T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

α. DERECEDEN Δ^m-İSTATİSTİKSEL SINIRLILIK

Fatih TEMİZSU

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mikail ET

HAZİRAN-2018

T.C.

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

α. DERECEDEN Δ^m–İSTATİSTİKSEL SINIRLILIK

DOKTORA TEZİ

Fatih TEMİZSU

(121121205)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 19 Haziran 2018

Tezin Savunulduğu Tarih : 6 Temmuz 2018

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mikail ET (F. Ü.)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN (ME. Ü.)

Prof. Dr. Mahmut IŞIK (HR. Ü.)

Prof. Dr. Hikmet KEMALOĞLU (F. Ü.)

Prof. Dr. Ayşegül GÖKHAN (F. Ü.)

HAZİRAN-2018

ÖNSÖZ

TÜBİTAK tarafından 2214-A bursuyla desteklenmiş olan bu tezin hazırlanması sürecinde bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygıdeğer hocam Prof. Dr. Mikail ET'e üzerimdeki emeklerinden dolayı çok teşekkür eder, saygılar sunarım. Ayrıca, Ohio Üniversitesi'nden Prof. Dr. Jeff CONNOR'a tezdeki bazı tanım ve özellikleri bulmada yardımcı olması hasebiyle minnettarım. Tezi yazarken kullandığım Scientific WorkPlace programına dair yardımlarını esirgemeyen Prof. Dr. Hıfsı ALTINOK'a teşekkür ederim. Son olarak, doktora eğitimine başladığım ilk günden beri hep yanımda olup beni destekleyen eşim Dr. Habibe TEMİZSU'ya şükranlarımı sunarım.

Fatih TEMİZSU

ELAZIĞ-2018

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Dört ana bölümden oluşan bu tez çalışmasının ilk bölümünde, istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel sınırlılık ve fark dizi uzayları kavramlarının tarihsel gelişiminden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde bu kavramlara dair, çalışmamızda sıklıkla yararlandığımız, bazı tanım ve özelliklere yer verilmiş ayrıca doğal sayı kümelerinin asimptotik yoğunluğundan söz edilmiştir. Bu bölümde son olarak çalışmanın sonraki bölümlerinde dual uzaylar ele alındığından Köthe-Toeplitz ve genelleştirilmiş Köthe-Toeplitz dual kavramları ve bunların bazı özelliklerine değinilmiştir.

Üçüncü bölümde ise Δ^m genelleştirilmiş fark operatörü aracılığıyla ilk olarak Δ^m-istatistiksel sınırlılık kavramı tanıtılıp; Δ^m-istatistiksel yakınsaklık, Δ^m-Cauchy olma ve Δ^m-sınırlılık gibi bazı diğer kavramlarla ilişkisinden bahsedilmiştir. Örneğin, Δ^m-istatistiksel sınırlı diziler kümesinin Δ^m-istatistiksel yakınsak diziler kümesini kapsadığı ve bu kapsamanın kesin olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bir $x = (x_k)$ dizisinin Δ^m-istatistiksel sınırlı olması için gerek ve yeter şartı karakterize eden bir teorem verilmiştir. Daha sonra Δ^m-istatistiksel sınırlı diziler kümesinin Köthe-Toeplitz ve genelleştirilmiş Köthe-Toeplitz duallerinin ϕ, sonlu sayıda sıfırdan farklı terim içeren dizilerin uzayı, olduğu hesaplanmıştır. Buradan elde edilen motivasyonla *istatistiksel Köthe-Toeplitz* ve *istatistiksel genelleştirilmiş Köthe-Toeplitz* dual kavramları tanıtılıp bunlara dair bazı yeni kavram ve özellikler ele alınmış ve c_0, c, ℓ_∞, Sc_0, Sc ve S_b gibi uzayların istatistiksel Köthe-Toeplitz ve istatistiksel genelleştirilmiş Köthe-Toeplitz duallerinin

$$\ell_b = \left\{ x \in \omega : \sum_{k \in E} |x_k| < \infty,\ \exists E \subseteq \mathbb{N},\ D(E) = 1 \right\}$$

uzayına eşit olduğu gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde Δ^m-istatistiksel sınırlılık kavramının $\alpha-$yoğunluk ve $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık anlamında bazı genelleştirmeleri tanımlanmış ve bunlarla ilgili kapsama teoremlerine yer verilmiştir. Beşinci ve son bölümde ise tez çalışmasında elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, İstatistiksel sınırlılık, Fark dizi uzayları, Köthe-Toeplitz dualler.

SUMMARY

Δ^m-Statistical Boundedness of Order α

This dissertation is formed by four main chapters. In the first chapter, the historical development of statistical convergence, statistical boundedness and difference sequence spaces is mentioned.

In the second chapter, some definitions and properties regarding these concepts, which are frequently referred in the following chapters, are included. We also discuss the asymptotic density of sets of natural numbers since it has a fundemantal role in the definitions of statistical convergence and boundedness. Lastly, some preliminary information about the concepts of Köthe-Toeplitz and generalized Köthe-Toeplitz dual is provided as we also deal with dual spaces in the following chapters.

In the third chapter, initially we define Δ^m-statistical boundedness by using the generalized difference operator Δ^m and examine its relationship between Δ^m-statistical convergence, Δ^m-Cauchiness and Δ^m-statistical boundedness. For instance, we show that the set of all Δ^m-statistical convergent sequences is strictly included by the set of all Δ^m-statistical bounded sequnces. Plus, we give a useful characterization for a sequence $x = (x_k)$ to be Δ^m-statistically bounded. Afterwards we compute the Köthe-Toeplitz and the generalized Köthe-Toeplitz duals of the set of all Δ^m-statistical bounded sequences as ϕ, the space of all finitely non-zero scalar suquences. Being motivated by this we come up with the idea of statistical Köthe-Toeplitz and statistical generalized Köthe-Toeplitz duals and deal some relevant concepts and properties. Finally, we prove that the statistical Köthe-Toeplitz and the statistical generalized Köthe-Toeplitz duals of c_0, c, ℓ_∞, Sc_0, Sc and S_b are equal to the space

$$\ell_b = \left\{ x \in \omega : \sum_{k \in E} |x_k| < \infty, \, \exists E \subseteq \mathbb{N}, \, D(E) = 1 \right\}.$$

In the fourth chapter, Δ^m-statistical boundedness is generalized with respect to $\alpha-$density and $\lambda-$statistical sense and some inclusion theorems are discussed. In the fifth and last chapter, we give the results obtained from the dissertation.

Keywords: Statistical convergence, Statistical boundedness, Difference sequence spaces, Köthe-Toeplitz duals.

SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı semboller, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	: Pozitif tam sayılar kümesi
ω	: Tüm dizilerin Uzayı
ℓ_∞	: Sınırlı dizilerin uzayı
c	: Yakınsak dizilerin uzayı
c_0	: Sıfıra yakınsayan dizilerin uzayı
S_b	: İstatistiksel sınırlı dizilerin uzayı
Sc	: İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
Sc_0	: İstatistiksel sıfır dizilerinin uzayı
ϕ	: Sonlu sayıda sıfırdan farklı terim içeren dizilerin uzayı
Δ^m	: Genelleştirilmiş fark operatörü
A^c	: A kümesinin tümleyeni
$\kappa(n)$	: $K \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere $\lvert K \cap \{1,2,3,...,n\} \rvert$

1. GİRİŞ

Modern analizde en önemli toplanabilme metodlarından biri istatistiksel yakınsaklıktır. Bilinen dizisel limit kavramının bir genelleştirmesi olarak düşünülebilecek istatistiksel yakınsaklık 1951'de ilk kez Fast tarafından kısa bir not [1] içerisinde tanıtılmış olmasına rağmen ilgili notta Steinhaus'un aynı yılda yayınlanmış ve yine istatistiksel yakınsaklık kavramını içeren [2] çalışmasına atıfta bulunulmuştur. Schoenberg [3] istatistiksel yakınsaklığın bazı temel özelliklerini vermiş aynı zamanda kavramı ilk kez bir toplanabilme metodu olarak ele almıştır. Bu kavram yıllar boyunca farklı isimler altında da olsa Fourier analizi, Ergodik teori, Sayı teorisi, Ölçüm teorisi, Trigonometrik seriler, Turnpike teorisi ve Toplanabilme teorisinde yer bulmuştur. İstatistiksel yakınsaklık aynı zamanda, Buck [4] tarafından tanıtılmış olan "yoğunlukta yakınsaklık" kavramının bir örneğini teşkil eder.

Fridy [5] istatistiksel Cauchy dizisi kavramını tanıtıp bunun istatistiksel yakınsaklığa denk olduğunu göstererek istatistiksel yakınsaklığın bir Cauchy kriterine sahip olduğunu ifade etmiştir. 1988'de Connor [6] o zamana kadar literatürde birbirinden bağımsız olarak ele alınmış olan kuvvetli p-Cesaro toplanabilme ile istatistiksel yakınsaklık kavramlarını ilk kez birlikte çalışmıştır. Connor, kuvvetli p-Cesaro toplanabilmenin istatistiksel yakınsaklığı gerektirdiğini gösterip sınırlı diziler için bunun tersinin de doğru olduğunu ispatlamıştır.

Fast [1] ve Steinhaus [2] tarafından literatüre ilk sunulduğundan bu yana istatistiksel yakınsaklık kavramı toplanabilme teorisinde oldukça geniş bir yer bulmuş ve birçok genelleştirmesi tanıtılmıştır. Fridy ve Orhan [7], Mursaleen [8], Çolak ([11], [12]) ve Et ve Nuray [16] gibi yazarlar konuya ilişkin literatüre katkıda bulunan çalışmalar yapmışlardır.

Dizilerin istatistiksel sınırlılığı kavramı ilk olarak Fridy ve Orhan [17] tarafından tanımlanmıştır. İstatistiksel sınırlılık, istatistiksel yakınsaklığın aksine literatürde çok yer bulmamıştır. Bununla birlikte Bhardwaj ve Gupta [18] α. dereceden istatistiksel yakınsaklık ve λ-istatistiksel yakınsaklık kavramlarının karşılıklarını tanıtarak istatistiksel sınırlılığın bazı genelleştirmelerini tanımlamış ve istatistiksel sınırlı dizilerin ailesinin Köthe-Toeplitz ve genelleştirilmiş Köthe-Toeplitz duallerinin ϕ, sonlu sayıda sıfırdan farklı terim içeren dizilerin uzayı, olduğunu göstermişlerdir.

Fark dizi uzayları ile ilgili çalışmalar toplanabilme teorisinde nispeten yeni bir gelişmedir. Bir dizinin ele almaya değer bir yönü olmasa bile bazen terimlerinin ardışık farklarından elde edilen fark dizisinin oldukça ilgi çekici özellikleri olabilir. Fark dizi uzayları ilk kez Kızmaz [19] tarafından tanıtılmıştır. Kızmaz bir $x = (x_k)$ dizisinin terimlerinin ardışık farklarını alarak elde edilen $\Delta x = (\Delta x_k) = (x_k - x_{k+1})$ dizisinin sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsak olmasıyla yeni dizi uzayları tanımlamış, bu uzayları sırasıyla $\Delta(\ell_\infty)$, $\Delta(c)$ ve $\Delta(c_0)$ olarak ifade etmiş ve bu dizi uzaylarının bazı topolojik özelliklerini incelemiştir. Et ve Çolak [20] ise $x = (x_k)$ dizisinin farkının farkı fikrinden hareketle $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\Delta^m(\ell_\infty)$, $\Delta^m(c)$ ve $\Delta^m(c_0)$ uzaylarını tanıtmış ve bu uzayların, üzerlerinde tanımlanan norm ile, birer BK$-$uzayı olduklarını ispatlamışlardır. Daha sonra Et ve Nuray [16] genelleştirilmiş fark operatörü yardımıyla herhangi bir X dizi uzayına karşılık m. mertebeden genelleştirilmiş fark dizi uzayı kavramını tanıtarak $\Delta^m(X)$ dizi uzayını ve bu uzayın topolojik özelliklerini incelemişlerdir. Bu sayede istatistiksel yakınsaklığı genelleştirerek ilk kez Δ^m-istatistiksel yakınsaklık kavramını literatüre kazandırmışlardır.

Bu tezde temel olarak genelleştirilmiş fark operatörü yardımıyla istatistiksel sınırlılık kavramı fark dizi uzaylarında uygulanarak Δ^m-istatistiksel sınırlılık, $\Delta^m_\lambda-$istatistiksel sınırlılık, α. dereceden Δ^m-istatistiksel sınırlılık ve α. dereceden $\Delta^m_\lambda-$istatistiksel sınırlılık gibi daha genel kavramlar tanıtılmıştır. Bu yeni kavramlar arasında kapsama bağıntıları tartışılmış ve bunlara dair örnekler sunulmuştur. Ayrıca Δ^m-istatistiksel sınırlı dizilerin ailesinin Köthe-Toeplitz ve genelleştirilmiş Köthe-Toeplitz dualleri hesaplanmış, buradan hareketle istatistiksel Köthe-Toeplitz ve istatistiksel genelleştirilmiş Köthe-Toeplitz dual fikri ortaya atılmıştır. Bu sayede literatürde ilk kez Köthe-Toeplitz dualler istatistiksel manada ele alınmış, normal (solid) uzay ve mükemmel (perfect) uzayların istatistiksel karşılıkları incelenmiştir. Bunların uygulaması olarak c_0, c ve ℓ_∞ gibi bazı klasik dizi uzaylarının istatistiksel Köthe-Toeplitz ve istatistiksel genelleştirilmiş Köthe-Toeplitz dualleri ile $\Delta^m(\ell_\infty)$ ve $\Delta^m(c)$ dizi uzaylarının istatistiksel Köthe-Toeplitz dualleri hesaplanmıştır.

