T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAK DİZİ SINIFLARI

Emine KAYAN

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Rifat ÇOLAK

HAZİRAN-2018

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAK DİZİ SINIFLARI

DOKTORA TEZİ

Emine KAYAN
(141121206)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih	:	17 Mayıs 2018
Tezin Savunulduğu Tarih	:	20 Haziran 2018

Tez Danışmanı	:	Prof.Dr. Rifat ÇOLAK (F.Ü)
Diğer Jüri Üyeleri	:	Prof.Dr. Mikail ET (F.Ü)
		Prof.Dr. Ayşegül GÖKHAN (F.Ü)
		Prof.Dr. Yılmaz YILMAZ (İ.Ü)
		Doç.Dr. M. Kemal ÖZDEMİR (İ.Ü)

HAZİRAN - 2018

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır ve istatistiksel yakınsaklığın tarihsel gelişimi hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde konuya ilişkin bazı temel kavramlar ve bilinen sonuçlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde bir metrik uzayda bir dizinin λ_d- istatistiksel yakınsaklığı, λ_d- istatistiksel sınırlılığı ve kuvvetli $(V,\lambda)_d-$ toplanabilirliği tanımlandı ve Λ sınıfına ait çeşitli $\lambda = (\lambda_n)$ dizileri için bazı kapsama bağıntılarına yer verildi. Ayrıca Λ^* sınıfındaki çeşitli $\lambda = (\lambda_n)$ dizileri için elde edilen kuvvetli $(V,\lambda)_d-$ toplanabilir dizilerin kümeleri arasındaki bazı kapsama bağıntıları verildi.

Dördüncü bölümde metrik uzaylardaki diziler için α. dereceden $d-$ istatistiksel yakınsaklık, α. dereceden $d-$ istatistiksel sınırlılık ve α. dereceden $d-$ kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilirlik kavramları tanıtılarak $(0,\infty)$ aralığındaki çeşitli α değerleri için α. dereceden $d-$ kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilir dizilerin kümeleri arasındaki ilişkiler incelendi ve $(0,1]$ aralığındaki çeşitli α değerleri için bazı kapsama bağıntıları verildi.

Beşinci bölümde ise, metrik uzaylardaki diziler için bir f modülüs fonksiyonuna göre $df-$ istatistiksel yakınsaklık ve $df-$ istatistiksel sınırlılık kavramları ile bunlar arasındaki ilişkiler verilmiştir. Ayrıca f modülüsünün bazı özel durumları için, kuvvetli $df-$ Cesàro toplanabilir dizilerin kümeleri arasındaki bazı kapsama bağıntıları ve kuvvetli $df-$ Cesàro toplanabilir dizilerin kümeleri ile $df-$ istatistiksel yakınsak dizilerin kümeleri arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümler tezin orijinal kısımlarını oluşturmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Yoğunluk, İstatistiksel yakınsaklık, Kuvvetli Cesàro topla nabilirlik, Metrik uzay, Modülüs fonksiyonu.

SUMMARY

Some Generalized Statistically Convergent Sequence Classes

This study consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction part and in this chapter, the historical development of statistical convergence is given.

In the second part, some basic concepts and results related to the subject are given.

In the third chapter, we introduce λ_d- statistical convergence, λ_d- statistical boundedness and strong $(V,\lambda)_d-$ summability of a sequence in a metric space. Also, for various sequences $\lambda = (\lambda_n)$ in Λ, some inclusion relations are given. Furthermore we establish some inclusion relations between the sets of strongly $(V,\lambda)_d-$ summable sequences for various sequences $\lambda = (\lambda_n)$ in the class Λ^*.

In the fourth chapter, we introduce $d-$ statistical convergence of order α, $d-$ statistical boundedness of order α and $d-$ strong $p-$ Cesàro summability of order α for sequences in a metric space. Furthermore, we investigate the relations between the sets of sequences which are $d-$ strongly $p-$ Cesàro summable of order α for various values of α's in $(0,\infty)$ and we give some inclusion relations for various values of α's in $(0,1]$.

In the fifth chapter, we give $df-$ statistical convergence and $df-$ statistical boundedness and relations between them with respect to a modulus f for sequences in a metric space. In addition, for some special cases of the f modulus, we give some inclusion relations between the sets of $df-$ strongly Cesàro summable sequences and the relations between the set of $df-$ statistically convergent sequences and the set of $df-$ strongly Cesàro summable sequences.

Keywords: Density, Metric space, Modulus function, Statistical convergence, Strong Cesàro summability.

SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada (X,d) bir metrik uzay olmak üzere kullanılan bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda belirtilmiştir.

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	:	$n-$ boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
ω	:	Tüm kompleks terimli dizilerin uzayı
ℓ_∞	:	Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı
c	:	Kompleks terimli yakınsak diziler uzayı
c_0	:	Kompleks terimli sıfıra yakınsak diziler uzayı
$\|\|x\|\|_\infty$	:	Bir x dizisinin supremum normu
K^c	:	Bir K kümesinin tümleyeni
$\delta(K)$	:	Bir K kümesinin doğal yoğunluğu
S	:	İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
$\delta_\lambda(K)$	:	Bir K kümesinin $\lambda-$ yoğunluğu
S_λ	:	$\lambda-$ istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
$[C,1]$	:	Kuvvetli Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi
w_p	:	Kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi
$[V,\lambda]$	:	$(V,\lambda)-$ toplanabilir dizilerin kümesi
$\delta_\alpha(K)$	:	Bir K kümesinin $\alpha-$ yoğunluğu
S^α	:	α. dereceden istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
$\delta_f(K)$	:	Bir K kümesinin $f-$ yoğunluğu
S_f	:	$f-$ istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
$c_d(X)$	:	(X,d) uzayında yakınsak dizilerin kümesi
$B_\varepsilon(x_\circ)$	:	$x_\circ$ merkezli, ε yarıçaplı açık yuvar
$S_d(X)$	:	(X,d) uzayında $d-$ istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
$S_{\lambda_d}(X)$	:	(X,d) uzayında λ_d- istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi

$BS_d(X)$	:	(X,d) uzayında $d-$ istatistiksel sınırlı dizilerin kümesi
$BS_{\lambda_d}(X)$	:	(X,d) uzayında λ_d- istatistiksel sınırlı dizilerin kümesi
$[V,\lambda]_d(X)$	:	(X,d) uzayında kuvvetli $(V,\lambda)_d$-toplanabilir dizilerin kümesi
$[C,1]_d$	:	(X,d) uzayında kuvvetli Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi
$S_d^\alpha(X)$	:	(X,d) uzayında α. dereceden $d-$ istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
$BS_d^\alpha(X)$	:	(X,d) uzayında α. dereceden $d-$ istatistiksel sınırlı dizilerin kümesi
$w_{pd}^\alpha(X)$	:	(X,d) uzayında α.dereceden $d-$ kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi
$w_{pd}(X)$	:	(X,d) uzayında $d-$ kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi
$S_{df}(X)$	:	(X,d) uzayında $df-$ istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
$w_{df}(X)$	:	(X,d) uzayında kuvvetli $df-$ Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi
$w_d(X)$	:	(X,d) uzayında kuvvetli $d-$ Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi

1. GİRİŞ

Dizi uzaylarının gelişimi pek çok yeni yakınsaklık metodunun tanımlanmasından etkilenmiştir. Bunların en önemlilerinden biri de istatistiksel yakınsaklıktır.

İstatistiksel yakınsaklık, ilk olarak Zygmund [35] tarafından "hemen hemen yakınsaklık" kavramı adı ile 1935 "Trigonometrik Seriler" kitabının ilk baskısında Fourier serilerinin istatistiksel yakınsaklığıyla ilgili teorem ispatlarında görülmüştür. Bu kavram 1951 yılında Steinhaus [33] tarafından Polonya'da Wroclaw Üniversitesi'nde düzenlenen bir konferansta sunulmuştur. Daha sonra Fast [9] alışılmış dizisel limit kavramını genişleterek istatistiksel yakınsaklık tanımını ortaya koymuştur. Bu yeni kavram ile Schoenberg [32] tarafından bazı dizi uzayları üzerinde istatistiksel limitin bir lineer fonksiyonel olabileceği fark edilmiştir. Šalàt [30] sınırlı istatistiksel yakınsak diziler kümesinin sınırlı diziler uzayının kapalı bir alt uzayı olduğunu göstermiştir. İstatistiksel Cauchy dizisi kavramı Fridy [10] tarafından tanımlanmış ve reel veya kompleks terimli bir dizinin istatistiksel Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşulun istatistiksel yakınsak olması gerektiği gösterilmiştir. Connor [7] sınırlı diziler için istatistiksel yakınsaklık ile kuvvetli Cesàro toplanabilirliğin denk olduğunu göstermiştir.

Son zamanlarda toplanabilme teorisinde modülüs fonksiyonu ile ilgili çalışmalar önemli bir yere sahiptir. Modülüs fonksiyonunun tanımı ilk kez 1953 yılında Nakano [26] tarafından ortaya konulmuştur. Daha sonra Ruckle [29], $FK-$ uzaylarını tanımlamak için bir modülüs fonksiyonu kullanmıştır. Ruckle [29] tarafından tanımlanmış olan kuvvetli toplanabilir dizi uzayları, Maddox [21] tarafından genelleştirilerek bir f modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlanmış ve bu dizi uzayınının bazı topolojik özellikleri incelenmiştir. Connor [8], istatistiksel yakınsaklık ile bir f modülüsü kullanılarak tanımlanan kuvvetli Cesàro toplanabilirlik arasındaki ilişkileri incelemiştir. Aizpuru ve arkadaşları, 2014 yılında bir f sınırsız modülüsünü kullanarak istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamıştır [1].

Dereceye göre istatistiksel yakınsaklık, ilk kez Gadjiev ve Orhan [12] tarafından pozitif lineer operatörlerin bir dizisinin istatistiksel yakınsaklığı ile ilişkili olarak verildi. 2010 yılında Çolak [5] bir doğal sayılar kümesinin α. dereceden yoğunluğu kavramını tanımlayıp, sayı dizileri için α. dereceden istatistiksel yakınsaklık tanımını vererek bilinen istatistiksel yakınsaklık kavramını genelleştirdi ve α. dereceden kuvvetli Cesàro toplanabilirlik ile arasındaki ilişkileri inceledi. Daha sonra Çolak ve Bektaş [6] α. dereceden $\lambda-$ istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlayarak bazı kapsama teoremlerini vermişlerdir. Bhardwaj ve Dhawan [2] f sınırsız modülüs fonksiyonundan yararlanarak α. dereceden istatistiksel yakınsaklık tanımını vermiştir.

İstatistiksel yakınsaklık, Maddox [20], Mursaleen [25], Kolk [15], Savaş [31], Fridy ve Orhan [27], Miller ve Orhan [24] gibi pek çok matematikçi tarafından ele alınmıştır. Bu kavram bir çok matematikçi tarafından ölçüm teorisi, sayı teorisi, trigonometrik seriler, lokal konveks uzaylar, toplanabilirlik teorisi, Banach uzayları gibi alanlara uygulanmıştır. İstatistiksel yakınsaklık, genelde reel ya da kompleks sayı dizileri için çalışılmış olsa da son zamanlarda Küçükarslan [17], Bilalov ve Nazarova [3] gibi yazarlar tarafından metrik uzaylarda da incelenmiştir.

1.1. Amaç

Bu çalışmada amaç , reel veya kompleks sayı dizileri için çalışılmış olan istatistiksel yakınsaklık ve Cesaro toplanabilirlik benzeri toplanabilirlik kavramları kullanılarak elde edilen dizi sınıflarının, bir metrik uzaydaki karşılıklarını vermek, yani terimleri bir metrik uzaydan alınmış dizilerin istatistiksel yakınsak, Cesaro toplanabilir ve benzeri bazı sınıflarını tanımlamak, bu sınıfların özelliklerini ve elde edilen sınıflar arasındaki kapsama ilişkilerini ortaya koymaktır.

2. GENEL KAVRAMLAR

Bu bölümün ilk kısmında temel tanım ve teoremler verildi. İkinci kısımda ise bu çalışmada yararlanılan $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık, α. dereceden istatistiksel yakınsaklık ve f istatistiksel yakınsaklık gibi bazı kavramlar tanıtıldı.

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1. X boştan farklı bir küme ve K reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$\begin{aligned} + &: X \times X \to X \\ \cdot &: K \times X \to X \end{aligned}$$

fonksiyonları aşağıdaki özelliklere sahipse X kümesine K cismi üzerinde bir vektör (lineer) uzayı denir. Her $\lambda, \mu \in K$ ve $x, y, z \in X$ için;

1) $x + y = y + x$

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

3) $\forall x \in X$ için $x + \theta = x$ olacak biçimde bir $\theta \in X$ mevcuttur.

4) $\forall x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak biçimde bir $-x \in X$ mevcuttur.

5) $1x = x$

6) $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$

7) $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$

8) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu) x$ dir [22].

Tanım 2.1.2. X boştan farklı bir küme olsun. Her $x, y, z \in X$ için;

M1) $d(x, y) \geq 0$

M2) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

M3) $d(x, y) = d(y, x)$

M4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

özelliklerine sahip $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de metrik uzay denir [14].

Tanım 2.1.3. Tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olan bir fonksiyona *dizi* denir. Diziler değer kümelerine göre isimlendirilirler. Eğer dizinin değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ise diziye reel terimli dizi, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi ise diziye kompleks terimli dizi denir [14].

Tanım 2.1.4. (X, d) bir metrik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ iken

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı mevcut ise (x_n) dizisi X uzayında yakınsaktır denir ve $x_n \to x$ veya $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ biçiminde gösterilir [14].

Tanım 2.1.5. (X, d) bir metrik uzay ve (x_n), bu uzayda bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her $m, n > N$ için

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı mevcutsa, (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir[14].

Tanım 2.1.6. Bir (X, d) metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu metrik uzaya tam metrik uzay denir [14].

Tanım 2.1.7. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olmak üzere;

$$\|\cdot\| : \underset{x}{X} \underset{\to}{\to} \underset{\|x\|}{K}$$

fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahipse, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. Her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in K$ skaleri için

N1) $\|x\| \geq 0$

N2) $\|x\| = 0 \iff x = \theta$

N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ dir [16].

Tanım 2.1.8. Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi bu uzayın bir elemanına yakınsıyorsa bu normlu uzaya tam uzay veya Banach uzayı denir [16].

Tanım 2.1.9. Tüm kompleks terimli $x = (x_k)$ dizilerinin kümesini ω ile göstereceğiz. ω, $x = (x_k), y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere

$$x + y = (x_k + y_k)$$

$$\alpha x = (\alpha x_k)$$

ile tanımlanan işlemlerle birlikte bir lineer uzaydır [22]. ω nın her alt lineer uzayına dizi uzayı denir.

$$l_\infty = \left\{ x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty \right\}$$

sınırlı,

$$c = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k \text{ mevcut} \right\}$$

yakınsak ve

$$c_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k = 0 \right\}$$

sıfıra yakınsak dizilerin uzayı,

$$\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$$

normu ile birer Banach uzaydır [22].

Tanım 2.1.10. $K \subset \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ olmak üzere bir K kümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

ile tanımlanır. Burada $|\{k \leq n : k \in K\}|$ ifadesi K kümesinin n den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermektedir.

Eğer $\delta(K) = 0$ ise K kümesi sıfır yoğunluklu küme olarak adlandırılır.

$\delta(\mathbb{N}) = 1$ ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin sonlu bir $B \subset \mathbb{N}$ alt kümesi için $\delta(B) = 0$ olduğu açıktır. Ayrıca A^c, A'nın tümleyenini göstermek üzere $\delta(A^c) = 1 - \delta(A)$ dır [10].

Tanım 2.1.11. Bir $x = (x_k)$ dizisinin terimleri bir P özelliğini sıfır yoğunluklu bir küme dışındaki tüm k lar için sağlıyorsa, (x_k) dizisi hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir ve "$h.h.k$" şeklinde gösterilir [10].

Tanım 2.1.12. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

veya $h.h.k$ için $|x_k - L| < \varepsilon$ olacak biçimde bir L sayısı mevcut ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *istatistiksel yakınsaktır* denir ve $S - \lim x = L$ şeklinde gösterilir.

İstatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S ile gösterilir. Eğer, özel olarak $L = 0$ ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel sıfır dizisi denir. İstatistiksel yakınsak sıfır dizilerinin kümesi S_0 ile gösterilir [10].

