki reel sayı ve f fonksiyonu da sınırsız bir modülüs olmak üzere $S^{\beta}(\Delta^m, F, f) \subset S^{\gamma}(\Delta^m, F, f)$ kapsama bağıntısı sağlanır ve bağıntı kesindir.

İspat. f modülüs fonksiyonunun tanımı gereği artanlık özelliğinden $S^{\beta}(\Delta^m, F, f) \subset S^{\gamma}(\Delta^m, F, f)$ bağıntısı kolayca ispatlanabilir. Bir (X_k) bulanık sayı dizisini aşağıdaki gibi seçerek bu bağıntının kesin olduğunu göstermeye çalışalım.

$$X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} \frac{3}{4}x, & 0 \leq x \leq \frac{4}{3} \\ -\frac{3}{5}x + \frac{9}{5}, & \frac{4}{3} \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & k = n^2 \text{ ise } (n = 1, 2, 3, ...) \\ \left.\begin{array}{ll} \frac{x}{2} - 2, & 4 \leq x \leq 6 \\ -\frac{x}{2} + 4, & 6 \leq x \leq 8 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & k \neq n^2 \text{ ise} \end{cases} \tag{3.3}$$

biçiminde tanımlayalım. $p \in (0, 1]$ için $f(x) = x^p$ modülüsünü alalım. Buradan (3.3) de verilen (X_k) dizisinin $\alpha-$seviye kümesi

$$[X_k]^{\alpha} = \begin{cases} \left[\frac{4\alpha}{3}, -\frac{5\alpha}{3} + 3\right], & k = n^2 \text{ ise} \\ [2\alpha + 4, -2\alpha + 8], & k \neq n^2 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak bulunur. Şimdi $[\Delta X_k]^{\alpha}$ seviye kümesinden başlayarak $[\Delta^m X_k]^{\alpha}$ seviye kümesine kadar terimleri bulalım:

$$[\Delta X_k]^{\alpha} = \begin{cases} \left[\frac{10\alpha}{3} - 8, -\frac{11\alpha}{3} - 1\right], & k = n^2 \text{ ise} \\ \left[\frac{11\alpha}{3} + 1, -\frac{10\alpha}{3} + 8\right], & k + 1 = n^2 \text{ ise} \\ [4\alpha - 4, -4\alpha + 4], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\left[\Delta^2 X_k\right]^{\alpha} = \begin{cases} \left[\frac{22\alpha}{3} - 12, -\frac{23\alpha}{3} + 3\right], & k = n^2 \text{ ise} \\ \left[\frac{22\alpha}{3} + 2, -\frac{20\alpha}{3} + 16\right], & k + 1 = n^2 \text{ ise} \\ \left[\frac{22\alpha}{3} - 12, -\frac{23\alpha}{3} + 3\right], & k + 2 = n^2 \text{ ise} \\ [8\alpha - 8, -8\alpha + 8], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$[\Delta^m X_k]^\alpha = \begin{cases} [U_1]^\alpha, & k = n^2 \text{ ise} \\ [U_2]^\alpha, & k+1 = n^2 \text{ ise} \\ [U_3]^\alpha, & k+2 = n^2 \text{ ise} \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ 2^{m+1}[\alpha - 1, -\alpha + 1] := [U_m]^\alpha, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde hesaplanır. Böylece $[\Delta^m X_k]^\alpha$ seviye kümesinin üyelik fonksiyonu

$$\Delta^m X_k(x) = \begin{cases} U_1, & k = n^2 \text{ ise} \\ U_2, & k+1 = n^2 \text{ ise} \\ U_3, & k+2 = n^2 \text{ ise} \\ U_4,, & k+3 = n^2 \text{ ise} \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ \left.\begin{array}{ll} \frac{x}{2^{m+1}} + 1, & -2^{m+1} \le x \le 0 \\ 1 - \frac{x}{2^{m+1}}, & 0 \le x \le 2^{m+1} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} := U_m, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olup buna göre (X_k) bulanık sayı dizisi $\gamma \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ için

$$U_m(x) = \begin{cases} \frac{x}{2^{m+1}} + 1, & -2^{m+1} \le x \le 0 \\ 1 - \frac{x}{2^{m+1}}, & 0 \le x \le 2^{m+1} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

sayısına $\gamma-$dereceden $(\Delta^m, f)-$istatistiksel yakınsak olup $0 < \beta \le \frac{1}{2}$ değerleri için bu dizi $\beta-$dereceden $(\Delta^m, f)-$istatistiksel yakınsak olamaz.