2. GENEL KAVRAMLAR

2.1. Doğal Sayı Kümelerinin Asimptotik Yoğunluğu

Bilindiği üzere dizilerin limiti kavramı temelde doğal sayıların sonlu ve sonsuz alt kümelerine dayanır. Daha açık olarak bir $x = (x_n)$ dizisinin yakınsak olması demek bir sayının her komşuluğunun tümleyeninde dizinin sonlu sayıda teriminin kalması demektir. Buradaki "*sonlu sayıda*" kavramı, dizinin limitinin her komşuluğunun tümleyeninde kalan terimlerinin indislerinin doğal sayıların sonlu bir alt kümesini teşkil etmesi anlamına gelir. İstatistiksel yakınsaklık tanımı ise doğal sayıların sonlu veya sonsuz alt kümeleri yerine bir genelleştirme olarak doğal sayıların alt kümelerinin (asimptotik) yoğunluğu kavramına dayanır. Bu yüzden istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel sınırlılık ile ilgili vereceğimiz bilgilerden önce bu kısımda doğal sayı kümelerinin yoğunluğundan bahsetmenin faydalı ve gerekli olduğunu düşünüyoruz.

Tanım 2.1.1. ([21]) $K \subseteq \mathbb{N}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $|K \cap \{1, 2, 3, ..., n\}|$ ifadesi kesişimin eleman sayısını göstersin. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|K \cap \{1, 2, 3, ..., n\}|}{n}$$

limiti mevcutsa bu limite K nın (*asimptotik*) *yoğunluğu* denir.

Bu tezde $D(K)$ ile (mevcutsa) K nın yoğunluğunu temsil edeceğiz. Ayrıca $\kappa(n)$ ile $|K \cap \{1, 2, 3, ..., n\}|$ sayısını göstereceğiz.

Tanım 2.1.2. ([21]) $K \subseteq \mathbb{N}$ verilsin.

$$\overline{D}(K) = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{\kappa(n)}{n}$$

ve

$$\underline{D}(K) = \lim_{n\to\infty} \inf \frac{\kappa(n)}{n}$$

değerlerine sırasıyla K nın *üst* ve *alt* (*asimptotik*) *yoğunluğu* denir. Eğer, bu iki değer eşitse bu ortak sayıya K nın *yoğunluğu* denir.

Aşağıdaki temel özellikleri hatırlatmanın yararlı olduğunu düşünüyoruz.

Önerme 2.1.3. ([21]) Eğer, K nın yoğunluğu mevcut ise bu durumda K^c de yoğunluğa sahiptir ve $D(K^c) = 1 - D(K^c)$ eşitliği sağlanır.

Önerme 2.1.4. ([21]) K_1 ve K_2 yoğunluğa sahip doğal sayı kümeleri olsun. Eğer, $K_1 \cup K_2$ veya $K_1 \cap K_2$ den en az biri yoğunluğa sahipse diğeri de sahiptir ve

$$D(K_1 \cup K_2) = D(K_1) + D(K_2) - D(K_1 \cap K_2)$$

eşitliği sağlanır.

Sonuç 2.1.5. $D(K_1) = D(K_2) = 1$ ise $D(K_1 \cap K_2) = 1$ dir.

Bu tez boyunca yoğunluğu 1 olan kümelere *yoğun*, 0 olan kümelere ise *sıfır yoğunluklu küme* diyeceğiz. Eğer, K bir sıfır yoğunluklu küme değilse bu $D(K) > 0$ ya da K nın yoğunluğu olmadığı anlamına gelir. Tanımdan hareketle kolayca görülebilir ki sonlu doğal sayı kümeleri ve boş küme sıfır yoğunluklu kümeler olup $\mathbb{N}$ nin kendisi yoğundur.

Bir $x = (x_k)$ dizisi bir P özelliğini yoğun bir kümedeki tüm k lar için sağlıyorsa x_k, P özelliğini "*hemen hemen tüm* k" için sağlar denir ve kısaca "$h.h.\ k.$" ile gösterilir ([5]).

2.2. İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda istatistiksel yakınsaklık ve bazı genelleştirmelerinden bahsedip konuyla ilgili bazı özellikleri vereceğiz.

Tanım 2.2.1. ([5]) Bir $x = (x_k)$ sayı dizisi ve L sayısı verilsin. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için $\{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ kümesi bir sıfır yoğunluklu küme teşkil ediyor, yani $h.h.\ k.$ için $|x_k - L| < \varepsilon$ ise x dizisi L sayısına *istatistiksel yakınsaktır* denir ve $st - \lim x_k = L$ ile gösterilir. İstatistiksel yakınsak dizilerin kümesi Sc ile $L = 0$ olması durumunda Sc_0 ile gösterilecektir.

İstatistiksel yakınsaklığın diğer birçok toplanabilme metodunun aksine bir Cauchy kriterine haiz olduğunu söyleyebiliriz. Kavramın bu özelliğini ilk kez Fridy [5] bir dizinin istatistiksel yakınsak olması için ne gibi gerek ve yeter şartları sağlaması gerektiğini incelerken ortaya koymuştur. Bunun için bilinen Cauchy dizisi olma kavramını istatistiksel manada genelleştirmiştir. Aşağıda bu tanımı verdikten sonra ilgili denklik teoremini ifade edeceğiz.

Tanım 2.2.2. ([5]) $x = (x_k)$ dizisi verilsin ve $\varepsilon > 0$ olsun. Eğer, $h.h.$ $k.$ için

$$|x_k - x_N| < \varepsilon$$

yani

$$D(\{k : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}) = 0$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine *istatistiksel Cauchy* dizisi denir.

Teorem 2.2.3. ([5]) Aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) x istatistiksel yakınsak bir dizidir.

(ii) x bir istatistiksel Cauchy dizisidir.

(iii) x dizisine karşılık $h.h.$ $k.$ için $x_k = y_k$ olacak şekilde bir yakınsak $y = (y_k)$ dizisi vardır.

2000 yılında Mursaleen [8] istatistiksel yakınsaklığın bir genelleştirmesi olan $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlayarak $\lambda-$istatistiksel yakınsaklığın birkaç özelliğini vermiştir.

Tanım 2.2.4. **(**[8]**)** $x = (x_k) \in \omega$ verilsin. $\lambda = (\lambda_n)$ pozitif sayıların azalmayan, ∞'a ıraksayan ve $\lambda_1 = 1$ olmak üzere $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$ şartını sağlayan bir dizisi olsun. $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa x dizisi L sayısına $\lambda-$*istatistiksel yakınsaktır* denir.

Yukarıdaki şartları sağlayan tüm $\lambda = (\lambda_n)$ dizilerinin kümesini Γ ile göstereceğiz.

Dereceli istatistiksel yakınsaklık fikri ilk kez Gadjiev ve Orhan [9] tarafından ortaya atılmıştır. Daha sonra Bhunia ve diğerleri [10] dereceli istatistiksel yakınsaklık ile ilgili bazı özellikleri ispatlamışlardır. Kavramla ilgili literatürdeki çalışmaların Çolak ([11], [12]) tarafından verilen " $\alpha.$ dereceden istatistiksel yakınsaklık " ve " $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık üzerine " başlıklı çalışmalardan sonra arttığını söyleyebiliriz. Örneğin; Çolak ve Bektaş [13], Et ve Şengül ([14],[15]) dereceli istatistiksel yakınsaklıkla ilgili bazı genelleştirme çalışmaları yapmışlardır. Dolayısıyla konunun güncelliğini koruduğunu ve son zamanlarda birçok yazar tarafından çalışıldığını belirtebiliriz.

Tanım 2.2.5. ([11]) $K \subseteq \mathbb{N}$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Eğer,

$$D_\alpha(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{\kappa(n)}{n^\alpha}$$

limiti mevcutsa bu değere K nın $\alpha-$*yoğunluğu* denir.

Eğer, bu limitin değeri sıfır ise K kümesi *sıfır* $\alpha-$*yoğunluğa sahiptir* denir. Bu tanım $\alpha = 1$ için doğal yoğunluk kavramı ile aynıdır. $K \subseteq \mathbb{N}$ herhangi bir küme olmak üzere $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ için $D_\beta(K) \leq D_\alpha(K)$ olduğu açıktır. Sıfır $\alpha-$yoğunluklu küme tanımından hareketle α. dereceden istatistiksel yakınsaklık aşağıdaki gibi tanımlanır:

$0 < \alpha \leq 1$ ve bir $x = (x_k)$ dizisi verilsin. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L sayısına α. *dereceden istatistiksel yakınsaktır* denir.

Çolak ve Bektaş [13] $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık ve α. dereceden istatistiksel yakınsaklığı genelleştirecek şekilde iki kavramı bir araya getirerek α. dereceden $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık kavramını şöyle tanımlamışlardır:

Tanım 2.2.6. ([13]) Bir $x = (x_k)$ dizisi verilsin. $\lambda = (\lambda_n) \in \Gamma$, $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ ve $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L sayısına α. *dereceden* $\lambda-$*istatistiksel yakınsaktır* denir.

Eğer yukarıda verilen tanımda $\lambda_n = n$ alınırsa α. dereceden $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık, α. dereceden istatistiksel yakınsaklığa, $\alpha = 1$ alınırsa α. dereceden $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık, $\lambda-$istatistiksel yakınsaklığa, $\lambda_n = n$ ve $\alpha = 1$ alınırsa

α. dereceden $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklığa indirgenir. Dolayısıyla α. dereceden $\lambda-$istatistiksel yakınsaklığın bu kavramların hepsini genelleştirdiğini söyleyebiliriz.

2.3. İstatistiksel Sınırlılık

Bu kısımda Fridy ve Orhan [17] tarafından tanımlanan istatistiksel sınırlılık kavramı verilip daha sonraki kısımlarda kullanılacak bazı teoremler ifade edilecektir.

Tanım 2.3.1. ([17]) $x = (x_k) \in \omega$ verilsin.

$$B_x := \{b \in \mathbb{R} : D\{k : x_k > b\} \neq 0\};$$

ve

$$A_x := \{a \in \mathbb{R} : D\{k : x_k < a\} \neq 0\}$$

kümelerini göz önüne alalım. Bu durumda

$$st - \limsup x := \begin{cases} \sup B_x, & B_x \neq \emptyset \text{ ise,} \\ -\infty & B_x = \emptyset. \end{cases}$$

ve

$$st - \liminf x := \begin{cases} \inf A_x, & A_x \neq \emptyset \text{ ise,} \\ +\infty & A_x = \emptyset. \end{cases}$$

değerlerine sırasıyla x in *istatistiksel limit supremumu* ve *istatistiksel limit infimumu* denir.

Şimdi bir dizinin istatistiksel limit supremumu ve istatistiksel limit infimumunu bulmada oldukça işlevsel olan bir teoremi verelim.

Teorem 2.3.2. ([17]) Bir $x = (x_k)$ dizisi ve sonlu ρ, σ sayıları verilsin. Bu durumda

(i) $\rho = st-\limsup x \Leftrightarrow$ Her $\varepsilon > 0$ için $D\{k : x_k > \rho - \varepsilon\} \neq 0$ ve $D\{k : x_k > \rho + \varepsilon\} = 0$,

(ii) $\sigma = st-\liminf x \Leftrightarrow$ Her $\varepsilon > 0$ için $D\{k : x_k < \sigma + \varepsilon\} \neq 0$ ve $D\{k : x_k < \sigma - \varepsilon\} = 0$ dır.

Tanım 2.3.3. ([17]) $x = (x_k)$ dizisi verilsin. Eğer, $D\{k : |x_k| > B\} = 0$ olacak şekilde bir B sayısı varsa x dizisine *istatistiksel sınırlıdır* denir.

Bu tez boyunca istatistiksel sınırlı dizilerin kümesi S_b ile gösterilecektir.

Tanımdan hareketle bir dizinin istatistiksel sınırlı olması $st-\limsup$ ve $st-\liminf$ değerlerinin sonlu olmasını garantiler. Dolayısıyla *Teorem 2.3.2* deki yeter şartlar sağlanır.

Şimdi yakınsak dizilerin oldukça temel bir özelliğinin istatistiksel dengini verelim.

Teorem 2.3.4. ([17]) $x=(x_k)\in S_b$ verilsin. x dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$st-\limsup x = st-\liminf x$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Bhardwaj ve Gupta [18] $\alpha-$yoğunluk ve $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık gibi kavramların yardımıyla istatistiksel sınırlılığın bazı genelleştirmelerini tanıtmışlardır. Aşağıda bunlarla alakalı tanımlardan söz edeceğiz.

Tanım 2.3.5. ([18]) Bir $x=(x_k)$ dizisi ve $0<\alpha\leq 1$ sayısı verilsin. Eğer, $D_\alpha(\{k:|x_k|>B\})=0$ olacak şekilde bir $B>0$ sayısı varsa x dizisine α. *dereceden istatistiksel sınırlıdır* denir.

