

**T.C.**  
**TRAKYA ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KATMANLI KOMPOZİT DÖNEN KİRİŞ VE PLAK YAPILARIN**  
**DİNAMİK ANALİZİ**

**TOLGA AKSENCER**

**DOKTORA TEZİ**

**MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. METİN AYDOĞDU**

**EDİRNE-2018**

TOLGA AKSENCER' in hazırladığı “**KATMANLI KOMPOZİT DÖNEN KİRİŞ VE PLAK YAPILARIN DİNAMİK ANALİZİ**” başlıklı bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından Makine Mühendisliği Anabilim Dalında bir Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri (Ünvan, Ad, Soyad):

İmza

Prof. Dr. Metin AYDOĞDU

Prof. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ

Doç. Dr. Deniz AĞIRSEVEN

Dr. Öğr. Üyesi Armağan Fatih KARAMANLI

Dr. Öğr. Üyesi Vedat TAŞKIN

Tez Savunma Tarihi: 07/06/2018

Bu tezin Doktora tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

İmza

Prof. Dr. Metin AYDOĞDU

Tez Danışmanı

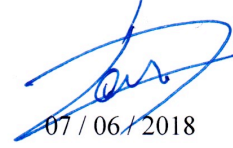
Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. Murat YURTCAN  
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

**T.Ü.FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI DOKTORA PROGRAMI  
DOĞRULUK BEYANI**

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında, tüm verilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini, kullanılan verilerde tahrifat yapılmadığını, tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını, kullanılan tüm literatür bilgilerinin bilimsel normlara uygun bir şekilde kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını ve bu tezin tamamı ya da herhangi bir bölümünün daha önceden Trakya Üniversitesi ya da farklı bir üniversitede tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.



07 / 06 / 2018

*Tolga AKSENCER*

Doktora Tezi

Katmanlı Kompozit Dönen Kiriş ve Plak Yapıların Dinamik Analizi

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

## ÖZET

Bu çalışmada, dönen katmanlı kompozit ve izotrop kiriş ve plak yapıların dinamik analizleri teorik olarak incelenmiştir. Öncelikle hareket denklemleri ve sınır şartları Hamilton ilkesi kullanılarak elde edilmiş ve çözümde Ritz ve Diferansiyel Dönüşüm Yöntemleri kullanılmıştır. Ritz yönteminde yer değiştirme alanı bileşenleri basit polinomlar olarak seçilmiştir. Problemlerin formülasyonunda klasik ve yüksek mertebeden kayma şekil değiştirme teorileri kullanılmıştır. Simetrik dik katmanlı kompozit kirişlerde katmanlar arası kayma gerilmelerinin sürekliliği de gözönüne alınmıştır. Ayrıca, kütle eklenmiş dönen izotrop ve katmanlı kompozit kirişlerin titreşimleri çalışılmış ve bazı mod biçimleri de verilmiştir. Ortotropi oranı, kenar kalınlık oranı, dönme hızı, kök oranı, kütle oranı ve sınır şartları gibi parametrelerin izotrop ve katmanlı kompozit kiriş ve plakların dinamiği üzerine etkileri detaylı olarak incelenmiş elde edilen sonuçlar çizelgeler ve şekiller ile sunulmuştur.

Yıl : 2018

Sayfa Sayısı : 123

Anahtar Kelimeler : Kiriş, plak, titreşim, dik katmanlı kompozit kiriş, dönen kompozit kiriş, dönen kütleli kompozit kiriş, dönen plaklar, dönen kompozite plaklar

Phd. Thesis

Dynamic Analysis of Rotating Laminated Composite Beams and Plates Structures

Trakya University Institute of Natural Sciences

Department of Mechanical Engineering

## **ABSTRACT**

In this study, the dynamic analysis of rotating laminated composite and isotropic beams and plates are investigated theoretically. First of all, equations of motion and boundary conditions are obtained by using Hamilton principles and Ritz method and differential transformation method are used in solution. In the Ritz method, simple polynomials are used for the displacement fields. In the formulation of the problems, classical and higher order shear deformation theories are used. The continuity of the shear stresses among the layers of symmetric laminated composite beams is also taken into consideration. In addition, vibrations of rotating composite beams with attached mass are studied and some mod shapes are given. The effects of parameters such as orthotropy ratio, edge/thickness ratio, rotation speed, hub ratio, mass ratio and boundary conditions on the dynamics of isotropic and laminated composite beams and plates are examined in detail and results are presented in tables and figures.

Year : 2018

Number of Pages : 123

Keywords : beams, plates, vibrations, cross-ply composite beams, rotating composite beams, added mass rotating composite beams, rotating plates, rotating composite plates

## ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen akademik yönünü her zaman örnek aldığımız değerli bilim insanı danışman hocam Sayın Prof. Dr. Metin AYDOĞDU' ya çok teşekkür ederim. Tezin hazırlanması esnasındaki yaşanan bu zorlu süreçte hep yanımda olan ve beni bu günlere getiren aileme teşekkürü borç bilirim. Ayrıca hep desteklerini hissettiğim sevgili arkadaşlarım Arş. Grv. Erhan AKYOL'a, Öğr. Grv. Anıl ŞAHİN'e, Arş. Grv. M. Gökhan GÜNAY'a ve bölümümüz sekreteri Reyhan BAVKIR'a sonsuz şükranlarımı sunarım.

## İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
ÖNSÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
SİMGELER DİZİNİ.....	ix
ÇİZELGELER VE ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xi
BÖLÜM 1.....	1
GİRİŞ.....	1
1.1. Problemin Önemi.....	1
1.2. Önceki Çalışmalar.....	3
1.3. Çalışmanın amacı.....	8
BÖLÜM 2.....	9
DÖNEN KATMANLI KOMPOZİT KİRİŞ VE PLAK DENKLEMLERİNİN ELDE EDİLMESİ.....	9
2.1. Giriş.....	9
2.2. Kompozit Malzemeler.....	9
2.3. Kompozit Malzemelerin Makromekaniği.....	10
2.3.1. Ortotropik malzemede düzlem gerilme durumunda gerilme-birimşekil değiştirme bağıntıları.....	18
2.4. Katmanlı kompozit kirişler.....	21
2.4.1. Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi (EBT).....	21
2.4.2. Birinci Mertebe Kayma Şekil Değiştirme Teorisi (BMKDT).....	23
2.4.3. Parabolik kayma şekil değiştirme teorisi (PKDT).....	24
2.5. Plaklar.....	25
2.5.1. Klasik plak teorisi (KPT).....	25
2.5.2. Klasik Laminasyon Teorisi (KLT).....	26
2.6. Enerji Yöntemleri.....	28
2.6.1. Sanal iş ilkesi.....	28
2.6.2. Minimum toplam potansiyel enerji ilkesi.....	28

2.6.3. Hamilton ilkesi .....	29
2.7. Katmanlı Kompozit Plak Denklemlerinin Elde Edilmesi .....	30
2.7.1. Birim şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları .....	31
2.7.2. Gerilme-birim şekil değiştirme bağıntıları .....	31
2.8. Dönen kompozit kirişin hareket denkleminin elde edilmesi .....	36
BÖLÜM 3 .....	40
DÖNEN KATMANLI KOMPOZİT KİRİŞ VE PLAK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN RİTZ VE DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMLERİ .....	40
3.1. Giriş .....	40
3.2. Ritz Yöntemi .....	40
3.2.1. Dönen dik katmanlı kompozit kiriş için Ritz yöntemi ile çözümü .....	41
3.2.2. Katmanlı kompozit kirişlerde katmanlar arası düşey kayma gerilmelerinin sürekliliği .....	45
3.3. Dönen dik katmanlı kompozit plağın titreşiminin Ritz yöntemi ile incelenmesi .....	45
3.4. Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (DDY) .....	47
3.4.1. Diferansiyel dönüşüm yönteminin dönen katmanlı kompozit kiriş titreşim problemine uygulanması .....	49
3.4.2. DDY yöntemi ile dönüşmüş sınır şartları .....	50
3.4.2.1. İzotrop ve kompozit dönen kiriş için EBT teorisi kullanılarak DDY yöntemi sınır şartları .....	50
3.4.2.2. Kompozit dönen kirişi için BMKDT teorisi kullanılarak DDY yöntemi sınır şartları .....	52
BÖLÜM 4 .....	55
SAYISAL SONUÇLAR VE TARTIŞMA .....	55
4.1. Giriş .....	55
4.2. Dönen izotrop ve katmanlı kompozit kirişlere ait sayısal sonuçlar .....	56
4.3. Kütle bağlanmış dönen katmanlı kompozit ve izotrop kirişlerin titreşim sonuçları .....	78
4.4. Mod Biçimleri .....	98
4.4.1. Dönen kompozit ankastre kiriş için mod biçimleri .....	98
4.4.2. Kütle bağlanmış dönen kompozit ankastre kiriş için mod biçimleri .....	100
4.5. Dönen katmanlı kompozit plak için Ritz yöntemi ile elde edilen sayısal sonuçlar .....	103



BÖLÜM 5 .....	109
GENEL SONUÇLAR .....	109
EKLER.....	118
Ek A-Dönen kompozit ankastre kirişin mod biçimi denklemleri.....	118
Ek B-Dönen dış uçta kütleli kompozit ankastre kirişin mod biçimi denklemleri .....	120
ÖZGEÇMİŞ .....	122
TEZ ÖĞRENCİSİNE AİT TEZ İLE İLGİLİ BİLİMSEL FAALİYETLER .....	123
KAYNAKLAR .....	112



## SİMGELER DİZİNİ

A	ankastre
$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}$	katılık terimleri
a, b, h	sırasıyla x,y ve z yönlerinde plak boyutları
B	basit destekli
$E_1, E_2$	kompozit katman için asal elastiklik modülü
$G_{12}, G_{13}, G_{23}$	kompozit katman için düzlem içi ve kalınlığı boyunca kayma modülü
L	x yönünde giriş uzunluğu
$M_x^{kl}, M_y^{kl}, M_{xy}^{kl}$	klasik teoriden elde edilen moment bileşenleri
$M_x^{kd}, M_y^{kd}, M_{xy}^{kd}$	kayma şekil değişiminden elde edilen moment bileşenleri
$m_p$	eklenmiş kütle
$N_x^{kl}, N_y^{kl}, N_{xy}^{kl}$	klasik teoriden elde edilen kuvvet bileşenleri
$N_x^d, N_y^d, N_{xy}^d$	dış kuvvetler
$Q_x^{kd}, Q_y^{kd}$	kayma şekil değişiminden elde edilen kuvvetler
q	yayılı yük
S	serbest
$T_c$	kinetik enerji
t	zaman
U, V, W	sırasıyla x,y ve z yönlerindeki yerdeğiştirme bileşenleri
u, v, w	sırasıyla x,y ve z yönlerinde orta düzlemde yerdeğiştirme bileşenleri
$u_1, v_1$	orta düzlemde kayma şekil değişimi etkisinin düşey yönde varsayılan yerdeğiştirme bileşenleri
$U_c$	potansiyel enerji
V	hacim
$W_d$	dış kuvvetlerin enerjisi
x, y, z	kartezyen koordinatlar
$x_p$	eklenmiş kütle/kirişin x yönündeki konumu
$\alpha$	eklenmiş kütle/kirişin kütlesi
$\gamma$	boyutsuz dönme parametresi
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}$	kayma birim şekil değiştirmeler
$\delta$	kök oranı
$\epsilon_{ij}$	birim şekil değiştirme tansörü
$\eta$	eklenmiş kütle/kirişin uzunluğuna oranı

$\lambda$	boyutsuz frekans parametresi
$\rho_i$ (i = 0,1,2,3,4,5)	atalet terimleri
$\rho_k$	kompozitin toplam yoğunluğu
$\sigma_x^{kl}, \sigma_y^{kl}, \tau_{xy}^{kl}$	her katman için kartezyen koordinatlarda gerilme bileşenleri
$\sigma_x^{kd}, \sigma_y^{kd}, \tau_{xy}^{kd}$	her katman için kartezyen koordinatlarda kayma şekil değişimi etkisi ile meydana gelen gerilme bileşenleri
$\omega$	frekans parametresi
$\Omega$	dönme parametresi

### Kısaltmalar

BFP	boyutsuz frekans parametresi
BMKDT	birinci mertebe kayma şekil değiştirme teorisi
DDY	diferansiyel dönüşüm yöntemi
EBT	Euler-Bernoulli teorisi
KLT	klasik laminasyon teorisi
KPT	klasik plak teorisi
KMEV	kütlenin merkezci kuvvet etkisi var
KMEY	kütlenin merkezci kuvvet etkisi yok
kdf	kayma düzeltme faktörü
PKDT	parabolik kayma şekil değiştirme teorisi
Sim	simetrik

