

Değişmeli Cebirler Üzerinde Çaprazlanmış Modüllerin Kategoriksel Özellikleri

Melik Demirci

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Ağustos 2011

Categorical Aspects of Crossed Modules of Commutative Algebras

Melik Demirci

MASTER DISSERTATION
Department of Mathematics
August 2011

Değişmeli Cebirler Üzerinde Çaprazlanmış Modüllerin Kategoriksel Özellikleri

Melik Demirci

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisans üstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik Anabilim Dalı

Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Zekeriya ARVASI

Ağustos 2011

ONAY

Matematik Anabilim Dalı yüksek lisans öğrencisi Melik Demirci' ün YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı “**Değişmeli Cebirler Üzerinde Çaprazlanmış Modüllerin Kategoriksel Özellikleri**” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Ummahan Ege ARSLAN

İkinci Danışman : –

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ummahan Ege ARSLAN

Üye : Prof. Dr. Zekeriya ARVASI

Üye : Prof. Dr. Mahmut KOÇAK

Üye : Yrd. Doç. Dr. Alper ODABAŞ

Üye : Doç. Dr. Erdal ULUALAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tez on bölümden oluşmaktadır. Sıfırncı bölümde çaprazlanmış modül kategorisi tanıtılmıştır. Birinci bölümde çaprazlanmış modüllerin obje ve morfizm özellikleri incelenmiştir. İkinci bölümde fonktorlar ve funktoriyel örneklere yer verilmiştir. Üçüncü ve dördüncü bölümlerde çarpım ve ko-çarpım objeleri tanıtılmıştır. Beşinci ve altıncı bölümlerde geri çekme ve ileri itme objeleri çalışılmıştır. Yedinci ve sekizinci bölümlerde ise eşitleyici ve ko-eşitleyici objeler tanıtılmıştır. Dokuzuncu bölümde ise limit ve ko-limit objeler tanıtılmıştır. Bütün bölümlerde bu özelliklerin cebirler üzerinde çaprazlanmış modüller kategorisindeki karşılıkları incelenmiştir.

SUMMARY

This thesis consist of ten chapters. In the first chapter definition of crossed module is given. In the second chapter we studied properties of object and morfizms of crossed modules. The following chapters, product and co-product object, pullback and pushout object, equalizer and co-equalizer, limit and co-limit objects are all given. In all of this chapters we give the stucture of objects over categories of crossed modules of algebras.

TEŐEKKÖR

Yüksek lisans çalışmamın her aşamasında bana danışmanlık ederek beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan değerli hocam, sayın,

Prof. Dr. Zekeriya ARVASI 'ye

ve her zaman yanımda olup beni destekleyen,

sevgili aileme ve arkadaşlarıma

sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR	vii
BÖLÜM 0. GİRİŞ	1
BÖLÜM 1. ÇAPRAZLANMIŞ MODÜL KATEGORİSİ	2
1.1 Kategoriler	2
1.2 Çaprazlanmış Modül Kategorisi	4
1.3 Çaprazlanmış Modüller Kategorisi	7
BÖLÜM 2. ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN OBJE VE MORFİZM ÖZELLİKLERİ	9
2.1 Bir Kategorinin Obje ve Morfizm Özellikleri	9
2.1.1 İlk Obje	9
2.1.2 Son Obje	11
2.1.3 Monomorfizm	12
2.1.4 Epimorfizm	13
2.2 Çaprazlanmış Modüller Kategorisinin Obje ve Morfizm Özellikleri	13
2.2.1 İlk Obje	13
2.2.2 Son Obje	14
2.2.3 Monomorfizm	16
2.2.4 Epimorfizm	17

BÖLÜM 3. FUNKTORLAR	20
3.1 Çaprazlanmış Modüllerin Tensör Çarpımı	26
BÖLÜM 4. Çarpım Objeleri	31
4.1 Kategorilerde Çarpım Objeleri	31
4.2 Çaprazlanmış Modüller Kategorisinde Çarpım Objeleri	36
BÖLÜM 5. Ko-Çarpım Objeleri	40
5.1 Kategorilerde Ko-Çarpım Objeleri	40
5.2 Çaprazlanmış Modüller Kategorisinde Ko-Çarpım Objeleri	43
BÖLÜM 6. Geri Çekme Objeleri	48
6.1 Kategorilerde Geri Çekme Objeleri	48
6.2 Çaprazlanmış Modüller Kategorisinde Geri Çekme Objeleri	55
BÖLÜM 7. İleri İtme OBJE	58
7.1 Kategorilerde İleri itme Objeleri	58
7.2 Çaprazlanmış Modüller Kategorisinde İleri İtme Objeleri	61
BÖLÜM 8. Eşitleyici Objeleri	65
8.1 Kategorilerde Eşitleyici Objeleri	65
8.2 Çaprazlanmış Modüller Kategorisinde Eşitleyici Objeleri	69
BÖLÜM 9. Ko-Eşitleyici Objeleri	71
9.1 Çaprazlanmış Modüller Kategorisinde Ko-Eşitleyici Objeleri	72
BÖLÜM 10. LİMİT ve KO-LİMİT	74
10.1 Kategorilerde Limit ve Ko-limit	74
KAYNAKLAR DİZİNİ	80

BÖLÜM 0

GİRİŞ

Birinci bölümde genel olarak kategori kavramını ve özel olarak değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modüller kategorisini tanıttık. Kategorilerin tanıtımdan sonra temel özellikler olan obje ve morfizm özelliklerini inceleyip bunların değişmeli cebirler üzerindeki çaprazlanmış modüller kategorisindeki karşılıklarını araştırdık. Ardından kategoriler arasında bağlantı kurabileceğimiz fonktörleri tanımladık. Funktörlerin bazı özelliklerini inceleyip örneklerle destekledik.

Bu kısımdan sonra kategorilerdeki özel objeleri inceledik. Dördüncü bölümde kategorilerde çarpım(product) objenin tanımı ile bazı kategorilerdeki örneklerini tanıtip özel olarak değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modüller kategorisindeki karşılığını ve bunun dual kavramı ko-çarpım(coproduct) kavramını inceledik. Takip eden kısımlarda, yine özel objelerden geri çekme(pullback) ve bunun duali olan ileri itme(pushout) objelerini inceledik. Son olarak da eşitleyici(equalizer) ve bunun duali olan ko-eşitleyici(ko-equalizer) objeyi tanıttık.

Onuncu bölümde kone ve kokone kavramlarını tanımlayıp, bunlara bağlı olarak tanımlanan limit ve ko-limit kavramlarını tanımlayarak özel olarak değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modüller kategorisindeki karşılıklarını inceledik.

BÖLÜM 1

ÇAPRAZLANMIŞ MODÜL KATEGORİSİ

1.1 Kategoriler

Tanım 1.1 \mathcal{C} ile göstereceğimiz kategori aşağıdaki verilen ve istenenleri sağlayan bir sistemdir.

Verilenler :

1) Objeler sınıfı : $Ob(\mathcal{C})$ ile göstereceğimiz, elemanları X, Y, A, B, \dots olan objeler sınıfı.

2) Morfizmler kümesi : X, Y objeleri için

$$\mathcal{C}(X;Y) = Mor_{\mathcal{C}}(X,Y) = \{f \mid f : X \rightarrow Y\}$$

şeklinde ifade edilen, elemanları morfizm (ok) olarak adlandırılan küme.

3) Kompozisyon : $Ob(\mathcal{C})$ de her X, Y, Z objeleri için

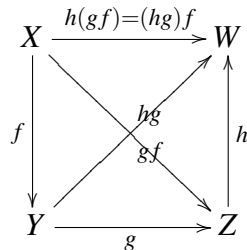
$$\begin{aligned} k_{X,Z}^Y : Mor_{\mathcal{C}}(X,Y) \times Mor_{\mathcal{C}}(Y,Z) &\longrightarrow Mor_{\mathcal{C}}(X,Z) \\ (f,g) &\longmapsto k_{X,Z}^Y(f,g) = g \circ f = gf \end{aligned}$$

İstenenler:

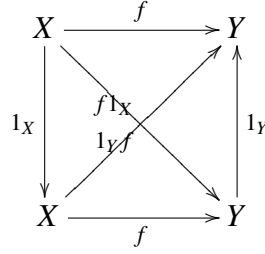
(K₁) : Her $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$, her $g \in Mor_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ ve her $h \in Mor_{\mathcal{C}}(Z,W)$ için

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

dir.



(K₂) : $Ob(\mathcal{C})$ deki her X objesi için $Id_X : X \rightarrow X$ şeklinde bir morfizm var olup her $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$ için $f \circ Id_X = f$ ve $Id_Y \circ f = f$ şeklindedir.



Örnek 1.1 Kümeler Kategorisi (\mathcal{S})

- 1) $Ob(\mathcal{S})$: Kümeler sınıfı
- 2) $Mor_{\mathcal{S}}(X, Y) = \{f \mid f : X \rightarrow Y \text{ fonksiyon}\}$
- 3) Her $f, g \in Mor_{\mathcal{S}}$ için $g \circ f$ kompozisyonu g ile f nin bileşkesidir.

Örnek 1.2 Gruplar Kategorisi (\mathbf{Grp})

- 1) $Ob(\mathbf{Grp})$: Grupların sınıfı
- 2) $Mor(X, Y) = Hom(X, Y) = \{f \mid f : X \rightarrow Y \text{ grup homomorfizmi}\}$
- 3) Her $f, g \in Mor_G$ için $g \circ f$ kompozisyonu g ile f nin bilinen bileşke işlemidir.

Örnek 1.3 Abelyen Gruplar Kategorisi ($\mathbf{Ab.Grp}$)

Ab.Grp : Tüm Abelyen Grupların Kategorisi

- 1) $Ob(\mathbf{Ab.Grp})$: Abelyen grupların sınıfı
- 2) $Mor_A(X, Y) = Hom(X, Y) = \{\text{Abelyen gruplar arasındaki homomorfizmler}\}$
- 3) Bileşke işlemi

Örnek 1.4 Birimli Halkaların Kategorisi

Hlk₁ : Tüm Birimli Halkaların Kategorisi

- 1) $Ob(\mathcal{R})$: Tüm birimli halkaların sınıfı
- 2) $Mor_{\mathcal{R}}(X, Y) : X$ 'den Y 'ye bütün birimsel halka homomorfizmleri

3) Bileşke işlemi

Örnek 1.5 Topolojik Uzaylar Kategorisi

Top : Tüm Topolojik Uzayların Kategorisi

1) $Ob(\mathbf{Top})$: Tüm topolojik uzayların sınıfı

2) $Mor(X, Y) = \{f \mid f : X \rightarrow Y \text{ sürekli fonksiyonlar}\}$

3) Bileşke işlemi

Örnek 1.6 Modüller Kategorisi

Mod : Tüm modüllerin Kategorisi

1) $Ob(\mathbf{Mod})$: Tüm modüllerin sınıfı

2) $Mor(\mathbf{Mod}) = \{f \mid X \rightarrow Y \text{ modül homomorfizmi}\}$

3) bileşke işlemi

Örnek 1.7 Cebirler Kategorisi (**Ceb**)

1) $Ob(\mathbf{Ceb})$: Tüm cebirlerin sınıfı

2) $Mor(X, Y) = \{f \mid f : X \rightarrow Y \text{ cebir morfizmi}\}$

3) Bileşke işlemi

1.2 Çaprazlanmış Modül Kategorisi

Tanım 1.2 C ve R değişmeli k -cebirler olsun.

$$\begin{array}{ccc} f : R \times C & \longrightarrow & C \\ (r, c) & \longmapsto & f(r, c) = r \cdot c \end{array}$$

fonksiyonu her $k \in k, c, c' \in C, r, r' \in R$ için,

- (1) $k(r \cdot c) = (kr \cdot c) = (r \cdot kc)$
- (2) $r(c + c') = r \cdot c + r \cdot c'$
- (3) $(r + r') \cdot c = r \cdot c + r' \cdot c$
- (4) $r \cdot (cc') = (r \cdot c)c' = c(r \cdot c')$
- (5) $rr' \cdot c = r \cdot (r' \cdot c)$

şartları sağlanıyorsa f ye R nin C üzerinde değişmeli cebir etkisi denir.

Tanım 1.3 k -değişmeli halka ve R değişmeli k -Cebir , C , R -Cebir ve

$$\begin{aligned} R \times C &\longrightarrow C \\ (r, c) &\longmapsto r \cdot c \end{aligned}$$

değişmeli cebir etkisi olmak üzere

$$\partial : C \rightarrow R$$

R -modül homomorfizmi olsun. Her $c, c' \in C$ için

$$\begin{aligned} \text{ÇM1)} \quad \partial(r \cdot c) &= r\partial(c) \\ \text{ÇM2)} \quad \partial(c) \cdot c' &= cc' \end{aligned}$$

şartları sağlanıyorsa ∂ a (veya (C, R, ∂) üçlüsüne) R -çaprazlanmış modül denir. Burada ÇM2 ye de peiffer şartı denir.

Örnek 1.8 R bir k -cebiri ve I , R nin ideali olsun.

$$\begin{aligned} \partial : I &\longrightarrow R \\ a &\longmapsto a \end{aligned}$$

içine (inclusion) dönüşümünü ele alalım. R nin I üzerine etkisi

$$\begin{aligned} R \times I &\longrightarrow I \\ (r, a) &\longmapsto r \cdot a = ra \end{aligned}$$

şeklinde çarpım işlemi olarak verilsin. Bu durumda çaprazlanmış modül aksiyomları

$$\begin{aligned} \text{ÇM1)} \quad \partial(r \cdot i) &= \partial(ri) = ri = r\partial(i) \\ \text{ÇM2)} \quad \partial i \cdot i' &= i \cdot i' = ii' \end{aligned}$$

şeklinde kolayca sağlanır. Dolayısıyla, (I, R, ∂) bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Örnek 1.9 M , herhangi bir R -bimodül olsun.

$$\begin{aligned} M \times M &\longrightarrow M \\ (m_1, m_2) &\longmapsto m_1 m_2 = 0 \end{aligned}$$

çarpımı tanımlanırsa, M bir R -cebiri oluşturur. Bu durumda

$$\begin{aligned} 0 : M &\longrightarrow R \\ x &\longmapsto 0(x) = 0 \end{aligned}$$

şeklinde verilen sıfır morfizmi,

$$\begin{aligned} R \times M &\longrightarrow M \\ (r, m) &\longmapsto r \cdot m = rm \end{aligned}$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Çünkü;

$$\begin{aligned} \text{ÇM1)} \quad 0(r \cdot m) &= 0(rm) = 0 = r0 = r0(m) \\ \text{ÇM2)} \quad 0m \cdot m' &= 0 \cdot m' = 0m' = 0 = mm' \end{aligned}$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır.

Örnek 1.10 K bir k -cebiri ve her $k, k' \in K$ için

$$R = \{f_k; f_k : K \longrightarrow K \ f_k(k') = kk'\}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \partial : K &\longrightarrow R \\ k &\longmapsto f_k \end{aligned}$$

cebiri homomorfizmi,

$$\begin{aligned} R \times K &\longrightarrow K \\ (f_k, k') &\longmapsto (f_k) \cdot k' = kk' \end{aligned}$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Gerçekten;

$$\begin{aligned} \text{ÇM1)} \quad \partial((f_k) \cdot k') &= \partial(kk') \\ &= \partial(k)\partial(k') \\ &= f_k\partial(k') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ÇM2)} \quad \partial k \cdot k' &= (f_k) \cdot k' \\ &= kk' \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Örnek 1.11 L ve M birer R -modül ve

$$\theta : L \longrightarrow M$$

R -modüllerin bir morfizmi olsun. $R \times M$ yarı direkt çarpımı

$$(r, m)(r', m') = (rr', rm' + r'm)$$

şeklinde bilinen çarpım ile ifade edilir. Bu durumda L , her $l, l' \in L$ için

$$ll' = 0$$

şeklinde sıfır çarpım ve

$$\begin{aligned} R \times M &\longrightarrow R \\ (r, m) &\longmapsto r \end{aligned}$$

şeklinde izdüşüm (projection) yoluyla bir $R \times M$ -modül yapısı verildiğinde

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} : L &\longrightarrow R \times M \\ l &\longmapsto (0, \theta(l)) \end{aligned}$$

fonksiyonu bir çaprazlanmış $R \times M$ -modül yapısı oluşturur. Gerçekten;

$$\begin{aligned} (R \times M) \times L &\longrightarrow L \\ ((r, m), l) &\longmapsto (r, m) \cdot l = rl \end{aligned}$$

şeklindeki etki fonksiyonu ile birlikte $\tilde{\theta} : L \rightarrow R \times M$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} \text{ÇM1)} \quad \tilde{\theta}((r, m) \cdot l) &= \tilde{\theta}(rl) && \text{(etki tanımından)} \\ &= (0, \theta(rl)) && (\tilde{\theta}, \text{ tanımından)} \\ &= (0, r\theta(l)) && (\theta, R\text{-modül morfizmi)} \\ &= (r0, (r\theta(l) + 0m)) \\ &= (r, m)(0, \theta(l)) && \text{(yarı direkt çarpım tanımı)} \\ &= (r, m)\tilde{\theta}(l) && (\tilde{\theta}, \text{ tanımından)} \\ \\ \text{ÇM2)} \quad \tilde{\theta}l \cdot l' &= (0, \theta(l)) \cdot l' && (\tilde{\theta}, \text{ tanımından)} \\ &= 0l' && \text{(etki tanımından)} \\ &= 0 \\ &= ll' && (L \text{ de sıfır çarpımdan)} \end{aligned}$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomlarını sağlar.

1.3 Çaprazlanmış Modüller Kategorisi

Tanım 1.4 1) Objeler Sınıfı : $\partial : C \rightarrow R, \partial' : C' \rightarrow R' \dots$ çaprazlanmış modüller.

2) Morfizmler Kümesi :

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\theta} & C' \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial' \\ R & \xrightarrow{\phi} & R' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} R \times C & \xrightarrow{(\phi, \theta)} & R' \times C' \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{\theta} & C' \end{array}$$

diyagramları geçişmeli olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} (r, c) & \xrightarrow{\quad} & \phi(r), \theta(c) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (r \cdot c) & \xrightarrow{\quad} & \theta(r \cdot c) = \phi(r) \cdot \theta(c) \end{array}$$

olup (θ, ϕ) ikililerine çaprazlanmış modül morfizmi denir.

3) Kompozisyon : (θ, ϕ) ve (θ', ϕ') çaprazlanmış modül morfizmleri olmak üzere

$$(\theta, \phi) \circ (\theta', \phi') = (\theta' \circ \theta, \phi' \circ \phi)$$

şeklindedir. Bu kategoriyi **XMod** ile gösterilir.

BÖLÜM 2

ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN OBJE VE MORFİZM ÖZELLİKLERİ

2.1 Bir Kategorinin Obje ve Morfizm Özellikleri

2.1.1 İlk Obje

Tanım 2.1 \mathcal{C} kategorisindeki her X objesi için

$$\text{Mor}(I, X) = \{f \mid f : I \rightarrow X\}$$

kümesinin bir tek elemanı varsa I 'ya \mathcal{C} nin ilk objesi denir.