Tanım 2.3.6. ([18]) $\lambda=(\lambda_n)\in\Gamma$ ve $x=(x_k)\in\omega$ olsun. $I_n=[n-\lambda_n+1,n]$ olmak üzere, eğer

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\left|\{k\in I_n:|x_k|>B\}\right|=0,$$

olacak şekilde bir $B>0$ sayısı varsa x dizisine $\lambda-$*istatistiksel sınırlıdır* denir.

Tanım 2.3.7. ([18]) Bir $x=(x_k)$ dizisi verilsin. $\lambda=(\lambda_n)\in\Gamma$, $I_n=[n-\lambda_n+1,n]$ ve $\alpha\in(0,1]$ olmak üzere, eğer

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n^\alpha}\left|\{k\in I_n:|x_k|>B\}\right|=0,$$

olacak şekilde bir $B>0$ sayısı varsa x dizisine α. *dereceden* $\lambda-$*istatistiksel sınırlıdır* denir.

α. dereceden $\lambda-$istatistiksel sınırlılık kavramı yukarıda verilen tanımda $\alpha=1$ seçilirse $\lambda-$istatistiksel sınırlılığa, $\lambda_n=n$ seçilirse α. dereceden istatistiksel sınırlılığa ve $\alpha = 1$ ve $\lambda_n = n$ seçilirse istatistiksel sınırlılığa indirgenmiş olur. Dolayısıyla α. dereceden $\lambda-$istatistiksel sınırlılığın bu kavramların hepsini genelleştirdiğini söyleyebiliriz.

2.4. Genelleştirilmiş Fark Dizi Uzayları

Bilindiği gibi fark dizi uzayları fikri ilk olarak Kızmaz [19] tarafından tanımlanmış, daha sonra Et ve Çolak [20] tarafından genelleştirilmiştir. Bu kısımda genelleştirilmiş fark dizi uzayları hakkında bazı bilgiler verilecek ve ilgili bazı özelliklerden bahsedilecektir.

Tanım 2.4.1. ([20]) $x = (x_k) \in \omega$ olsun. $m \in \mathbb{N}$, $\Delta^0 x = (x_k)$, $\Delta x = (\Delta x_k) = (x_k - x_{k+1})$, $\Delta^m x = (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1})$ ve böylece

$$\Delta^m x_k = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} x_{k+i}$$

olmak üzere $\Delta^m (\ell_\infty)$, $\Delta^m (c)$ ve $\Delta^m (c_0)$ dizi uzayları

$$\Delta^m (\ell_\infty) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in \ell_\infty\},$$
$$\Delta^m (c) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c\},$$
$$\Delta^m (c_0) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c_0\}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu uzaylar $\|.\|_\infty$ supremum normu olmak üzere

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^{m} |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty$$

normu ile birer $BK-$uzayı teşkil ederler.

Önerme 2.4.2. ([20]) $x = (x_k) \in \Delta^m (\ell_\infty)$ ise bu durumda $\sup_k k^{-m} |x_k| < \infty$ olur.

Yukarıdaki dizi uzayları Et ve Nuray [16] tarafından X herhangi bir dizi uzayı olmak üzere $\Delta^m (X)$ dizi uzayına genelleştirilmiştir. Şimdi $\Delta^m (X)$ dizi uzayı ile ilgili sonraki bölümlerde kullanılacak bazı tanım ve teoremleri ifade edelim.

Tanım 2.4.3. ([16]) $X \subseteq \omega$ verilsin. $\Delta^m (X)$ genelleştirilmiş fark dizi uzayı

$$\Delta^m (X) = \{x = (x_k) : (\Delta^m x_k) \in X\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.4.1 de verildiği gibi $\Delta^m x_k = \sum\limits_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} x_{k+i}$ şeklinde tanımlıdır. Eğer $x \in \Delta^m(X)$ ise yeterince büyük k lar için (örneğin $k > 2m$ için) $y_k = \Delta^m x_k$ ve

$$x_k = \sum_{i=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-i-1}{m-1} y_i = \sum_{i=1}^{k} (-1)^m \binom{k+m-i-1}{m-1} y_{i-m},$$

$$y_{1-m} = y_{2-m} = \cdots = y_0 = 0$$

olacak şekilde sadece bir tek $y = (y_k) \in X$ vardır.

Et ve Nuray [16] $X = Sc$ alarak Δ^m-istatistiksel yakınsaklık kavramını aşağıdaki gibi tanımlamışlardır.

Tanım 2.4.4. ([16]) Bir $x = (x_k)$ dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$D(\{k : |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L sayısına Δ^m-*istatistiksel yakınsaktır* denir.

Tanım 2.4.5. ([16]) Bir $x = (x_k)$ dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$D(\{k : |\Delta^m x_k - \Delta^m x_N| \geq \varepsilon\}) = 0$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa x dizisine Δ^m-*istatistiksel Cauchy* denir.

Teorem 2.4.6. ([16]) x dizisi Δ^m-istatistiksel yakınsak ise Δ^m-istatistiksel Cauchy-dir.

Et ve Nuray [16] *Teorem 2.4.6* nın tersinin sağlanıp sağlanmadığına dair bir bilgi vermemişlerdir. Biz bu çalışmanın ilerleyen bölümünde Δ^m-istatistiksel Cauchy kavramının Δ^m-istatistiksel yakınsaklığı gerektirdiğini göstereceğiz.

Teorem 2.4.7. ([16]) $x = (x_k)$ dizisinin Δ^m-istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart *h.h.* k. için $\Delta^m x_k = \Delta^m y_k$ olacak şekilde bir $y = (y_k) \in \Delta^m(c)$ dizisinin var olmasıdır.

2.5. Dizi Kümelerinin Dualleri

Bu kısımda dizi kümelerinin duallerinedair bazı temel tanım ve özellikler verilecektir (ayrıntılı bilgi için bak. [22] ve [23]).

Çalışma boyunca bs, cs, ℓ_1 ve ℓ_π ile sırasıyla *tüm sınırlı seri*, *yakınsak seri*, *mutlak yakınsak seri* ve $\mathbb{N}$ *nin bir permütasyonuna göre mutlak yakınsak seri* oluşturan dizilerin kümeleri gösterilecektir.

$x = (x_k)$, $y = (y_k) \in \omega$ ve X, $Y \subset \omega$ olsun. $xy = (x_k y_k)_{k=0}^{\infty}$ ve $x^{-1} * Y = \{y \in \omega : xy \in Y\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} M(X,Y) &= \bigcap_{x \in X} x^{-1} * Y \\ &= \{a \in \omega : ax \in Y,\ \forall x \in X\} \end{aligned}$$

yazalım. Özel olarak,

$$\begin{aligned} X^{\delta} &= M(X, \ell_\pi); \\ X^{\alpha} &= M(X, \ell_1); \\ X^{\beta} &= M(X, cs); \\ X^{\gamma} &= M(X, bs); \\ X^{N} &= M(X, c_0); \end{aligned}$$

kümelerine sırasıyla X dizi uzayının $\delta-$, $\alpha-$, $\beta-$, $\gamma-$ ve $N-$(ya da *sıfır*) *dualleri* denir. X dizi uzayının dual uzayları da birer dizi uzayı olup X^{α} ve X^{β} uzaylarına sırasıyla X dizi uzayının *Köthe-Toeplitz* ve *genelleştirilmiş Köthe-Toeplitz* dual uzayları denir. Aşağıdaki özelliklerin doğru olduğu kolayca gösterilebilir.

i) $\phi \subset X^{\delta} \subset X^{\alpha} \subset X^{\beta} \subset X^{\gamma}$ ve $X^{\beta} \subset X^{N}$,

ii) $\dagger \in \{\delta, \alpha, \beta, \gamma, N\}$ olmak üzere $X \subset Y$ ise $Y^{\dagger} \subset X^{\dagger}$,

iii) $X \subset (X^{\alpha})^{\alpha} = X^{\alpha\alpha}$.

Tanım 2.5.1. ([22])

i) $X = X^{\alpha\alpha}$ ise X uzayına bir *mükemmel* (*perfect*) *dizi uzayı* denir.

ii) $u = (u_k) \in \omega$ ve X bir dizi uzayı olsun. Eğer, en az bir $x = (x_k) \in X$ dizisi ve her $k \in \mathbb{N}$ için $|u_k| \leq |x_k|$ olması durumunda $u \in X$ ise X uzayına bir *normal* (*solid*) *uzay* denir. Bir diğer ifadeyle

$$\{u = (u_k) \in \omega \mid \exists (x_k) \in X, \forall k \in \mathbb{N} : |u_k| \leq |x_k|\} \subset X$$

kapsaması sağlanıyorsa X dizi uzayına bir *normal* (*solid*) *uzay* denir.

Lemma 2.5.2. ([22]) X normal uzay ise $X^\alpha = X^\beta = X^\gamma$ olur.

3. Δ^m-İSTATİSTİKSEL SINIRLILIK VE İSTATİSTİKSEL KÖTHE-TOEPLITZ DUALLER

Bu bölümün ilk kısmında Δ^m fark operatörü yardımıyla dizilerin Δ^m-istatistiksel sınırlılığı kavramı tanıtılıp Δ^m-istatistiksel yakınsaklık ve Δ^m-istatistiksel sınırlılık arasındaki ilişki verilecektir. Ayrıca bir dizinin Δ^m-istatistiksel sınırlılığını karakterize etmek amacıyla *Teorem 2.4.7* nin dengi sayılabilecek bir özellik sunulacaktır. İkinci kısımda ise Δ^m-istatistiksel sınırlı diziler kümesinin Köthe-Toeplitz ve genelleştirilmiş Köthe-Toeplitz dualleri verilecektir. Buradan elde edilen motivasyonla tanımlanan dizi kümelerinin *istatistiksel Köthe-Toeplitz* ve *istatistiksel genelleştirilmiş Köthe-Toeplitz* dualleri kavramlarından söz edilip bunlara dair bazı temel özellikler ile *istatistiksel normal (solid) uzay* ve *istatistiksel mükemmel (perfect) uzay* konseptleri tanıtılacaktır. Son olarak c_0, c, ℓ_∞, Sc_0, Sc, S_b, $\Delta^m(c)$ ve $\Delta^m(\ell_\infty)$ gibi uzayların istatistiksel Köthe-Toeplitz ve istatistiksel genelleştirilmiş Köthe-Toeplitz dualleri hesaplanacaktır.

3.1. Dizilerin Δ^m-İstatistiksel Sınırlılığı

Tanım 3.1.1. Bir $x = (x_k)$ dizisi verilsin. Eğer $h.h.\ k.$ için

$$|\Delta^m x_k| \leq B$$

veya

$$D(\{k : |\Delta^m x_k| > B\}) = 0$$

sağlanacak şekilde bir $B \geq 0$ sayısı varsa x dizisine Δ^m-*istatistiksel sınırlılıdır* denir. Tüm Δ^m-istatistiksel sınırlı dizilerin kümesini $\Delta^m(S_b)$ ile göstereceğiz.

Aşağıdaki örnek Δ^m-istatistiksel sınırlı olmayan dizilerin var olduğunu ifade eder.

Örnek 3.1.2. $m = 1$ olmak üzere, $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} 0, & k = 1, \\ -n(2n+1), & k = 2n+1, \\ -n(2n-1), & k = 2n, \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Her $M \geq 0$ için $\{k : |\Delta x_k| \leq M\}$ kümesi sonlu olduğundan $\{k : |\Delta x_k| > M\}$ kümesi yoğundur. Dolayısıyla x dizisi $\Delta-$istatistiksel sınırlı değildir.

Önerme 3.1.3. Bir $x = (x_k)$ dizisi bir L sayısına Δ^m-istatistiksel yakınsaksa bu durumda Δ^m-istatistiksel sınırlıdır, ancak bunun tersi doğru değildir.

İspat. x dizisi L sayısına Δ^m-istatistiksel yakınsak olsun. O halde özellikle $\varepsilon = 1$ ve $h.h.$ k. için $|\Delta^m x_k - L| < 1$ sağlanır. Ters üçgen eşitsizliğinden

$$|\Delta^m x_k| - |L| \leq |\Delta^m x_k - L| < 1$$

olur, dolayısıyla $h.h.$ k. için

$$|\Delta^m x_k| \leq |L| + 1$$

elde edilir. $B = 1 + |L|$ olarak seçilirse x dizisinin Δ^m-istatistiksel sınırlı olduğu görülür.

Tersi için, $m = 1$ alıp $x = (x_k)$ dizisini

$$x = (x_k) = (0, -1, -2, -2, -4, -4, -5, -5, -6, -9, -10, -10, -11, -11, -12, -12, ...)$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda Δx dizisi

$$\Delta x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k \text{ tam kare,} \\ 0, & k \text{ tam kare olmayan tek,} \\ 1, & k \text{ tam kare olmayan çift.} \end{cases}$$

olarak hesaplanır. $\varepsilon > 0$ olmak üzere; $D(\{k : \Delta x_k = 1\}) = \frac{1}{2}$ olduğundan

$$\{k : \Delta x_k = 1\} \subset \{k : \Delta x_k > 1 - \varepsilon\}$$

kapsaması $D(\{k : \Delta x_k > 1 - \varepsilon\}) \neq 0$ olmasını gerektirir. Ayrıca,

$$\{k : \Delta x_k > 1 + \varepsilon\} \subset \left\{k^2 : k \in \mathbb{N}\right\}$$

olduğundan $D(\{k : \Delta x_k > 1 + \varepsilon\}) = 0$ elde edilir. O halde *Teorem 2.3.2 (i)* den

$$st - \limsup \Delta x = 1$$

bulunur. Üstelik $D(\{k : \Delta x_k = 0\}) = \frac{1}{2}$ ve

$$\{k : \Delta x_k = 0\} \subset \{k : \Delta x_k < \varepsilon\}$$

olduğundan $D(\{k : \Delta x_k < \varepsilon\}) \neq 0$ ve $\{k : \Delta x_k < -\varepsilon\} = \emptyset$ olup $D(\{k : \Delta x_k < -\varepsilon\}) = 0$ bulunur. Bu da *Teorem 2.3.2 (ii) den*

$$st - \liminf \Delta x = 0$$

anlamına gelir. Böylelikle *Teorem 2.3.4* gereğince, $st - \limsup \Delta x \neq st - \liminf \Delta x$ olduğu için, x dizisi $\Delta-$istatistiksel yakınsak değildir. Oysa ki $\{k : |\Delta x_k| > 1\}$ kümesi bir sıfır yoğunluklu küme olduğundan x dizisi $\Delta-$istatistiksel sınırlıdır.

