Değişmeli Cebirler Üzerinde Çaprazlanmış Modüllerin Kategoriksel Özellikleri

Melik Demirci

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Ağustos 2011

Categorical Aspects of Crossed Modules of Commutative Algebras

Melik Demirci

MASTER DISSERTATION

Department of Mathematics

August 2011

Değişmeli Cebirler Üzerinde Çaprazlanmış Modüllerin Kategoriksel Özellikleri

Melik Demirci

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisans üstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik Anabilim Dalı

Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

Ağustos 2011

ONAY

Matematik Anabilim Dalı yüksek lisans öğrencisi Melik Demirci' ün YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı "**Değişmeli Cebirler Üzerinde Çaprazlanmış Modüllerin Kategoriksel Özellikleri**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Ummahan Ege ARSLAN

İkinci Danışman : –

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ummahan Ege ARSLAN

Üye : Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

Üye : Prof. Dr. Mahmut KOÇAK

Üye : Yrd. Doç. Dr. Alper ODABAŞ

Üye : Doç. Dr. Erdal ULUALAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tez on bölümden oluşmaktadır. Sıfırıncı bölümde çaprazlanmış modül kategorisi tanıtılmıştır. Birinci bölümde çaprazlanmış modüllerin obje ve morfizm özellikleri incelenmiştir. İkinci bölümde funktorlar ve funktoriyel örneklere yer verilmiştir. Üçüncü ve dördüncü bölümlerde çarpım ve ko-çarpım objeleri tanıtılmıştır. Beşinci ve altıncı bölümlerde geri çekme ve ileri itme objeleri çalışılmıştır. Yedinci ve sekizinci bölümlerde ise eşitleyici ve ko-eşitleyici objeler tanıtılmıştır. Dokuzuncu bölümde ise limit ve ko-limit objeler tanıtılmıştır. Bütün bölümlerde bu özelliklerin cebirler üzerinde çaprazlanmış modüller kategorisindeki karşılıkları incelenmiştir.

SUMMARY

This thesis consist of ten chapters. In the first chapter definition of crossed module is given. In the second chapter we studied properties of object and morfizms of crossed modules. The following chapters, product and co-product object, pullback and pushout object, equalizer and co-equalizer, limit and co-limit objects are all given. In all of this chapters we give the stucture of objects over categories of crossed modules of algebras.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamın her aşamasında bana danışmanlık ederek beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan değerli hocam, sayın,

Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ ’ye

ve her zaman yanımda olup beni destekleyen,

sevgili aileme ve **arkadaşlarıma**

sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 0

GİRİŞ

Birinci bölümde genel olarak kategori kavramını ve özel olarak değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modüller kategorisini tanıttık. Kategorilerin tanıtımdan sonra temel özellikler olan obje ve morfizm özelliklerini inceleyip bunların değişmeli cebirler üzrindeki çaprazlanmış modüller kategorisindeki karşılıklarını araştırdık. Ardından kategoriler arasında bağlantı kurabileceğimiz funktorları tanımladık. Funktorların bazı özelliklerini inceleyip örneklerle destekledik.

Bu kısımdan sonra kategorilerdeki özel objeleri inceledik. Dördüncü bölümde kategorilerde çarpım(product) objenin tanımı ile bazı kategorilerdeki örneklerini tanıtıp özel olarak değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modüller kategorisindeki karşılığını ve bunun dual kavramı ko-çarpım(coproduct) kavramını inceledik. Takip eden kısımlarda, yine özel objelerden geri çekme(pullback) ve bunun duali olan ileri itme(pushout) objelerini inceledik. Son olarak da eşitleyici(equalizer) ve bunun duali olan ko–eşitleyici(ko-equalizer) objeyi tanıttık.

Onuncu bölümde kone ve kokone kavramlarını tanımlayıp, bunlara bağılı olarak tanımlanan limit ve ko-limit kavramlarını tanımlayarak özel olarak değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modüller kategorisindeki karşılıklarını inceledik.

BÖLÜM 1

ÇAPRAZLANMIŞ MODÜL KATEGORİSİ

1.1 Kategoriler

Tanım 1.1 $\mathcal{C}$ ile göstereceğimiz kategori aşağıdaki verilen ve istenenleri sağlayan bir sistemdir.

Verilenler :

1) Objeler sınıfı : $Ob(\mathcal{C})$ ile göstereceğimiz, elemanları $X, Y, A, B, \ldots$ olan objeler sınıfı.

2) Morfizmler kümesi : X, Y objeleri için

$$\mathcal{C}(X;Y) = Mor_{\mathcal{C}}(X,Y) = \{f \mid f : X \to Y\}$$

şeklinde ifade edilen, elemanları morfizm (ok) olarak adlandırılan küme.

3) Kompozisyon : $Ob(\mathcal{C})$ de her X, Y, Z objeleri için

$$\begin{array}{rccl} k^Y_{X,Z} : & Mor_{\mathcal{C}}(X,Y) \times Mor_{\mathcal{C}}(Y,Z) & \longrightarrow & Mor_{\mathcal{C}}(X,Z) \\ & (f,g) & \longmapsto & k^Y_{X,Z}(f,g) = g \circ f = gf \end{array}$$

İstenenler:

(K_1) : Her $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$, her $g \in Mor_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ ve her $h \in Mor_{\mathcal{C}}(Z,W)$ için

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

dir.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h(gf)=(hg)f"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "gf"] & W \\ Y \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, "hg"] & Z \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

(K_2) : $Ob(\mathcal{C})$ deki her X objesi için $Id_X : X \to X$ şeklinde bir morfizm var olup her $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$ için $f \circ Id_X = f$ ve $Id_Y \circ f = f$ şeklindedir.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"'] \arrow[dr, "f1_X"] & Y \\
X \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, "1_Y f"'] & Y \arrow[u, "1_Y"']
\end{tikzcd}
$$

Örnek 1.1 Kümeler Kategorisi ($\mathcal{S}$)

1) $Ob(\mathcal{S})$: Kümeler sınıfı

2) $Mor_s(X,Y) = \{f \mid f : X \to Y \text{ fonksiyon }\}$

3) Her $f,g \in Mor_s$ için $g \circ f$ kompozisyonu g ile f nin bileşkesidir.

Örnek 1.2 Gruplar Kategorisi (**Grp**)

1) $Ob(\mathbf{Grp})$: Grupların sınıfı

2) $Mor(X,Y) = Hom(X,Y) = \{f \mid f : X \to Y \text{ grup homomorfizmi }\}$

3) Her $f,g \in Mor_G$ için $g \circ f$ kompozisyonu g ile f nin bilinen bileşke işlemidir.

Örnek 1.3 Abelyen Gruplar Kategorisi (**Ab**.**Grp**)

Ab.**Grp** : Tüm Abelyen Grupların Kategorisi

1) $Ob(\mathbf{Ab}.\mathbf{Grp})$: Abelyen grupların sınıfı

2) $Mor_A(X,Y) = Hom(X,Y) = \{\text{Abelyen gruplar arasındaki homomorfizmler}\}$

3) Bileşke işlemi

Örnek 1.4 Birimli Halkaların Kategorisi

$\mathbf{Hlk}_1$: Tüm Birimli Halkaların Kategorisi

1) $Ob(\mathcal{R})$: Tüm birimli halkaların sınıfı

2) $Mor_R(X,Y)$: X'den Y'ye bütün birimsel halka homomorfizmleri

3) Bileşke işlemi

Örnek 1.5 Topolojik Uzaylar Kategorisi

Top : Tüm Topolojik Uzayların Kategorisi

1) $Ob(\mathbf{Top})$: Tüm topolojik uzayların sınıfı

2) $Mor(X,Y) = \{f \mid f : X \to Y$ sürekli fonksiyonlar$\}$

3) Bileşke işlemi

Örnek 1.6 Modüller Kategorisi

Mod : Tüm modüllerin Kategorisi

1) $Ob(\mathbf{Mod})$: Tüm modüllerin sınıfı

2) $Mor(\mathbf{Mod}) = \{f \mid X \longrightarrow Y$ modül homomorfizmi$\}$

3) bileşke işlemi

Örnek 1.7 Cebirler Kategorisi (**Ceb**)

1) $Ob(\mathbf{Ceb})$:Tüm cebirlerin sınıfı

2) $Mor(X,Y) = \{f \mid f : X \longrightarrow Y$ cebir morfizmi$\}$

3) Bileşke işlemi

1.2 Çaprazlanmış Modül Kategorisi

Tanım 1.2 C ve R değişmeli $k-$cebirler olsun.

$$\begin{array}{rcl} f : R \times C & \longrightarrow & C \\ (r,c) & \longmapsto & f(r,c) = r \cdot c \end{array}$$

fonksiyonu her $k \in k$, $c, c' \in C$, $r, r' \in R$ için,

$$\begin{array}{ll} (1) & k(r \cdot c) = (kr \cdot c) = (r \cdot kc) \\ (2) & r(c + c') = r \cdot c + r \cdot c' \\ (3) & (r + r') \cdot c = r \cdot c + r' \cdot c \\ (4) & r \cdot (cc') = (r \cdot c)c' = c(r \cdot c') \\ (5) & rr' \cdot c = r \cdot (r' \cdot c) \end{array}$$

şartları sağlanıyorsa f ye R nin C üzerinde değişmeli cebir etkisi denir.

Tanım 1.3 k-değişmeli halka ve R değişmeli k-Cebir , C , R-Cebir ve

$$\begin{array}{ccccc} R & \times & C & \longrightarrow & C \\ (r & , & c) & \longmapsto & r \cdot c \end{array}$$

değişmeli cebir etkisi olmak üzere

$$\partial : C \to R$$

R-modül homomorfizmi olsun. Her $c, c' \in C$ için

$$\begin{array}{lrcl} \text{ÇM1)} & \partial(r \cdot c) & = & r\partial(c) \\ \text{ÇM2)} & \partial(c) \cdot c' & = & cc' \end{array}$$

şartları sağlanıyorsa ∂ a (veya (C, R, ∂) üçlüsüne) R-çaprazlanmış modül denir. Burada ÇM2 ye de peiffer şartı denir.

Örnek 1.8 R bir k-cebiri ve I, R nin ideali olsun.

$$\begin{array}{rl} \partial : & I \longrightarrow R \\ & a \longmapsto a \end{array}$$

içine (inclusion) dönüşümünü ele alalım. R nin I üzerine etkisi

$$\begin{array}{ll} R \times I & \longrightarrow I \\ (r, a) & \longmapsto r \cdot a = ra \end{array}$$

şeklinde çarpım işlemi olarak verilsin. Bu durumda çaprazlanmış modül aksiyomları

$$\begin{array}{ll} \text{ÇM1)} & \partial(r \cdot i) = \partial(ri) = ri = r\partial(i) \\ \text{ÇM2)} & \partial i \cdot i' = i \cdot i' = ii' \end{array}$$

şeklinde kolayca sağlanır. Dolayısıyla, $(I, R, \text{iç})$ bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Örnek 1.9 M, herhangi bir R-bimodül olsun.

$$\begin{aligned} M\times M &\longrightarrow M \\ (m_1,m_2) &\longmapsto m_1m_2=0 \end{aligned}$$

çarpımı tanımlanırsa, M bir R-cebir yapısı oluşturur. Bu durumda

$$\begin{aligned} 0:M &\longrightarrow R \\ x &\longmapsto 0(x)=0 \end{aligned}$$

şeklinde verilen sıfır morfizmi,

$$\begin{aligned} R\times M &\longrightarrow M \\ (r,m) &\longmapsto r\cdot m=rm \end{aligned}$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Çünkü;

$$\begin{array}{ll} \text{ÇM1)} & 0(r\cdot m)=0(rm)=0=r0=r0(m) \\ \text{ÇM2)} & 0m\cdot m'=0\cdot m'=0m'=0=mm' \end{array}$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır.

Örnek 1.10 K bir k-cebir ve her $k,k'\in K$ için

$$R=\{f_k;\ f_k:K\longrightarrow K\ \ f_k(k^{'})=kk'\}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \partial:\ \ K &\longrightarrow R \\ k &\longmapsto f_k \end{aligned}$$

cebir homomorfizmi,

$$\begin{aligned} R\times K &\longrightarrow K \\ (f_k,k') &\longmapsto (f_k)\cdot k'=kk' \end{aligned}$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Gerçekten;

$$\begin{array}{lrcl} \text{ÇM1)} & \partial((f_k)\cdot k') &=& \partial(kk') \\ & &=& \partial(k)\partial(k') \\ & &=& f_k\partial(k') \\ & & & \\ \text{ÇM2)} & \partial k\cdot k' &=& (f_k)\cdot k' \\ & &=& kk' \end{array}$$

eşitlikleri elde edilir.

Örnek 1.11 L ve M birer R-modül ve

$$\theta:L\longrightarrow M$$

R -modüllerin bir morfizmi olsun. $R \ltimes M$ yarı direkt çarpımı

$$(r,m)(r',m') = (rr', rm' + r'm)$$

şeklinde bilinen çarpım ile ifade edilir. Bu durumda L, her $l,l' \in L$ için

$$ll' = 0$$

şeklinde sıfır çarpım ve

$$\begin{array}{rl} R \ltimes M & \longrightarrow R \\ (r,m) & \longmapsto r \end{array}$$

şeklinde izdüşüm (projection) yoluyla bir $R \ltimes M$-modül yapısı verildiğinde

$$\begin{array}{rl} \widetilde{\theta} : L & \longrightarrow R \ltimes M \\ l & \longmapsto (0, \theta(l)) \end{array}$$

fonksiyonu bir çaprazlanmış $R \ltimes M$-modül yapısı oluşturur. Gerçekten;

$$\begin{array}{rl} (R \ltimes M) \times L & \longrightarrow L \\ ((r,m),l) & \longmapsto (r,m) \cdot l = rl \end{array}$$

şeklindeki etki fonksiyonu ile birlikte $\widetilde{\theta} : L \to R \ltimes M$ fonksiyonu

$$\begin{array}{llcll}
\text{ÇM1)} & \widetilde{\theta}((r,m)\cdot l) & = & \widetilde{\theta}(rl) & \text{(etki tanımından)} \\
 & & = & (0, \theta(rl)) & (\widetilde{\theta},\ \text{tanımından}) \\
 & & = & (0, r\theta(l)) & (\theta, R\text{-modül morfizmi}) \\
 & & = & (r0, (r\theta(l) + 0m)) & \\
 & & = & (r,m)(0, \theta(l)) & \text{(yarı direkt çarpım tanımı)} \\
 & & = & (r,m)\widetilde{\theta}(l) & (\widetilde{\theta},\ \text{tanımından}) \\
 & & & & \\
\text{ÇM2)} & \widetilde{\theta} l \cdot l' & = & (0, \theta(l)) \cdot l' & (\widetilde{\theta},\ \text{tanımından}) \\
 & & = & 0l' & \text{(etki tanımından)} \\
 & & = & 0 & \\
 & & = & ll' & (L \text{ de sıfır çarpımdan})
\end{array}$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomlarını sağlar.

1.3 Çaprazlanmış Modüller Kategorisi

Tanım 1.4 1) Objeler Sınıfı : $\partial : C \to R$, $\partial' : C' \to R'$ ... çaprazlanmış modüller.

2) Morfizmler Kümesi :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\partial"'] & C' \arrow[d, "\partial'"] \\ R \arrow[r, "\phi"'] & R' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} R \times C \arrow[r, "(\phi,\theta)"] \arrow[d] & R' \times C' \arrow[d] \\ C \arrow[r, "\theta"'] & C' \end{tikzcd}$$

diyagramları geğişmeli olmak üzere

$$\begin{tikzcd} (r,c) \arrow[r] \arrow[d] & \phi(r),\theta(c) \arrow[d] \\ (r \cdot c) \arrow[r] & \theta(r \cdot c) = \phi(r) \cdot \theta(c) \end{tikzcd}$$

olup (θ,φ) ikililerine çaprazlanmış modül morfizmi denir.

3) Kompozisyon : (θ,φ) ve (θ',φ') çaprazlanmış modül morfizmleri olmak üzere

$$(\theta,\varphi) \circ (\theta',\varphi') = (\theta' \circ \theta, \varphi' \circ \varphi)$$

şeklindedir. Bu kategoriyi **XMod** ile gösterilir.

BÖLÜM 2

ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİN OBJE VE MORFİZM ÖZELLİKLERİ

2.1 Bir Kategorinin Obje ve Morfizm Özellikleri

2.1.1 İlk Obje

Tanım 2.1 $\mathcal{C}$ kategorisindeki her X objesi için

$$Mor(I,X) = \{f \mid f : I \to X\}$$

kümesinin bir tek elemanı varsa I'ya $\mathcal{C}$ nin ilk objesi denir.

Örnekler:

1) $S =$Kümeler kategorisinin ilk objesi $I = \varnothing$ dir.

2) $G =$Gruplar kategorisinin ilk objesi $I = \{e\}$ (birim eleman) dır.

3) $T =$Topolojik uzaylar kategorisinin ilk objesi $I = bos\ uzay$ dır.

4) $H =$Halkalar kategorisinin ilk objesi $I = \{0\}$ kümesidir.

5) $H_1 =$ Birimli halkalar kategorisinin ilk objesi $I = \mathbb{Z}$ dir. Çünkü

$$f : \mathbb{Z} \to H$$

H_1 kategorisinde morfizm ise her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{Z} & \to & H \\ & n & \to & n \cdot 1 \end{array}$$

bir tek homomorfizm vardır.

İspat: H herhangi birimli bir halka ve $\text{Çek}(H) = n$ olsun. Buna göre $n \cdot 1_H = 0$ olup $\text{Çek}f = n\mathbb{Z}$ dir.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & H \\
\mathbb{Z}/\text{Ç}ekf \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r] \arrow[d] & x \cdot 1_H \\
{[x]_n} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli (yani $hq = f$) olup f biriciktir. $hq = f$ olacak şekilde f nin biricik olduğunu gösterebilmek için h ve q nun biricikliğini gösterelim.

h',h ile aynı özelliğe sahip diğer bir homomorfizm olsun. Bu durumda $h'q = f$ dir.

$$\begin{array}{rcrcl} h'q & = & f & = & hq \\ & \Longrightarrow & h'q & = & hq \\ & \Longrightarrow & h' & = & h \end{array}$$

olup h biriciktir.

q nun biricikliğinden önce h nin birebirliğini gösterelim

$$\begin{array}{rclcrcl} h([x]_n) & = & h([y]_n) & \Longrightarrow & x \cdot 1_H & = & y \cdot 1_H \\ & & & \Longrightarrow & x \cdot 1_H - y \cdot 1_H & = & 0_H \\ & & & \Longrightarrow & (x-y) \cdot 1_H & = & 0_H \\ & & & \Longrightarrow & x - y \in \text{Çek}f & & \end{array}$$

ise h birebirdir.

q, q' ile aynı özelliğe sahip diğer bir homomorfizm olsun.

$$\begin{array}{rcrcl} hq' = f & = & hq \Longrightarrow hq' & = & hq \\ & & \Longrightarrow q' & = & q \end{array}$$

ise q biriciktir. h ve q biricik olduğuna göre bunların bileşkesi olan f de biriciktir.