## ÇİZELGELER VE ŞEKİLLER DİZİNİ

Çizelge 2.1. Düşey yönde kayma şekil değiştirme fonksiyonları .....	31
Çizelge 2.2. Plak için sınır şartları .....	34
Çizelge 2.3. Kiriş için sınır şartları .....	38
Çizelge 3.1. Cebirsel polinom grubu için kullanılan $B_i$ katsayısının farklı sınır şartları için değerleri.....	42
Çizelge 3.2. Kinematik sınır şartları .....	43
Çizelge 3.3. Sınır koşulları için yerdeğiştirme alanı indisleri.....	43
Çizelge 3.4. Bir boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi DDY dönüşüm kuralları.....	48
Çizelge 3.5. Diferansiyel dönüşüm yöntemi için boyutsuz dönüşmüş sınır koşulları ....	48
Çizelge 4.1. Farklı kompozit malzemelerin katmanlarındaki malzeme özellikleri .....	56
Çizelge 4.2. Dönen dik katmanlı kompozit ankastre kirişin düşey yönde ilk üç frekansının Ritz yöntemi için yakınsama çizelgesi $E_1/E_2=40$ , $\delta=1$ , $\gamma=5$ , $L/h=10$ PKDT, Malzeme I.....	56
Çizelge 4.3. Dönen dik katmanlı kompozit ankastre kirişin düşey yönde ilk üç frekansının Ritz yöntemi için yakınsama çizelgesi $E_1/E_2=40$ , $\delta=1$ , $\gamma=5$ , $L/h=10$ , BMKDT, Malzeme I.....	57
Çizelge 4.4. Dönen kompozit ankastre kiriş DDY yöntemi ile EBT kullanılarak frekans yakınsama çizelgesi ( $E_1/E_2=40$ , $\delta=1$ , $\gamma=10$ ) ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) Malzeme I.....	57
Çizelge 4.5. Dönen kompozit ankastre kiriş DDY yöntemi ile BMKDT kullanılarak yakınsamasını gösteren çizelge, $E_1/E_2=40$ , $L/h=5$ , $\delta=1$ , $\gamma=10$ , ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ), Malzeme I.	58
Çizelge 4.6. İzotrop, dönen bir ankastre kirişin düşey yönde temel doğal frekanslarının literatür ile karşılaştırılması.....	59
Çizelge 4.7. İzotrop, dönen bir ucu mafsallı diğer ucu serbest (B-S) bir kirişin düşey yönde temel doğal frekanslarının karşılaştırma çizelgesi .....	59
Çizelge 4.8. İzotrop, homojen düzgün kesitli ankastre kirişin DDY yöntemi ile farklı sınır şartları için boyutsuz frekans değerleri .....	60
Çizelge 4.9. Simetrik 4 katmanlı kompozit ankastre kirişin boyutsuz ilk beş frekansının literatürdeki bazı çalışmalar ile karşılaştırılması, Malzeme II.....	60
Çizelge 4.10. Kompozit simetrik dört katmanlı kirişin DDY yöntemi ile temel boyutsuz frekans değerlerinin diğer çalışmalarla karşılaştırma çizelgesi, $L/h=15$ , ( $\theta^\circ - \theta^\circ / -\theta^\circ / \theta^\circ$ ) Malzeme II.....	62
Çizelge 4.11. Dönen izotrop ankastre kirişin 1. frekans değerlerinin önceki yıllardaki çalışmalarla karşılaştırılması $\delta=0$ .....	63
Çizelge 4.12. Dönen izotrop ankastre kirişin 2. frekans değerlerinin önceki yıllardaki çalışmalarla karşılaştırılması, $\delta=0$ .....	63
Çizelge 4.13. Dönen izotrop ankastre kirişin 3. frekans değerlerinin literatürdeki çalışmalarla karşılaştırılması, $\delta=0$ .....	64

Çizelge 4.14. Dönen bir ucu mafsalı diğer ucu serbest kirişin ilk iki frekans değerlerinin önceki çalışmalarla karşılaştırılması, $\delta=0$ .....	65
Çizelge 4.15. İzotrop dönen kirişin ankastre kirişin DDY yöntemi kullanılarak temel BFP değerleri, .....	68
Çizelge 4.16. Dönen kompozit ankastre kirişin farklı sınır şartları için DDY yöntemi kullanılarak BMKDT ile temel frekans parametre değerleri $E_1/E_2=40$ , $L/h=20$ , $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ , Malzeme I.....	69
Çizelge 4.17. Dönen kompozit ankastre kirişin $\delta$ kök oranına göre farklı sınır koşulları için ilk üç frekans değerleri, $(E_1/E_2=40, \gamma=10, L/h=20)$ Malzeme I.....	73
Çizelge 4.18. Dönen kompozit ankastre kirişin $\delta$ kök oranına göre farklı sınır koşulları için ilk üç frekans değerleri, $(E_1/E_2=40, \gamma=10, L/h=50)$ Malzeme I.....	73
Çizelge 4.19. Dönen kompozit ankastre kirişin $L/h$ oranına göre farklı sınır koşulları için ilk üç frekans değerleri $(E_1/E_2=40, \delta=0.2, \gamma=2)$ Malzeme I.....	74
Çizelge 4.20. Dönen kompozit ankastre kirişin $L/h$ oranına göre farklı sınır koşulları için ilk üç frekans değerleri $(E_1/E_2=10, \delta=0.2, \gamma=2)$ Malzeme I.....	75
Çizelge 4.21. Dönen kompozit ankastre kirişin $\gamma$ boyutsuz frekans parametresine göre farklı sınır koşulları için ilk üç frekans değerleri $(E_1/E_2=40, \delta=0.2, L/h=10)$ Malzeme I.....	75
Çizelge 4.22. Dönen kompozit ankastre kirişin $\gamma$ boyutsuz frekans parametresine göre farklı sınır koşulları için ilk üç frekans değerleri $(E_1/E_2=10, \delta=0.2, L/h=10)$ Malzeme I.....	76
Çizelge 4.23. Dönen kompozit ankastre kirişin kök oranına göre farklı sınır koşulları için ilk üç frekans değerleri $(E_1/E_2=40, L/h=5, \gamma=5)$ Malzeme I.....	76
Çizelge 4.24. Dönen kompozit ankastre kirişin kök oranına göre farklı sınır koşulları için ilk üç frekans değerleri $(E_1/E_2=40, L/h=20, \gamma=5)$ Malzeme I.....	77
Çizelge 4.25. Dönen uç noktada katmanlı kompozit kirişin ilk üç frekansının Ritz yöntemi için yakınsaması $E_1/E_2=40, \delta=1, \eta=1, \gamma=5, \alpha=0.25, L/h=10$ (PKDT, KMEY) 78	
Çizelge 4.26. Dış ucuna kütleli dönen kompozit ankastre kirişin ilk üç frekansın Ritz yakınsama çizelgesi $E_1/E_2=40, \delta=1, \eta=1, \gamma=5, \alpha=0.25, L/h=10$ (PKDT, KMEV) .....	79
Çizelge 4.27. Uç noktada kütleli dönen kompozit ankastre kirişin ilk üç frekansın Ritz yakınsama çizelgesi $E_1/E_2=40, \delta=1, \eta=1, \gamma=5, \alpha=0.25, L/h=10$ (BMKDT, KMEV) ....	79
Çizelge 4.28. Dönen uç kütleli kompozit kiriş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (DDY) sonuçları yakınsama tablosu $(E_1/E_2=40, L/h=5, BMKDT, \delta=1, \gamma=10, \alpha=0.5, \eta=1.0)$ $(0/90/0)$ KMEY .....	80
Çizelge 4.29. İzotrop uç kütleli bir kirişin ilk üç boyutsuz frekans parametresinin farklı yöntemler için önceki çalışmalar ile karşılaştırılması,.....	81
Çizelge 4.30. Kompozit ankastre kiriş için ilk üç boyutsuz frekansın karşılaştırılması $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$ , $L/h=15, \alpha=0.5, \eta=1.0$ , Malzeme II.....	81

Çizelge 4.31. Katmanlı kompozit kütleli kirişin ilk üç frekans parametresinin farklı yöntemler için literatürdeki çalışmalarla karşılaştırılması ( $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$ ), $L/h=15, \alpha=0.5, \eta=1.0$ , Malzeme II.....	82
Çizelge 4.32. Dönen ankastre kirişin ilk üç frekansının kütle oranı ile değişimi $E_1/E_2=40, \delta = 0, \eta=0.25, (0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ , PKDT, $L/h=5$ , KMEY.....	85
Çizelge 4.33. Dönen ankastre kirişin ilk üç frekansının kütle oranı ile değişimi $E_1/E_2=40, \delta = 0, \eta=0.5, (0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ , PKDT, $L/h=5$ , KMEY.....	85
Çizelge 4.34. Dönen ankastre kirişin ilk üç frekansının kütle oranı ile değişimi $E_1/E_2=40, \delta = 0, \eta=0.75, (0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ , PKDT, $L/h=5$ , KMEY.....	86
Çizelge 4.35. Dönen ankastre kirişin ilk üç frekansının kütle oranı ile değişimi $E_1/E_2=40, \delta = 0, \eta=1.0, (0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ , PKDT, $L/h=5$ , KMEY.....	86
Çizelge 4.36. Dönen ankastre kirişin ilk üç frekansının kütle oranı ile değişimi $E_1/E_2=40, \eta=0.25, (0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ , PKDT, $L/h=5, \delta = 0$ , KMEV.....	87
Çizelge 4.37. Dönen ankastre kirişin ilk üç frekansının kütle oranı ile değişimi $E_1/E_2=40, \eta=0.5, (0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ , PKDT, $L/h=5, \delta=0$ , KMEV.....	88
Çizelge 4.38. Dönen ankastre kirişin ilk üç frekansının kütle oranı ile değişimi $E_1/E_2=40, \eta=0.75, (0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ , PKDT, $L/h=5, \delta=0$ , KMEV.....	88
Çizelge 4.39. Dönen ankastre kirişin ilk üç frekansının kütle oranı ile değişimi $E_1/E_2=40, \eta=1.0, (0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ , PKDT, $L/h=5, \delta=0$ , KMEV.....	89
Çizelge 4.40. Dönen kütleli kompozit kirişin temel BFP'nin dönme hızları ve ortotropi oranına göre değişimi ( $L/h=10, \delta=0, \eta=1, \alpha=0.25$ ), KMEY.....	93
Çizelge 4.41. Dönen kütleli kompozit kirişin temel BFP'nin, dönme hızları ve ortotropi oranına göre değişimi ( $L/h=10, \delta=0, \eta=0.5, \alpha=0.25$ ), KMEY.....	93
Çizelge 4.42. Dönen kütleli kompozit kirişin temel BFP'nin dönme hızları ve ortotropi oranına göre değişimi ( $L/h=10, \delta=1, \eta=1, \alpha=1.0$ ), KMEY.....	94
Çizelge 4.43. Dönen kütleli kompozit kirişin BFP'nin dönme hızları ve ortotropi oranına göre değişimi ( $L/h=10, \delta=1, \eta=0.5, \alpha=1.0$ ), KMEY.....	94
Çizelge 4.44. Dış ucuna kütle bağlı dönen kompozit kirişin ilk üç frekansın farklı ortotropi oranlarına göre değişimi $\gamma=5, \delta=0, L/h =5$ , KMEV.....	95
Çizelge 4.45. Dış ucuna kütle bağlı dönen kompozit kirişin ilk üç frekansın farklı ortotropi oranlarına göre değişimi $\gamma=5, \delta=1, L/h =5$ , KMEV.....	96
Çizelge 4.46. Dış ucuna kütle bağlı dönen kompozit kirişin frekanslarının farklı teoriler için farklı hızlarda değişimi $E_1/E_2=40, L/h=10, \delta = 0.2, \eta=1.0$ , KMEV.....	96
Çizelge 4.47. Dış ucuna kütle bağlı dönen kompozit kirişin frekanslarının farklı teoriler için farklı hızlarda değişimi, $E_1/E_2=30, L/h=10, \delta = 0.2, \eta=1.0$ , KMEV.....	97
Çizelge 4.48. İzotrop ankastre (ASSS) plağın ilk üç frekans parametresinin Ritz yöntemi ile yakınsaması $a/b=1$ .....	103
Çizelge 4.49. İzotrop ankastre (ASSS) plak için ilk üç frekans parametresinin karşılaştırılması $a/b=1$ .....	104
Çizelge 4.50. Ankastre (ASSS) izotrop dönen plak için ilk üç frekans parametresinin karşılaştırılması $a/b=1, \gamma/\lambda_0 = 1$ .....	104

Çizelge 4.51. Dönen izotrop plağa ait ilk üç frekans parametresinin karşılaştırılması ( $a/b=1, \delta=0$ ).....	105
Çizelge 4.52. Dönen kompozit plakların KPT ile boyutsuz frekans parametrelerinin farklı açılarda( $\theta/-\theta/\theta$ ) dizilişine göre ilk üç frekans değerleri (ASSS) $\delta=0.5 \gamma=10$ , Malzeme III.....	105
Çizelge 4.53. Dönen kompozit plağın klasik teori ile ilk üç frekans parametresinin farklı malzemeler için değişimi ( $30^\circ/-30^\circ/30^\circ$ ) .....	107
Çizelge 4.54. Dönen kompozit plağın üç farklı teori ile farklı kök oranlarında ilk üç frekans parametresinin değişimi ( $E_1/E_2=40, \gamma=5, L/h=10$ ) .....	108
Şekil 2.1. Elastik bir cismin hacim elemanı gösterimi.....	11
Şekil 2.2. Tek yönlü katman simetri durumu .....	14
Şekil 2.3. $X1 * -X2 *$ simetri düzlemi gösterimi .....	15
Şekil 2.4. $X1 * -X2 *$ ve $X2 * -X3 *$ simetri düzlemleri gösterimi .....	16
Şekil 2.5. Tek yönlü elyaf takviye edilmiş katman.....	18
Şekil 2.6. Şekil değişiminden önce kiriş geometrisi .....	22
Şekil 2.7. Euler-Bernoulli teorisi için şekil değişiminden sonraki durum .....	22
Şekil 2.8. Birinci mertbe kayma şekil değiştirme teorisi için kirişte şekil değişimi .....	23
Şekil 2.9. Parabolik kayma şekil değiştirme teorisi için kirişte şekil değişimi.....	24
Şekil 2.10. Kartezyen koordinatlarda birim hacim elemanında orta düzlem.....	26
Şekil 2.11. Katmanlı kompozit yapı geometrik özellikler ve eksen takımı .....	27
Şekil 2.12. Kompozit katmanlı plak geometrisi.....	30
Şekil 2.13. Dönen kompozit kiriş modeli .....	36
Şekil 4.1. Dönen izotrop ankastre kirişin farklı kök oranına göre ilk üç frekans parametresinin değişimi .....	66
Şekil 4.2. Dönen izotrop ankastre kirişin temel BFP'nin kök oranı ile değişimi.....	66
Şekil 4.3. Dönen izotrop ankastre kirişin birinci BFP'nin kök oranı ile değişimi .....	67
Şekil 4.4. Dönen kompozit ankastre kirişte BFP'nin dönme hızı ile değişimi ( $E_1/E_2 =10, L/h=10,PKDT$ ) .....	70
Şekil 4.5. Dönen kompozit ankastre kirişin farklı kök oranında hız ile ilk frekans parametresinin değişimi ( $E_1/E_2 =30, L/h=10,PKDT$ ) .....	71
Şekil 4.6. Dönen kompozit ankastre kirişin farklı orotropi oranında hız ile ilk frekans parametresinin değişimi ( $\delta=0.2, L/h=10, PKDT$ ) Malzeme I.....	71
Şekil 4.7. Dönen kompozit ankastre kirişin farklı orotropi oranında hız ile ilk frekans parametresinin değişimi ( $L/h=20, PKDT$ ) .....	72
Şekil 4.8. Dönen ankastre izotrop dış uca bağlı kütleli kirişin BFP'nin dönme hızıyla değişimi ( $\alpha=0.5, \eta=1.0$ ) .....	83
Şekil 4.9. Dönen ankastre izotrop dış uca kütle bağlanmış ankastre kirişin BFP'nin dönme hızıyla değişimi ( $\delta=0.5$ ) .....	83
Şekil 4.10. Dönen ankastre izotrop uç kütleli ankastre kirişin dönme hızıyla değişimi ( $\delta=0$ ).....	84