Teorem 2.1.13. Yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Yani $\lim x_k = L$ ise $S - \lim x_k = L$ dir [30].

İspat. $\lim x_k = L$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için ve $k \geq N$ için $|x_k - L| \leq \varepsilon$ olacak biçimde N doğal sayısı vardır. $A(\varepsilon) = \{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere $\delta(A(\varepsilon)) = 0$ olduğundan $S - \lim x = L$ olur.

Aşağıdaki örnek Teorem 2.1.13. ün tersinin doğru olmadığını gösterir.

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \\ & \qquad m = 1, 2, 3, ... \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

ile tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini ele alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Böylece $S - \lim x = 0$ dır. Fakat $x = (x_k)$ dizisi yakınsak değildir.

Ayrıca, istatistiksel yakınsak bir dizinin sınırlı olması da gerekmez. Yani ℓ_∞ ve S uzayları birbirlerini kapsamazlar, ancak ortak elemanları vardır. Örneğin,

$$x_k = \begin{cases} k, & k = m^2 \\ & \qquad m = 1, 2, 3, ... \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

ile tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi, istatistiksel yakınsaktır ve $S - \lim x = 0$ dir, ancak bu dizi açıkça görüldüğü gibi sınırlı değildir.

Teorem 2.1.14. Bir $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsak ise istatistiksel limiti tektir, yani $S - \lim x = L_1$ ve $S - \lim x = L_2$ ise $L_1 = L_2$ dir [34].

Lemma 2.1.15. $S - \lim\limits_{k\to\infty} x_k = L$ olması için gerek yeter koşul $\delta(K) = 1$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = L$ olan bir $K = \{k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots\} \subset \mathbb{N}$ kümesinin var olmasıdır [30].

Lemma 2.1.16. $S - \lim x_k = l_1$, $S - \lim y_k = l_2$ ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. Bu takdirde,

(i) $S - \lim (x_k + y_k) = l_1 + l_2$

(ii) $S - \lim (cx_k) = cl_1$

dır [30].

Bu lemmaya göre istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi bir lineer uzay olur.

Tanım 2.1.17. $\delta(\{k \in \mathbb{N} : \ |x_k| > B\}) = 0$ olacak biçimde bir $B > 0$ sayısı mevcut ise $x = (x_k)$ dizisine *istatistiksel sınırlıdır* denir.

İstatistiksel sınırlı dizilerin kümesi S_∞ ile gösterilir [11].

Tanım 2.1.18. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olsun. Bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde, eğer $h.h.k$ için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı mevcut ise yani; her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \le n : |x_k - x_N| \ge \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [10].

Teorem 2.1.19. Aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

(i) $x = (x_k)$ istatistiksel yakınsaktır,

(ii) $x = (x_k)$ istatistiksel Cauchy dizisidir,

(iii) $x = (x_k)$ dizisi için $\delta(\{k : x_k \ne y_k\}) = 0$ (veya h.h.k için $x_k = y_k$) olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi vardır [10].

Sonuç 2.1.20. (x_k), istatistiksel yakınsak ve $S - \lim x_k = L$ olacak şekilde bir dizi olsun. Bu durumda $\lim y_k = L$ olacak şekilde (x_k) dizisinin bir $y = (y_k)$ alt dizisi vardır [10].

Lemma 2.1.21. $t = (t_k)$, sonsuz çokluktaki k lar için $t_k \neq 0$ olacak şekilde bir sayı dizisi olsun. Bu takdirde h.h.k için $x_k = 0$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k = \infty$ olacak şekilde bir $x = (x_k)$ dizisi vardır [10].

Tanım 2.1.22. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olmak üzere eğer

$$\lim_n n^{-1} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L| = 0$$

olacak biçimde bir L kompleks sayısı mevcut ise, (x_k) dizisi L sayısına *kuvvetli Cesàro toplanabilirdir* denir ve kuvvetli Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi $[C,1]$ ile gösterilir:

$$[C,1] = \left\{ x = (x_k) : \exists L \in \mathbb{C}, \lim_n n^{-1} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L| = 0 \right\}.$$

$x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $p > 0$ bir reel sayı olsun. Eğer

$$\lim_n n^{-1} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p = 0$$

olacak biçimde bir L kompleks sayısı mevcut ise (x_k) dizisi L sayısına *kuvvetli p-Cesàro toplanabilirdir* denir. Kuvvetli p-Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi w_p ile gösterilir:

$$w_p = \left\{ x = (x_k) : \exists L \in \mathbb{C}, \lim_n n^{-1} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p = 0 \right\}$$

[7].

Teorem 2.1.23. $0 < p < \infty$ olsun. Bu durumda,

$i)$ Bir L sayısına kuvvetli p-Cesàro toplanabilir olan bir dizi L sayısına aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır.

$ii)$ Bir L sayısına istatistiksel yakınsak olan sınırlı bir dizi L sayısına aynı zamanda kuvvetli p-Cesàro toplanabilirdir [7].

2.2. $\lambda-$ İstatistiksel Yakınsaklık, α. Dereceden İstatistiksel Yakınsaklık ve $f-$ İstatistiksel Yakınsaklık

$\lambda = (\lambda_n)$ pozitif sayıların azalmayan, ∞ a giden ve $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$, $\lambda_1 = 1$ şartlarına sahip bir dizisi olsun. Bu şekilde tanımlanan tüm $\lambda = (\lambda_n)$ dizilerinin kümesi Λ ile gösterilecektir.

$K \subset \mathbb{N}$ olsun. K'nın $\lambda-$ *yoğunluğu,* $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere

$$\delta_\lambda(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : \ k \in K\}|$$

olarak tanımlanır. $\delta_\lambda(K)$, $\lambda_n = n$ durumunda $\delta(K)$ doğal yoğunluğuna indirgenir [25].

Tanım 2.2.1. [25] Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L'ye $\lambda-$ *istatistiksel yakınsaktır* denir. Tüm $\lambda-$ istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S_λ ile gösterilir. $\lambda_n = n$ durumunda S_λ nın S'e denk olduğu açıktır.

Genelleştirilmiş de la Vallée-Poussin Ortalaması,

$$t_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} x_k$$

ile tanımlanır [19].

$t_n(x) \to L$ $(n \to \infty)$ durumunda $x = (x_k)$ dizisine, L sayısına $(V, \lambda)-$ *toplanabilirdir* denir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n = n$ ise $(V, \lambda)-$ toplanabilirlik $(C, 1)-$ toplanabilirliğe indirgenir. L'ye kuvvetli $(V, \lambda)-$ toplanabilir, yani $x_k \to L[V, \lambda]$ olan $x = (x_k)$ dizilerinin kümesi için

$$[V, \lambda] = \left\{ x = (x_k) : \exists L, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |x_k - L| = 0 \right\}$$

yazılır.

Tanım 2.2.2. [5] α, $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde herhangi bir reel sayı olsun. Bir $E \subseteq \mathbb{N}$ alt kümesinin $\alpha-$ *yoğunluğu,* limit (sonlu ya da sonsuz) mevcut olmak üzere

$$\delta_\alpha(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : k \in E\}|$$

ile tanımlanır. Burada $|\{k \leq n : k \in E\}|$, E kümesinin n'yi geçmeyen elemanlarının sayısını gösterir.

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin sonlu her alt kümesinin $\alpha-$ yoğunluğunun sıfır olduğu açıktır ve genel olarak $0 < \alpha < 1$ için $\delta_\alpha(E^c) = 1 - \delta_\alpha(E)$ eşitliği geçerli değildir; eşitlik ancak $\alpha = 1$ durumunda geçerlidir. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi için

$$\delta_\alpha(\mathbb{N}) = \begin{cases} 1, & \alpha = 1 \\ \infty, & \alpha < 1 \end{cases}$$

olduğu da kolaylıkla görülebilir.

Ayrıca $\alpha = 1$ durumunda bir kümenin $\alpha-$ yoğunluğu, kümenin doğal yoğunluğuna dönüşür.

Lemma 2.2.3. $E \subseteq \mathbb{N}$ olsun. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ise $\delta_\beta(E) \leq \delta_\alpha(E)$ dir [5].

Tanım 2.2.4. $x = (x_k) \in w$ ve $0 < \alpha \leq 1$ verilmiş olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak biçimde bir L kompleks sayısı mevcut ise (x_k) dizisi L ye α. dereceden istatistiksel yakınsaktır denir [5]. (x_k) dizisinin L'ye α. dereceden istatistiksel yakınsak olduğu durumda $S^\alpha - \lim x_k = L$ notasyonu kullanılır. Tüm α. dereceden istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S^α ile ve tüm α. dereceden istatistiksel sıfır dizilerinin kümesi S_0^α ile gösterilir. Herbir $0 < \alpha \leq 1$ için $S_0^\alpha \subset S^\alpha$ olduğu açıktır.

$\alpha = 1$ için α. dereceden istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık ile aynıdır.

Lemma 2.2.5. $\alpha \in (0, 1]$ verilsin. Eğer bir (x_k) dizisi α. dereceden istatistiksel yakınsak ise, bu durumda onun S^α- limiti tektir [5].

Uyarı 2.2.6. α. dereceden istatistiksel yakınsaklık $0 < \alpha \leq 1$ için iyi tanımlıdır, fakat $\alpha > 1$ için iyi tanımlı değildir. Bunun için

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = 2n \\ & \qquad\qquad n = 1, 2, 3, ... \\ 0, & k \neq 2n \end{cases}$$

ile tanımlanmış $x = (x_k)$ dizisi gözönüne alınsın. Bu durumda $\alpha > 1$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |x_k - 1| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n^\alpha} = 0$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n^\alpha} = 0$$

elde edilir. Böylece $x = (x_k)$ hem 1'e hem de 0'a α. dereceden istatistiksel yakınsak, yani $S^\alpha - \lim x_k = 1$ ve $S^\alpha - \lim x_k = 0$ olur. Ama bu mümkün değildir.

Tanım 2.2.7. $\alpha > 0$ ve $p > 0$ reel sayılar olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p = 0$$

olacak biçimde bir L kompleks sayısı mevcut ise $x = (x_k)$ dizisi, L'ye α. dereceden kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilirdir denir [5]. $\alpha = 1$ için α. dereceden kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilirlik, kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilirliğe dönüşür. Tüm α. dereceden kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi w_p^{α} ile gösterilir.

Tanım 2.2.8. (Modülüs fonksiyonu) Eğer bir $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu;

i) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$

iii) f artan

iv) f, 0'da sağdan sürekli (dolayısıyla $[0, \infty)$'da her yerde sürekli)

koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyona *modülüs fonksiyonu* adı verilir.

Bir modülüs fonksiyonu sınırlı ya da sınırsız olabilir. Örneğin, $f(x) = x^p$, $0 < p \leq 1$ sınırsız, $f(x) = \frac{x}{1+x}$ sınırlı bir modülüs fonksiyonudur [26].

Her $n \in \mathbb{N}$ için $f(n) \leq nf(1)$ eşitsizliğinin (ii) den çıkacağı açıkça görülmektedir.

Uyarı 2.2.9. f ve g herhangi iki modülüs fonksiyonu olmak üzere f^{-1}, $f.g$, $f - g$ ve f/g fonksiyonlarının modülüs fonksiyonu olması gerekmez [29].

Lemma 2.2.10. f ve g herhangi iki modülüs fonksiyonu ise $f \circ g$, αf $(\alpha \geq 0)$, $\frac{f}{1+f}$ ve $f + g$ fonksiyonları da modülüs fonksiyonlarıdır [29].

Tanım 2.2.11. f sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun. Bir $A \subseteq \mathbb{N}$ kümesinin $f-$ *yoğunluğu*, eğer limit mevcutsa

$$\delta_f(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(|\{k \leq n : \ k \in A\}|)}{f(n)}$$

ile tanımlıdır [1].

Uyarı 2.2.12. $f(x) = x$ durumunda $f-$ yoğunluk, doğal yoğunluğa dönüşür. Doğal yoğunluk durumunda $\delta(A) + \delta(\mathbb{N} - A) = 1$ dır. Ancak bu eşitlik $f-$ yoğunluk durumunda doğru değildir, yani $\delta_f(A) + \delta_f(\mathbb{N} - A) = 1$ eşitliği genel olarak geçerli değildir. Örneğin, $f(x) = \log(x + 1)$ ve $A = \{2n : \ n \in \mathbb{N}\}$ alınırsa $\delta_f(A) = \delta_f(\mathbb{N} - A) = 1$ dir.

Ayrıca $f-$ yoğunluk durumunda $\delta_f(A) = 0$ ise $\delta_f(\mathbb{N} - A) = 1$ olduğu söylenebilir. Doğal yoğunluk durumunda olduğu gibi sonlu kümeler sıfır $f-$ yoğunluğa sahiptir ve dolayısıyla her sonlu A kümesi için $\delta_f(A) + \delta_f(\mathbb{N} - A) = 1$ dir [1].

Uyarı 2.2.13. Herhangi bir sınırsız f modülüsü ve $A \subseteq \mathbb{N}$ için $\delta_f(A) = 0$ ise $\delta(A) = 0$ dır. (Gerçekten, $\delta_f(A) = 0$ ise limit tanımından her $p \in \mathbb{N}$ için öyle bir $n_\circ \in \mathbb{N}$ vardır ki $n \geq n_\circ$ için

$$f(|A(n)|) \leq \frac{1}{p} f(n) \leq \frac{1}{p} p f\left(\frac{1}{p} n\right) = f\left(\frac{1}{p} n\right)$$

dir ve f artan olduğundan $|A(n)| \leq \frac{1}{p} n$ ve dolayısıyla $\delta(A) = 0$ dır).

Ama bunun tersi genelde doğru değildir, yani sıfır doğal yoğunluğa sahip bir küme, sınırsız bir f modülüsüne göre sıfır olmayan $f-$ yoğunluğa sahip olabilir. Örneğin, $f(x) = \log(x+1)$ ve $A = \{1, 4, 9, 16, ...\}$ alınırsa $\delta(A) = 0$ ama $\delta_f(A) = \frac{1}{2}$ dir.

Ancak Uyarı 2.2.12 den, sınırsız f modülüsünün seçimine bakılmaksızın, herhangi sonlu bir $A \subseteq \mathbb{N}$ kümesi için $\delta(A) = 0$ iken $\delta_f(A) = 0$ olduğu her zaman doğrudur [1].

Tanım 2.2.14. f sınırsız bir modülüs fonksiyonu ve $x = (x_k)$ bir sayı dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{f(n)} f(|\{k \leq n : \ |x_k - L| \geq \varepsilon\}|) = 0$$

olacak biçimde bir L sayısı mevcut ise, (x_k) dizisi L'ye *$f-$ istatistiksel yakınsaktır* denir ve bunun için $S_f - \lim x = L$ gösterimi kullanılır. Tüm $f-$ istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S_f ile gösterilir [1].

3. METRİK UZAYLARDA λ_d- İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK, λ_d- İSTATİSTİKSEL SINIRLILIK ve KUVVETLİ $(V,\lambda)_d$ TOPLANABİLİRLİK

3.1. Metrik Uzaylarda λ_d- İstatistiksel Yakınsaklık ve λ_d- İstatistiksel Sınırlılık

Bu kısımda, metrik uzaylarda bir dizinin λ_d- istatistiksel yakınsaklığı ve λ_d- istatistiksel sınırlılığı tanımlanacak ve Λ sınıfına ait çeşitli $\lambda = (\lambda_n)$ dizileri için λ_d- istatistiksel yakınsak dizilerin kümeleri ile λ_d- istatistiksel sınırlı dizilerin kümeleri arasındaki ilişkiler verilecektir.

Tanım 3.1.1. (X,d) bir metrik uzay, $x = (x_k)$ bu uzayda bir dizi ve $\lambda = (\lambda_n) \in \Lambda$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left|\{k \in I_n : x_k \notin B_\varepsilon(x_\circ)\}\right| = 0$$

olacak biçimde bir $x_\circ \in X$ elemanı mevcut ise (x_k) dizisi $x_\circ$'a λ_d- *istatistiksel yakınsaktır* denir. Burada $I_n = [n-\lambda_n+1, n]$ ve $B_\varepsilon(x_\circ) = \{x \in X : d(x,x_\circ) < \varepsilon\}$, $x_\circ$ merkezli ε yarıçaplı açık yuvardır. (X,d) metrik uzayında λ_d- istatistiksel yakınsak olan dizilerin sınıfı $S_{\lambda_d}(X)$ ile gösterilecektir. Eğer (X,d) metrik uzayında bir $x = (x_k)$ dizisi bir $x_\circ \in X$ noktasına λ_d- istatistiksel yakınsak ise bu durum $x_k \to x_\circ\, [S_{\lambda_d}(X)]$ ile gösterilir.