Sonuç 3.2.7. Herhangi bir $0 < \beta \le 1$ reel sayısı ve sınırsız bir f modülüsü için $S^\beta(\Delta^m, F, f) \subset S(\Delta^m, F, f)$ bağıntısı vardır ve bu kapsama bağıntısı kesindir. Burada alınan dizilerin yakınsadıkları noktalar da aynı olur.

Teorem 3.2.8. Herhangi bir $0 < \beta \le 1$ reel sayısı ve sınırsız bir f modülüsü için

(i) $S^{\beta}(\Delta^m, F, f) \subset S^{\beta}(\Delta^m, F)$ ve kapsama kesindir,

(ii) $S^{\beta}(\Delta^m, F, f) \subset S(\Delta^m, F)$ ve kapsama kesindir.

İspat. Kapsamanın kesinliğini göstermek için $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} \frac{k}{k+1}x - \frac{(2k-1)}{k+1}, & x \in \left[\frac{2k-1}{k}, 3\right] \\ -\frac{k}{k+1}x + \frac{4k+1}{k+1}, & x \in \left[3, \frac{4k+1}{k}\right] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & k = n^3 \text{ ise} \\ \bar{0}, & k \neq n^3 \text{ ise} \end{cases}$$

(X_k) bulanık sayı dizisinin $\alpha-$seviye kümesi

$$[X_k]^{\alpha} = \begin{cases} \left[\frac{k+1}{k}\alpha + \frac{2k-1}{k}, -\frac{(k+1)}{k}\alpha + \frac{4k+1}{k}\right], & k = n^3 \text{ ise} \\ \bar{0}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklindedir. Şimdi de $[\Delta^m X_k]^{\alpha}$ kümesini bulalım.

$$[\Delta X_k]^{\alpha} = \begin{cases} \left[\frac{k+1}{k}\alpha + \frac{2k-1}{k}, -\frac{(k+1)}{k}\alpha + \frac{4k+1}{k}\right], & k = n^3 \text{ ise} \\ \left[\frac{k+2}{k+1}\alpha - \frac{(4k+5)}{k+1}, -\frac{(k+2)}{k+1}\alpha - \frac{(2k+1)}{k+1}\right], & k+1 = n^3 \text{ ise} \\ [0,0], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\left[\Delta^2 X_k\right]^{\alpha} = \begin{cases} \left[\frac{k+1}{k}\alpha + \frac{2k-1}{k}, -\frac{(k+1)}{k}\alpha + \frac{4k+1}{k}\right], & k = n^3 \text{ ise} \\ \left[\frac{2k+4}{k+1}\alpha - \frac{(8k+10)}{k+1}, -\frac{(2k+4)}{k+1}\alpha - \frac{(4k+2)}{k+1}\right], & k+1 = n^3 \text{ ise} \\ \left[\frac{k+3}{k+2}\alpha + \frac{2k+3}{k+2}, -\frac{(k+3)}{k+2}\alpha + \frac{4k+9}{k+2}\right], & k+2 = n^3 \text{ ise} \\ [0,0], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\vdots$$

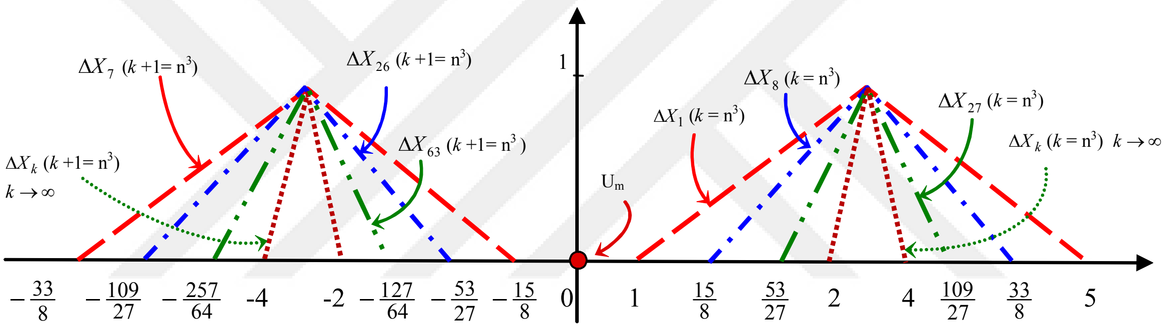
$$[\Delta^m X_k]^{\alpha} = \begin{cases} [U_1]^{\alpha}, & k = n^3 \text{ ise} \\ [U_2]^{\alpha}, & k+1 = n^3 \text{ ise} \\ [U_3]^{\alpha}, & k+2 = n^3 \text{ ise} \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ [0,0] := [U_m]^{\alpha}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde bulunur.