Teorem 2.2 Bir kategoride herhangi iki ilk obje birbirine izomorftur.

İspat : I_1 ve I_2 $\mathcal{C}$ kategorisinin ilk objeleri olsunlar. I_1 ilk obje olduğundan

$$f : I_1 \to I_2$$

bir tek morfizm vardır. Benzer şekilde I_2 ilk obje olduğundan

$$g : I_2 \to I_1$$

bir tek morfizm vardır. Böylece

$$g \circ f : I_1 \to I_1$$

morfizmi vardır. I_1 kategorinin ilk objesi olduğundan I_1 den I_1 e yalnız bir morfizm olmalıdır. Bu morfizm I_1 in birim morfizmidir. Yani $g \circ f = 1_{I_1}$ dir. Benzer şekilde $f \circ g = 1_{I_2}$ dir. Böylece $I_1 \cong I_2$ dir.

2.1.2 Son Obje

Tanım 2.3 Bir $\mathcal{C}$ kategorisinde her X objesi için, X den S ye birtek morfizm varsa S ye $\mathcal{C}$ nin son objesi denir. Yani ;

$$Mor(X,S) = \{f \mid f : X \to S\}$$

kümesinin bir tek elemanı varsa S'ye $\mathcal{C}$ nin son objesi denir.

Örnekler:

1) S =Kümeler kategorisinin son objesi $\{x\}$ (tek elemanlı kümeler) dir.

2) T =Topolojik uzaylar kategorisinin son objesi $S = \{x\}$ (tek elemanlı topolojik uzaylar) dır.

Böylece bu iki kategorinin birçok son objesi vardır.

3) H_1 =Birimli halkalar kategorisinin son objesi yoktur. Çünkü birimli halkalar denince $1 \neq 0$ olduğu kabul edilmektedir. Aksi taktirde halka sıfırdan oluşur.

Teorem 2.4 S_1 ve S_2 $\mathcal{C}$ kategorisinde son objeler ise $S_1 \cong S_2$ dir

İspat : S_2 $\mathcal{C}$ nin son objesi ise

$$f : S_1 \to S_2$$

tek morfizmi var ve benzer şekilde S_1 $\mathcal{C}$ nin son objesi ise

$$g : S_2 \to S_1$$

tek morfizmi vardır. Teklikten

$$gof = 1_{S_1}$$

ve

$$fog = 1_{S_2}$$

olup $S_1 \cong S_2$ dir.

2.1.3 Monomorfizm

Tanım 2.5 $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. $\mathcal{C}$ deki $f : A \to B$ morfizmi sol sadeleşebilir ise f ye monomorfizm (veya monik) denir.

Örnek 2.1 S =Kümeler kategorisinde , G =Gruplar kategorisinde , A =Abelyen gruplar kategorisinde , H =Halkalar kategorisinde ve T =Topolojik uzaylar kategorisinde her bire-bir morfizm bir moniktir.

Tanım 2.6 Objeler , bazı ek yapı ile birlikte kümeler ve morfizmler , bu yapıları koruyan oklar olan kategorilere somut kategori denir.

Örnek 2.2 S =Kümeler kategorisi , G =Gruplar kategorisi , T =Topolojik uzaylar kategorisi somut kategoridir.

Teorem 2.7 $\mathcal{C}$ de f ve g monik ise $f \circ g$ moniktir.

İspat :

$$\begin{array}{rrcl} & (f\circ g)\circ h_1 & = & (f\circ g)\circ h_2 \\ \Longrightarrow & f\circ(g\circ h_1) & = & f\circ(g\circ h_2)\ (\because \mathcal{C} \text{ de birleşme aksiyomu}) \\ \Longrightarrow & g\circ h_1 & = & g\circ h_2\ (\because f \text{ monik}) \\ \Longrightarrow & h_1 & = & h_2\ (\because g \text{ monik}) \end{array}$$

Teorem 2.8 $f \circ g$ monik ise g moniktir.

İspat :

$$\begin{array}{rcccrcl} g\circ h_1 & = & g\circ h_2 & \Longrightarrow & f\circ(g\circ h_1) & = & f\circ(g\circ h_2) \\ & & & \Longrightarrow & (f\circ g)\circ h_1 & = & (f\circ g)\circ h_2\ (\because \text{ birleşme aksiyomu}) \\ & & & \Longrightarrow & h_1 & = & h_2\ (f\circ g \text{ monik}) \end{array}$$

2.1.4 Epimorfizm

Tanım 2.9 $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. $\mathcal{C}$ deki $f : A \to B$ morfizmi sağ sadeleşebilir ise yani :

$$g_1 \circ f = g_2 \circ f \Longrightarrow g_1 = g_2$$

ise f ye epimorfizm (veya kısaca epik) denir.

Teorem 2.10 f , g epik ise $f \circ g$ epiktir.

İspat :

$$\begin{array}{rclcrcl} h_1 \circ (f \circ g) & = & h_2 \circ (f \circ g) & \Longrightarrow & (h_1 \circ f) \circ g & = & (h_2 \circ f) \circ g \ (\because \text{birleşme aksiyomu}) \\ & & & \Longrightarrow & h_1 \circ f & = & h_2 \circ f \ (\because g \text{ epik }) \\ & & & \Longrightarrow & h_1 & = & h_2 \end{array}$$

Teorem 2.11 $f \circ g$ epik ise f epiktir.

İspat :

$$\begin{array}{rclcrcl} h_1 \circ f & = & h_2 \circ f & \Longrightarrow & (h_1 \circ f) \circ g & = & (h_2 \circ f) \circ g \\ & & & \Longrightarrow & h_1 \circ (f \circ g) & = & h_2 \circ (f \circ g) \ (\because \text{birleşme aksiyomu }) \\ & & & \Longrightarrow & h_1 & = & h_2 \end{array}$$

2.2 Çaprazlanmış Modüller Kategorisinin Obje ve Morfizm Özellikleri

2.2.1 İlk Obje

$$\begin{array}{rccc} \partial_R : & R & \longrightarrow & R \\ & r & \longmapsto & r \end{array}$$

objesinin çaprazlanmış modül kategorisinin ilk objesi olduğunu gösterelim. $\partial_C : C \longrightarrow R$ herhangi bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda

$$f : R \longrightarrow C$$

değişmeli halka homomorfizmi ve C, R-cebir olduğundan

$$\begin{array}{ccc} R \times C & \longrightarrow & C \\ (r,c) & \longmapsto & r \cdot c = f(r)c \end{array}$$

$R-$modül etkisi vardır. Şimdi (f,Id) nin çaprazlanmış modül morfizmi olduğunu gösterelim.

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\partial_R"'] & C \arrow[d, "\partial"] \\
R \arrow[r, "Id"'] & R
\end{tikzcd}$$

$$(Id \circ \partial_R)(r) = Id(\partial_R(r)) = Id(r) = r$$

dir. Diğer taraftan

$$(\partial_C \circ f)(r) = \partial_C(f(r)) = r$$

olup diyagram değişmelidir.

$$\begin{tikzcd}
R \times R \arrow[r, "(Id{,}f)"] \arrow[d] & R \times C \arrow[d] \\
R \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(r_1, r_2) \arrow[r] \arrow[d] & (Id(r_1), f(r_2)) \arrow[d] \\
(r_1 r_2) \arrow[r] & f(r_1 r_2)
\end{tikzcd}$$

$$f(r_1 r_2) = f(r_1) f(r_2) \ (\because f \text{ değişmeli halka homomorfizmi})$$

diğer taraftan

$$\begin{aligned}
(\partial_R(r_1), f(r_2)) &= \cdot(r_1 f(r_2)) \\
&= f(r_1) f(r_2) \ (\because C \text{ nin } R-\text{modül etkisi})
\end{aligned}$$

olup diyagram değişmelidir. Böylece (f, ∂_R) çaprazlanmış modül morfizmidir ve ∂_R çaprazlanmış modüller kategorisinin ilk objesidir.

2.2.2 Son Obje

$$\begin{aligned}
\partial_R : \quad R &\longrightarrow R \\
r &\longmapsto r
\end{aligned}$$

objesinin çaprazlanmış modül kategorisinin son objesi olduğunu gösterelim. $\partial_C : C \longrightarrow R$ herhangi bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda

$$f : R \longrightarrow C$$

değimeli halka homomorfizmi ve C, R-cebir olduğundan

$$\begin{array}{rcl} R \times C & \longrightarrow & C \\ (r,c) & \longmapsto & r \cdot c = f(r)c \end{array}$$

R-modül etkisi vardır. Şimdi (∂_C, Id) nin çaprazlanmış modül morfizmi olduğunu gösterelim.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\partial_C"] \arrow[d, "\partial_C"'] & R \arrow[d, "Id"] \\ R \arrow[r, "Id"'] & R \end{tikzcd}$$

$$(Id \circ \partial_C)(c) = (Id \circ \partial_C)(c)$$

olup diyagram değişmelidir.

$$\begin{tikzcd} R \times C \arrow[r, "(Id{,}\partial_C)"] \arrow[d] & R \times R \arrow[d] \\ C \arrow[r, "\partial_C"'] & R \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (r,c) \arrow[r] \arrow[d] & (r,\partial(c)) \arrow[d] \\ (r \cdot c) \arrow[r] & \partial(r \cdot c) = r\partial(c) \end{tikzcd}$$

$$(r,\partial(c)) = r\partial(c) \ (\because R,\ R\text{-modül})$$

ve

$$\partial(r \cdot c) = r\partial(c) \ (\because\ \partial \text{ çaprazlanmış modül})$$

olup diyaram değişmelidir. Böylece (∂_C, Id) çaprazlanmış modül morfizmi ve ∂_R de çaprazlanmış modüller kategorisinin son objesidir.

2.2.3 Monomorfizm

Teorem 2.12 $(\theta,\varphi)=\alpha$ çaprazlanmış modül morfizminin monik olması için gerek ve yeter şart θ ve φ nin monik olmasıdır.

İspat : $\partial=(C\longrightarrow R),\partial'=(C'\longrightarrow R'),\partial''=(C''\longrightarrow R'')$ çaprazlanmış modüller kategorisinin objeleri , $\alpha=(\theta,\varphi),\beta=(\theta',\varphi'),\gamma=(\theta'',\varphi'')$ çaprazlanmış modüller kategorisinin morfizmleri ve $c''\in C'',r''\in R''$ olsun. θ ve φ nin birebir olduğunu kabul edip α'nın monik olduğunu gösterelim.

$$\begin{tikzcd}
C'' \arrow[r, shift left, "\theta'"] \arrow[r, shift right, "\theta''"'] \arrow[d] & C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d] & C' \arrow[d] \\
R'' \arrow[r, shift left, "\phi'"] \arrow[r, shift right, "\phi''"'] & R \arrow[r, "\phi"] & R'
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\partial'' \arrow[r, shift left, "\beta"] \arrow[r, shift right, "\gamma"'] & \partial \arrow[r, "\alpha"] & \partial'
\end{tikzcd}$$

$$\alpha\beta=\alpha\gamma$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned}
(\theta,\varphi)\circ(\theta',\varphi')(c'',r'') &= (\theta,\varphi)\circ(\theta'',\varphi'')(c'',r'') \\
(\theta\circ\theta',\varphi\circ\varphi')(c'',r'') &= (\theta\circ\theta'',\varphi\circ\varphi'')(c'',r'')
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitilikten de

$$(\theta\circ\theta')(c'')=(\theta\circ\theta'')(c'')$$

ve

$$(\varphi\circ\varphi')(r'')=(\varphi\circ\varphi'')(r'')$$

elde edilir.Buradan

$$\begin{aligned}
(\theta\circ\theta')(c'') &= (\theta\circ\theta'')(c'') \\
\Longrightarrow\quad \theta(\theta'(c'')) &= \theta(\theta''(c'')) \\
\Longrightarrow\quad \theta'(c'') &= \theta''(c'')\ (\because \theta \text{ birebir}) \\
\Longrightarrow\quad \theta' &= \theta''
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
(\varphi\circ\varphi')(r'') &= (\varphi\circ\varphi'')(r'') \\
\Longrightarrow\quad \varphi(\varphi'(r'')) &= \varphi(\varphi''(r'')) \\
\Longrightarrow\quad \varphi'(r'') &= \varphi''(r'')\ (\because \varphi \text{ birebir}) \\
\Longrightarrow\quad \varphi' &= \varphi''
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$\alpha\beta = \alpha\gamma \Longrightarrow \beta = \gamma$$

dır ve α moniktir.

Şimdi de $(\theta,\varphi) = \alpha$ nın monik olduğunu kabul edip θ ve φ nin birebir olduğunu gösterelim.

$$\alpha\beta = \alpha\gamma$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned}(\theta,\varphi)\circ(\theta',\varphi')(c'',r'') &= (\theta,\varphi)\circ(\theta'',\varphi'')(c'',r'')\\(\theta\circ\theta',\varphi\circ\varphi')(c'',r'') &= (\theta\circ\theta'',\varphi\circ\varphi'')(c'',r'')\end{aligned}$$

Bu eşitilikten de

$$(\theta\circ\theta')(c'') = (\theta\circ\theta'')(c'')$$

ve

$$(\varphi\circ\varphi')(r'') = (\varphi\circ\varphi'')(r'')$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}&(\theta\circ\theta')(c'') = (\theta\circ\theta'')(c'')\\ \Longrightarrow\ &\theta(\theta'(c'')) = \theta(\theta''(c''))\\ \Longrightarrow\ &\theta(c_1) = \theta(c_2)\\ \Longrightarrow\ &c_1 = c_2\\ \Longrightarrow\ &\theta \text{ birebirdir.}\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}&(\varphi\circ\varphi')(r'') = (\varphi\circ\varphi'')(r'')\\ \Longrightarrow\ &\varphi(\varphi'(r'')) = \varphi(\varphi''(r''))\\ \Longrightarrow\ &\varphi(r_1) = \varphi(r_2)\\ \Longrightarrow\ &r_1 = r_2\\ \Longrightarrow\ &\varphi \text{ birebirdir.}\end{aligned}$$

yani $(\theta,\varphi) = \alpha$ monik iken θ ve φ birebirdir.

2.2.4 Epimorfizm

Teorem 2.13 $(\theta,\varphi) = \alpha$ çaprazlanmış modül morfizminin epik olması için gerek ve yeter şart θ ve φ nin φ nin örten olmasıdır.

İspat : $\partial = (C \longrightarrow R), \partial' = (C' \longrightarrow R'), \partial'' = (C'' \longrightarrow R'')$ çaprazlanmış modüller kategorisinin objeleri , $\alpha = (\theta,\varphi), \beta = (\theta',\varphi'), \gamma = (\theta'',\varphi'')$ çaprazlanmış modüller kategorisinin morfizmleri ve $c \in C, r \in R$ olsun. θ ve φ nin örten olduğunu kabul edip α nın epik olduğunu gösterelim.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d] & C' \arrow[r, shift left, "\theta'"] \arrow[r, shift right, "\theta''"'] \arrow[d] & C'' \arrow[d] \\ R \arrow[r, "\phi"'] & R' \arrow[r, shift left, "\phi'"] \arrow[r, shift right, "\phi''"'] & R'' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \partial \arrow[r, "\alpha"] & \partial' \arrow[r, shift left, "\beta"] \arrow[r, shift right, "\gamma"'] & \partial'' \end{tikzcd}$$

$$\beta\alpha = \gamma\alpha$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} (\theta', \varphi') \circ (\theta, \varphi)(c, r) &= (\theta'', \varphi'') \circ (\theta, \varphi)(c, r) \\ (\theta' \circ \theta, \varphi' \circ \varphi)(c, r) &= (\theta'' \circ \theta, \varphi'' \circ \varphi)(c, r) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliktende

$$(\theta' \circ \theta)(c) = (\theta'' \circ \theta)(c)$$

ve

$$(\varphi' \circ \varphi)(r) = (\varphi'' \circ \varphi)(r)$$

elde edilir. Burdan

$$\begin{aligned} & (\theta' \circ \theta)(c) &= (\theta'' \circ \theta)(c) \\ \Longrightarrow\ & \theta'(\theta(c)) &= \theta''(\theta(c)) \\ \Longrightarrow\ & \theta'(c') &= \theta''(c')\ (\because\ \theta \text{ örten}) \end{aligned}$$

olacak şekilde $c' \in C'$ vardır. O halde $\theta' = \theta''$ elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} & (\varphi' \circ \varphi)(r) &= (\varphi'' \circ \varphi)(r) \\ \Longrightarrow\ & \varphi'(\varphi(r)) &= \varphi''(\varphi(r)) \\ \Longrightarrow\ & \varphi'(r') &= \varphi''(r')\ (\because\ \varphi \text{ örten}) \end{aligned}$$

olacak şekilde $r' \in R'$ vardır. O halde $\varphi' = \varphi''$ elde edilir. Yani

$$\beta\alpha = \gamma\alpha \Longrightarrow \beta = \gamma$$

dır.

Şimdi de $(\theta, \varphi) = \alpha$ nın epik olduğunu kabul edip θ ve φ nin örten olduğunu gösterelim. $\theta(C)$, C' nün alt modülü olduğundan $C'' = C'/\ \theta(C)$ bölüm modülü oluşturabilriz.

$$\begin{aligned} \theta' : \quad C' &\longrightarrow C'/\theta(C) \\ c' &\longmapsto \theta(C) + c' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta'' : \quad C' &\longrightarrow C'/\theta(C) \\ c' &\longrightarrow \theta(C) + 0 \end{aligned}$$

ve benzer olarak

$$\begin{array}{rrcl} \varphi' : & R' & \longrightarrow & R'/\varphi(R) \\ & r' & \longmapsto & \varphi(R)+r' \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \varphi'' : & R' & \longrightarrow & R'/\varphi(R) \\ & r' & \longmapsto & \varphi(R)+r' \end{array}$$

tanımlayalım. α epik olduğundan

$$\beta\alpha = \gamma\alpha \Longrightarrow \beta = \gamma$$

Elde edilir. Bu ise

$$(\theta', \varphi')(c', r') = (\theta'', \varphi'')(c', r')$$

demektir. Buradan

$$\begin{array}{rrcl} & \theta'(c') & = & \theta''(c') \\ \Longrightarrow & c' + \theta(C) & = & \theta(C) \ (\because \theta' \text{ ve } \theta'' \text{ tanımıdan}) \\ \Longrightarrow & c' \in \theta(C) & & \\ \Longrightarrow & \theta \text{ örtendir} & & \end{array}$$

Benzer olarak

$$\begin{array}{rrcl} & \varphi'(r') & = & \varphi''(r') \\ \Longrightarrow & \varphi(R) + r' & = & \varphi(R) \\ \Longrightarrow & r' \in R & & \\ \Longrightarrow & \varphi \text{ örtendir.} & & \end{array}$$

elde edilir. Yani $(\theta, \varphi) = \alpha$ epik iken θ ve φ örtendir.