$(\lambda_n) = (n)$ durumunda $S_{\lambda_d}(X)$'in $S_d(X)$'e denk olduğu açıktır. Burada $S_d(X)$, $x_\circ \in X$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \le n : x_k \notin B_\varepsilon(x_\circ)\}\right| = 0$$

koşulunu sağlayan dizilerin kümesini göstermektedir [17].

Bir $n_\circ \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ için $\mathbb{N}_{n_\circ} = \{n_\circ, n_\circ+1, n_\circ+2, ...\}$ olarak tanımlansın. Bu durumda "*her* $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$" ile "pozitif tamsayıların sonlu çoklukta olanlar dışındaki her $n \in \mathbb{N}$" kastedilecektir.

Teorem 3.1.2. (X,d) bir metrik uzay, $\lambda = (\lambda_n), \mu = (\mu_n) \in \Lambda$ her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için $\lambda_n \le \mu_n$ olacak şekilde iki dizi olsun.

(i) Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{\lambda_n}{\mu_n} > 0 \tag{3.1}$$

ise μ_d- istatistiksel yakınsak her dizi λ_d- istatistiksel yakınsaktır, yani $S_{\mu_d}(X) \subseteq S_{\lambda_d}(X)$ dir.

(ii) Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} = 1 \tag{3.2}$$

ise her λ_d- istatistiksel yakınsak dizi μ_d- istatistiksel yakınsaktır, yani $S_{\lambda_d}(X) \subseteq S_{\mu_d}(X)$ dir.

İspat. İspat için [4] de verilen teknikler kullanılacaktır.

(i) Her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olduğu ve (3.1) in sağlandığı varsayılsın. Bu durumda $I_n \subset J_n$ dir ve böylece her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \in J_n : x_k \notin B_\varepsilon(x_\circ)\}| \geq |\{k \in I_n : x_k \notin B_\varepsilon(x_\circ)\}|$$

yazılabilir. Buradan her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için

$$\frac{1}{\mu_n}|\{k \in J_n : x_k \notin B_\varepsilon(x_\circ)\}| \geq \frac{\lambda_n}{\mu_n}\frac{1}{\lambda_n}|\{k \in I_n : x_k \notin B_\varepsilon(x_\circ)\}|$$

elde edilir, burada $J_n = [n - \mu_n + 1, n]$ dir.

Son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınarak ve (3.1) kullanılarak $x_k \to x_\circ\ [S_{\mu_d}(X)] \Longrightarrow x_k \to x_\circ\ [S_{\lambda_d}(X)]$ ve böylece $S_{\mu_d}(X) \subseteq S_{\lambda_d}(X)$ elde edilir.

(ii) $(x_k) \in S_{\lambda_d}(X)$ olsun ve (3.2) sağlansın. $I_n \subset J_n$ olduğundan $\varepsilon > 0$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_n}|\{k \in J_n : x_k \notin B_\varepsilon(x_\circ)\}| &= \frac{1}{\mu_n}|\{n - \mu_n + 1 \leq k \leq n - \lambda_n : x_k \notin B_\varepsilon(x_\circ)\}| \\
&\quad + \frac{1}{\mu_n}|\{k \in I_n : x_k \notin B_\varepsilon(x_\circ)\}| \\
&\leq \frac{\mu_n - \lambda_n}{\mu_n} + \frac{1}{\lambda_n}|\{k \in I_n : x_k \notin B_\varepsilon(x_\circ)\}| \\
&\leq \left(1 - \frac{\lambda_n}{\mu_n}\right) + \frac{1}{\lambda_n}|\{k \in I_n : x_k \notin B_\varepsilon(x_\circ)\}|
\end{aligned}$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki birinci terim (3.2) den dolayı $\lim\limits_n \frac{\lambda_n}{\mu_n} = 1$ olduğundan ve ikinci terim $x = (x_k) \in S_{\lambda_d}(X)$ olduğundan $n \to \infty$ iken 0 a gider. Bu,

$n \to \infty$ iken $\frac{1}{\mu_n} |\{k \in J_n : x_k \notin B_\varepsilon(x_\circ)\}| \to 0$ olduğu ve dolayısıyla $x_k \to x_\circ \left[S_{\lambda_d}(X)\right]$ $\Longrightarrow x_k \to x_\circ \left[S_{\mu_d}(X)\right]$ olduğu anlamına gelir. Bu nedenle $S_{\lambda_d}(X) \subseteq S_{\mu_d}(X)$ dir.

Teorem 3.1.2 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.3. (X, d) bir metrik uzay olsun ve $\lambda = (\lambda_n), \mu = (\mu_n) \in \Lambda$ dizileri her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ şartını sağlasınlar. Eğer (3.2) sağlanıyorsa $S_{\lambda_d}(X) = S_{\mu_d}(X)$ dir.

Teorem 3.1.2 de $\mu = (\mu_n) = (n)$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.4. (X, d) bir metrik uzay ve $\lambda = (\lambda_n) \in \Lambda$ olsun. $\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n} = 1$ ise $S_{\lambda_d}(X) = S_d(X)$ dir.

Tanım 3.1.5. (X, d) bir metrik uzay ve $\lambda = (\lambda_n) \in \Lambda$ olsun. (X, d) metrik uzayında verilen bir $x = (x_k)$ dizisine, eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : x_k \notin B_M(x)\}| = 0$$

olacak biçimde bir $x \in X$ elemanı ve bir $M > 0$ reel sayısı varsa λ_d- *istatistiksel sınırlıdır* denir. (X, d) metrik uzayında λ_d- istatistiksel sınırlı dizilerin kümesi $BS_{\lambda_d}(X)$ ile gösterilecektir.

$(\lambda_n) = (n)$ durumunda λ_d- istatistiksel sınırlılık, $d-$ statistiksel sınırlılığa indirgenir ve $d-$ istatistiksel sınırlı dizilerin kümesi $BS_d(X)$ ile gösterilir [18].

Teorem 3.1.6. Bir (X, d) metrik uzayında sınırlı bir dizi, herbir $\lambda \in \Lambda$ için λ_d- istatistiksel sınırlıdır.

Proof. $x = (x_k)$'nın bir (X, d) metrik uzayında sınırlı bir dizi olduğu varsayılsın ve herhangi bir $\lambda \in \Lambda$ gözönüne alınsın. (x_k) dizisi sınırlı olduğundan, her $k \in \mathbb{N}$ için $d(x_k, x) < M$ olacak şekilde bir $x \in X$ elemanı ve bir $M > 0$ reel sayısı vardır. Bu durumda

$$\{k \leq n : x_k \notin B_M(x)\} = \emptyset \tag{3.3}$$

olur ve

$$\{k \in I_n : x_k \notin B_M(x)\} \subset \{k \leq n : x_k \notin B_M(x)\}$$

kapsaması geçerli olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\{k \in I_n : x_k \notin B_M(x)\} = \emptyset$ ve dolayısıyla $|\{k \in I_n : x_k \notin B_M(x)\}| = 0$ yazılabilir. Buradan da $n \to \infty$ için $\lambda_n \to \infty$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : x_k \notin B_M(x)\}| = 0,$$

yani dizinin λ_d- istatistiksel sınırlı olduğu elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Uyarı 3.1.7. Teorem 3.1.6 nın tersi genelde doğru değildir. Bunu göstermek için aşağıdaki örnek gözönüne alınabilir:

Alışılmış metrik ile $X = \mathbb{R}$ uzayı alınsın. Bu durumda

$$x_k = \begin{cases} k, & k = m^2 \\ & \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \\ (-1)^k, & k \neq m^2 \end{cases}$$

ile tanımlı (x_k) dizisi sınırlı değildir. Ancak herhangi bir $M \geq 2$ için

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : x_k \notin B_M(x)\}| &\leq \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n - \lambda_n}}{\lambda_n} \\ &= \frac{\lambda_n}{\lambda_n\left(\sqrt{n} + \sqrt{n - \lambda_n}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n - \lambda_n}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlandığından ve bu eşitsizliğin sağ tarafı $n \to \infty$ için 0 a yaklaştığından, (x_k) dizisinin λ_d- istatistiksel sınırlı olduğu elde edilir.

Teorem 3.1.8. (X, d) bir metrik uzay ve $\lambda = (\lambda_n), \mu = (\mu_n) \in \Lambda$ her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ şartını sağlayan iki dizi olsun.

(i) (3.1) eşitliğinin sağlandığı varsayılsın. Eğer X'deki bir $x = (x_k)$ dizisi μ_d- istatistiksel yakınsak ise λ_d- istatistiksel sınırlıdır, yani $S_{\mu_d}(X) \subseteq BS_{\lambda_d}(X)$ dir.

(ii) (3.2) eşitliğinin sağlandığı varsayılsın. Eğer X'deki bir $x = (x_k)$ dizisi λ_d- istatistiksel sınırlı ise μ_d- istatistiksel sınırlıdır, yani $BS_{\lambda_d}(X) \subseteq BS_{\mu_d}(X)$ dir.

Proof. (i) Her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ şartı ve (3.1) eşitliği sağlansın. $x = (x_k)$ dizisinin bir $x_\circ \in X$ elemanına μ_d- istatistiksel yakınsak olduğu varsayılsın. $\lambda_n \leq \mu_n$ olduğundan $I_n \subset J_n$ dir ve dolayısıyla $\varepsilon > 0$ ve yeterince büyük bir $M > 0$ sayısı için

$$\{k \in I_n : x_k \notin B_M(x_\circ)\} \subset \{k \in J_n : x_k \notin B_\varepsilon(x_\circ)\}$$

yazılabilir. Bu kapsama bağıntısından,

$$\left|\left\{k \in J_n : x_k \notin B_\varepsilon\left(x_\circ\right)\right\}\right| \geq \left|\left\{k \in I_n : x_k \notin B_M\left(x_\circ\right)\right\}\right|$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için $J_n = [n - \mu_n + 1, n]$ olmak üzere

$$\frac{1}{\mu_n}\left|\left\{k \in J_n : x_k \notin B_\varepsilon\left(x_\circ\right)\right\}\right| \geq \frac{\lambda_n}{\mu_n}\frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k \in I_n : x_k \notin B_M\left(x_\circ\right)\right\}\right|$$

yazılabilir. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınarak ve (3.1) kullanılarak $x = (x_k) \in BS_{\lambda_d}(X)$ ve böylece $S_{\mu_d}(X) \subseteq BS_{\lambda_d}(X)$ elde edilir.

(ii) $(x_k) \in BS_{\lambda_d}(X)$ olsun ve (3.2) sağlansın. $I_n \subset J_n$ olduğundan, yeteri kadar büyük bir $M > 0$ sayısı ve her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_n}\left|\left\{k \in J_n : x_k \notin B_M\left(x_\circ\right)\right\}\right| &= \frac{1}{\mu_n}\left|\left\{n - \mu_n + 1 \leq k \leq n - \lambda_n : x_k \notin B_M\left(x_\circ\right)\right\}\right| \\
&\quad + \frac{1}{\mu_n}\left|\left\{k \in I_n : x_k \notin B_M\left(x_\circ\right)\right\}\right| \\
&\leq \frac{\mu_n - \lambda_n}{\mu_n} + \frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k \in I_n : x_k \notin B_M\left(x_\circ\right)\right\}\right| \\
&\leq \left(1 - \frac{\lambda_n}{\mu_n}\right) + \frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k \in I_n : x_k \notin B_M\left(x_\circ\right)\right\}\right|
\end{aligned}$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki birinci terim (3.2) den dolayı ve ikinci terim $x = (x_k) \in BS_{\lambda_d}(X)$ olduğundan $n \to \infty$ için 0 a gider. Bu da

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\mu_n}\left|\left\{k \in J_n : x_k \notin B_M\left(x_\circ\right)\right\}\right| = 0$$

olduğunu verir. Böylece (x_k) dizisi μ_d- istatistiksel sınırlı, yani $(x_k) \in BS_{\mu_d}(X)$ olur. $(x_k) \in BS_{\lambda_d}(X)$ keyfi bir eleman olduğundan $BS_{\lambda_d}(X) \subseteq BS_{\mu_d}(X)$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.9. (X, d) bir metrik uzay ve $\lambda = (\lambda_n) \in \Lambda$ verilmiş olsun. Bu durumda X deki her λ_d- istatistiksel yakınsak dizi λ_d- istatistiksel sınırlıdır, yani $S_{\lambda_d}(X) \subseteq BS_{\lambda_d}(X)$ dir.

İspat. $(\mu_n) = (\lambda_n)$ alınırsa Teorem 3.1.8 (i) den kolayca elde edilir.

Sonuç 3.1.10. (X, d) bir metrik uzay ve $\lambda = (\lambda_n) \in \Lambda$ olsun.

(i) Eğer

$$\lim_{n\to\infty}\inf\frac{\lambda_n}{n} > 0 \tag{3.4}$$

ise her istatistiksel yakınsak dizi λ_d- istatistiksel sınırlıdır, yani $S_d(X) \subseteq BS_{\lambda_d}(X)$ dir.

(ii) Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n} = 1 \tag{3.5}$$

ise her λ_d- istatistiksel sınırlı dizi aynı zamanda istatistiksel sınırlıdır, yani $BS_{\lambda_d}(X) \subseteq BS_d(X)$ dir.

Sırasıyla Teorem 3.1.8 (i) ve (ii) de $(\mu_n) = (n)$ alınarak ispat kolayca elde edilir.

Uyarı 3.1.11. Teorem 3.1.8 (i)'in tersi genelde doğru değildir. Örneğin alışılmış metrikle $X = \mathbb{R}$ alınırsa,

$$x_k = \begin{cases} 0, & k = 2m+1 \\ & \qquad\qquad m = 1,2,3,... \\ 1, & k = 2m \end{cases}$$

ile tanımlı (x_k) dizisinin, herhangi $\lambda, \mu \in \Lambda$ için μ_d- istatistiksel yakınsak olmadığı ama λ_d- istatistiksel sınırlı olduğu görülebilir. Bu örnekte her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ kısıtlamasına ihtiyaç olmadığına dikkat edilmelidir.

3.2. Metrik Uzaylarda Kuvvetli $(V,\lambda)_d-$ Toplanabilirlik

Bu kısımda öncelikle bir (X,d) metrik uzayında kuvvetli $(V,\lambda)_d-$ toplanabilirlik kavramı tanıtılacaktır. Daha sonra

$$\Lambda^* = \{\lambda = (\lambda_n) : \text{her } n \text{ için } 0 < \lambda_n \leq \lambda_{n+1} \text{ ve } \lambda_n \to \infty \ (n \to \infty \text{ için})\}$$

sınıfına ait çeşitli $\lambda = (\lambda_n)$ dizileri için kuvvetli $(V,\lambda)_d-$ toplanabilir dizilerin kümeleri arasındaki ilişkiler verilecektir. Λ^* sınıfını elde etmek için, Λ sınıfındaki $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n+1$ ve $\lambda_1 = 1$ şartlarının kaldırıldığına dikkat edilmelidir. $\Lambda \subset \Lambda^*$ olduğu açıktır ve kapsama kesindir. Örneğin $\lambda = (\lambda_n) = (n^2) \in \Lambda^* - \Lambda$ dır.

Bu bölümde daha önce kullanılan Λ sınıfı yerine Λ^* sınıfı kullanılacaktır.

Tanım 3.2.1. (X,d) bir metrik uzay ve $\lambda = (\lambda_n) \in \Lambda^*$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k\in I_n} d(x_k, x_\circ) = 0$$

ise $x = (x_k) \subset X$ dizisine $x_\circ \in X$ noktasına *kuvvetli* $(V,\lambda)_d-$ *toplanabilirdir* denir. (X,d) metrik uzayında kuvvetli $(V,\lambda)_d$ -toplanabilir dizilerin kümesi

$$[V,\lambda]_d(X) = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k\in I_n} d(x_k, x_\circ) = 0,\ \exists x_\circ \in X \right\}$$

ile gösterilecektir. Eğer (X,d) metrik uzayında bir $x = (x_k)$ dizisi $x_\circ \in X$ noktasına kuvvetli $(V,\lambda)_d-$ toplanabilir ise bu durum $x_k \to x_\circ [V,\lambda]_d(X)$ notasyonu ile gösterilir.