Şekil 4.11. Dönen ankastre kompozit uç kütleli kirişin temel frekans parametresinin kütle oranı ile değişimi ( $\delta = 0, \eta = 1.0, L/h=5$ ).....	90
Şekil 4.12. Dönen ankastre kompozit kirişin temel frekans parametresinin kütle oranı ile değişimi ( $E_1/E_2=40, L/h=5, \gamma=5$ ).....	90
Şekil 4.13. Dönen ankastre kompozit kirişin temel frekans parametresinin kütle oranı ile değişimi ( $E_1/E_2=40, L/h=5, \delta=0.2, \gamma=5$ ) .....	91
Şekil 4.14. Dönen ankastre kompozit kirişin temel frekans parametresinin kütle oranı ile değişimi ( $E_1/E_2=40, L/h=5, \delta=0, \eta = 1.0$ ).....	91
Şekil 4.15. Dönen ankastre izotrop kirişin kütle merkezkaç kuvvetinin etkisinin kütle oranına göre frekanslarının değişimi ( $\delta=0, \eta=1$ ) .....	92
Şekil 4.16. Dönen kompozit ankastre kirişlerin birinci mod biçimi .....	98
Şekil 4.17. Dönen kompozit ankastre kirişlerin ikinci mod biçimi.....	99
Şekil 4.18. Dönen kompozit ankastre kirişlerin üçüncü mod biçimi .....	99
Şekil 4.19. Dönen dış ucunda kütleli ankastre kompozit kirişin birinci mod şekli ( $E_1/E_2=40, L/h=10, \gamma=5, \delta=0, \eta=1.0$ ).....	100
Şekil 4.20. Dönen dış ucunda kütleli ankastre kompozit kirişin ikinci mod şekli ( $E_1/E_2=40, L/h=10, \gamma=5, \delta=0, \eta=1.0$ ).....	100
Şekil 4.21. Dönen dış ucunda kütleli ankastre kompozit kirişin üçüncü mod şekli ( $E_1/E_2=40, L/h=10, \gamma=5, \delta=0, \eta=1.0$ ).....	101
Şekil 4.22. Dönen dış ucunda kütleli ankastre kompozit kirişin birinci mod şekli ( $E_1/E_2=40, L/h=10, \gamma=5, \delta=0, \eta=0.5$ ).....	101
Şekil 4.23. Dönen dış ucunda kütleli ankastre kompozit kirişin ikinci mod şekli ( $E_1/E_2=40, L/h=10, \gamma=5, \delta=0, \eta=0.5$ ).....	101
Şekil 4.24. Dönen dış ucunda kütleli ankastre kompozit kirişin üçüncü mod şekli ( $E_1/E_2=40, L/h=10, \gamma=5, \delta=0, \eta=0.5$ ) .....	102
Şekil 4.25. Dönen izotrop plağın farklı kök oranlarına göre ilk üç frekansının hız parametresi ile değişimi .....	106
Şekil 4.26. Dönen kompozit dik katmanlı ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) kompozit plağın birinci frekansını farklı hızlarda frekanslarının ortotropi oranına göre değişimi, PKDT, ( $a/b=1, a/h=10, \delta=0.2$ ).....	108



# BÖLÜM 1

## GİRİŞ

Bu tezin birinci bölümünde problemin önemi anlatılacak daha sonra tez ile ilgili yapılmış olan daha önceki çalışmalara değinilecek ve son kısımda da çalışmanın amacından bahsedilecektir.

### 1.1.Problemin Önemi

Malzemeleri metaller, polimerler, seramikler ve kompozitler olarak sınıflandırabiliriz. Bu malzemelerden kompozitler farklı fiziksel özelliklere sahip iki veya daha fazla farklı yapıda malzemenin bir araya getirilmesiyle oluşan yeni bir malzemedir. Kompozit yapılar otomotiv, uzay -havacılık, gemi sanayisi, spor ve sağlık ürünleri gibi birçok yaşamımızı kolaylaştıran araç gereçlerin üretilmesinde yaygın bir kullanım alanına sahiptir. Kompozit yapılar pek çok mühendislik sisteminde yoğunlukları düşük ve dayanımları yüksek olması sebebiyle tercih edilmektedir ve son yıllarda da önemini sürdürmektedir.

Havacılık ve uzay yapıları için en önemli dinamik etkilerden biri de titreşimdir. Titreşim, mekanik bir olgu olup denge durumundan itibaren cisimde meydana gelen salınım veya tekrar hareketi diye tanımlayabiliriz. Bir cisim denge konumunda itibaren serbest bırakıldığında salınım yapmaya devam eder. Bu tür titreşim hareketine serbest titreşim denir. Bir cismin saniyedeki salınım sayısına da doğal frekans denir. Sürekli ortam olarak nitelendirdiğimiz kiriş ve plak yapılarda bu frekansların sayısı teorik olarak sonsuzdur. Bu sistemlerin frekansları ile aynı değerde bir dış etki ile zorlanırsa denge konumundan uzaklığı teorik olarak sonsuza gider bu durum rezonans olarak adlandırılır. Titreşim bazı sistemlerde istenmesine rağmen birçok sistem için hasara neden olabileceğinden tüm yönleri ile incelenmesi gerekmektedir. Bazı sistemlerde de titreşim istenmez ve kontrolünün yapılması gerekir. Bu sebeple bilim insanları, titreşim davranışlarının cisimler ve sistemler üzerine etkileri ve bu etkiler hakkında çözümler ve

yeni ilerlemeler elde etmek için son yıllarda bu konu üzerine çalışmalarını sürdürmektedir.

Hareket eden her cisim titreşime uğrar. Özellikle uzay- havacılık sistemleri için titreşim çok önemli bir konudur. Helikopter gibi dönen aksam ve mekanizmalara sahip sistemlerde oldukça fazla gürültü ve titreşim meydana gelir. Mekanizmanın sağlıklı ve uzun ömürlü çalışması ve ayrıca konfor açısından titreşim etkisini azaltmak ve kontrolü hakkında çözümler sunmak için detaylı incelemek önemlidir. Hareketli rotora bağlı kanatlardaki titreşimlerin incelenmesi mekanizma ve araçların tasarım ve modellemesinde bize oldukça önemli bilgiler vermektedir.

Son yıllarda kompozit malzemelerden imal edilen kanat yapılar birçok endüstriyel alanda artan bir şekilde kullanılmaktadır. Yüksek mukavemet-ağırlık oranı, uzun ömürlü oluşu, elektromekanik korozyon direnci gibi avantajlar kompozit malzemenin önde gelen özelliklerindedir. Geleneksel bilinen mühendislik malzemeleriyle karşılaştırıldığında kompozit malzemelerin, amaca yönelik uygulanabilirliği ona rekabet avantajı sağlamış ve dönen uygulamalarda kullanımını yaygınlaştırmıştır. Bu sebeple bu yapıların dinamik davranışını anlamak özellikle önem kazanmıştır.

Elastik yapıların dış zorlamalara maruz bırakıldığında önemli ölçüde şekilsel değişime uğradığı bilinmektedir. Modal analiz bir yapının genel davranışını incelemek ve sistemin yanıtının sınırları için önemlidir. Mod biçimi diye tanımladığımız, yapının aldığı şekil, malzeme özellikleri ve sınır şartlarına bağlı olan doğal bir özelliktir. Malzeme özellikleri ve sınır şartları değişirse bu özellikte değişecektir.

Birçok kullanım alanı bulunan kompozit malzemelerin kullanıldığı önemli bir alanda havacılıkta uçak ve helikopter kanatları ve türbin kanatçıkları yapılarıdır. Bunun yanında dönen yapılar rüzgar türbin kanatları ve makinalarda çeşitli amaçlarla kullanılan pervaneler dönen yapılara örnek olarak verilebilir. Dönen bir kanadın hareketi ve meydana getirdiği etkilerin incelenmesi bilim insanlarının hep ilgi odağında olmuştur. Dönen yapıların dinamik davranışlarının gerçekçi bir biçimde tasarlanmaları ve analiz edilmeleri güvenlik ve ekonomik açıdan önem arz etmektedir. Gelişen kompozit malzeme teknolojisiyle ve dönen yapılarda kompozit malzemelerin daha çok tercih edilmeleri ile dönen kompozit yapıların ( kiriş, plak ve kabuk gibi) uygun tasarım

ve analizleri büyük önem kazanmıştır. Bu nedenle bu tezde dönen izotrop ve katmanlı kompozit kiriş ve plakların titreşimi çalışılmıştır.

## 1.2. Önceki Çalışmalar

Dönen kompozit malzemelerin dinamiği üzerine çalışmalar özellikle 1990 yılından itibaren önemli ölçüde artmıştır (Rafiee vd., 2017).

Türbin kanatları, fan kanatçıkları, helikopter kanadı, kompresör kanatçıkları gibi dönen yapısal elemanların tasarımında dinamik özelliklerin incelenmesi çok önemlidir. Bu özellikleri, titreşim frekansı, şekilsel analiz ve rezonans cevabı gibi bilgiler oluşturur. Gerçekte bu yapıların kesitleri oldukça karmaşıktır. Bu yüzden kanat yapıları genellikle kiriş, plak ve kabuk olarak modellenir ve ayrıca araştırmacılar önbilgi elde etmek ve dinamik davranışları hakkında fikir sahibi olmak için varsayımlar ve basitleştirmeler kullanırlar.

Kirişler çok yaygın kullanılan yapı modellerinden biridir. Dönen kiriş modeli ve bu modellerin çözümü için birçok yöntem kullanılmaktadır. Bu çalışmaların öncülerinden biri Southwell ve Gough (Southwell & Gough, 1921) tarafından Southwell eşitliği kullanarak dönen ankastre kirişin doğal frekanslarını analitik olarak elde ettiği çalışmadır. Liebers (Liebers, 1930), Theodersen (Theodersen, 1935), Schilhansl (Schilhansl, 1958)' in çalışmalarında pervane ve kiriş modeli kullanılmış ve titreşim davranışları incelenmiştir. Özellikle problemlerinin çözümünde farklı yaklaşımlar uygulanmıştır (Hodges & Rutkowski, 1981; Patel, Ganapathi, & Touratier, 1999).

Kirişler veya bir boyutlu modeller, çok sayıda basit tasarımlar için yapısal çözümlemede önemli bir rol oynarlar (Kim, Yoo, & Chung, 2013; Leissa, 1981; Yoo & Shin, 1998). Bu amaçla kullanılan kiriş modelleri Euler Bernoulli kirişi (Auciello, 2013b), Timoshenko kirişi ve Rayleigh (Auciello, 2013a; Ozdemir & Kaya, 2006; Ozgumus & Kaya, 2006; Tang, Li, Wu, & Lee, 2015) kirişi gibi basit modellere dayanır. Dönen kirişler ile ilgili çalışmalara bakıldığında onların farklı geometrik özelliklerine göre sabit kesitli, değişken kesitli ve kutu kiriş olarak kalınlığa göre de ince ve kalın olarak sınıflandırıldığı görülmektedir.

Yapının dönmesiyle ortaya çıkan merkezkaç ve Coriolis etkisi, dönen kiriş ile dönmeyen kiriş hareket denklemlerinin farklı olmasına yol açar. Dönmeyen kiriş

denklemler sabit katsayılı diferansiyel denklemler iken dönen kiriş denklemler değişken katsayılı diferansiyel denklemdir. Bu sebeple değişken katsayılı diferansiyel denklemler olan dönme denklemler analitik olarak çözülemez. Bu çözüm yapılırken sonlu elemanlar yöntemi (Chung & Yoo, 2002; Ghayour, Ghayour, & Ziaei-Rad, 2010; Gupta & Rao, 1978; Hodges & Rutkowski, 1981; Rao & Gupta, 2001), Rayleigh-Ritz yöntemi (Bhat, 1986), integral eşitliği yöntemi (Ahn, 1983; Yan, Zhang, Wei, & Li, 2011), tekil ayrıklaştırma yöntemi (J. Chen, Ding, & Ding, 2016), transfer matris yöntemi (Hodges, Chung, & Shang, 1992), diferansiyel dönüşüm yöntemi (Ebrahimi & Mokhtari, 2016; Ozdemir & Kaya, 2006; Ozgumus & Kaya, 2006) gibi yaklaşık ve yarı analitik yöntemler kullanılmaktadır.