Şimdi de f modülüs fonksiyonunu $f(x) = \ln(x+1)$ şeklinde tanımlayalım. Buradan f in ve logaritma fonksiyonunun temel özelliklerinin kullanılmasıyla β nın $\frac{1}{3} < \beta \leq 1$ şartını sağlayan değerleri için $[U_m]^{\alpha} = [0,0]$ bulanık sayısına $\beta-$dereceden istatistiksel yakınsak ve bunun bir sonucu olarak da istatistiksel yakınsak olduğu kolayca görülür. Diğer taraftan $f-$yoğunluk ve genelleştirilmiş fark operatörünün özelliklerinden

$$\begin{aligned} d_{\beta}^{f}\left(\left\{k \in \mathbb{N} : d\left(\Delta^{m} X_{k}, \bar{0}\right) \geq \varepsilon\right\}\right) &\geq d^{f}\left(\left\{k \in \mathbb{N} : d\left(\Delta^{m} X_{k}, \bar{0}\right) \geq \varepsilon\right\}\right) \\ &= \frac{1}{3} \neq 0 \end{aligned}$$

elde edilebileceğinden dolayı (X_k) dizisinin $\beta-$dereceden $(\Delta^m, f)-$istatistiksel yakınsak olmadığı sonucuna ulaşılır. (Şekil 3.3)



Şekil 3.3. (X_k) ve (ΔX_k) bulanık sayı dizilerinin terimleri

3.3. $\beta-$dereceden Kuvvetli $(\mathbf{\Delta}^m, \mathbf{f})-$Cesàro Toplanabilme

Çalışmamızın bu kısmında f modülüs fonksiyonunu ele alarak bulanık sayı dizileri için $w^{\beta}(\Delta^m, F, f)$, $w^{\beta,0}(\Delta^m, F, f)$ ve $w^{\beta,\infty}(\Delta^m, F, f)$ dizi kümelerini tanımlayarak bu dizi kümeleriyle ilgili önemli kapsama teoremleri elde edilecektir.

Tanım 3.3.1. β pozitif bir reel sayı, bulanık bir (X_k) dizisi ve sınırsız bir f modülüsünü alalım. Bu durumda aşağıdaki dizi kümelerini tanımlayalım:

$$w^{\beta,0}(\Delta^m, F, f) = \left\{X \in s(F) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\beta}} \sum_{k=1}^{n} f\left(d\left(\Delta^m X_k, \bar{0}\right)\right) = 0\right\}, \tag{3.4}$$

$$w^{\beta}(\Delta^m, F, f) = \left\{X \in s(F) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\beta}} \sum_{k=1}^{n} f\left(d\left(\Delta^m X_k, X_0\right)\right) = 0 \ \exists X_0 \in L(\mathbb{R})\right\} \tag{3.5}$$

$$w^{\beta,\infty}(\Delta^m, F, f) = \left\{X \in s(F) : \sup_{n} \frac{1}{n^{\beta}} \sum_{k=1}^{n} f\left(d\left(\Delta^m X_k, \bar{0}\right)\right) < \infty\right\}, \tag{3.6}$$

$f(x) = x$ durumunda $w^{\beta,\infty}(\Delta^m, F, f)$ dizi kümesini $w^{\beta,\infty}(\Delta^m, F)$ ile göstereceğiz.

Uyarı 3.3.2. Bilindiği gibi Altinok vd. [29] nin çalışmasında yer alan $w^\beta(F,p)$ dizi kümesinde seçilen β sayısı istatistiksel limitin tekliğinden dolayı 1 den büyük olamıyordu. Bizim (3.4)-(3.6) da tanımladığımız $w^{\beta,0}(\Delta^m, F, f)$, $w^\beta(\Delta^m, F, f)$ ve $w^{\beta,\infty}(\Delta^m, F, f)$ dizi kümelerinde ise β sayısıyla ilgili herhangi bir kısıtlama yoktur. Yani β yı bir pozitif reel sayı olarak seçmemizin herhangi bir mahsuru yoktur.

Teorem 3.3.3. Herhangi bir f modülüsünü alalım. Bu durumda β nın aşağıdaki değerleri göz önüne alındığında,

(i) $w^{\beta,0}(\Delta^m, F, f) \subset w^{\beta,\infty}(\Delta^m, F, f)$, $(\beta \in (0,\infty))$

(ii) $w^\beta(\Delta^m, F, f) \subset w^{\beta,\infty}(\Delta^m, F, f)$, $(\beta \in [1,\infty))$ dır.