$\lambda_n = n$ durumunda $(V,\lambda)_d-$ toplanabilirlik $(C,1)_d-$ toplanabilirliğe indirgenir [3].

Teorem 3.2.2. (X,d) bir metrik uzay, $\lambda = (\lambda_n), \mu = (\mu_n) \in \Lambda^*$ olsun ve her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olduğu varsayılsın.

(i) Eğer (3.1) sağlanırsa X metrik uzayında kuvvetli $(V,\mu)_d$ -toplanabilir bir dizi aynı zamanda kuvvetli $(V,\lambda)_d-$ toplanabilirdir, yani $[V,\mu]_d(X) \subseteq [V,\lambda]_d(X)$ dir,

(ii) (3.2) nin sağlandığı varsayılsın. Eğer bir $x = (x_k) \subset X$ dizisi sınırlı ve $x_k \to x_\circ [V,\lambda]_d(X)$ ise $x_k \to x_\circ [V,\mu]_d(X)$ dir.

İspat. (i) (X,d) bir metrik uzay olsun ve her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olduğu varsayılsın. Bu durumda $I_n \subseteq J_n$ dir ve bundan dolayı her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için

$$\frac{1}{\mu_n}\sum_{k\in J_n} d(x_k, x_\circ) \geq \frac{1}{\mu_n}\sum_{k\in I_n} d(x_k, x_\circ)$$

ve buradan da

$$\frac{1}{\mu_n}\sum_{k\in J_n} d(x_k, x_\circ) \geq \frac{\lambda_n}{\mu_n}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} d(x_k, x_\circ)$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu durumda son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınarak ve (3.1) kullanılarak $x_k \to x_\circ [V,\mu]_d(X) \Longrightarrow x_k \to x_\circ [V,\lambda]_d(X)$ elde edilir. $x = (x_k) \in [V,\mu]_d(X)$ keyfi bir dizi olduğundan $[V,\mu]_d(X) \subseteq [V,\lambda]_d(X)$ elde edilir.

(ii) $x = (x_k) \subset X$ dizisi sınırlı ve $x_k \to x_\circ [V,\lambda]_d(X)$ olsun. (3.2) nin geçerli olduğu varsayılsın. $x = (x_k)$ sınırlı olduğundan $r > 0$ ve $x' \in X$ olmak üzere her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k \in B_r(x')$ olacak şekilde bir $B_r(x')$ açık yuvarı vardır. Buradan

$$d(x_k, x_\circ) \leq d(x_k, x') + d(x', x_\circ) < r + d(x', x_\circ) = M$$

yazılabilir. Şimdi, $\lambda_n \leq \mu_n$ ve her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için $I_n \subset J_n$ olduğundan, her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_n}\sum_{k\in J_n} d\left(x_k, x_\circ\right) &= \frac{1}{\mu_n}\sum_{k\in J_n - I_n} d\left(x_k, x_\circ\right) + \frac{1}{\mu_n}\sum_{k\in I_n} d\left(x_k, x_\circ\right) \\
&\leq \frac{\mu_n - \lambda_n}{\mu_n} M + \frac{1}{\mu_n}\sum_{k\in I_n} d\left(x_k, x_\circ\right) \\
&\leq \left(1 - \frac{\lambda_n}{\mu_n}\right) M + \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} d\left(x_k, x_\circ\right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki birinci terim (3.2) gereğince ve ikinci terim $x_k \to x_\circ \left[V, \lambda\right]_d (X)$ olması nedeniyle $n \to \infty$ için 0'a gider. Böylece $x_k \to x_\circ \left[V, \lambda\right]_d (X) \Longrightarrow x_k \to x_\circ \left[V, \mu\right]_d (X)$ elde edilir.

3.3. Metrik Uzaylarda λ_d- İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli $(V, \lambda)_d-$ Toplanabilirlik Arasındaki İlişki

Bu kısımda metrik uzaylarda Λ sınıfına ait çeşitli $\lambda = (\lambda_n)$ dizileri için kuvvetli $(V, \lambda)_d-$ toplanabilir dizilerin kümeleri ile λ_d- istatistiksel yakınsak dizilerin kümeleri arasındaki ilişki verilecektir.

Teorem 3.3.1. (X, d) bir metrik uzay ve $\lambda \in \Lambda$ olsun. Bu durumda

(i) $x_k \to x_\circ \left[V, \lambda\right]_d (X) \Longrightarrow x_k \to x_\circ \left[S_{\lambda_d}(X)\right]$ dir.

(ii) Eğer (x_k) sınırlı ve $x_k \to x_\circ \left[S_{\lambda_d}(X)\right]$ ise bu durumda $x_k \to x_\circ \left[V, \lambda\right]_d (X)$ dir.

İspat (i) $x_k \to x_\circ \left[V, \lambda\right]_d (X)$ olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\sum_{k\in I_n} d\left(x_k, x_\circ\right) \geq \sum_{\substack{k\in I_n \\ x_k \notin B_\varepsilon(x_\circ)}} d\left(x_k, x_\circ\right) \geq \varepsilon \left|\left\{k \in I_n : x_k \notin B_\varepsilon\left(x_\circ\right)\right\}\right|$$

yazılabilir. İki taraf λ_n ile bölünüp $n \to \infty$ için limit alınırsa $x_k \to x_\circ \left[V, \lambda\right]_d (X)$ olduğundan $x_k \to x_\circ \left[S_{\lambda_d}(X)\right]$ elde edilir.

(ii) (x_k), (X, d) metrik uzayında sınırlı bir dizi ve $x_k \to x_\circ \left[S_{\lambda_d}(X)\right]$ olsun. Bu durumda (x_k) dizisi sınırlı olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k \in B_r(x')$ olacak biçimde bir $B_r(x') \subset X$ açık yuvarı mevcuttur. Burada $r > 0$ ve $x' \in X$ dir. Şimdi

$$d\left(x_k, x_\circ\right) \leq d\left(x_k, x'\right) + d\left(x', x_\circ\right) < r + d\left(x', x_\circ\right) = M$$

yazılabilir ve $x_k \to x_\circ \left[S_{\lambda_d}(X)\right]$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left|\left\{k \in I_n : x_k \notin B_\varepsilon\left(x_\circ\right)\right\}\right| = 0$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} d\left(x_k,x_\circ\right) &= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{\substack{k\in I_n\\ x_k\notin B_\varepsilon(x_\circ)}} d\left(x_k,x_\circ\right)+\frac{1}{\lambda_n}\sum_{\substack{k\in I_n\\ d(x_k,x_\circ)<\varepsilon}} d\left(x_k,x_\circ\right)\\ &< \frac{M}{\lambda_n}\left|\left\{k\in I_n : x_k\notin B_\varepsilon\left(x_\circ\right)\right\}\right|+\varepsilon\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da $x_k \to x_\circ \left[V,\lambda\right]_d(X)$ anlamına gelir.

Teorem 3.3.2. (X,d) bir metrik uzay ve $\lambda=(\lambda_n), \mu=(\mu_n)\in\Lambda$ her $n\in\mathbb{N}_{n_\circ}$ için $\lambda_n\le\mu_n$ şartını sağlayan iki dizi olsun.

(i) (3.1) geçerli ise

$$x_k\to x_\circ\left[V,\mu\right]_d(X)\Longrightarrow x_k\to x_\circ\left[S_{\lambda_d}(X)\right]$$

dir ve bazı $\lambda,\mu\in\Lambda$ için $\left[V,\mu\right]_d(X)\subset S_{\lambda_d}(X)$ kapsaması kesindir,

(ii) (x_k) sınırlı ve $x_k\to x_\circ\left[S_{\lambda_d}(X)\right]$ ise bu durumda, (3.2) geçerli olduğunda $x_k\to x_\circ\left[V,\mu\right]_d(X)$ dir.

İspat. (i) $x_k\to x_\circ\left[V,\mu\right]_d(X)$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon>0$ için

$$\sum_{k\in J_n} d\left(x_k,x_\circ\right)\ge\sum_{k\in I_n} d\left(x_k,x_\circ\right)\ge\sum_{\substack{k\in I_n\\ x_k\notin B_\varepsilon(x_\circ)}} d\left(x_k,x_\circ\right)\ge\varepsilon\left|\left\{k\in I_n : x_k\notin B_\varepsilon\left(x_\circ\right)\right\}\right|$$

eşitsizliği sağlanır ve böylece her $n\in\mathbb{N}_{n_\circ}$ için

$$\frac{1}{\mu_n}\sum_{k\in J_n} d\left(x_k,x_\circ\right)\ge\frac{\lambda_n}{\mu_n}\frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k\in I_n : x_k\notin B_\varepsilon\left(x_\circ\right)\right\}\right|\varepsilon$$

elde edilir.

Son eşitsizlikte $n\to\infty$ için limit alınıp, (3.1) kullanılarak $x_k\to x_\circ\left[V,\mu\right]_d(X)\Longrightarrow x_k\to x_\circ\left[S_{\lambda_d}(X)\right]$ elde edilir. $x=(x_k)\in\left[V,\mu\right]_d(X)$ keyfi bir dizi olduğundan $\left[V,\mu\right]_d(X)\subseteq S_{\lambda_d}(X)$ kapsaması elde edilir.

Bazı $\lambda,\mu\in\Lambda$ için $\left[V,\mu\right]_d(X)\subset S_{\lambda_d}(X)$ kapsamasının kesin olduğunu göstermek için, $X=\mathbb{R}$, $d(x,y)=|x-y|$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için $\lambda_n=\frac{n+1}{2}$, $\mu_n=n$ alınsın. Bu durumda $\lim_n\frac{\lambda_n}{\mu_n}=\frac{1}{2}>0$ ve buradan $\left[V,\mu\right]_d(X)\subseteq S_{\lambda_d}(X)$ dir. $x=(x_k)$ dizisi

$$x_k=\begin{cases}\frac{1}{k}, & k\ne m^3\\ \\ k, & k=m^3\end{cases}$$

olarak tanımlansın. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. Bu durumda her $k > k_\circ$ ve $k \neq m^3$ için $|x_k| < \varepsilon$ olacak şekilde $k_\circ \in \mathbb{N}$ vardır. $n \to \infty$ iken

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_n}\left|\{k \in I_n : |x_k| \geq \varepsilon\}\right| &\leq \frac{1}{\lambda_n}\left(k_\circ + \sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{\frac{n-1}{2}}\right) \\ &= \frac{2}{n+1}\left(k_\circ + \sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{\frac{n-1}{2}}\right) \to 0\end{aligned}$$

olduğundan $x_k \to 0\,[S_\lambda]\,(\mathbb{R})$ elde edilir. Diğer taraftan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$$

eşitliğinin sağlandığı bilinmektedir. $[r]$, r reel sayısının tam kısmını göstermek üzere $\sqrt[3]{n} < [\sqrt[3]{n}] + 1$ ve böylece $\frac{1}{n} > \frac{1}{([\sqrt[3]{n}]+1)^3}$ olduğundan, yukarıdaki son eşitlik gözönüne alınarak,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_n}\sum_{k \in J_n} |x_k| &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1 \\ k=m^3}}^{n} x_k + \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq m^3}}^{n} x_k > \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1 \\ k=m^3}}^{n} x_k = \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1 \\ k=m^3}}^{n} k \\ &= \frac{1}{n}\left(1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + \left[\sqrt[3]{n}\right]^3\right) \\ &= \frac{\left[\sqrt[3]{n}\right]^2\left(\left[\sqrt[3]{n}\right]+1\right)^2}{4n} > \frac{\left[\sqrt[3]{n}\right]^2\left(\left[\sqrt[3]{n}\right]+1\right)^2}{4\left(\left[\sqrt[3]{n}\right]+1\right)^3} \to \infty \ \ (n \to \infty)\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu $x = (x_k) \notin [V,\mu]\,(\mathbb{R})$ olduğunu verir. Böylece $[V,\mu]_d\,(X) \subset S_{\lambda_d}\,(X)$ kapsaması kesindir.

(ii) $x_k \to x_\circ\,[S_{\lambda_d}\,(X)]$ ve $x = (x_k)$ dizisinin sınırlı olduğu varsayılsın. Bu durumda her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k \in B_r\,(x')$ olacak biçimde bir $r > 0$ sayısı ve $x' \in X$ elemanı mevcuttur. Buradan

$$d\,(x_k, x_\circ) \leq d\,(x_k, x') + d\,(x', x_\circ) < r + d\,(x', x_\circ) = M$$

yazılabilir. Ayrıca $\frac{1}{\mu_n} \leq \frac{1}{\lambda_n}$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ ve her $n \in \mathbb{N}_{n_\circ}$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_n}\sum_{k \in J_n} d\,(x_k, x_\circ) &= \frac{1}{\mu_n}\sum_{k \in J_n - I_n} d\,(x_k, x_\circ) + \frac{1}{\mu_n}\sum_{k \in I_n} d\,(x_k, x_\circ) \\ &\leq \frac{\mu_n - \lambda_n}{\mu_n} M + \frac{1}{\mu_n}\sum_{k \in I_n} d\,(x_k, x_\circ) \\ &\leq \left(1 - \frac{\lambda_n}{\mu_n}\right) M + \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k \in I_n} d\,(x_k, x_\circ)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(1-\frac{\lambda_n}{\mu_n}\right) M+\frac{1}{\lambda_n} \sum_{\substack{k \in I_n \\ x_k \notin B_{\varepsilon}(x_{\circ})}} d\left(x_k, x_{\circ}\right)+\frac{1}{\lambda_n} \sum_{\substack{k \in I_n \\ d(x_k, x_{\circ})<\varepsilon}} d\left(x_k, x_{\circ}\right) \\
&\leq \left(1-\frac{\lambda_n}{\mu_n}\right) M+\frac{M}{\lambda_n}\left|\left\{k \in I_n: x_k \notin B_{\varepsilon}\left(x_{\circ}\right)\right\}\right|+\varepsilon
\end{aligned}
$$

yazılabilir. (3.2) kullanılarak $x_k \rightarrow x_{\circ}\left[S_{\lambda_d}(X)\right]$ olduğunda $x_k \rightarrow x_{\circ}[V, \mu]_d(X)$ elde edilir.

Sonuç 3.3.3. Eğer $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{\lambda_n}{\mu_n}>0$ ise, bu durumda $S_{\mu_d}(X) \cap[V, \mu]_d(X) \subset S_{\lambda_d}(X)$ dir.

$\lim\limits_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n}=1$ olması $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{\lambda_n}{\mu_n}>0$ olmasını sağlar. Yani (3.2) $\Longrightarrow$ (3.1) olduğundan, Teorem 3.3.2 de her n için $\mu_n=n$ alınırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.3.4. Eğer $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n}=1$ ise, bu durumda

(*i*) (x_k) sınırlı ve $x_k \rightarrow x_{\circ}\left[S_{\lambda_d}(X)\right]$ ise $x_k \rightarrow x_{\circ}[C, 1]_d$,

(*ii*) $x_k \rightarrow x_{\circ}[C, 1]_d$ ise $x_k \rightarrow x_{\circ}\left[S_{\lambda_d}(X)\right]$ dır.

Uyarı 3.3.5. (X, d) bir metrik uzay, $\lambda=(\lambda_n) \in \Lambda^*$ ve $0<p<\infty$ olsun.

$$
[V, \lambda]_d^p=\left\{x=(x_k): \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n}\left[d\left(x_k, x_{\circ}\right)\right]^p=0,\ \exists x_{\circ} \in X\right\}
$$

tanımlansın. Bu durumda $[V, \lambda]_d(X)$ sınıfı yerine $[V, \lambda]_d^p$ ve $[V, \mu]_d(X)$ sınıfı yerine $[V, \mu]_d^p$ alınırsa, Teorem 3.3.2 $[V, \lambda]_d^p$ ve $[V, \mu]_d^p$ için de sağlanır.

4. METRİK UZAYLARDA α. DERECEDEN $d-$ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK, α. DERECEDEN $d-$ İSTATİSTİKSEL SINIRLILIK ve α. DERECEDEN $d-$ KUVVETLİ $p-$ CESÀRO TOPLANABİLİRLİK

4.1. Metrik Uzaylarda α. Dereceden $d-$ İstatistiksel Yakınsaklık ve α. Dereceden $d-$ İstatistiksel Sınırlılık

Bu kısımda metrik uzaylarda α. dereceden $d-$ istatistiksel yakınsaklık ve α. dereceden $d-$ istatistiksel sınırlılık kavramları verilecektir.