BÖLÜM 3

FUNKTORLAR

Tanım 3.1 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ herhangi iki kategori olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan F dönüşümüne $\mathcal{C}$ den $\mathcal{D}$ ye bir funktor denir.

1) $X \in Ob(\mathcal{C})$ için $F(X) \in Ob(\mathcal{D})$ dir.

2) $F : X \longrightarrow Y \in Mor(\mathcal{C})$ için $F(f) = Ff : F(X) \longrightarrow F(Y)$ olmak üzere $F(f) \in Mor(\mathcal{D})$ dir.

3)$g, f \in Mor(\mathcal{C})$ için $F(g \circ_{\mathcal{C}} f) = Fg \circ_{\mathcal{D}} Ff$ dir.

4) $1_A : A \longrightarrow A$ $\mathcal{C}$ kategorisinde birim morfizm olmak üzere $F(1_A) = 1_{F(A)}$ $\mathcal{D}$ kategorisinde birim morfizmdir.

Örnek 3.1 $\mathcal{C} = \mathcal{D}$ ise $1_{\mathcal{C}} = F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ funktoruna birim funktor denir. Burada $F(X) = X$ ve $f : X \longrightarrow Y \in Mor(\mathcal{C})$ için

$$\begin{array}{cccc} F(f) = f: & F(X) & \longrightarrow & F(Y) \\ & \shortparallel & & \shortparallel \\ & X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

dir.

Örnek 3.2 $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ funktoru her $X \in Ob(\mathcal{C})$ için $F(X) = B \in Ob(\mathcal{D})$ (sabit) ise F funktoruna sabit funktor denir. Yani ;

$F(A) = B$ ve $f : A_1 \longrightarrow A_2 \in Mor(\mathcal{C})$ için

$$\begin{array}{cccc} F(f) = 1_B: & F(A_1) & \longrightarrow & F(A_2) \\ & \shortparallel & & \shortparallel \\ & B & \longrightarrow & B \end{array}$$

dir.

Tanım 3.2 Bir kategoriden yapıyı kaldırarak başka bir kategoriye giden oklara forgetful funktor denir.

$$F: \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{T} \\ \mathcal{G} \\ \mathcal{H} \end{array} \right\} \longrightarrow \mathcal{S}$$

funktorları forgetful funktorlardır.(Çünkü $\mathcal{T}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ kategorilerindeki işlemleri kaldırıp $\mathcal{S}$ kategorisine gidiyor.)

Örnek 3.3

$$F: \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{R}-\text{modül} \\ \mathcal{H} \\ \mathcal{H}_1 \end{array} \right\} \longrightarrow AbGrup$$

funktorları forgetful funktorlardır.(Çünkü $\mathcal{R}-$modül,$\mathcal{H}$,$\mathcal{H}_1$ kategorilerindeki çarpma işlemini kaldırıp *AbGrup* kategorisine gidiyor.)

Tanım 3.3 Kümeler kategorisinden ($\mathcal{S}$) herhangi bir kategoriye tanımlanan funktora serbest (free) funktor denir.

Örnek 3.4 $F : \mathcal{S} \longrightarrow AbGrup$ funktorunu tanımlayalım. $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ sonlu bir küme olsun.

$$F(A) = \{\sum_{i=1}^{n} k_i a_i \mid k_i \in \mathbb{Z}\}$$

şeklinde tanımlarsak $(F(A), +)$ Abelyen grup yapısı elde edilir.

$$\begin{array}{rccc} f: & A_1 & \longrightarrow & A_2 \\ & a_i & \longmapsto & f(a_i) \end{array}$$

fonksiyonu ise

$$\begin{array}{rccc} F(f): & F(A_1) & \longrightarrow & F(A_2) \\ & \sum_{i=1}^{n} k_i a_i & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} k_i f(a_i) \end{array}$$

grup homomorfizmi olup $F(f)$ biriciktir. Buradaki F funktoruna free *AbGrup* funktoru denir.

Özel olarak $n = 1$ için

$$A = \{a_1\} ve F(A) = \{k_1 a_1 \mid k_1 \in \mathbb{Z}\} = \langle a_1 \rangle$$

devirli grup yapısı elde edilir.

Tanım 3.4 Herhangi bir kategoriden *AbGrup* kategorisine tanımlanan funktora Abelyenleştirilmiş funktor denir.

Örnek 3.5 $F : \mathcal{C} \longrightarrow AbGrup$ Abelyenleştirilmiş funktorunu oluşturalım. G grup olmak üzere $F(G)$ nin Abelyan grup olması için F yi nasıl tanımlarız? $[G:G]$,$a = xyx^{-1}y^{-1}$ elemanları tarafından üretilen değişmeli normal alt gruptur. Yani;

$$[G:G] = \{\prod_{i=1}^{n} a_i \mid a_i = [x_i y_i] = x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1}\} \trianglelefteq G$$

dir. Böylece

1)Objeler : $F(G) = G/[G:G]$ şeklindeki Abelyen gruplar.

2)Morfizmler : $f : G \longrightarrow G' \in Mor(\mathcal{G})$ olmak üzere

$$\begin{array}{cccc} F(f): & F(G) & \longrightarrow & F(G') \\ & \shortparallel & & \shortparallel \\ & G/[G:G] & \longrightarrow & G'/[G':G'] \end{array}$$

olup

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & G' \arrow[d, "q"] \\ G/[G:G] \arrow[r, "F(f)"'] & G'/[G':G'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} g \arrow[r] \arrow[d] & f(g) \arrow[d] \\ {[g]} \arrow[r] & {[f(g)]} \end{tikzcd}$$

$$F(f)([g]) = [f(g)]$$

dir.

Tanım 3.5 $\mathcal{C}$ herhangi bir kategori ve $D \in Ob(\mathcal{C})$ nin sabit bir objesi olsun.

$$Mor(D,-) = H_D : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S} \text{ (kümeler kategorisi)}$$

1) $A \in Ob(\mathcal{C})$ olsun.

$$H_D(D,A) = \{D \longrightarrow A\} \in Ob(\mathcal{S})$$

dir.

2) $f : A \longrightarrow B \in Mor(\mathcal{C})$ için

$$\begin{array}{rlcl} H_D(f) = & Hom(D,f): \; Hom(D,A) & \longrightarrow & Hom(D,B) \\ & \qquad\qquad\qquad h & \longmapsto & f \circ h \end{array}$$

ise

$$H_D(f)(h) = f \circ h$$

tanımlamasına göre

$$H_D : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}$$

bir funktordur. Bu funktora kovaryant hom funktor denir.

3) $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C \in Mor(\mathcal{C})$ ve $k : D \longrightarrow A$ herhangi bir morfizm olsun.

$$\begin{aligned} Hom(D,g) \circ Hom(D,f)(k) &= Hom(D,g) \circ (Hom(D,f)(k)) \\ &= Hom(D,g)(f \circ g) \text{ ($\because$ Hom funktor tanımı)} \\ &= g \circ (f \circ k) \\ &= (g \circ f) \circ k \text{ ($\because$ $\mathcal{C}$ bir kategori)} \\ &= Hom(D, g \circ f)(k) \end{aligned}$$

olup bileşke şartı sağlanır.

4) $Id_A : A \longrightarrow A \in Mor(\mathcal{C})$ ve $f : D \longrightarrow A \in Mor(\mathcal{C})$ olsun.

$$\begin{array}{rlcl} Hom(D,Id_A): & Hom(D,A) & \longrightarrow & Hom(D,A) \\ & \qquad f & \longmapsto & Id_A \circ f = f \end{array}$$

Böylece

$$\begin{aligned} Hom(D,Id_A)(f) &= Id_A \circ f \\ &= f \\ &= Id_{Hom(D,A)}(f) \end{aligned}$$

olup

$$Hom(D,Id_A) = Id_{Hom(D,A)}(f)$$

olur. Birimlilik şartı sağlanır.

Tanım 3.6

$$\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$$

1) $\eta_{A,B} : Mor_{\mathcal{B}}(F(A),B) \cong Mor_{\mathcal{A}}(A,G(B))$

2) $\eta_{A,B}$ nin A ve B de doğal olması.

A **da doğallık:**

$\eta_{A,B}$ nin A da doğal olması,

$h : A' \longrightarrow A \in Mor(\mathcal{A})$ için aşağıdaki diyagramın değişmeli olması demektir.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(F(A),B) \arrow[r, "\eta_{A,B}"] \arrow[d, "F(h)^{\star}=-\circ F(h)"'] & \mathcal{A}(A,G(B)) \arrow[d, "-\circ h=h^{\star}"] \\
\mathcal{B}(F(A'),B) \arrow[r, "\eta_{A',B}"'] & \mathcal{A}(A',G(B))
\end{tikzcd}$$

yani ; $f : F(A) \longrightarrow B$ ve $g : A \longrightarrow G(B)$ veridiğinde

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[r] \arrow[d] & g \arrow[d] \\
f \circ F(h) \arrow[r] & g \circ h
\end{tikzcd}$$

olmasıdır.

B de doğallık:

$\eta_{A,B}$ nin B de doğal olması,

$k : B \longrightarrow B' \in Mor(\mathcal{B})$ için aşağıdaki diyagramın değişmeli olması demektir.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(F(A),B) \arrow[r, "\eta_{A,B}"] \arrow[d, "k^{\star}=k\circ -"'] & \mathcal{A}(A,G(B)) \arrow[d, "G(k)^{\star}=G(k)\circ -"] \\
\mathcal{B}(F(A),B') \arrow[r, "\eta_{A,B'}"'] & \mathcal{A}(A,G(B'))
\end{tikzcd}$$

yani : $f : F(A) \longrightarrow B$ ve $g : A \longrightarrow G(B)$ veridiğinde

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[r] \arrow[d] & g \arrow[d] \\
k \circ f \arrow[r] & G(k) \circ g
\end{tikzcd}$$

olmasıdır.

Bu şartları sağlayan (F,G) ikilisine adjoint ikili denir. F ye G nin sol eki, G ye F nin sağ eki denir.

Örnek 3.6 K bir cisim, $\mathcal{S}$(kümeler kategorisi), $\mathbf{Vec}_K$(vektör uzayları kategorisi) olmak üzere

$$\mathcal{S} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{Vec_K}$$

(F,G) ikilisinin adjoint ikili olduğunu gösterelim.(Burada G funktoru underlying funktordur.)

1)

$$\begin{array}{rccc} \eta_{X,W}: & Vec_K(F(X),W) & \longrightarrow & K\ddot{u}me(X,G(W)) \\ & f & \longmapsto & \eta_{X,W}(f)=f_{|X} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \psi_{X,W}: & K\ddot{u}me(X,G(W)) & \longrightarrow & Vec_K(F(X),W) \\ & g & \longmapsto & \psi_{X,W}(g)=f_g \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccc} f_g: & F(X) & \longrightarrow & W \\ & \sum x_i k_i & \longmapsto & \sum g(x_i)k_i \end{array}$$

olmak üzere $Mor_{\mathcal{B}}(F(A),B) \cong Mor_{\mathcal{A}}(A,G(B))$ olduğunu göstermek için

$$\eta_{X,W} \circ \psi_{X,W} = 1_{k\ddot{u}me}$$

ve

$$\psi_{X,W} \circ \eta_{X,W} = 1_{Vec_K}$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{array}{rcll} (\eta_{X,W} \circ \psi_{X,W})(g) & = & \eta_{X,W}(f \circ g) & \\ & = & (f \circ g)_{|X} & \\ & = & g & \\ & = & 1_{k\ddot{u}me} \circ g & \quad (g : X \longrightarrow G(W) \text{ olduğundan } X \text{ e kısıtlanmışı kendisidir.)} \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} (\psi_{X,W} \circ \eta_{X,W})(f) & = & \psi_{X,W}(f_{|X}) \\ & = & f_{f_{|X}} \\ & = & f \\ & = & 1_{Vec_K} \circ f \end{array}$$

olup $Mor_{\mathcal{B}}(F(A),B) \cong Mor_{\mathcal{A}}(A,G(B))$ sağlanır.

2) X **de doğallık:**

$$\begin{array}{rccc} h: & X' & \longrightarrow & X \\ & x & \longmapsto & h(x) \end{array}$$

ve $f : F(X) \longrightarrow W$ olsun.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Vec_K}(F(X),W) \arrow[r, "\eta_{X,W}"] \arrow[d, "-\circ F(h)"'] & \mathcal{S}(X,G(W)) \arrow[d, "-\circ h"] \\
\mathbf{Vec_K}(F(X'),W) \arrow[r, "\eta_{X',W}"'] & \mathcal{S}(X',G(W))
\end{tikzcd}
$$

olmak üzere diyagramın değişmeli olduğunu gösterelim.

$$
\begin{array}{rcl}
(\eta_{X',W}) \circ (f \circ F(h))(x) & = & (f \circ F(h))_{|X'}(x) \\
& = & (f_{|X} \circ h)(x) \\
& = & (f \circ F(h))(x)
\end{array}
$$

ve diğer taraftan

$$
\begin{array}{rcl}
(- \circ h)(\eta_{X,W}(f))(x) & = & (- \circ h)(f_{|X})(x) \\
& = & (f_{|X} \circ h)(x) \\
& & f_{|X} \circ (h(x)) \\
& & f \circ F(h)(x)_{|X'} \\
& & f \circ F(h)(x) \qquad (\because x \in X')
\end{array}
$$

olup diyagram değişmelidir. Benzer şekilde W doğallık gösterilir. Yani (F,G) ikilisi adjoint ikilidir.

3.1 Çaprazlanmış Modüllerin Tensör Çarpımı

$\mu : M \longrightarrow R$, $\nu : N \longrightarrow R$ iki çaprazlanmış $R-$modül olsun. J, $M \times N$ nin

$$
\begin{array}{rl}
i) & k(m,n) = (k \cdot m,n)(m,a \cdot n) \\
ii) & ((m+m'),n) = (m,n) + (m',n) \\
iii) & (m,n+n') = (m,n) + (m,n') \\
iv) & (p \cdot m,n) = (m,p \cdot n)
\end{array}
$$

elemanları tarafından üretilen bir ideali olsun. Bu durumda çaprazlanmış modüllerin tensör çarpımı

$$M \otimes_R N = (M \times N)/J = \{(m,n)j = m \otimes n \mid m \in M, n \in N\}$$

olarak tanımlanır.

$$
\begin{array}{rcl}
R \times (M \otimes_R N) & \longrightarrow & M \otimes_R N \\
(r,(m \otimes n)) & \longmapsto & r \cdot (m \otimes n) \quad = \quad r \cdot m \otimes n \\
& & \qquad\qquad\qquad\quad m \otimes r \cdot n
\end{array}
$$

etkisiyle birlikte

$$
\begin{array}{rrcl}
\partial : & M \otimes_R N & \longrightarrow & R \\
& m \otimes n & \longmapsto & \mu(m)\nu(n)
\end{array}
$$

olsun.

$$\begin{array}{rrcccl}
\text{ÇM1)} & \partial((r\cdot(m\otimes n)) & = & \partial(r\cdot m\otimes n) & = & \partial(m\otimes r\cdot n)\\
 & & = & \mu(r\cdot m)\nu(n) & = & \mu(m)\nu(r\cdot n)\\
 & & = & r\mu(m)\nu(n) & = & \mu(m)r\nu(n)\\
 & & = & r((\mu(m)\nu(n) & = & r(\mu(m)\nu(n))\\
 & & = & r\partial(m\otimes n) & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl}
\text{ÇM2)} & \partial(m\otimes n)\cdot(m'\otimes n') & = & (\mu(m)\nu(n))(m'\otimes n')\\
 & & = & \mu(m)(\nu(n)(m'\otimes n'))\\
 & & = & \mu(m)(m'\otimes \nu(n)\cdot n')\\
 & & = & \mu(m)\cdot m'\otimes \nu(n)\cdot n'\\
 & & = & mm'\otimes nn'\\
 & & = & (m\otimes n)(m'\otimes n')
\end{array}$$

O halde $M\otimes_R N \xrightarrow{\partial} R$ bir çaprazlanmış modüldür.

Funktoriyel Örnekler:

1) Herhangi bir R, k-cebiri alındığında, her zaman çaprazlanmış modül yapısı,

$$F : Ceb \longrightarrow XMod$$

funktoru ile elde edilir. Bu funktorun objeleri

$$F(R) = (R, R, Id)$$

ve morfizmleri $f : R \longrightarrow S$, k-cebir morfizmi olmak üzere

$$F(f) = \left(\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & S\\ {\scriptstyle id_R}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id_S}\\ R & \xrightarrow[f]{} & S \end{array}\right) = (f, f)$$

dir.

Tersine (C, R, ∂) çaprazlanmış modülü verildiğinde

$$G : XMod \longrightarrow Ceb$$

funktoru tanımlanabilir. Objeleri

$$G(C, R, \partial) = R$$

şeklinde k-cebirine gönderilebilir. Buradan morfizmler

$$(\theta, \varphi) : (C, R, \partial) \longrightarrow (C', R', \partial')$$

çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere

$$G(\theta,\varphi) = \quad G\left(\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\partial"'] & C' \arrow[d, "\partial'"] \\ R \arrow[r, "\varphi"'] & R' \end{tikzcd}\right) = (\varphi : R \longrightarrow R')$$

şeklinde k-cebir morfizmleri olarak tanımlanır.

2) $R - Id\mathcal{C}$; R, k-cebirlerinin ideallerinin kategorisi olsun.

$$F : XMod/R \longrightarrow R - Id\mathcal{C}$$

funktoru tanımlanabilir. Bu funktorun objeleri

$$F(C,R,\partial) = \partial(C) \trianglelefteq R$$

ve morfizmleri

$$F\left(\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\partial"'] & & C' \arrow[dl, "\partial'"] \\ & R & \end{tikzcd}\right) = (\partial(C) \longrightarrow \partial(C'))$$

şeklinde R-cebirlerin ideallerinin morfizmleridir.

Tersine, örnek1.6 gereğince

$$G : R - Id\mathcal{C} \longrightarrow XMod/R$$

funktorunun objeleri $I \trianglelefteq R$ için

$$G(I) = (I,R,i)$$

ve morfizmleri $I,J \trianglelefteq R$ olmak üzere $f : I \longrightarrow J$ iç dönüşümü alınırsa

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i_1"'] & & J \arrow[dl, "i_2"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

şeklinde değişmeli diyagramı elde edilir. Çünkü her $x \in I$ için

$$i_2 f(x) = i_2(f(x)) = i_2(x) = x = i_1(x)$$

olup $i_2 f = i_1$ dir. Böylece

$$G\left(\begin{tikzcd} I \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i_1"'] & & J \arrow[dl, "i_2"] \\ & R & \end{tikzcd}\right) = (f, id_R) = f$$

çaprazlanmış modül morfizmi elde edilir.

3)

$$\mathbf{{}_R Mod} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbf{XMod/R}$$

funktoru tanımlanabilir. M, $R-$modül ise

$$F(M) = (0 : M \longrightarrow R)$$

ve $f : M \longrightarrow N$ $R-$modül morfizmi için

$$F(f) : F(M) \longrightarrow F(N)$$

olup

$$F(f) = \left(\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "0"'] & N \arrow[d, "0"] \\ R \arrow[r, "id_R"'] & R \end{tikzcd} \right) = (f, id_R) = f$$

çaprazlanmış $R-$modül morfizmidir.

$\partial : C \longrightarrow R$ çaprazlanmış $R-$modül morfizmi ise $F(\partial) =$Çek(∂)

$$\begin{array}{ccc} R \times \text{Çek}(\partial) & \longrightarrow & \text{Çek}(\partial) \\ (r,a) & \longmapsto & r \cdot a = ra \end{array}$$

işlemiyle Çek∂, $R-$modüldür. Çünkü $a \in$Çek∂ olduğundan

$$\partial r(a) = r\partial(a) = r \cdot 0 = 0$$

olup $r(a) \in$Çek∂ dır.

$$(f, Id_R) : (C, R, \partial) \longrightarrow (C', R', \partial')$$

çaprazlanmış modül morfizmi ise

$$G(f, Id_R) = (\text{Ç}ek\partial \longrightarrow \text{Ç}ek\partial')$$

$R-$modül morfizmidir.

4) Objeleri k-cebir morfizmleri ve morfizmleri değişmeli diyagramlar olacak şekilde Ceb^2 kategorisini alalım. Bu durumda

$$F : XMod \longrightarrow Ceb^2$$

forgetful funktoru tanımlanabilir. Yani $\partial : C \longrightarrow R$ çaprazlanmış $R-$modül morfizmi için $F(\partial) = \partial$ olup Peiffer şartını sağlamayan $\partial : C \longrightarrow R$, k-cebir morfizmidir.

$$(\theta,\varphi) : (C,R,\partial) \longrightarrow (C',R',\partial')$$

morfizmi için

$$F(\theta,\varphi) = \left(\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\partial"'] & C' \arrow[d, "\partial'"] \\ R \arrow[r, "\varphi"'] & R' \end{tikzcd}\right)$$

yalnız $k-$cebir morfizmlerinde oluşan değişmeli diyagram elde edilir. Benzer şekilde

$$F : XMod \longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \mathcal{H}^2 \\ Mod^2 \\ AbGrp^2 \end{array}\right\}$$

forgetful funktorları tanımlanabilir.

5)

$$F : XMod \longrightarrow Ceb$$

funktorunun objeleri

$$F(C,R,\partial) = R/\partial(C)$$

bir $k-$cebirdir. Çünkü

$$k \longrightarrow R \longrightarrow R/\partial(C)$$

halka homomorfizmi

$$\begin{array}{ccc} k \times R/\partial(C) & \longrightarrow & R/\partial(C) \\ (k, r+\partial(C) & \longmapsto & k\cdot(r+\partial(C)) = kr+\partial(C) \end{array}$$

işlemiyle $R/\partial(C)$, $k-$modül yapısı oluşturur. Morfizmleri ise

$$F(\theta,\varphi) = (R/\partial(C) \longrightarrow R'/\partial(C'))$$

indirgenmiş $k-$cebir homomorfizmleridir. Çünkü

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\partial"'] & C \arrow[d, "\partial'"] \\ R' \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[d, "q"'] & C' \arrow[d, "q'"] \\ R/\partial(C) \arrow[r] & R'/\partial(C') \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.

BÖLÜM 4

Çarpım Obje

4.1 Kategorilerde Çarpım Obje

Tanım 4.1 $\mathcal{C}$ bir kategori ve A ve B de $\mathcal{C}$ nin objeleri olsun.

$$\mathrm{P}r_1 : C \longrightarrow A \text{ , } \mathrm{P}r_2 : C \longrightarrow B$$

$\mathcal{C}$ nin morfimleri olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise C ye A ve B nin çarpım objesi denir.

D , $\mathcal{C}$ nin herhangi bir objesi ve $q_1 : D \longrightarrow A$, $q_2 : D \longrightarrow B$ morfizmleri verildiğinde

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[d, dotted] \arrow[dr, "q_2"] & \\ A & C \arrow[l, "Pr_1"] \arrow[r, "Pr_2"'] & B \end{tikzcd}$$

$$Pr_1 q = q_1$$

ve

$$Pr_2 q = q_2$$

olacak şekilde biricik

$$q : D \longrightarrow C$$

morfizmi var olmalı.

Örnek 4.1 $\mathcal{C}$,kümeler kategorisi olsun. $A, B \in Ob(\mathcal{C})$ ve

$$C = A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

kümesi A ve B nin çarpım objesi midir?

D bir küme $q_1 : D \longrightarrow A$, $q_2 : D \longrightarrow B$ fonksiyonları verildiğinde

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[d, dotted] \arrow[dr, "q_2"] & \\ A & C \arrow[l, "Pr_1"] \arrow[r, "Pr_2"'] & B \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yapacak şekilde biricik $q : D \longrightarrow C$ fonksiyonunun var olduğunu gösterelim.

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{P}r_1 : & C = A \times B & \longrightarrow & A \\ & (a,b) & \longmapsto & a \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{P}r_2 : & C = A \times B & \longrightarrow & B \\ & (a,b) & \longmapsto & b \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccc} q : & D & \longrightarrow & A \times B \\ & x & \longmapsto & (q_1(x), q_2(x)) \end{array}$$

fonksiyonları olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\begin{aligned} \mathrm{P}r_1 q(x) &= \mathrm{P}r_1(q_1(x), q_2(x)) \\ &= q_1(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}r_2 q(x) &= \mathrm{P}r_2(q_1(x), q_2(x)) \\ &= q_2(x) \end{aligned}$$

olup diyagram değişmelidir. Şimdi q nun tekliğini gösterelim.

q' , q ile aynı özelliğe sahip olsun. Yani

$$\begin{array}{rccc} q' : & D & \longrightarrow & A \times B \\ & x & \longmapsto & (a,b) \end{array}$$

$\mathrm{P}r_1 q' = q_1$ ve $\mathrm{P}r_2 q' = q_2$ olsun.

$$\begin{aligned} Pr_1 q'(x) &= Pr_1(a,b) \\ &= a \\ &= q_1(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Pr_2 q'(x) &= Pr_2(a,b) \\ &= b \\ &= q_2(x) \end{aligned}$$

olup

$$q'(x) = (a,b) = ((q_1(x), q_2(x)) = q(x)$$

dir. $x \in D$ keyfi olduğundan $q = q'$ dür. Yani q biriciktir. Böylece A ve B nin çaprım objesi $A \times B$ kümesidir.

Örnek 4.2 $\mathcal{C}$,gruplar kategorisi olsun. $G_1, G_2 \in Ob(\mathcal{C})$ ve

$$C = G_1 \times G_2 = \{(x,y) \mid x \in G_1, y \in G_2\}$$

$$(x,y)(x',y') = (xx', yy')$$

işlemine göre bir gruptur. şimdi bu kümenin G_1 ve G_2 nin çarpım objesi olduğunu gösterelim.

D bir grup ve $q_1 : D \longrightarrow G_1$, $q_2 : D \longrightarrow G_2$ grup homomorfizmi verildiğinde

$$\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[d, dotted] \arrow[dr, "q_2"] & \\
A & G \times G' \arrow[l, "Pr_1"] \arrow[r, "Pr_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapacak şekilde biricik $q : D \longrightarrow G_1 \times G_2$ grup homomorfizminin var olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{array}{rccc} q: & D & \longrightarrow & G_1 \times G_2 \\ & x & \longmapsto & (q_1(x), q_2(x)) \end{array}$$

fonksiyonu Her $x, y \in D$ için

$$\begin{array}{rcll} q(xy) & = & (q_1(xy), q_2(xy)) & \\ & & (q_1(x)q_1(y), q_2(x)q_2(y)) & (\because q_1, q_2 \text{ grup homomorfizmi}) \\ & & (q_1(x), q_2(x)), (q_1(y), q_2(y)) & (\because \text{grup işlemi}) \\ & & (q(x)q(y) & \end{array}$$

olup q bir grup homomorfizmidir.

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{P}r_1: & G_1 \times G_2 & \longrightarrow & G_1 \\ & (g_1, g_2) & \longmapsto & g_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{P}r_2: & G_1 \times G_2 & \longrightarrow & G_2 \\ & (g_1, g_2) & \longmapsto & g_2 \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rccc} q: & D & \longrightarrow & G_1 \times G_2 \\ & x & \longmapsto & (q_1(x), q_2(x)) \end{array}$$

homomorfizmlerinin olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{P}r_1 q(x) & = & \mathrm{P}r_1(q_1(x), q_2(x)) \\ & = & q_1(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{P}r_2 q(x) & = & \mathrm{P}r_2(q_1(x), q_2(x)) \\ & = & q_2(x) \end{array}$$

olup diyagram değişmelidir. Şimdi q nun tekliğini gösterelim.

q' , q ile aynı özelliğe sahip olsun. Yani

$$\begin{array}{rccc} q': & D & \longrightarrow & G_1 \times G_2 \\ & x & \longmapsto & (g_1, g_2) \end{array}$$

$\mathrm{P}r_1 q' = q_1$ ve $\mathrm{P}r_2 q' = q_2$ olsun.

$$\begin{array}{rcl} Pr_1 q'(x) & = & Pr_1(g_1, g_2) \\ & = & g_1 \\ & = & q_1(x) \end{array}$$

$$\begin{aligned} Pr_2 q'(x) &= Pr_2(g_1, g_2) \\ &= g_2 \\ &= q_2(x) \end{aligned}$$

olup

$$q'(x) = (g_1, g_2) = ((q_1(x), q_2(x)) = q(x)$$

dir. $x \in D$ keyfi olduğundan $q = q'$ dür. Yani q biriciktir. Böylece G_1 ve G_2 nin çaprım objesi $G_1 \times G_2$ çarpım grubudur.

Uyarı 4.2 Çarpım objesi her zaman mevcut değilgir.

Örnek 4.3 $\mathcal{C}$ kategorisinin objeleri tüm iki elemanlı kümelerden oluşsun, morfizmleride bu kümeler arasındaki fonksiyonlar olsun. $A = \{a_1, a_2\}$ ve $B = \{b_1, b_2\}$ olmak üzere $C = \{c_1, c_2\}$ A ve B nin çarpım objesi olsun. Buna göre $D = \{d_1, d_2\}$ iki elemanlı bir küme

$$\begin{array}{rccc} q_1 : & D & \longrightarrow & A \\ & d_1 & \longmapsto & a_1 \\ & d_2 & \longmapsto & a_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} q_2 : & D & \longrightarrow & B \\ & d_1 & \longmapsto & b_2 \\ & d_2 & \longmapsto & b_1 \end{array}$$

fonksiyonları verildiğinde

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[d, dotted] \arrow[dr, "q_2"] & \\ A & C \arrow[l, "Pr_1"] \arrow[r, "Pr_2"'] & B \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olur yani $\mathrm{P}r_1 q = q_1$ ve $\mathrm{P}r_2 q = q_2$ dir.

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{P}r_1 : & C & \longrightarrow & A \\ & c_1 & \longmapsto & a_1 \\ & c_2 & \longmapsto & a_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{P}r_2 : & C & \longrightarrow & B \\ & c_1 & \longmapsto & b_1 \\ & c_2 & \longmapsto & b_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} q : & D & \longrightarrow & C \\ & d_1 & \longmapsto & c_1 \\ & d_2 & \longmapsto & c_2 \end{array}$$

alalım.

$$Pr_2 q(d_1) \quad = \quad Pr_2(c_1) \quad = \quad b_1 \quad \neq \quad q_2(d_1) \quad = \quad b_2$$

ise

$$Pr_2 q \neq q_2$$

dir. Bu ise çelişkidir. Yani C, A ve B nin çarpım objesi değildir.

Teorem 4.3 Herhangi iki objenin çarpım objesi varsa izomorfizm farkıyla biriciktir.

İspat : $\mathcal{C}$ bir kategori , $A, B \in Ob(\mathcal{C})$ olsun. Kabul edelim ki C ve D , A ve B nin iki çarpım objesi olsun. A ve B nin çarpım objesi olarak C yi aldığımızda test objesi olarak D yi alabiliriz. Buna göre

$$\begin{tikzcd}
& D \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[d, dotted] \arrow[dr, "q_2"] & \\
A & C \arrow[l, "Pr_1"] \arrow[r, "Pr_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{P}r_1 q = q_1$ ve $\mathrm{P}r_2 q = q_2$ olacak şekilde diyagramı değişmeli yapan biricik $q : D \longrightarrow C$ morfizmi vardır:

D , A ve B nin çarpım objesi olarak alındığında test objesi olarak C yi alalım. Buna göre

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "Pr_1"'] \arrow[d, dotted] \arrow[dr, "Pr_2"] & \\
A & D \arrow[l, "q_1"] \arrow[r, "q_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

$q_1 p =$$\mathrm{P}r_1$ ve $q_2 p =$$\mathrm{P}r_2$ olacak şekilde diyagramı değişmeli yapan biricik $p : C \longrightarrow D$ morfizmi vardır.

$$\begin{tikzcd}
& D \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[d, "q"] \arrow[dr, "q_2"] & \\
A & C \arrow[l, "Pr_1"'] \arrow[r, "Pr_2"] \arrow[d, "p"] & B \\
& D \arrow[ul, "q_1"] \arrow[ur, "q_2"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir çünkü

$$\begin{aligned}
q_1(pq) &= (q_1 p)q \\
&= \mathrm{P}r_1 q \\
&= q_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_2(pq) &= (q_2 p)q \\
&= \mathrm{P}r_2 q \\
&= q_2
\end{aligned}$$

Ayrıca $1_D : D \longrightarrow D$ morfizmi de bu diyagramları değişmeli yapar. Bu diyagramı değişmeli yapacak birtek morfizm 1_D olduğundan

$$pq = 1_D$$

ve benzer şekilde

$$qp = 1_C$$

olup

$$p \cong q$$

ve böylece

$$C \cong D$$

dir.

4.2 Çaprazlanmış Modüller Kategorisinde Çaprım Obje

$\mathcal{C}$,$\mathbf{XMod}/R$ olsun. $\partial_A : (A \longrightarrow R)$, $\partial_B : (B \longrightarrow R)$ çaprazlamış modüller ise ∂_A ve ∂_B nin çarpım objesini gösterelim.

$\partial_D : (D \longrightarrow R)$ test objesi ve

$$\theta : (D \xrightarrow{\partial_D} R) \longrightarrow (A \xrightarrow{\partial_A} R)$$

$$\varphi : (D \xrightarrow{\partial_D} R) \longrightarrow (B \xrightarrow{\partial_B} R)$$

çaprazlanmış modül morfizmleri verildiğinde

$$\begin{tikzcd} & \partial_D \arrow[dl, "(\theta, Id_R)"'] \arrow[d, dotted] \arrow[dr, "(\varphi, Id_R)"] & \\ \partial_A & \partial_C \arrow[l] \arrow[r] & \partial_B \end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix} D \\ \downarrow \\ R \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A \\ \downarrow \\ R \end{pmatrix} = \begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\partial_D"'] & & A \arrow[dl, "\partial_A"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

$$\partial_D = \partial_A \theta$$

$$\begin{pmatrix} D \\ \downarrow \\ R \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} B \\ \downarrow \\ R \end{pmatrix} = \begin{tikzcd} D \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\partial_D"'] & & B \arrow[dl, "\partial_B"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

$$\partial_D = \partial_B \varphi$$

i)

$$A \times_R B = C = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B \; ve \; \partial_A(a) = \partial_B(b)\} \subseteq A \times B$$

için

$$\begin{array}{rcll} \partial_C : & A \times_R B & \longrightarrow & R \\ & (a,b) & \longmapsto & \partial_C(a,b) = \partial_A(a) = \partial_B(b) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} \partial_C(a,b)\cdot(a',b') & = & \partial_A(a)\cdot(a',b') & \\ & & (\partial_A(a)\cdot a', \partial_A(a)\cdot b') & \\ & & (\partial_A(a)\cdot a', \partial_B(a)\cdot b') & (\because \partial_A = \partial_B) \\ & & (aa', bb') & (\because \partial_A, \partial_B \text{ çaprazlanmış modül}) \\ & & (a,b)(a',b') & \end{array}$$

olup $\partial_C : A \times_R B \longrightarrow R$ bir çaprazlanmış modüldür.

$$ii) \begin{pmatrix} C \\ \downarrow \\ R \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A \\ \downarrow \\ R \end{pmatrix} = \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "\partial_C"'] & & A \arrow[dl, "\partial_A"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

$$(\partial_A \beta)(a,b) = \partial_A(\beta(a,b)) = \partial_A(a) = \partial_C(a,b)$$

yani

$$\partial_C = \partial_A \beta$$

dır.

$$\begin{pmatrix} C \\ \downarrow \\ R \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} B \\ \downarrow \\ R \end{pmatrix} = \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\partial_C"'] & & B \arrow[dl, "\partial_B"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

$$\partial_B \alpha(a,b) = \partial_B(\alpha(a,b)) = \partial_B(b) = \partial_C(a,b)$$

yani

$$\partial_C = \partial_A \alpha$$

dır.

$$\begin{tikzcd} R \times C \arrow[r, "Id_R \times \beta"] \arrow[d] & R \times A \arrow[d] \\ C \arrow[r, "\beta"'] & A \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(r,(a,b)) \arrow[r, "Id_R\times\beta"] \arrow[d] & (r,\beta(a,b)) \arrow[d] \\
(r\cdot a, r\cdot b) \arrow[r, "\beta"'] & (r,\beta(a,b))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rcl}
\beta(r\cdot a, r\cdot b) & = & r\cdot a \\
 & & r\cdot\beta(a,b)
\end{array}$$

dir. Benzer şekilde

$$\alpha(r\cdot a, r\cdot b) = r\cdot\alpha(a,b)$$

olup (β, Id_R) ve (α, Id_R) ikilileri çaprazlanmış modül morfizmleridir.

iii) $\begin{pmatrix} D \\ \downarrow \\ R \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} C \\ \downarrow \\ R \end{pmatrix} =$ $\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\partial_D"'] & & C \arrow[dl, "\partial_C"] \\
 & R &
\end{tikzcd}$

$$\begin{array}{rccc}
\psi: & D & \longrightarrow & C \\
 & d & \longmapsto & (\theta(d),\varphi(d))
\end{array}$$

olarak tanımlayalım.

$$(\partial_C\psi)(d) = \partial_C(\theta(d),\varphi(d)) = \partial_A(\theta(d)) = (\partial_A\theta)(d) = \partial_D(d)$$

olup

$$\partial_D = \partial_C\psi$$

dir.

$$\begin{tikzcd}
R\times D \arrow[r, "Id_R\times\psi"] \arrow[d] & R\times C \arrow[d] \\
D \arrow[r, "\psi"'] & C
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(r,d) \arrow[r] \arrow[d] & (r,\psi(d)) \arrow[d] \\
(r\cdot d) \arrow[r, "\psi"'] & (r\cdot\psi(d))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rcll}
\psi(r,d) & = & (\theta(r\cdot d),\varphi(r\cdot d)) & \\
 & = & (r\theta(d), r\varphi(d)) & (\because \varphi,\theta \text{ çaprazlanmış modül morfizmi}) \\
 & = & r(\theta(d),\varphi(d)) & \\
 & = & r\psi(d) &
\end{array}$$

olup (ψ, Id_R) ikilisi çaprazlanmış modül morfizmidir.

iv)

$$\begin{tikzcd}
 & \partial_D \arrow[dl, "(\theta{,}Id_R)"'] \arrow[d, dotted, "(\psi{,}Id_R)"] \arrow[dr, "(\varphi{,}Id_R)"] & \\
\partial_A & \partial_C \arrow[l, "(\beta{,}Id_R)"] \arrow[r, "(\alpha{,}Id_R)"'] & \partial_B
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rcl}(\beta\psi)(d) & = & \beta(\theta(d),\varphi(d)) \\ & = & \theta(d)\end{array}$$

olup

$$\beta\varphi = \theta$$

dır.

$$\begin{array}{rcl}(\alpha\psi)(d) & = & \alpha(\theta(d),\varphi(d)) \\ & = & \varphi(d)\end{array}$$

olup

$$\alpha\psi = \varphi$$

dir. Dolayısıyla diyagram değişmelidir.

v) (ψ, Id_R) ikilisi biricik mi?

ψ' ,ψ ile aynı özellikte olsun. Yani

$$\begin{array}{rccc}\psi' : & D & \longrightarrow & C \\ & d & \longmapsto & (a,b)\end{array}$$

için ; $\beta\psi' = \theta$ ve $\alpha\psi' = \varphi$ olsun.

$$(\beta\psi')(d) = \beta(a,b) = a = \theta(d)$$

$$(\alpha\psi')(d) = \alpha(a,b) = b = \varphi(d)$$

$$\psi'(d) = (a,b) = (\theta(d),\varphi(d)) = \psi(d)$$

olup $\psi = \psi'$ dür. Yani ψ biriciktir. Böylece $(\partial_C : A \times_R B \longrightarrow R)$ objesi $(A \xrightarrow{\partial_A} R)$ ve $(B \xrightarrow{\partial_B} R)$ objelerinin çarpım objesidir.

BÖLÜM 5

Ko-Çarpım Obje

5.1 Kategorilerde Ko-Çarpım Obje

Tanım 5.1 $\mathcal{C}$ bir kategori ve $A,B \in Ob(\mathcal{C})$ olsun. $i_1 : A \longrightarrow C$ ve $i_2 : B \longrightarrow C$,$\mathcal{C}$ nin morfizmleri olmak üzere aşağıdaki şartları sağlanıyor ise C ye A ve B nin ko-çarpımı denir ve $C = A \sqcup B$ ile gösterilir.

$$\begin{tikzcd} & D & \\ A \arrow[ur] \arrow[r] & C \arrow[u, dotted] & B \arrow[ul] \arrow[l] \end{tikzcd}$$

D herhangi bir obje ve $f : A \longrightarrow D$, $g : B \longrightarrow D$ morfizmleri verildiğinde

$$\begin{tikzcd} & D & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i_1"'] & C = A \sqcup B \arrow[u, dotted, "\phi"'] & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "i_2"] \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde biricik

$$\phi : A \sqcup B \longrightarrow D$$

morfizmi vardır.

Teorem 5.2 Ko-çarpım obje izomorfizm farkıyla biriciktir.

Örnek 5.1 $\mathcal{C}$ kümeler kategorisi olmak üzere,

$$\begin{tikzcd} & X & \\ G \arrow[ur, "f_G"] \arrow[r, "i_1"'] & G \sqcup H \arrow[u, dotted, "\phi"'] & H \arrow[ul, "f_H"'] \arrow[l, "i_2"] \end{tikzcd}$$

$G' = G \times \{1\}$ ve $H' = H \times \{2\}$ ise

$$G \sqcup H = G' \cup H', G' \cap H' = \emptyset$$

$$\begin{array}{rccc} i_1: & G & \longrightarrow & G \sqcup H \\ & g & \longmapsto & (g,1) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} i_2: & H & \longrightarrow & G \sqcup H \\ & h & \longmapsto & (h,2) \end{array}$$

içine fonksiyonları olmak üzere

$$\begin{array}{rccc} \phi: & G \sqcup H & \longrightarrow & X \\ & x & \longmapsto & \phi(x) = \left\{ \begin{smallmatrix} f_G(g); x=(g,1), g \in G \\ f_H(h); x=(h,2), h \in H \end{smallmatrix} \right\} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \phi i_1(g) & = & \phi((g,1)) \\ & = & f_G(g) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl} \phi i_2(h) & = & \phi((h,2)) \\ & = & f_H(h) \end{array}$$

olup diyagram değişmelidir. Şimdi ϕ nin tekliğini gösterelim.

ϕ, ϕ' ile aynı özellikte olsun.

$$\phi' : G \sqcup H \longrightarrow X$$

ve

$$\phi' i_1 = f_G \text{ , } \phi' i_2 = f_H$$

dir. $g \in G$ için

$$\begin{array}{rcl} \phi' i_1(g) & = & \phi'((g,1)) \\ & = & f_G(g) \end{array}$$

$h \in H$ için

$$\begin{array}{rcl} \phi' i_2(h) & = & \phi' i_2((h,2)) \\ & = & f_H(h) \end{array}$$

olduğundan

$$\phi'(x) = \left\{ \begin{array}{l} f_G;\ x = (g,1),\ g \in G \\ f_H;\ x = (h,2),\ h \in H \end{array} \right\} = \phi(x)$$

olup $\phi = \phi'$ olur. Dolayısıyla G ve H kümelerinin ko-çarpım objesi G ve H nin ayrık birleşimidir.

Örnek 5.2 $\mathcal{C}$ toplamsal Abelyen gruplar kategorisi ve G_1, G_2 toplamsal Abelyen gruplar olmak üzere

$$\begin{tikzcd} & X & \\ G_1 \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i_1"'] & G_1 \oplus G_2 \arrow[u, dotted, "\phi"] & G_2 \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "i_2"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rrcl} i_1: & G_1 & \longrightarrow & G_1 \oplus G_2 \\ & x & \longmapsto & (x,0) \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} i_2: & G_2 & \longrightarrow & G_1 \oplus G_2 \\ & y & \longmapsto & (0,y) \end{array}$$

için

$$\begin{array}{rcl} i_1(x_1+x_2) & = & (x_1+x_2,0) \\ & & (x_1,0)+(x_2,0) \\ & & i_1(x_1)+i_2(x_2) \end{array}$$

olup i_1 bir homomorfizmdir. Benzer şekilde i_2 ninde bir homomorfizm olduğu gösterilir.

$$\begin{array}{rrcl} \phi: & G_1 \oplus G_2 & \longrightarrow & H \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x)+g(y) \end{array}$$

fonksiyonu ;

$$\begin{array}{rcll} \phi((x,y)+(x',y') & = & \phi(x+x',y+y') & \\ & & f(x+x')+g(y+y') & \\ & & f(x)+f(x')+g(y)+g(y') & (\because f \text{ ve } g \text{ grup homomorfizmi}) \\ & & f(x)+g(y)+f(x')+g(y') & (\because G_1, G_2 \text{ abelyan}) \\ & & \phi((x,y))+\phi((x',y')) & \end{array}$$

olup ϕ bir grup homomorfizmidir.

$$\begin{array}{rcl} \phi i_1(x) & = & \phi((x,0) \\ & = & f(x)+g(0) \\ & = & f(x) \end{array}$$

olup $\phi i_1 = f$ dir. Benzer şekilde

$$\begin{array}{rcl} \phi i_2(y) & = & \phi((0,y) \\ & = & f(0)+g(y) \\ & = & g(y) \end{array}$$

olup $\phi i_2 = g$ dir. Yani diyagram değişmelidir. Şimdi ϕ nin tekliğini gösterelim.

ϕ', ϕ ile aynı özellikte olsun.

$$\begin{array}{rrcl} \phi': & G_1 \oplus G_2 & \longrightarrow & H \\ & (x,y) & \longmapsto & h \end{array}$$

grup homomorfizmi $\phi' i_1 = f$ ve $\phi' i_2 = g$ olsun.

$$\begin{array}{rcl}\phi' i_1(x) & = & \phi'((x,0)) \\ & = & f(x)\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}\phi' i_2(y) & = & \phi'((0,y)) \\ & = & g(y)\end{array}$$

olduğundan

$$\begin{array}{rcll}\phi'((x,y)) & = & \phi'((x,0)+\phi'((0,y)) & (\because \phi' \text{ grup homomorfizmi}) \\ & = & f(x)+g(y) & \\ & = & \phi((x,y)) & \end{array}$$

olup $\phi = \phi'$ dür. Yani G_1 ve G_2 abelyan gruplarının coproduct objesi $G_1 \oplus G_2$ (direkt toplam) dır.

5.2 Çaprazlanmış Modüller Kategorisinde Ko-Çarpım Obje

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{D} & \\ \mathcal{X} \arrow[ur] \arrow[r] & X \ltimes C \arrow[u, dotted] & \mathcal{C} \arrow[ul] \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$\mathbf{XMod}/R$ kategorisinde $\mathcal{A} = (\lambda : X \longrightarrow R)$ ve $\mathcal{B} = (\partial : C \longrightarrow R) \in Ob(\mathbf{XMod}/R)$ olsun. $\partial : C \longrightarrow R \in Ob(\mathbf{XMod}/R)$ olduğundan $R \times C \longrightarrow R$ ve $\lambda : X \longrightarrow R \in Ob(\mathbf{XMod}/R)$ olduğundan $R \times X \longrightarrow X$ modül etkileri vardır.

$$X \ltimes C = \{(x,c) \mid x \in X, c \in C\}$$

olmak üzere $(x,c),(y,d) \in X \ltimes C$ için

$$\begin{array}{rcl}(x,c)(y,d) & = & (xy, c\cdot y + x\cdot d + cd) \\ & = & (xy, c\lambda y + \lambda x d + cd)\end{array}$$

şeklinde tanımlanan işleme yarı direkt çarpım denir.

$$\begin{array}{rrcl}\bar{\partial}: & X \ltimes C & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ & (x,c) & \longmapsto & \lambda x + \partial c\end{array}$$

nin bir çaprazlanmış modül olduğunu gösterelim.

$$\begin{array}{rcl}R \times (X \ltimes C) & \longrightarrow & X \ltimes C \\ (r,(x,c)) & \longmapsto & r\cdot(x,c) = (r\cdot x, r\cdot c)\end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{ÇM1)} & \bar{\partial}(r\cdot(x,c)) & = & \bar{\partial}((r\cdot x, r\cdot c)) \\ & & = & \lambda(r\cdot x)+\partial(r\cdot c) \\ & & = & r\lambda x + r\partial c \qquad (\because \partial,\lambda \text{ Xmod}) \\ & & = & r(\lambda x+\partial c) \qquad (\because R \text{ halka}) \\ & & = & r\bar{\partial}((x,c)) \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{ÇM2)} & \bar{\partial}(x,c)(y,d) & = & (\lambda x+\partial c)\cdot(y,d) \\ & & = & (\lambda x\cdot y+\partial c\cdot y, \lambda x\cdot d+\partial c\cdot d) \\ & & = & (xy+\partial c\cdot y, \lambda x\cdot d+cd) \end{array}$$

diğer taraftan ise

$$(x,c)(y,d) = (xy, c\lambda y+\lambda xd+cd)$$

olup

$$(xy+\partial c\cdot y, \lambda x\cdot d+cd) \neq (xy, c\lambda y+\lambda xd+cd)$$

dir. Bu eşitliği sağlamak için;

$$(xy+\partial cy-xy, \lambda x\cdot d+cd-c\lambda y-\lambda xd+cd) = (\partial cy, -c\lambda y)$$

yi $\sim$ kümesine atalım.

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & (X\ltimes C)/\sim & \longrightarrow & R \\ & (x,c)+\sim & \longmapsto & \lambda x+\partial c \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} R\times(X\ltimes C/\sim) & \longrightarrow & (X\ltimes C)/\sim & & \\ (r,(x,c)+\sim) & \longmapsto & r((x,c+\sim)) & = & r\cdot(x,c)+\sim \\ & & & = & (r\cdot x, r\cdot c)+\sim \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{ÇM1)} & \sigma(r\cdot(x,c+\sim)) & = & \sigma((r\cdot x, r\cdot c)+\sim) \\ & & = & \lambda(r\cdot x)+\partial(r\cdot c) \\ & & = & r\lambda x+r\partial c \qquad (\because \partial,\lambda \text{ Xmod}) \\ & & = & r(\lambda x+\partial c) \qquad (\because R \text{ halka}) \\ & & = & r(\sigma((x,c)+\sim)) \end{array}$$

olup ÇM1 sağlanır.

$$\begin{array}{llll} \text{ÇM2)} & \sigma((x,c)+\sim)\cdot((y,d)+\sim) & = & (\lambda x+\partial c)\cdot((y,d)+\sim) \\ & & = & ((\lambda x+\partial c)\cdot y, (\lambda x+\partial c)\cdot d)+\sim) \\ & & = & (\lambda x\cdot y+\partial c\cdot y, \lambda x\cdot d+\partial c\cdot d)+\sim \\ & & = & ((xy,cd)+(\partial c\cdot y, \lambda x\cdot d)+\sim) \end{array}$$

diğer taraftan

$$\begin{array}{lll} ((x,c)+\sim)((y,d)+\sim) & = & (x,c)(y,d)+\sim \\ & = & (xy, c\cdot\lambda y+\lambda x\cdot d+cd)+\sim \\ & = & ((xy,cd)+(0, c\cdot\lambda y+\lambda x\cdot d))+\sim \end{array}$$

olup

$$(\partial c\cdot y, \lambda x\cdot d)+\sim) = ((0, c\cdot\lambda y+\lambda x\cdot d))+\sim)$$

olmalı.

$$\begin{array}{rcl}
(\partial c\cdot y,\lambda x\cdot d)+\sim) & = & ((0,c\cdot\lambda y+\lambda x\cdot d))+\sim) \\
 & = & (\partial c\cdot y,\lambda x\cdot d)-(0,c\cdot\lambda y+\lambda x\cdot d) \\
 & = & (\partial c\cdot y,\lambda x\cdot d-c\cdot\lambda y-\lambda x\cdot d) \\
 & \Longrightarrow & (\partial c\cdot y,-c\cdot\lambda y)\in\sim
\end{array}$$

olur. Dolayısıyla $(X\ltimes C)/\sim$ bir çaprazlanmış modüldür. Şimdi $(X\ltimes C)/\sim$ nin ko-çarpım obje olduğunu inceleyelim.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D} & \\
\mathcal{X} \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i_1"'] & (X\ltimes C)/\sim \arrow[u, dotted, "\phi"'] & \mathcal{C} \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "i_2"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rccc}
i_1: & \mathcal{A}=(\lambda:X\longrightarrow R) & \longrightarrow & (X\ltimes C)/\sim \\
 & x & \longmapsto & (x,0)+\sim
\end{array}$$

$$\begin{array}{rccc}
i_2: & \mathcal{B}=(\partial:C\longrightarrow R) & \longrightarrow & (X\ltimes C)/\sim \\
 & c & \longmapsto & (0,c)+\sim
\end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\lambda"'] & (X\ltimes C)/\sim \arrow[d, "\sigma"] \\
R \arrow[r, "Id_R"'] & R
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rcl}
\sigma i_1(x) & = & \sigma((x,0)+\sim) \\
 & & \lambda x+\partial 0 \\
 & & \lambda x
\end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl}
Id\lambda(x) & = & Id(\lambda x) \\
 & = & \lambda x
\end{array}$$

olup diyagram değişmelidir.

$$\begin{tikzcd}
R\times X \arrow[r, "(Id_R,i_1)"] \arrow[d] & R\times(X\ltimes C)/\sim \arrow[d] \\
X \arrow[r, "i_1"'] & (X\ltimes C)/\sim
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(r,x) \arrow[r] \arrow[d] & (r,(x,0)+\sim) \arrow[d] \\
r\cdot x \arrow[r] & r\cdot((x,0)+\sim)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rcl}
i_1(r\cdot x) & = & (r\cdot x,0)+\sim \\
 & & r\cdot(x,0)+\sim \\
 & & r\cdot((x,0)+\sim)
\end{array}$$

olup i_1 ve benzer şekilde i_2 çaprazlanmış modül morfizmidir.

$$\begin{array}{rcl} \phi: \ (X \ltimes C)/\sim & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ (x,c)+\sim & \longmapsto & f(x)+g(c) \end{array}$$

$$\left(\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\lambda"'] & & D \arrow[dl, "\partial_D"] \\ & R & \end{tikzcd}\right) = \partial_{\mathcal{D}} f = \lambda$$

ve

$$\left(\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\partial"'] & & D \arrow[dl, "\partial_D"] \\ & R & \end{tikzcd}\right) = \partial_{\mathcal{D}} g = \partial$$

$$\begin{tikzcd} (X \ltimes C)/\sim \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\sigma"'] & D \arrow[d, "\partial_D"] \\ R \arrow[r, "Id_R"'] & R \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rcl} \partial_{\mathcal{D}}\phi((x,c)+\sim) & = & \partial_{\mathcal{D}}(f(x)+g(c)) \\ & = & \partial_{\mathcal{D}}(f(x))+\partial_{\mathcal{D}}(g(c)) \\ & = & (\partial_{\mathcal{D}} f)(x)+(\partial_{\mathcal{D}} g)(c) \\ & = & \lambda x+\partial c \\ & = & \sigma((x,c)+\sim) \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} R \times (X \ltimes C)/\sim \arrow[r, "(Id_R{,}\sigma)"] \arrow[d] & R \times D \arrow[d] \\ (X \ltimes C)/\sim \arrow[r, "\sigma"'] & D \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} r\cdot((x,c)+\sim) \arrow[r] \arrow[d] & r\cdot(f(x)+g(c)) \arrow[d] \\ (r\cdot x, r\cdot c)+\sim \arrow[r] & r\cdot f(x)+r\cdot g(c) \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rcl} \sigma((r\cdot x, r\cdot c)+\sim) & = & f(r\cdot x)+g(r\cdot c) \\ & = & rf(x)+rg(c) \end{array}$$

olup ϕ bir çaprazlanmış modül morfizmidir.

$$\begin{aligned}
\phi i_1(x) &= \phi((x,0)+\sim) \\
&= f(x)+g(0) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\phi i_2(c) &= \phi((0,c)+\sim) \\
&= f(0)+g(c) \\
&= g(c)
\end{aligned}$$

dir. Şimdi ϕ nin tekliğini gösterelim.

ϕ', ϕ ile aynı özellikte olsun.

$$\begin{array}{rccc}
\phi' : & (X \ltimes C)/\sim & \longrightarrow & \mathcal{D} \\
& (x,c)+\sim & \longmapsto & d
\end{array}$$

ϕ' çaprazlanmış modül morfizmi, $\phi' i_1 = f$ ve $\phi' i_2 = g$ dir.

$$\begin{aligned}
\phi' i_1(x) &= \phi'((x,0)+\sim) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi' i_2(c) &= \phi'((0,c)+\sim) \\
&= g(c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi'((x,c)+\sim) &= \phi'(((x,0)+(0,c))+\sim) \\
&= \phi'((x,0)+\sim)+\phi'((0,c)+\sim) \\
&= f(x)+g(c) \\
&= \phi((x,c)+\sim)
\end{aligned}$$

olup $\phi' = \phi$ dir. Böylece $\mathcal{A} = (\lambda : X \longrightarrow R)$ ve $\mathcal{B} = (\partial : C \longrightarrow R)$ objelerinin ko-çarpım objesi $(X \ltimes C)/\sim$ dir.

BÖLÜM 6

Geri Çekme Obje

6.1 Kategorilerde Geri Çekme Obje

Tanım 6.1 $\mathcal{C}$ herhangi bir kategori olsun. $A, B, C \in Ob(\mathcal{C})$ objeleri için $\alpha : A \longrightarrow C$, $\beta : B \longrightarrow C$ morfizmler olmak üzere

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & C \end{tikzcd}$$

değişmeli ($\alpha f = \beta g$) diyagramı verildiğinde $E \in Ob(\mathcal{C})$, $h_1 : E \longrightarrow A$, $h_2 : E \longrightarrow B$,

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[drr, bend left, "h_2"] \arrow[ddr, bend right, "h_1"'] & & \\ & P \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[d, "\beta"] \\ & A \arrow[r, "\alpha"'] & C \end{tikzcd}$$

$$\alpha h_1 = \beta h_2, \; gh = h_2, \; fh = h_1$$

için biricik $h : E \longrightarrow P$ morfizmi varsa (f, g), (α, β) nın geri çekmesidir. Burada P ise geri çekme objesidir.

Uyarı 6.2

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & C \end{tikzcd}$$

değişmeli ($\alpha f = \beta g$) diyagramına geri çekme diyagramı denir.

Teorem 6.3 (α,β) ve (α',β'), (θ,ϕ) nin geri çekmeleri olsun.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\theta"] \\ B \arrow[r, "\phi"'] & X \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta'"'] & A \arrow[d, "\theta"] \\ B \arrow[r, "\phi"'] & X \end{tikzcd}$$

Bu durumda $\varphi : Y \longrightarrow Y'$ biricik izomorfizm vardır.

İspat : (α,β), (θ,ϕ) nin geri çekmesi ve Y' test objesi olarak alındığında

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[dr, dotted, "\varphi'"] \arrow[drr, bend left, "\alpha'"] \arrow[ddr, bend right, "\beta'"'] & & \\ & Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & A \arrow[d, "\theta"] \\ & B \arrow[r, "\phi"'] & X \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olup φ' biricik ve $\beta\varphi' = \beta'$, $\alpha\varphi' = \alpha'$ dür. (α',β'), (θ,ϕ) nin geri çekmesi ve Y test objesi olarak alındığında;

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, dotted, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "\alpha"] \arrow[ddr, bend right, "\beta"'] & & \\ & Y' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta'"] & A \arrow[d, "\theta"] \\ & B \arrow[r, "\phi"'] & X \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olup φ biricik ve $\alpha'\varphi = \alpha$ ve $\beta'\varphi = \beta$ dır. Bu durumda;

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, shift left, "1_Y"] \arrow[drr, bend left, "\alpha"] \arrow[ddr, bend right, "\beta"'] & & \\ & Y \arrow[ul, shift left, "\varphi\varphi'"] \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta'"] & A \arrow[d, "\theta"] \\ & B \arrow[r, "\phi"'] & X \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}\alpha(\varphi'\varphi) &= (\alpha\varphi')\varphi\\ &= \alpha'\varphi\\ &= \alpha\\ &= \alpha 1_Y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta(\varphi'\varphi) &= (\beta\varphi')\varphi\\ &= \beta'\varphi\\ &= \beta\\ &= \beta 1_Y\end{aligned}$$

olup $(\varphi'\varphi) = 1_Y (\because \varphi$ ve φ' biricik). Benzer şekilde;

$$\begin{aligned}\alpha'(\varphi\varphi') &= (\alpha'\varphi)\varphi'\\ &= \alpha\varphi'\\ &= \alpha'\\ &= \alpha' 1_{Y'}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta'(\varphi\varphi') &= (\beta'\varphi)\varphi'\\ &= \beta\varphi'\\ &= \beta'\\ &= \beta' 1_{Y'}\end{aligned}$$

olup $(\varphi\varphi') = 1_{Y'} (\because \varphi$ ve φ' biricik). Böylece $\varphi : Y' \longrightarrow Y$ biricik izomorfizm vardır.

Örnek 6.1 $\mathcal{C}$, kümeler kategorisi olsun. $A, B, C \in Ob(\mathcal{C})$, $\alpha, \beta \in Mor(\mathcal{C})$ ve $\alpha h_1 = \beta h_2$ olmak üzere (α, β) nın geri çekmesi (pullback)

$$D = A \times_C B = \{(a,b) \mid \alpha(a) = \beta(b)\}$$

dir.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[drr, bend left, "h_2"] \arrow[ddr, bend right, "h_1"'] & & \\ & D \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[d, "\beta"] \\ & A \arrow[r, "\alpha"'] & C \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} f : \ A \times_C B &\longrightarrow A\\ (a,b) &\longmapsto a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \ A \times_C B &\longrightarrow B\\ (a,b) &\longmapsto b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha f((a,b)) &= \alpha(a)\\ &= \beta(b)\\ &= \beta(g(a,b))\\ &= \beta g(a,b)\end{aligned}$$

olup $\alpha f = \beta g$ dir.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "h_1"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & C \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rccl} h: & E & \longrightarrow & A \times_C B \\ & e & \longmapsto & h(e) = (h_1(e), h_2(e)) \end{array}$$

için

$$\begin{aligned} fh(e) &= f(h_1(e), h_2(e)) \\ &= h_1(e) \end{aligned}$$

olup $fh = h_1$ dir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} gh(e) &= g(h_1(e), h_2(e)) \\ &= h_2(e) \end{aligned}$$

olup $gh = h_2$ dir.

h nin biricikliği:

h' ve h aynı özellikte olsun.

$$\begin{array}{rccl} h': & E & \longrightarrow & A \times_C B \\ & e & \longmapsto & h'(e) = (a, b) \end{array}$$

olup $fh' = h_1$ ve $gh' = h_2$ dir.

$$\begin{aligned} fh'(e) &= f((a,b)) \\ &= a \\ &= h_1(e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} gh'(e) &= g((a,b)) \\ &= b \\ &= h_2(e) \end{aligned}$$

ise

$$\begin{aligned} h'(e) &= (a,b) \\ &= (h_1(e), h_2(e)) \\ &= h(e) \end{aligned}$$

olup $h = h'$ dür.

Örnek 6.2 $\mathcal{C}$, gruplar kategorisi olsun.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[drr, bend left, "h_2"] \arrow[ddr, bend right, "h_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[d, "\beta"] \\
& A \arrow[r, "\alpha"'] & C
\end{tikzcd}$$

$A, B, X \in Ob(\mathcal{C})$ ve $\alpha, \beta \in Mor(\mathcal{C})$ olmak üzere (α, β) nın geri çekmesi

$$P = A \times_C B = \{(a,b) \mid \alpha(a) = \beta(b)\}$$

dir. P kümesi

$$(a,b)(a',b') = (aa',bb')$$

işlemiyle bir gruptur.

$$\begin{aligned} h(ee') &= (h_1(ee'),h_2(ee')) \\ &= (h_1(e)h_1(e'),h_2(e)h_2(e')) \\ &= (h_1(e),h_2(e))\cdot(h_1(e'),h_2(e')) \\ &= h(e)h(e') \end{aligned}$$

olup $h \in Mor(\mathcal{C})$ dir.

Örnek 6.3 Bir fonksiyonun ters görüntüsü geri çekmenin özel bir halidir.

$$\begin{tikzcd} g^{-1}(A) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "j"'] & A \arrow[d, "i"] \\ B \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

$$g^{-1}(A) = \{x \in B \mid g(x) \in A\}$$

ters görüntü geri çekme objedir.

Özel Haller:

1) $\mathcal{C}$, kümeler kategorisi örneğinde özel olarak $B \subseteq C$ ve β içine fonksiyon, $\alpha : A \longrightarrow C$ herhangi bir fonksiyon alınırsa;

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[drr, bend left, "h_2"] \arrow[ddr, bend right, "h_1"'] & & \\ & D \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[d, "\beta=i"] \\ & A \arrow[r, "\alpha"'] & C \end{tikzcd}$$

$B \subseteq C$,

$$\begin{aligned} A \times_C B &= \{(a,b) \mid \alpha(a) = \beta(b)\} \\ &= \{(a,b) \mid \alpha(a) = b\} \\ &= \{(a,b) \mid \alpha(a) \in B\} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\alpha^{-1}(B) = \{a \in A \mid \alpha(a) \in B\}$$

kümesi $A \times_C B$ kümesine izomorf olur.

$$\begin{tikzcd}
A \times_C B \arrow[dr, dotted, "\varepsilon"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
& \alpha^{-1}(A) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "j"] & B \arrow[d, "i"] \\
& A \arrow[r, "\alpha"'] & C
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rccc}
\varepsilon: & A \times_C B & \longrightarrow & \alpha^{-1}(A) \\
& (a,b) & \longmapsto & ?
\end{array}$$

$$\begin{array}{rccc}
f: & A \times_C B & \longrightarrow & A \\
& (a,b) & \longmapsto & a
\end{array}$$

$$\begin{array}{rccc}
j: & \alpha^{-1}(B) & \longrightarrow & A \\
& a & \longmapsto & a
\end{array}$$

$$\begin{array}{rccc}
\phi: & \alpha^{-1}(B) & \longrightarrow & B \\
& a & \longmapsto & b
\end{array}$$

olsun. $j\varepsilon = f$ olmalı. Her $(a,b) \in A \times_C B$ için

$$\begin{array}{rcl}
(j\varepsilon)(a,b) & = & j(\varepsilon(a,b)) \\
& = & \varepsilon(a,b)
\end{array}$$

ve

$$\begin{array}{rcl}
\varepsilon(a,b) & = & j\varepsilon(a,b) \\
& = & f(a,b) \\
& = & a
\end{array}$$

olup $\varepsilon(a,b) = a$ almalıyız. Yani

$$\begin{array}{rccc}
\varepsilon: & A \times_C B & \longrightarrow & \alpha^{-1}(B) \\
& (a,b) & \longmapsto & a
\end{array}$$

olmalı.

$$\begin{array}{rcl}
j\varepsilon(a,b) & = & j(a) \\
& = & a \\
& = & f(a,b)
\end{array}$$

olup $j\varepsilon = f$ olur. Diğer taraftan;

$$\begin{array}{rcl}
\phi\varepsilon(a,b) & = & \phi(a) \\
& = & b \\
& = & g(a,b)
\end{array}$$

olup $\phi\varepsilon = g$ olur. Şimdi ε nun tekliğini gösterelim.

$\varepsilon, \varepsilon'$ ile aynı özellikte olsun.

$$\begin{array}{rccc}
\varepsilon': & A \times_C B & \longrightarrow & \alpha^{-1}(B) \\
& (a,b) & \longmapsto & x
\end{array}$$

$j\varepsilon' = f$ ve $\phi\varepsilon' = g$ olsun.

$$\begin{aligned} j\varepsilon'(a,b) &= \varepsilon'(a,b) \\ &= f(a,b) \\ &= a \\ &= \varepsilon(a,b) \end{aligned}$$

olup $\varepsilon' = \varepsilon$ dur. Yani ε biriciktir.

$\alpha^{-1}(B)$, (α,β) nın geri çekme objesi olup geri çekme obje izomorfizm farkıyla biricik olduğundan

$$\alpha^{-1}(B) = A \times_C B$$

dir.

2) Gruplar kategorisinde geri çekme diyagramında $B = 0$ alınırsa;

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\ & D \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d, "i"] \\ & A \arrow[r, "\alpha"'] & C \end{tikzcd}$$

için geri çekme obje $0 \subseteq C$,

$$\begin{aligned} A \times_C B \cong \alpha^{-1}(B) &= \{a \in A \mid \alpha(a) \in B\} \\ &= \{a \in A \mid \alpha(a) \in 0\} \\ &= \{a \in A \mid \alpha(a) = 0\} \\ &= Ker\alpha \end{aligned}$$

olur.

3) $A \trianglelefteq C$ ve $B \trianglelefteq C$ alınırsa geri çekme obje;

$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d, "i"] \\ A \arrow[r, "i"'] & C \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}(B) &= \{a \in A \mid i(a) \in B\} \\ &= \{a \in A \mid a \in B\} \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

6.2 Çaprazlanmış Modüller Kategorisinde Geri Çekme Obje

$\mathcal{A} = (\partial_A \longrightarrow R)$, $\mathcal{B} = (\partial_B \longrightarrow R) \in Ob(\mathbf{XMod}/R)$ olsun.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[dr, dotted, "{(h,1_R)}"] \arrow[drr, bend left, "{(h_2,1_R)}"] \arrow[ddr, bend right, "{(h_1,1_R)}"'] & & \\
& \mathcal{D} \arrow[r, "{(g,1_R)}"] \arrow[d, "{(f,1_R)}"] & \mathcal{B} \arrow[d, "\beta"] \\
& \mathcal{A} \arrow[r, "\alpha"'] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

$$D = \{(a,b) \mid \alpha(a) = \beta(b)\}$$

R-cebir olmak üzere

$$\begin{array}{rccc}
\partial_D : & A \times_C B & \longrightarrow & R \\
& (a,b) & \longmapsto & \partial_A(a) = \partial_B(b)
\end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\partial_A"'] & & C \arrow[dl, "\partial_C"] \\
& R &
\end{tikzcd}$$

$$\partial_C \alpha = \partial_A$$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "\partial_B"'] & & C \arrow[dl, "\partial_C"] \\
& R &
\end{tikzcd}$$

$$\partial_C \beta = \partial_B$$

$$\begin{array}{rcl}
\partial_A(a) & = & \partial_C \alpha(a) \\
& = & \partial_C(\alpha(a)) \\
& = & \partial_C(\beta(b)) \\
& = & \partial_C \beta(b) \\
& = & \partial_B(b)
\end{array}$$

olup $\partial_A = \partial_B$ dir.

$$\begin{array}{ccc}
R \times (A \times_C B) & \longrightarrow & A \times_C B \\
(r,(a,b)) & \longmapsto & (r \cdot (a,b)) = (r \cdot a, r \cdot b)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
\alpha(r \cdot a) & = & r\alpha(a) & (\because \alpha \text{ çaprazlanmış modül morfizmi}) \\
& = & r\beta(b) & \\
& = & \beta(r \cdot b) & (\because \beta \text{ çaprazlanmış modül morfizmi})
\end{array}$$

olup$\alpha(r\cdot a)=\beta(r\cdot b)$ dir.

$$
\begin{array}{llll}
\text{ÇM2)} & \partial_D(a,b)\cdot(a',b') & = & \partial_A(a)(a',b') \\
& & = & (\partial_A(a)a',\partial_A(a)b') \\
& & = & (\partial_A(a)a',\partial_B(b)b') \\
& & = & (aa',bb') \qquad\qquad (\because \partial_A,\partial_B \in xMod/R) \\
& & = & (a,b)(a',b')
\end{array}
$$

olup ∂_D bir çaprazlamış modüldür.

$(f,1_R)$ nnin bir çaprazlanmış R-modül morfizmi olduğunu gösterelim;

$$
\begin{array}{rlll}
f: & A\times_C B & \longrightarrow & A \\
 & (a,b) & \longmapsto & a
\end{array}
$$

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\partial_D"'] & & A \arrow[dl, "\partial_A"] \\
& R &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\partial_A f(a,b) & = & \partial_A(a) \\
& = & \partial_D(a,b)
\end{array}
$$

olup $\partial_A f=\partial_D$ dir.

$$
\begin{tikzcd}
R\times(A\times_C B) \arrow[r] \arrow[d] & R\times A \arrow[d] \\
A\times_C B \arrow[r] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(r,(a,b)) \arrow[r] \arrow[d] & (r,a) \arrow[d] \\
r\cdot(a,b) \arrow[r] & r\cdot a
\end{tikzcd}
$$

olup $(f,1_R)$ bir çaprazlanmış R-modül morfizmi. Benzer şekilde $(g,1_R)$ ninde bir çaprazlanmış R-modül morfizmi olduğu gösterilir.

$$
\begin{array}{rcl}
\alpha f(a,b) & = & \alpha(a) \\
& = & \beta(b) \\
& = & \beta(g(a,b)) \\
& = & \beta g(a,b)
\end{array}
$$

olup $\alpha f=\beta g$ dir.

$$
\begin{array}{rlll}
h: & E & \longrightarrow & A\times_C B \\
 & e & \longmapsto & (h_1(e),h_2(e))
\end{array}
$$

bir çaprazlanmış modül homomorfizmidir.

$$\begin{aligned} fh(e) &= f(h_1(e),h_2(e)) \\ &= h_1(e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} gh(e) &= g(h_1(e),h_2(e)) \\ &= h_2(e) \end{aligned}$$

yani $fh = h_1$ ve $gh = h_2$ dir.

h nin tekliği :

h, h' ile aynı özellikte olsun.

$$\begin{array}{rccc} h': & E & \longrightarrow & A \times_C B \\ & e & \longmapsto & (a,b) \end{array}$$

çaprazlanmış modül homomorfizmidir, $fh' = h_1$ ve $gh' = h_2$ dir.

$$\begin{aligned} fh'(e) &= f(a,b) \\ &= a \\ &= h_1(e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} gh'(e) &= g(a,b) \\ &= b \\ &= h_2(e) \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} h'(e) &= (a,b) \\ &= (h_1(e),h_2(e)) \\ &= h(e) \end{aligned}$$

olur. Yani $h' = h$ dır ve h biriciktir.

BÖLÜM 7

İleri İtme OBJE

7.1 Kategorilerde İleri itme Obje

Tanım 7.1 $\mathcal{C}$ kategorisinde $f_1 : A \longrightarrow B$, $f_2 : A \longrightarrow C$ morfizmleri verilsin.

$i)$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & B \arrow[d, "g_2"] \\ C \arrow[r, "g_1"'] & P \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $g_1 : C \longrightarrow P$, $g_2 : B \longrightarrow P$ morfizmleri var olmalı.

$ii)$ Q objesi ve

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & B \arrow[d, "h_2"] \\ C \arrow[r, "h_1"'] & Q \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $h_1 : C \longrightarrow Q$, $h_2 : B \longrightarrow Q$ morfizmleri verildiğinde

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & B \arrow[d, "g_2"] \arrow[ddr, bend left, "h_2"] & \\ C \arrow[r, "g_1"'] \arrow[drr, bend right, "h_1"'] & P \arrow[dr, dotted, "h"] & \\ & & Q \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli (yani $hg_1 = h_1$ ve $hg_2 = h_2$) olacak şekilde biricik $h : P \longrightarrow Q$ morfizmi var olmalı;

şartları sağlanıyor ise (P, g_1, g_2) ye (kısaca P ye) (f_1, f_2) nin ileri itmesi denir.

Örnek 7.1 $\mathcal{C}$, (sağ veya sol) modüller kategorisi olmak üzere her zaman ileri itme objesi vardır.

$f_1 : T \longrightarrow M$, $f_2 : T \longrightarrow N$ modül homomorfizmleri verilsin.

$$\begin{array}{rccl} \delta : & T & \longrightarrow & M \oplus N \\ & x & \longmapsto & (f_1(x), -f_2(x)) \end{array}$$

homomorfizmini tanımlayalım.

$$T \xrightarrow{\delta} M \oplus N \xrightarrow{\pi} (M \oplus N)/Im\delta$$

$$Ker\pi = Im\delta$$

$$\begin{array}{rcll} (f_1(x), -f_2(x)) & = & \delta(x) & \in Ker\pi \\ & = & (f_1(x), 0) - (0, f_2(x)) & \\ & = & \delta(x) & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \pi((f_1(x), 0) - (0, f_2(x)) & = & 0 \\ & \Leftrightarrow & \pi((f_1(x), 0)) = \pi(0, f_2(x)) \end{array}$$

Bunun anlamı;

$$Mi_1 \xrightarrow{i_1} M \oplus N \xrightarrow{\pi} P = (M \oplus N)/Im\delta$$

$$g_2 : \pi i_1 : M \longrightarrow P$$

ve

$$N \xrightarrow{i_2} M \oplus N \xrightarrow{\pi} P = (M \oplus N)/Im\delta$$

$$g_1 : \pi i_2 : N \longrightarrow P$$

homomorfizmleri vardır.

$i)$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & M \arrow[d, "g_2"] \\ N \arrow[r, "g_1"'] & P \end{tikzcd}$$

Her $x \in T$ için

$$\begin{array}{rcl} (g_1 f_2)(x) & = & (\pi i_2 f_2)(x) \\ & = & (\pi i_2)(f_2(x)) \\ & = & \pi(i_2(f_2(x))) \\ & = & \pi(0, f_2(x)) \\ & = & \pi(f_1(x), 0) \\ & = & \pi(i_1(f_1(x))) \\ & = & (\pi i_1)(f_1(x)) \\ & = & (\pi i_1 f_1)(x) \\ & = & (g_2 f_1)(x) \end{array}$$

olup

$$g_1 f_2 = g_2 f_1$$

yani diyagram değişmelidir.

ii)

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & M \arrow[d, "h_2"] \\ N \arrow[r, "h_1"'] & Q \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramı $(h_1 f_2 = h_2 f_1)$ verilsin.

$$\begin{array}{rccc} h_2 \oplus h_1 : & M \oplus N & \longrightarrow & Q \\ & (m,n) & \longmapsto & h_2(m) + h_1(n) \end{array}$$

homomorfizmini tanımlayalım.

$$\begin{tikzcd} M \oplus N \arrow[r, "h_2 \oplus h_1"] \arrow[d, "\pi"'] & Q \\ (M \oplus N)/Imf \arrow[ur, dotted, "h"'] & \end{tikzcd}$$

h nin biricik olduğunu gösterelim. Bunun için (evrensellik özelliğinden)

$$(h_2 \oplus h_1)(Imf) = \{0\}$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$$\begin{array}{rccc} \delta : & T & \longrightarrow & M \oplus N \\ & x & \longmapsto & (f_1(x), -f_2(x)) \end{array}$$

$\mathrm{Im}\delta \trianglelefteq M \oplus N$ ve $(h_2 \oplus h_1)(Imf) = \{0\}$ olduğundan diyagram değişmeli olacak şekilde biricik

$$h : (M \oplus N)/Im\delta \longrightarrow Q$$

homomorfizmi vardır.$(h_2 \oplus h_1)(\mathrm{Im}\delta) = \{0\}$ olduğunu gösterelim. Her $x \in T$ için

$$\begin{array}{rcll} (h_2 \oplus h_1)(\delta(x)) & = & (h_2 \oplus h_1)(f_1(x), -f_2(x)) & \\ & = & h_2(f_1(x)) - h_1(f_2(x)) & \\ & = & (h_2 f_1)(x) - (h_1 f_2)(x) & \\ & = & 0 & (\because h_2 f_1 = h_1 f_2) \end{array}$$

ise $(h_2 \oplus h_1)(\mathrm{Im}\delta) = \{0\}$ dır. Bu durumda

$$\begin{array}{rccc} h : & P & \longrightarrow & Q \\ & [(m,n)] & \longmapsto & h_1(m) + h_1(n) \end{array}$$

biricik homomorfizmi vardır. Son olarak diyagramın değişmeli ($hg_1 = h_1, hg_2 = h_2$) olduğunu gösterelim.

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & M \arrow[d, "g_2"] \arrow[ddr, bend left, "h_2"] & \\
N \arrow[r, "g_1"'] \arrow[drr, bend right, "h_1"'] & (M \oplus N)/imf \arrow[dr, dotted, "h"] & \\
 & & Q
\end{tikzcd}
$$

Her $n \in N$ için

$$
\begin{aligned}
(hg_1)(n) &= h(g_1(n)) \\
&= h((\pi i_2)(n)) \qquad (\because g_1 = \pi i_2) \\
&= h(\pi(i_2(n))) \\
&= h(\pi(0,n)) \\
&= h([(0,n)]) \\
&= h_2(0) + h_1(n) \quad (\because h \text{ nin tanımı}) \\
&= 0 + h_1(n) \\
&= h_1(n)
\end{aligned}
$$

olup $hg_1 = h_1$ dir.

Her $m \in M$ için

$$
\begin{aligned}
(hg_2)(m) &= h(g_2(m)) \\
&= h((\pi i_1)(m)) \\
&= h(\pi(i_1(m))) \\
&= h(\pi(m,0)) \\
&= h([(m,0)]) \\
&= h_2(m) + h_1(0) \\
&= h_2(m) + 0 \\
&= h_2(m)
\end{aligned}
$$

olup $hg_2 = h_1$ dir. Böylece $(M \oplus N)/Im\delta$ (f_1, f_2) nin ileri itmesidir.

7.2 Çaprazlanmış Modüller Kategorisinde İleri İtme Obje

$\mathcal{A} = (A \xrightarrow{\partial_A} R), \mathcal{B} = (B \xrightarrow{\partial_B} R), \mathcal{C} = (C \xrightarrow{\partial_C} R) \in Ob(\mathbf{XMod}/R)$ morfizmleri verilsin.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B} \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
\mathcal{C} \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & (B \ltimes C)/N \arrow[dr, dotted] & \\
 & & \mathcal{Q}
\end{tikzcd}
$$

$(B \ltimes C)/N$ nin bir çaprazlanmış modül olduğunu gösterelim. Burada N; $<(f_1(a), -f_2(a))>$ ile $(\partial_C(c) \cdot b', -\partial_B(b') \cdot c)$ elemanlarından oluşur.

$$
\begin{array}{rrcl}
\partial' : & (B \ltimes C)/N & \longrightarrow & R \\
& (b,c)+N & \longmapsto & \partial_B(b) + \partial_C(c)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rclcl}
R \times (B \ltimes C)/N & \longrightarrow & (B \ltimes C)/N & & \\
(r(b,c)+N) & \longmapsto & r \cdot ((b,c)+N) & = & r \cdot (b,c)+N \\
& & & = & (r \cdot b, r \cdot c)+N
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{ÇM1)} & \partial'(r \cdot ((b,c)+N)) & = & \partial'((r \cdot b, r \cdot c)+N) \\
& & = & \partial_B(r \cdot b) + \partial_C(r \cdot c) \\
& & = & r\partial_B(b) + r\partial_C(c) \\
& & = & r(\partial_B(b) + \partial_C(c)) \\
& & = & r\partial'((b,c)+N)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{ÇM2)} & \partial'((b,c)+N) \cdot ((b',c')+N) & = & (\partial_B(b) + \partial_C(c)) \cdot ((b',c')+N) \\
& & = & ((\partial_B(b) + \partial_C(c)) \cdot b', (\partial_B(b) + \partial_C(c) \cdot c')+N \\
& & = & (\partial_B(b) \cdot b' + \partial_C(c) \cdot b', \partial_B(b) \cdot c' + \partial_C(c) \cdot c')+N \\
& & = & (bb' + \partial_C(c) \cdot b', \partial_B(b) \cdot c' + cc')+N
\end{array}
$$

Diğer taraftan,

$$
\begin{array}{rcl}
((b,c)+N)((b',c')+N) & = & (bb', b' \cdot c + b \cdot c' + cc')+N \\
& = & (bb', \partial_B(b') \cdot c + \partial_B(b) \cdot c' + cc')+N
\end{array}
$$

olup

$$
(bb' + \partial_C(c) \cdot b', \partial_B(b) \cdot c' + cc')+N = (bb', \partial_B(b') \cdot c + \partial_B(b) \cdot c' + cc')+N
$$

olmalıdır.

$$
\begin{array}{cc}
& (bb' + \partial_C(c) \cdot b', \partial_B(b) \cdot c' + cc')+N = (bb', \partial_B(b') \cdot c + \partial_B(b) \cdot c' + cc')+N \\
\Rightarrow & (bb' + \partial_C(c) \cdot b' - bb', \partial_B(b) \cdot c' + cc' - \partial_B(b') \cdot c - \partial_B(b) \cdot c' - cc') \in N \\
\Rightarrow & (\partial_C(c) \cdot b', -\partial_B(b') \cdot c) \in N
\end{array}
$$

olup $(B \ltimes C)/N$ bir çaprazlanmış R-modüldür.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & \mathcal{B} \arrow[d, "g_1"] \\
\mathcal{C} \arrow[r, "g_2"'] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
$$

f_1, f_2 çaprazlanmış R-modül morfizmleri olmak üzere diyagramın değişmeli olduğunu $(g_1 f_1 = g_2 f_2)$ gösterelim.

$$
\begin{array}{rrcl}
g_1 : & B & \longrightarrow & (B \ltimes C)/N \\
& b & \longmapsto & (b,0)+N
\end{array}
$$

$$\begin{array}{rccc} g_2: & C & \longrightarrow & (B \ltimes C)/N \\ & c & \longmapsto & (0,c)+N \end{array}$$

olsun g_1 ve g_2 nin çaprazlanmış R-modül morfizmleri olduğunu gösterelim.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\partial_B"'] & (B \ltimes C)/N \arrow[d, "\partial'"] \\ R \arrow[r, "Id_R"'] & R \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} R \times B \arrow[r, "(Id_R, g_1)"] \arrow[d] & R \times ((B \ltimes C)/N) \arrow[d] \\ B \arrow[r, "g_1"'] & (B \ltimes C)/N \end{tikzcd}$$

$i)$

$$\begin{aligned} \partial'(g_1)(b) &= \partial'(g_1(b)) \\ &= \partial'((b,0)+N) \\ &= \partial_B(b)+\partial_C(0) \\ &= \partial_B(b)+0_R \\ &= \partial_B(b) \\ &= Id_R(\partial_B(b)) \\ &= (Id_R\partial_B)(b) \end{aligned}$$

$ii)$

$$\begin{aligned} g_1(r\cdot b) &= (r\cdot b,0)+N \\ &= (r\cdot b, r\cdot 0)+N \\ &= r\cdot(b,0)+N \\ &= r\cdot((b,0)+N) \\ &= r\cdot g_1(b) \\ &= Id_R(r)\cdot g_1(\cdot b) \end{aligned}$$

olup g_1 bir $xMod/R$ morfizmidir.

$$\begin{aligned} g_1f_1(a) &= g_1(f_1(a)) \\ &= (f_1(a),0)+N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g_2f_2)(a) &= g_2(f_2(a)) \\ &= (0,f_2(a))+N \end{aligned}$$

ise

$$\begin{aligned} & (f_1(a),0)+N = (0,f_2(a))+N \\ \Rightarrow \quad & (f_1(a),-f_2(a)) \in N \end{aligned}$$

olup diyagramımız değişmelidir.

Şimdi $\mathcal{P} = (B \ltimes C)/N$ ve $\mathcal{Q} = (Q \longrightarrow R) \in Ob(\mathbf{XMod}/R)$ olmak üzere

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & \mathcal{B} \arrow[d, "g_1"] \arrow[ddr, bend left, "h_1"] & \\
\mathcal{C} \arrow[r, "g_2"'] \arrow[drr, bend right, "h_2"'] & \mathcal{P} \arrow[dr, dotted, "h"] & \\
& & \mathcal{Q}
\end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapacak biricik h morfizmi olduğunu gösterelim.

$$\begin{array}{rlcl} h: & P = ((B \ltimes C)/N) & \longrightarrow & R \\ & (b,c)+N & \longmapsto & h_1(b)+h_2(c) \end{array}$$

Diyagramın değişmeli olduğunu göstermek için $hg_1 = h_1$ ve $hg_2 = h_2$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{array}{rcl} (hg_1)(b) & = & h(g_1(b)) \\ & = & h((b,0)+N) \\ & = & h_1(b)+h_2(0) \\ & = & h_1(b) \end{array}$$

ve benzer şekilde $hg_2 = h_2$ olduğu gösterilir.

h nin tekliği :

h', h ile aynı özellikte ($h'g_1 = h_1$ ve $h'g_2 = h_2$) bir morfizm olsun.

$$\begin{array}{rlcl} h': & (B \ltimes C)/N & \longrightarrow & R \\ & (b,c)+N & \longmapsto & x \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} h'g_1(b) & = & h'(g_1(b)) \\ & = & h'((b,0)+N) \\ & = & h_1(b) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (h'g_2)(c) & = & h'(g_2(c)) \\ & = & h'((0,c)+N) \\ & = & h_2(c) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} h'((b,c)+N) & = & h'((b,0)+N,(0,c)+N) \\ & = & h'((b,0)+N)+h'((0,c)+N) \\ & = & h_1(b)+h_2(c) \\ & = & h((b,c)+N) \end{array}$$

olup $h = h'$ dür.

BÖLÜM 8

Eşitleyici Obje

8.1 Kategorilerde Eşitleyici Obje

Tanım 8.1 $\mathcal{C}$ herhangi bir kategori olsun. $A \xrightarrow{f} B$ ve $A \xrightarrow{g} B$ $(f \neq g)$ morfizmleri verilsin.

$EQ1)$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "j"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

$$fj = gj$$

$EQ2)$ C test objesi olmak üzere $h : C \longrightarrow A$ ve $fh = gh$ verildiğinde

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "j"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ C \arrow[u, dotted, "k"] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli $(jk = h)$ olacak şekilde biricik $k : C \longrightarrow E$ morfizmi vardır. Şartları sağlanıyor ise (E, j) ikilisine (kısaca j) (f, g) nin eşitleyicisi denir. E ye ise eşitleyici obje denir.

Sonuç 8.2 Eşitleyici, geri çekmenin çok özel bir halidir.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "j"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ C \arrow[u, dotted, "k"] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[dr, dotted, "k"] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\ & E \arrow[r, "j"] \arrow[d, "j"] & A \arrow[d, "g"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Örnek 8.1 $\mathcal{C}$, kümeler kategorisi olsun.

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "j"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
C \arrow[u, dotted, "k"] \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$$E = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\} \subseteq A$$

kümesini tanımlayalım.

$$\begin{array}{rccl} j: & E & \longrightarrow & A \\ & a & \longmapsto & j(a) = a \end{array}$$

olur.

$EQ1)$

$$\begin{array}{rcl} fj(a) & = & f(a) \\ & = & g(a) \\ & = & g(j(a)) \\ & = & gj(a) \end{array}$$

olup $fj = gj$ dir.

$EQ2)$

$$\begin{array}{rccl} k: & C & \longrightarrow & E \\ & c & \longmapsto & k(c) = h(c) \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} fh = gh & \Rightarrow & f(h(c)) & = & g(h(c)) \\ & \Rightarrow & h(c) \in H & & \end{array}$$

yani $k(c) = h(c)$ olarak tanımlanabilir.Bu durumda her $c \in C$ için

$$\begin{array}{rcl} jk(c) & = & j(k(c)) \\ & = & k(c) \\ & = & h(c) \end{array}$$

olup $jk = h$ olur. Yani diyagram değişmelidir.

k nın tekliği :

k', k ile aynı özellikğe sahip diğer bir fonksiyon olsun. Bu durumda $k'C \longrightarrow E$ bir morfizm ve $jk' = h$ olur. Her $c \in C$ için

$$\begin{array}{rcl} jk'(c) & = & j(k'(c)) \\ & = & k'(c) \\ & = & h(c) \\ & = & j(k(c)) \\ & = & k(c) \end{array}$$

olup $k'(c) = k(c)$ dir. Yani $k' = k$ olup k biriciktir.

Örnek 8.2

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & 1 \end{array}$$

fonksiyonlarının eşitleyici objesi

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid f(x,y) = g(x,y) \Leftrightarrow x^2+y^2 = 1\}$$

şeklinde birim çemberdir.

$$\begin{array}{rccc} j: & E & \longrightarrow & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & (x,y) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} k: & C & \longrightarrow & E \\ & c & \longmapsto & k(c) = h(c) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} h: & C & \longrightarrow & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ & c & \longmapsto & h(c) = (x,y) \end{array}$$

Uyarı 8.3 Her kategoride eşitleyici obje olmayabilir.

Örnek 8.3 $\mathcal{C}$ kategorisi, objeleri iki elemanlı kümelerden oluşan bir kategori olsun.

$$E = (e_1,e_2) \longrightarrow A = (a_1,a_2) \rightrightarrows B = (b_1,b_2)$$

$(E,j),(f,g)$ nin eşitleyicisi olduğunu kabul edelim. Bu durumda $f = g$ olur. Bu ise çelişkidir ($f \neq g$ olmalı). O halde $\mathcal{C}$ kategorisinin eşitleyici objesi yoktur.

Teorem 8.4 (E,j) eşitleyici ise j moniktir.