İspat. Burada (i) deki kapsamanın ispatı açık olduğundan sadece (ii) deki kapsamanın ispatını vermemiz yeterli olacaktır. Bu ispatta $w^\beta(\Delta^m, F, f)$ dizi kümesinde bir (X_k) bulanık sayı dizisi alıp gerekli işlemlerden sonra bu dizinin $w^{\beta,\infty}(\Delta^m, F, f)$ dizi kümesine ait olduğunu göstermemiz gerekecektir. Bulanık sayıların ve modülüs fonksiyonunun özelliklerinden aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\frac{1}{n^\beta}\sum_{k=1}^{n} f\left(d\left(\Delta^m X_k, \bar{0}\right)\right) \leq \frac{1}{n^\beta}\sum_{k=1}^{n} f\left(d\left(\Delta^m X_k, X_0\right)\right) + f\left(d\left(X_0, \bar{0}\right)\right).\frac{1}{n^\beta}\sum_{k=1}^{n} 1, \qquad (3.7)$$

(3.7) eşitsizliğinin sağ tarafı bir pozitif sayı olacağından dolayı sol tarafın supremumunun alınmasıyla (X_k) bulanık sayı dizisinin $w^{\beta,\infty}(\Delta^m, F, f)$ dizi kümesine ait olduğu görülür. Bu da istenen olup ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3.4. β, $[1,\infty)$ aralığında herhangi bir reel sayı ve f de herhangi bir modülüs olmak üzere

(i) $w^\beta(\Delta^m, F) \subset w^\beta(\Delta^m, F, f)$,

(ii) $w^{\beta,0}(\Delta^m, F) \subset w^{\beta,0}(\Delta^m, F, f)$,

(iii) $w^{\beta,\infty}(\Delta^m, F) \subset w^{\beta,\infty}(\Delta^m, F, f)$ dir.

İspat. İlk iki bağıntının ispatlarının aşikar olmaları sebebiyle sadece üçüncü kapsamanın ispatını vermemiz yeterli olacaktır. Buna göre $w^{\beta,\infty}(\Delta^m, F)$ dizi kümesinde öyle bir $X = (X_k)$ bulanık sayı dizisi seçelim ki bu dizi

$$\sup_n \frac{1}{n^\beta}\sum_{k=1}^{n} d\left(\Delta^m X_k, \bar{0}\right) < \infty$$

koşulunu sağlayan bir dizi olsun. Şimdi de $\delta \in (0,1)$ ve $\varepsilon > 0$ sayıları verilsin ki bu sayılar $t \in (0,\delta]$ için $f(t) < \varepsilon$ şartını sağlasın. Ayrıca

$$\frac{1}{n^{\beta}}\sum_{k=1}^{n} f\left(d\left(\Delta^m X_k, \bar{0}\right)\right) = \sum_{\substack{1 \\ d(\Delta^m X_k,\bar{0})\leq\delta}} + \sum_{\substack{2 \\ d(\Delta^m X_k,\bar{0})>\delta}},$$

toplamı dikkate alındığında

$$\sum_{\substack{1 \\ d(\Delta^m X_k,\bar{0})\leq\delta}} \leq \varepsilon\frac{1}{n^{\beta-1}} \tag{3.8}$$

olup $d\left(\Delta^m X_k, \bar{0}\right) > \delta$ için

$$d\left(\Delta^m X_k, \bar{0}\right) < \frac{d\left(\Delta^m X_k, \bar{0}\right)}{\delta} < 1 + \left[\left|\frac{d\left(\Delta^m X_k, \bar{0}\right)}{\delta}\right|\right], \tag{3.9}$$

eşitsizliğinin yazılabileceği görülür. (3.9) eşitsizliğinde $[|\cdot|]$ sembolü tam değeri temsil etmektedir. Buna göre

$$f\left(d\left(\Delta^m X_k, \bar{0}\right)\right) \leq \left(1 + \left[\left|\frac{d\left(\Delta^m X_k, \bar{0}\right)}{\delta}\right|\right]\right) f(1) \leq 2f(1)\frac{d\left(\Delta^m X_k, \bar{0}\right)}{\delta}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Diğer taraftan

$$\sum_{\substack{2 \\ d(\Delta^m X_k,\bar{0})>\delta}} \leq 2f(1)\,\delta^{-1}\frac{1}{n^{\beta}}\sum_{k=1}^{n} d\left(\Delta^m X_k, \bar{0}\right)$$

yazılabileceğinden (3.8) eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$\frac{1}{n^{\beta}}\sum_{k=1}^{n} f\left(d\left(\Delta^m X_k, \bar{0}\right)\right) \leq \varepsilon\frac{1}{n^{\beta-1}} + 2f(1)\,\delta^{-1}\frac{1}{n^{\beta}}\sum_{k=1}^{n} d\left(\Delta^m X_k, \bar{0}\right). \tag{3.10}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $\beta \in [1,\infty)$ değerleri için yine (3.10) eşitsizliğinin sağ tarafının sonlu bir reel sayı olması münasebetiyle sol tarafın da supremumu alınarak $(X_k) \in w^{\beta,\infty}(\Delta^m, F, f)$ olduğu görülür.