Literatürde dönen yapıların doğrusal (linear) ve doğrusal olmayan (non-linear) dinamik analizleri ile ilgili bazı çalışmalara rastlanmaktadır (Arvin & Bakhtiari-Nejad, 2013; Arvin & Lacarbonara, 2014). Bazı araştırmacılar tarafından ön burulmuş dönen kirişlerin titreşiminde ön burulma açısının etkisi vurgulanmıştır (Carnegie & Thomas, 1972; Dokumaci, Thomas, & Carnegie, 1967; Sabuncu & Thomas, 1992). Bu çalışmalarda türbin kanadı ve kompresör kanadı modeli üzerinden inceleme yapıldığından oluşturulan modeller oldukça karmaşık bir geometriye sahiptir. Bu yapılarda asal eksen, merkez eksen ve elastik eksen birbiriyle kesişmez ve asimettir (Carnegie & Thomas, 1972). Türbin kanatçığı için ön burulmuş asimettik bir yapıda olduğu varsayımı ile titreşim davranışı Sabuncu ve Thomas'ın çalışmasında görülmektedir (Sabuncu & Thomas, 1992). Dönen sistemlerde elastik şekil değişimi ve dönme hareketi arasında bir etkileşim mevcuttur. Bu yüzden geometrik olarak karmaşık olan bu yapıların analizleri zordur. Çalışmaların çoğunda dönen yapılar sabit kesitli kiriş ve plak olarak modellenmektedir. Ancak bazı dönen yapılar için eğrisel kiriş ve plak olarak modellenmenin daha gerçekçi olduğu gösterilmiştir (Park & Kim, 1999).

Klasik Euler-Bernoulli kirişinin eğilme davranışının yetersiz olduğu anlaşıldığından kayma şekil değişimini de içine alan Timoshenko teorisi, ilk ileri teori olarak literatüre girmiştir (S. P. Timoshenko, 1921, 1922). Dönen yapıların dinamik analizinde Timoshenko teorisi temel alınarak yapılmış çalışmalar mevcuttur. Daha ileri bir çalışma olarak burulmuş ve değişken kesite sahip dönen bir Timoshenko kiriş elemanın titreşimi ile ilgilidir. Bu çalışmalardan birinde kesitin doğrusal olarak değiştiği ve burulma, dönme hızı ve boyut gibi çeşitli parametrelerin etkileri

incelenmiştir (Banerjee & Kennedy, 2014). Bir başka çalışmada izotrop ve homojen kirişlerde birbirine çakışık iki eksen olduğu ve bunların kayma ve ağırlık merkezi olduğu ve böylece eğilme titreşimi ile burulma arasında birleşme meydana gelmediği belirtilmiştir. Ancak kesitin yalnızca bir tek simetri eksenine olduğunda kayma eksenine ile simetri ekseninin çakışmadığı böylece simetri eksenine dik düzlemde eğilme titreşiminin burulma titreşimi ile birleşme meydana geldiği göz önüne alınarak serbest titreşim davranışı çalışılmıştır (Ozgumus & Kaya, 2007). Yokoyama çalışmasında Timoshenko kirişi için düzlem içi ve düzlem dışı serbest titreşimi sonlu elemanlar kullanarak sunulmuştur (Yokoyama, 1988).

İlk olarak 1990 yılında uzay yapılarında ısı kalkanı olarak önerilen fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin (Yamanouchi & Koizumi, 1991) dönme dinamiği ile ilgili çalışma Ebrahimi ve Mokhtari tarafından diferansiyel dönüşüm metodu ile sunulmuştur (Ebrahimi & Mokhtari, 2016).

Literatürde, santrifüj ayırıcılar, gaz türbinleri ve döner fırınlar gibi çeşitli fiziksel uygulamaları modellemek amacıyla dönen konik kabuk modelinin kullanıldığı çalışmalar bulunmaktadır (Boyce & Handelman, 1961).

Rüzgar türbinlerinde hava akışını ayarlamak, araba fanlarında esnekliği arttırmak, helikopter rotorlarında frekansı değiştirmek amacıyla yapıya kütle ilave edilmesi uygulanan bir yöntemdir. Bu nedenle dönen ankastre kompozit kiriş ve plak yapılarda serbest uca kütle eklenmesi ve bunun etkileri ile ilgili problemler bazı araştırmacılar tarafından incelenmiştir (Ahn, 1983; Bhat, 1986; Boyce & Handelman, 1961; Park & Kim, 1999).

Birçok dönen yapı kiriş olarak başarılı bir şekilde modellenmesine karşın, bazı mühendislik yapıları örneğin düşük en ve boy oranlarına sahip dönen makine kanatları özellikle plak gibi davranır. Bu sebeple yapının titreşim analizi yapılariken kiriş modeli yeterli değildir ve plak modelleri ile açıklama gereği görülmektedir. Bu ihtiyaca rağmen dönen plak titreşimleri ile ilgili çalışmalar oldukça azdır. Dönmeyen plaklar ile ilgili temel çalışma Leissa tarafından sistematik olarak sunulmuştur (Leissa, 1969). Dokanish ve Rewtani (Dokanish & Rawtani, 1971) dönen bir diske monte edilmiş ankastre bir plağın serbest titreşimini sonlu elemanlar yöntemi ile incelenmiştir. Dönen kirişlerde olduğu gibi dönen plaklar için de literatürde farklı yöntemler ile çözümleri içeren birçok

çalışmaya rastlanmaktadır (Karmakar & Sinha, 1997; Ramamurti & Kielb, 1984; Yoo & Kim, 2002a, 2002b; Yoo & Pierre, 2003).

Kiriş teorileri karmaşık üç boyutlu problemi bir boyuta taşımaktadır. Plak teorileri ise problemi üç boyuttan iki boyuta indirgemektedir. Plak teorisi denklemleri iki boyutta plağın orta düzlemine göre elde edilen kısmi bir diferansiyel denklemi içerir. İnce plaklar için en yaygın kullanılan plak modeli Euler-Bernoulli giriş teorisinin plaklara geliştirilmesi ile elde edilen Klasik plak teorisidir (Kirchoff, 1850). Kirchoff teorisi, plak kenar/kalınlık oranı yaklaşık 1/20 dan daha küçük olduğu durum için geçerlidir ve kayma şekil değişimini içermez. Buna benzer olarak Mindlin-Reissner (Mindlin, 1951; Reissner, 1985) plak teorisi de Timoshenko giriş teorisini içeren bir teoridir. Mindlin teorisi de plak kenar/kalınlık oranı 1/20 dan daha büyük plaklar için geçerlidir ve kayma şekil değişimini içermektedir. Bu sebeple dönen ince ve kalın plakların dinamiği farklı teoriler ile incelenmiştir. (Deshpande & Mote, 2003; Hashemi & Arsanjani, 2005; Hashemi, Farhadi, & Carra, 2009).

1980'li yıllardan itibaren ortaya atılan yüksek mertebeden kayma şekil değişimi teorileri kompozit plaklar için önerilmiştir. Gerçek gerilme durumu ile varsayılan gerilme durumu arasındaki tutarsızlıkları gidermek için daha yüksek mertebeden kayma şekil değiştirme teorileri kullanım gereksinimi doğmuştur. Bu teorilerden Touratier tarafından önerilen birim şekil değişimini düşey doğrultuda sinüs fonksiyonu olarak ele aldığı teorisi (Touratier, 1991), hiperbolik kayma şekil değişimi teorisi (Soldatos, 1992), birim şekil değişiminin eksponansiyel olarak değiştiğini önerdiği teorisi (Karama, Afaq, & Mistou, 2003), Reddy nin düşey birim şekil değişiminin parabolik olarak değiştiğini önerdiği teorisi (J. N. Reddy, 1984) ve Aydogdu nun önerdiği yeni bir kayma şekil değişim teorisi (Aydogdu, 2009) gibi ileri teoriler kullanılarak kompozit plak ve girişlerin statik ve dinamik analizlerinin daha gerçekçi bir biçimde yapılabilmelerine katkıda bulunmuştur. Yüksek mertebeden teoriler gerçek sonuçlara çok daha iyi yaklaştığından dönen plaklar ve girişlerin yüksek mertebeden teoriler kullanılarak titreşim incelenen çalışmalar son yıllarda oldukça artmıştır. (Arumugam, Rajamohan, Pandey, & Sudhagar, 2017; Chandiramani, Librescu, & Shete, 2002).

Kompozit plaklar ve kabukların doğrusal olmayan şekil değiştirme analizi Leissa tarafından yapılmıştır (Leissa, 1980). Kompozit plakların geometrik doğrusal olmayan

analizi, doğrusal olmayan eğilme, ön burulma ve doğrusal olmayan tepkiyi (büyük genlikli titreşim gibi) içerebilir ve oldukça karmaşıktır. Bunun nedeni simetrik olmayan katman dizilişine sahip kompozit yapılarda eğilme-uzama birleşmesinin (coupling) meydana gelmesidir. Bu durum problemi karmaşıklştırır. Ayrıca, katman analizinde düşey kayma ve normal gerilme, dönme ve düzlem içi ataleti, başlangıç geometrik kusurlar, klasik olmayan sınır koşulları, tam dikdörtgen olmayan plak geometrisi gibi karmaşık etkileri de barındırabilir (Hong & Chopra, 1985).

Turbo makinelerde süpersonik basınç altında hava akışına maruz dönen bir plak titreşimi bazı araştırmacılar tarafından incelenmiştir (Hong & Chopra, 1985, 1986). Bu plak modeli düşük en-boy oranına sahip kompresör kanatları için kullanılabilceği Ferhadi vd. tarafından önerilmektedir (Farhadi & Hosseini-Hashemi, 2011).

Helikopter rotorları ve rüzgar türbinlerinde, kapalı ve açık kesitli ince cidarlı kompozit kanat modelleri yaygın olarak kullanılmaktadır (Carrera, Filippi, & Zappino, 2013; Chandiramani, Librescu, Saxena, & Kumar, 2004; Chandra & Chopra, 1992; Piovan, Sampaio, & Ramirez, 2012; Rafiee et al., 2017; Rand, 1995; Ren, Du, & Yao, 2010; Sina & Haddadpour, 2014; Song & Librescu, 1997; Song, Librescu, & Oh, 2001; Y. Wang & Zhu, 1996). Kompozit içi boş kutu giriş yapıların dinamik modelleri dönme rijitliği ve elastik yerdeğiştirme arasındaki birleşme etkilerini içermelerinden dolayı oldukça karmaşıktır. Kutu girişin boyu arttıkça, rijitlikte azalmaktadır. Bu yüzden kompozitlerin doğrusal olmayan dinamik özelliklerini anlamak için doğrusal olmayan kompozit teori yaklaşımını kullanmak gerçekçi sonuçlar alınmasını sağlayacaktır (Ren, Sun, & Zhang, 2013).

Kirchoff (Kirchoff, 1850), Reissner (Reissner, 1945) , Reddy (J. N. Reddy, 1984) ve Touratier (Touratier, 1991) yılındaki çalışmalar şekil değişimine uğramış gösterimde kesit çarpılmasını tarif eder. Dahası bu teoriler katmanlar arası düşey yönde kayma gerilmelerinin süreklilik şartlarını sağlamaz. Ayrık katman yaklaşımı teorileri doğru olmasına rağmen katman sayısına bağlı olan yönetici denklemlerin sayısı nedeniyle problem çözümleri oldukça karmaşıktır. Bu nedenle katmanlı kompozit giriş ve plaklar için katmanlar arası gerilme ve yer değiştirmeler için süreklilik şartını sağlayan teoriler geliştirmiştir (Aydogdu & Timarci, 2003; Karama et al., 2003; Soldatos & Timarci, 1993).

Önceki çalışmalar incelendiğinde dönen izotrop ve katmanlı kiriş ve plakların titreşimlerinde yüksek mertebe kayma şekil değiştirme teorilerinin kullanımına rastlanmamıştır. Bunun yanında katmanlı kompozit kirişlerde kütle ilavesinin katmanlı kompozit kirişin dinamiği üzerine etkisi ve katmanlar arası düşey yöndeki kayma gerilmelerinin sürekliliği dikkate alınmamıştır.

### **1.3. Çalışmanın amacı**

Dönen kompozit kiriş, kanat ve plakların yapısal dinamik ve titreşimine ilişkili araştırma çalışmalarının birçoğu 1990 yılının sonrasında ortaya çıkmıştır. Bu tez, bu gelişmelere ilişkin artan ilgiye cevap olarak bu konu ile ilgili kapsamlı bir inceleme sunmayı amaçlamaktadır. Ayrıca bu tezin kapsamını sınırlandırmak amacıyla kabuklar için önerilen Birinci Mertebenden Kayma Şekil Değiştirme Teorisi (BMKDT) ve Parabolik Kayma Şekil Değiştirme Teorisi (PKDT) teorileri yardımıyla dönen kompozit kiriş, dönen kütle bağlı kompozit kiriş, dönen plak ve dönen kompozit plaklar için çalışma yapılmıştır. Hamilton prensibi yardımıyla yönetici denklemler elde edilmiş ve fiziksel probleme uygun sınır şartlarını göz önüne alarak Ritz yöntemi ile çözümler yapılmıştır. Ayrıca problemin bazı parametreler için diferansiyel dönüşüm yöntemi (DDY) ile sonuçlar verilmiştir ve karşılaştırmalar yapılmıştır. Özellikle kök oranı, dönme parametresi, ortotropi oranı, uzunluk-kalınlık oranı, kütle eklenmiş kiriş için dönmeden dolayı eklenen kütlelerin merkezkaç etkisi göz önüne alınarak incelenmiştir.