Örnekler:

- 1) S =Kümeler kategorisinin ilk objesi $I = \emptyset$ dir.
- 2) G =Gruplar kategorisinin ilk objesi $I = \{e\}$ (birim eleman) dır.
- 3) T =Topolojik uzaylar kategorisinin ilk objesi $I = \text{bos uzay}$ dır.
- 4) H =Halkalar kategorisinin ilk objesi $I = \{0\}$ kümesidir.
- 5) H_1 = Birimli halkalar kategorisinin ilk objesi $I = \mathbb{Z}$ dir. Çünkü

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow H$$

H_1 kategorisinde morfizm ise her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{Z} & \rightarrow & H \\ n & \rightarrow & n \cdot 1 \end{array}$$

bir tek homomorfizm vardır.

İspat: H herhangi birimli bir halka ve $\text{Çek}(H) = n$ olsun. Buna göre $n \cdot 1_H = 0$ olup $\text{Çek}f = n\mathbb{Z}$ dir.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & H \\ q \downarrow & \nearrow h & \\ \mathbb{Z}/\text{Çek}f & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\quad} & x \cdot 1_H \\ \downarrow & \nearrow & \\ [x]_n & & \end{array}$$

diyagramı değişmeli (yani $hq = f$) olup f biriciktir. $hq = f$ olacak şekilde f nin biricik olduğunu gösterebilmek için h ve q nun biricikliğini gösterelim.

h', h ile aynı özelliğe sahip diğer bir homomorfizm olsun. Bu durumda $h'q = f$ dir.

$$\begin{aligned} h'q &= f = hq \\ \implies h'q &= hq \\ \implies h' &= h \end{aligned}$$

olup h biriciktir.

q nun biricikliğinden önce h nin birebirliğini gösterelim

$$\begin{aligned} h([x]_n) = h([y]_n) &\implies x \cdot 1_H = y \cdot 1_H \\ &\implies x \cdot 1_H - y \cdot 1_H = 0_H \\ &\implies (x - y) \cdot 1_H = 0_H \\ &\implies x - y \in \text{Çek}f \end{aligned}$$

ise h birebirdir.

q, q' ile aynı özelliğe sahip diğer bir homomorfizm olsun.

$$\begin{aligned} hq' = f = hq &\implies hq' = hq \\ &\implies q' = q \end{aligned}$$

ise q biriciktir. h ve q biricik olduğuna göre bunların bileşkesi olan f de biriciktir.

Teorem 2.2 Bir kategoride herhangi iki ilk obje birbirine izomorftur.

İspat : I_1 ve $I_2 \in \mathcal{C}$ kategorisinin ilk objeleri olsunlar. I_1 ilk obje olduğundan

$$f : I_1 \rightarrow I_2$$

bir tek morfizm vardır. Benzer şekilde I_2 ilk obje olduğundan

$$g : I_2 \rightarrow I_1$$

bir tek morfizm vardır. Böylece

$$g \circ f : I_1 \rightarrow I_1$$

morfizmi vardır. I_1 kategorinin ilk objesi olduğundan I_1 den I_1 e yalnız bir morfizm olmalıdır. Bu morfizm I_1 in birim morfizmidir. Yani $g \circ f = 1_{I_1}$ dir. Benzer şekilde $f \circ g = 1_{I_2}$ dir. Böylece $I_1 \cong I_2$ dir.

2.1.2 Son Objeler

Tanım 2.3 Bir \mathcal{C} kategorisinde her X objesi için, X den S ye bir tek morfizm varsa S ye \mathcal{C} nin son objesi denir. Yani ;

$$Mor(X, S) = \{f \mid f : X \rightarrow S\}$$

kümesinin bir tek elemanı varsa S 'ye \mathcal{C} nin son objesi denir.

Örnekler:

- 1) $S = \text{Kümeler kategorisinin son objesi } \{x\}$ (tek elemanlı kümeler) dir.
- 2) $T = \text{Topolojik uzaylar kategorisinin son objesi } S = \{x\}$ (tek elemanlı topolojik uzaylar) dir.

Böylece bu iki kategorinin birçok son objesi vardır.

- 3) $H_1 = \text{Birimli halkalar kategorisinin son objesi yoktur. Çünkü birimli halkalar denince } 1 \neq 0 \text{ olduğu kabul edilmektedir. Aksi takdirde halka sıfırdan oluşur.}$

Teorem 2.4 S_1 ve S_2 \mathcal{C} kategorisinde son objeler ise $S_1 \cong S_2$ dir

İspat : S_2 \mathcal{C} nin son objesi ise

$$f : S_1 \rightarrow S_2$$

tek morfizmi var ve benzer şekilde S_1 \mathcal{C} nin son objesi ise

$$g : S_2 \rightarrow S_1$$

tek morfizmi vardır. Teklikten

$$g \circ f = 1_{S_1}$$

ve

$$f \circ g = 1_{S_2}$$

olup $S_1 \cong S_2$ dir.

2.1.3 Monomorfizm

Tanım 2.5 \mathcal{C} bir kategori olsun. \mathcal{C} deki $f : A \rightarrow B$ morfizmi sol sadeleşebilir ise f ye monomorfizm (veya monik) denir.

Örnek 2.1 $S = \text{Kümeler kategorisinde}$, $G = \text{Gruplar kategorisinde}$, $A = \text{Abelyen gruplar kategorisinde}$, $H = \text{Halkalar kategorisinde}$ ve $T = \text{Topolojik uzaylar kategorisinde}$ her bire-bir morfizm bir moniktir.

Tanım 2.6 Objeler , bazı ek yapı ile birlikte kümeler ve morfizmler , bu yapıları koruyan oklar olan kategorilere somut kategori denir.

Örnek 2.2 $S = \text{Kümeler kategorisi}$, $G = \text{Gruplar kategorisi}$, $T = \text{Topolojik uzaylar kategorisi}$ somut kategoridir.

Teorem 2.7 \mathcal{C} de f ve g monik ise $f \circ g$ moniktir.

İspat :

$$\begin{aligned} (f \circ g) \circ h_1 &= (f \circ g) \circ h_2 \\ \implies f \circ (g \circ h_1) &= f \circ (g \circ h_2) \quad (\because \mathcal{C} \text{ de birleşme aksiyomu}) \\ \implies g \circ h_1 &= g \circ h_2 \quad (\because f \text{ monik}) \\ \implies h_1 &= h_2 \quad (\because g \text{ monik}) \end{aligned}$$

Teorem 2.8 $f \circ g$ monik ise g moniktir.

İspat :

$$\begin{aligned} g \circ h_1 = g \circ h_2 &\implies f \circ (g \circ h_1) = f \circ (g \circ h_2) \\ &\implies (f \circ g) \circ h_1 = (f \circ g) \circ h_2 \quad (\because \text{birleşme aksiyomu}) \\ &\implies h_1 = h_2 \quad (f \circ g \text{ monik}) \end{aligned}$$

2.1.4 Epimorfizm

Tanım 2.9 \mathcal{C} bir kategori olsun. \mathcal{C} deki $f : A \rightarrow B$ morfizmi sağ sadeleşebilir ise yani :

$$g_1 \circ f = g_2 \circ f \implies g_1 = g_2$$

ise f ye epimorfizm (veya kısaca epik) denir.

Teorem 2.10 f, g epik ise $f \circ g$ epiktir.

İspat :

$$\begin{aligned} h_1 \circ (f \circ g) = h_2 \circ (f \circ g) &\implies (h_1 \circ f) \circ g = (h_2 \circ f) \circ g \quad (\because \text{birleşme aksiyomu}) \\ &\implies h_1 \circ f = h_2 \circ f \quad (\because g \text{ epik}) \\ &\implies h_1 = h_2 \end{aligned}$$

Teorem 2.11 $f \circ g$ epik ise f epiktir.

İspat :

$$\begin{aligned} h_1 \circ f = h_2 \circ f &\implies (h_1 \circ f) \circ g = (h_2 \circ f) \circ g \\ &\implies h_1 \circ (f \circ g) = h_2 \circ (f \circ g) \quad (\because \text{birleşme aksiyomu}) \\ &\implies h_1 = h_2 \end{aligned}$$

2.2 Çaprazlanmış Modüller Kategorisinin Objeler ve Morfizm Özellikleri

2.2.1 İlk Objeler

$$\begin{aligned} \partial_R : R &\longrightarrow R \\ r &\longmapsto r \end{aligned}$$

objesinin çaprazlanmış modül kategorisinin ilk objesi olduğunu gösterelim. $\partial_C : C \longrightarrow R$ herhangi bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda

$$f : R \longrightarrow C$$

değişmeli halka homomorfizmi ve C, R -cebir olduğundan

$$\begin{aligned} R \times C &\longrightarrow C \\ (r, c) &\longmapsto r \cdot c = f(r)c \end{aligned}$$

R -modül etkisi vardır. Şimdi (f, Id) nin çaprazlanmış modül morfizmi olduğunu gösterelim.

$$\begin{array}{ccc}
 R & \xrightarrow{f} & C \\
 \partial_R \downarrow & & \downarrow \partial \\
 R & \xrightarrow{Id} & R
 \end{array}$$

$$(Id \circ \partial_R)(r) = Id(\partial_R(r)) = Id(r) = r$$

dir. Diğer taraftan

$$(\partial_C \circ f)(r) = \partial_C(f(r)) = r$$

olup diyagram değişmelidir.

$$\begin{array}{ccc}
 R \times R & \xrightarrow{(Id, f)} & R \times C \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 R & \xrightarrow{f} & C
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (r_1, r_2) & \longrightarrow & (Id(r_1), f(r_2)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (r_1 r_2) & \longrightarrow & f(r_1 r_2)
 \end{array}$$

$$f(r_1 r_2) = f(r_1) f(r_2) (\because f \text{ de\u0131işmeli halka homomorfizmi})$$

diğer taraftan

$$\begin{aligned}
 (\partial_R(r_1), f(r_2)) &= \cdot (r_1 f(r_2)) \\
 &= f(r_1) f(r_2) (\because C \text{ nin } R - \text{mod\u00fcl etkisi})
 \end{aligned}$$

olup diyagram de\u0131şmelidir. Böylece (f, ∂_R) \u00e7aprazlanmış mod\u00fcl morfizmidir ve ∂_R \u00e7aprazlanmış mod\u00fcller kategorisinin ilk objesidir.

2.2.2 Son Obje

$$\begin{array}{ccc}
 \partial_R: R & \longrightarrow & R \\
 & & r \longmapsto r
 \end{array}$$

objesinin çaprazlanmış modül kategorisinin son objesi olduğunu gösterelim. $\partial_C : C \rightarrow R$ herhangi bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda

$$f : R \rightarrow C$$

değişmeli halka homomorfizmi ve C, R -cebir olduğundan

$$\begin{aligned} R \times C &\rightarrow C \\ (r, c) &\mapsto r \cdot c = f(r)c \end{aligned}$$

R -modül etkisi vardır. Şimdi (∂_C, Id) nin çaprazlanmış modül morfizmi olduğunu gösterelim.

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\partial_C} & R \\ \partial_C \downarrow & & \downarrow Id \\ R & \xrightarrow{Id} & R \end{array}$$

$$(Id \circ \partial_C)(c) = (Id \circ \partial_C)(c)$$

olup diyagram değişmelidir.

$$\begin{array}{ccc} R \times C & \xrightarrow{(Id, \partial_C)} & R \times R \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{\partial_C} & R \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (r, c) & \longrightarrow & (r, \partial(c)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (r \cdot c) & \longrightarrow & \partial(r \cdot c) = r\partial(c) \end{array}$$

$$(r, \partial(c)) = r\partial(c) \quad (\because R, R\text{-modül})$$

ve

$$\partial(r \cdot c) = r\partial(c) \quad (\because \partial \text{ çaprazlanmış modül})$$

olup diyagram değişmelidir. Böylece (∂_C, Id) çaprazlanmış modül morfizmi ve ∂_R de çaprazlanmış modüller kategorisinin son objesidir.

2.2.3 Monomorfizm

Teorem 2.12 $(\theta, \varphi) = \alpha$ çaprazlanmış modül morfizminin monik olması için gerek ve yeter şart θ ve φ nin monik olmasıdır.

İspat : $\partial = (C \longrightarrow R), \partial' = (C' \longrightarrow R'), \partial'' = (C'' \longrightarrow R'')$ çaprazlanmış modüller kategorisinin objeleri , $\alpha = (\theta, \varphi), \beta = (\theta', \varphi'), \gamma = (\theta'', \varphi'')$ çaprazlanmış modüller kategorisinin morfizmleri ve $c'' \in C'', r'' \in R''$ olsun. θ ve φ nin birebir olduğunu kabul edip α 'nın monik olduğunu gösterelim.

$$\begin{array}{ccccc}
 C'' & \xrightarrow{\theta'} & C & \xrightarrow{\theta} & C' \\
 \downarrow & \xrightarrow{\theta''} & \downarrow & & \downarrow \\
 R'' & \xrightarrow{\phi'} & R & \xrightarrow{\phi} & R' \\
 & \xrightarrow{\phi''} & & & \\
 \partial'' & \xrightarrow{\beta} & \partial & \xrightarrow{\alpha} & \partial' \\
 & \xrightarrow{\gamma} & & &
 \end{array}$$

$$\alpha\beta = \alpha\gamma$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned}
 (\theta, \varphi) \circ (\theta', \varphi')(c'', r'') &= (\theta, \varphi) \circ (\theta'', \varphi'')(c'', r'') \\
 (\theta \circ \theta', \varphi \circ \varphi')(c'', r'') &= (\theta \circ \theta'', \varphi \circ \varphi'')(c'', r'')
 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikten de

$$(\theta \circ \theta')(c'') = (\theta \circ \theta'')(c'')$$

ve

$$(\varphi \circ \varphi')(r'') = (\varphi \circ \varphi'')(r'')$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
 (\theta \circ \theta')(c'') &= (\theta \circ \theta'')(c'') \\
 \implies \theta(\theta'(c'')) &= \theta(\theta''(c'')) \\
 \implies \theta'(c'') &= \theta''(c'') \quad (\because \theta \text{ birebir}) \\
 \implies \theta' &= \theta''
 \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
 (\varphi \circ \varphi')(r'') &= (\varphi \circ \varphi'')(r'') \\
 \implies \varphi(\varphi'(r'')) &= \varphi(\varphi''(r'')) \\
 \implies \varphi'(r'') &= \varphi''(r'') \quad (\because \varphi \text{ birebir}) \\
 \implies \varphi' &= \varphi''
 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$\alpha\beta = \alpha\gamma \implies \beta = \gamma$$

dır ve α moniktir.

Şimdi de $(\theta, \varphi) = \alpha$ nın monik olduğunu kabul edip θ ve φ nin birebir olduğunu gösterelim.

$$\alpha\beta = \alpha\gamma$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} (\theta, \varphi) \circ (\theta', \varphi')(c'', r'') &= (\theta, \varphi) \circ (\theta'', \varphi'')(c'', r'') \\ (\theta \circ \theta', \varphi \circ \varphi')(c'', r'') &= (\theta \circ \theta'', \varphi \circ \varphi'')(c'', r'') \end{aligned}$$

Bu eşitlikten de

$$(\theta \circ \theta')(c'') = (\theta \circ \theta'')(c'')$$

ve

$$(\varphi \circ \varphi')(r'') = (\varphi \circ \varphi'')(r'')$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} (\theta \circ \theta')(c'') &= (\theta \circ \theta'')(c'') \\ \implies \theta(\theta'(c'')) &= \theta(\theta''(c'')) \\ \implies \theta(c_1) &= \theta(c_2) \\ \implies c_1 &= c_2 \\ \implies \theta &\text{ birebirdir.} \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \varphi')(r'') &= (\varphi \circ \varphi'')(r'') \\ \implies \varphi(\varphi'(r'')) &= \varphi(\varphi''(r'')) \\ \implies \varphi(r_1) &= \varphi(r_2) \\ \implies r_1 &= r_2 \\ \implies \varphi &\text{ birebirdir.} \end{aligned}$$

yani $(\theta, \varphi) = \alpha$ monik iken θ ve φ birebirdir.

2.2.4 Epimorfizm

Teorem 2.13 $(\theta, \varphi) = \alpha$ çaprazlanmış modül morfizminin epik olması için gerek ve yeter şart θ ve φ nin φ nin örten olmasıdır.

İspat : $\partial = (C \longrightarrow R), \partial' = (C' \longrightarrow R'), \partial'' = (C'' \longrightarrow R'')$ çaprazlanmış modüller kategorisinin objeleri , $\alpha = (\theta, \varphi), \beta = (\theta', \varphi'), \gamma = (\theta'', \varphi'')$ çaprazlanmış modüller kategorisinin morfizmleri ve $c \in C, r \in R$ olsun. θ ve φ nin örten olduğunu kabul edip α nın epik olduğunu

gösterelim.

$$\begin{array}{ccccc}
 C & \xrightarrow{\theta} & C' & \begin{array}{c} \xrightarrow{\theta'} \\ \xrightarrow{\theta''} \end{array} & C'' \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 R & \xrightarrow{\phi} & R' & \begin{array}{c} \xrightarrow{\phi'} \\ \xrightarrow{\phi''} \end{array} & R'' \\
 & & \partial & \xrightarrow{\alpha} & \partial' & \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\gamma} \end{array} & \partial''
 \end{array}$$

$$\beta\alpha = \gamma\alpha$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned}
 (\theta', \phi') \circ (\theta, \phi)(c, r) &= (\theta'', \phi'') \circ (\theta, \phi)(c, r) \\
 (\theta' \circ \theta, \phi' \circ \phi)(c, r) &= (\theta'' \circ \theta, \phi'' \circ \phi)(c, r)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte

$$(\theta' \circ \theta)(c) = (\theta'' \circ \theta)(c)$$

ve

$$(\phi' \circ \phi)(r) = (\phi'' \circ \phi)(r)$$

elde edilir. Burdan

$$\begin{aligned}
 (\theta' \circ \theta)(c) &= (\theta'' \circ \theta)(c) \\
 \implies \theta'(\theta(c)) &= \theta''(\theta(c)) \\
 \implies \theta'(c') &= \theta''(c') \quad (\because \theta \text{ örten})
 \end{aligned}$$

olacak şekilde $c' \in C'$ vardır. O halde $\theta' = \theta''$ elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
 (\phi' \circ \phi)(r) &= (\phi'' \circ \phi)(r) \\
 \implies \phi'(\phi(r)) &= \phi''(\phi(r)) \\
 \implies \phi'(r') &= \phi''(r') \quad (\because \phi \text{ örten})
 \end{aligned}$$

olacak şekilde $r' \in R'$ vardır. O halde $\phi' = \phi''$ elde edilir. Yani

$$\beta\alpha = \gamma\alpha \implies \beta = \gamma$$

dır.