Önerme 3.1.4. $\Delta^m(\ell_\infty) \subset \Delta^m(S_b)$ olup bunun tersi doğru değildir.

İspat. $x \in \Delta^m(\ell_\infty)$ olsun. Bu durumda her $k \in \mathbb{N}$ için $|\Delta^m x_k| \leq B$ olacak şekilde bir $B \geq 0$ vardır. Bu ise $\{k : |\Delta^m x_k| > B\} = \emptyset$ olduğundan $h.h.$ k. için $|\Delta^m x_k| \leq B$ ve dolayısıyla $x \in \Delta^m(S_b)$ anlamına gelir.

Tersi için $m = 2$ seçelim ve $x = (x_k)$ dizisini

$$x = (x_k) = (0, 0, 0, 1, 2, 5, 8, 11, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 50, 56, 62, 72, 82, 92, 102, 112, ...)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $\Delta^2 x$ dizisi

$$\Delta^2 x_k = \begin{cases} n, & k = 2^n, \\ 0, & \text{diğer durumlarda}, \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, ...$$

şeklinde hesaplanır ve $\{k : \Delta^2 x_k \neq 0\} = \{2^n : n = 1, 2, 3, ...\}$ olup, $D(\{k : \Delta^2 x_k \neq 0\}) = 0$ dır. Bu ise x dizisinin bir Δ^2-istatistiksel sıfır dizisi olduğunu gösterir. Böylece $x \in \Delta^2(S_b)$ dir, fakat $\Delta^2 x$ dizisi sınırlı değildir, dolayısıyla $x \notin \Delta^2(\ell_\infty)$ dir. O halde $x \in \Delta^2(S_b) \setminus \Delta^2(\ell_\infty)$ dur.

Lemma 3.1.5. $x = (x_k)$ bir Δ^m-istatistiksel Cauchy dizisi ise Δ^m-istatistiksel yakınsaktır.

İspat. x dizisi bir Δ^m-istatistiksel Cauchy dizisi olsun. Öyleyse her $\varepsilon > 0$ için

$$K = \{k : |\Delta^m x_k - \Delta^m x_{N_\varepsilon}| \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere $D(K) = 0$ olacak şekilde bir $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır. Buradan

$$K^c \subseteq \{k : \Delta^m x_{N_\varepsilon} - \varepsilon < \Delta^m x_k\} \text{ ve } K^c \subseteq \{k : \Delta^m x_k < \Delta^m x_{N_\varepsilon} + \varepsilon\}$$

kapsamaları sağlanır. $D(K^c) = 1$ olduğundan

$$A = \{a \in \mathbb{R} : D\{k : \Delta^m x_k < a\} = 1\}$$
$$B = \{b \in \mathbb{R} : D\{k : \Delta^m x_k > b\} = 1\}$$

kümeleri boştan farklıdır.

Her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $b < a$ olduğunu gösterelim. Bunun için bazı b ve a sayıları için $b \geq a$ olduğunu varsayalım. O halde

$$\{k : \Delta^m x_k > b\} \subseteq \{k : \Delta^m x_k > a\}$$

kapsaması sağlanır, buradan $D(\{k : \Delta^m x_k < a\}) = 0$ olur. Ancak bu $a \in A$ olmasıyla çelişir. Bu yüzden her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $b < a$ dır. Buradan

$$\Delta^m x_{N_\varepsilon} - \varepsilon \leq \sup B \leq \inf A \leq \Delta^m x_{N_\varepsilon} + \varepsilon$$

eşitsizliğinin doğruluğu açıkça görülür. Dolayısıyla ε keyfi olduğu için $\sup B = \inf A$ elde edilir. $L = \sup B = \inf A$ dersek her $\mu > 0$ için

$$L - \mu < b_\mu < a_\mu < L + \mu$$

olacak şekilde $a_\mu \in A$ and $b_\mu \in B$ sayıları vardır. Bu A ile B nin tanımı gereğince

$$D(\{k : \Delta^m x_k < L + \mu\}) = 1 \text{ ve } D(\{k : \Delta^m x_k > L - \mu\}) = 1$$

eşitliklerinin sağlanmasını gerektirir. Ayrıca

$$\{k : |\Delta^m x_k - L| < \mu\} = \{k : \Delta^m x_k > L - \mu\} \cap \{k : \Delta^m x_k < L + \mu\}$$

eşitliğinden dolayı ve *Sonuç 2.1.5* gereğince $D(\{k : |\Delta^m x_k - L| \geq \mu\}) = 0$ bulunur. Böylece x dizisi L sayısına Δ^m-istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 2.4.6 ve *Lemma 3.1.5* den aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Sonuç 3.1.6. Bir dizinin Δ^m-istatistiksel yakınsak olaması için gerek ve yeter şart Δ^m-istatistiksel Cauchy dizisi olmasıdır.

Önerme 3.1.7. Bir dizi Δ^m-istatistiksel Cauchy dizisi ise Δ^m-istatistiksel sınırlıdır. Tersi doğru değildir.

İspat. $x = (x_k)$ bir Δ^m-istatistiksel Cauchy dizisi olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$$D(\{k : |\Delta^m x_k - \Delta^m x_N| \geq \varepsilon\}) = 0$$

olacak şekilde bir $N(= N(\varepsilon)) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Özel olarak $\varepsilon = 1$ için

$$D(\{k : |\Delta^m x_k| \geq |\Delta^m x_N| + 1\}) = 0$$

bulunur. Bu, $B = 1 + |\Delta^m x_N|$ olarak seçilirse x dizisinin Δ^m-istatistiksel sınırlı olması demektir. *Sonuç 3.1.6* yı göz önüne alır, $x = (x_k)$ dizisini *Önerme 3.1.3* deki gibi tanımlarsak tersinin doğru olmadığı görülür.

Bir sonraki teoremde bir dizinin Δ^m-istatistiksel sınırlı olması için gerek ve yeter şartı verip ispat edeceğiz. Öncesinde teoremin ispatında önemli bir yer tutan bir lemmayı verelim:

Lemma 3.1.8. $E \subseteq \mathbb{N}$ kümesi $|E| = \infty$ ve $|E^c| = \infty$ şartlarını sağlıyorsa her $j \in \mathbb{N}$ için $m_j < n_j < m_{j+1}$ olmak üzere

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} ([m_j, n_j) \cap \mathbb{N})$$

sağlanacak şekilde doğal sayıların artan (m_j) ve (n_j) dizileri vardır.

İspat. (m_j) ve (n_j) dizilerini

$$m_j = \begin{cases} \min E, & j = 1 \\ \min\{k > n_{j-1} : k \in E\}, & j \geq 2 \end{cases}$$

$$n_j = \min\{k > m_j : k \in E^c\}$$

şeklinde tanımlarsak ikisinin de artan ve her $j \in \mathbb{N}$ için $m_j < n_j < m_{j+1}$ olduğu görülür. $k \in E$ olsun. Bu durumda (m_j) ve (n_j) nin tanımları gereğince k için iki durum vardır:

i) $k = m_{j_0}$ olacak şekilde en az bir $j_0 \in \mathbb{N}$ varsa bu durumda $k \in [m_{j_0}, n_{j_0}) \cap \mathbb{N}$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $k \in \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} ([m_j, n_j) \cap \mathbb{N})$ olur.

ii) Her $j \in \mathbb{N}$ için $k \neq m_j$ ise bu durumda $m_{j_0} < k < n_{j_0}$ olacak şekilde en az bir $j_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu ise $k \in [m_{j_0}, n_{j_0}) \cap \mathbb{N}$ demektir. O halde yine $k \in \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} ([m_j, n_j) \cap \mathbb{N})$

dir. Böylece $k \in E$ keyfi olduğundan $E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} ([m_j, n_j) \cap \mathbb{N})$ kapsaması sağlanır. Şimdi kapsamanın tersinin doğru olmadığını varsayalım. O zaman en az bir $j_0 \in \mathbb{N}$ için öyle bir $k \in [m_{j_0}, n_{j_0}) \cap \mathbb{N}$ vardır ki $k \notin E$ dir. Oysa bu $m_{j_0} < k < n_{j_0}$ ve $k \notin E$ olduğundan n_{j_0} ın tanımı ile çelişir. Bu yüzden $\bigcup_{j=1}^{\infty} ([m_j, n_j) \cap \mathbb{N}) \subseteq E$ olup, ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.9. $x = (x_k)$ dizisinin Δ^m-istatistiksel sınırlı olması için gerek ve yeter şart *h.h.* k. için $\Delta^m x_k = \Delta^m y_k$ olacak şekilde Δ^m-sınırlı bir $y = (y_k)$ dizisinin var olmasıdır.

İspat. x dizisi Δ^m-istatistiksel sınırlı olsun. Eğer $x \in \Delta^m(\ell_\infty)$ ise ispat açıktır. $x \in \Delta^m(S_b) \setminus \Delta^m(\ell_\infty)$ alalım. m ye göre tümevarım yöntemini kullanacağız.

$m = 1$ olsun. Bu durumda $E = \{k : |\Delta x_k| > B\}$ bir sıfır yoğunluklu küme teşkil edip, $|E| = \infty$ ve $|E^c| = \infty$ olacak şekilde bir $B \geq 0$ sayısı vardır. *Lemma 3.1.8* den $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} ([m_j, n_j) \cap \mathbb{N})$ olacak şekilde doğal sayıların artan (m_j) and (n_j) dizileri bulunur. Şimdi $y = (y_k)$ dizisini

$$y_k = \begin{cases} x_1 & k = 1 \\ x_1 - \sum\limits_{j=1}^{k-1} \Delta x_j & k = 2, 3, ..., m_1 \\ y_{m_1} & k = m_1 + 1, m_1 + 2, ..., n_1 \\ y_{m_1} - \sum\limits_{j=n_1}^{k-1} \Delta x_j & k = n_1 + 1, n_1 + 2, ..., m_2 \\ y_{m_2} & k = m_2 + 1, m_2 + 2, ..., n_2 \\ y_{m_2} - \sum\limits_{j=n_2}^{k-1} \Delta x_j & k = n_2 + 1, n_2 + 2, ..., m_3 \\ y_{m_3} & k = m_3 + 1, m_3 + 2, ..., n_3 \\ . & . \\ . & . \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu dizinin farkını hesaplarsak

$$\Delta y_k = \begin{cases} 0, & k \in E, \\ \Delta x_k, & k \in E^c, \end{cases}$$

ve dolayısıyla E^c yoğun olduğundan *h.h.* k. için $\Delta x_k = \Delta y_k$ olduğu görülür. Ayrıca her $k \in E^c$ için $|\Delta y_k| = |\Delta x_k| \leq B$ olduğundan y dizisi $\Delta-$sınırlıdır.

$m-1$ için iddianın doğru olduğunu kabul edelim, yani x dizisi $\Delta^{m-1}-$istatistiksel sınırlı ise $h.h.\ k.$ için $\Delta^{m-1}x_k = \Delta^{m-1}y_k$ olacak şekilde $\Delta^{m-1}-$sınırlı bir y dizisi var olsun.

İddianın m için de doğru olduğunu gösterelim:

x dizisi Δ^m-istatistiksel sınırlı olsun. Bu durumda *Tanım 2.4.3* gereğince $z = \Delta x$ olacak şekilde bir tek $z = (z_k)$ dizisi var olup $\Delta^m x = \Delta^{m-1}(\Delta x)$ eşitliğinden dolayı bu dizi $\Delta^{m-1}-$istatistiksel sınırlıdır. Öyleyse kabulümüz gereği $h.h.\ k.$ için $\Delta^{m-1}z_k = \Delta^{m-1}y_k$ olacak şekilde bir $y \in \Delta^{m-1}(\ell_\infty)$ vardır. Ayrıca, yine *Tanım 2.4.3* ten $\Delta s = y$ olacak şekilde bir $s = (s_k)$ dizisi var olup $\Delta^{m-1}(\Delta s) \in \ell_\infty$ ve dolayısıyla $s \in \Delta^m(\ell_\infty)$ elde edilir. Böylece $h.h.\ k.$ için

$$\Delta^m s_k = \Delta^{m-1}(\Delta s_k) = \Delta^{m-1}y_k = \Delta^{m-1}z_k = \Delta^{m-1}(\Delta x_k) = \Delta^m x_k$$

yazabiliriz. Bu gerek şartın ispatını tamamlar.