Kütleli kiriş sistemleri helikopter rotor kanatları, robot manipulatörleri gibi sistemlerde kullanılmaktadır. Birçok araştırmacı ankastre kirişin uç noktasına bağlı etkilenen kütlelerin cisimlerin titreşimi üzerine etkisini incelemiştir. Bu eklenmiş kütlelerin dönen yapılarda kullanım alanları, rüzgar türbini için hava akışını düzenlemek için bir arabadaki soğutma fanını katılığını arttırmak için helikopter kanatlarında ise titreşim frekanslarını ayarlamak için eklenmiş kütle uygulaması yapılmaktadır. Bu nedenle bu çalışmada kütle bağlanmış dönen izotrop ve kompozit kirişlerin titreşim davranışları da ayrıntılı olarak incelenmiştir.



## BÖLÜM 2

### DÖNEN KATMANLI KOMPOZİT KİRİŞ VE PLAK DENKLEMLERİNİN ELDE EDİLMESİ

#### 2.1. Giriş

Bu bölümde kompozit malzemeler hakkında genel bilgi verilecektir. Daha sonra katmanlı kompozit malzemeler için geliştirilmiş Hooke kanunu kullanılarak, kompozit malzeme sabitleri elde edilecektir. Daha sonrasında dönen izotrop kiriş, dönen kompozit kiriş ve dönen plak modelleri için yönetici denklemler sunulacaktır.

#### 2.2. Kompozit Malzemeler

Kompozitler temel olarak iki farklı fiziki özellikte malzemeyi bir araya getirmekle daha başka fiziki özellikte elde edilen malzemelerdir. Elde edilen malzeme en az iki malzemedenden oluşur. Birincisi matris diye adlandırılan çoğunluğu oluşturan malzeme ve diğeri ise ana taşıyıcı görevi üstlenen takviye malzemesidir. Takviye malzemesinin çekme yönünde oldukça yüksek dayanıma sahip olmasına rağmen eksene dik doğrultularda dayanımları zayıftır. Bu sebeple matris malzemesi takviye malzemesini bir arada tutar ve ona destek sağlar.

Kompozit malzemeler gerilme, genleme, tokluk, yüksek korozyon direnci, yüksek kimyasal direnç, düşük ağırlık, akustik izolasyon, elektromanyetik korozyon gibi birçok istenen avantaja sahip olması, onların ne kadar önemli olduklarını ortaya koymaktadır.

Genelde kompozit yapıların mekaniğini incelemek için iki farklı yaklaşım kullanılır. Bunlar eşdeğer tek katmanlı teoriler ve ayrık katmanlı teorilerdir. Tek katmanlı teoride yaklaşım katmanlı kompozitte katmanlara eşdeğer tek bir katman olarak varsayım yapılmasıdır. Ayrık katmanlı teoride ise her katman ayrı ayrı ele alınır.

Kompozit malzemeleri temel de üç gruba ayırabiliriz. Bunlardan ilki malzemelerin yapısal ilk seviyesi tekil moleküller kristal hücreler gibi temel yapı,

ikincisi kristaller, fazlar, bileşikler gibi mikroyapılar, diğeri de matrisler, parçacıklar ve elyaflar gibi örnekleri içeren makroyapılar olarak sınıflandırabiliriz. Ayrıca kompozit malzemeleri elyaf türlerine göre

- a) Sürekli elyaf takviyeli kompozitler
- b) Örgülü elyaf takviyeli kompozitler
- c) Kıyılmış elyaf takviyeli kompozitler
- ç) Hibrit kompozitler

olarak sınıflandırmak mümkündür. Elyaf lar organik, metalik, sentetik veya mineralden oluşabilmektedir. Yaygın olarak kullanılan ileri kompozit malzemeleri matris türlerine göre aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir.

- a) Polimer matrisli kompozitler
- b) Metal matrisli kompozitler
- c) Seramik matrisli kompozitler
- ç) Karbon-karbon kompozitler
- d) Hibrit kompozitler

### 2.3. Kompozit Malzemelerin Makromekaniği

İzotrop malzeme her yönde mekanik, fiziksel, ısı ve elektriksel özelliklerin aynı olduğu malzemelerdir. Bu malzemeler sadece üç elastik sabit içerir. Bunlar elastisite modülü E, kayma modülü G ve Poisson oranı  $\nu$  dır. Bu sabitler arasında aşağıdaki gibi bağıntılar bulunur. Burada K yığılma modülünü göstermektedir.

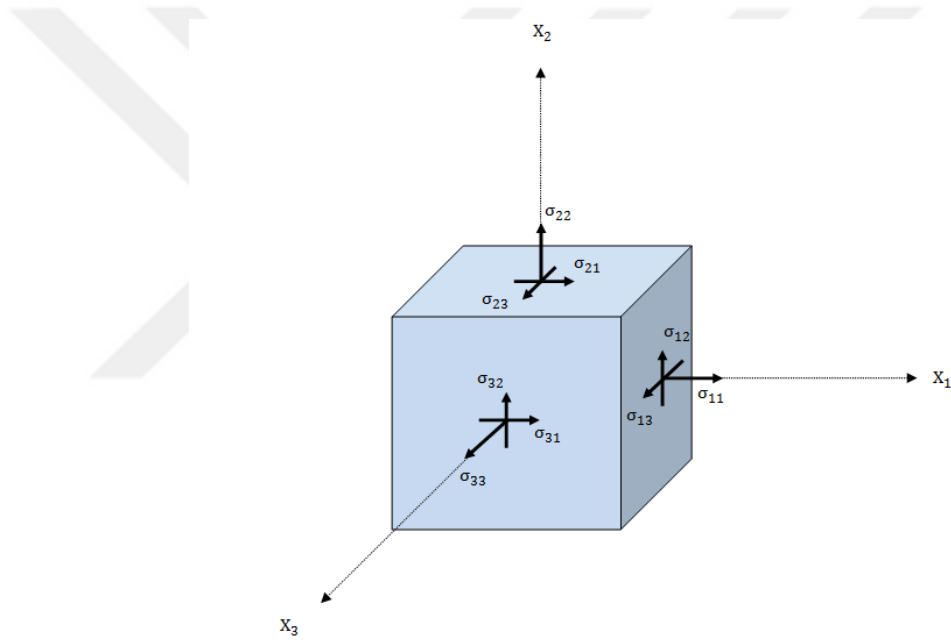
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.1)$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (2.2)$$

Elyaf takviyeli kompozit malzemeler uygulamada sıklıkla kullanılır. Çünkü uzun elyaflar, daha yüksek mukavemet-yoğunluk oranına, rijitlik-yoğunluk oranına sahiptir ve diğeri herhangi bir malzeme yapısından elyaf yönelimleri, uygulanan yük ve çevreye göre belirli bir geometriye benzersiz şekilde uyarılabilir. Kısa elyaf takviyeli kompozitler ise yüksek üretim ve düşük maliyetli bazı uygulamalar için oldukça elverişlidir. Küçük yer değiştirmeler için anizotropik malzemelerin doğrusal

elastik analizi için denge denklemleri, gerilme birim şekil değiştirme bağıntıları ve uygunluk denklemlerinin kullanımını gerektirir. Bünye denklemleri olarak adlandırılan gerilme-şekil değiştirme bağıntılarını kompozit malzemenin anizotropisini hesaba katmak için büyük ölçüde değiştirmek gerekmektedir.

Şekil 2.1’de gösterildiği gibi üzerindeki sonsuz sayıda noktalardan oluşan elastik bir katı cisim elamanını ele alalım. Malzeme noktaları, malzeme parçacıklarının moleküler kafes boşluklarına nazaran sonsuz büyüklükte olması onun sürekli olduğunu varsayımıyla, kartezyen koordinatlarda ( $dx, dy, dz$ ) boyutlarına sahip bir birim hacim elemanı Şekil 2.1. da gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Elastik bir cismin hacim elemanı gösterimi

Burada gerilmelere ait alt gösterimler önemlidir. Alt gösterim birinci elemanı normalin yönünü ikinci alt gösterimi ise gerilmenin doğrultusunun yönlerini gösterir. Yüzeyin normali doğrultusunda pozitif eksenler doğrultusundaki gerilme bileşenleri pozitif normal gerilmeleri, yüzey üzerinde diğer iki pozitif eksen doğrultusundaki gerilmeler ise kayma gerilmelerini gösterir.

x-y düzleminde birim şekil değiştirmeden önce kare elemanın köşe açısı 90°dir. Şekil değişiminde  $\sigma_{xy}$  ve  $\sigma_{yx}$  kayma gerilmeleri ve  $\phi$  açılı bir paralel kenar meydana gelir.  $\gamma_{xy}$  'deki açı değişimi

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \phi \quad (2.3)$$

Kayma birim şekil değişimi  $\epsilon_{xy}$  ise aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\epsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} \quad (2.4)$$

Kompozit malzemeler makromekanik olarak ifade edebilmek için öncelikle genelleştirilmiş Hooke kanunu çerçevesinde anizotrop malzeme için gerilme ve birim şekil değiştirme bileşenlerinin belirlenmesi gerekir. Bu sebeple bileşenleri indis notasyonunda olarak aşağıdaki gibi yazılabilir Jones (1999).

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (2.5)$$

$$\epsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (2.6)$$

Burada  $i, j = 1, 2, 3$  tür.  $\sigma_{ij}$  gerilme tansörünün bileşenlerini,  $\epsilon_{kl}$  genleme tansörünün bileşenlerini ve  $C_{ijkl}$  elastik katılık tansörünü  $S_{ijkl}$  ise gevşeklik tansörü bileşenlerini gösterir. Burada  $C$  tansörü açık olarak ifade edildiğinde  $9 \times 9 = 81$  elemandan oluşur. Hacim kuvvetlerinin olmaması durumunda gerilme ve birim şekil değiştirme tansörleri  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  ve  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$  dir. Böylece elastik sabit sayısı 36 ya düşer. Kısaltılmış gösterim olarak adlandırılan bu gösterimde (Voight gösterimi) gerilme ve genleme bileşenleri birbirine uyumlu olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\sigma_{11} = \sigma_1, \epsilon_{11} = \epsilon_1 \quad (2.7)$$

$$\sigma_{22} = \sigma_2, \epsilon_{22} = \epsilon_2 \quad (2.8)$$

$$\sigma_{33} = \sigma_3, \epsilon_{33} = \epsilon_3 \quad (2.9)$$

$$\sigma_{23} = \sigma_4, 2\epsilon_{23} = \epsilon_4 \quad (2.10)$$

$$\sigma_{13} = \sigma_5, 2\epsilon_{13} = \epsilon_5 \quad (2.11)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_6, 2\epsilon_{12} = \epsilon_6 \quad (2.12)$$

Bu durumda gerilme ve şekil değiştirme ilişkileri,

$$\sigma_i = C_{ij} \epsilon_j \quad (i, j = 1, 2 \dots 6) \quad (2.13)$$

$$\varepsilon_i = S_{ij}\sigma_j \quad (i, j = 1, 2 \dots 6) \quad (2.14)$$

yazılır.  $C_{ij}$  elastiklik modülü, elastiklik sabitleri ve katılık sabitlerin bir birim şekil değiştirme yoğunluk fonksiyonu enerjisi varsayımı ile bağımsız elastik sabitlerin sayısı düşürülebilir.

$$W_{yoğ1} = \frac{1}{2} C_{ij}\varepsilon_j\varepsilon_i \quad (2.15)$$

ve

$$W_{yoğ2} = \frac{1}{2} C_{ji}\varepsilon_i\varepsilon_j \quad (2.16)$$

elde edilir. Her iki eşitlik içinde genleme yoğunluk enerjisi  $\varepsilon_i$  ve  $\varepsilon_j$  ye göre ayrı ayrı türevleri alınır,

$$\frac{\partial W_{yoğ1}}{\partial \varepsilon_i} = C_{ij}\varepsilon_j, \quad \frac{\partial W_{yoğ2}}{\partial \varepsilon_j} = C_{ji}\varepsilon_i \quad (2.17)$$

elde edilir. Bir kez daha türev alınarak

$$\frac{\partial^2 W_{yoğ1}}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} = C_{ij}, \quad \frac{\partial^2 W_{yoğ2}}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_i} = C_{ji} \quad (2.18)$$

elde edilir. Hooke kanuna göre birim şekil değiştirme ifadesi kısaltılmış şekilde

$$S_{ij} = C_{ij}^{-1} \quad (2.19)$$

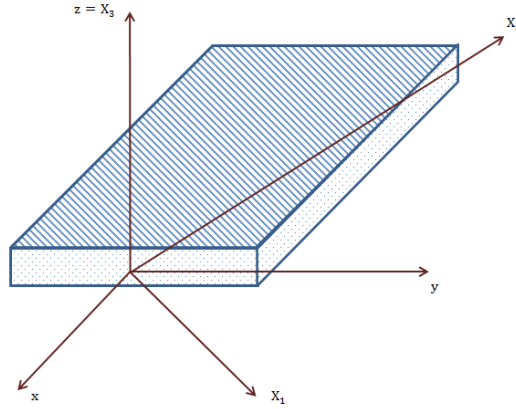
olarak ifade edilir ve katılık ve gevşeklik matrisi arasında denklem (2.19) daki gibi bir bağıntı olduğu görülür. Her iki matriste simetriktir. Tek yönlü yönlendirilmiş elyafa sahip kompozit malzemenin etkin özellikleri anizotropik bir malzeme olarak modllenebilir. Bu durumda malzeme 21 tane bağımsız sabite sahiptir. Bu malzeme gerilme ve genleme tansörleri ve genleme enerjisi yoğunluk fonksiyonun var olduğunu düşünülerek elde edilmiştir. Bu durumda elde edilen  $[C]$  katılık matrisi aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Malzeme özellikleri bakımından hiçbir simetri düzlemi olmayan bu anizotrop malzemeler triklinik malzeme olarak adlandırılır. Gerilme-birim şekil değiştirme bağıntısı bu durumda aşağıdaki gibi elde edilebilir.