Tanım 4.1.1. (X, d) bir metrik uzay, $x = (x_k)$ bu uzayda bir dizi olsun ve $0 < \alpha \leq 1$ reel sayısı verilmiş olsun. (x_k) dizisine, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left|\{k \leq n : x_k \notin B_\varepsilon(x_\circ)\}\right| = 0$$

yani $\delta_\alpha(\{k \in \mathbb{N} : \ x_k \notin B_\varepsilon(x_\circ)\}) = 0$ olacak şekilde bir $x_\circ \in X$ elemanı varsa α. *dereceden $d-$ istatistiksel yakınsaktır* denir. Eğer (x_k) dizisi $x_\circ \in X$ noktasına α. dereceden $d-$ istatistiksel yakınsak ise bunu göstermek için $S_d^\alpha(X) - \lim x_k = x_\circ$ notasyonu kullanılacaktır.

$\alpha = 1$ için α. dereceden $d-$ istatistiksel yakınsaklık, $d-$ istatistiksel yakınsaklık ile aynıdır [17]. (X, d) metrik uzayındaki tüm α. dereceden $d-$ istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $S_d^\alpha(X)$ ile gösterilecektir ve $\alpha = 1$ durumunda tüm $d-$ istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $S_d(X)$ ile gösterilecektir.

Lemma 4.1.2. $\alpha \in (0, 1]$ verilsin. Eğer bir (x_k) dizisi α. dereceden $d-$ istatistiksel yakınsak ise, bu durumda onun $S_d^\alpha(X) -$ limiti tektir.

İspat. Varsayalım ki $S_d^\alpha(X) - \lim x_k = x_\circ$ ve $S_d^\alpha(X) - \lim x_k = x'_\circ$ olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$K_1(\varepsilon) = \left\{k \in \mathbb{N} : x_k \notin B_{\varepsilon/2}(x_\circ)\right\} \text{ ve } K_2(\varepsilon) = \left\{k \in \mathbb{N} : x_k \notin B_{\varepsilon/2}(x'_\circ)\right\}$$

kümeleri tanımlansın.

$S_d^\alpha(X) - \lim x_k = x_\circ$ olduğundan $\delta_\alpha(K_1(\varepsilon)) = 0$ dır. Aynı şekilde $S_d^\alpha(X) - \lim x_k = x'_\circ$ olduğundan $\delta_\alpha(K_2(\varepsilon)) = 0$ dır. Şimdi $K(\varepsilon) = K_1(\varepsilon) \cup K_2(\varepsilon)$ kümesini alalım. Bu durumda $\delta_\alpha(K(\varepsilon)) = 0$ olur ve bu

$$\delta_\alpha(\mathbb{N}\backslash K(\varepsilon)) = \begin{cases} 1, & \alpha = 1 \\ \infty, & \alpha < 1 \end{cases}$$

olmasını gerektirir. Bu ise $\mathbb{N}\backslash K(\varepsilon)$ kümesinin sonsuz elemanlı olduğunu verir. (Çünkü $\mathbb{N}\backslash K(\varepsilon)$ kümesi sonlu elemanlı olsaydı $\delta_\alpha(\mathbb{N}\backslash K(\varepsilon)) = 0$ olurdu.) Bu durumda herhangi bir $k \in \mathbb{N}\backslash K(\varepsilon)$ için

$$d(x_\circ, x'_\circ) \leq d(x_\circ, x_k) + d(x_k, x'_\circ) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

yazılabilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan bu son eşitsizlikten $d(x_\circ, x'_\circ) = 0$, yani $x_\circ = x'_\circ$ elde edilir.

Uyarı 4.1.3. α. dereceden $d-$ istatistiksel yakınsaklık $0 < \alpha \leq 1$ için iyi tanımlıdır, fakat $\alpha > 1$ için iyi tanımlı değildir. Bunun için herhangi bir (X, d) metrik uzayında a,$b \in X$ ve $a \neq b$ olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} a, & k = 2n \\ & \qquad\qquad n = 1, 2, 3, ... \\ b, & k \neq 2n \end{cases}$$

ile tanımlanmış (x_k) dizisini gözönüne alalım. Bu durumda $\alpha > 1$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : x_k \notin B_\varepsilon(a)\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n^\alpha} = 0$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : x_k \notin B_\varepsilon(b)\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n^\alpha} = 0$$

dır. Böylece $x = (x_k)$ hem a 'ya hem de b 'ye α. dereceden $d-$ istatistiksel yakınsak, yani $S_d^\alpha(X) - \lim x_k = a$ ve $S_d^\alpha(X) - \lim x_k = b$ olur. Ancak bu Lemma 4.1.2 ile çelişir.

Uyarı 4.1.4. Bir (X, d) metrik uzayında yakınsak her dizinin herbir $0 < \alpha \leq 1$ için α. dereceden $d-$ istatistiksel yakınsak olduğunu, yani $c_d(X) \subset S_d^\alpha(X)$ olduğunu görmek kolaydır. Ama tersi doğru değildir. Örneğin, $a, b \in X$ ve $a \neq b$ olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} a, & k = n^3 \\ & \qquad\qquad n = 1, 2, 3, ... \\ b, & k \neq n^3 \end{cases} \tag{4.1}$$

ile tanımlı (x_k) dizisi, $\alpha > \frac{1}{3}$ için α. dereceden istatistiksel yakınsaktır $(S_d^\alpha(X) - \lim x_k = b)$, ancak yakınsak değildir.

Teorem 4.1.5. (X,d) bir metrik uzay ve $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun. Bu durumda $S_d^\alpha(X) \subseteq S_d^\beta(X)$ dir ve α ve β için $\alpha < \frac{1}{k} < \beta$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ varsa kapsama kesindir.

İspat. (X,d) bir metrik uzay, $x = (x_k) \in S_d^\alpha(X)$ ve $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun. Bu durumda $S_d^\alpha(X) - \lim x_k = x_\circ$ olduğu kabul edilirse her $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{n^\beta}\left|\{k \leq n : x_k \notin B_\varepsilon(x_\circ)\}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha}\left|\{k \leq n : x_k \notin B_\varepsilon(x_\circ)\}\right|$$

yazılabilir ve bu $S_d^\alpha(X) \subseteq S_d^\beta(X)$ kapsamasını verir.

Kapsamanın kesin olduğu aşağıdaki örneklerden görülmektedir.

Örnek 4.1.6. $d(a,b) = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |a_k - b_k|$ $(a = (a_k), b = (b_k) \in l_\infty)$ metriği ile $X = l_\infty$ sınırlı diziler uzayı ve bu uzayda, herbir $k \in \mathbb{N}$ için $x^k = \left(x_i^k\right)_{i=1}^\infty \in l_\infty$ olmak üzere

$$x_i^k = \begin{cases} \frac{1}{k}, & k = n^2 \text{ ise herbir } i = 1,2,3,\ldots \text{ için} \\ \\ 0, & k \neq n^2 \text{ ise herbir } i = 1,2,3,\ldots \text{ için} \end{cases}$$

ile tanımlı (x^k) dizisi gözönüne alınsın. $\theta = (0,0,\ldots)$ olmak üzere

$$\frac{1}{n^\beta}\left|\left\{k \leq n : d(x^k,\theta) = \sup_{i\in\mathbb{N}}\left|x_i^k - 0\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \leq \frac{1}{n^\beta}\sqrt{n}$$

yazılabilir. $n \to \infty$ için limit alınırsa $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ için $(x_k) \in S_d^\beta(X)$ elde edilir. Fakat

$$\frac{\sqrt{n}-1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}\left|\left\{k \leq n : d(x^k,\theta) = \sup_{i\in\mathbb{N}}\left|x_i^k - 0\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

olduğundan $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ için $(x_k) \notin S_d^\alpha(X)$ dir.

Örnek 4.1.7. $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = n^2 \\ & \qquad\qquad n = 1,2,\ldots \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases} \tag{4.2}$$

ile tanımlı (x_k) dizisini gözönüne alalım. Bu durumda, $S_d^\beta(X) - \lim x_k = 0$ yani $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ için $x \in S_d^\beta(X)$ ancak $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ için $x \notin S_d^\alpha(X)$ dir **[5]**.

Teorem 4.1.5'de $\beta = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.8. Eğer bir metrik uzayda bir dizi $0 < \alpha \leq 1$ için bir $x_\circ \in X$ elemanına α. dereceden $d-$ istatistiksel yakınsak ise $x_\circ$'a istatistiksel yakınsaktır. Yani $S_d^\alpha(X) \subseteq S_d(X)$ dir ve $\alpha < 1$ için $\alpha < \frac{1}{k} < 1$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ varsa kapsama kesindir.

Teorem 4.1.9. d ve d', X üzerinde iki metrik ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Eğer $d \succeq d'$ ise, yani her $a, b \in X$ için $d(a,b) \geq d'(a,b)$ ise $S_d^\alpha(X) \subseteq S_{d'}^\alpha(X)$ dir.

İspat

$$\frac{1}{n^\alpha} \left|\{k \leq n : d'(x_k, x_\circ) \geq \varepsilon\}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha} \left|\{k \leq n : d(x_k, x_\circ) \geq \varepsilon\}\right|$$

eşitsizliğinden çıkar.

Tanım 4.1.10. (X,d) bir metrik uzay ve $0 < \alpha \leq 1$ verilmiş olsun. (X,d) metrik uzayındaki bir $x = (x_k)$ dizisine, eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left|\{k \leq n : x_k \notin B_M(x)\}\right| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ elemanı ve bir $M > 0$ reel sayısı varsa α. *dereceden $d-$ istatistiksel sınırlıdır* denir. (X,d) metrik uzayında α. dereceden $d-$ istatistiksel sınırlı dizilerin kümesi $BS_d^\alpha(X)$ ile gösterilecektir.

$\alpha = 1$ durumunda α. dereceden $d-$ istatistiksel sınırlılık, $d-$ istatistiksel sınırlılığa indirgenir [18]. $d-$ istatistiksel sınırlı dizilerin kümesi $BS_d(X)$ ile gösterilecektir.

Teorem 4.1.11. Bir (X,d) metrik uzayında sınırlı bir dizi aynı zamanda herbir $\alpha \in (0,1]$ için α. dereceden $d-$ istatistiksel sınırlıdır.

İspat. $x = (x_k)$ dizisinin bir (X,d) metrik uzayında sınırlı bir dizi olduğu kabul edilsin ve $\alpha \in (0,1]$ verilmiş olsun. (x_k) dizisi sınırlı olduğundan, her $k \in \mathbb{N}$ için $d(x_k, x) < M$ olacak şekilde bir $x \in X$ elemanı ve bir $M > 0$ reel sayısı mevcuttur. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $\{k \leq n : x_k \notin B_M(x)\} = \emptyset$ olduğundan herbir $\alpha \in (0,1]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left|\{k \leq n : x_k \notin B_M(x)\}\right| = 0$$

yazılabilir. Buradan (x_k) dizisi herbir $\alpha \in (0,1]$ için α. dereceden $d-$ istatistiksel sınırlı olur. Bu da ispatı tamamlar.

Uyarı 4.1.12. Teorem 4.1.11'nin tersi doğru değildir. Başka bir ifade ile bir metrik uzayda $d-$ istatistiksel sınırlı olan bir dizi sınırlı olmayabilir. Bunu göstermek için Uyarı 3.1.7 de verilen örnek gözönüne alınabilir. Bu örnekteki (x_k) dizisi sınırlı değildir. Ancak

$$\frac{1}{n^{\alpha}}\left|\{k \leq n : |x_k| \geq M\}\right| \leq \frac{\sqrt{n}+1}{n^{\alpha}}$$

eşitsizliği yeterince büyük bir $M > 0$ için sağlandığından ve bu eşitsizliğin sağ tarafı $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$ için $n \to \infty$ iken 0 a gittiği için, (x_k) dizisinin α. dereceden $d-$ istatistiksel sınırlı olduğu elde edilir.

Teorem 4.1.13. (X, d) bir metrik uzay ve $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun.

(i) Eğer X deki bir $x = (x_k)$ dizisi α. dereceden $d-$ istatistiksel yakınsak ise β. dereceden $d-$ istatistiksel sınırlıdır, yani $S_d^{\alpha}(X) \subseteq BS_d^{\beta}(X)$ dir.

(ii) Eğer X deki bir $x = (x_k)$ dizisi α. dereceden $d-$ istatistiksel sınırlı ise β. dereceden $d-$ istatistiksel sınırlıdır, yani $BS_d^{\alpha}(X) \subseteq BS_d^{\beta}(X)$ dir.

İspat. (i) $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ verilsin. $x = (x_k)$ dizisinin $x_\circ \in X$ noktasına α. dereceden $d-$ istatistiksel yakınsak olduğu kabul edilsin. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve yeterince büyük bir $M > 0$ sayısı için

$$\{k \leq n : x_k \notin B_M(x_\circ)\} \subset \{k \leq n : x_k \notin B_\varepsilon(x_\circ)\}$$

yazılabilir. Bu kapsamadan

$$\frac{1}{n^{\beta}}\left|\{k \leq n : x_k \notin B_M(x_\circ)\}\right| \leq \frac{1}{n^{\alpha}}\left|\{k \leq n : x_k \notin B_\varepsilon(x_\circ)\}\right|$$

elde edilir ve buradan $n \to \infty$ için limit alınarak $S_d^{\alpha}(X) \subseteq BS_d^{\beta}(X)$ elde edilir.

(ii) $(x_k) \in BS_d^{\alpha}(X)$ olsun. Yeterince büyük bir $M > 0$ için

$$\frac{1}{n^{\beta}}\left|\{k \leq n : x_k \notin B_M(x_\circ)\}\right| \leq \frac{1}{n^{\alpha}}\left|\{k \leq n : x_k \notin B_M(x_\circ)\}\right|$$

yazılabilir. $(x_k) \in BS_d^{\alpha}(X)$ olduğu için yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafı $n \to \infty$ iken 0 a gider ve dolayısıyla sol taraf da 0 a gider. Buradan $BS_d^{\alpha}(X) \subseteq BS_d^{\beta}(X)$ elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.14. Bir metrik uzayda

(i) α. dereceden $d-$ istatistiksel yakınsak her dizi α. dereceden $d-$ istatistiksel sınırlıdır, yani $S_d^{\alpha}(X) \subseteq BS_d^{\alpha}(X)$ dir,

(ii) α. dereceden $d-$ istatistiksel yakınsak her dizi $d-$ istatistiksel sınırlıdır, yani $S_d^{\alpha}(X) \subseteq BS_d(X)$ dir,

(iii) α. dereceden $d-$ istatistiksel sınırlı her dizi $d-$ istatistiksel sınırlıdır, yani herbir $\alpha \in (0,1]$ için $BS_d^{\alpha}(X) \subseteq BS_d(X)$ dir,

(iv) $d-$ istatistiksel yakınsak her dizi $d-$ istatistiksel sınırlıdır, yani $S_d(X) \subseteq BS_d(X)$ dir.

Sonuç 4.1.14 (iv), [18] deki Teorem 1 (ii) dir. Burada bu sonuç Teorem 4.1.13 (i) de $\alpha = \beta = 1$ alınarak elde edilir.

4.2. Metrik Uzaylarda α. Dereceden $d-$ Kuvvetli $p-$ Cesàro Toplanabilirlik

Bu kısımda, metrik uzaylarda α. dereceden $d-$ kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilirlik kavramı tanıtılacak ve $(0,\infty)$ aralığındaki çeşitli α değerleri için α. dereceden $d-$ kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilir dizilerin kümeleri arasındaki ilişkiler verilecektir.

Tanım 4.2.1. (X,d) bir metrik uzay ve $\alpha > 0$, $p > 0$ reel sayılar olsun. X uzayındaki bir $x = (x_k)$ dizisine,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} [d(x_k, x_\circ)]^p = 0$$

olacak şekilde bir $x_\circ \in X$ elemanı varsa α. *dereceden $d-$ kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilirdir* denir. (X,d) metrik uzayındaki tüm α. dereceden $d-$ kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi $w_{pd}^{\alpha}(X)$ ile gösterilecektir ve $\alpha = 1$ için $w_{pd}^{\alpha}(X)$ yerine $w_{pd}(X)$ yazılacaktır. $\alpha = 1$ için α . dereceden $d-$ kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilirlik, $d-$ kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilirliğe dönüşür [3].