Diğer taraftan $h.h.\ k.$ için $\Delta^m x_k = \Delta^m y_k$ olacak şekilde bir $y \in \Delta^m(\ell_\infty)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $k \in \mathbb{N}$ için $|\Delta^m y_k| \leq B$ olacak şekilde bir $B \geq 0$ sayısı var olup,

$$D(\{k : \Delta^m x_k \neq \Delta^m y_k\}) = 0$$

eşitliği ve

$$\{k : |\Delta^m x_k| > B\} \subset \{k : \Delta^m x_k \neq \Delta^m y_k\}$$

kapsaması sağlandığından $h.h.\ k.$ için $|\Delta^m x_k| \leq B$ elde edilir. O halde x dizisi Δ^m-istatistiksel sınırlıdır.

Lemma 3.1.10. $K \subseteq \mathbb{N}$ ve $L = \{k-1 : k \in K\}$ olsun. Eğer K bir sıfır yoğunluklu küme ise L de bir sıfır yoğunluklu kümedir.

İspat. $1 \notin K$ olduğunu kabul edelim. $\ell(n) = |L \cap \{1,2,3,...,n\}|$ ve $\kappa(n) = |K \cap \{1,2,3,...,n\}|$ olmak üzere her n için $\ell(n) \leq \kappa(n) + 1$ olduğundan

$$D(L) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ell(n)}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\kappa(n)+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\kappa(n)}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = D(K) + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $D(L) = 0$ dır.

Teorem 3.1.11. Eğer $x = (x_k)$ istatistiksel sınırlıysa bu durumda $\Delta-$istatistiksel sınırlıdır.

İspat. $x = (x_k) \in S_b$ olsun. Bu durumda $K = \{k : |x_k| > B\}$ bir sıfır yoğunluklu küme teşkil edecek şekilde bir $B \geq 0$ sayısı vardır. $L = \{k : |x_{k+1}| > B\} = \{k-1 : k \in K\}$ olduğundan *Lemma 3.1.10* gereğince L bir sıfır yoğunluklu kümedir. Bu yüzden (x_{k+1}) dizisi de istatistiksel sınırlıdır. S_b bir dizi uzayı olduğundan $\Delta x = (\Delta x_k) = (x_k - x_{k+1}) = (x_k) - (x_{k+1})$ istatistiksel sınırlıdır. Dolayısıyla $x = (x_k) \in \Delta(S_b)$ olup $S_b \subset \Delta(S_b)$ elde edilir.

Sonuç 3.1.12.

i) $m \geq 1$ için $\Delta^{m-1}(S_b) \subseteq \Delta^m(S_b)$.

ii) $m \geq 1$ için $S_b \subseteq \Delta^m(S_b)$.

3.2. İstatistiksel Köthe-Toeplitz Dualler

Bu kısımda $\Delta^m(S_b)$ uzayının $\alpha-$, $\beta-$, $\gamma-$, $\delta-$ ve $N-$ duallerinin ϕ olduğunu göstereceğiz. Daha sonra istatistiksel Köthe-Toeplitz ve genelleştirilmiş istatistiksel Köthe-Toeplitz dual uzay kavramlarını tanımlayıp, bunlara dair bazı temel özelliklere değindikten sonra bazı dizi uzaylarının bu yeni tipteki duallerini hesaplayacağız.

İlk olarak Sc_0 dizi uzayının duallerini hesaplamak için önce aşağıdaki lemmayı verelim:

Lemma 3.2.1. Sc_0 bir normal dizi uzayıdır.

İspat. $x = (x_k) \in Sc_0$ keyfi bir dizi olsun. $u = (u_k)$ dizisini her $k \in \mathbb{N}$ için $|u_k| \leq |x_k|$ olacak şekilde alalım. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$$\{k : |u_k| \geq \varepsilon\} \subset \{k : |x_k| \geq \varepsilon\}$$

olduğu kolayca görülür. Bu ise $u \in Sc_0$ anlamına gelir. Böylece Sc_0 bir normal uzaydır.

Teorem 3.2.2. $\dagger \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, N\}$ olmak üzere $Sc_0^\dagger = \phi$ dir.

İspat. Her $\dagger \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, N\}$ için $\phi \subseteq Sc_0^\dagger$ olduğunu biliyoruz. $Sc_0^\beta \subseteq \phi$ veya denk olarak $\phi^c \subseteq (Sc_0^\beta)^c$ olduğunu iddia ediyoruz. Eğer $a = (a_k) \in \phi^c$ ise bu durumda her

$k \in K$ için $a_k \neq 0$ ve $|K| = \infty$ olacak şekilde bir $K \subseteq \mathbb{N}$ vardır. Buradan $D(J) = 0$ ve $|J| = \infty$ olacak şekilde bir $J \subseteq K$ seçilebilir. Şimdi $x = (x_k)$ dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$x_k = \begin{cases} \frac{1}{a_k}, & k \in J, \\ 0, & k \in J^c. \end{cases}$$

Her $\varepsilon > 0$ için $\{k : |x_k| > \varepsilon\} \subseteq J$ olduğundan $\{k : |x_k| > \varepsilon\}$ bir sıfır yoğunluklu küme olup $st - \lim x = 0$, yani $x \in Sc_0$ dır. Öte yandan

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k = \sum_{k \in J} a_k \frac{1}{a_k} = \sum_{k \in J} 1 = \infty$$

eşitliği sağlandığından $a \notin Sc_0^{\beta}$, yani $a \in (Sc_0^{\beta})^c$ dir. Böylece $Sc_0^{\beta} \subseteq \phi$ olup $Sc_0^{\beta} = \phi$ elde edilir. *Lemma 2.5.2* ve *Lemma 3.2.1* gereğince $Sc_0^{\alpha} = Sc_0^{\beta} = Sc_0^{\gamma} = \phi$ dir. Ayrıca $Sc_0^{\delta} \subseteq Sc_0^{\beta}$ olduğundan $Sc_0^{\delta} = \phi$ bulunur. Şimdi $k \in J$ için $a_k x_k = 1$ ve $k \in J^c$ için $a_k x_k = 0$ olduğundan $\lim_{k \to \infty} a_k x_k \neq 0$ elde edilir ki bu $a \notin Sc_0^N$ yani $a \in (Sc_0^N)^c$ demektir. Bu yüzden $Sc_0^N \subseteq \phi$ olup $Sc_0^N = \phi$ dir.

Sonuç 3.2.3. $\dagger \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, N\}$ olmak üzere $Sc^{\dagger} = S_b^{\dagger} = \phi$ dir.

İspat. $Sc_0 \subset Sc \subset S_b$ kapsaması ile ispat elde edilir.

Teorem 3.2.4. $\dagger \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, N\}$ ve $m \geq 0$ için $(\Delta^m(S_b))^{\dagger} = \phi$ dir.

İspat. *Sonuç 3.1.12* gereğince $S_b \subseteq \Delta^m(S_b)$ olduğundan $(\Delta^m(S_b))^{\dagger} \subseteq S_b^{\dagger}$ elde edilir. *Sonuç 3.2.3* ten dolayı $S_b^{\dagger} = \phi$ olduğundan $(\Delta^m(S_b))^{\dagger} = \phi$ bulunur.

Şimdi istatistiksel Köthe-Toeplitz ve genelleştirilmiş istatistiksel Köthe-Toeplitz dual kavramlarını tanıtıp bunlara dair bazı temel tanım ve özellikleri verelim.

Önce serilerin istatistiksel toplanabilmesi kavramını tanıtacağız. Literatürde serilerin istatistiksel yakınsaklığı kavramı ilk kez B. C. Tripathy ([24], [25]) tarafından verilmiştir. Tripathy bir serinin istatistiksel yakınsak olması için kısmi toplamlar dizisinin istatistiksel yakınsak bir dizi teşkil etmesi gerektiğini ifade etmiştir. Ancak biz bir serinin istatistiksel toplanabilmesine dair yoğun doğal sayı kümeleriyle doğrudan bir ilişki kurarak daha elverişli bir tanım geliştirdiğimize inanıyoruz.

Tanım 3.2.5. $x = (x_k) \in \omega$ ve $L \in \mathbb{R}$ olmak üzere, eğer $\sum_{k\in E} x_k = L$ olacak şekilde yoğun bir $E \subseteq \mathbb{N}$ kümesi varsa $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisi L ye *istatistiksel toplanabilir* denir.

Tanım 3.2.6. X bir dizi uzayı olsun.

$$X^{st-\alpha} = \left\{ x \in \omega : \forall y \in X \text{ için } \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \text{ istatistiksel toplanabilirdir.} \right\}$$

$$X^{st-\beta} = \left\{ x \in \omega : \forall y \in X \text{ için } \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \text{ istatistiksel toplanabilirdir.} \right\}$$

kümelerine sırasıyla X dizi uzayının *istatistiksel Köthe-Toeplitz* (kısaca *istatistiksel-α*) ve *genelleştirilmiş istatistiksel Köthe-Toeplitz* (kısaca *istatistiksel-β*) *duali* denir.

Aşağıdaki temel özelliklerin doğruluğu kolayca görülebilir.

Önerme 3.2.7. X, $Y \subseteq \omega$ ve $\dagger \in \{\alpha, \beta\}$ olmak üzere;

i) $X^{st-\alpha} \subseteq X^{st-\beta}$,

ii) $X \subseteq Y \Rightarrow Y^{st-\dagger} \subset X^{st-\dagger}$,

iii) $X \subset (X^{st-\dagger})^{st-\dagger}$

dir.

Önerme 3.2.8. I bir indeks kümesi ve $\{X_i\}_{i\in I}$ dizi uzaylarının herhangi bir ailesi olsun. $\dagger \in \{\alpha, \beta\}$ olmak üzere $\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)^{st-\dagger} = \bigcap_{i\in I} X_i^{st-\dagger}$ eşitliği sağlanır.

İspat. $\dagger = \alpha$ alalım. $a = (a_k) \in \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)^{st-\alpha}$ ise, her $x = (x_k) \in \bigcup_{i\in I} X_i$ için $\sum_{k\in E} |a_k x_k| < \infty$ olacak şekilde yoğun bir $E \subseteq \mathbb{N}$ kümesi vardır. Eğer $y = (y_k) \in X_i \subset \bigcup_{i\in I} X_i$ ise, o zaman $\sum_{k\in F} |a_k y_k| < \infty$ ve $D(F) = 1$ olacak şekilde bir $F \subseteq \mathbb{N}$ kümesi vardır. Bu durumda y dizisi X_i'nin keyfi bir elemanı olduğundan her $i \in I$ için $a \in X_i^{st-\alpha}$ bulunur ve dolayısıyla $a \in \bigcap_{i\in I} X_i^{st-\alpha}$elde edilir. Böylece $\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)^{st-\alpha} \subseteq \bigcap_{i\in I} X_i^{st-\alpha}$.

Şimdi $a \in \bigcap_{i\in I} X_i^{st-\alpha}$olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $a \in X_i^{st-\alpha}$ olur. $y = (y_k) \in \bigcup_{i\in I} X_i$ ise, $y \in X_i$ olacak şekilde bir $i \in I$ vardır. Öyleyse $a \in X_i^{st-\alpha}$ olduğundan $\sum_{k\in G} |a_k y_k| < \infty$ ve $D(G) = 1$ olacak şekilde bir $G \subseteq \mathbb{N}$ kümesi vardır. Bu ise y dizisi keyfi olduğundan $a \in \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)^{st-\alpha}$ anlamına gelir. Dolayısıyla $\bigcap_{i\in I} X_i^{st-\alpha} \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)^{st-\alpha}$ olup ispat tamamlanır. $\dagger = \beta$ durumu benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.2.9. $X \in \{c_0, c, \ell_\infty, Sc_0, Sc, S_b\}$, $\dagger \in \{\alpha, \beta\}$ ve

$$\ell_b = \left\{ x \in \omega : \sum_{k \in E} |x_k| < \infty, \exists E \subseteq \mathbb{N} \ D(E) = 1 \right\}$$

olmak üzere; $X^{st-\dagger} = \ell_b$ dir.

İspat. İlk olarak $X = S_b$ ve $\dagger = \alpha$ alıp $\ell_b \subseteq S_b^{st-\alpha}$ olduğunu göstereceğiz. $x \in \ell_b$ ve $y \in S_b$ ise bu durumda χ_F, F nin karakteristik dizisi,

$$\chi_F(k) = \begin{cases} 1, & k \in F, \\ 0, & k \notin F, \end{cases}$$

olmak üzere, $\sum\limits_{k \in E} |x_k| < \infty$ ve $y.\chi_F \in \ell_\infty$ olacak şekilde $E, F \subseteq \mathbb{N}$ yoğun kümeleri mevcuttur. $D(E \cap F) = 1$ ve her $k \in F$ için $|y_k| \leq M$ olacak şekilde bir $M \geq 0$ sayısı var olduğundan $\sum\limits_{k \in E \cap F} |x_k y_k| \leq M \sum\limits_{k \in E \cap F} |x_k| < \infty$ yazılabilir. O halde $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k y_k|$ istatistiksel toplanabilir olup bu yüzden $x \in S_b^{st-\alpha}$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\ell_b \subseteq S_b^{st-\alpha} \tag{1}$$

kapsaması doğrudur.