Teorem 3.3.5. $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{f(r)}{r} > 0$ koşulunu sağlayan bir f modülüs fonksiyonu ve bir $\beta \in (0,1]$ reel sayısı için $w^{\beta}(\Delta^m, F, f) \subset w^{\beta}(\Delta^m, F)$ bağıntısı sağlanır.

İspat. Kapsama bağıntısını gösterebilmek için $w^{\beta}(\Delta^m, F, f)$ dizi kümesinde bir (X_k) bulanık sayı dizisini göz önüne alalım.

$$\inf\left\{\frac{f(r)}{r} : r > 0\right\} = \lim_{r\to\infty}\frac{f(r)}{r}$$

eşitliğinin varlığı daha önceden bilinmektedir. İşlemlerimizde kolaylık olması açısından $\ell = \lim_{r\to\infty} \frac{f(r)}{r}$ denilirse, buna göre $\ell > 0$ olması sebebiyle her $r \geq 0$ için $f(r) \geq \ell r$ ve buradan $r \leq \ell^{-1} f(r)$ olup aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\frac{1}{n^{\beta}} \sum_{k=1}^{n} d\left(\Delta^m X_k, X_0\right) \leq \ell^{-1} \frac{1}{n^{\beta}} \sum_{k=1}^{n} f\left(d\left(\Delta^m X_k, X_0\right)\right) \tag{3.11}$$

Sonuç olarak (3.11) eşitsizliğinin sağ tarafının sıfıra gitmesi sebebiyle sol taraf da sıfıra gideceğinden $(X_k) \in w^{\beta}\left(\Delta^m, F\right)$ bulunur.

Yukarıda verilen son iki teoremden faydalanarak aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 3.3.6. f fonksiyonu $\lim_{r\to\infty} \frac{f(r)}{r} > 0$ koşulunu sağlayan bir modülüs fonksiyonu olmak üzere $\beta \geq 1$ değerleri için $w^{\beta}\left(\Delta^m, F, f\right) = w^{\beta}\left(\Delta^m, F\right)$ eşitliği sağlanır.

Teorem 3.3.7. β ve γ sayıları $0 < \beta \leq \gamma$ şartını sağlayan herhangi iki reel sayı ve f fonsiyonu da bir modülüs olsun. Buna göre $w^{\beta}\left(\Delta^m, F, f\right) \subset w^{\gamma}\left(\Delta^m, F, f\right)$ bağıntısı mevcut olup bu kapsama kesindir.

İspat. Verilen kapsamanın doğru olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu nedenle burada sadece kapsamanın kesinliğini göstermemiz yeterlidir. İlk olarak (X_k) bulanık sayı dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{cc} x-2 & 2 \leq x \leq 3 \\ -x+4 & 3 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & k = n^3 \text{ ise} \\ 0 & k \neq n^3 \text{ ise} \end{cases}$$

Bu dizinin $\alpha-$seviye kümesi

$$[X_k]^{\alpha} = \begin{cases} [\alpha+2, -\alpha+4], & k = n^3 \text{ ise} \\ [0,0], & k \neq n^3 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde bir küme olup $m = 1$ özel hali için $[\Delta X_k]^{\alpha}$ kümesi

$$[\Delta X_k]^{\alpha} = \begin{cases} [\alpha+2, -\alpha+4] & k = n^3 \text{ ise} \\ [\alpha-4, -\alpha-2] & k+1 = n^3 \text{ ise} \\ [0,0], & k \neq n^3 \text{ ise} \end{cases}$$

ve $\Delta X_k(x)$ kümesinin üyelik fonsiyonu da

$$\Delta X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{cc} x-2, & x\in[2,3] \\ -x+4, & x\in[3,4] \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & k=n^3 \text{ ise} \\ \left.\begin{array}{cc} x+4, & x\in[-4,-3] \\ -x-2, & x\in[-3,-2] \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{array}\right\} & k+1=n^3 \text{ ise} \\ \bar{0}, & k\neq n^3 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde bulunur. Modülüs fonksiyonunun $f(0)=0$ özelliğinden yararlanılırsa ve $m=1$ alınırsa

$$\frac{1}{n^\gamma}\sum_{k=1}^{n} f\left(d\left(\Delta^m X_k,\bar{0}\right)\right) \leq \frac{2\sqrt[3]{n}}{n^\gamma} f(4) = \frac{2f(4)}{n^{\gamma-\frac{1}{3}}} \tag{3.12}$$

eşitsizliği elde edilir ve böylece $n\to\infty$ iken limit durumunda $\gamma > \frac{1}{3}$ değerleri için (3.12) eşitsizliğinin sağ tarafı 0 'a yaklaşır. Ayrıca her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{n^\beta}\sum_{k=1}^{n} f\left(d\left(\Delta^m X_k,\bar{0}\right)\right) \geq \frac{2\left(\sqrt[3]{n}-4\right)}{n^\beta} f(4) \tag{3.13}$$