Teorem 4.2.2. (X,d) bir metrik uzay, $0 < \alpha \leq \beta$ ve $p > 0$ bir reel sayı olsun. Bu takdirde, $w_{pd}^{\alpha}(X) \subseteq w_{pd}^{\beta}(X)$ dır ve $\alpha < \beta$ ise kapsama kesindir.

İspat (X,d) metrik uzay ve $x = (x_k) \in w_{pd}^{\alpha}(X)$ olsun. $0 < \alpha \leq \beta$ olmak üzere α, β ve bir p pozitif sayısı verildiğinde

$$\frac{1}{n^{\beta}} \sum_{k=1}^{n} [d(x_k, x_\circ)]^p \leq \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} [d(x_k, x_\circ)]^p$$

yazılabilir ve bu $w_{pd}^{\alpha}(X) \subseteq w_{pd}^{\beta}(X)$ kapsamasını verir.

Kapsamanın kesin olduğu aşağıdaki örneklerden görülür.

Örnek 4.2.3. $d(x,y) = |x-y|$ metriği ile $X = \mathbb{R}$ uzayı ve (4.2) de tanımlı $x = (x_k)$ dizisi gözönüne alınsın. Buna göre $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ için $x \in w_{pd}^{\beta}(X)$ ve $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ için $x \notin w_{pd}^{\alpha}(X)$ bulunur **[5]**.

Örnek 4.2.4. $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

metriği ile $X = \mathbb{R}^2$ uzayında,

$$x^k = \begin{cases} (1,0), & k = n^2 \\ & \qquad\qquad n = 1, 2, ... \\ (0,0), & k \neq n^2 \end{cases}$$

ile tanımlı $(x^k) \subset \mathbb{R}^2$ dizisini gözönüne alalım. Burada $(x^k) = (x^1, x^2, \ldots, x^k, \ldots)$; $x^1 = (x_1^1, x_2^1)$, $x^2 = (x_1^2, x_2^2), \ldots, x^k = (x_1^k, x_2^k), \ldots$ dır.

$$\frac{1}{n^{\beta}} \sum_{k=1}^{n} \left[d\left(x^k, (0,0)\right)\right]^p \leq \frac{\sqrt{n}}{n^{\beta}} = \frac{1}{n^{\beta - \frac{1}{2}}}$$

olduğundan, $n \to \infty$ için limit alınırsa $\frac{1}{2} < \beta$ için $w_{pd}^{\beta}(X) - \lim x^k = (0,0)$, yani $(x^k) \in w_{pd}^{\beta}(X)$ elde edilir. Fakat

$$\frac{\sqrt{n} - 1}{n^{\alpha}} \leq \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} \left[d\left(x^k, (0,0)\right)\right]^p$$

olduğundan, $n \to \infty$ için limit alınırsa $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ için $\frac{\sqrt{n}-1}{n^{\alpha}} \to \infty$ olur ve dolayısıyla $(x^k) \notin w_{pd}^{\alpha}(X)$ elde edilir.

Teorem 4.2.2 de $\beta = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.5. (X, d) bir metrik uzay ve $0 < p < \infty$ olsun. Bu durumda her $\alpha \in (0,1]$ için $w_{pd}^{\alpha}(X) \subseteq w_{pd}(X)$ dir.

4.3. Bir Metrik Uzayda $S_d^{\alpha}(X)$ ve $w_{pd}^{\alpha}(X)$ Kümeleri Arasındaki Bazı Kapsama Bağıntıları

Bu kısımda, metrik uzaylarda $(0,1]$ aralığındaki çeşitli α değerleri için α. dereceden $d-$ istatistiksel yakınsak dizilerin kümeleri ile α. dereceden $d-$ kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilir dizilerin kümeleri arasındaki ilişkiler verilecektir.

Teorerm 4.3.1. (X,d) bir metrik uzay, α ve β, $0<\alpha\leq\beta\leq 1$ olacak şekilde sabit reel sayılar ve $0<p<\infty$ olsun. Eğer (X,d) metrik uzayında bir dizi $x_\circ$ noktasına α. dereceden $d-$ kuvvetli p -Cesàro toplanabilir ise bu dizi aynı zamanda $x_\circ$ 'a β. dereceden $d-$ istatistiksel yakınsaktır.

İspat (X,d) bir metrik uzay ve $x=(x_k)$ dizisi bu uzayda α. dereceden $d-$ kuvvetli p-Cesàro toplanabilir olsun. Bu durumda herhangi bir $\varepsilon>0$ için

$$\frac{1}{n^{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}\left[d\left(x_k,x_\circ\right)\right]^p\geq\frac{1}{n^{\alpha}}\left|\left\{k\leq n:x_k\notin B_{\varepsilon}\left(x_\circ\right)\right\}\right|\varepsilon^p\geq\frac{1}{n^{\beta}}\left|\left\{k\leq n:x_k\notin B_{\varepsilon}\left(x_\circ\right)\right\}\right|\varepsilon^p$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte $n\to\infty$ için limit alınırsa, $x=(x_k)$ dizisi $x_\circ$'a α. dereceden $d-$ kuvvetli p-Cesàro toplanabilir olduğunda sol tarafın ve dolayısıyla sağ tarafın limiti 0 olur. Bu $x=(x_k)$ dizisinin $x_\circ$'a β. dereceden $d-$ istatistiksel yakınsak olduğu sonucunu verir.

Teorem 4.3.1 de $\beta=\alpha$ ve $\beta=\alpha=1$ alınırsa, sırasıyla, aşağıdaki Sonuç 4.3.2 (i) ve (ii) elde edilir.

Sonuç 4.3.2. (X,d) bir metrik uzay, $\alpha\in(0,1]$ ve $0<p<\infty$ olsun.

(i) Eğer (X,d) metrik uzayında bir dizi α. dereceden $d-$ kuvvetli p -Cesàro toplanabilir ise, aynı zamanda α. dereceden $d-$ istatistiksel yakınsaktır.

(ii) Eğer (X,d) metrik uzayında bir dizi $d-$ kuvvetli p -Cesàro toplanabilir ise, bu dizi aynı zamanda $d-$ istatistiksel yakınsaktır [3].

Uyarı 4.3.3. Teorem 4.3.1 ve dolayısıyla Sonuç 4.3.2 (i) ve (ii) nin tersi genelde doğru değildir.

Örnek 4.3.4. $d(x,y) = |x-y|$ metriği ile $X = \mathbb{R}$ uzayı ve

$$x_k = \begin{cases} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}, & k = n^3 \\ & \qquad n = 1, 2, ... \\ 0, & k \neq n^3 \end{cases}$$

ile tanımlı (x_k) dizisi gözönüne alınsın. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : d(x_k, 0) \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{n^\alpha} \sqrt[3]{n}$$

olduğundan $\frac{1}{3} < \alpha \leq 1$ için $(x_k) \in S_d^\alpha(X)$ dir. Ancak, özel olarak $p = 1$ için

$$\sum_{k=1}^{n} [d(x_k, 0)]^p = \sum_{k=1}^{n} |x_k| = \sum_{\substack{k=1 \\ k=m^3}}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq m^3}}^{n} 0 = \sum_{\substack{k=1 \\ k=m^3}}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2} \tag{4.3}$$

yazılabilir. Burada Bernoulli Eşitsizliği ($a > -1$, $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(1+a)^n \geq 1 + na$ sağlanır) uygulanırsa (4.3) ifadesinden

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} [d(x_k, 0)]^p &\geq \sum_{\substack{k=1 \\ k=m^3}}^{n} \left(1 + k^2 \frac{1}{k}\right) = \sum_{\substack{k=1 \\ k=m^3}}^{n} (1+k) \geq \sum_{\substack{k=1 \\ k=m^3}}^{n} k \\ &\geq 1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + \left(\left[\sqrt[3]{n}\right]\right)^3 \\ &= \left[\frac{\left[\sqrt[3]{n}\right]\left(\left[\sqrt[3]{n}\right]+1\right)}{2}\right]^2 \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} [d(x_k, 0)]^p &= \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} |x_k| \\ &\geq \frac{1}{n^\alpha} \frac{\left[\sqrt[3]{n}\right]^4 + 2\left[\sqrt[3]{n}\right]^3 + \left[\sqrt[3]{n}\right]^2}{4} \\ &> \frac{1}{n^\alpha} \frac{\left[\sqrt[3]{n}\right]^4}{4} \end{aligned}$$

elde edilir ki bu $\alpha < \frac{4}{3}$ için dolayısıyla $0 < \alpha \leq 1$ için $(x_k) \notin w_{pd}^\alpha(X)$ olduğunu söyler. Sonuç olarak, $\frac{1}{3} < \alpha \leq 1$ için $(x_k) \in S_d^\alpha(X) - w_{pd}^\alpha(X)$ dir.

Uyarı 4.3.5. Genel olarak bir metrik uzayda sınırlı ve $0 < \alpha < 1$ için α. dereceden $d-$ istatistiksel yakınsak bir dizinin α. dereceden $d-$ kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilir olması gerekmez. Bunu göstermek için aşağıdaki örnek gözönüne alınabilir.

Örnek 4.3.6. $d(x,y) = |x-y|$ metriği ile $X = \mathbb{R}$ metrik uzayı alınsın.

$$x_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}}, & k \neq m^3 \\ & \qquad m = 1,2,3,... \\ 1, & k = m^3 \end{cases}$$

ile tanımlı $x = (x_k)$ dizisi bu durum için bir örnektir. $x \in l_\infty$ olduğu açıktır ve $p = 1$ ise $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$ için $x \in S_d^\alpha(X) - w_{pd}^\alpha(X)$ olduğu görülür (detay için [5] e bakılabilir).

Sonuç 4.3.7. (X,d) bir metrik uzay, $0 < \alpha \leq 1$ ve p bir pozitif reel sayı olsun. Bu takdirde, $w_{pd}^\alpha(X) \subset S_d(X)$ dir ve $\alpha < 1$ için $\alpha < \frac{1}{k} < 1$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ varsa kapsama kesindir.

İspat. Sonuç 4.3.2 ve Sonuç 4.1.8 den $w_{pd}^\alpha(X) \subset S_d(X)$ elde edilir. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için $d(x,y) = |x-y|$ metriği ile $X = \mathbb{R}$ metrik uzayında

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = n^3 \\ & \qquad n = 1,2,3,... \\ 0, & k \neq n^3 \end{cases}$$

ile tanımlı (x_k) dizisini gözönüne alalım. Bu durumda, $S_d(X) - \lim x_k = 0$, yani $x \in S_d(X)$ olduğu kolayca görülür. Ancak $0 < \alpha < \frac{1}{3}$ ve $p = 1$ için $x \notin w_{pd}^\alpha(X)$ dır. Gerçekten,

$$\frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n}|x_k - 0|^p = \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n}|x_k| \geq \frac{\sqrt[3]{n}-1}{n^\alpha}$$

olduğundan $n \to \infty$ iken $\frac{\sqrt[3]{n}-1}{n^\alpha} \to \infty$ olup, $0 < \alpha \leq \frac{1}{3}$ ve $p = 1$ için $x \notin w_{pd}^\alpha(X)$ dır. Sonuç olarak $0 < \alpha \leq \frac{1}{3}$ ve $p = 1$ için $x \in S_d(X) - w_{pd}^\alpha(X)$ dir.

5. METRİK UZAYLARDA BİR MODÜLÜSE GÖRE $df-$ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK, $df-$ İSTATİSTİKSEL SINIRLILIK ve KUVVETLİ $df-$ CESÀRO TOPLANABİLİRLİK

5.1. Metrik Uzaylarda Bir Modülüse Göre $df-$ İstatistiksel Yakınsaklık ve $df-$ İstatistiksel Sınırlılık

Bu kısımda, metrik uzaylarda f sınırsız bir modülüs fonksiyonu olmak üzere $df-$ istatistiksel yakınsaklık ve $df-$ istatistiksel sınırlılık kavramları tanıtılacak ve bunlar arasındaki ilişkiler verilecektir.

Tanım 5.1.1. (X, d) bir metrik uzay, $x = (x_k)$ bu uzayda bir dizi ve f, sınırsız bir modülüs olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(n)} f\left(\left|\left\{k \leq n : \ x_k \notin B_\varepsilon(x_\circ)\right\}\right|\right) = 0$$

olacak biçimde bir $x_\circ \in X$ varsa $x = (x_k)$ dizisi $x_\circ$'a df- *istatistiksel yakınsaktır* ya da $S_{df}(X)-$ *yakınsaktır* denir. Bu durumda $S_{df}(X) - \lim x_k = x_\circ$ yazılır. (X, d) metrik uzayındaki tüm $df-$ istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $S_{df}(X)$ ile gösterilecektir.

$f(x) = x$ durumunda $df-$ istatistiksel yakınsaklık, $d-$ istatistiksel yakınsaklığa dönüşür ve bu durumda $S_{df}(X)$ yerine $S_d(X)$ yazılır [17].

Uyarı 2.2.13 ve Tanım 5.1.1 birlikte gözönüne alınarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.1.2. $df-$ istatistiksel yakınsak bir dizi aynı zamanda $d-$ istatistiksel yakınsaktır, fakat tersi her zaman doğru değildir.

Lemma 5.1.3. Bir (X, d) metrik uzayındaki bir (x_k) dizisi $df-$ istatistiksel yakınsak ise limiti bir tektir.

İspat. $S_{df}(X) - \lim x_k = x_\circ$ ve $S_{df}(X) - \lim x_k = x'_\circ$ olduğu varsayılsın. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$K_1(\varepsilon) = \left\{k \leq n : \ x_k \notin B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_\circ)\right\} \text{ ve } K_2(\varepsilon) = \left\{k \leq n : \ x_k \notin B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x'_\circ)\right\}$$

kümeleri tanımlansın. $S_{df}(X) - \lim x_k = x_\circ$ olduğu için $\delta_f(K_1(\varepsilon)) = 0$ dır. Aynı şekilde $S_{df}(X) - \lim x_k = x'_\circ$ olduğu için $\delta_f(K_2(\varepsilon)) = 0$ dır.

$K(\varepsilon) = K_1(\varepsilon) \cup K_2(\varepsilon)$ alınsın. Bu takdirde $\delta_f(K(\varepsilon)) = 0$ dır ve Uyarı 2.2.12 den $\delta_f(\mathbb{N} \backslash K(\varepsilon)) = 1$ dir. Bu $\mathbb{N} \backslash K(\varepsilon) \neq \emptyset$ olduğunu verir. Böylece herhangi bir $k \in \mathbb{N} \backslash K(\varepsilon)$ için,

$$d(x_\circ, x'_\circ) \leq d(x_\circ, x_k) + d(x_k, x'_\circ) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

yazılabilir. Son eşitsizlikten her $\varepsilon > 0$ için $0 \leq d(x_\circ, x'_\circ) < \varepsilon$ elde edilir ki bu $d(x_\circ, x'_\circ) = 0$, yani $x_\circ = x'_\circ$ olduğunu verir.

Lemma 5.1.4. f ve g sınırsız iki modülüs fonksiyonu olsun. Eğer $S_{df}(X) - \lim x_k = x_\circ$ ve $S_{dg}(X) - \lim x_k = x'_\circ$ ise, bu durumda $x_\circ = x'_\circ$ dır.

İspat. $S_{df}(X) - \lim x_k = x_\circ$ ve $S_{dg} - \lim x_k = x'_\circ$ olsun. Sonuç 5.1.2 gereğince, her sınırsız f modülüsü için $df-$ istatistiksel yakınsak bir dizinin aynı zamanda $d-$ istatistiksel yakınsak olduğu biliniyor. Bundan dolayı (x_k) dizisi hem $x_\circ$'a hem de $x'_\circ$ e $d-$ istatistiksel yakınsaktır. $d-$ istatistiksel yakınsak bir dizinin limiti tek olduğundan $x_\circ = x'_\circ$ elde edilir.

Uyarı 5.1.5. Bir (X, d) metrik uzayında yakınsak bir dizi, her sınırsız f modülüsü için $df-$ istatistiksel yakınsaktır, ancak bunun tersi genelde doğru değildir. Örneğin, a ve b, X'in birbirinden farklı iki noktası olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} a, & k = n^2 \\ & \qquad n \in \mathbb{N} \\ b, & k \neq n^2 \end{cases}$$

ile tanımlı (x_k) dizisini ve $f(x) = x^p$, $0 < p \leq 1$ sınırsız modülüs fonksiyonunu gözönüne alalım.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(|\{k \leq n : \ d(x_k, b) \geq \varepsilon\}|)}{f(n)} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{f(\sqrt{n})}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n})^p}{n^p} = 0$$

olup (x_k) dizisi b'ye $df-$ istatistiksel yakınsaktır, ancak yakınsak değildir.