Şimdi $X = c_0$ ve $\dagger = \beta$ alıp, $c_0^{st-\beta} \subseteq \ell_b$ olduğunu gösterelim. $x \notin \ell_b$ olsun. Öyleyse her yoğun $E \subseteq \mathbb{N}$ kümesi için $\sum\limits_{k \in E} |x_k| = \infty$ yazabiliriz. Bu durumda $j = 0, 1, 2, ...$ için $N_j = E \cap [k(j), k(j+1) - 1]$ olmak üzere $\sum\limits_{k \in N_j} |x_k| \geq j + 1$ sağlanacak şekilde pozitif tam sayıların kesin artan bir $(k(j))_{j=0}^{\infty}$ $(k(0) = 1)$ dizisi mevcuttur. Şimdi $z = (z_k)$ dizisini

$$z_k = \begin{cases} 0, & k \notin N_j \vee x_k = 0, \\ \frac{|x_k|}{(j+1)x_k}, & k \in N_j \wedge x_k \neq 0, \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. z açık olarak bir sıfır dizisidir. Öte yandan,

$$\sum_{k \in E} x_k z_k = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k \in N_j} \frac{1}{j+1} |x_k| = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+1} \sum_{k \in N_j} |x_k| \geq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+1} (j+1) = \sum_{j=0}^{\infty} 1 = \infty$$

eşitsizliği doğru ve E keyfi bir yoğun küme olduğundan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k z_k$ istatistiksel toplanabilir değildir. Öyleyse $x \notin c_0^{st-\beta}$ ve dolayısıyla

$$c_0^{st-\beta} \subseteq \ell_b \tag{2}$$

elde edilir. (1), (2) ve $\{c_0, c, \ell_\infty, Sc_0, Sc, S_b\}$ ailesinin elemanları arasındaki bilinen kapsama bağıntıları ile *Önerme 3.2.7* birlikte ele alınarak ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.10. $\ell_b^{(m)} = \left\{ a \in \omega : \sum_{k \in G} k^m |a_k| < \infty,\ \exists G \subseteq \mathbb{N}\ D(G) = 1 \right\}$ olsun. Bu takdirde $(\Delta^m(\ell_\infty))^{st-\alpha} = (\Delta^m(c))^{st-\alpha} = \ell_b^{(m)}$ dir.

İspat. $a \in \ell_b^{(m)}$ olsun. Bu durumda $\sum_{k \in G} k^m |a_k| < \infty$ olacak şekilde yoğun bir $G \subseteq \mathbb{N}$ kümesi vardır. $x \in \Delta^m(\ell_\infty)$ alalım. *Önerme 2.4.2* gereği $(k^{-m}x_k) \in \ell_\infty$ olur. Buradan bir $M \geq 0$ için

$$\sum_{k \in G} |a_k x_k| = \sum_{k \in G} k^m |a_k| k^{-m} |x_k| \leq M \sum_{k \in G} k^m |a_k| < \infty$$

yazılabilir. Dolayısıyla $a \in \Delta^m(\ell_\infty)^{st-\alpha}$ ve $\ell_b^{(m)} \subseteq \Delta^m(\ell_\infty)^{st-\alpha}$ bulunur.

Şimdi $a \in \Delta^m(\ell_\infty)^{st-\alpha}$ olsun. $x = (x_k) = (k^m)_{k=1}^{\infty}$ dizisini göz önüne alırsak $\Delta^m x$ fark dizisi m nin tek veya çift oluşuna göre

$$\Delta^m x = \begin{cases} (m!), & m \text{ çift ise}, \\ (-m!), & m \text{ tek ise}, \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla $x \in \Delta^m(\ell_\infty)$ olup $\sum_{k \in E} |a_k x_k| < \infty$ olacak şekilde yoğun bir $E \subseteq \mathbb{N}$ kümesi vardır. Daha açık olarak

$$\sum_{k \in E} |a_k x_k| = \sum_{k \in E} |a_k k^m| = \sum_{k \in E} k^m |a_k| < \infty$$

yazarak $a \in \ell_b^{(m)}$ ve dolayısıyla $\Delta^m(\ell_\infty)^{st-\alpha} \subseteq \ell_b^{(m)}$ elde edilir. Bu ispatı tamamlar. $(\Delta^m(c))^{st-\alpha} = \ell_b^{(m)}$ olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

Şimdi dizi uzaylarıyla ilgili $st - \alpha$ ve $st - \beta$ dual tanımlarını göz önüne alarak bazı yeni kavramları tanıtıp bunlara dair bir takım özellikleri ele alacağız.

Tanım 3.2.11. $u = (u_k) \in \omega$ ve X bir dizi uzayı olsun. Eğer bir $x = (x_k) \in X$ ve yoğun bir $E \subseteq \mathbb{N}$ kümesinde her $k \in E$ için $|u_k| \leq |x_k|$ olması $u \in X$ olmasını gerektiriyorsa X uzayına *istatistiksel normal* (veya *istatistiksel solid*) *uzay* denir. Bir başka ifadeyle

$$\{u = (u_k) \in \omega \mid \exists (x_k) \in X,\ \exists E \subseteq \mathbb{N}\ D(E) = 1\ \forall k \in E : |u_k| \leq |x_k|\} \subset X$$

kapsaması sağlanıyorsa X dizi uzayına *istatistiksel normal uzay* denir.

Tanım 3.2.12. X bir dizi uzayı olsun. $\dagger \in \{\alpha, \beta\}$ olmak üzere eğer $X = (X^{st-\dagger})^{st-\dagger}$ ise X dizi uzayına bir *istatistiksel-*$\dagger$ *uzayı*, kısaca $st - \dagger$ *uzayı* denir. Özel olarak bir $st - \alpha$ uzayına *istatistiksel mükemmel uzay* veya *istatistiksel Köthe uzayı* denir.

Teorem 3.2.13. ℓ_b istatistiksel mükemmel uzaydır.

İspat. *Önerme 3.2.7* gereği $\ell_b \subseteq (\ell_b^{st-\alpha})^{st-\alpha}$ kapsaması vardır. Bu yüzden $(\ell_b^{st-\alpha})^{st-\alpha} \subseteq \ell_b$ olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak $S_b \subset \ell_b^{st-\alpha}$ olduğunu gösterelim. $a = (a_k) \in S_b$ ise o zaman her $k \in F$ için $|a_k| \leq B$ olacak şekilde yoğun bir $F \subseteq \mathbb{N}$ kümesi ve $B \geq 0$ sayısı vardır. Herhangi bir $x = (x_k) \in \ell_b$ verilsin. Bu durumda yoğun bir $E \subseteq \mathbb{N}$ kümesi için $\sum\limits_{k \in E} |x_k| < \infty$ olur. Buradan $D(E \cap F) = 1$ ve $\sum\limits_{k \in E \cap F} |a_k x_k| \leq B \sum\limits_{k \in E \cap F} |x_k| < \infty$ olduğundan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k x_k|$ istatistiksel toplanabilirdir. Böylece $a \in \ell_b^{st-\alpha}$ ve dolayısıyla $S_b \subset \ell_b^{st-\alpha}$ olur. Buradan $(\ell_b^{st-\alpha})^{st-\alpha} \subseteq S_b^{st-\alpha} = \ell_b$ yazarız ki böylece $\ell_b = (\ell_b^{st-\alpha})^{st-\alpha}$ bulunur.

Teorem 3.2.14. Her istatistiksel mükemmel uzay istatistiksel normaldir.

İspat. X bir istatistiksel mükemmel uzay olsun, yani $X = (X^{st-\alpha})^{st-\alpha}$. Ayrıca $u = (u_k)$ dizisi bir $x = (x_k) \in X$ ve yoğun bir $E \subseteq \mathbb{N}$ kümesinde her $k \in E$ için $|u_k| \leq |x_k|$ olacak şekilde verilsin. Eğer $y = (y_k) \in X^{st-\alpha}$ ise o zaman yoğun bir $F \subseteq \mathbb{N}$ kümesi için $\sum\limits_{k \in F} |y_k x_k| < \infty$ sağlanır. Buradan $D(E \cap F) = 1$ ve her $k \in E \cap F$ için $|u_k| \leq |x_k|$ olduğundan $\sum\limits_{k \in E \cap F} |u_k y_k| < \infty$ yazılabilir. Bu ise y keyfi olduğundan $u \in (X^{st-\alpha})^{st-\alpha} = X$ anlamına gelir. Böylece X istatistiksel normaldir.

Sonuç 3.2.15. ℓ_b istatistiksel normaldir.

4. İSTATİSTİKSEL SINIRLILIĞIN Δ^m FARK OPERATÖRÜ YARDIMIYLA BAZI GENELLEŞTİRMELERİ

Üç kısımdan oluşan bu bölümde Δ^m fark operatörü yardımıyla sırasıyla α. dereceden Δ^m-istatistiksel sınırlılık, $\Delta^m_\lambda-$istatistiksel sınırlılık ve α. dereceden $\Delta^m_\lambda-$istatistiksel sınırlılık kavramları tanıtılacaktır. Bu kavramların her birinin diğer bazı fark dizi uzayları ile aralarındaki kapsama bağıntıları ele alınıp ayrıca birbirleri ile olan ilişkileri sunulacaktır.

4.1. α. Dereceden Δ^m-İstatistiksel Sınırlılık

Bu kısımda Çolak [11] tarafından tanıtılan *doğal sayı kümelerinin $\alpha-$yoğunluğu* fikrinden hareketle α. dereceden Δ^m-istatistiksel sınırlılık kavramını tanıtıp bazı kapsama bağıntılarından bahsedeceğiz.

Tanım 4.1.1. $\alpha \in (0,1]$ ve $x = (x_k) \in \omega$ verilsin. Eğer,

$$D_\alpha(\{k : |\Delta^m x_k| > B\}) = 0$$

olacak şekilde bir $B \geq 0$ sayısı varsa x dizisi α. *dereceden Δ^m-istatistiksel sınırlıdır* denir. Tüm α. dereceden Δ^m-istatistiksel sınırlı dizilerin uzayını $\Delta^m(S^\alpha_b)$ sembolü ile göstereceğiz.

$\alpha > 1$ için, herhangi bir $x = (x_k) \in \omega$ dizisi yukarıda verilen şartı sağlayacağından dolayı, α. dereceden Δ^m-istatistiksel sınırlılık kavramı aşikar olur. Bu yüzden α sayısını 1 den büyük almayacağız.

α. dereceden Δ^m-istatistiksel sınırlılık kavramı $m = 0$ için α. dereceden istatistiksel sınırlılığa, $m = 0$ ve $\alpha = 1$ için istatistiksel sınırlılığa indirgenir.

Önerme 4.1.2. Her $\alpha \in (0,1]$ için $\Delta^m(\ell_\infty) \subset \Delta^m(S^\alpha_b)$ olup kapsama kesindir.

İspat. $x \in \Delta^m(\ell_\infty)$ ise her $k \in \mathbb{N}$ için $|\Delta^m x_k| \leq B$ olacak şekilde bir $B > 0$ sayısı vardır. Bu yüzden $\{k : |\Delta^m x_k| > B\} = \emptyset$ olup $x \in \Delta^m(S^\alpha_b)$ bulunur. Kapsamanın kesinliği için, $x = (x_k) = (0, 0, 1, 3, 6, 11, 17, 24, 32, 41, 53, 66, 80, 95, 111, 128, 146, ...)$ dizisini alıp $m = 2$ seçelim. Bu durumda

$$\Delta^2 x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k \text{ tam kare}, \\ 1, & \text{diğer haller}, \end{cases}$$

olduğu görülür. Her $n \in \mathbb{N}$ için $|\{k \leq n : |\Delta^2 x_k| > 1\}| \leq \sqrt{n} - 1$ eşitsiziliği sağlandığından $\alpha > \frac{1}{2}$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \leq n : |\Delta^2 x_k| > 1\}|}{n^\alpha} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $\alpha > \frac{1}{2}$ için $x \in \Delta^2(S_b^\alpha)$ dır. Fakat $x \notin \Delta^2(\ell_\infty)$ olduğu açıktır.

Teorem 4.1.3. $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere, α. dereceden Δ^m-istatistiksel yakınsaklık α. dereceden Δ^m-istatistiksel sınırlılığı gerektirir. Fakat tersi doğru değildir.

İspat. $x = (x_k) \in \Delta^m(S^\alpha)$ ise her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı vardır. Bu ifade özel olarak $\varepsilon = 1$ için de sağlanır. O halde, ters üçgen eşitsizliğinden

$$\{k \leq n : |\Delta^m x_k| \geq |L| + 1\} \subseteq \{k \leq n : |\Delta^m x_k - L| \geq 1\}$$

ve dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |\Delta^m x_k| \geq |L| + 1\}| \leq \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |\Delta^m x_k - L| \geq 1\}|$$

yazılır. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ limiti alınır ve $B = 1 + |L|$ olarak seçilirse $x \in \Delta^m(S_b^\alpha)$ olduğu görülür.

Kapsamanın tersinin genelde doğru olmadığını göstermek için $m = 1$ alıp $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} 0, & k = 1, \\ x_{k-1} - 2, & k \equiv 0 \pmod 3, \\ x_{k-1} - 3, & k \equiv 1 \pmod 3, \\ x_{k-1} - 1, & k \equiv 2 \pmod 3, \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. $\Delta x = (1, 2, 3, 1, 2, 3, ...)$ olduğu açıkça görülür. Dolayısıyla $x \in \Delta(\ell_\infty)$ olup *Önerme 4.1.2* gereği x dizisi α. dereceden $\Delta-$istatistiksel sınırlıdır. Fakat,

$h.h.\ k.$ için $\Delta x_k = y_k$ olacak şekilde hiçbir $y = (y_k)$ yakınsak dizisi bulunamayacağından Δx dizisi istatistiksel yakınsak olmayıp bu yüzden $x \notin \Delta(Sc)$ dir. O halde $\Delta(Sc^\alpha) \subset \Delta(Sc)$ kapsamasından dolayı x dizisi α. dereceden $\Delta-$istatistiksel yakınsak değildir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi α. dereceden Δ^m-istatistiksel sınırlılıkla ilgili klasik bir kapsama bağıntısı vereceğiz.