şeklinde bir eşitsizlik de yazılabilir. Yine $n\to\infty$ için limit durumunda $\beta\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$ değerleri için (3.13) eşitsizliğinin sağ tarafı sonsuza gideceğinden dolayı sol taraf da sonsuza gidecek ve böylece $(X_k)\notin w^\beta(\Delta^m,F,f)$ olduğu görülecektir.

Teorem 3.3.8. β ve γ sayıları $0<\beta\leq\gamma\leq 1$ şartını sağlayan herhangi iki reel sayı ve (X_k) da bir bulanık sayı dizisi olsun. f fonksiyonu da her $x,\, y\geq 0$ ve $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{f(r)}{r}>0$ için $\kappa f(x) f(y) \leq f(xy)$ koşullarını sağlayan bir $\kappa>0$ sabit sayısı var olacak biçimde sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu durumda, $w^\beta(\Delta^m,F,f)\subset S^\gamma(\Delta^m,F,f)$ bağıntısı mevcuttur ve limitler aynıdır.

İspat. Herhangi (X_k) bulanık sayı dizisini ele alalım ve $\varepsilon>0$ verilsin. Bu takdirde, modülüs fonksiyonunun özelliklerinden

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} f\left(d\left(\Delta^m X_k, X_0\right)\right) &\geq f\left(\sum_{k=1}^{n} d\left(\Delta^m X_k, X_0\right)\right) \\ &\geq f\left(\left|\left\{k\leq n : d\left(\Delta^m X_k, X_0\right)\geq\varepsilon\right\}\right|\varepsilon\right) \\ &\geq \kappa f\left(\left|\left\{k\leq n : d\left(\Delta^m X_k, X_0\right)\geq\varepsilon\right\}\right|\right) f(\varepsilon) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri ve $\beta \leq \gamma$ şartının kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^{\beta}}\sum_{k=1}^{n} f\left(d\left(\Delta^{m}X_{k},X_{0}\right)\right) &\geq \frac{\kappa f\left(\left|\left\{k\leq n: d\left(\Delta^{m}X_{k},X_{0}\right)\geq\varepsilon\right\}\right|\right) f\left(\varepsilon\right)}{n^{\beta}} \\ &\geq \frac{\kappa f\left(\left|\left\{k\leq n: d\left(\Delta^{m}X_{k},X_{0}\right)\geq\varepsilon\right\}\right|\right) f\left(\varepsilon\right)}{n^{\gamma}} \\ &= \frac{\kappa f\left(\left|\left\{k\leq n: d\left(\Delta^{m}X_{k},X_{0}\right)\geq\varepsilon\right\}\right|\right) f\left(\varepsilon\right) f\left(n^{\gamma}\right)}{n^{\gamma} f\left(n^{\gamma}\right)} \end{aligned}$$

ifadeleri yazılabilir. Böylece, hipotezdeki $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{f(r)}{r} > 0$ ifadesi ve (X_k) dizisinin $w^{\beta}\left(\Delta^m, F, f\right)$ dizi kümesinin elemanı olması dikkate alınırsa bu dizinin $S^{\gamma}\left(\Delta^m, F, f\right)$ dizi kümesine ait olduğu kolaylıkla görülür.

Yukarıdaki teoremde $\beta = \gamma$ alarak aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 3.3.9. β sayısı $0 < \beta \leq 1$ şartını sağlayan herhangi bir reel sayı ve (X_k) da bir bulanık sayı dizisi olsun. f fonksiyonu da her x, $y \geq 0$ ve $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{f(r)}{r} > 0$ için $\kappa f\left(x\right) f\left(y\right) \leq f\left(xy\right)$ koşullarını sağlayan bir $\kappa > 0$ sabit sayısı var olacak biçimde sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu durumda, $w^{\beta}\left(\Delta^m, F, f\right) \subset S^{\beta}\left(\Delta^m, F, f\right)$ bağıntısı mevcuttur ve limitler aynıdır.