Şimdi de $(\theta, \phi) = \alpha$ nın epik olduğunu kabul edip θ ve ϕ nin örten olduğunu gösterelim. $\theta(C)$, C' nün alt modülü olduğundan $C'' = C' / \theta(C)$ bölüm modülü oluşturabiliriz.

$$\begin{aligned}
 \theta' : C' &\longrightarrow C' / \theta(C) \\
 c' &\longmapsto \theta(C) + c'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \theta'' : C' &\longrightarrow C' / \theta(C) \\
 c' &\longrightarrow \theta(C) + 0
 \end{aligned}$$

ve benzer olarak

$$\begin{aligned}\varphi' : R' &\longrightarrow R'/\varphi(R) \\ r' &\longmapsto \varphi(R) + r'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi'' : R' &\longrightarrow R'/\varphi(R) \\ r' &\longmapsto \varphi(R) + r'\end{aligned}$$

tanımlayalım. α epik olduğundan

$$\beta\alpha = \gamma\alpha \implies \beta = \gamma$$

Elde edilir. Bu ise

$$(\theta', \varphi')(c', r') = (\theta'', \varphi'')(c', r')$$

demektir. Buradan

$$\begin{aligned}\theta'(c') &= \theta''(c') \\ \implies c' + \theta(C) &= \theta(C) \quad (\because \theta' \text{ ve } \theta'' \text{ tanımından}) \\ \implies c' &\in \theta(C) \\ \implies \theta &\text{ örtendir}\end{aligned}$$

Benzer olarak

$$\begin{aligned}\varphi'(r') &= \varphi''(r') \\ \implies \varphi(R) + r' &= \varphi(R) \\ \implies r' &\in R \\ \implies \varphi &\text{ örtendir.}\end{aligned}$$

elde edilir. Yani $(\theta, \varphi) = \alpha$ epik iken θ ve φ örtendir.

BÖLÜM 3

FUNKTORLAR

Tanım 3.1 \mathcal{C} ve \mathcal{D} herhangi iki kategori olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan F dönüşümüne \mathcal{C} den \mathcal{D} ye bir fonktor denir.

1) $X \in Ob(\mathcal{C})$ için $F(X) \in Ob(\mathcal{D})$ dir.

2) $F : X \longrightarrow Y \in Mor(\mathcal{C})$ için $F(f) = Ff : F(X) \longrightarrow F(Y)$ olmak üzere $F(f) \in Mor(\mathcal{D})$ dir.

3) $g, f \in Mor(\mathcal{C})$ için $F(g \circ_{\mathcal{C}} f) = Fg \circ_{\mathcal{D}} Ff$ dir.

4) $1_A : A \longrightarrow A$ \mathcal{C} kategorisinde birim morfizm olmak üzere $F(1_A) = 1_{F(A)}$ \mathcal{D} kategorisinde birim morfizmdir.

Örnek 3.1 $\mathcal{C} = \mathcal{D}$ ise $1_{\mathcal{C}} = F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ fonktora birim fonktor denir. Burada $F(X) = X$ ve $f : X \longrightarrow Y \in Mor(\mathcal{C})$ için

$$\begin{array}{ccc} F(f) = f : F(X) & \longrightarrow & F(Y) \\ \parallel & & \parallel \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

dir.

Örnek 3.2 $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ fonktoru her $X \in Ob(\mathcal{C})$ için $F(X) = B \in Ob(\mathcal{D})$ (sabit) ise F fonktora sabit fonktor denir. Yani ;

$F(A) = B$ ve $f : A_1 \longrightarrow A_2 \in Mor(\mathcal{C})$ için

$$\begin{array}{ccc} F(f) = 1_B : F(A_1) & \longrightarrow & F(A_2) \\ \parallel & & \parallel \\ B & \longrightarrow & B \end{array}$$

dir.

Tanım 3.2 Bir kategoriden yapıyı kaldırarak başka bir kategoriye giden oklara forgetful fonktor denir.

$$F : \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{T} \\ \mathcal{G} \\ \mathcal{H} \end{array} \right\} \longrightarrow \mathcal{S}$$

funktorları forgetful fonktordur.(Çünkü $\mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ kategorilerindeki işlemleri kaldırıp \mathcal{S} kategorisine gidiyor.)

Örnek 3.3

$$F : \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{R}\text{-modül} \\ \mathcal{H} \\ \mathcal{H}_1 \end{array} \right\} \longrightarrow AbGrup$$

funktorları forgetful fonktordur.(Çünkü $\mathcal{R}\text{-modül}, \mathcal{H}, \mathcal{H}_1$ kategorilerindeki çarpma işlemini kaldırıp $AbGrup$ kategorisine gidiyor.)

Tanım 3.3 Kümeler kategorisinden (\mathcal{S}) herhangi bir kategoriye tanımlanan funktora serbest (free) fonktor denir.

Örnek 3.4 $F : \mathcal{S} \longrightarrow AbGrup$ fonktorunu tanımlayalım. $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ sonlu bir küme olsun.

$$F(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n k_i a_i \mid k_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

şeklinde tanımlarsak $(F(A), +)$ Abelyen grup yapısı elde edilir.

$$\begin{array}{ccc} f : A_1 & \longrightarrow & A_2 \\ a_i & \longmapsto & f(a_i) \end{array}$$

fonksiyonu ise

$$\begin{array}{ccc} F(f) : F(A_1) & \longrightarrow & F(A_2) \\ \sum_{i=1}^n k_i a_i & \longmapsto & \sum_{i=1}^n k_i f(a_i) \end{array}$$

grup homomorfizmi olup $F(f)$ biriciktir. Buradaki F fonktora free $AbGrup$ fonktoru denir.

Özel olarak $n = 1$ için

$$A = \{a_1\} \text{ ve } F(A) = \{k_1 a_1 \mid k_1 \in \mathbb{Z}\} = \langle a_1 \rangle$$

devirli grup yapısı elde edilir.

Tanım 3.4 Herhangi bir kategoriden $AbGrup$ kategorisine tanımlanan funktora Abelyenleştirilmiş fonktor denir.

Örnek 3.5 $F : \mathcal{C} \rightarrow AbGrup$ Abelyenleştirilmiş fonktoru oluşturalım. G grup olmak üzere $F(G)$ nin Abelyan grup olması için F yi nasıl tanımlarız? $[G : G]$, $a = xyx^{-1}y^{-1}$ elemanları tarafından üretilen değişmeli normal alt gruptur. Yani;

$$[G : G] = \left\{ \prod_{i=1}^n a_i \mid a_i = [x_i y_i] = x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1} \right\} \trianglelefteq G$$

dir. Böylece

1) Objeler : $F(G) = G/[G : G]$ şeklindeki Abelyan gruplar.

2) Morfizmler : $f : G \rightarrow G' \in Mor(\mathcal{G})$ olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} F(f) : & F(G) & \longrightarrow & F(G') \\ & \parallel & & \parallel \\ & G/[G : G] & \longrightarrow & G'/[G' : G'] \end{array}$$

olup

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G' \\ \downarrow q & & \downarrow q \\ G/[G : G] & \xrightarrow{F(f)} & G'/[G' : G'] \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} g & \longrightarrow & f(g) \\ \downarrow & & \downarrow \\ [g] & \longrightarrow & [f(g)] \end{array}$$

$$F(f)([g]) = [f(g)]$$

dir.

Tanım 3.5 \mathcal{C} herhangi bir kategori ve $D \in Ob(\mathcal{C})$ nin sabit bir objesi olsun.

$$Mor(D, -) = H_D : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S} \text{ (kümeler kategorisi)}$$

1) $A \in Ob(\mathcal{C})$ olsun.

$$H_D(D, A) = \{D \rightarrow A\} \in Ob(\mathcal{S})$$

dir.

2) $f : A \longrightarrow B \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ için

$$H_D(f) = \text{Hom}(D, f) : \text{Hom}(D, A) \longrightarrow \text{Hom}(D, B)$$

$$h \longmapsto f \circ h$$

ise

$$H_D(f)(h) = f \circ h$$

tanımlamasına göre

$$H_D : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}$$

bir funktordur. Bu funktora kovaryant hom funktor denir.

3) $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ ve $k : D \longrightarrow A$ herhangi bir morfizm olsun.

$$\begin{aligned} \text{Hom}(D, g) \circ \text{Hom}(D, f)(k) &= \text{Hom}(D, g) \circ (\text{Hom}(D, f)(k)) \\ &= \text{Hom}(D, g)(f \circ k) \quad (\because \text{Hom funktor tanımı}) \\ &= g \circ (f \circ k) \\ &= (g \circ f) \circ k \quad (\because \mathcal{C} \text{ bir kategori}) \\ &= \text{Hom}(D, g \circ f)(k) \end{aligned}$$

olup bileşke şartı sağlanır.

4) $Id_A : A \longrightarrow A \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ ve $f : D \longrightarrow A \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ olsun.

$$\text{Hom}(D, Id_A) : \text{Hom}(D, A) \longrightarrow \text{Hom}(D, A)$$

$$f \longmapsto Id_A \circ f = f$$

Böylece

$$\begin{aligned} \text{Hom}(D, Id_A)(f) &= Id_A \circ f \\ &= f \\ &= Id_{\text{Hom}(D, A)}(f) \end{aligned}$$

olup

$$\text{Hom}(D, Id_A) = Id_{\text{Hom}(D, A)}(f)$$

olur. Birimlilik şartı sağlanır.

Tanım 3.6

$$\mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{B}$$

1) $\eta_{A, B} : \text{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A), B) \cong \text{Mor}_{\mathcal{A}}(A, G(B))$

2) $\eta_{A, B}$ nin A ve B de doğal olması.

A da doğallık:

$\eta_{A,B}$ nin A da doğal olması,

$h : A' \longrightarrow A \in Mor(\mathcal{A})$ için aşağıdaki diyagramın değişmeli olması demektir.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(F(A), B) & \xrightarrow{\eta_{A,B}} & \mathcal{A}(A, G(B)) \\ \downarrow F(h)^* = - \circ F(h) & & \downarrow - \circ h = h^* \\ \mathcal{B}(F(A'), B) & \xrightarrow{\eta_{A',B}} & \mathcal{A}(A', G(B)) \end{array}$$

yani ; $f : F(A) \longrightarrow B$ ve $g : A \longrightarrow G(B)$ verildiğinde

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{\quad} & g \\ \downarrow & & \downarrow \\ f \circ F(h) & \xrightarrow{\quad} & g \circ h \end{array}$$

olmasıdır.

B de doğallık:

$\eta_{A,B}$ nin B de doğal olması,

$k : B \longrightarrow B' \in Mor(\mathcal{B})$ için aşağıdaki diyagramın değişmeli olması demektir.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(F(A), B) & \xrightarrow{\eta_{A,B}} & \mathcal{A}(A, G(B)) \\ \downarrow k^* = k \circ - & & \downarrow G(k)^* = G(k) \circ - \\ \mathcal{B}(F(A), B') & \xrightarrow{\eta_{A,B'}} & \mathcal{A}(A, G(B')) \end{array}$$

yani : $f : F(A) \longrightarrow B$ ve $g : A \longrightarrow G(B)$ verildiğinde

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{\quad} & g \\ \downarrow & & \downarrow \\ k \circ f & \xrightarrow{\quad} & G(k) \circ g \end{array}$$

olmasıdır.

Bu şartları sağlayan (F, G) ikilisine adjoint ikili denir. F ye G nin sol eki, G ye F nin sağ eki denir.

Örnek 3.6 K bir cisim, \mathcal{S} (kümeler kategorisi), \mathbf{Vec}_K (vektör uzayları kategorisi) olmak üzere

$$\mathcal{S} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathbf{Vec}_K$$

(F, G) ikilisinin adjoint ikili olduğunu gösterelim.(Burada G fonktoru underlying fonktordur.)

1)

$$\begin{aligned} \eta_{X,W} : \mathbf{Vec}_K(F(X), W) &\longrightarrow \mathbf{Küme}(X, G(W)) \\ f &\longmapsto \eta_{X,W}(f) = f|_X \\ \Psi_{X,W} : \mathbf{Küme}(X, G(W)) &\longrightarrow \mathbf{Vec}_K(F(X), W) \\ g &\longmapsto \Psi_{X,W}(g) = f_g \end{aligned}$$

ve

$$f_g : F(X) \longrightarrow W \\ \sum x_i k_i \longmapsto \sum g(x_i) k_i$$

olmak üzere $\mathbf{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A), B) \cong \mathbf{Mor}_{\mathcal{A}}(A, G(B))$ olduğunu göstermek için

$$\eta_{X,W} \circ \Psi_{X,W} = 1_{\mathbf{Küme}}$$

ve

$$\Psi_{X,W} \circ \eta_{X,W} = 1_{\mathbf{Vec}_K}$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} (\eta_{X,W} \circ \Psi_{X,W})(g) &= \eta_{X,W}(f \circ g) \\ &= (f \circ g)|_X \\ &= g \\ &= 1_{\mathbf{Küme}} \circ g \quad (g : X \longrightarrow G(W) \text{ olduğundan } X \text{ e kısıtlanmış kendidir.}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (\Psi_{X,W} \circ \eta_{X,W})(f) &= \Psi_{X,W}(f|_X) \\ &= f|_X \\ &= f \\ &= 1_{\mathbf{Vec}_K} \circ f \end{aligned}$$

olup $\mathbf{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A), B) \cong \mathbf{Mor}_{\mathcal{A}}(A, G(B))$ sağlanır.

2) X de doğallık:

$$\begin{aligned} h : X' &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto h(x) \end{aligned}$$

ve $f : F(X) \longrightarrow W$ olsun.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Vec}_{\mathbf{K}}(F(X), W) & \xrightarrow{\eta_{X,W}} & \mathcal{S}(X, G(W)) \\ \downarrow -\circ F(h) & & \downarrow -\circ h \\ \mathbf{Vec}_{\mathbf{K}}(F(X'), W) & \xrightarrow{\eta_{X',W}} & \mathcal{S}(X', G(W)) \end{array}$$

olmak üzere diyagramın değişmeli olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} (\eta_{X',W}) \circ (f \circ F(h))(x) &= (f \circ F(h))|_{X'}(x) \\ &= (f|_X \circ h)(x) \\ &= (f \circ F(h))(x) \end{aligned}$$

ve diğer taraftan

$$\begin{aligned} (-\circ h)(\eta_{X,W}(f))(x) &= (-\circ h)(f|_X)(x) \\ &= (f|_X \circ h)(x) \\ &= f|_X \circ (h(x)) \\ &= f \circ F(h)(x)|_{X'} \\ &= f \circ F(h)(x) \quad (\because x \in X') \end{aligned}$$

olup diyagram değişmelidir. Benzer şekilde W doğallık gösterilir. Yani (F, G) ikilisi adjoint ikilidir.

3.1 Çaprazlanmış Modüllerin Tensör arpımı

$\mu : M \longrightarrow R, \nu : N \longrightarrow R$ iki aprazlanmış R -modül olsun. $J, M \times N$ nin

- i) $k(m, n) = (k \cdot m, n)(m, a \cdot n)$
- ii) $((m + m'), n) = (m, n) + (m', n)$
- iii) $(m, n + n') = (m, n) + (m, n')$
- iv) $(p \cdot m, n) = (m, p \cdot n)$

elemanları tarafından üretilen bir ideali olsun. Bu durumda çaprazlanmış modüllerin tensör arpımı

$$M \otimes_R N = (M \times N)/J = \{(m, n)j = m \otimes n \mid m \in M, n \in N\}$$

olarak tanımlanır.

$$\begin{aligned} R \times (M \otimes_R N) &\longrightarrow M \otimes_R N \\ (r, (m \otimes n)) &\longmapsto r \cdot (m \otimes n) = r \cdot m \otimes n \\ &= m \otimes r \cdot n \end{aligned}$$

etkisiyle birlikte

$$\begin{aligned} \partial : M \otimes_R N &\longrightarrow R \\ m \otimes n &\longmapsto \mu(m)\nu(n) \end{aligned}$$

olsun.

$$\begin{aligned}
 \text{ÇM1) } \partial((r \cdot (m \otimes n))) &= \partial(r \cdot m \otimes n) = \partial(m \otimes r \cdot n) \\
 &= \mu(r \cdot m)v(n) = \mu(m)v(r \cdot n) \\
 &= r\mu(m)v(n) = \mu(m)rv(n) \\
 &= r(\mu(m)v(n)) = r(\mu(m)v(n)) \\
 &= r\partial(m \otimes n)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ÇM2) } \partial(m \otimes n) \cdot (m' \otimes n') &= (\mu(m)v(n))(m' \otimes n') \\
 &= \mu(m)(v(n)(m' \otimes n')) \\
 &= \mu(m)(m' \otimes v(n) \cdot n') \\
 &= \mu(m) \cdot m' \otimes v(n) \cdot n' \\
 &= mm' \otimes nn' \\
 &= (m \otimes n)(m' \otimes n')
 \end{aligned}$$

O halde $M \otimes_R N \xrightarrow{\partial} R$ bir çaprazlanmış modüldür.

Funktoriyel Örnekler:

1) Herhangi bir R , k -cebiri alındığında, her zaman çaprazlanmış modül yapısı,

$$F : \text{Ceb} \longrightarrow \text{XMod}$$

funktoru ile elde edilir. Bu fonkturun objeleri

$$F(R) = (R, R, Id)$$

ve morfizmleri $f : R \longrightarrow S$, k -cebiri morfizmi olmak üzere

$$F(f) = \left(\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & S \\ id_R \downarrow & & \downarrow id_S \\ R & \xrightarrow{f} & S \end{array} \right) = (f, f)$$

dir.

Tersine (C, R, ∂) çaprazlanmış modülü verildiğinde

$$G : \text{XMod} \longrightarrow \text{Ceb}$$

funktoru tanımlanabilir. Objeleri

$$G(C, R, \partial) = R$$

şeklinde k -cebiri gönderilebilir. Buradan morfizmler

$$(\theta, \varphi) : (C, R, \partial) \longrightarrow (C', R', \partial')$$

çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere

$$G(\theta, \varphi) = G \left(\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\theta} & C' \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial' \\ R & \xrightarrow{\varphi} & R' \end{array} \right) = (\varphi : R \longrightarrow R')$$

şeklinde k -cebiri morfizmleri olarak tanımlanır.

2) $R - Id\mathcal{C}$; R , k -cebirlerinin ideallerinin kategorisi olsun.

$$F : XMod/R \longrightarrow R - Id\mathcal{C}$$

funktoru tanımlanabilir. Bu fonktörün objeleri

$$F(C, R, \partial) = \partial(C) \trianglelefteq R$$

ve morfizmleri

$$F \left(\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\theta} & C' \\ & \searrow \partial & \swarrow \partial' \\ & R & \end{array} \right) = (\partial(C) \longrightarrow \partial(C'))$$

şeklinde R -cebirlerin ideallerinin morfizmleridir.