Teorem 4.1.4. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ise $\Delta^m(S_b^\alpha) \subset \Delta^m(S_b^\beta)$ dır. Kapsama $\alpha < \beta$ olacak şekilde en az bir α ve β değeri için kesindir.

İspat. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun. $x = (x_k) \in \Delta^m(S_b^\alpha)$ ise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left|\{k \leq n : |\Delta^m x_k| > B\}\right| = 0$$

olacak şekilde bir $B \geq 0$ sayısı vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{n^\beta} \left|\{k \leq n : |\Delta^m x_k| > B\}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha} \left|\{k \leq n : |\Delta^m x_k| > B\}\right|$$

eşitsizliğinin sağlandığı kolayca görülebilir. Buradan, $n \to \infty$ limiti alınırsa $x \in \Delta^m(S_b^\beta)$ elde edilir. Öyleyse $\Delta^m(S_b^\alpha) \subset \Delta^m(S_b^\beta)$ bulunur.

Kapsamanın kesinliği için $m = 2$ alıp $x = (x_k)$ dizisini

$$x = (x_k) = (0, 0, 1, 3, 5, 9, 13, 18, 23, 29, 38, 48, 58, 69, 80, 92, 104, 120, 136, ...)$$

biçiminde seçelim. Bu durumda,

$$\Delta^2 x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k \text{ tam kare,} \\ 0, & k \text{ tam kare olmayan tek,} \\ 1, & k \text{ tam kare olmayan çift,} \end{cases}$$

olup daha açık olarak $\Delta^2 x = (1, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 1, 3, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 4, 0, 1, 0, 1, ...)$ dır.

Eğer, $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ olarak seçilirse her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{n^\beta} \left|\left\{k \leq n : \left|\Delta^2 x_k\right| > 1\right\}\right| \leq \frac{\sqrt{n} - 1}{n^\beta}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan, $n \to \infty$ limiti alınırsa $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ için $x \in \Delta^2(S_b^\beta)$ elde edilir.

Şimdi $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ için $x \notin \Delta^2(S_b^\alpha)$ olduğunu gösterelim; Önce $\alpha = \frac{1}{2}$ alalım. Her $\ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left|\left\{k \leq n : \left|\Delta^2 x_k\right| > \ell\right\}\right| \neq 0$$

olduğunu göstereceğiz. Öncelikle negatif olmayan her ℓ sayısı için

$$\left\{k \leq n : \left|\Delta^2 x_k\right| > [|\ell|]\right\} = \left\{k \leq n : \left|\Delta^2 x_k\right| > \ell\right\}$$

eşitliğinin doğru olduğunu belirtelim. Bu yüzden sadece $\ell \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ durumunu incelemek yeterlidir.

$\ell = 0$ için

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left|\left\{k \leq n : \left|\Delta^2 x_k\right| > 0\right\}\right| = (1, \frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{3}{2}, \frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{6}}, \frac{4}{\sqrt{7}}, \frac{5}{\sqrt{8}}, 2, ...)$$

olmak üzere $b = (b_n)$ dizisini ele alalım. $(b_{n^2}) = (1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, ...)$ dizisi (b_n) dizisinin sınırsız bir alt dizisi olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$ demektir.

Şimdi $a_n^\ell = \frac{1}{\sqrt{n}} |\{k \leq n : |\Delta^2 x_k| > \ell\}|$ olmak üzere $\ell \in \mathbb{Z}^+$ sayısına göre (a_n^ℓ) dizilerini oluşturalım. Bu durumda

$$a^\ell_{(n+\ell)^2} = \frac{n}{n+\ell}$$

eşitliği göz önüne alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} a^\ell_{(n+\ell)^2} = 1 \leq \limsup_n a_n^\ell$$

eşitsizliği sağlanır ve dolayısıyla her $\ell \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\lim_{n\to\infty} a_n^\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left|\left\{k \leq n : \left|\Delta^2 x_k\right| > \ell\right\}\right| \neq 0$$

bulunur. Sonuç olarak her $\ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left|\left\{k \leq n : \left|\Delta^2 x_k\right| > \ell\right\}\right| \neq 0$$

elde edilir ki bu $\alpha = \frac{1}{2}$ iken $x \notin \Delta^2(S_b^\alpha)$ anlamına gelir. Üstelik $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ için

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left|\left\{k \leq n : \left|\Delta^2 x_k\right| > \ell\right\}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha} \left|\left\{k \leq n : \left|\Delta^2 x_k\right| > \ell\right\}\right|$$

olduğundan her $\ell \geq 0$ ve $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left|\left\{k \leq n : \left|\Delta^2 x_k\right| > \ell\right\}\right| \neq 0$$

yazılır. Böylece $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ için $x \notin \Delta^2(S_b^\alpha)$ olur ve bu ispatı tamamlar.

Sonuç 4.1.5. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olmak üzere;

(i) $\Delta^m(S_b^\alpha) = \Delta^m(S_b^\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

(ii) $\Delta^m(S_b^\alpha) \subset \Delta^m(S_b)$.

4.2. Δ_λ^m-İstatistiksel Sınırlılık

Bu kısımda Mursaleen [8] tarafından tanıtılan $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık fikrinden hareketle Δ_λ^m-istatistiksel sınırlılık tanıtılıp kavramla ilgili bazı kapsama bağıntıları verilecektir.

Tanım 4.2.1. $x = (x_k) \in \omega$, $\lambda = (\lambda_n) \in \Gamma$ ve $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |\Delta^m x_k| > B\}| = 0$$

olacak şekilde bir $B \geq 0$ sayısı varsa x dizisine Δ_λ^m-*istatistiksel sınırlıdır* denir. Tüm Δ_λ^m-istatistiksel sınırlı dizilerin uzayını $\Delta_\lambda^m(S_b)$ ile göstereceğiz.

Eğer, $(\lambda_n) = (n)_{n=1}^\infty$ ise Δ_λ^m-istatistiksel sınırlılık kavramı Δ^m-istatistiksel sınırlılığa dönüşür. Dolayısıyla Δ_λ^m-istatistiksel sınırlılık kavramı Δ^m-istatistiksel sınırlılığın $\lambda-$istatistiksel manada bir genelleştirmesidir.

Önerme 4.2.2. Bir dizi Δ_λ^m-istatistiksel yakınsak ise Δ_λ^m-istatistiksel sınırlıdır, fakat tersi doğru değildir.

İspat. $x = (x_k)$ dizisi bir L sayısına Δ_λ^m-istatistiksel yakınsak olsun. Bir an için x in Δ_λ^m-istatistiksel sınırlı olmadığını kabul edelim. Bu durumda $\exists\varepsilon_0 > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |\Delta^m x_k| > |L| + \varepsilon_0\}| \neq 0$$

yazılabilir. Buradan,

$$\{k \in I_n : |\Delta^m x_k| > |L| + \varepsilon_0\} \subseteq \{k \in I_n : |\Delta^m x_k - L| > \varepsilon_0\}$$

kapsaması sağlandığından

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |\Delta^m x_k - L| > \varepsilon_0\}| \neq 0$$

elde edilir. Ancak bu hipotez ile çelişir. Bu yüzden x dizisi Δ_λ^m-istatistiksel sınırlıdır. Tersinin doğru olmadığı *Teorem 4.1.3* deki örnek göz önüne alınarak gösterilebilir.

Önerme 4.2.3. Bir dizi Δ^m-sınırlı ise Δ_λ^m-istatistiksel sınırlıdır ve içerme kesindir.

İspat. x dizisi Δ^m-sınırlı olsun. Bu durumda her $k \in \mathbb{N}$ için $|\Delta^m x_k| \leq B$ olacak şekilde bir $B \geq 0$ sayısı vardır. Bu yüzden $\{k \in I_n : |\Delta^m x_k| > B\} = \emptyset$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |\Delta^m x_k| > B\}| = 0$$

elde edilir. Böylece x dizisi Δ_λ^m-istatistiksel sınırlıdır. Kapsamanın kesinliğini göstermek için, $\lambda_n = n$ ve $m = 1$ alıp x dizisini;

$$x_k = \begin{cases} 0, & k = 1, \\ \frac{n(1-n)}{2}, & (n-1)! + 1 \leq k \leq n!, \end{cases}$$

şeklinde tanımlarsak

$$\Delta x_k = \begin{cases} n, & k = n!, \\ 0, & \text{diğer hallerde}, \end{cases}$$

olup bu durumda x dizisinin $\Delta-$istatistiksel sıfır dizisi olduğu görülür. O halde $\Delta(Sc_o) \subset \Delta(S_b)\ (= \Delta_\lambda(S_b))$ olduğundan x dizisi $\Delta_\lambda-$istatistiksel sınırlıdır ancak aşikar olarak $\Delta-$sınırlı değildir.

Bir sonraki teoremde Γ'nın farklı elemanları arasındaki bazı şartlara dayanarak Δ_λ^m-istatistiksel sınırlılıkla ilgili kapsama bağıntılarından söz edeceğiz.

Teorem 4.2.4. $\lambda = (\lambda_n)$ ve $\mu = (\mu_n) \in \Gamma$ dizileri her $n \geq n_0$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ şartını sağlasın. O zaman aşağıdaki özellikler sağlanır:

i) Eğer $\lim\inf_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} > 0$ ise $\Delta_\mu^m(S_b) \subset \Delta_\lambda^m(S_b)$.

ii) Eğer $\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} = 1$ ise $\Delta_\mu^m(S_b) = \Delta_\lambda^m(S_b)$.

İspat. *i)* $\lim\inf_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} > 0$ ve $x = (x_k) \in \Delta_\mu^m(S_b)$ olsun. O zaman $I'_n = [n - \mu_n + 1, n]$ olmak üzere;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mu_n} |\{k \in I'_n : |\Delta^m x_k| > B\}| = 0$$

olacak şekilde bir $B \geq 0$ sayısı vardır. Üstelik $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere her $n \geq n_0$ için $I_n \subset I'_n$ olduğu açıktır. Bu yüzden

$$\frac{\lambda_n}{\mu_n} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |\Delta^m x_k| > B\}| \leq \frac{1}{\mu_n} |\{k \in I'_n : |\Delta^m x_k| > B\}|$$

eşitsizliği yazılabilir. $n \to \infty$ için limit alırsak $\lim\inf_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} > 0$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |\Delta^m x_k| > B\}| = 0$$

elde edilir ki bu $x = (x_k) \in \Delta_\lambda^m(S_b)$ demektir. Böylece $\Delta_\mu^m(S_b) \subset \Delta_\lambda^m(S_b)$ sağlanır.

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} = 1$ olduğundan *i)* gereği $\Delta_\mu^m(S_b) \subset \Delta_\lambda^m(S_b)$ sağlanır. Şimdi $x = (x_k) \in \Delta_\lambda^m(S_b)$ olsun. O zaman

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |\Delta^m x_k| > B\}| = 0$$

olacak şekilde bir $B \geq 0$ sayısı mevcuttur. Ayrıca

$$\{k \in I_n' : |\Delta^m x_k| > B\} = \{k \in I_n' \setminus I_n : |\Delta^m x_k| > B\} \cup \{k \in I_n : |\Delta^m x_k| > B\}$$

eşitliğinden dolayı her $n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_n} |\{k \in I_n' : |\Delta^m x_k| > B\}| &= \frac{1}{\mu_n} |\{k \in I_n' \setminus I_n : |\Delta^m x_k| > B\}| \\
&\quad + \frac{1}{\mu_n} |\{k \in I_n : |\Delta^m x_k| > B\}| \\
&\leq \frac{\mu_n - \lambda_n}{\mu_n} + \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |\Delta^m x_k| > B\}|
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan limit alarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mu_n} |\{k \in I_n' : |\Delta^m x_k| > B\}| = 0$$

bulunur ve böylece $x \in \Delta_\mu^m(S_b)$ dir. Dolayısıyla $\Delta_\lambda^m(S_b) \subset \Delta_\mu^m(S_b)$ olup ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.5. $\lambda = (\lambda_n) \in \Gamma$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n \leq n$ olsun. Bu takdirde

i) $\lim\inf_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n} > 0$ olması durumunda Δ^m-istatistiksel sınırlılık Δ_λ^m-istatistiksel sınırlılığı gerektirir.

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n} = 1$ ise Δ_λ^m-istatistiksel sınırlılık ve Δ^m-istatistiksel sınırlılık denktir.

4.3. α. Dereceden Δ_λ^m-İstatistiksel Sınırlılık

Bu kısımda α. dereceden Δ_λ^m-istatistiksel sınırlılık kavramı tanıtılarak daha önceki bölümlerde verilen Δ^m-istatistiksel sınırlılık, α. dereceden Δ^m-istatistiksel sınırlılık ve Δ_λ^m-istatistiksel sınırlılık kavramları genelleştirilecektir.