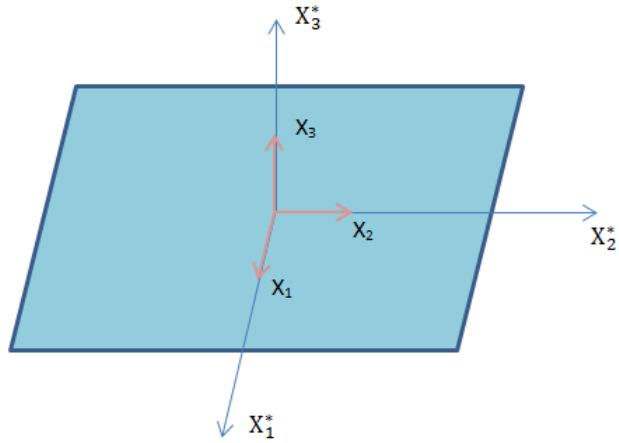
$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_4 \\ 2\varepsilon_5 \\ 2\varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Şekil 2.2 te gösterildiği gibi iki adet Kartezyen koordinat sistemi tanımlanır. bunlar 1-2-3- ve x-y-z koordinat sistemidir. 1 yönü elyafların diziliş yönünde 2 ve 3 yönü elyaf doğrultusuna dik yönlerdir.



Şekil 2.2. Tek yönlü katman simetri durumu

$X_3$  yönü yani z eksenini etrafında döndürüldüğünde x-y düzlemine simetrik bir malzeme elde edilir. Bu malzeme monoklinik malzeme olarak adlandırılır.



Şekil 2.3.  $X_1^* - X_2^*$  simetri düzlemi gösterimi

Şekil 2.3 te gösterildiği gibi  $X_1^* - X_2^*$  koordinat sistemine göre simetrik bir malzeme ele alırsak, malzeme sabitleri arasında  $C_{ij}^* = C_{ij}$  bağıntısı vardır ve birbirine özdeşdir. Bu simetrinin sonucunda Hooke kanuna göre gerilme- birim şekil değiştirme yeni koordinat sistemine göre aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\sigma_i^* = C_{ij} \varepsilon_j^* \quad (2.22)$$

Denklem 2.13 deki koordinat sisteminden \* koordinat sistemine dönüşüm ile aşağıdaki gibi gerilme ve birim şekil değiştirme bileşenleri elde edilir.

$$\sigma_1^* = \sigma_1, \quad \varepsilon_1^* = \varepsilon_1 \quad (2.23)$$

$$\sigma_2^* = \sigma_2, \quad \varepsilon_2^* = \varepsilon_2 \quad (2.24)$$

$$\sigma_3^* = \sigma_3, \quad \varepsilon_3^* = \varepsilon_3 \quad (2.25)$$

$$\sigma_4^* = -\sigma_4, \quad \varepsilon_4^* = -\varepsilon_4 \quad (2.26)$$

$$\sigma_5^* = -\sigma_5, \quad \varepsilon_5^* = -\varepsilon_5 \quad (2.27)$$

$$\sigma_6^* = \sigma_6, \quad \varepsilon_6^* = \varepsilon_6 \quad (2.28)$$

Burada denklem 2.13 ve denklem 2.22 dikkate alındığında simetri durumundan dolayı sabitler aşağıdaki gibi sifıra eşit olur.

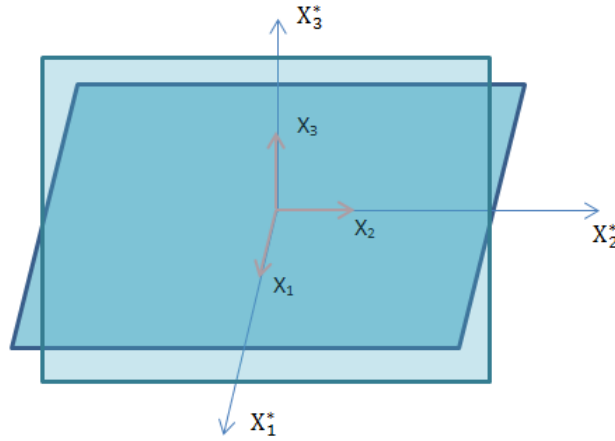
$$C_{14} = C_{15} = C_{24} = C_{25} = C_{34} = C_{35} = C_{46} = C_{56} = 0 \quad (2.29)$$

Böylece  $X_1^* - X_2^*$  düzlemine göre bir tek malzeme simetri eksenine sahip malzemeye monoklinik malzeme denir ve aşağıdaki gibi 13 bağımsız elastik sabite indirgenir.

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Bu durumda gerilme birim şekil değıştirme bağıntıları aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$



Şekil 2.4.  $X_1^* - X_2^*$  ve  $X_2^* - X_3^*$  simetri düzlemleri gösterimi

Bir malzemenin iki ortogonal simetri eksenini varsa buna karşın üçüncü bir karşılıklı ortogonal düzlem zorunlu olarak var olacaktır. Bu durumda malzemenin diğeri simetri düzleminin sonucu olarak

$$C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{45} = 0 \quad (2.32)$$

olacaktır. Gerilme ve genleme bağıntısı malzemenin asal yönlerine bağıdır. Ortotropik malzeme kalınlığı çok küçük olduğundan düzleme dik olan gerilmelerin sıfır olduğu kabul edilir. Bu yüzden düzlem gerilme durumunda sabitlerin sayısı azalacağından Bu



tip malzeme ortotropik malzeme olarak tanımlanır(Jones, 1999). [R.M. Jones]. Bu durumda elde edilen rijitlik matrisi

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

haline dönüşür. Benzer yaklaşımla gevşeklik matrisi

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

elde edilir. Gerilme-birim şekil değiştirme bağıntıları ise

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

olarak bulunur.

Ortotropik malzemede normal gerilme ve kayma birim şekil değişimleri arasında bir bağıntı yoktur. Bu duruma benzer olarak kayma gerilmeleri ile normal birim şekil değiştirmeler arasında bir bağıntı yoktur, aynı zamanda farklı düzlemlerde kayma gerilmeleri ve kayma birim şekil değiştirmeleri arasında bir bağıntı yoktur. Rijitlik matrisinin yalnızca dokuz bağımsız sabitten oluştuğu görülmektedir. Malzemenin her noktasında malzeme özellikleri açısından mekanik özelliklerin eşit olduğu bir düzlem var ise bu malzeme düşey izotropik olarak adlandırılır. Örneğin 1-2 düzlemi simetri düzlemi ise rijitliklerin alt gösterimleri yer değiştirebilir. Gerilme birim şekil değiştirme bağıntıları böylece beş bağımsız değişkene sahip olur.

$$C_{22} = C_{33}, C_{12} = C_{13}, C_{66} = C_{55}, C_{44} = (C_{11} - C_{12})/2 \quad (2.36)$$

dönüşümü ile gerilme- birim şekil değiştirme bağıntısı aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

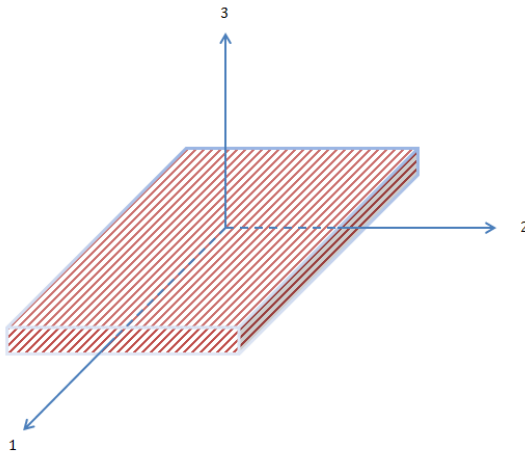
Malzemenin sonsuz sayıda simetri düzlemi var ise bu tür malzeme iki bağımsız sabite indirgenmiş olur. Bu tür özellikteki malzeme izotrop malzeme olarak adlandırılır. Bu durumda malzeme sabitleri

$$C_{11} = C_{22}, C_{12} = C_{23}, C_{66} = (C_{22} - C_{23})/2 = (C_{11} - C_{12})/2 \quad (2.38)$$

olarak ifade edilir. İzotrop malzeme için gerilme birim şekil değiştirme bağıntıları aşağıda verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

### 2.3.1. Ortotropik malzemede düzlem gerilme durumunda gerilme-birimşekil değiştirme bağıntıları



Şekil 2.5. Tek yönlü elyaf takviye edilmiş katman

Şekil 2.5'te gösterildiği gibi 1-2 düzleminde tek yönlü elyaf takviye edilmiş katman düzlem gerilme durumunda  $\sigma_3 = 0, \sigma_4 = 0, \sigma_5 = 0, \sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0$  ve  $\sigma_{12} \neq 0$  dir. Bu durum düzlem gerilme durumunun sadece gerçek durumun bir ideal durumu olmadığını bunun pratikte de kullanılabilir olmasının bir amacı olduğuna dikkat edilmelidir. Katmanlarda elyafların yönlenme doğrultusu dışındaki yönlerde yüksek gerilmelere dayanamazlar. Bu yüzden beklenti yalnızca bir tek yönlü takviye edilmiş katmanın düzlem içi gerilmeleri taşımasıdır. Bunu sağlamak için gerilme yönündeki paralel katmanlar diğer paralel katmanların yardımına ihtiyaç duyarlar. Bu yüzden gerilmelerin taşınabilmesi için çok katmanlı kompozit yapılara ihtiyaç duyulur.

Düzlem içi gerilmelerin etkilerini tespit etmek amacıyla düzlem dışı birim şekil değiştirme durumuna bakılırsa

$$\varepsilon_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2, \varepsilon_4 = 0, \varepsilon_5 = 0 \quad (2.40)$$

elde edilir ve burada

$$S_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_1} = -\frac{\nu_{31}}{E_3}, S_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_2} = -\frac{\nu_{32}}{E_3} \quad (2.41)$$

dir. Böylece denklem (2.34) da gevşeklik matrisi aşağıdaki halde elde edilir. Birim şekil değiştirme-gerilme bağıntısı

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Burada

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}, S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, S_{22} = \frac{1}{E_2}, S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \quad (2.43)$$

karşılık gelir. Gerilme-birim şekil değiştirme bağıntıları denklem 2.42 den dönüştürülürse aşağıdaki gerilme-birim şekil değiştirme bağıntısı elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Ayrıca ortotropik bir malzemede eksene dik yönde kayma gerilmeleri

$$\begin{bmatrix} \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

olarak verilebilir.

Bir katmanın elastik davranışını açıklamak için öncelikle rijitlik matrisini belirlememiz gereklidir. Rijitlik matrisini aşağıdaki gibi ele alırsak,

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Burada

$$Q_{11} = \frac{E_1}{(1-\nu_{12}\nu_{21})}, Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{(1-\nu_{12}\nu_{21})}, Q_{22} = \frac{E_2}{(1-\nu_{12}\nu_{21})}, Q_{66} = G_{12}, Q_{44} = G_{23}, Q_{55} = G_{13} \quad (2.47)$$

Elyafların yönlenme açısına göre dönüşmüş indirgenmiş rijitlikler aşağıdaki gibi sinüs ve kosinus açılarını içeren dönüşümlerle hesaplanır.

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}cs^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})cs^2sn^2 + Q_{22}sn^4 \quad (2.48a)$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})cs^2sn^2 + Q_{12}(cs^4 + sn^4) \quad (2.48b)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11}sn^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})cs^2sn^2 + Q_{22}cs^4 \quad (2.48c)$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})cs^3sn + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})sn^3cs \quad (2.48d)$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sn^3cs + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})cs^3sn \quad (2.48e)$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})cs^2sn^2 + Q_{66}(cs^4 + sn^4) \quad (2.48f)$$

$$\bar{Q}_{44} = Q_{44}cs^2 + Q_{55}sn^2 \quad (2.48g)$$

$$\bar{Q}_{45} = (Q_{55} - Q_{44})cs sn \quad (2.48h)$$

$$\bar{Q}_{55} = Q_{44}cs^2 + Q_{55}sn^2 \quad (2.48i)$$

Burada  $\bar{Q}_{ij}$  dönüşmüş indirgenmiş katılık matrisinin elemanlarını göstermektedir. Kısaltılmış ifade olarak  $cs = \cos\theta$ ,  $sn = \sin\theta$  yı göstermektedir. Üç boyutlu durumda olduğu gibi rijitlik katsayıları yönlenmenin sinüs ve kosinüs açısına bağlı ve 4. mertebedir.  $[Q]$  matrisi simetrik olduğu ve 0 dan farklı olduğu durumda  $\bar{Q}_{16}$  ve  $\bar{Q}_{26}$  katsayıları sıfırdan farklıdır. Bu katsayılar düzlem içi normal ve kayma şekildeğişimleri arasında bir birleşme olduğunda hesaba katılır. Bu malzeme izotrop iken ve ortotrop asal malzeme koordinatlarında sıfırdır. Bu durumlarda normal ve kayma cevapları arasında birleşme olmaz. Burada alt gösterimli ifadeleri kartezyen koordinatlardaki ifadelere dönüştürürsek

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

elde edilir. Bu denklemde verilen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  düzlem içi x ve y yönünde normal gerilme bileşenlerini,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$  ve  $\tau_{xz}$  ise sırasıyla x-y, y-z ve x-z düzleminde kayma gerilmesi bileşenlerini gösterir.  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  normal birim şekil değiştirme bileşenlerini gösterirken  $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$ ,  $\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz}$  ve  $\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz}$  kayma birim şekil değiştirme bileşenlerini verir (Herakovich, 1998); Jones (1999); (Vinson & Sierakowski, 2006).