Teorem 5.1.6. (X, d) bir metrik uzay, $x = (x_k)$ bu uzayda bir dizi ve f, $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ olacak şekilde sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun. Eğer (x_k) dizisi $d-$ istatistiksel yakınsak ise $df-$ istatistiksel yakınsaktır.

İspat. $|\{k \leq n: \ d(x_k, x_\circ) \geq \varepsilon\}|$ bir doğal sayı olduğundan her sınırsız f modülüsü için

$$f(|\{k \leq n: \ x_k \notin B_\varepsilon(x_\circ)\}|) \leq |\{k \leq n: \ x_k \notin B_\varepsilon(x_\circ)\}| f(1)$$

ve buradan da

$$\frac{f(|\{k \leq n: \ x_k \notin B_\varepsilon(x_\circ)\}|)}{f(n)} \leq \frac{n}{f(n)} \frac{|\{k \leq n: \ x_k \notin B_\varepsilon(x_\circ)\}| f(1)}{n}$$

yazabiliriz. $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ ve $x \in S_d(X)$ olduğundan, bu son eşitsizlik kullanılarak $x \in S_{df}(X)$ elde edilir.

Tanım 5.1.7. (X, d) bir metrik uzay, $x = (x_k)$ bu uzayda bir dizi ve f sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(n)} f(|\{k \leq n: \ d(x_k, x_N) \geq \varepsilon\}|) = 0$$

olacak biçimde bir N pozitif tam sayısı mevcut ise $x = (x_k)$ dizisine $df-$ *istatistiksel Cauchy dizisi* denir.

Teorem 5.1.8. f sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu durumda, bir (X, d) metrik uzayında $df-$ istatistiksel yakınsak olan bir dizi aynı zamanda $df-$ istatistiksel Cauchy dizisidir.

İspat. $x = (x_k)$ dizisi $df-$ istatistiksel yakınsak olsun. Bu takdirde verilen her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(n)} f(|\{k \leq n: \ x_k \notin B_\varepsilon(x_\circ)\}|) = 0$$

olacak biçimde bir $x_\circ \in X$ vardır.

$$K(\varepsilon) = \left\{k \leq n: \ x_k \notin B_{\varepsilon/2}(x_o)\right\}$$

tanımlansın. $x = (x_k)$ dizisi $x_\circ$'a $df-$ istatistiksel yakınsak olduğundan $\delta_f(K(\varepsilon)) = 0$ ve $\delta_f(\mathbb{N}\backslash K(\varepsilon)) = 1$ dir. Böylece her $k \in \mathbb{N}\backslash K(\varepsilon)$ ve her $\varepsilon > 0$ için,

$$d(x_k, x_N) \leq d(x_k, x_\circ) + d(x_\circ, x_N) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olacak şekilde sabit bir $N \in \mathbb{N}\backslash K(\varepsilon)$ vardır. Buradan

$$\mathbb{N}\backslash K(\varepsilon) \subseteq \{k \leq n: \ d(x_k, x_N) < \varepsilon\}$$

ve dolayısıyla

$$\{k \leq n : \; d(x_k, x_N) \geq \varepsilon\} \subseteq K(\varepsilon)$$

yazılabilir. $\delta_f(K(\varepsilon)) = 0$ olduğundan

$$\delta_f(\{k \leq n : \; d(x_k, x_N) \geq \varepsilon\}) = 0$$

olur ki bu da (x_k)'nın $df-$ istatistiksel Cauchy dizisi olduğunu verir.

Tanım 5.1.9. (X, d) bir metrik uzay, $x = (x_k)$ bu uzayda bir dizi ve f, sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(n)} f(|\{k \leq n : \; x_k \notin B_M(x_\circ)\}|) = 0$$

olacak şekilde bir $x_\circ \in X$ noktası ve bir $M > 0$ reel sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine $df-$ *istatistiksel sınırlıdır* denir.

Teorem 5.1.10. (X, d) bir metrik uzay, $x = (x_k)$ bu uzayda bir dizi ve f sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun. Eğer $x = (x_k)$ dizisi sınırlı ise $df-$ istatistiksel sınırlıdır.

İspat. (x_k) dizisi sınırlı olsun. Bu takdirde her $k \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_k, x_\circ) < M$$

olacak biçimde bir $M > 0$ reel sayısı ve bir $x_\circ \in X$ noktası vardır. Bu durumda

$$\{k \leq n : \; x_k \notin B_M(x_\circ)\} = \emptyset$$

dir ve dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(n)} f(|\{k \leq n : \; x_k \notin B_M(x_\circ)\}|) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(0)}{f(n)} = 0$$

olur. Bu ise (x_k)'nın $df-$ istatistiksel sınırlı olduğunu verir.

$f(x) = x$ özel durumunda, Teorem 5.1.10 dan [18] deki Teorem 1 (i) elde edilir.

Uyarı 5.1.11. Teorem 5.1.10 un tersi genelde doğru değildir, yani $df-$ istatistiksel sınırlı olan bir dizi sınırlı olmak zorunda değildir.

Bunu göstermek için örneğin $d(x,y) = |x-y|$ metriği ile $X = \mathbb{R}$ uzayını, $f(x) = x^p$, $0 < p \leq 1$ modülüs fonksiyonunu ve

$$x_k = \begin{cases} k, & k = n^2 \\ & \qquad n \in \mathbb{N} \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases}$$

ile tanımlı (x_k) dizisini gözönüne alalım. (x_k) dizisinin sınırlı olmadığı açıktır. (x_k) dizisinin $df-$ istatistiksel sınırlı olduğunu göstermek için $x_\circ = 0$ ve yeterince büyük bir $M > 0$ seçilsin. Bu durumda

$$|\{k \leq n : \ |x_k| \geq M\}| = \left|\left\{k \leq n : \ k = n^2, \ |k| \geq M\right\}\right| \leq \left[\left|\sqrt{n}\right|\right] - [|M|] + 2 \leq \sqrt{n}$$

ve buradan f artan olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(n)} f(|\{k \leq n : \ |x_k| \geq M\}|) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{f(\sqrt{n})}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n})^p}{n^p} = 0$$

yazılabilir. Bu ise (x_k) dizisinin $df-$ istatistiksel sınırlı olmasıdır.

Teorem 5.1.12. $x = (x_k)$, (X,d) metrik uzayında bir dizi ve f sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun. Eğer $x = (x_k)$ dizisi $df-$ istatistiksel yakınsak ise $df-$ istatistiksel sınırlıdır.

İspat. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ ve yeterince büyük bir $M > 0$ için

$$\{k \leq n : \ x_k \notin B_M(x_\circ)\} \subseteq \{k \leq n : \ x_k \notin B_\varepsilon(x_\circ)\}$$

olup, bu kapsama

$$|\{k \leq n : \ x_k \notin B_M(x_\circ)\}| \leq |\{k \leq n : \ x_k \notin B_\varepsilon(x_\circ)\}|$$

eşitsizliğini verir. f artan ve (x_k) dizisi $df-$ istatistiksel yakınsak olduğundan bu eşitsizlikten yararlanarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(n)} f(|\{k \leq n : \ x_k \notin B_M(x_\circ)\}|) = 0$$

elde edilir. Bu da ispatı verir.

Uyarı 5.1.13. Teorem 5.1.12'nin tersi genelde doğru değildir, yani $df-$ istatistiksel sınırlı olan bir dizi $df-$ istatistiksel yakınsak olmak zorunda değildir. Bunu göstermek için herhangi bir (X,d) metrik uzayında, $a,b \in X$ birbirinden farklı iki sabit nokta olmak üzere

$$x_k = \begin{cases} a, & k = 2n \\ & \qquad n \in \mathbb{N} \\ b, & k = 2n+1 \end{cases}$$

ile tanımlı $x = (x_k)$ dizisi ve $f(x) = \log(x+1)$ modülüs fonksiyonu gözönüne alınsın. Bu durumda (x_k) dizisinin $df-$ istatistiksel sınırlı olduğu ancak $df-$ istatistiksel yakınsak olmadığı kolaylıkla görülebilir.

5.2. Metrik Uzaylarda Bir Modülüse Göre Kuvvetli $df-$ Cesàro Toplanabilirlik ve $df-$ İstatistiksel Yakınsaklık Arasındaki İlişki

Bir metrik uzayda bir modülüse göre kuvvetli $df-$ Cesàro toplanabilirlik kavramı daha önce Bilalov [3] tarafından tanımlandı. Bu kısımda, f modülüsünün bazı özel durumları için, kuvvetli $df-$ Cesàro toplanabilir dizilerin kümeleri arasındaki bazı kapsama bağıntıları ve kuvvetli $df-$ Cesàro toplanabilirlik ile $df-$ istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki verilecektir.

Tanım 5.2.1. (X,d) bir metrik uzay, (x_k) bu uzayda bir dizi ve f bir modülüs fonksiyonu olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left[d\left(x_k, x_\circ\right)\right] = 0$$

olacak biçimde bir $x_\circ \in X$ varsa (x_k) dizisi $x_\circ$ noktasına *kuvvetli $df-$ Cesàro toplanabilirdir* denir [3]. (X,d) metrik uzayında kuvvetli $df-$ Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi $w_{df}(X)$ ile gösterilecektir:

$$w_{df}(X) = \left\{ (x_k) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left[d\left(x_k, x_\circ\right)\right] = 0,\ \exists x_\circ \in X \right\}.$$

Bu tanımda f modülüs fonksiyonunun sınırsız olmasının gerekmediğine dikkat edilmelidir.

$f(x) = x$ durumunda (x_k) dizisi $x_\circ$ noktasına *kuvvetli $d-$ Cesàro toplanabilirdir* denir [3] ve (X,d) metrik uzayında kuvvetli $d-$ Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi $w_d(X)$ ile gösterilecektir:

$$w_d(X) = \left\{ x = (x_k) :\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} d\left(x_k, x_\circ\right) = 0,\ \exists x_\circ \in X \right\}.$$

Teorem 5.2.2. (X, d) bir metrik uzay ve f bir modülüs olsun. Bu durumda

$$w_d(X) \subset w_{df}(X)$$

dir.

İspat. $x \in w_d(X)$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} d(x_k, x_\circ) = 0$$

olacak şekilde bir $x_\circ \in X$ vardır.

$\varepsilon > 0$ verilsin ve δ'yı $0 < \delta < 1$ ve $0 < t \leq \delta$ için $f(t) < \varepsilon$ olacak şekilde seçilsin. $y_k = d(x_k, x_\circ)$ olarak tanımlansın ve ilk toplam $y_k \leq \delta$ ve ikinci toplam $y_k > \delta$ üzerinden olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{n} f(y_k) = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2$$

toplamı gözönüne alınsın. Bu durumda $y_k \leq \delta$ için $f(y_k) < \varepsilon$ olduğundan $\sum_1 < \varepsilon n$ ve $y_k > \delta$ için

$$y_k < \frac{y_k}{\delta} < 1 + \left[\frac{y_k}{\delta}\right]$$

yazılabilir. f artan ve alt toplamsal olduğundan

$$f(y_k) \leq f\left(1 + \left[\frac{y_k}{\delta}\right]\right) \leq f(1)\left(1 + \left[\frac{y_k}{\delta}\right]\right) \leq 2f(1)\frac{y_k}{\delta}$$

yazılır. Buradan

$$\sum\nolimits_2 \leq \frac{2f(1)}{\delta} \sum_{\substack{k=1 \\ y_k > \delta}}^{n} y_k$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left[d(x_k, x_\circ)\right] &\leq \varepsilon + \frac{2f(1)}{\delta}\frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ d(x_k, x_\circ) > \delta}}^{n} d(x_k, x_\circ) \\ &\leq \varepsilon + \frac{2f(1)}{\delta}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d(x_k, x_\circ) \end{aligned}$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ istenildiği kadar küçük yapılabileceğinden ve $x \in w_d(X)$ olduğundan son eşitsizliğin sağ tarafı istenildiği kadar küçük yapılabilir. Bu da $x \in w_{df}(X)$ olduğunu verir ki böylece ispat tamamlanmış olur.

Uyarı 5.2.3. Teorem 5.2.2'nin tersi doğru olmayabilir. Başka bir ifade ile $w_{df}(X) \subset w_d(X)$ kapsaması her zaman gerçekleşmeyebilir.

Örneğin, $d(x,y) = |x-y|$ genel metriği ile $X = \mathbb{R}$ uzayını,

$$x_k = \begin{cases} k, & k = n^3 \\ & \qquad n \in \mathbb{N} \\ 0, & k \neq n^3 \end{cases}$$

ile tanımlı (x_k) dizisini ve $f(x) = \frac{x}{1+x}$ modülüsünü gözönüne alalım. $f(0) = 0$ eşitliği de kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f[d(x_k,0)] &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(|x_k|) = \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1 \\ k=n^3}}^{n} f(k) + \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq n^3}}^{n} f(0) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1 \\ k=n^3}}^{n} \frac{k}{1+k} < \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1 \\ k=n^3}}^{n} 1 \leq \frac{\sqrt[3]{n}}{n} \end{aligned}$$

yazılabilir ve buradan $n \to \infty$ için limit alınırsa $x \in w_{df}(X)$ elde edilir. Ancak

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d(x_k,0) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k| = \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1 \\ k=n^3}}^{n} k + \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq n^3}}^{n} 0 \\ &= \frac{1}{n}\left(1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + \left[\sqrt[3]{n}\right]^3\right) = \frac{1}{n}\left[\frac{\left[\sqrt[3]{n}\right]\left(\left[\sqrt[3]{n}\right]+1\right)}{2}\right]^2 \\ &\geq \frac{1}{n}\left[\frac{\left(\sqrt[3]{n}-1\right)\left(\sqrt[3]{n}\right)}{2}\right]^2 = \frac{1}{n}\frac{n^{\frac{4}{3}} + 2n + n^{\frac{2}{3}}}{4} \end{aligned}$$

olduğundan $n \to \infty$ için limit alındığında sağ tarafın limiti ∞ olacağından $x \notin w_d(X)$ elde edilir.

Teorem 5.2.4. (X,d) bir metrik uzay ve f bir modülüs fonksiyonu olsun. Eğer $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ ise, bu durumda

$$w_{df}(X) \subset w_d(X)$$

dir.

İspat. $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ sağlansın. Bu durumda Maddox [23] deki Önerme 1 gereğince $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t}$ mevcuttur ve $\beta = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} = \inf\left\{\frac{f(t)}{t} : t > 0\right\}$ yazılabilir. Bu durumda her

$t \geq 0$ için $f(t) \geq \beta t$ dir. $\beta > 0$ olduğundan her $t \geq 0$ için $t \leq \frac{1}{\beta} f(t)$ yazılabilir ve buradan

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d(x_k, x_\circ) \leq \frac{1}{\beta}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f[d(x_k, x_\circ)]$$

elde edilir. Bu da $x \in w_{df}(X)$ olduğunda $x \in w_d(X)$ olduğunu verir.

Teorem 5.2.5. (X, d) bir metrik uzay ve f herhangi bir modülüs olsun. Eğer bir X metrik uzayındaki bir $x = (x_k)$ dizisi bir $x_\circ \in X$ elemanına kuvvetli $df-$ Cesàro toplanabilir ise aynı zamanda $x_\circ$'a d- istatistiksel yakınsaktır [3].

Teorem 5.2.6. (X, d) bir metrik uzay ve f sınırsız bir modülüs olsun. Eğer $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ ve $x = (x_k)$ dizisi bir $x_\circ \in X$ elemanına kuvvetli $df-$ Cesàro toplanabilir ise $x_\circ$'a $df-$ istatistiksel yakınsaktır.

İspat. $x = (x_k)$, X uzayında $x_\circ \in X$ elemanına kuvvetli $df-$ Cesàro toplanabilir herhangi bir dizi olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$K(n) = \{k \leq n : \ x_k \notin B_\varepsilon(x_\circ)\}$$

kümesi tanımlansın. f artan ve $f(|K(n)|) \leq |K(n)| f(1)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f[d(x_k, x_\circ)] &\geq \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1 \\ k\in K(n)}}^{n} f[d(x_k, x_\circ)] \geq \frac{1}{n}|K(n)| f(\varepsilon) \\ &\geq \frac{f(|K(n)|)}{f(n)}\frac{f(n)}{n}\frac{f(\varepsilon)}{f(1)} \end{aligned}$$

yazılabilir. $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ ve $x \in w_{df}(X)$ olduğu için $x \in S_{df}(X)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

$f(x) = x$ alınırsa Teorem 5.2.6 dan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.2.7. Bir (X, d) metrik uzayındaki bir dizi kuvvetli $d-$ Cesàro toplanabilir ise bu dizi aynı zamanda $d-$ istatistiksel yakınsaktır [3].