Tanım 4.3.1. $x = (x_k) \in \omega$ olsun. $\alpha \in (0,1]$, $\lambda = (\lambda_n) \in \Gamma$ ve $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^{\alpha}} |\{k \in I_n : |\Delta^m x_k| > B\}| = 0$$

sağlanacak şekilde bir $B \geq 0$ sayısı varsa x dizisine α. *dereceden* Δ_λ^m*−istatistiksel sınırlıdır* denir. Tüm α. dereceden Δ_λ^m-istatistiksel sınırlı dizilerin uzayını $\Delta_\lambda^m(S_b^\alpha)$ ile göstereceğiz.

α. dereceden Δ_λ^m-istatistiksel sınırlılık kavramı,

i) $\lambda_n = n$ için α. dereceden Δ^m-istatistiksel sınırlılık,

ii) $\alpha = 1$ için Δ_λ^m-istatistiksel sınırlılık,

iii) $\alpha = 1$ ve $\lambda_n = n$ için Δ^m-istatistiksel sınırlılık

kavramlarına indirgenir.

Teorem 4.3.2. $\lambda = (\lambda_n)$, $\mu = (\mu_n) \in \Gamma$, her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ ve $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun. Bu durumda

i) Eğer $\lim\inf_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^\alpha}{\mu_n^\beta} > 0$ ise $\Delta_\mu^m(S_b^\beta) \subset \Delta_\lambda^m(S_b^\alpha)$,

ii) Eğer $\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^\alpha}{\mu_n^\beta} = 1$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{\mu_n^\beta} = 1$ ise $\Delta_\mu^m(S_b^\beta) = \Delta_\lambda^m(S_b^\alpha)$

dır.

İspat. *i)* $x = (x_k) \in \Delta_\mu^m(S_b^\beta)$ ve $\lim\inf_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^\alpha}{\mu_n^\beta} > 0$ olsun. Öyleyse $I_n' = [n - \mu_n + 1, n]$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mu_n^\beta} |\{k \in I_n' : |\Delta^m x_k| > B\}| = 0$$

olacak şekilde bir $B \geq 0$ sayısı vardır. Ayrıca $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere her n için $I_n \subset I_n'$ kapsaması sağlanır. Buradan her n için

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_n^\alpha}{\mu_n^\beta} \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |\Delta^m x_k| > B\}| &= \frac{1}{\mu_n^\beta} |\{k \in I_n : |\Delta^m x_k| > B\}| \\ &\leq \frac{1}{\mu_n^\beta} |\{k \in I_n' : |\Delta^m x_k| > B\}| \end{aligned}$$

yazılabilir. Limit alarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |\Delta^m x_k| > B\}| = 0$$

elde edilir ve dolayısıyla $x \in \Delta_\lambda^m(S_b^\alpha)$ olur. Böylece $\Delta_\mu^m(S_b^\beta) \subset \Delta_\lambda^m(S_b^\alpha)$ dır.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^\alpha}{\mu_n^\beta} = 1$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{\mu_n^\beta} = 1$ olsun. (i) özelliğinden dolayı that $\Delta_\mu^m(S_b^\beta) \subset \Delta_\lambda^m(S_b^\alpha)$ kapsaması sağlanır. Şimdi $x \in \Delta_\lambda^m(S_b^\alpha)$ olsun. Öyleyse

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |\Delta^m x_k| > B\}| = 0$$

olacak şekilde bir $B \geq 0$ sayısı vardır. (i) de belirtildiği gibi her $n \in \mathbb{N}$ için $I_n \subset I'_n$ olup bu yüzden,

$$\{k \in I'_n : |\Delta^m x_k| > B\} = \{k \in I'_n \setminus I_n : |\Delta^m x_k| > B\} \cup \{k \in I_n : |\Delta^m x_k| > B\}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_n^\beta} |\{k \in I'_n : |\Delta^m x_k| > B\}| &= \frac{1}{\mu_n^\beta} |\{k \in I'_n \setminus I_n : |\Delta^m x_k| > B\}| \\
&\quad + \frac{1}{\mu_n^\beta} |\{k \in I_n : |\Delta^m x_k| > B\}| \\
&\leq \frac{\mu_n - \lambda_n}{\mu_n^\beta} + \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |\Delta^m x_k| > B\}| \\
&\leq \frac{\mu_n}{\mu_n^\beta} - \frac{\lambda_n^\alpha}{\mu_n^\beta} + \frac{1}{\lambda_n^\alpha} |\{k \in I_n : |\Delta^m x_k| > B\}|
\end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir. $n \to \infty$ için limit alarak $x \in \Delta_\mu^m(S_b^\beta)$ ve dolayısıyla $\Delta_\lambda^m(S_b^\alpha) \subset \Delta_\mu^m(S_b^\beta)$ elde edilir. Böylece $\Delta_\mu^m(S_b^\beta) = \Delta_\lambda^m(S_b^\alpha)$ dır.

Sonuç 4.3.3. $\lambda = (\lambda_n) \in \Gamma$ her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n \leq n$ şartını sağlasın ve $\alpha \in (0, 1]$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler kolayca ispatlanabilir.

(i) Eğer $\lim\inf\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^\alpha}{n} > 0$ ise Δ^m-istatistiksel sınırlılık α. dereceden Δ_λ^m-istatistiksel sınırlılığı gerektirir.

(ii) Eğer $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^\alpha}{n} = 1$ ise Δ^m-istatistiksel sınırlılık ve α. dereceden Δ_λ^m-istatistiksel sınırlılık kavramları denktir.

Önerme 4.3.4. $\Delta^m(\ell_\infty) \subset \Delta_\lambda^m(S_b^\alpha)$ olup kapsama kesindir.

İspat açıktır.

Teorem 4.3.5. α. dereceden Δ_λ^m-istatistiksel yakınsaklık α. dereceden Δ_λ^m-istatistiksel sınırlılığı gerektirir ve kapsama kesindir.

İspat. $x = (x_k)$ dizisi L sayısına α. dereceden Δ_λ^m-istatistiksel yakınsak olsun. x dizisinin α. dereceden Δ_λ^m-istatistiksel sınırlı olmadığını varsayalım. Bu durumda

$\exists\varepsilon_0 > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \left|\{k \in I_n : |\Delta^m x_k| > |L| + \varepsilon_0\}\right| \neq 0$$

yazılabilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{\lambda_n^\alpha} \left|\{k \in I_n : |\Delta^m x_k| > |L| + \varepsilon_0\}\right| \leq \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \left|\{k \in I_n : |\Delta^m x_k - L| > \varepsilon_0\}\right|$$

eşitsizliği doğru olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \left|\{k \in I_n : |\Delta^m x_k - L| > \varepsilon_0\}\right| \neq 0$$

bulunur. Ancak bu hipotezle çelişir. Bu yüzden x dizisi α. dereceden Δ_λ^m-istatistiksel sınırlıdır.

Tersinin doğru olmadığını görmek için *Teorem 4.1.3* de verilen örneği yeniden ele alalım. $x = (x_k) \in \Delta(\ell_\infty)$ olduğundan *Önerme 4.3.4* gereği x dizisi α. dereceden $\Delta_\lambda-$istatistiksel sınırlıdır. Öte yandan $x \notin \Delta(Sc)$ olup her m için $\Delta_\lambda^m(Sc^\alpha) \subseteq \Delta^m(Sc)$ (bak. [13], [16]) kapsaması sağlandığından x dizisi α. dereceden $\Delta_\lambda-$istatistiksel yakınsak değildir. Böylece ispat tamamlanır.

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, Δ^m genelleştirilmiş fark operatörü aracılığıyla Δ^m-istatistiksel sınırlılık kavramı tanıtılıp; kavramın daha önceden bilinen bazı fark dizi uzaylarıyla ilişkisi incelenmiştir. $\Delta^m(S_b)$ nin Köthe-Toeplitz ve genelleştirilmiş Köthe-Toeplitz duallerinin ϕ dizi uzayı olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca $\Delta^m(S_b^\alpha)$, $\Delta_\lambda^m(S_b)$ ve $\Delta_\lambda^m(S_b^\alpha)$ gibi istatistiksel sınırlılık kavramını, fark dizileri ile kümelerin $\alpha-$yoğunluğu ve $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık anlamında genelleştiren bazı yeni dizi uzayları literatüre kazandırılmıştır. Bununla birlikte tez içeriğinin en önemli kısmını $\Delta^m(S_b)$ dizi uzayının Köthe-Toeplitz ve genelleştirilmiş Köthe-Toeplitz duallerini hesaplarken akla gelen *istatistiksel Köthe-Toeplitz* ve *istatistiksel genelleştirilmiş Köthe-Toeplitz* dual fikirleri teşkil etmektedir. Zira bunun için önceden literatürde çok yer bulmamış olan *serilerin istatistiksel toplanabilmesi* metodu, yoğun doğal sayı kümeleri ile doğrudan ilişki kurmak suretiyle, yeniden tanımlanmıştır. Bu yeni metod sayesinde mutlak yakınsak serilerin uzayı ℓ_1 in bir genelleştirmesi olarak düşünülebilecek ℓ_b dizi uzayı tanımlanmış; c_0, c, ℓ_∞, Sc_0, Sc ve S_b dizi uzaylarının *istatistiksel*$-\alpha$ ve *istatistiksel*$-\beta$ duallerinin ℓ_b ye eşit olduğu gösterilmiştir. Ayrıca normal uzay ve mükemmel uzay gibi bazı kavramların *istatistiksel* karşılıkları verilmiştir. Bu yaklaşımla *istatistiksel*$-\gamma$ ve *istatistiksel*$-N$ dual kavramları tanıtılabilir ve birçok dizi uzayının istatistiksel dualleri hesaplanabilir.

6. KAYNAKLAR

[1] **Fast, H.,** 1951, Sur la convergence statistique, *Colloq. Math.,* **2**, 241-244.

[2] **Steinhaus, H.** 1951, Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, *Colloquium Mathematicum,* **2**, 73-74.

[3] **Schoenberg, I. J.** 1959, The integrability of certain functions and related summability methods, *Amer. Math. Monthly*, **66**, 361-375.

[4] **Buck, R. C.** 1953, Generalized asymptotic density, *American J. Math.,* **75**, 335-346.

[5] **Fridy, J.A.,** 1985, On the statistical convergence, *Analysis*, **5**, 301-313.

[6] **Connor, J. S.** 1988,The statistical and strong $p-$Cesaro convergence of sequences, *Analysis*, **8,** 47-63.

[7] **Fridy, J.A. and Orhan, C.** 1993, Lacunary statistical convergence, *Pacific J. Math.*, **160(1)**, 43-51.

[8] **Mursaleen, M.** 2000, $\lambda-$statistical convergence, *Math. Slovaca*, **50(1),** 111-115.

[9] **Gadjiev, A. D. and Orhan, C.** 2002, Some approximation theorems via statistical convergence, Rocky Mountain J. Math. **32(1)**, 129-138.

[10] **Bhunia, S., Das, P., Pal, S. K.** 2012, Restricting statistical convergence. Acta Math. Hungar. **134(1-2)**, 153–161.

[11] **Çolak, R.** 2010, Statistical convergence of order α, *Modern Methods in Analysis and Its Applications*, New Delhi, India: Anamaya Pub, 121–129.

[12] **Çolak, R.** 2011, On $\lambda-$statistical convergence, Conference on Summability and Applications, May 12-13, 2011, Istanbul Turkey.

[13] **Çolak, R. and Bektaş, C.A.** 2011, $\lambda-$statistical convergence of order α. *Acta Math. Sci.* **31(3)**, 953-959.

[14] **Et, M., Şengül, H.** 2014, Some Cesàro-type summability spaces of order α and lacunary statistical convergence of order α, Filomat **28(8)**, 1593–1602.

[15] **Şengül, H., Et, M.** 2014, On lacunary statistical convergence of order α, Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. **34(2)**, 473–482.

[16] **Et, M. and Nuray, F.** 2001, Δ^m-Statistical convergence, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **32(6),** 961-969.

[17] **Fridy J. A. and Orhan C.** 1997, Statistical limit superior and limit inferior, Proc. Amer. Math. Soc. **125(12)**, 3625–3631.

[18] **Bhardwaj V. K. and Gupta S.** 2014, On some generalizations of statistical boundedness, J. Inequal. Appl., :12 (2014).

[19] **Kızmaz, H.** 1981, On certain sequence spaces, *Canadian Math. Bull.*, **24,** 169-176.

[20] **Et, M. and Çolak, R.** 1995, On some generalized difference sequence spaces, *Soochow J. Math.*, **21**, 377-386.

[21] **Obata, N.** 1988, Density of natural numbers and the Lévy group, J. Number Theory, **30**(**3**), 288-297.

[22] **Boos, J. and Cass, P.,** 2000, Classical and Modern Methods in Summability, Oxford University Press, New York.

[23] **Kamthan, P.K. and Gupta, M.** 1981, Sequence Spaces and Series, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel.

[24] **Tripathy, B. C.** 1998, On statistical convergence, Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. **47,** 299-303.

[25] **Tripathy, B. C.** 1999, On statistically convergent series, Punjab University J. Math. **XXXXII**, 1-8.

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Elazığ'da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Adana, Elazığ, ve İzmir'de tamamladım. 2006 yılında Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümünde lisans, 2012 yılında İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında tezli yüksek lisans öğrenimimi tamamladım. 2009 yılından beri Bingöl Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmakta olup, 2012 yılında Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında doktora eğitimine başladım.