Yukarıda verilen Sonuç'ta $\beta = 1$ alınması halinde aşağıdaki sonucu buluruz:

Sonuç 3.3.10. (X_k) bir bulanık sayı dizisi f fonksiyonu da her $x, y \geq 0$ ve $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{f(r)}{r} > 0$ için $\kappa f\left(x\right) f\left(y\right) \leq f\left(xy\right)$ koşullarını sağlayan bir $\kappa > 0$ sabit sayısı var olacak biçimde sınırsız bir modülüs fonksiyonu olmak üzere $w\left(\Delta^m, F, f\right) \subset S\left(\Delta^m, F, f\right)$ bağıntısı mevcuttur ve limitler aynıdır.

Teorem 3.3.11. β sayısı $0 < \beta \leq 1$ şartını sağlayan herhangi bir reel sayı, (X_k) bir bulanık sayı dizisi ve f fonksiyonu da $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{f(r)}{r} > 0$ şartını sağlayan bir modülüs olmak üzere $w^{\beta}\left(\Delta^m, F, f\right) \subset S^{\beta}\left(\Delta^m, F, f\right)$ bağıntısı mevcuttur ve limitler aynıdır.

Yukarıdaki teoremde $\beta = 1$ alınması halinde aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 3.3.12. (X_k) bir bulanık sayı dizisi ve f modülüs fonksiyonu da $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{f(r)}{r} > 0$ şartını sağlasın. Bu durumda $w\left(\Delta^m, F, f\right) \subset S\left(\Delta^m, F, f\right)$ bağıntısı mevcuttur ve limitler aynıdır.

Teorem 3.3.11 'de $\beta = 1$ ve $f\left(x\right) = x$ alınması halinde aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 3.3.13. Eğer bir bulanık sayı dizisi bir X_0 bulanık sayısına kuvvetli Δ^m-Cesàro toplanabilir ise X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsaktır.

4. SONUÇ

Aizpuru'nun [30] bir modülüs fonksiyonu kullanarak klasik anlamda $f-$istatistiksel yakınsaklığı tanımlamasının ardından Bhardwaj [38] bu tanımı derecelendirerek $\alpha-$dereceden $f-$istatistiksel yakınsaklığın tanımını vermiştir. Altinok ve Kasap [32] ise bu tanımları ilk defa bulanık sayı dizilerine uyarlayıp çeşitli kapsama bağıntıları elde etmiştir. Bu tez çalışmasında da Δ^m genelleştirilmiş fark operatörü kullanılarak Altinok ve Kasap [32]'ın tanımlamış olduğu dizi kümeleri genelleştirilerek çok daha genel sonuçlar elde edilmiş ve bu yeni dizi kümelerinin özel hallerinde literatürde daha önceden tanımlı olan dizi kümeleriyle aralarında bazı kapsama bağıntıları bulunmuştur.

5. KAYNAKLAR

[1] **Zygmund, A.** 1979, Trigonometric Series, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

[2] **Steinhaus, H.** 1951. Sur La Convergence Ordinaire Et La Convergence Asymptotique, *Colloquium Mathematicum*, **2**, 73-74.

[3] **Fast, H.** 1951, Sur la convergence statistique, *Colloq. Math.*, **2,** 241-244.

[4] **Schoenberg, I.J.** 1959, The integrability of certain functions and related summability methods, *Amer. Math. Monthly,* **66,** 361-375.

[5] **Šalát, T.** 1980, On statistically convergent sequences of real numbers, *Math. Slovaca*, **30,** 139-150.

[6] **Fridy, J. 1985,** On statistical convergence, *Analysis*, **5,** 301-313.

[7] **Connor, J.S.** 1988, The statistical and strong $p-$Cesàro convergence of sequences, *Analysis,* **8,** 47-63.

[8] **Altin, Y.; Mursaleen, M. ve Altinok, H.** 2010, Statistical summability $(C,1)$ for sequences of fuzzy real numbers and a Tauberian theorem, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, **21(6)**, 379-384.

[9] **Çakallı, H.** 1996, On statistical convergence in topological groups, *Pure Appl. Math. Sci.*, **43,** 27–31.

[10] **Caserta, A.; Maio, G.D. ve Kočinac, L.D.R.** 2011, Statistical convergence in function spaces, *Abstr. Appl. Anal.*, **11**. Article ID420419.

[11] **Kızmaz, H.** 1981, On certain sequence spaces, *Canadian Math. Bull.*, **24,** 169-176.

[12] **Et, M. ve Çolak, R.** 1995, On some generalized difference sequence spaces, *Soochow J. Math.*, **21**, 377-386.

[13] **Nakano, H. 1953,** Concave modulars, *J. Math. Soc. Japan*, **5**, 29–49.

[14] **Connor, J.** 1989, On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence, *Can. Math. Bull.* **32(2)**, 194-198.

[15] **Çolak, R.** 2003, Lacunary strong convergence of difference sequence spaces with respect to a modulus function, *Filomat,* **17**, 9-14.