## 2.4. Katmanlı kompozit kirişler

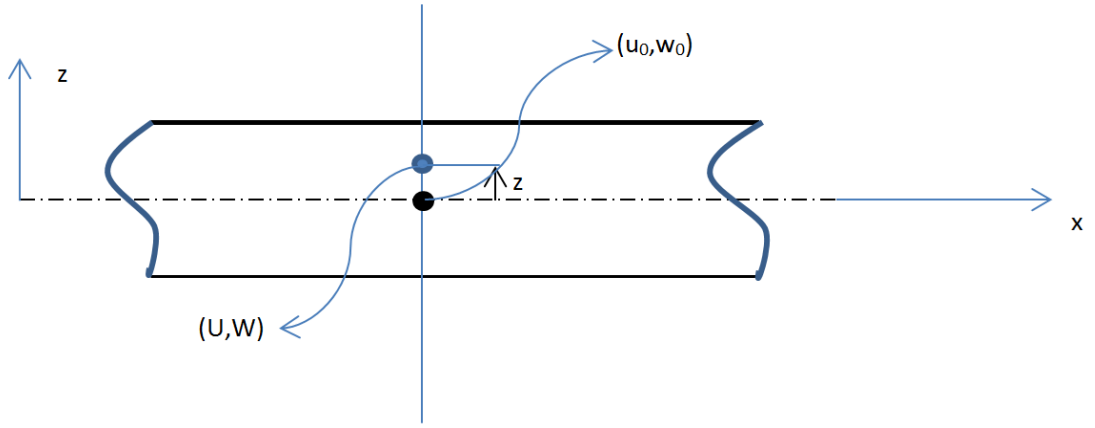
Kirişler, uzunluğu yükseklik ve genişliğine göre daha büyük olan üç boyutlu düzgün elastik cisimlere denir. Kirişlerin analizine yardımcı olmak amacıyla farklı teoriler kullanılmaktadır. Bu teorilerin meydana getirdiği kısıtlamalarla elde edilen çözümler bize problemler hakkında gerçek sonuca ilişkin bilgiler verecektir.

### 2.4.1. Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi (EBT)

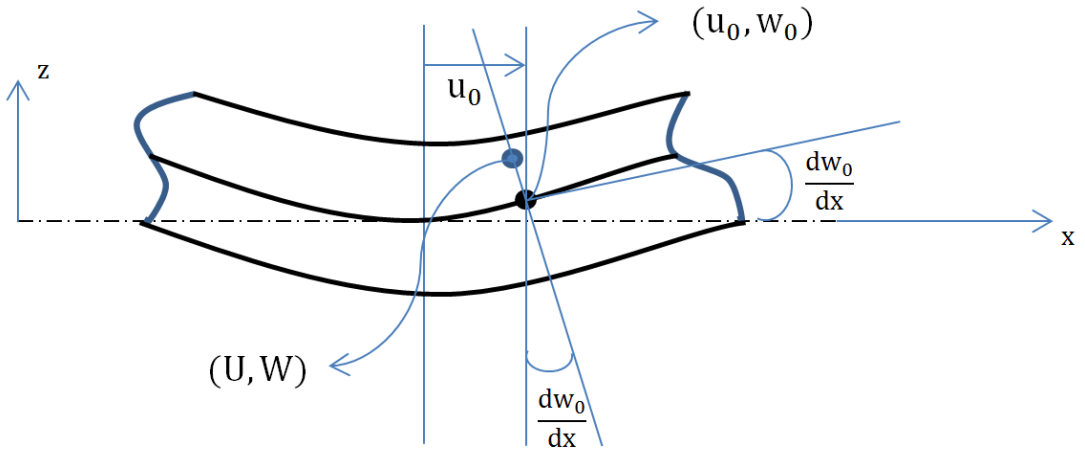
Euler-Bernoulli Teorisi en yaygın kullanılan kiriş modelidir. Bu modelde dönme ataleti etkisi ve kayma şekil değişimi göz ardı edildiğinden gerçekçi sonuçlar vermez (Bauchau & Craig, 2009)

- 1) Kesit alanı kendi düzleminde rijit kabul edilir.
- 2) Şekil değişiminden sonra bir kirişin kesit alanı düzlem kalır.
- 3) Kirişin kesiti, kirişin şekil değiştiren eksenine dik kalır.

Bu varsayımlar bilinen düzgün kesit alanı, homojen, izotrop yapıya sahip ince kirişler için oldukça anlamlı olmasına rağmen karmaşık geometriye sahip, heterojen malzemeden yapılmış, anizotrop cisimlerin titreşimlerinde özellikle yüksek mod sayılarında sorgulanabilir hale gelir. Burada kayma kuvvetleri, eğilme momentinin türevi olarak varsayılabilir. Böylece yaklaşık eğilme ve kayma gerilmesi kesit alanı üzerinden düzeltilmiş olur.



Şekil 2.6. Şekil değişiminden önce kiriş geometrisi



Şekil 2.7. Euler-Bernoulli teorisi için şekil değişiminden sonraki durum

Şekil 2.7'de gösterildiği gibi kartezyen koordinatlarda elastik bir cisim için bir noktanın yer değiştirmesi  $x$ ,  $y$  ve  $z$  koordinatlarında sırasıyla  $u$ ,  $v$  ve  $w$  olduğunu varsayalım. Burada tarafsız eksen, kirişin  $x$  eksenine üst üstedir. Böyle bir kiriş için Euler-Bernoulli kirişinin yer değiştirme ve birim şekil değiştirme bağıntısı aşağıdaki gibi verilir. (Bauchau & Craig, 2009)

$$U(x, z) = u_0 - z \left( \frac{dw_0}{dx} \right) \quad (2.50a)$$

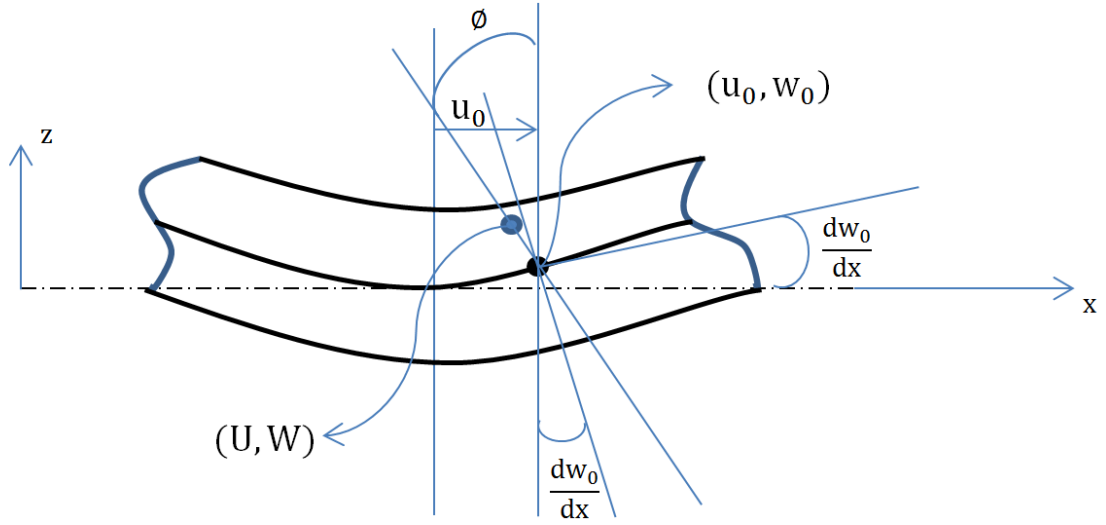
$$W(x, z) = w_0 \quad (2.50b)$$

$$\varepsilon_x(x, z) = \varepsilon_0(x) - z\left(\frac{d^2w_0}{dx^2}\right) \quad (2.50c)$$

Burada  $u_0$  ve  $w_0$  sırasıyla tarafsız ekseninde bir noktanın eksen yönünde ve düşey yöndeki yer değiştirmeyi,  $dw_0/dx$  terimi  $y$  eksenine göre dönmeyi,  $d^2w_0/dx^2$  ise eğilme eğriliğini göstermektedir.

#### 2.4.2. Birinci Mertebe Kayma Şekil Değişirme Teorisi (BMKDT)

Kiriş teorilerinin tarihsel sıralamasına bakıldığında birinci mertebe kayma şekil değişirme teorisi diğer adıyla Timoshenko kiriş teorisi gelmektedir. Bu teori dönme ataleti ve kayma şekil değişimini içerir. Bu teorinin temel etkisi ince olmayan kirişler ve yüksek mod sayılarında kayma etkisinin önemli olduğunu ortaya koymaktadır. Bu teori ile kirişte sabit kabul edilen kayma gerilmesi ile gerçekte meydana gelen gerilmeler arasındaki farkı gidermek için kayma düzeltme faktörü (kdf) adı verilen bir düzeltme katsayısı ortaya konulmuştur.



Şekil 2.8. Birinci mertebe kayma şekil değişirme teorisi için kirişte şekil değişimi

Bu katsayı malzemenin özelliklerine, kiriş geometrisine, yükleme durumuna ve kirişin sınır koşullarına bağlı olduğu gösterilmiştir. Birinci mertebe kayma şekil

değiştirme teorisi için herhangi bir noktada yer değiştirme genleme ve şekil değişimi aşağıdaki gibi verilebilir (C. Wang, Reddy, & Lee, 2000)

$$U(x, z) = u_0 + z \phi \quad (2.51a)$$

$$W(x, z) = w_0 \quad (2.51b)$$

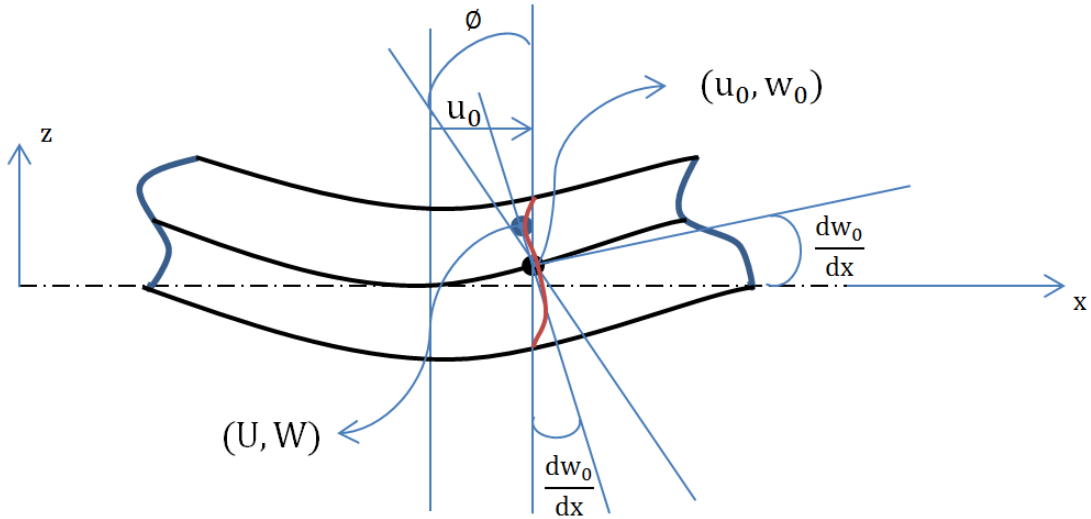
$$\epsilon_x(x, z) = \epsilon_0(x) - z \phi_{,x} \quad (2.51c)$$

$$\gamma_{zx}(x, z) = \gamma_{zx0}(x, z) \quad (2.51d)$$

Burada  $U, W$  yer değiştirme bileşenlerini,  $\epsilon$  ise birim şekilde değiştirmeyi,  $\phi = du(x)/dz$ ,  $\gamma_{zx0}(x, z) = dw(x)/dx + \phi$  tir.

### 2.4.3. Parabolik kayma şekil değiştirme teorisi (PKDT)

Birinci mertebeye kayma şekil değiştirme teorisi kirişin alt ve üst yüzeyinde kayma gerilmesinin sıfır olma şartını sağlamaz ve kdf 'ye ihtiyaç duyar. Bu nedenden dolayı beklentileri karşılayacak daha iyi yaklaşımlara ihtiyaç duyulmuştur ve yüksek mertebeden kayma şekil değişimi teorileri ortaya atılmıştır. Bu teorilerden en yaygın kullanılanlardan biri Reddy'nin önerdiği parabolik kayma şekil değiştirme teorisi diğer adıyla da 3. mertebeye kayma şekil değiştirme teorisidir.



Şekil 2.9. Parabolik kayma şekil değiştirme teorisi için kirişte şekil değişimi



Şekil 2.9de de gösterildiği gibi kalınlık boyunca herhangi bir noktadaki yer değiştirme alanı bağıntıları aşağıdaki gibi verilebilir,

$$U(x, z) = u_0 + z \phi - \frac{4}{3h^2} z^3 (\phi + w_{,x}) \quad (2.52a)$$

$$W(x, z) = w_0 \quad (2.52b)$$

$$\epsilon_x(x, z) = \epsilon_0(x) - z \phi_{,x} - z^3 \left(\frac{4}{3h^2}\right) (\phi_{,x} + w_{,xx}) \quad (2.52c)$$

$$\gamma_{zx}(x, z) = \gamma_{zx0}(x, z) - z^2 \left(\frac{4}{h^2}\right) (\phi + w_{,x}) \quad (2.52d)$$

Bu denklemlerdeki,  $\phi = du(x)/dz$  ye eşittir ve dik kesitin dönmesini ifade eder.