Sonuç 5.2.8. Bir (X, d) bir metrik uzayındaki bir $x = (x_k)$ dizisi sınırlı ve bir $x_\circ \in X$ elemanına $df-$ istatistiksel yakınsak ise bu dizi $x_\circ$'a kuvvetli $df-$ Cesàro toplanabilirdir.

İspat. $x = (x_k)$ dizisi sınırlı ve $df-$ istatistiksel yakınsak olsun. Sonuç 5.1.2 gereğince, $x = (x_k)$ aynı zamanda $d-$ istatistiksel yakınsaktır. Sınırlı ve $d-$ istatistiksel yakınsak bir dizinin kuvvetli $d-$ Cesàro toplanabilir olduğu biliniyor [3]. Son olarak Teorem 5.2.2'den de $w_d(X) \subset w_{df}(X)$ olduğu biliniyor ki bu da $x = (x_k)$ nın kuvvetli $df-$ Cesàro toplanabilir olduğunu verir.

Uyarı 5.2.9. Teorem 5.2.6'daki $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ koşulu kaldırılamaz. Gerçekten f, $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} = 0$ olacak şekilde sınırsız bir modülüs olsun. Bu durumda kuvvetli $df-$ Cesàro toplanabilir bir dizinin $df-$ istatistiksel yakınsak olması gerekmez. Örneğin, $d(x,y) = |x-y|$ genel metriği ile $X = \mathbb{R}$ uzayını ve

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = n^2 \\ & \qquad n \in \mathbb{N} \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases}$$

ile tanımlı (x_k) dizisini gözönüne alalım. Bu durumda $f(x) = \log(x+1)$ modülüs fonksiyonu için $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\log(t+1)}{t} = 0$ dır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left[d(x_k,0)\right] &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(|x_k|) = \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1 \\ k=n^2}}^{n} f(1) + \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq n^2}}^{n} f(0) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1 \\ k=n^2}}^{n} \log 2 = \frac{\sqrt{n}}{n}\log 2 \to 0,\ n \to \infty \text{ için} \end{aligned}$$

olduğundan $x \in w_{df}(X)$ elde edilir. Ancak

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(n)} f\left(|\{k \le n : \ d(x_k,0) \ge \varepsilon\}|\right) \\ = & \lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(n)} f\left(|\{k \le n : \ |x_k| \ge \varepsilon\}|\right) \\ = & \lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(n)} f\left(\sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(\sqrt{n}+1)}{\log(n+1)} = \frac{1}{2} \neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan $x \notin S_{df}(X)$ dir.

6. TARTIŞMA ve SONUÇLAR

Bu tezde, daha önce sayı dizileri için verilen $\lambda-$ istatistiksel yakınsaklık [25] kavramı metrik uzaylara genelleştirilerek; bir (X, d) metrik uzayındaki bir dizinin λ_d- istatistiksel yakınsaklığı, λ_d- istatistiksel sınırlılığı ve kuvvetli $(V, \lambda)_d-$ toplanabilirliği tanımlanmıştır ve $\lambda, \mu \in \Lambda$ için bazı şartlar altında $S_{\lambda_d}(X)$ ile $S_{\mu_d}(X)$, $BS_{\lambda_d}(X)$ ile $BS_{\mu_d}(X)$, $[V, \lambda]_d(X)$ ile $[V, \mu]_d(X)$ ve $S_{\lambda_d}(X)$ ile $[V, \mu]_d(X)$ kümeleri arasındaki bazı kapsama bağıntıları verilmiştir.

Çolak [5] tarafından verilen α. dereceden istatistiksel yakınsaklık kavramı metrik uzaylarda incelenmiş ve α. dereceden $d-$ istatistiksel yakınsaklık, α. dereceden $d-$ istatistiksel sınırlılık ve α. dereceden $d-$ kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilirlik kavramları tanıtılarak $(0, \infty)$ aralığındaki çeşitli α değerleri için α. dereceden $d-$ kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilir dizilerin kümeleri arasındaki ilişkiler ve $(0, 1]$ aralığındaki çeşitli α değerleri için α. dereceden $d-$ istatistiksel yakınsak dizilerin kümeleri ile α. dereceden $d-$ kuvvetli $p-$ Cesàro toplanabilir dizilerin kümeleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Bir modülüse göre istatistiksel yakınsaklık [1] düşüncesinden yararlanılarak f sınırsız bir modülüs fonksiyonu olmak üzere bir (X, d) metrik uzayında $df-$ istatistiksel yakınsaklık ve $df-$ istatistiksel sınırlılık kavramları ile bunlar arasındaki ilişkiler verilmiştir. Ayrıca f modülüsünün bazı özel durumları için, $df-$ istatistiksel yakınsaklık ile Bilalov ve Nazarova [3] tarafından tanımlanan kuvvetli $df-$ Cesàro toplanabilirlik arasındaki ilişki incelenmiştir.

Sonuç olarak bu çalışmada, reel veya kompleks sayı dizileri için çalışılmış olan istatistiksel yakınsaklık ve Cesaro toplanabilirlik benzeri toplanabilirlik kavramları kullanılarak elde edilen dizi sınıflarının, bir metrik uzaydaki karşılıkları verildi, yani terimleri bir metrik uzaydan alınmış dizilerin istatistiksel yakınsak, Cesaro toplanabilir ve benzeri bazı sınıfları tanımlandı, bu sınıfların özellikleri ve elde edilen sınıflar arasındaki kapsama ilişkileri ortaya koyularak amaçlanan neticeye ulaşıldı.

7. KAYNAKLAR

[1] **Aizpuru, A.; Listán-García, M. C.; Rambla-Barreno, F.,** 2014. Density by moduli and statistical convergence, Quaest. Math. 37 (4), 525–530.

[2] **Bhardwaj, V. K.; Dhawan, S.,** 2015. $f-$ statistical convergence of order α and strong Cesàro summability of order α with respect to a modulus, J. Inequal. Appl. 2015, 332, 14 pp.

[3] **Bilalov, B. ; Nazarova,T.,** 2015. On statistical convergence in metric spaces, Journal of Mathematics Research; Vol. 7, No. 1; 37-43.

[4] **Çolak R.**, May 12–13, 2011. On λ-statistical convergence, Conference on summability and applications, Commerce University, Istanbul, Turkey.

[5] **Çolak, R.,** 2010. Statistical convergence of order α, Modern Methods in Analysis and its Applications, (Anamaya Publ. New Delhi, India), 121-129.

[6] **Çolak, R. ; Bektaş, Ç. A.,** 2011. $\lambda-$ statistical convergence of order α, Acta Math. Sci. Ser. B (Engl. Ed.) 31 (3), 953-959.

[7] **Connor, J.S.,** 1988.The statistical and strong p-Cesàro convergence of sequences, Analysis, 8 (1-2), 47–63.

[8] **Connor, J.S.,** 1989. On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence, Canada Math. Bull. 32 (2), 194-198.

[9] **Fast, H.,** 1951. Sur la convergence statistique, Colloq. Math., 2, 241-244.

[10] **Fridy, J.A.,** 1985. On the statistical convergence, Analysis, 5, 301-313.

[11] **Fridy, J. A.; Orhan, C.,** Statistical limit superior and limit inferior. Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), no. 12, 3625–3631.

[12] **Gadjiev, A. D.; Orhan, C.,** 2002. Some approximation theorems via statistical convergence, Rocky Mountain J. Math. 32 (1), 129–138.

[13] **Goes, G. ; Goes, S.,** 1970. Sequences of bounded variation and sequences of Fourier coefficients, I. Math. Z. 118, 93–102.

[14] **Jain, P.K. ; Ahmad, K.,** 1993. Metric Spaces, Narosa Publishing House, New Delhi, INDIA.

[15] **Kolk, E.,** 1991. The statistical convergence in Banach spaces, Tartu Ül. Toimetised No. 928 41–52.

[16] **Kreyszig, E.,** 1978**.** Introductory Functional Analysis with Application, john Wiley & Sons, New York.

[17] **Küçükarslan, M.; Değer U.; Dovgoshey, O.** On Statistical Convergence of Metric-Valued Sequences, Ukr Math J (2014) 66: 796. doi:10.1007/s11253-014-0974-z

[18] **Küçükaslan, M.; Değer, U.,** 2012. On statistical boundedness of metric valued sequences. Eur. J. Pure Appl. Math. 5, no. 2, 174–186.

[19] **Leindler L.**, 1965. Über die de la Vallée-Pousinsche Summierbarkeit allgemeiner Orthogonalreihen. Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 16: 375-387.

[20] **Maddox, I. J.,** 1988. Statistical convergence in a locally convex space, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 104 (1), 141–145.

[21] **Maddox, I. J.,** 1986. Sequence spaces defined by a modulus, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 100 (1), 161–166.

[22] **Maddox, I. J.,** 1970**.** Elements of Fuctional Analysis, Cambirdge University Press, Cambridge, Second Edition.

[23] **Maddox, I. J.,** 1987. Inclusions between $FK-$ spaces and Kuttner's theorem, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 101 (3), 523–527.

[24] **Miller, H. I.; Orhan, C.,** 2001. On almost convergent and statistically convergent subsequences, Acta Math. Hungar. 93 (1-2), 135–151.

[25] **Mursaleen, M.,** 2000. $\lambda-$ Statistical convergence, Math. Slovaca, 50 (1), 111-115.

[26] **Nakano, H.,** 1953. Concave modulars, J. Math. Soc. Japan. 5, 29-49.

[27] **Fridy, J.A. ; Orhan, C.,** 1993. Lacunary statistical convergence, Pacific J. Math., 160 (1), 43-51.

[28] **Chandrasekhara Rao, K.,** 2006. Functional Analysis, Alpha Science International Ltd. Oxford, U.K.

[29] **Ruckle, W.H.,** 1973. FK spaces in which the sequence of coordinate vectors is bounded, Canad. J. Math. 25, 973-978.

[30] **Šalàt, T.,** 1980. On statistically convergent sequences of real numbers, Math. Slovaca., 30 (2), 139-150.

[31] **Savaş, E.,** 2000. Strongly almost convergence and almost $\lambda-$ statistical convergence, Hokkaido Math. J., 29, 531-536.

[32] **Schoenberg, I.J.,** 1959. The integrability of certain functions and related to summability methods, Amer. Math. Monthly, 66, 361-375.

[33] **Steinhaus, H.,** 1951. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, Colloq. Math., 2, 73–74.

[34] **Tabib, K. K.,** 2012. The Topology Of Statistical Convergence, Master Of Sciences, Department of Mathematical Sciences, The University of Texas at El Paso, USA.

[35] **Zygmund, A.** (1979) Trigonometric Series, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Malatya'da doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Malatya'da tamamladım. 2010 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nın Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalında yüksek lisans eğitimime başladım ve 2012 yılında bu programdan mezun oldum. 2014 yılında da aynı programda doktora eğitimime başladım ve devam etmekteyim.

Emine KAYAN

References

[1] **Aizpuru, A.; Listán-García, M. C.; Rambla-Barreno, F.,** 2014. Density by moduli and statistical convergence, Quaest. Math. 37 (4), 525–530.

[2] **Bhardwaj, V. K.; Dhawan, S.,** 2015. $f-$ statistical convergence of order α and strong Cesàro summability of order α with respect to a modulus, J. Inequal. Appl. 2015, 332, 14 pp.

[3] **Bilalov, B. ; Nazarova,T.,** 2015. On statistical convergence in metric spaces, Journal of Mathematics Research; Vol. 7, No. 1; 37-43.

[4] **Çolak R.**, May 12–13, 2011. On λ-statistical convergence, Conference on summability and applications, Commerce University, Istanbul, Turkey.

[5] **Çolak, R.,** 2010. Statistical convergence of order α, Modern Methods in Analysis and its Applications, (Anamaya Publ. New Delhi, India), 121-129.

[6] **Çolak, R. ; Bektaş, Ç. A.,** 2011. $\lambda-$ statistical convergence of order α, Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. 31 (3), 953-959.

[7] **Connor, J.S.,** 1988.The statistical and strong p-Cesàro convergence of sequences, Analysis, 8 (1-2), 47–63.

[8] **Connor, J.S.,** 1989. On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence, Canada Math. Bull. 32 (2), 194-198.

[9] **Fast, H.,** 1951. Sur la convergence statistique, Colloq. Math., 2, 241-244.

[10] **Fridy, J.A.,** 1985. On the statistical convergence, Analysis, 5, 301-313.

[11] Fridy, J. A.; Orhan, C., Statistical limit superior and limit inferior. Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), no. 12, 3625–3631.

[12] **Gadjiev, A. D.; Orhan, C.,** 2002. Some approximation theorems via statistical convergence, Rocky Mountain J. Math. 32 (1), 129–138

[13] **Goes, G. ; Goes, S.,** 1970. Sequences of bounded variation and sequences of Fourier coefficients, I. Math. Z. 118, 93–102.

[14] **Jain, P.K. ; Ahmad, K.,** 1993. Metric Spaces, Narosa Publishing House, New Delhi, INDIA.

[15] **Kolk, E.,** 1991. The statistical convergence in Banach spaces, Tartu Ül. Toimetised No. 928 41–52

[16] **Kreyszig, E.,** 1978. Introductory Functional Analysis with Application, john Wiley & Sons, New York.

[17] **M. Küçükarslan, U. Değer and O. Dovgoshey,**On Statistical Convergence of Metric-Valued Sequences, Ukr Math J (2014) 66: 796. doi:10.1007/s11253-014-0974-z

[18] **Küçükaslan, M.; Değer, U.,** 2012. On statistical boundedness of metric valued sequences. Eur. J. Pure Appl. Math. 5, no. 2, 174–186.

[19] **Leindler L.**, 1965. Über die de la Vallée-Pousinsche Summierbarkeit allgemeiner Orthogonalreihen. Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 16: 375-387

[20] **Maddox, I. J.,** 1988. Statistical convergence in a locally convex space, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 104 (1), 141–145.

[21] **Maddox, I. J.,** 1986. Sequence spaces defined by a modulus, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 100 (1), 161–166.

[22] **Maddox, I. J.,** 1970. Elements of Fuctional Analysis, Cambirdge University Press, Cambridge, Second Edition.

[23] **Maddox, I. J.,** 1987. Inclusions between $FK-$spaces and Kuttner's theorem, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 101 (3), 523–527.

[24] **Miller, H. I.; Orhan, C.,** 2001. On almost convergent and statistically convergent subsequences, Acta Math. Hungar. 93 (1-2), 135–151.

[25] **Mursaleen, M.,** 2000. $\lambda-$ Statistical convergence, Math. Slovaca, 50 (1), 111-115.

[26] **Nakano, H.,** 1953. Concave modulars, J. Math. Soc. Japan. 5, 29-49.

[27] **Fridy, J.A. ; Orhan, C.,** 1993. Lacunary statistical convergence, Pacific J. Math., 160 (1), 43-51.

[28] **Chandrasekhara Rao, K.,** 2006. Functional Analysis, Alpha Science International Ltd. Oxford, U.K.

[29] **Ruckle, W.H.,** 1973. FK spaces in which the sequence of coordinate vectors is bounded, Canad. J. Math. 25, 973-978.

[30] **Šalàt, T.,** 1980. On statistically convergent sequences of real numbers, Math. Slovaca., 30 (2), 139-150.

[31] **Savaş, E.,** 2000. Strongly almost convergence and almost $\lambda-$ statistical convergence, Hokkaido Math. J., 29, 531-536.

[32] **Schoenberg, I.J.,** 1959. The integrability of certain functions and related to summability methods, Amer. Math. Monthly, 66, 361-375.

[33] **Steinhaus, H.,** 1951. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, Colloq. Math., 2, 73–74.

[34] **Tabib, K. K.,** 2012. The Topology Of Statistical Convergence, Master Of Sciences, Department of Mathematical Sciences, The University of Texas at El Paso, USA.

[35] **Zygmund, A.** (1979) Trigonometric Series, Cambridge University Press, Cambridge, UK