İspat: $(E,j),(f,g)$ nin eşitleyici ise

$$E \xrightarrow{j} A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

$fj = gj$ dir.

$$X \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} E \xrightarrow{j} A$$

$$j\alpha = j\beta \Rightarrow \alpha = \beta$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "j"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ X \arrow[u, shift left, "\alpha"] \arrow[u, shift right, "\beta"'] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramı verilsin. $fj = gj$, $h = j\alpha$, $h = j\beta(\because (E, j), (f, g)$ nin eşitleyicisi

$$\begin{aligned} fh &= f(j\alpha) \\ &= (fj)\alpha \\ &= (gj)\alpha \\ &= g(j\alpha) \\ &= gh \end{aligned}$$

olup $fh = gh$ dır.j eşitleyici olduğundan $k : X \longrightarrow E$biricik morfizm $jk = h$ olacak şekilde vardır. $jk = h$ ve $j\alpha = h = j\beta$ ise

$$\begin{array}{rcl} jk &=& j\alpha \\ &=& j\beta \\ &\Rightarrow& k \;=\; \alpha \\ && \quad\;\; = \;\beta \\ && \quad\;\; \Rightarrow \alpha = \beta \end{array}$$

dır. Yani j moniktir.

Teorem 8.5 Eşitleyici obje izomorfizm farkıyla biriciktir.

İspat: (E, j) ve (E', J'), (f, g) nin equalizerları olsun.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "j"] \arrow[d, shift left, "k"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ E' \arrow[u, shift left, "k'"] \arrow[ur, "j'"'] & & \end{tikzcd}$$

$(E, j), (f, g)$ nin eşitleyicisi olduğundan $fj = gj$ ve $jk = j'$ olacak şekilde biricik k morfizmi vardır.

$(E', j'), (f, g)$ nin eşitleyicisi olduğundan $fj' = gj'$ ve $j'k = j$ olacak şekilde biricik k' morfizmi vardır. Buna göre;

$$\begin{aligned} j(kk') &= (jk)k' \\ &= j'k' \\ &= j \end{aligned}$$

ise $j(kk') = j$ olup $kk' = 1_E(\because k,k'$ biricik) dir. Diğer taraftan $j(kk') = j'$ olup $k'k = 1_{E'}(\because k,k'$ biricik) dir. Buradan $E \cong E'$ olur. Yani eşitleyici obje izomorfizm farkıyla biriciktir.

8.2 Çaprazlanmış Modüller Kategorisinde Eşitleyici Obje

XMod$/R$ kategorisinde $\mathcal{E} = (E \xrightarrow{\partial_E} R)$, $\mathcal{A} = (A \xrightarrow{\partial_A} R)$, $\mathcal{B} = (B \xrightarrow{\partial_B} R) \in Ob(\mathbf{XMod}/R)$ olsun.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "j"] & \mathcal{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{l} E = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\} \subseteq A \\ \begin{array}{rccl} \partial_E : & E & \longrightarrow & R \\ & a & \longmapsto & \partial_E(a) = \partial_A(a) \end{array} \end{array}$$

$i)$ $(1_R, j)$ nin **XMod**$/R$ morfizmi olduğunu gösterelim.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "\partial_E"'] & & A \arrow[dl, "\partial_A"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

Her $a \in E$ için

$$\begin{array}{rcl} \partial_A j(a) & = & \partial_A(j(a)) \\ & = & \partial_A(a) \\ & = & \partial_E(a) \end{array}$$

olup $\partial_A j = \partial_E$ dir.

$$\begin{tikzcd} R \times E \arrow[r, "(Id_R, j)"] \arrow[d] & R \times A \arrow[d] \\ E \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (r,a) \arrow[r] \arrow[d] & (r,a) \arrow[d] \\ r \cdot a \arrow[r] & r \cdot a \end{tikzcd}$$

olup $(1_R, j) \in Mor(\mathbf{XMod}/R)$ dir.

$EQ1)$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "j"] & \mathcal{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial_E"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "\partial_A"] & B \arrow[d, "\partial_B"] \\
R \arrow[r, "Id_R"'] & R \arrow[r, "Id_R"'] & R
\end{tikzcd}$$

iç diyagramlar değişmeli olduğundan dış diyagramda değişmeli olup $fj = gj$ dir.

$EQ2)$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[r, "j"] & \mathcal{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \mathcal{B} \\
\mathcal{C} \arrow[u, dotted, "k"] \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde biricik $k : C \longrightarrow E \in Mor(\mathbf{XMod}/R)$ bulmalıyız.

$$\begin{array}{rccl} k: & C & \longrightarrow & E \\ & c & \longmapsto & k(c) = h(c) \end{array}$$

Her $c \in C$ için

$$\begin{aligned} (jk)(c) &= j(k(c)) \\ &= j(h(c)) \\ &= h(c) \end{aligned}$$

ise $h = jk$ dır.

k nın tekliği :

k, k' ile aynı özellikte bir morfizm olsun. Bu durumda $h = jk$ ve $h = jk'$ olduğundan ; $jk = jk'$ olur.

$$\begin{array}{lrcl} Her\ c \in C \text{ için} & (jk)(c) & = & (jk')(c) \\ Her\ c \in C \text{ için} & j(k(c)) & = & j(k'(c)) \\ Her\ c \in C \text{ için} & k(c) & = & k'(c) \end{array}$$

olup $k = k'$ dür. Yani k biriciktir.

Böylece (E, j), (f, g) nin eşitleyicisidir.

BÖLÜM 9

Ko-Eşitleyici Obje

Tanım 9.1 $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. $f : X \longrightarrow Y$, $g : X \longrightarrow Y$ morfizmleri verilsin.

$i)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "k"'] & Q \arrow[d, dotted, "u"] \\ & & Q' \end{tikzcd}$$

$$hf = hg$$

$ii)$ Q' test objesi olmak üzere $q' : Y \longrightarrow Q'$ ve $kf = kg$ verildiğinde

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "k"'] & Q \arrow[d, dotted, "u"] \\ & & Q' \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli $(uh = k)$ olacak şekilde biricik $u : Q \longrightarrow Q'$ morfizmi bulunabiliyorsa (Q, h) ikilisine (f, g) nin ko-eşitleyicisi ve Q yada ko-eşitleyici obje denir.

Örnek 9.1 $\mathcal{C}$ $(Ab.Grup)$ kategorisi olsun. $f : A \longrightarrow B, g : A \longrightarrow B$ morfizmleri verilsin. N,

$$\{f(a) - g(a) \mid a \in A\}$$

kümesi tarafından üretilen küme olsun. Bu küme B nin normal alt grubudur. $C = B/N$ alalım.

$$\begin{array}{rccl} h: & B & \longrightarrow & B/N \\ & b & \longmapsto & N + b = N \end{array}$$

tanımlayalım. Bu durumda h grup homomorfizmidir.

$i)$

$$\begin{array}{rclcrcl} hf & = & hg & \Longleftrightarrow & (hf - hg)(a) & = & 0 \\ & & & \Longleftrightarrow & h((f-g)(a)) & = & (f-g)(a) + N \\ & & & \Longleftrightarrow & & = & N \\ & & & \Longleftrightarrow & (f-g)(a) \in N & & \end{array}$$

ii)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "k"'] & B/N \arrow[d, dotted] \\ & & D \end{tikzcd}$$

$kf = kg$ verilsin. $k(N) = \{0\}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{array}{rcl} k((f-g))(a) & = & (kf)(a) - (kg)(a) \\ & = & (kf)(a) - (kf)(a) \quad (\because kf = kg) \\ & = & 0 \end{array}$$

9.1 Çaprazlanmış Modüller Kategorisinde Ko-Eşitleyici Obje

$\mathcal{A} = (\partial_A \longrightarrow R)$, $\mathcal{B} = (\partial_B \longrightarrow R) \in \mathbf{XMod}/R$ olsun.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \mathcal{B} \arrow[r] & B/I \end{tikzcd}$$

$$I \trianglelefteq B; I = < f(a) - g(a) > (a \in A)$$

$$\begin{array}{rcl} R \times B/I & \longrightarrow & B/I \\ (r, I+b) & \longmapsto & r \cdot (I+b) = I + r \cdot b \end{array}$$

işlemiyle B/I, $R-$cebirdir.

$$\begin{array}{rrcl} \partial : & B/I & \longrightarrow & R \\ & I+b & \longmapsto & \partial_B(b) \end{array}$$

tamınlansın.

$$\begin{array}{rcl} \partial(I+b) \cdot (I+b') & = & \partial_B(b) \cdot (I+b') \\ & = & I + \partial_B(b)b' \\ & = & I + bb' \\ & = & (I+b)(I+b') \end{array}$$

Ayrıca $I \subseteq \text{Ker}\partial_B$ dir. Çünkü;

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "g"'] \arrow[dr, "\partial_A"'] & & B \arrow[dl, "\partial_B"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

$$\partial_B f = \partial_B g = \partial_A$$

olup her $a \in A$ için

$$\partial_B((f-g)(a)) = 0$$

dır.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[dr, "\partial_A"'] & B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\partial_B"] & C = B/I \arrow[dl, "\partial"] \\
& R &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r] \arrow[d] & {[b]} \arrow[dl] \\
\partial_B(b) &
\end{tikzcd}
$$

Son olarak ;

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \mathcal{B} \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "k"'] & \mathcal{C} \arrow[d, dotted, "l"] \\
& & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
$$

Ayrıca $k(I) = \{0\}$ olduğundan biricik

$$
\begin{array}{rccc}
l: & C & \longrightarrow & D \\
 & I+b & \longmapsto & k(b)
\end{array}
$$

vardır.

BÖLÜM 10

LİMİT ve KO-LİMİT

10.1 Kategorilerde Limit ve Ko-limit

Tanım 10.1 $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ funktoru verilsin. $C \in Ob(\mathcal{C})$ için

$$p = (p_i)_{i \in Ob(\mathcal{D}) = I} : \ \mathcal{D} \underset{F}{\overset{\triangle_C}{\rightrightarrows}} \mathcal{C}$$

doğal transformasyonu varsa $(C, (P_i)_{i \in I})$ ikilisine F üzerinde bir kone denir. Daha açık olarak ; $\triangle_C$sabit funktor olmak üzere

$$p : \ \mathcal{D} \underset{F}{\overset{\triangle_C}{\rightrightarrows}} \mathcal{C}$$

(veya $p : \triangle_C \Longrightarrow F$) doğal transformasyon ise

(a) Her $i \in Ob(\mathcal{D}) = I$ için

$$\begin{array}{cccc} p_i : & \triangle_C (i) & \longrightarrow & F(i) \\ & \shortparallel & & \shortparallel \\ & C & & F(i) \end{array}$$

$\mathcal{C}$ de morfizm

(b)

$$\begin{tikzcd} \triangle_C (i) \arrow[r, "p_i"] \arrow[d, "1_C"'] & F(i) \arrow[d, "F(d)"] \\ \triangle_C (j) \arrow[r, "p_j"'] & F(j) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "p_j"] & \\ F(i) \arrow[rr, "F(d)"'] & & F(j) \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olmalıdır.

Tanım 10.2 $q : \triangle_C \Longrightarrow F$ ve $p : \triangle_C \Longrightarrow F$, F üzerinde iki kone verilsin. $f : q \longrightarrow p$ morfizmine konelar arasındaki morfizm denir. Açık olarak

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dl, "q_i"'] \arrow[dr, "q_j"] & & \longrightarrow & & C \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "p_j"] & \\
F(i) \arrow[rr, "F(d)"'] & & F(j) & & F(i) \arrow[rr, "F(d)"'] & & F(j)
\end{tikzcd}$$

diyagramı

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[d, "f"] \arrow[ddl, "q_i"'] \arrow[ddr, "q_j"] & \\
 & C \arrow[dl, "p_i"] \arrow[dr, "p_j"'] & \\
F(i) \arrow[rr, "F(d)"'] & & F(j)
\end{tikzcd}$$

şeklinde değişmeli diyagramdan oluşur. Dolayısıyla $f : q \longrightarrow p$ morfizmi , $\mathcal{C}$ de $f : B \longrightarrow C$ morfizmine dönüşür.

Yardımcı Teorem 10.3 $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ funktoru verilsin. Konelar F üzerinde bir kategori oluşturur.

İspat : $r : \triangle_A \Longrightarrow F$, $q : \triangle_B \Longrightarrow F$, $p : \triangle_C \Longrightarrow F$ koneları verilsin. $f : q \longrightarrow p$ ve $g : r \longrightarrow q$ morfizmler olmak üzere $fg : r \longrightarrow p$ kone morfizmi olduğunu gösterelim. Daha açık olaraki $d : i \longrightarrow j \in Mor(\mathcal{D})$ için

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, "g"] \arrow[dddl, "r_i"'] \arrow[dddr, "r_j"] & \\
 & B \arrow[d, "f"] \arrow[ddl, "q_i"'] \arrow[ddr, "q_j"] & \\
 & C \arrow[dl, "p_i"] \arrow[dr, "p_j"'] & \\
F(i) \arrow[rr, "F(d)"'] & & F(j)
\end{tikzcd}$$

olmak üzere

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[d, "fg"] \arrow[ddl, "r_i"'] \arrow[ddr, "r_j"] & \\
& C \arrow[dl, "p_i"] \arrow[dr, "p_j"'] & \\
F(i) \arrow[rr, "F(d)"'] & & F(j)
\end{tikzcd}$$

$p_i(fg) = r_i$ olduğunu göstermeliyiz.

$$p_i(fg) = (p_i f)g = q_i g = r_i$$

olup $fg : r \longrightarrow p$, kone morfizmidir. Ayrıca (c, p_i) kone birim morfizmi $1_C : C \longrightarrow C$ dir.

Bu kategori Kone(F) ile gösterilir.

Tanım 10.4 Kone(F) kategorisinin son objesine $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ funktorunun bir limiti denir. Böylece her $q : \triangle_Q \Longrightarrow F$ kone için $m : q \longrightarrow l$ biricik morfizm varsa $l : \triangle_L \Longrightarrow F$ kone'una F nin limiti denir. Diğer bir deyişle $i \in Ob(\mathcal{D}) = I$

$$\begin{tikzcd}
& Q \arrow[d, dotted, "m"] \arrow[ddl, "q_i"'] \arrow[ddr, "q_j"] & \\
& L \arrow[dl, "p_i"] \arrow[dr, "p_j"'] & \\
F(i) \arrow[rr, "F(d)"'] & & F(j)
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramı için biricik m varsa $(p_i m = q)$ l kone'una ye F nin limiti denir ve Lim$F = L$ ile gösterilir.

Limit ve kone kavramlarının dualine sırasıyla ko-limit ve kokone denir.

Tanım 10.5

$$
\begin{tikzcd}
 & Q & \\
 & L \arrow[u, dotted, "m"] & \\
F(i) \arrow[rr, "F(d)"'] \arrow[ur, "u_i"] \arrow[uur, "v_i"] & & F(j) \arrow[ul, "u_j"'] \arrow[uul, "v_j"']
\end{tikzcd}
$$

değişmeli diyagramı için biricik m varsa q kokone'una F nin ko-limiti denir ve Colim$F = L$ ile gösterilir.

ÖRNEKLER:

1) $\mathcal{D}$ kategorisi $Ob(\mathcal{D}) = \{1,2\}$ ve $1_1 : 1 \longrightarrow 1$, $1_2 : 2 \longrightarrow 2 \in Mor(\mathcal{D})$ olsun. $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ funktorunun, kone ; $p : \triangle_C \Longrightarrow F$ doğal dönüşüm yani

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
F(1) & & F(2)
\end{tikzcd}
$$

ve benzer şekilde kokone

$$
\begin{tikzcd}
 & C & \\
F(1) \arrow[ur, "u_1"] & & F(2) \arrow[ul, "u_2"']
\end{tikzcd}
$$

bununla birlikte

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl] \arrow[d, dotted] \arrow[dr] & \\
F(1) & L \arrow[l] \arrow[r] & F(2)
\end{tikzcd}$$

$F(1) \times F(2) = L = LimF$ ve

$$\begin{tikzcd}
 & C & \\
F(1) \arrow[ur] \arrow[r] & L \arrow[u, dotted] & F(2) \arrow[l] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

$F(1) + F(2) =$Colim$F$ dir.

2) $\mathcal{D}$ boş kategori olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ & \{\} & \longmapsto & C \end{array}$$

funktorunun kone'u yalnız C objesidir. Çünkü

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ \swarrow & & \searrow \\ \{\} & & \{\} \end{array}$$

dir. Böylece $C = LimF \iff C, \mathcal{C}$ nin don objesi. $C =$Colim$F \iff C$,$\mathcal{C}$ nin ilk objesi.

3) $\mathcal{D}$ kategorisi, $Ob(\mathcal{D}) = \{1,0\}$, $d_1 : 1 \longrightarrow 0$, $d_2 : 1 \longrightarrow 0 \in Mor(\mathcal{D})$ olarak verilsin. Bu durumda $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ funktoru

$$F(\mathcal{D}) = \begin{tikzcd}
 & E \arrow[dl, "e_1"'] \arrow[dr, "e_0"] & \\
F(1) \arrow[rr, shift left, "f_1"] \arrow[rr, shift right, "f_2"'] & & F(2)
\end{tikzcd}$$

$F(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{C}$ Böylece F üzerinde kone $e : \triangle_E \Longrightarrow F$ doğal dönüşüm olup

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[dl, "e_1"'] \arrow[dr, "e_0"] & \\
F(1) \arrow[rr, shift left, "f_1"] \arrow[rr, shift right, "f_2"'] & & F(0)
\end{tikzcd}$$

şeklindeki değişmeli diyagramdır. Benzer olarak kone'nin duali olan kokone ise

$$\begin{tikzcd}
 & C & \\
F(1) \arrow[ur, "c_1"] \arrow[rr, shift left, "f_1"] \arrow[rr, shift right, "f_2"'] & & F(0) \arrow[ul, "c_0"']
\end{tikzcd}$$

dir. Böylece $(E, e_0, e_1) = LimF \iff (E, e_0), f_{1,} f_2$ eşitleyicidir. Benzer şekilde ;

$(C, c_0, c_1) =$ColimF $\iff (C, c_0); f_1$ ve f_2 ko-eşitleyicidir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Pareigis, N. , 1970, Categories and Functors, Univercity of Munich, Germany

Oosten, J. ,V. , 2002, Basic Category Theory, Department of Mathematics Utrecht univercity The Netherlands

Shammu, N. ,M. , 1992, Algebraic and Categorical Structure of Categories of Crossed Modules of Algebras, The Univercit of Wales

Maclane, S. , 1971, Categories for the Working Mathematician

Gürmen, Ö. , 2007, Geri Çekme İleri İtme Çaprazlanmış Modüller Cat^1-cebirler ve Simplisel Cebirler, Doktora Tezi, ESOGÜ

Ummahan E. A. , 1998, Çaprazlanmış Modüller , Yüksek Lisans Tezi, ESOGÜ