Tersine, örnek 1.6 gereğince

$$G : R - Id\mathcal{C} \longrightarrow XMod/R$$

funktorunun objeleri $I \trianglelefteq R$ için

$$G(I) = (I, R, i)$$

ve morfizmleri $I, J \trianglelefteq R$ olmak üzere $f : I \longrightarrow J$ iç dönüşümü alınır

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{f} & J \\ & \searrow i_1 & \swarrow i_2 \\ & R & \end{array}$$

şeklinde değişmeli diyagramı elde edilir. Çünkü her $x \in I$ için

$$i_2 f(x) = i_2(f(x)) = i_2(x) = x = i_1(x)$$

olup $i_2 f = i_1$ dir. Böylece

$$G \left(\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{f} & J \\ & \searrow i_1 & \swarrow i_2 \\ & R & \end{array} \right) = (f, id_R) = f$$

çaprazlanmış modül morfizmi elde edilir.

3)

$$\mathbf{RMod} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathbf{XMod/R}$$

funktoru tanımlanabilir. M, R -modül ise

$$F(M) = (0 : M \longrightarrow R)$$

ve $f : M \longrightarrow N$ R -modül morfizmi için

$$F(f) : F(M) \longrightarrow F(N)$$

olup

$$F(f) = \left(\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ 0 \downarrow & & \downarrow 0 \\ R & \xrightarrow{id_R} & R \end{array} \right) = (f, id_R) = f$$

çaprazlanmış R -modül morfizmidir.

$\partial : C \longrightarrow R$ çaprazlanmış R -modül morfizmi ise $F(\partial) = \text{Çek}(\partial)$

$$\begin{array}{ccc} R \times \text{Çek}(\partial) & \longrightarrow & \text{Çek}(\partial) \\ (r, a) & \longmapsto & r \cdot a = ra \end{array}$$

işlemlerle $\text{Çek}(\partial)$, R -modüldür. Çünkü $a \in \text{Çek}(\partial)$ olduğundan

$$\partial r(a) = r\partial(a) = r \cdot 0 = 0$$

olup $r(a) \in \text{Çek}(\partial)$ dır.

$$(f, Id_R) : (C, R, \partial) \longrightarrow (C', R', \partial')$$

çaprazlanmış modül morfizmi ise

$$G(f, Id_R) = (\text{Çek}(\partial) \longrightarrow \text{Çek}(\partial'))$$

R -modül morfizmidir.

4) Objeleri k -cebir morfizmleri ve morfizmleri değişmeli diyagramlar olacak şekilde \mathbf{Ceb}^2 kategorisini alalım. Bu durumda

$$F : \mathbf{XMod} \longrightarrow \mathbf{Ceb}^2$$

forgetful fonktoru tanımlanabilir. Yani $\partial : C \rightarrow R$ çaprazlanmış R -modül morfizmi için $F(\partial) = \partial$ olup Peiffer şartını sağlamayan $\partial : C \rightarrow R$, k -cebiri morfizmidir.

$$(\theta, \varphi) : (C, R, \partial) \rightarrow (C', R', \partial')$$

morfizmi için

$$F(\theta, \varphi) = \left(\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\theta} & C' \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial' \\ R & \xrightarrow{\varphi} & R' \end{array} \right)$$

yalnız k -cebiri morfizmlerinde oluşan değişmeli diyagram elde edilir. Benzer şekilde

$$F : XMod \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{J}^2 \\ Mod^2 \\ AbGrp^2 \end{array} \right\}$$

forgetful fonktörleri tanımlanabilir.

5)

$$F : XMod \rightarrow Ceb$$

funktorunun objeleri

$$F(C, R, \partial) = R/\partial(C)$$

bir k -cebirdir. Çünkü

$$k \rightarrow R \rightarrow R/\partial(C)$$

halka homomorfizmi

$$\begin{aligned} k \times R/\partial(C) &\rightarrow R/\partial(C) \\ (k, r + \partial(C)) &\mapsto k \cdot (r + \partial(C)) = kr + \partial(C) \end{aligned}$$

işlemlerle $R/\partial(C)$, k -modül yapısı oluşturur. Morfizmleri ise

$$F(\theta, \varphi) = (R/\partial(C) \rightarrow R'/\partial(C'))$$

indirgenmiş k -cebir homomorfizmleridir. Çünkü

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\theta} & C \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial' \\ R' & \xrightarrow{\varphi} & C' \\ q \downarrow & & \downarrow q' \\ R/\partial(C) & \longrightarrow & R'/\partial(C') \end{array}$$

diyagramı değişmelidir.

BÖLÜM 4

Çarpım Objeleri

4.1 Kategorilerde Çarpım Objeleri

Tanım 4.1 \mathcal{C} bir kategori ve A ve B de \mathcal{C} nin objeleri olsun.

$$Pr_1 : C \longrightarrow A, Pr_2 : C \longrightarrow B$$

\mathcal{C} nin morfilleri olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise C ye A ve B nin çarpım objesi denir.

D , \mathcal{C} nin herhangi bir objesi ve $q_1 : D \longrightarrow A$, $q_2 : D \longrightarrow B$ morfilleri verildiğinde

$$\begin{array}{ccc} & D & \\ q_1 \swarrow & \vdots & \searrow q_2 \\ A & C & B \\ Pr_1 \longleftarrow & & \longrightarrow Pr_2 \end{array}$$
$$Pr_1 q = q_1$$

ve

$$Pr_2 q = q_2$$

olacak şekilde biricik

$$q : D \longrightarrow C$$

morfilleri var olmalı.

Örnek 4.1 \mathcal{C} , kümeler kategorisi olsun. $A, B \in Ob(\mathcal{C})$ ve

$$C = A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

kümesi A ve B nin çarpım objesi midir?

D bir küme $q_1 : D \longrightarrow A$, $q_2 : D \longrightarrow B$ fonksiyonları verildiğinde

$$\begin{array}{ccc} & D & \\ q_1 \swarrow & \vdots & \searrow q_2 \\ A & C & B \\ Pr_1 \longleftarrow & & \longrightarrow Pr_2 \end{array}$$

diyagramı değişmeli yapacak şekilde biricik $q : D \longrightarrow C$ fonksiyonunun var olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} Pr_1 : C = A \times B &\longrightarrow A \\ (a, b) &\longmapsto a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Pr_2 : C = A \times B &\longrightarrow B \\ (a, b) &\longmapsto b \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} q : D &\longrightarrow A \times B \\ x &\longmapsto (q_1(x), q_2(x)) \end{aligned}$$

fonksiyonları olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\begin{aligned} Pr_1 q(x) &= Pr_1(q_1(x), q_2(x)) \\ &= q_1(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Pr_2 q(x) &= Pr_2(q_1(x), q_2(x)) \\ &= q_2(x) \end{aligned}$$

olup diyagram değişmelidir. Şimdi q nun tekliliğini gösterelim.

q' , q ile aynı özelliğe sahip olsun. Yani

$$\begin{aligned} q' : D &\longrightarrow A \times B \\ x &\longmapsto (a, b) \end{aligned}$$

$Pr_1 q' = q_1$ ve $Pr_2 q' = q_2$ olsun.

$$\begin{aligned} Pr_1 q'(x) &= Pr_1(a, b) \\ &= a \\ &= q_1(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Pr_2 q'(x) &= Pr_2(a, b) \\ &= b \\ &= q_2(x) \end{aligned}$$

olup

$$q'(x) = (a, b) = ((q_1(x), q_2(x)) = q(x)$$

dir. $x \in D$ keyfi olduğundan $q = q'$ dür. Yani q biriciktir. Böylece A ve B nin çarpım objesi $A \times B$ kümesidir.

Örnek 4.2 \mathcal{C} ,gruplar kategorisi olsun. $G_1, G_2 \in Ob(\mathcal{C})$ ve

$$C = G_1 \times G_2 = \{(x, y) \mid x \in G_1, y \in G_2\}$$

$$(x, y)(x', y') = (xx', yy')$$

işlemine göre bir gruptur. şimdi bu kümenin G_1 ve G_2 nin çarpım objesi olduğunu gösterelim.

D bir grup ve $q_1 : D \rightarrow G_1$, $q_2 : D \rightarrow G_2$ grup homomorfizmi verildiğinde

$$\begin{array}{ccccc}
 & & D & & \\
 & q_1 \swarrow & \vdots & \searrow q_2 & \\
 A & \xleftarrow{Pr_1} & G \times G' & \xrightarrow{Pr_2} & B
 \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapacak şekilde biricik $q : D \rightarrow G_1 \times G_2$ grup homomorfizminin var olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
 q : D &\longrightarrow G_1 \times G_2 \\
 x &\longmapsto (q_1(x), q_2(x))
 \end{aligned}$$

fonksiyonu Her $x, y \in D$ için

$$\begin{aligned}
 q(xy) &= (q_1(xy), q_2(xy)) \\
 &= (q_1(x)q_1(y), q_2(x)q_2(y)) \quad (\because q_1, q_2 \text{ grup homomorfizmi}) \\
 &= (q_1(x), q_2(x)), (q_1(y), q_2(y)) \quad (\because \text{grup işlemi}) \\
 &= (q(x)q(y))
 \end{aligned}$$

olup q bir grup homomorfizmidir.

$$\begin{aligned}
 Pr_1 : G_1 \times G_2 &\longrightarrow G_1 \\
 (g_1, g_2) &\longmapsto g_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Pr_2 : G_1 \times G_2 &\longrightarrow G_2 \\
 (g_1, g_2) &\longmapsto g_2
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 q : D &\longrightarrow G_1 \times G_2 \\
 x &\longmapsto (q_1(x), q_2(x))
 \end{aligned}$$

homomorfizmlerinin olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\begin{aligned}
 Pr_1 q(x) &= Pr_1(q_1(x), q_2(x)) \\
 &= q_1(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Pr_2 q(x) &= Pr_2(q_1(x), q_2(x)) \\
 &= q_2(x)
 \end{aligned}$$

olup diyagram değişmelidir. Şimdi q nun tekliğini gosterelim.

q' , q ile aynı özelliğe sahip olsun. Yani

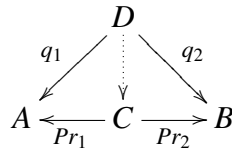
$$\begin{aligned}
 q' : D &\longrightarrow G_1 \times G_2 \\
 x &\longmapsto (g_1, g_2)
 \end{aligned}$$

$Pr_1 q' = q_1$ ve $Pr_2 q' = q_2$ olsun.

$$\begin{aligned}
 Pr_1 q'(x) &= Pr_1(g_1, g_2) \\
 &= g_1 \\
 &= q_1(x)
 \end{aligned}$$

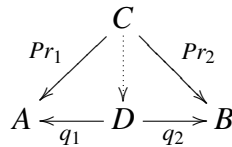
Teorem 4.3 Herhangi iki objenin çarpım objesi varsa izomorfizm farkıyla biriciktir.

İspat : \mathcal{C} bir kategori , $A, B \in Ob(\mathcal{C})$ olsun. Kabul edelim ki C ve D , A ve B nin iki çarpım objesi olsun. A ve B nin çarpım objesi olarak C yi aldığımızda test objesi olarak D yi alabiliriz. Buna göre

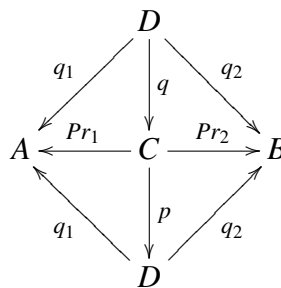


$Pr_1q = q_1$ ve $Pr_2q = q_2$ olacak şekilde diyagramı değişmeli yapan biricik $q : D \longrightarrow C$ morfizmi vardır:

D , A ve B nin çarpım objesi olarak alındığında test objesi olarak C yi alalım. Buna göre



$q_1p = Pr_1$ ve $q_2p = Pr_2$ olacak şekilde diyagramı değişmeli yapan biricik $p : C \longrightarrow D$ morfizmi vardır.



diyagramı değişmelidir çünkü

$$\begin{aligned}
 q_1(pq) &= (q_1p)q \\
 &= Pr_1q \\
 &= q_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_2(pq) &= (q_2p)q \\
 &= Pr_2q \\
 &= q_2
 \end{aligned}$$

Ayrıca $1_D : D \rightarrow D$ morfizmi de bu diyagramları değişmeli yapar. Bu diyagramı değişmeli yapacak birtek morfizm 1_D olduğundan

$$pq = 1_D$$

ve benzer şekilde

$$qp = 1_C$$

olup

$$p \cong q$$

ve böylece

$$C \cong D$$

dir.

4.2 Çaprazlanmış Modüller Kategorisinde Çarpım Objeleri

$\mathcal{C}, \mathbf{XMod}/R$ olsun. $\partial_A : (A \rightarrow R)$, $\partial_B : (B \rightarrow R)$ çaprazlanmış modüller ise ∂_A ve ∂_B nin çarpım objesini gösterelim.

$\partial_D : (D \rightarrow R)$ test objesi ve

$$\theta : (D \xrightarrow{\partial_D} R) \rightarrow (A \xrightarrow{\partial_A} R)$$

$$\varphi : (D \xrightarrow{\partial_D} R) \rightarrow (B \xrightarrow{\partial_B} R)$$

çaprazlanmış modül morfizmleri verildiğinde

$$\begin{array}{ccc} & \partial_D & \\ (\theta, Id_R) \swarrow & \vdots & \searrow (\varphi, Id_R) \\ \partial_A & \longleftarrow \partial_C & \longrightarrow \partial_B \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{c} D \\ \downarrow \\ R \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c} A \\ \downarrow \\ R \end{array} \right) = \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\theta} & A \\ \partial_D \searrow & & \swarrow \partial_A \\ & R & \end{array}$$

$$\partial_D = \partial_A \theta$$

$$\begin{pmatrix} D \\ \downarrow \\ R \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} B \\ \downarrow \\ R \end{pmatrix} = \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\varphi} & B \\ & \searrow \partial_D & \swarrow \partial_B \\ & & R \end{array}$$

$$\partial_D = \partial_B \varphi$$

i)

$$A \times_R B = C = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B \text{ ve } \partial_A(a) = \partial_B(b)\} \subseteq A \times B$$

için

$$\begin{aligned} \partial_C : A \times_R B &\longrightarrow R \\ (a, b) &\longmapsto \partial_C(a, b) = \partial_A(a) = \partial_B(b) \\ \partial_C(a, b) \cdot (a', b') &= \partial_A(a) \cdot (a', b') \\ &= (\partial_A(a) \cdot a', \partial_A(a) \cdot b') \\ &= (\partial_A(a) \cdot a', \partial_B(a) \cdot b') \quad (\because \partial_A = \partial_B) \\ &= (aa', bb') \quad (\because \partial_A, \partial_B \text{ çaprazlanmış modül}) \\ &= (a, b)(a', b') \end{aligned}$$

olup $\partial_C : A \times_R B \longrightarrow R$ bir çaprazlanmış modüldür.

$$ii) \begin{pmatrix} C \\ \downarrow \\ R \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A \\ \downarrow \\ R \end{pmatrix} = \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\beta} & A \\ & \searrow \partial_C & \swarrow \partial_A \\ & & R \end{array}$$

$$(\partial_A \beta)(a, b) = \partial_A(\beta(a, b)) = \partial_A(a) = \partial_C(a, b)$$

yani

$$\partial_C = \partial_A \beta$$

dır.

$$\begin{pmatrix} C \\ \downarrow \\ R \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} B \\ \downarrow \\ R \end{pmatrix} = \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\alpha} & B \\ & \searrow \partial_C & \swarrow \partial_B \\ & & R \end{array}$$

$$\partial_B \alpha(a, b) = \partial_B(\alpha(a, b)) = \partial_B(b) = \partial_C(a, b)$$

yani

$$\partial_C = \partial_B \alpha$$

dır.

$$\begin{array}{ccc} R \times C & \xrightarrow{Id_R \times \beta} & R \times A \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{\beta} & A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
(r, (a, b)) & \xrightarrow{Id_R \times \beta} & (r, \beta(a, b)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(r \cdot a, r \cdot b) & \xrightarrow{\beta} & (r, \beta(a, b))
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\beta(r \cdot a, r \cdot b) &= r \cdot a \\
& \quad r \cdot \beta(a, b)
\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde

$$\alpha(r \cdot a, r \cdot b) = r \cdot \alpha(a, b)$$

olup (β, Id_R) ve (α, Id_R) ikilileri çaprazlanmış modül morfizmleridir.

$$iii) \left(\begin{array}{c} D \\ \downarrow \\ R \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c} C \\ \downarrow \\ R \end{array} \right) = \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\psi} & C \\ & \searrow \partial_D & \swarrow \partial_C \\ & & R \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\psi: D &\longrightarrow C \\
d &\longmapsto (\theta(d), \varphi(d))
\end{aligned}$$

olarak tanımlayalım.

$$(\partial_C \psi)(d) = \partial_C(\theta(d), \varphi(d)) = \partial_A(\theta(d)) = (\partial_A \theta)(d) = \partial_D(d)$$

olup

$$\partial_D = \partial_C \psi$$

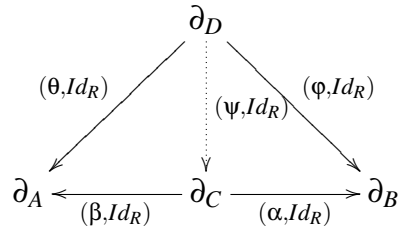
dir.

$$\begin{array}{ccc}
R \times D & \xrightarrow{Id_R \times \psi} & R \times C \\
\downarrow & & \downarrow \\
D & \xrightarrow{\psi} & C \\
\\
(r, d) & \longrightarrow & (r, \psi(d)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(r \cdot d) & \xrightarrow{\psi} & (r \cdot \psi(d))
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\psi(r, d) &= (\theta(r \cdot d), \varphi(r \cdot d)) \\
&= (r\theta(d), r\varphi(d)) \quad (\because \varphi, \theta \text{ çaprazlanmış modül morfizmi}) \\
&= r(\theta(d), \varphi(d)) \\
&= r\psi(d)
\end{aligned}$$

olup (ψ, Id_R) ikilisi çaprazlanmış modül morfizmidir.

iv)



$$\begin{aligned}
 (\beta\psi)(d) &= \beta(\theta(d), \varphi(d)) \\
 &= \theta(d)
 \end{aligned}$$

olup

$$\beta\varphi = \theta$$

dır.

$$\begin{aligned}
 (\alpha\psi)(d) &= \alpha(\theta(d), \varphi(d)) \\
 &= \varphi(d)
 \end{aligned}$$

olup

$$\alpha\psi = \varphi$$

dir. Dolayısıyla diyagram değişmelidir.

v) (ψ, Id_R) ikilisi biricik mi? ψ' , ψ ile aynı özellikte olsun. Yani

$$\begin{aligned}
 \psi' : D &\longrightarrow C \\
 d &\longmapsto (a, b)
 \end{aligned}$$

için ; $\beta\psi' = \theta$ ve $\alpha\psi' = \varphi$ olsun.

$$(\beta\psi')(d) = \beta(a, b) = a = \theta(d)$$

$$(\alpha\psi')(d) = \alpha(a, b) = b = \varphi(d)$$

$$\psi'(d) = (a, b) = (\theta(d), \varphi(d)) = \psi(d)$$

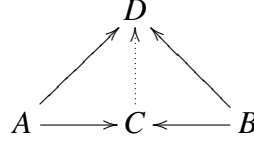
olup $\psi = \psi'$ dür. Yani ψ biriciktir. Böylece $(\partial_C : A \times_R B \longrightarrow R)$ objesi $(A \xrightarrow{\partial_A} R)$ ve $(B \xrightarrow{\partial_B} R)$ objelerinin çarpım objesidir.

BÖLÜM 5

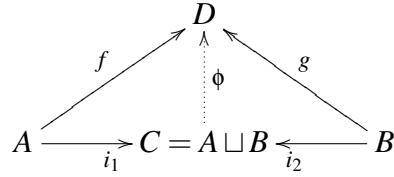
Ko-Çarpım Objeleri

5.1 Kategorilerde Ko-Çarpım Objeleri

Tanım 5.1 \mathcal{C} bir kategori ve $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ olsun. $i_1 : A \rightarrow C$ ve $i_2 : B \rightarrow C$, \mathcal{C} nin morfizmleri olmak üzere aşağıdaki şartları sağlanıyor ise C ye A ve B nin ko-çarpımı denir ve $C = A \sqcup B$ ile gösterilir.



D herhangi bir obje ve $f : A \rightarrow D$, $g : B \rightarrow D$ morfizmleri verildiğinde



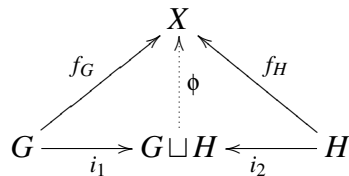
diyagramı değişmeli olacak şekilde biricik

$$\phi : A \sqcup B \rightarrow D$$

morfizmi vardır.

Teorem 5.2 Ko-çarpım obje izomorfizm farkıyla biriciktir.

Örnek 5.1 \mathcal{C} kümeler kategorisi olmak üzere,



$G' = G \times \{1\}$ ve $H' = H \times \{2\}$ ise

$$G \sqcup H = G' \cup H', G' \cap H' = \emptyset$$

$$\begin{aligned} i_1 : G &\longrightarrow G \sqcup H \\ g &\longmapsto (g, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_2 : H &\longrightarrow G \sqcup H \\ h &\longmapsto (h, 2) \end{aligned}$$

içine fonksiyonları olmak üzere

$$\begin{aligned} \phi : G \sqcup H &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto \phi(x) = \begin{cases} f_G(g); x=(g,1), g \in G \\ f_H(h); x=(h,2), h \in H \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi i_1(g) &= \phi((g, 1)) \\ &= f_G(g) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \phi i_2(h) &= \phi((h, 2)) \\ &= f_H(h) \end{aligned}$$

olup diyagram değişmelidir. Şimdi ϕ nin tekliğini gösterelim.

ϕ, ϕ' ile aynı özellikte olsun.

$$\phi' : G \sqcup H \longrightarrow X$$

ve

$$\phi' i_1 = f_G, \phi' i_2 = f_H$$

dir. $g \in G$ için

$$\begin{aligned} \phi' i_1(g) &= \phi'((g, 1)) \\ &= f_G(g) \end{aligned}$$

$h \in H$ için

$$\begin{aligned} \phi' i_2(h) &= \phi' i_2((h, 2)) \\ &= f_H(h) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\phi'(x) = \begin{cases} f_G; x = (g, 1), g \in G \\ f_H; x = (h, 2), h \in H \end{cases} = \phi(x)$$

olup $\phi = \phi'$ olur. Dolayısıyla G ve H kümelerinin ko-çarpım objesi G ve H nin ayrık birleşimidir.

Örnek 5.2 \mathcal{C} toplamsal Abelyen gruplar kategorisi ve G_1, G_2 toplamsal Abelyen gruplar olmak üzere

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X & & \\
 & f \nearrow & \uparrow \phi & \nwarrow g & \\
 G_1 & \xrightarrow{i_1} & G_1 \oplus G_2 & \xleftarrow{i_2} & G_2
 \end{array}$$

$$i_1 : G_1 \longrightarrow G_1 \oplus G_2$$

$$x \longmapsto (x, 0)$$

$$i_2 : G_2 \longrightarrow G_1 \oplus G_2$$

$$y \longmapsto (0, y)$$

için

$$\begin{aligned}
 i_1(x_1 + x_2) &= (x_1 + x_2, 0) \\
 &= (x_1, 0) + (x_2, 0) \\
 &= i_1(x_1) + i_2(x_2)
 \end{aligned}$$

olup i_1 bir homomorfizmdir. Benzer şekilde i_2 ninde bir homomorfizm olduğu gösterilir.

$$\begin{aligned}
 \phi : G_1 \oplus G_2 &\longrightarrow H \\
 (x, y) &\longmapsto f(x) + g(y)
 \end{aligned}$$

fonksiyonu ;

$$\begin{aligned}
 \phi((x, y) + (x', y')) &= \phi(x + x', y + y') \\
 &= f(x + x') + g(y + y') \\
 &= f(x) + f(x') + g(y) + g(y') \quad (\because f \text{ ve } g \text{ grup homomorfizmi}) \\
 &= f(x) + g(y) + f(x') + g(y') \quad (\because G_1, G_2 \text{ abelyan}) \\
 &= \phi((x, y)) + \phi((x', y'))
 \end{aligned}$$

olup ϕ bir grup homomorfizmidir.

$$\begin{aligned}
 \phi i_1(x) &= \phi((x, 0)) \\
 &= f(x) + g(0) \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

olup $\phi i_1 = f$ dir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
 \phi i_2(y) &= \phi((0, y)) \\
 &= f(0) + g(y) \\
 &= g(y)
 \end{aligned}$$

olup $\phi i_2 = g$ dir. Yani diyagram değişmelidir. Şimdi ϕ nin tekliğini gösterelim.

ϕ', ϕ ile aynı özellikte olsun.

$$\begin{aligned}
 \phi' : G_1 \oplus G_2 &\longrightarrow H \\
 (x, y) &\longmapsto h
 \end{aligned}$$

grup homomorfizmi $\phi' i_1 = f$ ve $\phi' i_2 = g$ olsun.

$$\begin{aligned}\phi' i_1(x) &= \phi'((x, 0)) \\ &= f(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi' i_2(y) &= \phi'((0, y)) \\ &= g(y)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\phi'((x, y)) &= \phi'((x, 0) + \phi'((0, y))) \quad (\because \phi' \text{ grup homomorfizmi}) \\ &= f(x) + g(y) \\ &= \phi((x, y))\end{aligned}$$

olup $\phi = \phi'$ dür. Yani G_1 ve G_2 abelyan gruplarının coproduct objesi $G_1 \oplus G_2$ (direkt toplam) dır.

5.2 Çaprazlanmış Modüller Kategorisinde Ko-Çarpım Objeleri

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{D} & \\ & \nearrow & \nwarrow \\ \mathcal{X} & \longrightarrow X \times C & \longleftarrow \mathcal{C} \end{array}$$

\mathbf{XMod}/R kategorisinde $\mathcal{A} = (\lambda : X \rightarrow R)$ ve $\mathcal{B} = (\partial : C \rightarrow R) \in Ob(\mathbf{XMod}/R)$ olsun. $\partial : C \rightarrow R \in Ob(\mathbf{XMod}/R)$ olduğundan $R \times C \rightarrow R$ ve $\lambda : X \rightarrow R \in Ob(\mathbf{XMod}/R)$ olduğundan $R \times X \rightarrow X$ modül etkileri vardır.

$$X \times C = \{(x, c) \mid x \in X, c \in C\}$$

olmak üzere $(x, c), (y, d) \in X \times C$ için

$$\begin{aligned}(x, c)(y, d) &= (xy, c \cdot y + x \cdot d + cd) \\ &= (xy, c\lambda y + \lambda x d + cd)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan işleme yarı direkt çarpım denir.

$$\begin{aligned}\bar{\partial} : X \times C &\longrightarrow \mathcal{D} \\ (x, c) &\longmapsto \lambda x + \partial c\end{aligned}$$

nin bir çaprazlanmış modül olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}R \times (X \times C) &\longrightarrow X \times C \\ (r, (x, c)) &\longmapsto r \cdot (x, c) = (r \cdot x, r \cdot c)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ÇM1) } \bar{\partial}(r \cdot (x, c)) &= \bar{\partial}((r \cdot x, r \cdot c)) \\
&= \lambda(r \cdot x) + \partial(r \cdot c) \\
&= r\lambda x + r\partial c && (\because \partial, \lambda \text{ Xmod}) \\
&= r(\lambda x + \partial c) && (\because R \text{ halka}) \\
&= r\bar{\partial}((x, c))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ÇM2) } \bar{\partial}(x, c)(y, d) &= (\lambda x + \partial c) \cdot (y, d) \\
&= (\lambda x \cdot y + \partial c \cdot y, \lambda x \cdot d + \partial c \cdot d) \\
&= (xy + \partial c \cdot y, \lambda x \cdot d + cd)
\end{aligned}$$

diğer taraftan ise

$$(x, c)(y, d) = (xy, c\lambda y + \lambda x d + cd)$$

olup

$$(xy + \partial c \cdot y, \lambda x \cdot d + cd) \neq (xy, c\lambda y + \lambda x d + cd)$$

dir. Bu eşitliği sağlamak için;

$$(xy + \partial c y - xy, \lambda x \cdot d + cd - c\lambda y - \lambda x d + cd) = (\partial c y, -c\lambda y)$$

yi \sim kümesine atalım.

$$\begin{aligned}
\sigma: (X \times C) / \sim &\longrightarrow R \\
(x, c) + \sim &\longmapsto \lambda x + \partial c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R \times (X \times C / \sim) &\longrightarrow (X \times C) / \sim \\
(r, (x, c) + \sim) &\longmapsto r((x, c) + \sim) = r \cdot (x, c) + \sim \\
&= (r \cdot x, r \cdot c) + \sim
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ÇM1) } \sigma(r \cdot (x, c) + \sim) &= \sigma((r \cdot x, r \cdot c) + \sim) \\
&= \lambda(r \cdot x) + \partial(r \cdot c) \\
&= r\lambda x + r\partial c && (\because \partial, \lambda \text{ Xmod}) \\
&= r(\lambda x + \partial c) && (\because R \text{ halka}) \\
&= r(\sigma((x, c) + \sim))
\end{aligned}$$

olup ÇM1 sağlanır.

$$\begin{aligned}
\text{ÇM2) } \sigma((x, c) + \sim) \cdot ((y, d) + \sim) &= (\lambda x + \partial c) \cdot ((y, d) + \sim) \\
&= ((\lambda x + \partial c) \cdot y, (\lambda x + \partial c) \cdot d) + \sim \\
&= (\lambda x \cdot y + \partial c \cdot y, \lambda x \cdot d + \partial c \cdot d) + \sim \\
&= ((xy, cd) + (\partial c \cdot y, \lambda x \cdot d) + \sim)
\end{aligned}$$

diğer taraftan

$$\begin{aligned}
((x, c) + \sim)((y, d) + \sim) &= (x, c)(y, d) + \sim \\
&= (xy, c \cdot \lambda y + \lambda x \cdot d + cd) + \sim \\
&= ((xy, cd) + (0, c \cdot \lambda y + \lambda x \cdot d)) + \sim
\end{aligned}$$

olup

$$(\partial c \cdot y, \lambda x \cdot d) + \sim = ((0, c \cdot \lambda y + \lambda x \cdot d)) + \sim$$

olmalı.

$$\begin{aligned}
 (\partial c \cdot y, \lambda x \cdot d) + \sim &= ((0, c \cdot \lambda y + \lambda x \cdot d) + \sim) \\
 &= (\partial c \cdot y, \lambda x \cdot d) - (0, c \cdot \lambda y + \lambda x \cdot d) \\
 &= (\partial c \cdot y, \lambda x \cdot d - c \cdot \lambda y - \lambda x \cdot d) \\
 \implies (\partial c \cdot y, -c \cdot \lambda y) &\in \sim
 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $(X \times C) / \sim$ bir çaprazlanmış modüldür. Şimdi $(X \times C) / \sim$ nin ko-çarpım obje olduğunu inceleyelim.

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{D} & \\
 f \nearrow & \uparrow \phi & \nwarrow g \\
 \mathcal{X} & \xrightarrow{i_1} & (X \times C) / \sim \xleftarrow{i_2} \mathcal{C}
 \end{array}$$

$$i_1 : \mathcal{A} = (\lambda : X \rightarrow R) \xrightarrow{x} (X \times C) / \sim \mapsto (x, 0) + \sim$$

$$i_2 : \mathcal{B} = (\partial : C \rightarrow R) \xrightarrow{c} (X \times C) / \sim \mapsto (0, c) + \sim$$

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{i_1} & (X \times C) / \sim \\
 \lambda \downarrow & & \downarrow \sigma \\
 R & \xrightarrow{Id_R} & R
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma i_1(x) &= \sigma((x, 0) + \sim) \\
 &= \lambda x + \partial 0 \\
 &= \lambda x
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 Id \lambda(x) &= Id(\lambda x) \\
 &= \lambda x
 \end{aligned}$$

olup diyagram değişmelidir.

$$\begin{array}{ccc}
 R \times X & \xrightarrow{(Id_R, i_1)} & R \times (X \times C) / \sim \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{i_1} & (X \times C) / \sim \\
 \\
 (r, x) & \longrightarrow & (r, (x, 0) + \sim) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 r \cdot x & \longrightarrow & r \cdot ((x, 0) + \sim)
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 i_1(r \cdot x) &= (r \cdot x, 0) + \sim \\
 &= r \cdot (x, 0) + \sim \\
 &= r \cdot ((x, 0) + \sim)
 \end{aligned}$$

olup i_1 ve benzer şekilde i_2 çaprazlanmış modül morfizmidir.

$$\begin{aligned} \phi: (X \times C)/\sim &\longrightarrow \mathcal{D} \\ (x, c) + \sim &\longmapsto f(x) + g(c) \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & D \\ & \searrow \lambda & \swarrow \partial_D \\ & R & \end{array} \right) = \partial_{\mathcal{D}} f = \lambda$$

ve

$$\left(\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g} & D \\ & \searrow \partial & \swarrow \partial_D \\ & R & \end{array} \right) = \partial_{\mathcal{D}} g = \partial$$

$$\begin{array}{ccc} (X \times C)/\sim & \xrightarrow{\phi} & D \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \partial_D \\ R & \xrightarrow{Id_R} & R \end{array}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\mathcal{D}} \phi((x, c) + \sim) &= \partial_{\mathcal{D}}(f(x) + g(c)) \\ &= \partial_{\mathcal{D}}(f(x)) + \partial_{\mathcal{D}}(g(c)) \\ &= (\partial_{\mathcal{D}} f)(x) + (\partial_{\mathcal{D}} g)(c) \\ &= \lambda x + \partial c \\ &= \sigma((x, c) + \sim) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} R \times (X \times C)/\sim & \xrightarrow{(Id_R, \sigma)} & R \times D \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X \times C)/\sim & \xrightarrow{\sigma} & D \\ r \cdot ((x, c) + \sim) & \longrightarrow & r \cdot (f(x) + g(c)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (r \cdot x, r \cdot c) + \sim & \longrightarrow & r \cdot f(x) + r \cdot g(c) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sigma((r \cdot x, r \cdot c) + \sim) &= f(r \cdot x) + g(r \cdot c) \\ &= rf(x) + rg(c) \end{aligned}$$

olup ϕ bir çaprazlanmış modül morfizmidir.

$$\begin{aligned}
\phi i_1(x) &= \phi((x, 0) + \sim) \\
&= f(x) + g(0) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\phi i_2(c) &= \phi((0, c) + \sim) \\
&= f(0) + g(c) \\
&= g(c)
\end{aligned}$$

dir. Şimdi ϕ nin tekliğini gösterelim.

ϕ' , ϕ ile aynı özellikte olsun.

$$\begin{aligned}
\phi' : (X \times C) / \sim &\longrightarrow \mathcal{D} \\
(x, c) + \sim &\longmapsto d
\end{aligned}$$

ϕ' çaprazlanmış modül morfizmi, $\phi' i_1 = f$ ve $\phi' i_2 = g$ dir.

$$\begin{aligned}
\phi' i_1(x) &= \phi'((x, 0) + \sim) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi' i_2(c) &= \phi'((0, c) + \sim) \\
&= g(c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi'((x, c) + \sim) &= \phi'(((x, 0) + (0, c)) + \sim) \\
&= \phi'((x, 0) + \sim) + \phi'((0, c) + \sim) \\
&= f(x) + g(c) \\
&= \phi((x, c) + \sim)
\end{aligned}$$

olup $\phi' = \phi$ dir. Böylece $\mathcal{A} = (\lambda : X \longrightarrow R)$ ve $\mathcal{B} = (\partial : C \longrightarrow R)$ objelerinin ko-çarpım objesi $(X \times C) / \sim$ dir.

BÖLÜM 6

Geri Çekme Obje

6.1 Kategorilerde Geri Çekme Obje

Tanım 6.1 \mathcal{C} herhangi bir kategori olsun. $A, B, C \in Ob(\mathcal{C})$ objeleri için $\alpha : A \rightarrow C$, $\beta : B \rightarrow C$ morfizmler olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{g} & B \\ f \downarrow & & \downarrow \beta \\ A & \xrightarrow{\alpha} & C \end{array}$$

değişmeli ($\alpha f = \beta g$) diyagramı verildiğinde $E \in Ob(\mathcal{C})$, $h_1 : E \rightarrow A$, $h_2 : E \rightarrow B$,

$$\begin{array}{ccc} E & & \\ & \searrow h & \\ & P & \xrightarrow{g} B \\ & \downarrow f & \downarrow \beta \\ & A & \xrightarrow{\alpha} C \end{array}$$

h_1 (E to A), h_2 (E to B), $gh = h_2$ (E to B), $fh = h_1$ (E to A)

$$\alpha h_1 = \beta h_2, gh = h_2, fh = h_1$$

için biricik $h : E \rightarrow P$ morfizmi varsa (f, g) , (α, β) nın geri çekmesidir. Burada P ise geri çekme objesidir.

Uyarı 6.2

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{g} & B \\ f \downarrow & & \downarrow \beta \\ A & \xrightarrow{\alpha} & C \end{array}$$

değişmeli ($\alpha f = \beta g$) diyagramına geri çekme diyagramı denir.

Teorem 6.3 (α, β) ve (α', β') , (θ, ϕ) nin geri çekmeleri olsun.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\alpha} & A \\ \beta \downarrow & & \downarrow \theta \\ B & \xrightarrow{\phi} & X \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{\alpha'} & A \\ \beta' \downarrow & & \downarrow \theta \\ B & \xrightarrow{\phi} & X \end{array}$$

Bu durumda $\varphi : Y \rightarrow Y'$ biricik izomorfizm vardır.

İspat : (α, β) , (θ, ϕ) nin geri çekmesi ve Y' test objesi olarak alındığında

$$\begin{array}{ccccc} & & Y' & & \\ & & \searrow \alpha' & & \\ & & \phi' & & \\ & & \searrow & & \\ & & Y & \xrightarrow{\alpha} & A \\ & & \downarrow \beta & & \downarrow \theta \\ & & B & \xrightarrow{\phi} & X \end{array}$$

diyagramı değişmeli olup φ' biricik ve $\beta\varphi' = \beta'$, $\alpha\varphi' = \alpha'$ dir. (α', β') , (θ, ϕ) nin geri çekmesi ve Y test objesi olarak alındığında;

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & & \\ & & \searrow \alpha & & \\ & & \phi & & \\ & & \searrow & & \\ & & Y' & \xrightarrow{\alpha'} & A \\ & & \downarrow \beta' & & \downarrow \theta \\ & & B & \xrightarrow{\phi} & X \end{array}$$

diyagramı değişmeli olup φ biricik ve $\alpha'\varphi = \alpha$ ve $\beta'\varphi = \beta$ dir. Bu durumda;

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & & \\ & & \searrow \alpha & & \\ & & \phi & & \\ & & \searrow & & \\ & & Y & \xrightarrow{\alpha'} & A \\ & & \downarrow \beta' & & \downarrow \theta \\ & & B & \xrightarrow{\phi} & X \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\alpha(\varphi'\varphi) &= (\alpha\varphi')\varphi \\
&= \alpha'\varphi \\
&= \alpha \\
&= \alpha 1_Y \\
\beta(\varphi'\varphi) &= (\beta\varphi')\varphi \\
&= \beta'\varphi \\
&= \beta \\
&= \beta 1_Y
\end{aligned}$$

olup $(\varphi'\varphi) = 1_Y$ ($\because \varphi$ ve φ' biricik). Benzer şekilde;

$$\begin{aligned}
\alpha'(\varphi\varphi') &= (\alpha'\varphi)\varphi' \\
&= \alpha\varphi' \\
&= \alpha' \\
&= \alpha' 1_{Y'} \\
\beta'(\varphi\varphi') &= (\beta'\varphi)\varphi' \\
&= \beta\varphi' \\
&= \beta' \\
&= \beta' 1_{Y'}
\end{aligned}$$

olup $(\varphi\varphi') = 1_{Y'}$ ($\because \varphi$ ve φ' biricik). Böylece $\varphi : Y' \rightarrow Y$ biricik izomorfizm vardır.

Örnek 6.1 \mathcal{C} , kümeler kategorisi olsun. $A, B, C \in Ob(\mathcal{C})$, $\alpha, \beta \in Mor(\mathcal{C})$ ve $\alpha h_1 = \beta h_2$ olmak üzere (α, β) nın geri çekmesi (pullback)

$$D = A \times_C B = \{(a, b) \mid \alpha(a) = \beta(b)\}$$

dir.

$$\begin{array}{ccccc}
E & & & & \\
& \searrow h_2 & & & \\
& & D & \xrightarrow{g} & B \\
& \searrow h_1 & \downarrow f & & \downarrow \beta \\
& & A & \xrightarrow{\alpha} & C
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
f : A \times_C B &\rightarrow A \\
(a, b) &\mapsto a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g : A \times_C B &\rightarrow B \\
(a, b) &\mapsto b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha f((a, b)) &= \alpha(a) \\
&= \beta(b) \\
&= \beta(g(a, b)) \\
&= \beta g(a, b)
\end{aligned}$$

olup $\alpha f = \beta g$ dir.

$$\begin{array}{ccc}
E & \xrightarrow{h_2} & B \\
\downarrow h_1 & & \downarrow \beta \\
A & \xrightarrow{\alpha} & C
\end{array}$$

$$h: E \longrightarrow A \times_C B$$

$$e \longmapsto h(e) = (h_1(e), h_2(e))$$

için

$$fh(e) = f(h_1(e), h_2(e))$$

$$= h_1(e)$$

olup $fh = h_1$ dir. Benzer şekilde

$$gh(e) = g(h_1(e), h_2(e))$$

$$= h_2(e)$$

olup $gh = h_2$ dir.

h nin biricikliği:

h' ve h aynı özellikte olsun.

$$h': E \longrightarrow A \times_C B$$

$$e \longmapsto h'(e) = (a, b)$$

olup $fh' = h_1$ ve $gh' = h_2$ dir.

$$fh'(e) = f((a, b))$$

$$= a$$

$$= h_1(e)$$

$$gh'(e) = g((a, b))$$

$$= b$$

$$= h_2(e)$$

ise

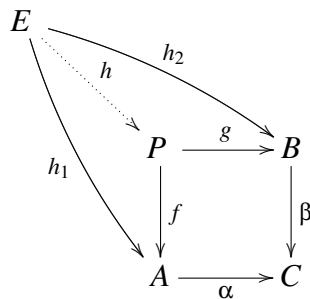
$$h'(e) = (a, b)$$

$$= (h_1(e), h_2(e))$$

$$= h(e)$$

olup $h = h'$ dür.

Örnek 6.2 \mathcal{C} , gruplar kategorisi olsun.



$A, B, X \in Ob(\mathcal{C})$ ve $\alpha, \beta \in Mor(\mathcal{C})$ olmak üzere (α, β) nın geri çekmesi

$$P = A \times_C B = \{(a, b) \mid \alpha(a) = \beta(b)\}$$

dir. P kümesi

$$(a,b)(a',b') = (aa',bb')$$

işlemlerle bir gruptur.

$$\begin{aligned} h(ee') &= (h_1(ee'), h_2(ee')) \\ &= (h_1(e)h_1(e'), h_2(e)h_2(e')) \\ &= (h_1(e), h_2(e)) \cdot (h_1(e'), h_2(e')) \\ &= h(e)h(e') \end{aligned}$$

olup $h \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ dir.

Örnek 6.3 Bir fonksiyonun ters görüntüsü geri çekmenin özel bir halidir.

$$\begin{array}{ccc} g^{-1}(A) & \xrightarrow{h} & A \\ j \downarrow & & \downarrow i \\ B & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

$$g^{-1}(A) = \{x \in B \mid g(x) \in A\}$$

ters görüntü geri çekme objedir.

Özel Haller:

1) \mathcal{C} , kümeler kategorisi örneğinde özel olarak $B \subseteq C$ ve β içine fonksiyon, $\alpha : A \rightarrow C$ herhangi bir fonksiyon alınırsa;

$$\begin{array}{ccccc} E & & & & \\ & \searrow h & & \searrow h_2 & \\ & & D & \xrightarrow{g} & B \\ & \searrow h_1 & \downarrow f & & \downarrow \beta=i \\ & & A & \xrightarrow{\alpha} & C \end{array}$$

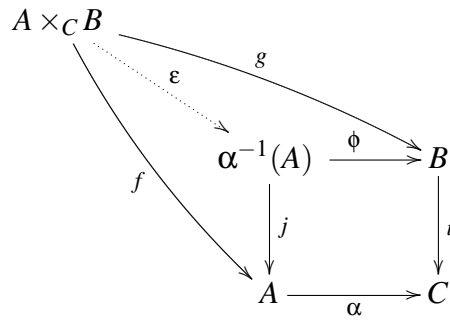
$$B \subseteq C,$$

$$\begin{aligned} A \times_C B &= \{(a,b) \mid \alpha(a) = \beta(b)\} \\ &= \{(a,b) \mid \alpha(a) = b\} \\ &= \{(a,b) \mid \alpha(a) \in B\} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\alpha^{-1}(B) = \{a \in A \mid \alpha(a) \in B\}$$

kümesi $A \times_C B$ kümesine izomorf olur.



$$\begin{aligned} \varepsilon: A \times_C B &\longrightarrow \alpha^{-1}(A) \\ (a, b) &\longmapsto ? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f: A \times_C B &\longrightarrow A \\ (a, b) &\longmapsto a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j: \alpha^{-1}(B) &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi: \alpha^{-1}(B) &\longrightarrow B \\ a &\longmapsto b \end{aligned}$$

olsun. $j\varepsilon = f$ olmalı. Her $(a, b) \in A \times_C B$ için

$$\begin{aligned} (j\varepsilon)(a, b) &= j(\varepsilon(a, b)) \\ &= \varepsilon(a, b) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \varepsilon(a, b) &= j\varepsilon(a, b) \\ &= f(a, b) \\ &= a \end{aligned}$$

olup $\varepsilon(a, b) = a$ almalıyız. Yani

$$\begin{aligned} \varepsilon: A \times_C B &\longrightarrow \alpha^{-1}(B) \\ (a, b) &\longmapsto a \end{aligned}$$

olmalı.

$$\begin{aligned} j\varepsilon(a, b) &= j(a) \\ &= a \\ &= f(a, b) \end{aligned}$$

olup $j\varepsilon = f$ olur. Diğer taraftan;

$$\begin{aligned} \phi\varepsilon(a, b) &= \phi(a) \\ &= b \\ &= g(a, b) \end{aligned}$$

olup $\phi\varepsilon = g$ olur. Şimdi ε nun tekliğini gösterelim.

$\varepsilon, \varepsilon'$ ile aynı özellikte olsun.

$$\begin{aligned} \varepsilon': A \times_C B &\longrightarrow \alpha^{-1}(B) \\ (a, b) &\longmapsto x \end{aligned}$$

$j\varepsilon' = f$ ve $\phi\varepsilon' = g$ olsun.

$$\begin{aligned} j\varepsilon'(a,b) &= \varepsilon'(a,b) \\ &= f(a,b) \\ &= a \\ &= \varepsilon(a,b) \end{aligned}$$

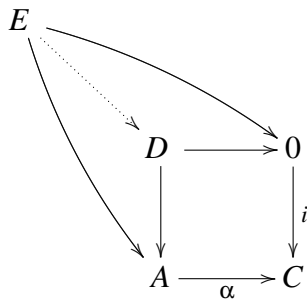
olup $\varepsilon' = \varepsilon$ dur. Yani ε biriciktir.

$\alpha^{-1}(B)$, (α, β) nın geri çekme objesi olup geri çekme obje izomorfizm farkıyla biricik olduğundan

$$\alpha^{-1}(B) = A \times_C B$$

dir.

2) Gruplar kategorisinde geri çekme diyagramında $B = 0$ alınırsa;

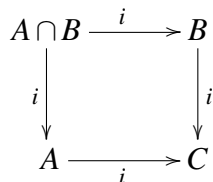


için geri çekme obje $0 \subseteq C$,

$$\begin{aligned} A \times_C B \cong \alpha^{-1}(B) &= \{a \in A \mid \alpha(a) \in B\} \\ &= \{a \in A \mid \alpha(a) \in 0\} \\ &= \{a \in A \mid \alpha(a) = 0\} \\ &= \text{Ker}\alpha \end{aligned}$$

olur.

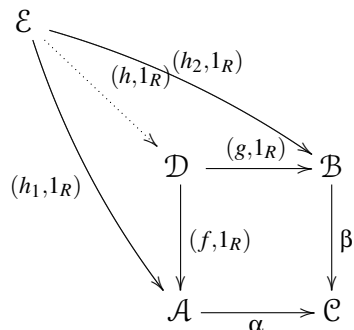
3) $A \trianglelefteq C$ ve $B \trianglelefteq C$ alınırsa geri çekme obje;



$$\begin{aligned} \alpha^{-1}(B) &= \{a \in A \mid i(a) \in B\} \\ &= \{a \in A \mid a \in B\} \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

6.2 Çaprazlanmış Modüller Kategorisinde Geri Çekme Objeleri

$\mathcal{A} = (\partial_A \rightarrow R)$, $\mathcal{B} = (\partial_B \rightarrow R) \in \text{Ob}(\mathbf{XMod}/R)$ olsun.



$$D = \{(a, b) \mid \alpha(a) = \beta(b)\}$$

R -cebiri olmak üzere

$$\begin{aligned} \partial_D : A \times_C B &\longrightarrow R \\ (a, b) &\longmapsto \partial_A(a) = \partial_B(b) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & C \\ \partial_A \searrow & & \swarrow \partial_C \\ & R & \end{array}$$

$$\partial_C \alpha = \partial_A$$

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\beta} & C \\ \partial_B \searrow & & \swarrow \partial_C \\ & R & \end{array}$$

$$\partial_C \beta = \partial_B$$

$$\begin{aligned} \partial_A(a) &= \partial_C \alpha(a) \\ &= \partial_C(\alpha(a)) \\ &= \partial_C(\beta(b)) \\ &= \partial_C \beta(b) \\ &= \partial_B(b) \end{aligned}$$

olup $\partial_A = \partial_B$ dir.

$$\begin{aligned} R \times (A \times_C B) &\longrightarrow A \times_C B \\ (r, (a, b)) &\longmapsto (r \cdot (a, b)) = (r \cdot a, r \cdot b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(r \cdot a) &= r\alpha(a) \quad (\because \alpha \text{ çaprazlanmış modül morfizmi}) \\ &= r\beta(b) \\ &= \beta(r \cdot b) \quad (\because \beta \text{ çaprazlanmış modül morfizmi}) \end{aligned}$$

olup $\alpha(r \cdot a) = \beta(r \cdot b)$ dir.

$$\begin{aligned}
 \text{ÇM2) } \partial_D(a, b) \cdot (a', b') &= \partial_A(a)(a', b') \\
 &= (\partial_A(a)a', \partial_A(a)b') \\
 &= (\partial_A(a)a', \partial_B(b)b') \\
 &= (aa', bb') \quad (\because \partial_A, \partial_B \in x\text{Mod}/R) \\
 &= (a, b)(a', b')
 \end{aligned}$$

olup ∂_D bir çaprazlanmış modüldür.

$(f, 1_R)$ nin bir çaprazlanmış R -modül morfizmi olduğunu gösterelim;

$$\begin{aligned}
 f: A \times_C B &\longrightarrow A \\
 (a, b) &\longmapsto a
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{f} & A \\
 & \searrow \partial_D & \swarrow \partial_A \\
 & R &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_A f(a, b) &= \partial_A(a) \\
 &= \partial_D(a, b)
 \end{aligned}$$

olup $\partial_A f = \partial_D$ dir.

$$\begin{array}{ccc}
 R \times (A \times_C B) & \longrightarrow & R \times A \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A \times_C B & \longrightarrow & A \\
 (r, (a, b)) & \longrightarrow & (r, a) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 r \cdot (a, b) & \longrightarrow & r \cdot a
 \end{array}$$

olup $(f, 1_R)$ bir çaprazlanmış R -modül morfizmi. Benzer şekilde $(g, 1_R)$ ninde bir çaprazlanmış R -modül morfizmi olduğu gösterilir.

$$\begin{aligned}
 \alpha f(a, b) &= \alpha(a) \\
 &= \beta(b) \\
 &= \beta(g(a, b)) \\
 &= \beta g(a, b)
 \end{aligned}$$

olup $\alpha f = \beta g$ dir.

$$\begin{aligned}
 h: E &\longrightarrow A \times_C B \\
 e &\longmapsto (h_1(e), h_2(e))
 \end{aligned}$$

bir çaprazlanmış modül homomorfizmidir.

$$\begin{aligned} fh(e) &= f(h_1(e), h_2(e)) \\ &= h_1(e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} gh(e) &= g(h_1(e), h_2(e)) \\ &= h_2(e) \end{aligned}$$

yani $fh = h_1$ ve $gh = h_2$ dir.

h nin tekliği :

h, h' ile aynı özellikte olsun.

$$\begin{aligned} h' : E &\longrightarrow A \times_C B \\ e &\longmapsto (a, b) \end{aligned}$$

çaprazlanmış modül homomorfizmidir, $fh' = h_1$ ve $gh' = h_2$ dir.

$$\begin{aligned} fh'(e) &= f(a, b) \\ &= a \\ &= h_1(e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} gh'(e) &= g(a, b) \\ &= b \\ &= h_2(e) \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} h'(e) &= (a, b) \\ &= (h_1(e), h_2(e)) \\ &= h(e) \end{aligned}$$

olur. Yani $h' = h$ dır ve h biriciktir.

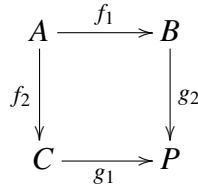
BÖLÜM 7

İleri İtme OBJE

7.1 Kategorilerde İleri itme Objje

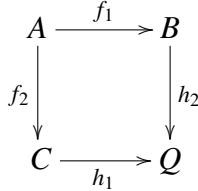
Tanım 7.1 \mathcal{C} kategorisinde $f_1 : A \rightarrow B$, $f_2 : A \rightarrow C$ morfizmleri verilsin.

i)

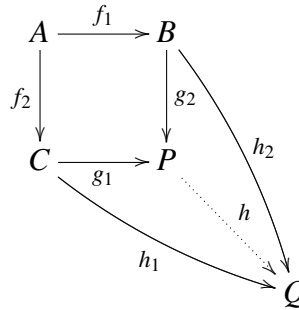


diyagramı değişmeli olacak şekilde $g_1 : C \rightarrow P$, $g_2 : B \rightarrow P$ morfizmleri var olmalı.

ii) Q objesi ve



diyagramı değişmeli olacak şekilde $h_1 : C \rightarrow Q$, $h_2 : B \rightarrow Q$ morfizmleri verildiğinde



diyagramı değişmeli (yani $hg_1 = h_1$ ve $hg_2 = h_2$) olacak şekilde biricik $h : P \rightarrow Q$ morfizmi var olmalı;

şartları sağlanıyor ise (P, g_1, g_2) ye (kısaca P ye) (f_1, f_2) nin ileri itmesi denir.

Örnek 7.1 \mathcal{C} , (sağ veya sol) modüller kategorisi olmak üzere her zaman ileri itme objesi vardır.

$f_1 : T \longrightarrow M$, $f_2 : T \longrightarrow N$ modül homomorfizmleri verilsin.

$$\begin{aligned} \delta : T &\longrightarrow M \oplus N \\ x &\longmapsto (f_1(x), -f_2(x)) \end{aligned}$$

homomorfizmini tanımlayalım.

$$\begin{aligned} T &\xrightarrow{\delta} M \oplus N \xrightarrow{\pi} (M \oplus N)/\text{Im}\delta \\ \text{Ker}\pi &= \text{Im}\delta \\ (f_1(x), -f_2(x)) &= \delta(x) \in \text{Ker}\pi \\ &= (f_1(x), 0) - (0, f_2(x)) \\ &= \delta(x) \\ \pi((f_1(x), 0) - (0, f_2(x))) &= 0 \\ &\Leftrightarrow \pi((f_1(x), 0)) = \pi(0, f_2(x)) \end{aligned}$$

Bunun anlamı;

$$\begin{aligned} M &\xrightarrow{i_1} M \oplus N \xrightarrow{\pi} P = (M \oplus N)/\text{Im}\delta \\ g_2 : \pi i_1 : M &\longrightarrow P \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} N &\xrightarrow{i_2} M \oplus N \xrightarrow{\pi} P = (M \oplus N)/\text{Im}\delta \\ g_1 : \pi i_2 : N &\longrightarrow P \end{aligned}$$

homomorfizmleri vardır.

i)

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f_1} & M \\ f_2 \downarrow & & \downarrow g_2 \\ N & \xrightarrow{g_1} & P \end{array}$$

Her $x \in T$ için

$$\begin{aligned} (g_1 f_2)(x) &= (\pi i_2 f_2)(x) \\ &= (\pi i_2)(f_2(x)) \\ &= \pi(i_2(f_2(x))) \\ &= \pi(0, f_2(x)) \\ &= \pi(f_1(x), 0) \\ &= \pi(i_1(f_1(x))) \\ &= (\pi i_1)(f_1(x)) \\ &= (\pi i_1 f_1)(x) \\ &= (g_2 f_1)(x) \end{aligned}$$

olup

$$g_1 f_2 = g_2 f_1$$

yani diyagram değişmelidir.

ii)

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f_1} & M \\ f_2 \downarrow & & \downarrow h_2 \\ N & \xrightarrow{h_1} & Q \end{array}$$

değişmeli diyagramı ($h_1 f_2 = h_2 f_1$) verilsin.

$$\begin{aligned} h_2 \oplus h_1 : M \oplus N &\longrightarrow Q \\ (m, n) &\longmapsto h_2(m) + h_1(n) \end{aligned}$$

homomorfizmini tanımlayalım.

$$\begin{array}{ccc} M \oplus N & \xrightarrow{h_2 \oplus h_1} & Q \\ \pi \downarrow & \nearrow h & \\ (M \oplus N) / \text{Im} f & & \end{array}$$

h nin biricik olduğunu gösterelim. Bunun için (evrensellik özelliğinden)

$$(h_2 \oplus h_1)(\text{Im} f) = \{0\}$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$$\begin{aligned} \delta : T &\longrightarrow M \oplus N \\ x &\longmapsto (f_1(x), -f_2(x)) \end{aligned}$$

$\text{Im} \delta \subseteq M \oplus N$ ve $(h_2 \oplus h_1)(\text{Im} f) = \{0\}$ olduğundan diyagram değişmeli olacak şekilde biricik

$$h : (M \oplus N) / \text{Im} \delta \longrightarrow Q$$

homomorfizmi vardır. $(h_2 \oplus h_1)(\text{Im} \delta) = \{0\}$ olduğunu gösterelim. Her $x \in T$ için

$$\begin{aligned} (h_2 \oplus h_1)(\delta(x)) &= (h_2 \oplus h_1)(f_1(x), -f_2(x)) \\ &= h_2(f_1(x)) - h_1(f_2(x)) \\ &= (h_2 f_1)(x) - (h_1 f_2)(x) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\because h_2 f_1 = h_1 f_2)$$

ise $(h_2 \oplus h_1)(\text{Im} \delta) = \{0\}$ dır. Bu durumda

$$\begin{aligned} h : P &\longrightarrow Q \\ [(m, n)] &\longmapsto h_1(m) + h_1(n) \end{aligned}$$

biricik homomorfizmi vardır. Son olarak diyagramın değişmeli ($hg_1 = h_1, hg_2 = h_2$) olduğunu gösterelim.

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{f_1} & M \\
 f_2 \downarrow & & \downarrow g_2 \\
 N & \xrightarrow{g_1} & (M \oplus N)/\text{im}f \\
 & \searrow h_1 & \downarrow h \\
 & & Q
 \end{array}$$

Her $n \in N$ için

$$\begin{aligned}
 (hg_1)(n) &= h(g_1(n)) \\
 &= h((\pi i_2)(n)) \quad (\because g_1 = \pi i_2) \\
 &= h(\pi(i_2(n))) \\
 &= h(\pi(0, n)) \\
 &= h([(0, n)]) \\
 &= h_2(0) + h_1(n) \quad (\because h \text{ nin tanımı}) \\
 &= 0 + h_1(n) \\
 &= h_1(n)
 \end{aligned}$$

olup $hg_1 = h_1$ dir.

Her $m \in M$ için

$$\begin{aligned}
 (hg_2)(m) &= h(g_2(m)) \\
 &= h((\pi i_1)(m)) \\
 &= h(\pi(i_1(m))) \\
 &= h(\pi(m, 0)) \\
 &= h([(m, 0)]) \\
 &= h_2(m) + h_1(0) \\
 &= h_2(m) + 0 \\
 &= h_2(m)
 \end{aligned}$$

olup $hg_2 = h_1$ dir. Böylece $(M \oplus N)/\text{Im}\delta(f_1, f_2)$ nin ileri itmesidir.

7.2 Çaprazlanmış Modüller Kategorisinde İleri İtme Obje

$\mathcal{A} = (A \xrightarrow{\partial_A} R), \mathcal{B} = (B \xrightarrow{\partial_B} R), \mathcal{C} = (C \xrightarrow{\partial_C} R) \in \text{Ob}(\mathbf{XMod}/R)$ morfizmleri verilsin.

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & B \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C & \longrightarrow & (B \times C)/N \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & Q
 \end{array}$$

$(B \times C)/N$ nin bir çaprazlanmış modül olduğunu gösterelim. Burada $N; \langle (f_1(a), -f_2(a)) \rangle$ ile $(\partial_C(c) \cdot b', -\partial_B(b') \cdot c)$ elemanlarından oluşur.

$$\begin{aligned} \partial' : (B \times C)/N &\longrightarrow R \\ (b, c) + N &\longmapsto \partial_B(b) + \partial_C(c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R \times (B \times C)/N &\longrightarrow (B \times C)/N \\ (r(b, c) + N) &\longmapsto r \cdot ((b, c) + N) = r \cdot (b, c) + N \\ &= (r \cdot b, r \cdot c) + N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ÇM1) } \partial'(r \cdot ((b, c) + N)) &= \partial'((r \cdot b, r \cdot c) + N) \\ &= \partial_B(r \cdot b) + \partial_C(r \cdot c) \\ &= r\partial_B(b) + r\partial_C(c) \\ &= r(\partial_B(b) + \partial_C(c)) \\ &= r\partial'((b, c) + N) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ÇM2) } \partial'((b, c) + N) \cdot ((b', c') + N) &= (\partial_B(b) + \partial_C(c)) \cdot ((b', c') + N) \\ &= ((\partial_B(b) + \partial_C(c)) \cdot b', (\partial_B(b) + \partial_C(c)) \cdot c') + N \\ &= (\partial_B(b) \cdot b' + \partial_C(c) \cdot b', \partial_B(b) \cdot c' + \partial_C(c) \cdot c') + N \\ &= (bb' + \partial_C(c) \cdot b', \partial_B(b) \cdot c' + cc') + N \end{aligned}$$

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} ((b, c) + N)((b', c') + N) &= (bb', b' \cdot c + b \cdot c' + cc') + N \\ &= (bb', \partial_B(b') \cdot c + \partial_B(b) \cdot c' + cc') + N \end{aligned}$$

olup

$$(bb' + \partial_C(c) \cdot b', \partial_B(b) \cdot c' + cc') + N = (bb', \partial_B(b') \cdot c + \partial_B(b) \cdot c' + cc') + N$$

olmalıdır.

$$\begin{aligned} &(bb' + \partial_C(c) \cdot b', \partial_B(b) \cdot c' + cc') + N = (bb', \partial_B(b') \cdot c + \partial_B(b) \cdot c' + cc') + N \\ \Rightarrow &(bb' + \partial_C(c) \cdot b' - bb', \partial_B(b) \cdot c' + cc' - \partial_B(b') \cdot c - \partial_B(b) \cdot c' - cc') \in N \\ \Rightarrow &(\partial_C(c) \cdot b', -\partial_B(b') \cdot c) \in N \end{aligned}$$

olup $(B \times C)/N$ bir çaprazlanmış R -modüldür.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{f_1} & \mathcal{B} \\ f_2 \downarrow & & \downarrow g_1 \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{g_2} & \mathcal{D} \end{array}$$

f_1, f_2 çaprazlanmış R -modül morfizmleri olmak üzere diyagramın değişmeli olduğunu ($g_1 f_1 = g_2 f_2$) gösterelim.

$$\begin{aligned} g_1 : B &\longrightarrow (B \times C)/N \\ b &\longmapsto (b, 0) + N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2 : C &\longrightarrow (B \times C)/N \\ c &\longmapsto (0, c) + N \end{aligned}$$

olsun g_1 ve g_2 nin çaprazlanmış R -modül morfizmleri olduğunu gösterelim.

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{g_1} & (B \times C)/N \\ \partial_B \downarrow & & \downarrow \partial' \\ R & \xrightarrow{Id_R} & R \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} R \times B & \xrightarrow{(Id_R, g_1)} & R \times ((B \times C)/N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{g_1} & (B \times C)/N \end{array}$$

i)

$$\begin{aligned} \partial'(g_1)(b) &= \partial'(g_1(b)) \\ &= \partial'((b, 0) + N) \\ &= \partial_B(b) + \partial_C(0) \\ &= \partial_B(b) + 0_R \\ &= \partial_B(b) \\ &= Id_R(\partial_B(b)) \\ &= (Id_R \partial_B)(b) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} g_1(r \cdot b) &= (r \cdot b, 0) + N \\ &= (r \cdot b, r \cdot 0) + N \\ &= r \cdot (b, 0) + N \\ &= r \cdot ((b, 0) + N) \\ &= r \cdot g_1(b) \\ &= Id_R(r) \cdot g_1(\cdot b) \end{aligned}$$

olup g_1 bir $xMod/R$ morfizmidir.

$$\begin{aligned} g_1 f_1(a) &= g_1(f_1(a)) \\ &= (f_1(a), 0) + N \end{aligned}$$

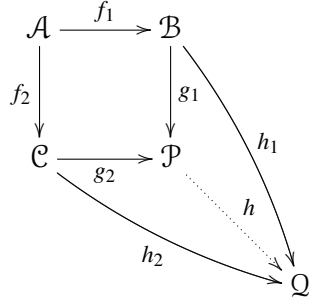
$$\begin{aligned} (g_2 f_2)(a) &= g_2(f_2(a)) \\ &= (0, f_2(a)) + N \end{aligned}$$

ise

$$\begin{aligned} (f_1(a), 0) + N &= (0, f_2(a)) + N \\ \Rightarrow (f_1(a), -f_2(a)) &\in N \end{aligned}$$

olup diyagramımız değişmelidir.

Şimdi $\mathcal{P} = (B \times C)/N$ ve $\mathcal{Q} = (Q \rightarrow R) \in \text{Ob}(\mathbf{XMod}/R)$ olmak üzere



diyagramını değişmeli yapacak biricik h morfizmi olduğunu gösterelim.

$$h : P = ((B \times C)/N) \longrightarrow R \\ (b, c) + N \longmapsto h_1(b) + h_2(c)$$

Diyagramın değişmeli olduğunu göstermek için $hg_1 = h_1$ ve $hg_2 = h_2$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} (hg_1)(b) &= h(g_1(b)) \\ &= h((b, 0) + N) \\ &= h_1(b) + h_2(0) \\ &= h_1(b) \end{aligned}$$

ve benzer şekilde $hg_2 = h_2$ olduğu gösterilir.

h nin tekliği :

h', h ile aynı özellikte ($h'g_1 = h_1$ ve $h'g_2 = h_2$) bir morfizm olsun.

$$h' : (B \times C)/N \longrightarrow R \\ (b, c) + N \longmapsto x$$

$$\begin{aligned} h'g_1(b) &= h'(g_1(b)) \\ &= h'((b, 0) + N) \\ &= h_1(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (h'g_2)(c) &= h'(g_2(c)) \\ &= h'((0, c) + N) \\ &= h_2(c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'((b, c) + N) &= h'((b, 0) + N, (0, c) + N) \\ &= h'((b, 0) + N) + h'((0, c) + N) \\ &= h_1(b) + h_2(c) \\ &= h((b, c) + N) \end{aligned}$$

olup $h = h'$ dür.

BÖLÜM 8

Eşitleyici Obje

8.1 Kategorilerde Eşitleyici Obje

Tanım 8.1 \mathcal{C} herhangi bir kategori olsun. $A \xrightarrow{f} B$ ve $A \xrightarrow{g} B$ ($f \neq g$) morfizmleri verilsin.

EQ1)

$$E \xrightarrow{j} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$
$$fj = gj$$

EQ2) C test objesi olmak üzere $h : C \rightarrow A$ ve $fh = gh$ verildiğinde

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{j} & A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \\ \uparrow k & \nearrow h & \\ C & & \end{array}$$

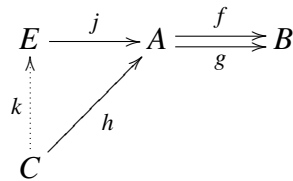
diyagramı değişmeli ($jk = h$) olacak şekilde biricik $k : C \rightarrow E$ morfizmi vardır. Şartları sağlanıyor ise (E, j) ikilisine (kısaca j) (f, g) nin eşitleyicisi denir. E ye ise eşitleyici obje denir.

Sonuç 8.2 Eşitleyici, geri çekmenin çok özel bir halidir.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{j} & A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \\ \uparrow k & \nearrow h & \\ C & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} C & & & & \\ & \searrow h & & & \\ & & E & \xrightarrow{j} & A \\ & & \downarrow j & & \downarrow g \\ & & A & \xrightarrow{f} & B \\ & \nearrow h & & & \end{array}$$

Örnek 8.1 \mathcal{C} , kümeler kategorisi olsun.



$$E = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\} \subseteq A$$

kümesini tanımlayalım.

$$\begin{aligned} j: E &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto j(a) = a \end{aligned}$$

olur.

EQ1)

$$\begin{aligned} fj(a) &= f(a) \\ &= g(a) \\ &= g(j(a)) \\ &= gj(a) \end{aligned}$$

olup $fj = gj$ dir.

EQ2)

$$\begin{aligned} k: C &\longrightarrow E \\ c &\longmapsto k(c) = h(c) \\ fh = gh &\Rightarrow f(h(c)) = g(h(c)) \\ &\Rightarrow h(c) \in H \end{aligned}$$

yani $k(c) = h(c)$ olarak tanımlanabilir. Bu durumda her $c \in C$ için

$$\begin{aligned} jk(c) &= j(k(c)) \\ &= k(c) \\ &= h(c) \end{aligned}$$

olup $jk = h$ olur. Yani diyagram değişmelidir.

k nın teklifi :

k' , k ile aynı özellikğe sahip diğer bir fonksiyon olsun. Bu durumda $k'C \longrightarrow E$ bir morfizm ve $jk' = h$ olur. Her $c \in C$ için

$$\begin{aligned} jk'(c) &= j(k'(c)) \\ &= k'(c) \\ &= h(c) \\ &= j(k(c)) \\ &= k(c) \end{aligned}$$

olup $k'(c) = k(c)$ dir. Yani $k' = k$ olup k biriciktir.

Örnek 8.2

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^2 + y^2 \\ g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

fonksiyonlarının eşitleyici objesi

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f(x, y) = g(x, y) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1\}$$

şeklinde birim çemberdir.

$$\begin{aligned} j: E &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto (x, y) \\ k: C &\longrightarrow E \\ c &\longmapsto k(c) = h(c) \\ h: C &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ c &\longmapsto h(c) = (x, y) \end{aligned}$$

Uyarı 8.3 Her kategoride eşitleyici obje olmayabilir.

Örnek 8.3 \mathcal{C} kategorisi, objeleri iki elemanlı kümelerden oluşan bir kategori olsun.

$$E = (e_1, e_2) \longrightarrow A = (a_1, a_2) \rightrightarrows B = (b_1, b_2)$$

$(E, j), (f, g)$ nin eşitleyicisi olduğunu kabul edelim. Bu durumda $f = g$ olur. Bu ise çelişkidir ($f \neq g$ olmalı). O halde \mathcal{C} kategorisinin eşitleyici objesi yoktur.

Teorem 8.4 (E, j) eşitleyici ise j moniktir.

İspat: $(E, j), (f, g)$ nin eşitleyici ise

$$E \xrightarrow{j} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

$fj = gj$ dir.

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} E \xrightarrow{j} A$$

$$j\alpha = j\beta \Rightarrow \alpha = \beta$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{array}{ccccc}
 E & \xrightarrow{j} & A & \xrightleftharpoons[g]{f} & B \\
 \uparrow \alpha & & \nearrow h & & \\
 X & & & & \\
 \downarrow \beta & & & &
 \end{array}$$

değişmeli diyagramı verilsin. $fj = gj, h = j\alpha, h = j\beta$ ($\cdot: (E, j), (f, g)$) nin eşitleyicisi

$$\begin{aligned}
 fh &= f(j\alpha) \\
 &= (fj)\alpha \\
 &= (gj)\alpha \\
 &= g(j\alpha) \\
 &= gh
 \end{aligned}$$

olup $fh = gh$ dir. j eşitleyici olduğundan $k : X \rightarrow E$ biricik morfizm $jk = h$ olacak şekilde vardır. $jk = h$ ve $j\alpha = h = j\beta$ ise

$$\begin{aligned}
 jk &= j\alpha \\
 &= j\beta \\
 \Rightarrow k &= \alpha \\
 &= \beta \\
 \Rightarrow \alpha &= \beta
 \end{aligned}$$

dir. Yani j moniktir.

Teorem 8.5 Eşitleyici obje izomorfizm farkıyla biriciktir.

İspat: (E, j) ve $(E', j'), (f, g)$ nin equalizerları olsun.

$$\begin{array}{ccccc}
 E & \xrightarrow{j} & A & \xrightleftharpoons[g]{f} & B \\
 \uparrow k' & & \nearrow j' & & \\
 E' & & & & \\
 \downarrow k & & & &
 \end{array}$$

$(E, j), (f, g)$ nin eşitleyicisi olduğundan $fj = gj$ ve $jk = j'$ olacak şekilde biricik k morfizmi vardır.

$(E', j'), (f, g)$ nin eşitleyicisi olduğundan $fj' = gj'$ ve $j'k = j$ olacak şekilde biricik k' morfizmi vardır. Buna göre;

$$\begin{aligned}
 j(kk') &= (jk)k' \\
 &= j'k' \\
 &= j
 \end{aligned}$$

ise $j(kk') = j$ olup $kk' = 1_E(\cdot: k, k'$ biricik) dir. Diğer taraftan $j(kk') = j'$ olup $k'k = 1_{E'}(\cdot: k, k'$ biricik) dir. Buradan $E \cong E'$ olur. Yani eşitleyici obje izomorfizm farkıyla biriciktir.

8.2 Çaprazlanmış Modüller Kategorisinde Eşitleyici Objeye

\mathbf{XMod}/R kategorisinde $\mathcal{E} = (E \xrightarrow{\partial_E} R)$, $\mathcal{A} = (A \xrightarrow{\partial_A} R)$, $\mathcal{B} = (B \xrightarrow{\partial_B} R) \in Ob(\mathbf{XMod}/R)$ olsun.

$$\mathcal{E} \xrightarrow{j} \mathcal{A} \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} \mathcal{B}$$

$$E = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\} \subseteq A$$

$$\begin{aligned} \partial_E: E &\longrightarrow R \\ a &\longmapsto \partial_E(a) = \partial_A(a) \end{aligned}$$

i) $(1_R, j)$ nin \mathbf{XMod}/R morfizmi olduğunu gösterelim.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{j} & A \\ & \searrow \partial_E & \swarrow \partial_A \\ & R & \end{array}$$

Her $a \in E$ için

$$\begin{aligned} \partial_A j(a) &= \partial_A(j(a)) \\ &= \partial_A(a) \\ &= \partial_E(a) \end{aligned}$$

olup $\partial_A j = \partial_E$ dir.

$$\begin{array}{ccc} R \times E & \xrightarrow{(Id_R, j)} & R \times A \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \longrightarrow & A \\ (r, a) & \longrightarrow & (r, a) \\ \downarrow & & \downarrow \\ r \cdot a & \longrightarrow & r \cdot a \end{array}$$

olup $(1_R, j) \in Mor(\mathbf{XMod}/R)$ dir.

EQ1)

$$\mathcal{E} \xrightarrow{j} \mathcal{A} \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} \mathcal{B}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 E & \xrightarrow{j} & A & \xrightleftharpoons[g]{f} & B \\
 \downarrow \partial_E & & \downarrow \partial_A & & \downarrow \partial_B \\
 R & \xrightarrow{Id_R} & R & \xrightarrow{Id_R} & R
 \end{array}$$

iç diyagramlar değişmeli olduğundan dış diyagramda değişmeli olup $fj = gj$ dir.

EQ2)

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{E} & \xrightarrow{j} & \mathcal{A} & \xrightleftharpoons[g]{f} & \mathcal{B} \\
 \uparrow k & & \nearrow h & & \\
 \mathcal{C} & & & &
 \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde biricik $k : C \rightarrow E \in Mor(\mathbf{XMod}/R)$ bulmalıyız.

$$\begin{aligned}
 k : C &\rightarrow E \\
 c &\mapsto k(c) = h(c)
 \end{aligned}$$

Her $c \in C$ için

$$\begin{aligned}
 (jk)(c) &= j(k(c)) \\
 &= j(h(c)) \\
 &= h(c)
 \end{aligned}$$

ise $h = jk$ dır.

k nın tekliği :

k, k' ile aynı özellikte bir morfizm olsun. Bu durumda $h = jk$ ve $h = jk'$ olduğundan ; $jk = jk'$ olur.

$$\begin{aligned}
 \text{Her } c \in C \text{ için } (jk)(c) &= (jk')(c) \\
 \text{Her } c \in C \text{ için } j(k(c)) &= j(k'(c)) \\
 \text{Her } c \in C \text{ için } k(c) &= k'(c)
 \end{aligned}$$

olup $k = k'$ dür. Yani k biriciktir.

Böylece $(E, j), (f, g)$ nin eşitleyicisidir.

BÖLÜM 9

Ko-Eşitleyici Obje

Tanım 9.1 \mathcal{C} bir kategori olsun. $f : X \rightarrow Y, g : X \rightarrow Y$ morfizmleri verilsin.

i)

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{h} & Q \\ & \xrightarrow{g} & & & \downarrow u \\ & & & & Q' \\ & & & \searrow k & \\ & & & & \end{array}$$

$$hf = hg$$

ii) Q' test objesi olmak üzere $q' : Y \rightarrow Q'$ ve $kf = kg$ verildiğinde

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{h} & Q \\ & \xrightarrow{g} & & & \downarrow u \\ & & & & Q' \\ & & & \searrow k & \\ & & & & \end{array}$$

diyagramı değişmeli ($uh = k$) olacak şekilde biricik $u : Q \rightarrow Q'$ morfizmi bulunabiliyorsa (Q, h) ikilisine (f, g) nin ko-eşitleyicisi ve Q yada ko-eşitleyici obje denir.

Örnek 9.1 $\mathcal{C} (Ab.Grup)$ kategorisi olsun. $f : A \rightarrow B, g : A \rightarrow B$ morfizmleri verilsin. $N,$

$$\{f(a) - g(a) \mid a \in A\}$$

kümesi tarafından üretilen küme olsun. Bu küme B nin normal alt grubudur. $C = B/N$ alalım.

$$\begin{aligned} h : B &\rightarrow B/N \\ b &\mapsto N + b = N \end{aligned}$$

tanımlayalım. Bu durumda h grup homomorfizmidir.

i)

$$\begin{aligned} hf = hg &\iff (hf - hg)(a) = 0 \\ &\iff h((f - g)(a)) = (f - g)(a) + N \\ &\iff &= N \\ &\iff (f - g)(a) \in N \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{h} & B/N \\
 & \xrightarrow{g} & & & \vdots \\
 & & & \searrow k & D
 \end{array}$$

$kf = kg$ verilsin. $k(N) = \{0\}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
 k((f - g))(a) &= (kf)(a) - (kg)(a) \\
 &= (kf)(a) - (kf)(a) \quad (\because kf = kg) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

9.1 Çaprazlanmış Modüller Kategorisinde Ko-Eşitleyici Obje

$\mathcal{A} = (\partial_A \longrightarrow R)$, $\mathcal{B} = (\partial_B \longrightarrow R) \in \mathbf{XMod}/R$ olsun.

$$\mathcal{A} \xrightarrow[g]{f} \mathcal{B} \longrightarrow B/I$$

$$I \trianglelefteq B; I = \langle f(a) - g(a) \mid a \in A \rangle$$

$$\begin{aligned}
 R \times B/I &\longrightarrow B/I \\
 (r, I+b) &\longmapsto r \cdot (I+b) = I + r \cdot b
 \end{aligned}$$

işlemlerle B/I , R -cebirdir.

$$\begin{aligned}
 \partial : B/I &\longrightarrow R \\
 I+b &\longmapsto \partial_B(b)
 \end{aligned}$$

tamınlansın.

$$\begin{aligned}
 \partial(I+b) \cdot (I+b') &= \partial_B(b) \cdot (I+b') \\
 &= I + \partial_B(b)b' \\
 &= I + bb' \\
 &= (I+b)(I+b')
 \end{aligned}$$

Ayrıca $I \subseteq \text{Ker} \partial_B$ dir. Çünkü;

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 & \xrightarrow{g} & \\
 \partial_A \swarrow & & \searrow \partial_B \\
 & R &
 \end{array}$$

$$\partial_B f = \partial_B g = \partial_A$$

olup her $a \in A$ için

$$\partial_B((f - g)(a)) = 0$$

dır.

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightleftharpoons[g]{f} & B & \xrightarrow{h} & C = B/I \\
 & \searrow \partial_A & \downarrow \partial_B & \swarrow \partial & \\
 & & R & & \\
 & & & & \\
 & & b & \longrightarrow & [b] \\
 & & \downarrow & \swarrow & \\
 & & \partial_B(b) & &
 \end{array}$$

Son olarak ;

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{A} & \xrightleftharpoons[g]{f} & \mathcal{B} & \xrightarrow{h} & \mathcal{C} \\
 & & \searrow k & & \downarrow l \\
 & & & & \mathcal{D}
 \end{array}$$

Ayrıca $k(I) = \{0\}$ olduğundan biricik

$$\begin{array}{ccc}
 l: & C & \longrightarrow D \\
 & I+b & \longmapsto k(b)
 \end{array}$$

vardır.

BÖLÜM 10

LİMİT ve KO-LİMİT

10.1 Kategorilerde Limit ve Ko-limit

Tanım 10.1 $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ fonktoru verilsin. $C \in Ob(\mathcal{C})$ için

$$p = (p_i)_{i \in Ob(\mathcal{D})=I} : \mathcal{D} \xrightarrow[\quad F]{\quad \Delta_C} \mathcal{C}$$

doğal transformasyonu varsa $(C, (P_i)_{i \in I})$ ikilisine F üzerinde bir kone denir. Daha açık olarak ; Δ_C sabit fonktor olmak üzere

$$p : \mathcal{D} \xrightarrow[\quad F]{\quad \Delta_C} \mathcal{C}$$

(veya $p : \Delta_C \Longrightarrow F$) doğal transformasyon ise

(a) Her $i \in Ob(\mathcal{D}) = I$ için

$$\begin{array}{ccc} p_i : \Delta_C(i) & \longrightarrow & F(i) \\ \parallel & & \parallel \\ C & & F(i) \end{array}$$

\mathcal{C} de morfizm

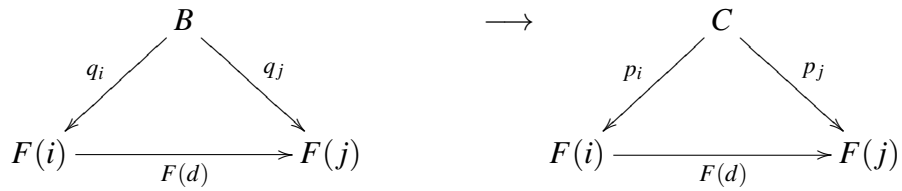
(b)

$$\begin{array}{ccc} \Delta_C(i) & \xrightarrow{p_i} & F(i) \\ \downarrow 1_C & & \downarrow F(d) \\ \Delta_C(j) & \xrightarrow{p_j} & F(j) \end{array}$$

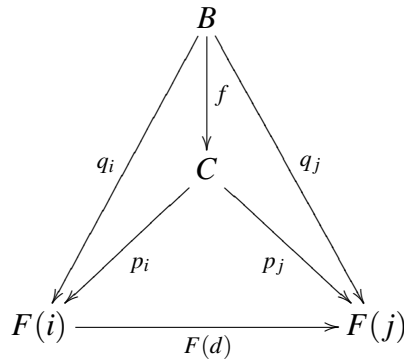
$$\begin{array}{ccc} & C & \\ p_i \swarrow & & \searrow p_j \\ F(i) & \xrightarrow{F(d)} & F(j) \end{array}$$

diyagramı değişmeli olmalıdır.

Tanım 10.2 $q : \Delta_C \Longrightarrow F$ ve $p : \Delta_C \Longrightarrow F$, F üzerinde iki kone verilsin. $f : q \longrightarrow p$ morfizmine konelar arasındaki morfizm denir. Açık olarak



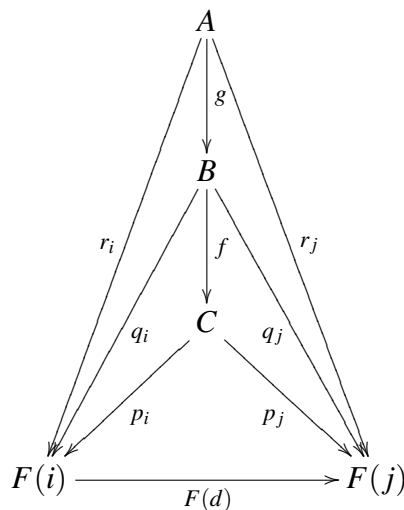
diyagramı



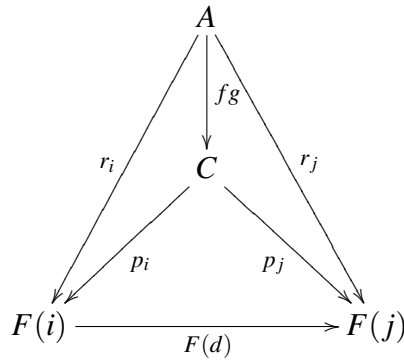
şeklinde değişmeli diyagramdan oluşur. Dolayısıyla $f : q \rightarrow p$ morfizmi, \mathcal{C} de $f : B \rightarrow C$ morfizmine dönüşür.

Yardımcı Teorem 10.3 $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ fonktoru verilsin. Konelar F üzerinde bir kategori oluşturur.

İspat : $r : \Delta_A \Rightarrow F$, $q : \Delta_B \Rightarrow F$, $p : \Delta_C \Rightarrow F$ koneları verilsin. $f : q \rightarrow p$ ve $g : r \rightarrow q$ morfizmler olmak üzere $fg : r \rightarrow p$ kone morfizmi olduğunu gösterelim. Daha açık olarak $d : i \rightarrow j \in \text{Mor}(\mathcal{D})$ için



olmak üzere



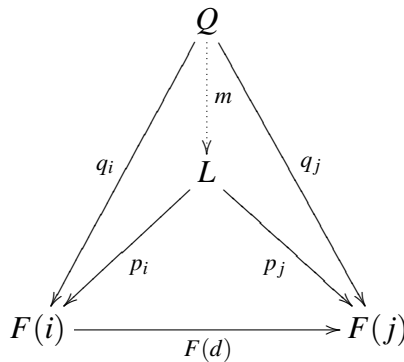
$p_i(fg) = r_i$ olduğunu göstermeliyiz.

$$p_i(fg) = (p_i f)g = q_i g = r_i$$

olup $fg : r \rightarrow p$, kone morfizmidir. Ayrıca (c, p_i) kone birim morfizmi $1_C : C \rightarrow C$ dir.

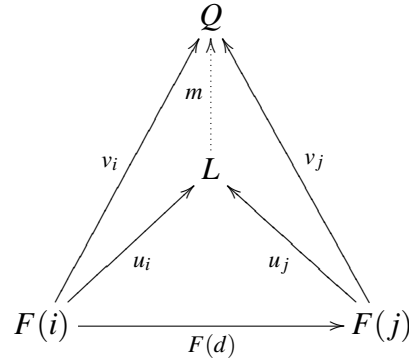
Bu kategori $\text{Kone}(F)$ ile gösterilir.

Tanım 10.4 $\text{Kone}(F)$ kategorisinin son nesnesine $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ fonktörünün bir limiti denir. Böylece her $q : \Delta_Q \Rightarrow F$ kone için $m : q \rightarrow l$ biricik morfizm varsa $l : \Delta_L \Rightarrow F$ kone'una F nin limiti denir. Diğer bir deyişle $i \in \text{Ob}(\mathcal{D}) = I$



değişmeli diyagramı için biricik m varsa $(p_i m = q_i)$ l kone'una F nin limiti denir ve $\text{Lim} F = L$ ile gösterilir.

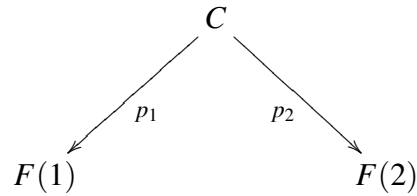
Limit ve kone kavramlarının dualine sırasıyla ko-limit ve kokone denir.

Tanım 10.5

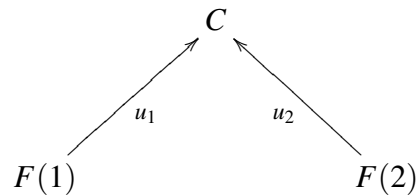
değişmeli diyagramı için biricik m varsa q kokone'una F nin ko-limiti denir ve $\text{Colim}F = L$ ile gösterilir.

ÖRNEKLER:

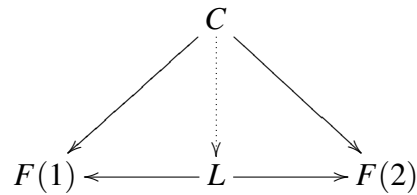
1) \mathcal{D} kategorisi $\text{Ob}(\mathcal{D}) = \{1, 2\}$ ve $1_1 : 1 \rightarrow 1, 1_2 : 2 \rightarrow 2 \in \text{Mor}(\mathcal{D})$ olsun. $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ fonktörünün, kone ; $p : \Delta_C \Rightarrow F$ doğal dönüşüm yani



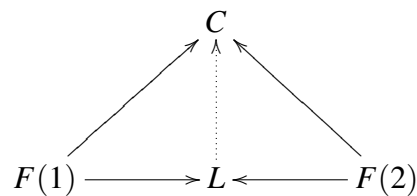
ve benzer şekilde kokone



bununla birlikte



$$F(1) \times F(2) = L = \text{Lim}F \text{ ve}$$

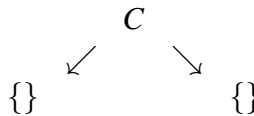


$$F(1) + F(2) = \text{Colim}F \text{ dir.}$$

2) \mathcal{D} boş kategori olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{ccc}
 F : \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\
 \{\} & \longmapsto & C
 \end{array}$$

funktorunun kone'u yalnız C objesidir. Çünkü



dir. Böylece $C = \text{Lim}F \iff C, \mathcal{C}$ nin don objesi. $C = \text{Colim}F \iff C, \mathcal{C}$ nin ilk objesi.

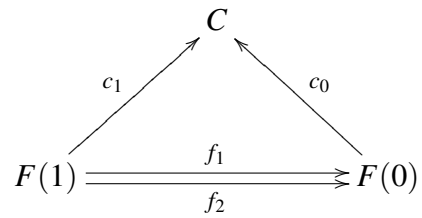
3) \mathcal{D} kategorisi, $\text{Ob}(\mathcal{D}) = \{1, 0\}$, $d_1 : 1 \longrightarrow 0$, $d_2 : 1 \longrightarrow 0 \in \text{Mor}(\mathcal{D})$ olarak verilsin. Bu durumda $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ fonktoru

$$F(\mathcal{D}) =
 \begin{array}{ccc}
 & E & \\
 \swarrow e_1 & & \searrow e_0 \\
 F(1) & \xrightarrow{f_1} & F(2) \\
 & \xrightarrow{f_2} &
 \end{array}$$

$F(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{C}$ Böylece F üzerinde kone $e : \Delta_E \implies F$ doğal dönüşüm olup

$$\begin{array}{ccc}
 & E & \\
 \swarrow e_1 & & \searrow e_0 \\
 F(1) & \xrightarrow{f_1} & F(0) \\
 & \xrightarrow{f_2} &
 \end{array}$$

şeklindeki değişmeli diyagramdır. Benzer olarak kone'nin duali olan kokone ise



dir. Böylece $(E, e_0, e_1) = \text{Lim}F \iff (E, e_0), f_1, f_2$ eşitleyicidir. Benzer şekilde ;

$(C, c_0, c_1) = \text{Colim}F \iff (C, c_0); f_1$ ve f_2 ko-eşitleyicidir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Pareigis, N. , 1970, Categories and Functors, Univercity of Munich, Germany

Oosten, J. ,V. , 2002, Basic Category Theory, Department of Mathematics Utrecht univercity
The Netherlands

Shammu, N. ,M. , 1992, Algebraic and Categorical Structure of Categories of Crossed Modules
of Algebras, The Univercit of Wales

Maclane, S. , 1971, Categories for the Working Mathematician

Gürmen, Ö. , 2007, Geri Çekme İleri İtme Çaprazlanmış Modüller Cat^1 – cebirler ve Simplisel
Cebirler, Doktora Tezi, ESOGÜ

Ummahan E. A. , 1998, Çaprazlanmış Modüller , Yüksek Lisans Tezi, ESOGÜ