[16] **Altin, Y. ve Et, M.** 2005, Generalized difference sequence spaces defined by a modulus function in a locally convex space. Soochow J. Math. **31(2)**, 233-243.

[17] **Matloka, M.** 1986, Sequences of fuzzy numbers, *BUSEFAL,* **28,** 28-37.

[18] **Nuray, F. ve Savaş, E.,** 1995, Statistical convergence of fuzzy numbers, *Math. Slovaca*, **45(3)**, 269-273.

[19] **Tripathy, B.C. ve Baruah, A.** 2010, Lacunary statistically convergent and lacunary strongly convergent generalized difference sequences of fuzzy real numbers, *Kyungpook Math. Jour.* **50,** 565-574.

[20] **Çanak, İ.** 2014, Tauberian theorems for Cesàro summability of sequences of fuzzy numbers, *J. Intell. Fuzzy Syst.*, **27(2),** 937-942.

[21] **Mursaleen, M. ve Mohiuddine, S.A.** 2009, On lacunary statistical convergence with respect to the intuitionistic fuzzy normed space, *Jour. Comput. Appl. Math.*, **233(2),** 142-149.

[22] **Savas, E.** 2000, A note on sequence of fuzzy numbers, *Inform. Sci.* **124(1-4),** 297-300.

[23] **Aytar, S. ve Pehlivan, S.** 2008, Statistical convergence of sequences of fuzzy numbers and sequences of $\alpha-$cuts, *International Journal of General Systems,* **37(2),** 231-237.

[24] **Gadjiev, A. D. ve Orhan, C.** Some approximation theorems via statistical convergence, *Rocky Mountain J. Math.,* 32 (1)(2002), 129-138.

[25] **Çolak, R.** 2010, Statistical convergence of order α, *Modern Methods in Analysis and Its Applications*, New Delhi, India: Anamaya Pub, 121–129.

[26] **Altin, Y.; Altinok, H. ve Çolak, R.** 2015 Statistical Convergence of Order α for Difference Sequences, *Quaestiones Mathematicae*, **38(4),** 505–514.

[27] **Altınok, H.** 2014, Statistical convergence of order β for generalized difference sequences of fuzzy numbers, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, **26,** 847–856.

[28] **Çolak, R. ve Bektaş, C.A.** 2011, $\lambda-$statistical convergence of order α, *Acta Math. Sci.* **31(3),** 953-959.

[29] **Altınok, H.; Altın, Y. ve Işık, M.** 2012, Statistical Convergence and Strong $p-$Cesàro Summability of Order β in Sequences of Fuzzy Numbers, *Iranian J. of Fuzzy Systems,* **9(2),** 65-75.

[30] **Aizpuru, A.; Listan-Garcia, M.C ve Rambla-Barreno, F.** 2014, Density by moduli and statistical convergence, *Quaest. Math.* **37,** 525-530.

[31] **Bhardwaj, V.K.; Dhawan, S. ve Gupta, S.** 2016, Density by moduli and statistical boundedness, Article ID 2143018, http://dx.doi.org/10.1155/2016/2143018

[32] **Altınok, H. ve Kasap, M.** 2017, $f-$Statistical Convergence of order β for Sequences of Fuzzy Numbers, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, **33**, 705–712

[33] **Chang, S.S.L. ve Zadeh, L.A.,** 1972, On fuzzy mapping and Control, *IEEE Trans. Systems Man Cybernet*, **2,** 30-34.

[34] **Puri, M. L.ve Ralescu, D.A.,** 1983, Differentials of fuzzy functions, *J. Math. Anal. Appl.*, **91,** 552-558.

[35] **Baykal, N. ve Beyan, T.** 2004, Bulanık mantık ilke ve temelleri, Ankara.

[36] **Mursaleen, M. ve Başarır, M.,** 2003, On some new sequence spaces of fuzzy numbers, *Indian J. Pure Appl. Math.,* **34(9),** 1351-1357.

[37] **Kwon, J.S.,** 2000, On statistical and $p-$Cesàro convergence of fuzzy numbers, *Korean J. Comput.&Appl. Math.* **7(1),** 195-203.

[38] **Bhardwaj, VK. ve Dhawan, S.** 2015, $f-$statistical convergence of order α and strong Cesàro summability of order α with respect to a modulus, *J. Inequal. Appl.* 2015:332 DOI 10.1186/s13660-015-0850-x.

ÖZGEÇMİŞ

1992 yılında Malatya'da doğdum. İlk ve Orta öğretimimi Malatya'da tamamladım. 2011 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünü kazandım ve 2015 yılında aynı bölümden mezun oldum. 2016 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım.