T.C.

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

α. DERECEDEN f-WIJSMAN LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEHMET ARSLANOĞLU
(151121121)

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Analiz ve Foksiyonlar Teorisi
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mikail ET

Eylül- 2018

T.C.

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

α. DERECEDEN f-WIJSMAN LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet ARSLANOĞLU

(151121121)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 16.08.2018

Tezin Savunulduğu Tarih : 14.09.2018

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Mikail ET (F.Ü.)**

Diğer Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Hıfsı ALTINOK (F.Ü)**

Doç. Dr. Muhammed ÇINAR (M.A.Ü)

EYLÜL-2018

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında ve her konuda yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. Mikail ET’e üzerimdeki emeklerinden dolayı çok teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Bu tez çalışması **Fırat Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından** FÜBAB-**FF.18.09** nolu proje ile desteklenmiştir. Desteklerinden dolayı Fırat Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimine Teşekkür ederiz.

Mehmet ARSLANOĞLU

ELAZIĞ-2018

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

α. DERECEDEN f-WIJSMAN LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu çalışma beş bölümden oluşmuştur.

Çalışmanın birinci bölümü giriş bölümü olarak düzenlenmiş olup, konunun tarihi gelişimi hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde, bazı temel tanım ve teoremler verilerek, doğal yoğunluk, istatistiksel yakınsaklık, kuvvetli p −Cesaro toplanabilirlik kavramları verilmiştir.

Üçüncü bölümde, α. dereceden istatistiksel yakınsaklık, α. dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklık, α. dereceden kuvvetli p −Cesaro toplanabilirlik kavramları tanımlanmış ve bu kavramlara ilişkin birkaç bağıntı verilmiştir.

Dördüncü bölümde küme dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı ve küme dizilerinin p-Cesaro toplanabilmesi kavramları tanımlanmış ve bu kavramalar ilişkin birkaç bağıntı verilmiştir.

Beşinci bölüm tezin orijinal kısmı olup, bu bölümde $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olmak üzere α. dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklık ve α. dereceden kuvvetli lacunary p-Cesaro toplanbilme kavramları küme dizilerinin α. dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklığı ve α. dereceden kuvvetli lacunary p-Cesaro toplanabilmesi kavramlarına genelleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlar oldukça genel sonuçlar olup $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi, α sayısı ve f modulus fonksiyonun her bir seçimi için daha önce verilen sonuçlar elde edilir.

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel Yakınsaklık, Lacunary Dizisi, Modulus Fonksiyonu, Cesaro Toplanabilme.

SUMMARY

f-WIJSMAN LACUNARY STATİSTİCAL CONVERGENCE of ORDER α

This study is prepared as five chapter.

In the first chapter which is organized as the introduction section has been given historical background of the subject.

In the second chapter, we give the fundamental definitions and theorems. Additionally we give the concepts of natural density, statistical convergence and strong *p*-Cesaro summability.

In the third chapter, we define lacunary statistical convergence of order α of sequences and strong p-lacunary convergence of order α of sequence and give some relations between of these concepts.

In the fourth chapter, we define the concepts of statistical convergence and strong *p*-Cesaro summability for sequences of sets and give some relations between of these spaces.

In the fifth chapter which is organized original part of this thesis has been generalized the concepts of lacunary statistical convergence of order α and strong *p*-lacunary convergence of order α of real sequences to the concepts of lacunary statistical convergence of order α and strong p-lacunary convergence of order α of sets sequences, where $\theta = (k_r)$ is a lacunary sequence, The results which we obtained in this study are much more general than those obtained by others.

Key Words: Statistical Convergence, Lacunary Sequence, Modulus Function, Cesaro Summabilitiy.

SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
₵	: Kompleks sayılar kümesi
BK	: Banach Koordinatsal
$\boldsymbol{w}$	: Bütün reel dizilerin uzayı
$\mathbf{w_p}$	: Kuvvetli p-Cesaro toplanabilir diziler uzayı
$\mathbf{w_p^\alpha}$	: α. dereceden kuvvetli p-Cesaro toplanabilir diziler uzayı
$\mathbf{w_{p,0}^\alpha}$	: α. dereceden sıfıra kuvvetli p-Cesaro toplanabilir diziler uzayı
$\boldsymbol{l}_\infty$	: Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı
$\boldsymbol{c}$	: Kompleks terimli yakınsak diziler uzayı
$\boldsymbol{c}_0$	: Kompleks terimli sıfıra yakınsak diziler uzayı
$\mathbf{S}$	: İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
$\mathbf{S_\theta}$	: Lacunary istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$\mathbf{S_\theta^\alpha}$	: α. dereceden lacunary istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$\mathbf{S_{\theta,0}^\alpha}$	: α. dereceden sıfıra lacunary istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$\mathbf{N_\theta}$	: Kuvvetli lacunary toplanabilir diziler uzayı
$\mathbf{N_\theta^\alpha}(\boldsymbol{p})$	: α. dereceden kuvvetli lacunary toplanabilir diziler uzayı
$\mathbf{N_{\theta,0}^\alpha}(\boldsymbol{p}$	: α. dereceden sıfıra kuvvetli p-lacunary toplanabilir diziler uzayı
$\mathbf{N_{\theta,p,0}^\alpha}$	: α. dereceden sıfıra kuvvetli p-lacunary toplanabilir diziler uzayı
$WS_{\theta,\alpha}^f$	: α. dereceden *f*-Wijsman lacunary istatistiksel yakınsak dizilerinin kümesi
$WN_{\theta,\alpha}^f$	: α. derecden *f*-Wijsman lacnary kuvvetli toplanabilir dizilerinin kümesi

1. GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık fikri ilk olarak Zygmund [1] tarafından 1935 yılında Varşova'da basılan monografisinin ilk baskısında verildi. İstatistiksel yakınsaklığın tanımı Steinhaus [2] ve Fast [3] tarafından aynı yıllarda çalışıldı. Schoenberg [4] istatistiksel yakınsaklığı bir toplanabilme metodu olarak ifade etti ve sınırlı Cesaro toplanabilir bir dizinin istatistiksel yakınsak olduğunu gösterdi. Yıllarca farklı isimler altında istatistiksel yakınsaklık Fourier Analiz teorisinde, Ergodic teoride, Sayılar teorisinde, Ölçüm teorisinde, Trigonometrik serilerde ve Banach uzayları teorisinde farklı isimler altında çalışılmıştır. İstatistiksel yakınsaklık ile ilgili çalışmaların 1985 yılında Fridy [5]'in yaptığı "İstatistiksel Yakınsaklık Üzerine "başlıklı çalışmasından sonra ivme kazındığını görüyoruz. Daha sonra istatistiksel yakınsaklık Connor [6], Savaş [7], Mursaleen [8], Fridy ve Orhan ([9],[10]), Moricz [11], Rath ve Tripathy [12], Salat [13], Bhardwaj ve diğerleri ([14], [15], [16]). Derece dahil edilerek, bir dizinin $\alpha.$ dereceden istatistiksel yakınsaklığı Gadjiev and Orhan [17] tarafından verildi. Bhunia ve diğerleri [18] dereceli istatistiksel yakınsaklık ile ilgili birkaç özellik ispatladılar. Dereceli istatistiksel yakınsaklık ile ilgili literatürdeki çalışmaların Çolak ([19],[20]) tarafından verilen "α. dereceden istatistiksel yakınsaklık" ve "λ-istatistiksel yakınsaklık" başlıklı çalışmalardan sonra arttığını görüyoruz. Daha sonra Çolak ve Bektaş [21], Et ve Şengül ([22],[23]) dereceli istatistiksel yakınsaklık kavramlarını çalıştılar. Konunun güncelliğini koruduğu ve son zamanlarda birçok yazar tarafından çalışıldığı gözlenmektedir.

Küme dizilerinin yakınsaklığı kavramı Wijsman ([24], [25]) tarafından tanımlandı. Nuray ve Rhoades [26] küme dizilerinin istatistiksel yakınsaklığını tanımladılar ve bazı konu ile ilgili birkaç bağıntı ispatladılar. Daha sonra Nuray ve diğerleri ([27], [28], [29]), Savaş [30], Şengül ve Et [31] küme dizilerinin istatistiksel yakınsaklığını kavarmını ayrıntılı çalıştılar. Bu çalışmada küme dizilerinin

1) α.dereceden f-Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaklık tanımlanacak,

2) α.dereceden f-Wijsman kuvvetli p-lacunary yakınsaklık tanımlanacak,

3) α.dereceden f-Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaklık ile α.dereceden f-Wijsman kuvvetli p-lacunary yakınsaklık arasındaki ilişki verilecektir.

2. GENEL KAVRAMLAR

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Bu kısımda daha sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı temel kavramlardan bahsedeceğiz.

Tanım 2.1.1. [32] $X \neq \emptyset$ bir cümle ve K reel veya komplex sayılar cismi olmak üzere

$$+ : X \times X \rightarrow X,$$

$$. : K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) adı verilir. Her $x, y, z \in X$ ve her $\lambda, \mu \in K$ için

L1) $x + y = y + x$,

L2) $(x + y) + z = x + (y + z)$,

L3) Her $x \in X$ için $x + \theta = x$ olacak şekilde bir θ vardır,

L4) Herbir $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x)$ vardır,

L5) $1.x = x$,

L6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,

L7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,

L8) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

Tanım 2.1.2. [32] X boş olmayan bir küme olsun

$$d : XxX \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \rightarrow d(x, y)$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa d ye X üzerinde bir metrik (X,d) ikilisine de bir metrik uzay denir. $\forall x, y, z \in X$ için

d1) $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow x = y$, d2) $d(x,y) = d(y,x)$,

$d3)$ $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Tanım 2.1.3. [32] (X,d) bir metrik uzay ve $x = (x_n)$ de X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ iken

$d(x,y) < \varepsilon$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisi x e yakınsaktır denir. $x = (x_n)$ dizisi x e yakınsak ise $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ veya $x_n \to x$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.1.4. [32] (X,d) bir metrik uzay ve $x = (x_n)$ de X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ iken

$d(x_m, x_n) < \varepsilon$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.1.5. [33] (X,d) bir metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya tam uzay adı verilir.

Tanım 2.1.6. [33] Bir *X* vektör uzayının bir *Y* alt cümlesi verilsin. Eğer $y_1, y_2 \in Y$ olduğunda

$$M = \{y \in Y : y = \lambda\, y_1 + (1 - \lambda) y_2,\ \ 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset Y$$

oluyorsa *Y* alt kümesi *konvekstir* denir.

Tanım 2.1.7. [33] $(X, \|.\|)$ normlu bir uzay olsun. X üzerinde sınırlı tüm lineer fonksiyonellerin cümlesi

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

normu ile bir normlu uzay oluşturur. Bu uzaya X in sürekli dual uzayı denir ve X' ile gösterilir.

Tanım 2.1.8. [33] $(X, \|.\|)$ normlu bir uzay ve (x_n), X de bir dizi olsun. Her $f \in X'$ ve $n \to \infty$ için

$$f(x_n) \rightarrow f(x)$$

ise (x_n) dizisi x e zayıf yakınsaktır denir. (x_n) dizisi x e zayıf yakınsak ise $x_n \xrightarrow{w} x$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.1.9. [32] Reel terimli tüm dizilerin cümlesini w ile gösterelim. $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere, w

$$x + y = (x_k + y_k)$$

$$\alpha x = (\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır. w nin her alt lineer uzayına bir dizi uzayı denir. Ayrıca

$$l_\infty = \left\{x = (x_k) \colon \sup_k |x_k| < \infty\right\}$$

sınırlı,

$$c = \left\{x = (x_k) \colon \lim_k x_k \ \text{mevcut}\right\}$$

yakınsak ve

$$c_0 = \left\{x = (x_k) \colon \lim_k x_k = 0\right\}$$

sıfır dizileri uzayı

$$\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$$

normu ile birer Banach uzayıdır.

Tanım 2.1.10. [32] X bir dizi uzayı olsun. X bir Banach uzayı ve

$$\tau_k \colon X \rightarrow ₵, \ \tau_k(x) = x_k, \ (k = 1,2, \dots)$$

dönüşümü sürekli ise X e bir BK- uzayı denir.

Tanım 2.1.11. [32] (p_k) kesin pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi ve $H = \sup p_k$ olsun. Bu takdirde $D = \max(1, 2^{H-1})$ ve $a_k, b_k \in ₵$ olmak üzere

$$|a_k + b_k|^{p_k} \leq D\{|a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k}\}$$

eşitsizliği sağlanır.

2.2. İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda doğal sayılar kümesinin bir altkümesinin doğal yoğunluğundan hareketle istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel Cauchy dizisi tanımlarını vereceğiz.

Tanım 2.2.1. [34] N doğal sayılar cümlesinin A alt cümlesinin doğal yoğunluğu, $|\{k \leq n : k \in A\}|$ ifadesi n den büyük olmayan $A \subseteq \mathbb{N}$ cümlesinin elemanlarının sayısını göstermek üzere

$$\delta(A) = \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in A\}|$$

ile tanımlanır. $\mathbb{N}$ doğal sayılar cümlesinin herhangi bir sonlu alt cümlesinin doğal yoğunluğunun sıfır olduğu açıktır ve $A^c = \mathbb{N} - A$ olmak üzere $\delta(A^c) = 1 - \delta(A)$ dır.

Bir cümlenin doğal yoğunluğu daha kolay bir yolla şu şekilde bulunabilir. (a_n) pozitif tamsayıların artan bir dizisi olsun. $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $A \subseteq \mathbb{N}$ alt cümlesinin doğal yoğunluğu mevcut ise

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n}$$

dir. Örnek olarak $A = \{n^3 : n \epsilon \mathbb{N}\}$ cümlesini alırsak, doğal yoğunluğu

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^3} = 0$$

olarak elde edilir.

Burada özellikle doğal yoğunluğu sıfır olan cümlelerle ilgileneceğiz. Ayrıca, eğer $x = (x_k)$, doğal yoğunluğu sıfır olan bir cümle hariç her k için P özelliğini sağlayacak şekilde bir dizi ise, x_k *"hemen hemen her k"* için P özelliğini sağlar denir ve kısaca *"h.h.k"* şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.2.2. [5] Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k\leq n:\ |x_k-L|\geq\varepsilon\}|=0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa yani, *h.h.k* için

$$|x_k-L|<\varepsilon$$

ise $x=(x_k)$ dizisi L ye *istatistiksel yakınsaktır* denir. Bu durumda $S-\lim x_k=L$ yazılır. Eğer $L=0$ ise yani, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k\leq n: |x_k|\geq\varepsilon\}|=0$ ise $x=(x_k)$ dizisine *istatistiksel sıfır dizisidir* denir. Tüm istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesi S ile ve tüm istatistiksel sıfır dizilerin cümlesi S_0 ile gösterilir.

Bilinen anlamda yakınsak olan diziler istatistiksel yakınsaktır. Fakat istatistiksel yakınsak olan diziler yakınsak olmak zorunda değildir.

Örnek 2.2.3. $x=(x_k)$ dizisini

$$x_k=\begin{cases}1, & k=m^2\\ 0, & k\neq m^2\end{cases}\quad m=1,2,\ldots$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde $\forall\varepsilon>0$ için

$$|\{k\leq n:\ |x_k-0|\geq\varepsilon\}|\leq|\{k\leq n:\ x_k\neq 0\}|\leq\sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k\leq n:\ x_k\neq 0\}|\leq\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n}=0$$

elde edilir, yani $S-\lim x_k=0$ dır. Ancak (x_k) dizisi yakınsak değildir.

Tanım 2.2.4. [5] Eğer her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k\leq n:\ |x_k-x_N|\geq\varepsilon\}|=0$$

yani, h.h.k için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\mathbb{N} = \mathbb{N}(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine *istatistiksel Cauchy dizisi* denir.

2.3. Lacunary Dizileri ve Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel Cauchy dizisi kavramlarını bir lacunary dizisi yardımıyla da lacunary istatistiksel yakınsaklık ve lacunary istatistiksel Cauchy dizisi kavramlarına genelleştireceğiz.

$k_0 = 0,\ r \to \infty$ iken $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$ olacak şekilde $\theta = \{k_r\}$ artan tamsayı dizisine *lacunary dizisi* denir. Burada $q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}}$, $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ve $q_1 = k_1$ olarak alınacaktır.

Tanım 2.3.1. [9] $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ve θ bir lacunary dizisi olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r :\ |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise x sayı dizisi L ye *lacunary istatistiksel yakınsaktır* denir. Bu durumda $S_\theta - \lim x = L$ veya $x_k \to L(S_\theta)$ olarak gösterilir. Lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini S_θ ile göstereceğiz. Buna göre

$$S_\theta = \{x : en\ az\ bir\ L\ için, S_\theta - \lim x = L\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.3.2. [10] $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. Her bir r için $k'(r) \in I_r$ olmak üzere x in $\{x_{k'(r)}\}$ alt dizisi vardır öyle ki $\lim_r x_{k'(r)} = L$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left|\left\{k \in I_r :\ \left|x_k - x_{k'(r)}\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

ise x dizisine $S_\theta - Cauchy\ dizisi$ denir.

Tanım 2.3.3. [32] $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $0 < p < \infty$ olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p = 0$$

olacak şeklinde kompleks bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi, L ye kuvvetli p −Cesaro toplanabilirdir denir. Kuvvetli p −Cesaro toplanabilir dizilerin cümlesi w_p ile gösterilir. O halde, $p > 0$ için

$$w_p = \left\{ x = (x_k) : \exists L \in \mathbb{C}, \qquad \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p = 0 \right\}$$

dır.

Tanım 2.3.4. [35] her θ lacunary dizisi ve $0 < p < \infty$ için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L|^p = 0$$

olacak şeklinde kompleks bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi, L ye *kuvvetli p −lacunary yakınsaktır* denir. Kuvvetli p −lacunary yakınsak dizilerin cümlesi $N_\theta(p)$ ile gösterelim. Buna göre $N_\theta(p)$ dizi uzayı $p > 0$ için,

$$N_\theta(p) = \left\{ x = (x_k) : \exists L \in \mathbb{C}, \qquad \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L|^p = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır. $N_\theta(p)$ uzayı $\|x\|_\theta = \sup_r \left(\frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |x_k|^p \right)$ normu ile *BK*-uzayıdır. $\theta = (2^r)$ olması halinde $N_\theta(p) = w_p$ olur.

3. DERECELİ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Dereceli istatistiksel yakınsaklık fikri Gadjiev ve Orhan [17] tarafından verildi. Bhunia ve arkadaşları [18] dereceli istatistiksel yakınsaklık ile ilgili birkaç özellik ispatladılar. Dereceli istatistiksel yakınsaklık ile ilgili literatürdeki çalışmaların Çolak ([19], [20]) tarafından verilen "α. dereceden istatistiksel yakınsaklık" ve "λ-istatistiksel yakınsaklık" başlıklı çalışmadan sonra arttığını görüyoruz. Daha sonra Çolak ve Bektaş [21], Et ve Şengül ([22], [23]) dereceli istatistiksel yakınsaklık kavramlarını çalıştılar. Konunun güncelliğini koruduğu ve son zamanlarda birçok yazar tarafından çalışıldığı gözlenmektedir. Bu bölümde α. dereceden istatistiksel yakınsaklık ve α. dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklıktan kavramlarından bahsedeceğiz.

3.1 α. Dereceden İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde bir cümlenin $\alpha -$ yoğunluğu kavramı açıklanıp, bu kavram yardımı ile α. dereceden istatistiksel yakınsaklık tanımlanacaktır.

Tanım 3.1.1. [19] $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde herhangi bir reel sayı α olsun. $|\{k \leq n : k \in E\}|$, E kümesinin n den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermek üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : k \in E\}|$$

limiti mevcut ise bu limit değerine E alt cümlesinin $\alpha -$*yoğunluğu* denir. Bu yoğunluk $\delta_\alpha(E)$ ile gösterilir.

$x = (x_k)$ dizisi, α −yoğunluğu sıfır olan cümle hariç, her k için $P(k)$ özelliğini sağlayacak şekilde bir dizi ise o zaman (x_k) dizisi, α ya göre hemen hemen her k için $P(k)$ özelliğini sağlar denir. Bunu biz kısaca $h.h.k(\alpha)$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.1.2. [19] $x = (x_k) \in w$ olsun. $0 < \alpha \leq 1$ olarak verilsin. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde kompleks bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L ye α. dereceden istatistiksel yakınsaktır denir. Bir başka ifadeyle her $\varepsilon > 0$ ve $h.h.k(\alpha)$ için $|x_k - L| < \varepsilon$ ise x dizisi L

sayısına α. dereceden istatistiksel yakınsaktır denir. Bu yakınsaklık $S^{\alpha} - \lim x_k = L$ şeklinde gösterilir. α. dereceden tüm istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesi S^{α} ile gösterilir.

3.2 α. Dereceden Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

$\mathbb{N}$ nin bir K alt cümlesinin α. dereceden θ *−yoğunluğu*

$$\delta_{\theta}^{\alpha}(K) = \lim_{r} \frac{1}{h_r^{\alpha}} |\{k_{r-1} < k \leq k_r : k \in K\}|$$

şeklinde tanımlayalım.

Lemma 3.2.1. [36] $K \subseteq \mathbb{N}$ olsun. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ için $\delta_{\theta}^{\beta}(K) \leq \delta_{\theta}^{\alpha}(K)$ dır.

İspat. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun. ${h_r}^{\alpha} \leq {h_r}^{\beta}$ olduğundan $\frac{1}{{h_r}^{\beta}} \leq \frac{1}{{h_r}^{\alpha}}$ olur. Buradan

$$\frac{1}{{h_r}^{\beta}} |\{k_{r-1} < k \leq k_r : k \in K\}| \leq \frac{1}{{h_r}^{\alpha}} |\{k_{r-1} < k \leq k_r : k \in K\}|$$

yazabiliriz. Böylece

$$\delta_{\theta}^{\beta}(K) \leq \delta_{\theta}^{\alpha}(K)$$

elde edilir.

Tanım 3.2.2. [36] $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun ve $0 < \alpha \leq 1$ olarak alalım. $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ve h_r^{α}, h_r nin α kuvveti yani $h^{\alpha} = (h_r^{\alpha}) = (h_1^{\alpha}, h_2^{\alpha}, h_3^{\alpha}, \dots, h_r^{\alpha}, \dots)$ olmak üzere

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{h_r^{\alpha}} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde L kompleks sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine α. *dereceden lacunary istatistiksel yakınsaktır* diyeceğiz. Bu yakınsaklığı $S_{\theta}^{\alpha} - \lim x_k = L$ veya $x_k \to L(S_{\theta}^{\alpha})$ ile göstereceğiz.

Bütün α. dereceden lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesini S_θ^α ile, α. dereceden sıfıra lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesini de $S_{\theta,0}^\alpha$ ile göstereceğiz. Her $0 < \alpha \leq 1$ için $S_{\theta,0}^\alpha \subset S_\theta^\alpha$ olduğu açıktır. $\alpha = 1$ için $S_\theta^\alpha = S_\theta$ dır.

$\alpha \in (0,1]$ olmak üzere α. dereceden lacunary istatistiksel yakınsak bir dizi lacunary istatistiksel yakınsaktır. Gerçekten $\alpha \in (0,1]$ için ${h_r}^\alpha \leq h_r$ olduğundan

$$\frac{1}{h_r^\alpha}|\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

yazabiliriz. Her iki tarafının r ye göre limiti alınırsa $x_k \to L(S_\theta^\alpha)$ olduğundan $x_k \to L(S_\theta)$ elde edilir.

$0 < \alpha \leq 1$ için α. dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklık iyi tanımlıdır. Fakat genel olarak $\alpha > 1$ için iyi tanımlı değildir. Bunu aşağıdaki örnekten görebiliriz:

Örnek 3.2.3. $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = 2r \; ise \\ 0, & k \neq 2r \; ise \end{cases}, r = 1,2,3, \ldots$$

şeklinde tanımlayalım. $\alpha > 1$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r^\alpha}|\{k \in I_r : |x_k - 1| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{r\to\infty} \frac{k_r - k_{r-1}}{2h_r^\alpha} = \lim_{r\to\infty} \frac{h_r}{2h_r^\alpha} = 0$$

olup $S_\theta^\alpha - \lim x_k = 1$ ve,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r^\alpha}|\{k \in I_r : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{r\to\infty} \frac{k_r - k_{r-1}}{2h_r^\alpha} = \lim_{r\to\infty} \frac{h_r}{2h_r^\alpha} = 0$$

olup $S_\theta^\alpha - \lim x_k = 0$ dır. Bu durumda $x = (x_k)$ dizisi hem 1 e hem de 0 a α. dereceden lacunary istatistiksel yakınsak olur. Fakat bu mümkün değildir.

Teorem 3.2.4. [36] $0 < \alpha \leq 1$ ve $x = (x_k), y = (y_k)$ kompleks sayıların dizileri olsun.

i) $S_\theta^\alpha - \lim x_k = x_0$ ve $c \in ₵$ ise $S_\theta^\alpha - \lim(cx_k) = cx_0$,

ii) $S_\theta^\alpha - \lim x_k = x_0$ ve $S_\theta^\alpha - \lim y_k = y_0$ ise $S_\theta^\alpha - \lim(x_k + y_k) = x_0 + y_0$ dır.

İspat. $c = 0$ ise *(i)* aşikardır. $c \neq 0$ olduğunu kabul edelim.

$i)$ in ispatı aşağıdaki eşitsizlikten

$$\frac{1}{h_r^\alpha}|\{k \in I_r : |cx_k - cx_0| \geq \varepsilon\}| = \frac{1}{h_r^\alpha}\left|\left\{k \in I_r : |x_k - x_0| \geq \frac{\varepsilon}{|c|}\right\}\right|,$$

ii) nin ispatı aşağıdaki eşitsizlikten

$$\frac{1}{h_r^\alpha}|\{k \in I_r : |(x_k + y_k) - (x_0 + y_0)| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{h_r^\alpha}\left|\left\{k \in I_r : |x_k - x_0| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

$$+\frac{1}{h_r^\alpha}\left|\left\{k \in I_r : |y_k - y_0| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|,$$

elde edilir.

Bu teorem S_θ^α nın bir lineer uzay olduğunu gösterir.

Tanım 3.2.5. [36] $\alpha \in (0,1]$ ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Her bir r için $k'(r) \in I_r$ olmak üzere $\lim_{r\to\infty} x_{k'(r)} = L$ olacak şekilde x in $\left(x_{k'(r)}\right)$ alt dizisi varsa ve $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r^\alpha}\left|\left\{k \in I_r : \left|x_k - x_{k'(r)}\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

ise x dizisine S_θ^α *−Cauchy dizisidir* denir.

Teorem 3.2.6. [36] $0 < \alpha \leq 1$ olsun. x dizisi bir S_θ^α −Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart x dizisinin S_θ^α −yakınsak olmasıdır.

İspat. İspat için Fridy ve Orhan [9] ün tekniğini kullanalım. $x_k \to L(S_\theta^\alpha)$ olsun. Her bir $j \in \mathbb{N}$ için $K^{(j)} = \left\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| < \frac{1}{j}\right\}$ yazalım. Böylece her j için $K^{(j)} \supseteq K^{(j+1)}$ ve

$$\frac{\left|K^{(j)} \cap I_r\right|}{h_r^\alpha} \to 1 \ , r \to \infty$$

dir. $r \geq m(1)$ olması $\frac{|K^{(1)} \cap I_r|}{h_r^\alpha} > 0$ olmasını gerektirecek şekilde $m(1)$ seçelim. Bu durumda $K^{(1)} \cap I_r \neq \emptyset$ dir. $m(2) > m(1)$ seçelim öyle ki $r \geq m(2)$ iken $K^{(2)} \cap I_r \neq \emptyset$ dir. O zaman her bir r için $m(1) \leq r < m(2)$ sağlanır. $k'(r) \in I_r \cap K^{(1)}$ olacak şekilde

$k'(r) \in I_r$ seçelim. Yani $\left|x_{k'(r)} - L\right| < 1$ dir. Genellersek $r > m(p+1)$ olmak üzere $I_r \cap K^{(p+1)} \neq \emptyset$ olacak şekilde $m(p+1) > m(p)$ seçebiliriz. Bu durumda her r için $m(p) \leq r < m(p+1)$ sağlanır. $k'(r) \in I_r \cap K^{(p)}$ seçelim. Yani

$$\left|x_{k'(r)} - L\right| < \frac{1}{p}$$

olur. Böylece her r için $k'(r) \in I_r$ alabiliriz ve $\left|x_{k'(r)} - L\right| < \frac{1}{p}$ olmasından dolayı $\lim_r x_{k'(r)} = L$ dir. Bununla birlikte $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{h_r^\alpha}\left|\left\{k \in I_r : \left|x_k - x_{k'(r)}\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \leq \frac{1}{h_r^\alpha}\left|\left\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$
$$+ \frac{1}{h_r^\alpha}\left|\left\{k \in I_r : \left|x_{k'(r)} - L\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

dir. $x_k \to L(S_\theta^\alpha)$ ve $\lim_r x_{k'(r)} = L$ olduğundan x dizisi bir S_θ^α −Cauchy dizisidir.

Tersine x bir S_θ^α −Cauchy dizisi olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{h_r^\alpha}\left|\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right| \leq \frac{1}{h_r^\alpha}\left|\left\{k \in I_r : \left|x_k - x_{k'(r)}\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$
$$+ \frac{1}{h_r^\alpha}\left|\left\{k \in I_r : \left|x_{k'(r)} - L\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

dir. Böylece $x_k \to L(S_\theta^\alpha)$ dır.

Tanım 3.2.6. [36] $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun, α *ve* p pozitif herhangi iki reel sayı olmak üzere,

$$\lim_r \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k \in I_r} |x_k - L|^p = 0$$

olacak şeklinde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi, L ye *α. dereceden kuvvetli p −lacunary yakınsaktır* denir. α. dereceden kuvvetli p −lacunary yakınsak dizilerin cümlesi $N_\theta^\alpha(p)$ ile gösterilecektir. Buna göre

$$N_{\theta}^{\alpha}(p) = \left\{ x = (x_k) : \exists L \in \mathbb{C}, \qquad \lim_{r} \frac{1}{h_r^{\alpha}} \sum_{k \in I_r} |x_k - L|^p = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır. α. dereceden sıfıra kuvvetli p −lacunary yakınsak dizilerin uzayını $N_{\theta,0}^{\alpha}(p)$ ile göstereceğiz. Eğer $\theta = (2^r)$ alınırsak α. dereceden kuvvetli p −Cesaro toplanabilir dizilerin kümesi

$$w_p^{\alpha} = \left\{ x = (x_k) : \exists L \in \mathbb{C}, \qquad \lim_{n} \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p = 0 \right\}$$

elde edilir. $L = 0$ olması durumun da bu uzayı $w_{p,0}^{\alpha}$ ile göstereceğiz.

Teorem 3.2.7. [36] θ bir lacunary dizisi, α_0 ve p_0 herhangi iki pozitif reel sayı olmak üzere, $N_{\theta}^{\alpha_0}(p_0)$ uzayı

$$\|x\|_{\theta} = \sup_{r} \left(\frac{1}{h_r^{\alpha_0}} \sum_{k \in I_r} |x_k|^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}}, \quad 1 \leq p_0 < \infty \tag{3.1}$$

normu ile bir Banach uzayı

$$\|x\|_{\theta_1} = \sup_{r} \frac{1}{h_r^{\alpha_0}} \sum_{k \in I_r} |x_k|^{p_0}, \quad 0 < p_0 < 1 \tag{3.2}$$

normu ile tam p-normlu uzaydır.

İspat. $N_{\theta}^{\alpha_0}(p_0)$ ın (3.1.1) normuna göre normlu uzay olduğu kolayca görülebilir. $x^s = (x_k^s)_k = (x_1^s, x_2^s, \ldots) \in N_{\theta}^{\alpha_0}(p_0)$ olmak üzere (x^s), $N_{\theta}^{\alpha_0}(p_0)$ da bir Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde $s, t \to \infty$ için

$$\|x^s - x^t\|_{\theta} = \sup_{r} \left(\frac{1}{h_r^{\alpha_0}} \sum_{k \in I_r} |x_k^s - x_k^t|^{p_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} \to 0$$

ve böylece her $r \in \mathbb{N}$ için

$$\left(\frac{1}{h_r^{\alpha_0}}\sum_{k\in I_r}|x_k^s - x_k^t|^{p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}} \to 0$$

olur. Buradan $s,t\to\infty$ için $|x_k^s - x_k^t| \to 0$ olur. Bu ise her $k\in\mathbb{N}$ için $(x_k^s)_k = (x_1^s, x_2^s, \dots)$ dizisinin $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisi olması demektir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan bu dizi yakınsaktır. Her $k\in\mathbb{N}$ için $\lim_s x_k^s = x_k$ olduğunu kabul edelim. (x^s) bir Cauchy dizisi olduğundan $\forall\varepsilon>0$ için bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı vardır öyle ki her $s,t\geq n_0$ için

$$\|x^s - x^t\|_\theta < \varepsilon.$$

dır. Böylece her $r\in\mathbb{N}$ ve her $s,t\geq n_0$ için

$$\frac{1}{h_r^{\alpha_0}}\sum_{k\in I_r}|x_k^s - x_k^t|^{p_0} < \varepsilon^{p_0}$$

elde edilir. $t\to\infty$ için limit alınırsa son eşitsizlikten $s\geq n_0$ için

$$\lim_t \frac{1}{h_r^{\alpha_0}}\sum_{k\in I_r}|x_k^s - x_k^t|^{p_0} = \frac{1}{h_r^{\alpha_0}}\sum_{k\in I_r}|x_k^s - x_k|^{p_0} < \varepsilon^{p_0}$$

olur. Bu da

$$\|x^s - x\|_\theta = \sup_r\left(\frac{1}{h_r^{\alpha_0}}\sum_{k\in I_r}|x_k^s - x_k|^{p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}} \to 0$$

demektir ve böylece $s\to\infty$ için $x^s\to x$ dir.

$$\frac{1}{h_r^{\alpha_0}}\sum_{k\in I_r}|x_k - L|^{p_0} \leq 2^{p_0}\left\{\frac{1}{h_r^{\alpha_0}}\sum_{k\in I_r}\left|x_k^{n_0} - L\right|^{p_0} + \frac{1}{h_r^{\alpha_0}}\sum_{k\in I_r}\left|x_k^{n_0} - x_k\right|^{p_0}\right\}$$

olduğundan $x\in N_\theta^{\alpha_0}(p_0)$ dır.

Benzer yolla $0<p_0<1$ için $N_\theta^{\alpha_0}(p_0)$ uzayının (3.1.2) normuna göre bir tam *p*-normlu uzay olduğu gösterilebilir.

Teorem 3.2.8. [36] $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. Bu takdirde $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve $0 < p < \infty$ için $x_k \to L\left(N_\theta^\alpha(p)\right)$ ise $x_k \to L(S_\theta^\alpha)$ olup en az bir α için $N_\theta^\alpha(p) \subseteq S_\theta^\beta$ kapsaması kesindir.

İspat. i) $\varepsilon > 0$ ve $x_k \to L\left(N_{\theta,p}^\alpha\right)$ ise

$$\sum_{k\in I_r} |x_k - L|^p \geq \sum_{\substack{k\in I_r \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L|^p + \sum_{\substack{k\in I_r \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L|^p \geq \sum_{\substack{k\in I_r \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L|^p$$

$$\geq \varepsilon^p |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

ve böylece

$$\frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k\in I_r} |x_k - L|^p \geq \frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p$$

$$\geq \frac{1}{h_r^\beta} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p$$

yazılabilir. r ye göre limit alınırsa $x_k \to L(S_\theta^\alpha)$ elde edilir. Böylece $N_\theta^\alpha(p) \subseteq S_\theta^\beta$ dır.

$\alpha = \beta$ ve p= 1 için kapsamanın kesin olduğunu gösterelim. θ lacunary dizisi verilsin.

$$x_k = \begin{cases} \left[\sqrt{h_r}\right], & k = 1,2,3, \ldots, \left[\sqrt{h_r}\right] \\ 0 \quad , & diğer\ durumda \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. $\left[\sqrt{h_r}\right]$ ile $\sqrt{h_r}$ nin tam kısmı ile gösterilecektir. $\forall \varepsilon > 0, \frac{1}{2} < \alpha \leq 1,\ r \to \infty$ için

$$\frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| = \frac{\left[\sqrt{h_r}\right]}{h_r^\alpha} \to 0$$

elde edilir. Yani $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ için $x_k \to 0(S_\theta^\alpha)$ dır. Diğer taraftan $0 < \alpha < 1$ ve $p = 1$ için

$$\frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k\in I_r} |x_k - 0|^p = \frac{1}{h_r^\alpha} \sum_{k\in I_r} |x_k| = \frac{\left[\sqrt{h_r}\right]\left[\sqrt{h_r}\right]}{h_r^\alpha} \to \infty$$

olup $\alpha = 1$ için

$$\frac{1}{h_r^\alpha}\sum_{k\in I_r}|x_k| = \frac{[\sqrt{h_r}][\sqrt{h_r}]}{h_r^\alpha} \to 1$$

dir. $0 < \alpha \leq 1$ için $x_k \nrightarrow 0\big(N_\theta^\alpha(p)\big)$ dır. Yani $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ için $x \in S_\theta^\alpha - N_\theta^\alpha(p)$ dir.

Teorem 3.2.9. [36] $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi ve $0 < \alpha \leq 1$ için $\liminf_r q_r > 1$ ise $S^\alpha \subseteq S_\theta^\alpha$ dır.

İspat. $\liminf_r q_r > 1$ olduğunu kabul edelim. Yeterince büyük r için $q_r \geq 1 + \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Bu durumda

$$q_r \geq 1+\delta \Rightarrow \frac{k_r}{k_{r-1}} \geq 1+\delta \Rightarrow -\left(\frac{k_{r-1}}{k_r}\right) \geq -\left(\frac{1}{1+\delta}\right) \Rightarrow 1-\left(\frac{k_{r-1}}{k_r}\right) \geq 1-\left(\frac{1}{1+\delta}\right)$$

olup buradan da $0 < \alpha \leq 1$ için

$$\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\delta}{1+\delta} \Rightarrow \left(\frac{h_r}{k_r}\right)^\alpha \geq \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^\alpha \Rightarrow \frac{1}{{k_r}^\alpha} \geq \frac{\delta^\alpha}{(1+\delta)^\alpha}\frac{1}{{h_r}^\alpha}$$

elde edilir. $x_k \to L(S^\alpha)$ olsun. $\forall\varepsilon > 0$ ve yeterince büyük r ler için

$$\frac{1}{{k_r}^\alpha}|\{k \leq\ k_r: |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \frac{1}{{k_r}^\alpha}|\{k \in\ I_r: |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

$$\geq \frac{\delta^\alpha}{(1+\delta)^\alpha}\frac{1}{{h_r}^\alpha}|\{k \in\ I_r: |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

elde edilir. Dolayısıyla $x_k \to L(S_\theta^\alpha)$ dır. Bu da $S^\alpha \subseteq S_\theta^\alpha$ olduğunu gösterir.

4. KÜME DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI VE KUVVETLİ TOPLANABİLİRLİĞİ

4.1. Küme Dizilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı

Bu bölümde sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı kavramı küme dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı kavramına genelleştirilecektir.

Tanım 4.1.1. $(X,\ \rho)$ bir metrik uzay olsun. X in herhangi bir x elemanının X in herhangi bir A alt cümlesine olan uzaklığı $\forall x \in X$ için

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \rho\,(\mathrm{x}, a)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.1.2. [24,25] $(X,\ \rho)$ bir metrik uzay ve $A,\ A_k \subset X$ cümleleri kapalı olsun. $\forall x \in X$ için

$$\lim_{k \to \infty} d\left(X,\ A_k\right) = d\left(x,\ A\right)$$

ise $\{A_k\}$ dizisi A kümesi Wijsman yakınsaktır denir ve $\lim A_k = A$ şeklinde gösterilir.

Örnek 4.1.3. $(x,\ y)$ düzleminde $A_k = \left\{(x,\ y) : x^2 + y^2 - 2ky = 0\right\}$ kümesini göz önüne alalım.

$$A = \left\{(x,\ y) : y = 0\right\} \quad (x - \text{ekseni})$$

olmak üzere

$$W - \lim A_k = A$$

dır.

Tanım 4.1.4. [26] $(X,\ \rho)$ bir metrik uzay $A_k \subset X$ kümesi kapalı olsun. $\forall x \in X$ için $\sup_k d(x, A_k) < \infty$ ise $\{A_k\}$ dizisi sınırlıdır denir.

Tanım 4.1.5. [26] (X, ρ) bir metrik uzay $\mathrm{A}, \mathrm{A}_{\mathrm{k}} \subset X$ cümleleri kapalı olsun, $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in X$ için $m, n > k_0$ olduğunda,

$$\left| d(x, A_n) - d(x, A_m) \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde k_0 doğal sayısı varsa $\{A_k\}$ dizisine Wijsman Cauchy dizisi denir.

Tanım 4.1.6. [26] (X, ρ) bir metrik uzay ve $A,\ A_k \subset X$ cümleleri kapalı olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in X$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \le n : \left| d(x, A_k) - d(x, A) \right| \ge \varepsilon \right\} \right| = 0,$$

yani h.h.k için

$$\left| d(x, A_k) - d(x, A) \right| < \varepsilon \tag{4.1}$$

ise $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_t - \lim_W A_k = A$ şeklinde gösterilir. Tüm Wijsman istatistiksel yakınsak $\{A_k\}$ dizilerinin kümesini WS ile göstereceğiz.

(4.1.1) göz önüne alınırsa Wijsman yakınsak her $\{A_k\}$ dizisinin Wijsman istatistiksel yakınsak olduğunu görürüz, fakat tersi doğru değildir. Bunu aşağıdaki örnekler ile açıklıyoruz.

Örnek 4.1.7. $X = \mathbb{R}$ olsun ve $\{A_k\}$ dizisini

$$A_k = \begin{cases} x \in R:\ 2 \le x \le k, & k \ge 2 \text{ ve } k \text{ bir tam kare } (k = m^2) \text{ ise} \\ \{1\}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu takdirde $\{A_k\}$ dizisi Wijsman yakınsak değildir, fakat,

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ k \le n : \left| d(x, A_k) - d(x, \{1\}) \right| \ge \varepsilon \right\} \right| \le \frac{\sqrt{n}}{n}$$

olduğundan $A = \{1\}$ kümesine Wijsman istatistiksel yakınsaktır denir.

Örnek 4.1.8. $X = \mathbb{R}^2$ ve $\{A_k\}$ dizisi aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$$A_k := \begin{cases} \left\{ (x,\ y) \in R^2 : (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{k} \right\}, & k = m^2 \quad \text{ise} \\ \{(0,\ 0)\}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Bu takdirde $\{A_k\}$ dizisi Wijsman istatistiksel yakınsaktır ancak Wjisman yakınsak değildir.

Tanım 4.1.9. [26] $(X,\ \rho)$ bir metrik uzay $\forall k \in \mathbb{N}$ için A_k kümesi X in kapalı alt cümlesi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \le n : \left| d(x,\ A_k) - d(x,\ A_n) \right| \ge \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise $\{A_k\}$ dizisine Wijsman istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Teorem 4.1.10. [26] $(X,\ \rho)$ bir metrik uzay olsun, aşağıdaki ifadeler denktir.

i) $\{A_k\}$ Wijsman istatistiksel yakınsaktır,

ii) $\{A_k\}$ Wijsman istatistiksel Cauchy dizisidir,

iii) $\{B_k\}$ h.h.k için $A_k = B_k$ olacak şekilde Wijsman yakınsak bir dizi ise $\{A_k\}$ dizisi Wijsman yakınsaktır.

İSPAT. Kabul edelim ki $\{A_k\}$ dizisi Wijsman istatistiksel yakınsak olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu takdirde h.h.k. için $\left| d(x,\ A_k) - d(x,\ A) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ yazabiliriz. N sayısını $\left| d(x,\ A_N) - d(x,\ A) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde seçelim. Bu takdirde h.h.k. için,

$$\left| d(x,\ A_k) - d(x,\ A_N) \right| \le \left| d(x,\ A_k) - d(d,\ A) \right| + \left| d(x,\ A_N) - d(x,\ A) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

yazabiliriz. Buradan $\{A_k\}$ Wijsman istatistiksel Cauchy dizisidir.

Şimdi (ii) nin sağlandığını kabul edelim. ℕ sayısını $J=\left[d\left(x,\ A_N\right)-1,\ d\left(x,\ A_N\right)+1\right]$ aralığı h.h.k. için $d\left(x,\ A_k\right)$'yı kapsayacak şekilde seçelim. Aynı durumu N_2 için tekrarlayalım. Yani N_2 sayısını $J'=\left[d\left(x,\ A_{N_2}\right)-\frac{1}{2},\ d\left(x,\ A_{N_2}\right)+\frac{1}{2}\right]$ aralığı h.h.k için $d\left(x,\ A_k\right)$'yı kapsayacak şekilde seçelim. h.h.k için $J_1=J\cap J'$ aralığının $d\left(x,\ A_k\right)$'yı kapsadığını iddia ediyoruz. Gerçekten,

$$\left\{k\le n: d\left(x,\ A_k\right)\notin J\cap J'\right\}=\left\{k\le n: d\left(x,\ A_k\right)\notin J\right\}$$
$$U\left\{k\le n: d\left(x,\ A_k\right)\notin J'\right\}$$

böylece

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k\le n: d\left(x,\ A_k\right)\notin J\cap J'\right\}\right|$$
$$\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k\le n: d\left(x,\ A_k\right)\notin\right\}\right|+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k\le n: d\left(x,\ A_k\right)\notin J'\right\}\right|$$
$$=0$$

dır. Bu yüzden J_1, h.h.k için $d\left(x,\ A_k\right)$'yı kapsayan ve boyu 1'den küçük olan kapalı bir aralıktır. Aynı işlemi N_3 için yapalım, Yani N_3 sayısını

$$J''=\left[d\left(x,\ A_{N_3}\right)-\frac{1}{4},\ d\left(x,\ A_{N_3}\right)+\frac{1}{4}\right]$$

aralığı h.h.k için $d\left(x,\ A_k\right)$ yı kapsayacak şekilde seçelim. Benzer yöntemle $J_2=J_1\cap J''$ kümesini h.h.k için $d\left(x,\ A_k\right)$yı kapsayacak şekilde oluşturalım $\left(J_2 \text{ nin uzunluğu} \le\frac{1}{2}\right)$ Bu şekilde devam ederek her bir m için $J_{m+1}\subseteq J_m$ olacak şekilde bir $\left(J_m\right)$ kapalı aralıklar dizisini bulabiliriz. Burada $\left(J_m\right)$ nin uzunluğu 2^{1-m} den büyük değildir ve h.h.k için $d\left(x,\ A_k\right)\in J_m$ dir. İç içe aralıklar teoremi gereğince $\bigcap_{m=1}^{\infty}J_m=\eta$ eşitliği sağlanacak şekilde bir η sayısı vardır. h.h.k için $d\left(x,\ A_k\right)\in J_m$ gerçeğini kullanarak $n>T_m$ iken;

$$\frac{1}{n}\left|k \le n : d\left(x,\ A_k\right) \notin J_m\right| < \frac{1}{m} \tag{4.2}$$

olacak şekilde artan bir $\{T_m\}$ pozitif bu tamsayı dizisi seçebiliriz.

Şimdi $k > T_1$ olacak şekilde tüm (A_k) terimlerinden oluşan bir $C = (C_k)$ alt dizisi tanımlayalım. Eğer $T_m < k \le T_{m+1}$ ise $d(x,\ A_k) \notin J_m$ olur. (B_k) dizisini

$$B_k = \begin{cases} \{\eta\}, \text{ Eğer } A_k \ C \text{nin } bir \text{ terimi ise} \\ A_k \quad , \quad diğer\ durumda \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde $\lim B_k = \{\eta\}$ dır.

Eğer $\varepsilon > \frac{1}{m} > 0$ ve $k > T_m$ ise bu takdirde $\{B_k\} = \{\eta\}$ veya $B_k = A_k \in J_m$ ve $\left|d(X,\ B_k) - d(x,\ \{\eta\})\right| < J_m$ nın boyu $\le 2^{1-m}$ dir. Şimdi h.h.h.k. için $\mathrm{A}_k = B_k$ olduğunu iddia ediyoruz. $\mathrm{T}_m < k < T_{m+1}$ için $\{k \ge n : d(X,\ A_k) \ne d(X,\ B_k)\} \subset \{k \le n : d(X,\ A_k) J_m\}$ olduğunu biliyoruz. (4.1.2) den dolayı

$$\frac{1}{n}\left|\{k \le n : d(x,\ B_k) \ne d(x,\ A_k)\}\right| \le \frac{1}{n}\left|\{k \le n : d(x,\ A_k) \notin J_m\}\right| < \frac{1}{m}\Bigg|$$

dır. Böylece $n \to \infty$ iken limit sıfır olur ve h.h.k için $A_k = B_k$ dır. Bu nedenle (ii) den (iii) elde edilir.

Son olarak (iii) ün sağlandığını kabul edelim. h.h.k için $A_k = B_k$ ve $\lim B_k = \{\eta\}$ diyelim. $\varepsilon > 0$ olsun. Bu takdirde her bir *n* için,

$$\left\{k \le n : d\left|(x,\ A_k) - d(x,\ \{\eta\})\right| \ge \varepsilon\right\} \subseteq \{k \le n : d(x,\ B_k) \ne d(x,\ A_k)\}$$
$$\cup \left\{k \le n : \left|d(x,\ B_k) - d(x,\ \{\eta\})\right| > \varepsilon\right\}$$

olup $\lim B_k = \{\eta\}$ olduğundan son ifadedeki 2. küme sabit sayıda eleman içerir, $L = L(\varepsilon)$ diyelim. Bu nedenle, h.h.k için $A_k = B_k$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k\le n:\left|d\left(x,\ A_k\right)-d\left(x,\ \{\eta\}\right)\right|\ge\varepsilon\right\}\right|$$
$$\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k\le n:d\left(x,\ B_k\right)\ne d\left(x,\ A_k\right)\right\}\right|+\lim_{n\to\infty}\frac{L}{n}=0$$

dır. Böylece (i) sağlanır.

4.2. Küme Dizilerinin Kuvvetli Toplanabilmesi

Bu bölümde küme dizilerinin kuvvetli toplanabilmesi kavramını açıklayacağız.

Tanım 4.2.1 [26] $(X,\ \rho)$ bir metrik uzay ve $A,\ A_k\subseteq X$ olmak üzere $\forall x\in X$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[d\left(x,\ A_k\right)-d\left(x,\ A\right)\right]=0$$

ise $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman Cesaro toplanabilirdir denir.

Tanım 4.2.2 [26] $(X,\ \rho)$ bir metrik uzay ve $A,\ A_k\subseteq X$ olsun, $\forall x\in X$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|d\left(x,\ A_k\right)-d\left(x,\ A\right)\right|=0$$

ise $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli Cesaro toplanabilirdir denir.

Tanım 4.2.2 [26] $(X,\ \rho)$ bir metrik uzay ve $A,\ A_k\subseteq X$ olsun, $\forall x\in X$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|d\left(x,\ A_k\right)-d\left(x,\ A\right)\right|^p=0$$

ise $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli p-Cesaro toplanabilirdir denir.

Teorem 4.2.2 [26] $(X,\ \rho)$ bir metrik uzay ve $A,\ A_k\subseteq X$ olsun,

a) $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli p-Cesaro toplanabilir ise Wijsman istatistiksel yakınsaktır.

b) $\{A_k\}$ sınırlı ve Wijsman istatistiksel yakınsak ise A kümesine Wijsman kuvvetli p-Cesaro toplanabilirdir.

İSPAT. a) Herhangi bir $\{A_k\}$ dizisi ve sabit bir $\varepsilon > 0$ için,

$$\sum_{k=1}^{n} |d(x, A_k) - d(x, A)|^p \geq |\{k \leq n: |d(x, A_k) - d(x, A)|^p \geq \varepsilon\}|$$

olup, buradan

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|d\left(x,\ A_k\right)-d\left(x,\ A\right)\right|^p \geq \frac{1}{n}\varepsilon\left|\left\{k \leq n : \left|d\left(x,\ A_k\right)-d\left(x,\ A\right)\right|^p \geq \varepsilon\right\}\right|$$

yazabiliriz. Son eşitsizlikte her iki tarafın $n \to \infty$ için limiti alınırsa sonuç elde edilir.

b) $\{A_k\}$ sınırlı ve A kümesine Wijsman istatistiksel yakınsak olsun. $\{A_k\}$ sınırlı olduğundan,

$$\sup_k \left|d\left(x,\ A_k\right)\right| + d\left(x,\ A\right) = M$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır.

$\varepsilon > 0$ verilsin ve N_ε sayısını $\forall n > N_\varepsilon$ sayısı için,

$$\frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : \left|d\left(x,\ A_k\right)-d\left(x,\ A\right)\right| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}\right| < \frac{\varepsilon}{2.M^P}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde seçelim ve

$$L_n = \left\{k \leq n : \left|d\left(x,\ A_k\right)-d\left(x,\ A\right)\right| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{P}}\right\}$$

olsun. Bu takdirde,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|d\left(x,\ A_k\right)-d\left(x,\ A\right)\right|^P=\frac{1}{n}\left(\sum_{k\in I_n}\left|d\left(x,\ A_k\right)-d\left(x,\ A\right)\right|^P\right.$$

$$\left.+\sum_{k\leq n;\ k\notin L_n}\left|d\left(x,\ A_k\right)-d\left(x,\ A\right)\right|^P\right)$$

$$<\frac{1}{n}\frac{n\varepsilon}{2M^P}.M^P+\frac{1}{n}.\frac{n\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

yazabiliriz. Buradan $\{A_k\}$ Wijsman kuvvetli p-Cesaro toplanabilirdir.

5. α. DERECEDEN f-WIJSMAN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde küme dizilerinin α. dereceden *f*-Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaklığı ve α. dereceden *f*-Wijsman lacunary kuvvetli toplanabilmesi kavramlarını tanımlayacak ve bu kavramlar arasında birkaç bağıntı vereceğiz. Bu kısım tezin orijinal kısmı olup sonuçlarımız öncekilerden, örneğin Bhardwaj ve Dhawan [37] sonuçlarından daha geneldir. İlk olarak küme dizilerinin α. dereceden Wijsman *f*-lacunary istatistiksel yakınsaklığını tanımlayarak başlayalım.

5.1 α. Dereceden *f*-Wijsman Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda küme dizilerinin α. derecden *f*-Wijsman lacnary istatistiksel yakınsaklığını tanımlayacak, $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ şartını sağlayan α ve β sayıları için küme dizilerinin α. dereceden *f*-Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaklığı ve küme dizilerinin β. dereceden *f*-Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaklığı arasındaki bağıntıyı inceleyeceğiz.

Tanım 5.1.1 (M, ρ) bir metrik uzay, *f* sınırsız bir modülüs fonksiyonu, $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. *A* ve A_k (her k∈ ℕ için) kümelerinin M nin boş olmayan kapalı alt kümeleri olduğunu kabul edelim. Eğer her bir $x \in M$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\left[f\left(h_r\right)\right]^{\alpha}} f\left(\left|\left\{k \in I_r : \left|d\left(x, A_k\right) - d\left(x, A\right)\right| \geq \varepsilon\right\}\right|\right) = 0$$

ise *M* nin boş olmayan kapalı alt kümelerinin bu $\{A_k\}$ dizisi *M* nin boş olmayan kapalı bir *A* alt kümesine α. dereceden *f*-Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaktır denir, bu durumda;

$$WS_{\theta,\alpha}^{f} - \lim A_k = A$$

veya

$$A_k \to A\left(WS_{\theta,\alpha}^{f}\right)$$

yazarız. Tüm α. dereceden f-Wijsman lacunary istatistiksel yakınsak $\{A_k\}$ dizilerinin kümesini $WS_{\theta,\alpha}^{f}$ ile göstereceğiz. f fonksiyonun, θ lacunary dizisinin ve α sayısının özel seçilişlerine göre bazı dizi uzayları elde edilir, örneğin

i) $f(x)=x$ ise $WS_{\theta,\alpha}$,

ii) $\theta = (2^r)$ ise WS_{α}^{f} ,

iii) $\alpha = 1$ ise WS_{θ}^{f} ,

iv) $\theta = (2^r)$ ve $\alpha = 1$ *ise* WS^f .

v) $f(x) = x$, $\theta = (2^r)$ ve $\alpha = 1$ *ise* WS .

uzayları elde edilir.

Örnek 5.1.2. $X = \mathbb{R}$ $d(x, y) = |x - y|$, $f(x) = x$ seçelim ve $\{A_k\}$ dizisi aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$$A_k = \begin{cases} \{3x\}, & k_{r-1} < k < k_{r-1} + \sqrt{h_r} \quad \text{ise} \\ \{0\}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Bu takdirde $\alpha = 1$ ve $x > 1$ için $\{A_k\}$ dizisi

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{[h_r]^{\alpha}} |\{k \in I_r : |d(x, A_k) - d(x, \{1\})| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olduğundan $\{A\} = \{1\}$ kümesine Wijsman istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 5.1.3 (M, ρ) bir metrik uzay, f sınırsız bir modülüs fonksiyonu, $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ için $WS_{\theta,\alpha}^{f} \subseteq WS_{\theta,\beta}^{f}$ olup ve bu kapsama $\alpha < \beta$ eşitsizliğini sağlayan α, β sayıları için kesindir.

İspat. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{\left[f(h_r)\right]^{\beta}} f\left(\left|\left\{k \in I_r : \left|d(x, A_k) - d(x, A)\right| \geq \varepsilon\right\}\right|\right)$$
$$\leq \frac{1}{\left[f(h_r)\right]^{\alpha}} f\left(\left|\left\{k \in I_r : \left|d(x, A_k) - d(x, A)\right| \geq \varepsilon\right\}\right|\right)$$

olduğundan kapsama bağıntısı sağlanır. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için $X = \mathbb{R}^2$ $f(x) = x$, $\theta = (2^r)$ seçelim, $\{A_k\}$ dizisini

$$A_k = \begin{cases} \left\{(x, y) \in R^2 : x^2 + (y-1)^2 = k^2\right\}, & k = m^2 \quad \text{ise} \\ \left\{(0, 0)\right\}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım, bu takdirde $\beta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ için $\{A_k\} \in WS^f_{\theta,\beta}$ fakat $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ için $\{A_k\} \notin WS^f_{\theta,\beta}$ dir.

Teorem 5.1.3 den aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Sonuç 5.1.4 (M, ρ) bir metrik uzay, f sınırsız bir modülüs fonksiyonu, $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. $0 < \alpha \leq 1$ için $WS^f_{\theta,\alpha} \subseteq WS^f_{\theta}$ olup ve bu kapsama $0 < \alpha \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan α sayıları için kesindir.

Sonuç 5.1.5 (M, ρ) bir metrik uzay, f sınırsız bir modülüs fonksiyonu olsun. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ için $WS^f_{\alpha} \subseteq WS^f_{\beta}$ olup ve bu kapsama $\alpha < \beta$ eşitsizliğini sağlayan α, β sayıları için kesindir.

Sonuç 5.1.6 (M, ρ) bir metrik uzay, $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ için $WS_{\theta,\alpha} \subseteq WS_{\theta,\beta}$ olup ve bu kapsama $\alpha < \beta$ eşitsizliğini sağlayan α, β sayıları için kesindir.

Teorem 5.1.7. (M, ρ) bir metrik uzay, f sınırsız bir modülüs fonksiyonu, $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. $0 < \alpha \leq 1$ için

$$\liminf_r \frac{\left[f(h_r)\right]^{\alpha}}{f(k_r)} > 0$$

ise $WS^{f} \subseteq WS^{f}_{\theta,\alpha}$ dır.

İspat. Verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \leq k_r : |d(x,A_k) - d(x,A)| \geq \varepsilon\} \supset \{k \in I_r : |d(x,A_k) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}$$

yazabiliriz. Böylece f artan olduğundan

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{f(k_r)} f(|\{k \leq k_r : d(x,A_k) - d(x,A) \geq \varepsilon\}| \\
&\qquad \geq \frac{1}{f(k_r)} f(|\{k \in I_r : d(x,A_k) - d(x,A) \geq \varepsilon\}|) \\
&\qquad = \frac{[f(h_r)]^{\alpha}}{f(k_r)} \frac{1}{[f(h_r)]^{\alpha}} f(|\{k \in I_r : d(x,A_k) - d(x,A) \geq \varepsilon\}|)
\end{aligned}$$

elde edilir. $r \to \infty$ için limit alınır ve $\liminf_r \frac{[f(h_r)]^{\alpha}}{f(k_r)} > 0$ ifadesi kullanılırsa

$WS^{f} \subseteq WS^{f}_{\theta,\alpha}$ olduğu görülür.

Teorem 5.1.7 den aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Sonuç 5.1.8. (M, ρ) bir metrik uzay, f sınırsız bir modülüs fonksiyonu, $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun.

$$\liminf_r \frac{[f(h_r)]}{f(k_r)} > 0$$

ise $WS^{f} \subseteq WS^{f}_{\theta}$ dır.

Sonuç 5.1.9 (M, ρ) bir metrik uzay ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun.
$0 < \alpha \leq 1$ için

$$\liminf_r \frac{[(h_r)]^{\alpha}}{(k_r)} > 0$$

ise $WS \subseteq WS_{\theta,\alpha}$ dır.

5.2 α. Dereceden *f*-Wijsman Lacunary Kuvvetli Toplanabilme

Bu kısımda küme dizilerinin α. dereceden *f*-Wijsman lacunary kuvvetli toplanabilmesi kavramını tanımlayacak, $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ şartını sağlayan α ve β sayıları için küme dizilerinin α. derecden *f*-Wijsman lacunary kuvvetli toplanabilmesi ve küme dizilerinin β. dereceden *f*-Wijsman lacunary kuvvetli toplanabilmesi arasındaki bağıntıyı inceleyeceğiz.

Tanım 5.2.1 (M, ρ) bir metrik uzay, *f* sınırsız bir modülüs fonksiyonu, $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. A ve A_k (her k∈ ℕ için) kümelerinin M nin boş olmayan kapalı alt kümeleri olduğunu kabul edelim. Eğer her bir $x \in M$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_r \frac{1}{[h_r]^\alpha} \sum_{k \in I_r} f(|d(x, A_k) - d(x, A)|) = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa *M* nin boş olmayan kapalı alt cümlelerinin bu $\{A_k\}$ dizisi *M* nin boş olmayan kapalı bir A alt cümlesine α. dereceden *f*-Wijsman lacunary kuvvetli toplanabilirdir denir, bu durumda;

$$WN_{\theta,\alpha}^f - \lim A_k = A$$

veya

$$A_k \to A\left(WN_{\theta,\alpha}^f\right)$$

yazarız. Tüm α. dereceden *f*-Wijsman lacunary kuvvetli toplanabilir$\{A_k\}$ dizilerinin cümlesini $WN_{\theta,\alpha}^f$ ile göstereceğiz. *f* fonksiyonun, θ lacunary dizisinin ve α sayısının özel seçilişlerine göre bazı dizi uzayları elde edilir, örneğin

i) $f(x) = x$ ise $WN_{\theta,\alpha}$,

ii) $\theta = (2^r)$ ise WN_α^f ,

iii) $\alpha = 1$ ise WN_θ^f ,

iv) $\theta = (2^r)$ ve $\alpha = 1$ *ise* WN^f .

v) $f(x) = x$, $\theta = (2^r)$ ve $\alpha = 1$ *ise WN* .

uzayları elde edilir.

Örnek 5.2.2. $X = R$, $d(x, y) = |x - y|$, $f(x) = x$ seçelim ve $\{A_k\}$ dizisi aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$$A_k = \begin{cases} \left\{\dfrac{xk}{2}\right\}, & k_{r-1} < k < k_{r-1} + \sqrt{h_r} \quad \text{ise} \\ \{0\}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Bu takdirde $\alpha = 1$ ve $x > 1$ için $\{A_k\}$ dizsi

$$\lim_r \frac{1}{[h_r]^\alpha} \sum_{k \in I_r} |d(x, A_k) - d(x, A)| = 0$$

olduğundan $\{A\} = \{1\}$ kümesine Wijsman istatistiksel yakınsaktır.

Önerme 5.2.3 [38] *f* bir modülüs fonksiyonu, $0 < \delta < 1$ bir sayı olsun, bu takdirde $x > \delta$ için $f(x) \le 2.f(1).\delta^{-1}x$ dir.

Teorem 5.2.4 (M, ρ) bir metrik uzay, *f* sınırsız bir modülüs fonksiyonu, $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi ve $0 < \alpha \le 1$ olsun, bu takdirde $WN_{\theta,\alpha} \subseteq WN_{\theta,\alpha}^f$ dir.

İspat $(E_k) \in WN_{\theta,\alpha}$ *olsun, butakdirde* $\forall x \in M$ için,

$$\lim_r \frac{1}{[h_r]^\alpha} \sum_{k \in I_r} |d(x, A_k) - d(x, A)| = 0 \text{ dır.}$$

$$N^\alpha{}_r = \frac{1}{[h_r]^\alpha} \sum_{k \in I_r} |d(x, A_k) - d(x, A)|$$

diyelim. $\varepsilon > 0$ verilsin, $0 < \delta < 1$ için $0 \le \ell_1 \le \delta$ olmak üzere, $f(\ell_1) < \varepsilon$ olacak şekilde $0 < \delta < 1$ sayısını seçelim. Bu takdirde,

$$\frac{1}{[h_r]^\alpha}\sum_{k\in I_r} f\left(\left|d\left(x,\ A_k\right)-d\left(x,\ A\right)\right|\right)$$

$$=\frac{1}{[h_r]^\alpha}\left(\sum_{\substack{k\in I_r \\ \left|d(x,\ A_k)-d(x,\ A)\right|\le\delta}} f\left(\left|d\left(x,\ A_k\right)-d\left(x,\ A\right)\right|\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{[h_r]^\alpha}\left(\sum_{\substack{k\in I_r \\ \left|d(x,\ A_k)-d(x,\ A)\right|>\delta}} \left|d\left(x,\ A_k\right)-d\left(x,\ A\right)\right|\right)\right)$$

$$\le\frac{1}{[h_r]^\alpha}\left([h_r]^\alpha\ \varepsilon\right)+2f\left(1\right)\delta^{-1}N^{\alpha}{}_{r}\ .$$

yazılabilir. $r\to\infty$ için limit alınır ve Önerme 5.2.3 kullanılırsa $\left(A_k\right)\in WN_{\theta,\alpha}^{f}$ elde edilir.

Aşağıdaki örnekte görüleceği gibi Teorem 5.2.4' ün tersi doğru değildir.

Örnek 5.2.5 $M=R,\ \delta\left(x,\ y\right)=\left|x-y\right|,\ \ f\left(x\right)=\log\left(x+1\right),\ \ \alpha=1$ seçelim ve $\{A_k\}$ dizisini

$$A_k=\begin{cases}\{h_r\}, & k=k_{r-1}+1 \text{ olacak şekilde } k\in I_r \text{ için}\\ \{0\}, & \text{Diğer durumlarda}\end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Açıkça $\{A_k\}$ sınırlı olmayan bir dizidir. Bu takdirde her bir $X\in M$ için,

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} f\left(\left|d\left(x,\ A_k\right)-d\left(x,\ \{0\}\right)\right|\right)&=\frac{1}{h_r}f\left(\left|d\left(x,\ A_{kr-1}+1\right)-d\left(x,\ \{0\}\right)\right|\right)\\&=\frac{1}{h_r}f\left(\left|d\left(x,\ \{h_r\}\right)-d\left(x,\ \{0\}\right)\right|\right)\\&\le\frac{1}{h_r}f\left(\left|\left(x-h_r\right)-\left(x-0\right)\right|\right)\\&=\frac{f\left(h_r\right)}{h_r}=\frac{\log\left(h_r+1\right)}{h_r}\to 0,\ \ r\to\infty\end{aligned}$$

dir ve böylece $\left(A_k\right)\in\left[WN_{\theta}^{f}\right]$ dir. Fakat $X=0$ için,

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|d\left(x,\ A_k\right)-d\left(x,\ \{0\}\right)\right|=\frac{1}{h_r}\left|d\left(x,\ A_{k_{r-1}}+1\right)\right|=d\left(x,\ \{0\}\right)$$

$$=\frac{1}{h_r}\left\|x-h_r\right|-\left|x-0\right\|$$

$$=\frac{1}{h_r},\ h_r\to 1,\ r\to\infty \quad \text{için}$$

olup, $\left(A_k\right)\notin\left[WN_\theta\right]$ dır.

Herhangi bir modülüs fonksiyonu için $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}$ ifadesinin mevcut olduğunu biliyoruz. Bu şart sağlanıyorsa yukarıdaki teoremin tersi doğrudur. Bu durumu aşağıdaki teoremde ifade ediyoruz ve teoremi ispatsız olarak veriyoruz.

Teorem 5.2.6 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}>0$ olacak şekilde bir f modülüs fonksiyonu olsun. Bu takdirde $WN_{\theta,\alpha}^{f}\subset WN_{\theta,\alpha}$ kapsaması sağlanır.

5.3. α. Dereceden *f*-Wijsman Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık ve α. Dereceden *f*-Wijsman Lacunary Kuvvetli Toplanabilme Arasındaki İlişki

Bu bölümde küme dizilerinin α. dereceden *f*-Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaklığı ve α. dereceden *f*-Wijsman lacunary kuvvetli toplanabilmesi kavramlarının arasındaki ilişkiyi vereceğiz.

Teorem 5.3.1. f herhangi bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu takdirde $WN_{\theta,\alpha}^{f}\subset WS_{\theta,\alpha}^{f}$ dır.

İspat. Kabul edelim ki $\left(A_k\right)\in WN_{\theta,\alpha}^{f}$ olsun, $\varepsilon>0$ verilsin. $x\in M$ için

$$\frac{1}{[h_r]^\alpha}\sum_{k\in I_r} f\left(\left|d(x, A_k)-d(x, A)\right|\right)$$

$$\geq \frac{1}{[h_r]^\alpha}\left(\sum_{\left|d(x, A_k)-d(x, A)\right|\geq\varepsilon} f\left(\left|d(x, A_k)-d(x, A)\right|\right)\right)$$

$$\geq \frac{1}{[h_r]^\alpha}\left|\left\{k\in I_r : \left|d(x, A_k)-d(x, A)\right|\geq\varepsilon\right\}\right| f(\varepsilon)$$

yazabiliriz. Böylece $(A_k)\in WS^f_{\theta,\alpha}$ olur.

Teorem 5.3.1 in tersi doğru değildir. Bunu aşağıdaki örnekle açıklıyoruz.

Örnek 5.3.2. $M = \mathbb{R}$ $d(x, y)=|x-y|$ ve $f(x)=2x$ alalım ve $\alpha = 1$ seçelim. (A_k) dizisi,

$$A_k = \begin{cases} \{h_r\}, & k = k_{r-1}+1 \text{ olacak şekilde } k\in I_r \text{ için} \\ \{0\}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\forall x\in M$ ve $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r : \left|d(x, A_k)-d\left(x, \{0\}\right)\right|\geq\varepsilon\right\}\right| = \lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r} = 0$$

yazılabileceğinden (A_k) dizisi $A = \{0\}$ kümesine Wijsman Lacunary istatistiksel yakınsaktır, fakat Wijsman Lacunary kuvvetli yakınsak değildir.

6. SONUÇ

Küme dizilerinin yakınsaklığı kavramı Wijsman ([24], [25]) tarafından tanımlandı. Nuray ve Rhoades [26] küme dizilerinin istatistiksel yakınsaklığını tanımladılar ve konuyla ilgili birkaç bağıntı ispatladılar. Daha sonra Bhardwaj ve Dhawan [26], Nuray ve diğerleri ([27], [28], [29]), Savaş [30], Şengül ve Et [31] küme dizilerinin istatistiksel yakınsaklığını kavramını ayrıntılı çalıştılar. Bu çalışmada küme dizilerinin α.dereceden f-Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaklığı ve dereceden f-Wijsman kuvvetli p-lacunary yakınsaklığı kavramları tanımlandı ve bu iki kavram arasında bir ilişki verildi. İleriki zamanlarda $\theta = (k_r)$ lacunary dizisinin sağlayacağı bazı şartlar ile bu iki kavrama ilişkin diğer bağıntılar verilebilir.

KAYNAKLAR

[1] **Zygmund, A.** 1979 Trigonometric Series, Cambridge University Press, Cambridge, UK,

[2] **Steinhaus, H.**, 1951. Sur La Convergence Ordinaire Et La Convergence Asymptotique, *Colloquium Mathematicum,* **2,** 73-74.

[3] **Fast, H.**, 1951. Sur La Convergence Statistique, *Colloq. Math*., **2,** 241-244.

[4] **Schoenberg, I. J.**, 1959. The Integrability of Certain Functions and Related Summability Methods, *Amer. Math. Monthly,* **66**, 361-375.

[5] **Fridy, J.** 1985. On Statistical Convergence, *Analysis 5*, 301-313.

[6] **Connor, J. S.**, 1988. The Statistical and Strong p-Cesaro Convergence of Sequences, *Analysis* **8**, 47-63.

[7] **Savaş**, **E.**, 2000. Strong Almost Convergence and Almost λ-Statistically Convergence, *Hokkaido Math. Jour*. 2**9,** 531-536.

[8] **Mursaleen**, **M.,** 2000. $\lambda-$Statistical Convergence, *Math. Slovaca,* **50, No. 1,** 111-115.

[9] **Fridy, J. A. ve Orhan**, **C.,** 1993. Lacunary Statistical Convergence, *Pacific J. Math*. **160** (1) 43-51.

[10] **Fridy, J. A. ve Orhan**, **C.,** 1993. Lacunary Statistical Summability, *J. Math. Anal. Appl.* **173** (2) 497-504.

[11] **Moricz, F.**, 2003. Statistical Convergence of Multiple Sequences, *Arch. Math.*, **81,** 82-89.

[12] **Rath, D. ve Tripathy, B. C.**, 1994. On Statistically Convergent and Statistically Cauchy Sequences, *Indian J. Pure. Appl. Math.,* **25(4),** 381-386.

[13] **Salat, T.**, 1980. On Statistically Convergent Sequences of Real Numbers, *Math. Slovaca,* **30,** 139-150.

[14] **Bhardwaj, V. K. ve Bala, I.**, 2007. On Weak Statistically Convergence, *Int. J. Math. and Math. Sci. Vol. Article* ID 38530.

[15] **Bhardwaj, V. K. ve Dhawan, S**. 2017 Density by moduli and Wijsman lacunary statistical convergence of sequences of sets. *J. Inequal. Appl.* Paper No. 25, 20 pp

[16] **Bhardwaj, V. K. ve Dhawan, S**. 2016 Density by moduli and lacunary statistical convergence. *Abstr. Appl. Anal.* ,4 Art. ID 9365037, 11 pp.

[17] **Gadjiev, A. D. ve Orhan, C.** 2002 Some approximation theorems via statistical convergence, Rocky Mountain J. Math. 32(1), 129-138.

[18] **Bhunia, S. ; Das, P. Ve Pal, S. K.** 2012, Restricting statistical convergence. Acta Math. Hungar. 134(1-2), 153--161.

[19] **Çolak, R.** , 2010, Statistical convergence of order α, Modern Methods in Analysis and Its Applications, New Delhi, India: Anamaya Pub, 121--129.

[20] **Çolak, R.**, 2011. On λ −Statistical Convergence, *Conference on Summability and Aplications*, Commerce University, May 12-13, Istanbul, Turkey.

[21] **Çolak, R. ve Bektaş, Ç. A.,** 2011. On λ −Statistical Convergence of Order α, *Acta Math. Sci.*, **31(3)**, 953-959.

[22] **Et, M. ve Şengül, H.** 2014. SomeCesàro-type summability spaces of order α and lacunary statistical convergence of order α, Filomat 28(8), 1593--1602.

[23] **Şengül, H. ve Et, M.** 2014. On lacunary statistical convergence of order α, Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. 34(2), 473--482.

[24] **Wijsman R. A**. 1964. Convergence of sequences of convex sets, cones and functions, Bull. Amer. Math. Soc., 70, 186-188.

[25] **Wijsman R.A.** 1966. Convergence of sequences of convex sets, cones and functions II, Trans. Amer. Math. Soc., 123(1), 32-45.

[26] **Nuray, F. ve Rhoades, B. E. 2012** Statistical convergence of sequences of sets. Fasc. Math.49, 87-99.

[27] **Ulusu, U. ve Nuray, F.** 2012. Lacunary statistical convergence of sequences of sets, Prog. Appl.Math.4(2),99-109.

[28] **Nuray, F. ; Ulusu, U. ve Dündar, E.** 2016. Lacunary statistical convergence of double sequences of sets. Soft Comput.20(7), 2883-2888.

[29] **Pancaroğlu, N. ve Nuray, F.** 2014. Invariant statistical convergence of sequences of sets with respect to a modulus function. Art. ID 818020, 5 pp.

[30] **Savaş, E.** 2015 On I-lacunary statistical convergence of order α for sequences of sets. Filomat 29(6),1223-1229.

[31] **Şengül, H. ve Et, M**. 2017. On I-lacunary statistical convergence of order α of sequences of sets. *Filomat* **31(**8), 2403--2412.

[32**] Maddox, I. J.**, 1970. Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, Second Edition.

[33] **Kreyszıg, E.**, 1978. Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York

[34] **Niven, I., Zucherman, H. S. ve Montgomery, H. L.**, 1991. An Introduction to The Theory of Numbers. *Fifth Ed.*, John Wiley, New York.

[35] **Freedman, A. R., Sember, J. J. ve Raphael, M.,** 1978. Some Cesaro-type Summability Spaces, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 37, 508-520.

[36] **Şengül, H.** 2013. A. Derceden Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık ve α. dereceden I-Yakınsaklık, Doktor Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

[37] **Bhardwaj, V. K. ve Dhawan, S**. 2017 Density by moduli and Wijsman lacunary statistical convergence of sequences of sets. *J. Inequal. Appl.* Paper No. 25, 20 pp.

[38] **S. Pehlivan, S. ve Fisher, B.** On some sequence spaces. *Indian J. Pure Appl. Math.***25** (1994), no. 10, 1067--1071

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Malatya'da doğdum. 2004 yılında Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü bitirdim. 2006 yılında matematik bölümünde tezsiz yüksek lisansımı tamamladım 2004-2015 yılları arasında Final Dershanelerinde matematik öğretmenliği yaptım. 2015 yılında kamuya atandım. Halen Harput Anadolu Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak çalışıyorum. 2015 yılında Fırat Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı'nda tezli yüksek lisansa başladım.