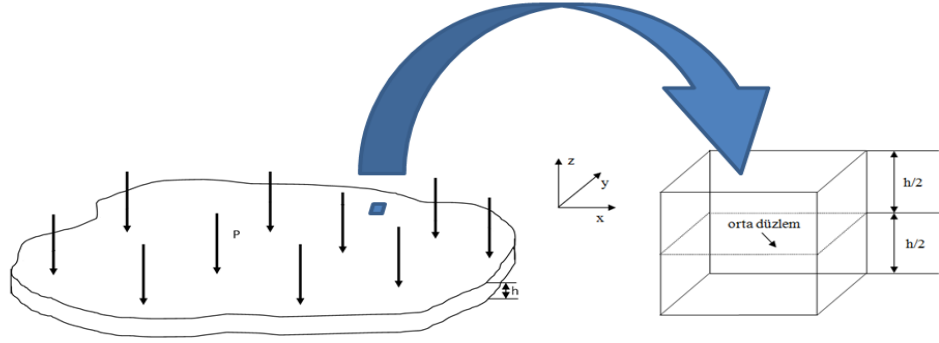
## 2.5. Plaklar

Kalınlığı diğer iki boyutu yanında oldukça küçük olan belirli geometrik özelliklere sahip düzgün 3 boyutlu yapı elemanına plak adı verilir. Plakın orta yüzeyi alt ve üst iki yüzeyi arasındaki düzlem olarak tanımlanır. Plaklar için kalınlığın boyutlara oranı 1/20 ve daha az ise ince plak olarak kabul edilir aksi durumda ise kalın plak olarak adlandırılır. Plak kalınlığı diğer boyutları yanında çok küçük olarak kabul edildiğinden üç boyutlu elastik denklemlere gereksinim yoktur. Bunun yerine bazı kinematik varsayımlar ile iki boyutlu teoriler kullanılarak yer değiştirme, gerilme, titreşim ve burkulma gibi birçok problemin çözümü yapılmaktadır. Bu yöntemlerden en eski olanı Kirchoff plak teorisidir ve klasik plak teorisi olarak adlandırılır.

### 2.5.1. Klasik plak teorisi (KPT)

En temel yer değiştirme alanını temel alan bir eş değer tekil katman teorisidir. Euler-Bernoulli kiriş teorisinin iki boyutlu olarak uygulanmış halidir. 19. yüzyılda Kirchoff (Kirchoff, 1850) tarafından önerilmiş 20. yüzyılın başlarında Love (Love, 1920) ve Timoshenko (S. Timoshenko & Woinowsky-Krieger, 1956) tarafından devam ettirilmiştir. Bu teorinin temel varsayımı şekil değişiminden önce orta düzleme dik olan yüzeyin normali şekil değişiminden sonra da düzleme normal ve dik kalmasıdır. Bu varsayım basit bir şekilde bünye denkleminde ulaşılmasına rağmen eksiktir. Bu eksiklik elastik iki boyutlu yapının birim kayma şekil değişimi ihmal edilmesindedir. Birçok

varsayım ve sınırlamalara rağmen özellikle ince plakların davranışlarını incelemek için KPT hala en yaygın kullanılan yaklaşımlardan biridir.



Şekil 2.10. Kartezyen koordinatlarda birim hacim elemanında orta düzlem

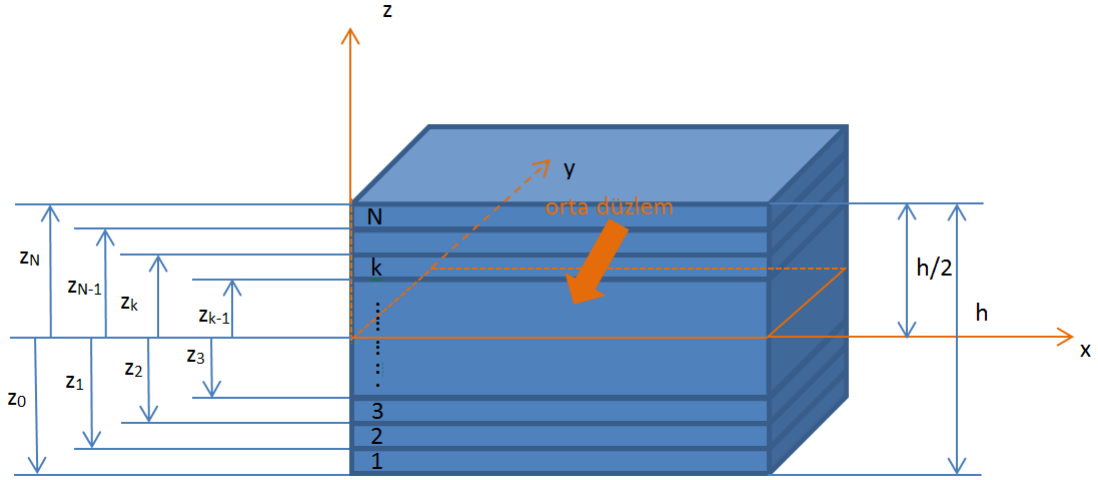
Üç boyutlu kalın plak ve kabuklar için yapının iki boyutlu olarak ele alınması toplam değişken sayısında önemli bir azalma ve hesaplamada önemli avantajlara yol açmaktadır. Bu yaklaşım yaygın kullanımı sebebiyle ileri plak teorilerinin analizi için temel oluşturur. Bu teoride kayma şekil değişimi ihmal edildiğinden doğal frekansları ve burkulma yüklerini beklenenden oldukça yüksek ve eğilmeyi de beklenenden düşük tahmin etmektedir.

Kompozit malzemeler esas itibarıyla genel anizotropik yapısı ve kesitin düşey yönde katmanlar arası süreksizliği sebebiyle düşey kayma ve normal gerilmelere maruz kalmaktadır. Kompozit katmanlar arası birbirine mükemmel olarak bağlı olduğu varsayılır. Bu çalışmada her bir katman yönlü elyaf takviyeli ve ortotropik olduğu düşünülecektir. Elyafların yönlenme açısına bağlı olarak iki tip farklı yönlenme durumu vardır. Birincisi açılı katmanlı diğeri dik katmanlıdır (Kirchhoff, 1850; Love, 1934; S. P. Timoshenko, 1934).

### 2.5.2.Klasik Laminasyon Teorisi (KLT)

Bu teori ile düzlem gerilme durumunda ve eğilme momentine maruz bırakılan lineer elastik bir kompozitin elastik cevabının denklemini elde edilecektir. Klasik laminasyon teorisi Smith 1953(Smith, 1953), Pister 1959(Pister & Dong, 1959),

Reissner 1961(Reissner, 1961), Stavsky 1964 (Stavsky, 1964) ve Lekhnitski (1968) (Lekhnitski, 1968) tarafından yapılan çalışmalarda ortaya konulmuştur.



Şekil 2.11. Katmanlı kompozit yapı geometrik özellikler ve eksen takımı

Klasik Laminasyon Teorisi (KLT) ne temel olacak varsayımları aşağıdaki gibi sıralayabiliriz.

- 1) Katmanların (laminalar) her biri birbirine mükemmel olarak bağlıdır.
- 2) Her bir katman etkin özellikleri bilinen homojen malzemelerden oluşmuştur.
- 3) Katmanlar izotrop, ortotrop ve dikine izotrop olabilir.
- 4) Her bir katman düzlem gerilme durumundadır.
- 5) İnce plakların uzaması ve eğilme durumu için orta düzlemin normali, şekil değişiminden sonra düz ve normal kalır. Ayrıca orta düzlemin uzunluğu değişmez (Herakovich, 1998).

KPT ye göre yer değiştirme bileşenleri genelleştirilmiş ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$U(x, y, z, t) = u(x, y, t) - zw_{,x} \quad (2.53a)$$

$$V(x, y, z, t) = v(x, y, t) - zw_{,y} \quad (2.53b)$$

$$W(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (2.53c)$$

Burada U, V ve W sırasıyla x y ve z yönlerindeki yerdeğişimlerini, u, v ve w ise plağın orta düzlemdeki yer değişimi x y ve z koordinatlarında sırasıyla verilir. Burada " ,x" , " ,y" sırasıyla x ve y eksenine göre türevleri göstermektedir.

## 2.6. Enerji Yöntemleri

### 2.6.1. Sanal iş ilkesi

Bir cismin malzeme noktalarının hepsinin eş zamanlı konumlarını ifade etmek için kullanılan bir ilkedir. Sistemin geometrik kısıtlamalarını karşılayan kümeye konfigürasyon kümesi olarak adlandırılır. Kabul edilebilir konfigürasyonlardan sadece bir tanesi uygulanan yükler altında Newtonun ikinci yasasını içeren denge konfigürasyonuna karşılık gelir. Kabul edilebilir konfigürasyonlar gerçek konfigürasyonun komşuluğu ile sınırlıdır ve gerçek konfigürasyonun sonsuz varyasyonundan elde edilir. Bu çeşit varyasyonlar sırasında sistemin geometrik kısıtlamaları ihlal edilmez ve uygulanan tüm kuvvetler gerçek değerlerine sabitlenir. Bir mekanik sistem denge konfigürasyonu bu tür değişimler meydana geldiğinde sanal yer değiştirmelerden geçtiği düşünülür. Bu yer değiştirmeler yüklerde ve sınır koşullardaki gerçek yer değiştirmeyle herhangi bir değişikliğe neden olmaz. Yer değiştirmeler sanal olarak adlandırılır.

Sanal iş, geometrik kısıtlarla tutarlı sanal yer değiştirmeyle hareket halindeki gerçek kuvvetler tarafından bir parçacık ya da şekil değiştiren cismin yaptığı iştir.

### 2.6.2. Minimum toplam potansiyel enerji ilkesi

Şekil değiştirmiş kiriş ve çubuk gibi cisimlerin denge ve hareket denklemlerini türetmek için varyasyonel ilkeler kullanılır. Elastik cisimlerin bir birim şekil değiştirme enerjisinin var olduğunu düşünürsek birim şekil değiştirme enerjisi  $U$  olarak gösterilebilir. Bu enerji bir noktada birim şekil değiştirme enerjisinin bir fonksiyonudur ve pozitif sonlu bir değere sahiptir. Sıcaklık değişimleri göz önüne alındığında birim şekil değişim enerjisinin yoğunluğu değişmelidir. Bu enerjilerin toplamı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\Pi = U_{\text{pot}} + V_{\text{kin}} \quad (2.54)$$

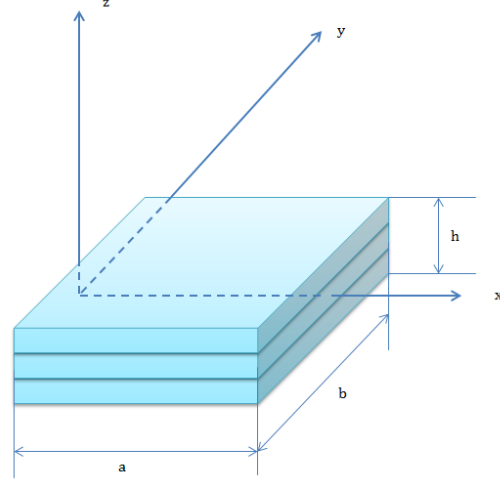
Bu eşitlik toplam minimum potansiyel enerjisi ilkesini tanımlar. Burada  $U_{\text{pot}}$  birim şekil değiştirme enerjisini  $V_{\text{kin}}$  kinetik enerjiyi gösterir. Sanal yer değiştirme ilkesi ile minimum potansiyel enerji ilkesi uygulandığında denge denklemini verir. İki ilke arasındaki temel fark ise sanal yer değiştirme ilkesi denge denklemlerini gerilmeler

cinsinden verirken, minimum potansiyel enerji ilkesi yer değiştirmeler cinsinden verir. Bu durum minimum potansiyel enerji ilkesinde bünye denklemleri yer değiştirmelerin cinsinden gerilmelerin yerine geçer.

### **2.6.3. Hamilton ilkesi**

Sanal iş ilkesi sadece katı cisimlerin bazı özel durumları ve statik denge problemlerin çözümünde kullanıldığından sınırlıdır. Hamilton ilkesi ise rijit cisimlerin, şekil değiştiren cisimlerin ve parçacık sistemlerinin dinamiği için genelleştirilmiş sanal yer değiştirme ilkesidir. Bu ilke kinetik ve potansiyel enerji olarak tanımlanan iki enerji fonksiyonu ile ifade edilir. Bu enerjiler ayrıık sistemler için sonlu sayıda genelleştirilmiş koordinatlar ve onların türevi ile birlikte zamanı içerir. Sürekli sistemlerde ise konum fonksiyonu gibi bağımsız değişkenler cinsinden ifade edilir. Hamilton ilkesi sürekli sistemlerde olduğu gibi ayrıık sistemler içinde dinamik problemlerin çözümünü sağlamaktadır. Esas olarak ayrıık cisimler için izlenen aynı yol sürekli sistemler içinde izlenebilir.

## 2.7. Katmanlı Kompozit Plak Denklemlerinin Elde Edilmesi



Şekil 2.12. Kompozit katmanlı plak geometrisi

Şekilde gösterildiği gibi  $a$  uzunluğuna,  $b$  genişliğine ve  $h$  kalınlığına sahip lineer  $N$  adet elastik ve ortotropik özellikteki katmandan oluşan katmanlı kompozit plak göz önüne alınsın. Soldatos ve Timarcı (Soldatos & Timarci, 1993) tarafından verilen modele benzer bir varsayımla genel kayma deformasyon kabuk teorisinden elde edilen plak için yerdeğiştirme alanı (Aydogdu & Timarci, 2003)

$$U(x, y, z; t) = u(x, y; t) - zw_{,x} + s_1(z)u_1(x, y; t) \quad (2.55a)$$

$$V(x, y, z; t) = v(x, y; t) - zw_{,y} + s_2(z)v_1(x, y; t) \quad (2.55b)$$

$$W(x, y, z; t) = w(x, y; t) \quad (2.55c)$$

olarak elde edilir. Burada  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $u_1$  ve  $v_1$  varsayılan 5 yer değiştirme bileşenidir.  $s_1(z)$  ve  $s_2(z)$  ise kalınlık boyunca düşey yönde birim kayma şekil değişimi ve kesme kuvvetinin dağılımını belirleyen şekil fonksiyonlarını göstermektedir. Burada  $u_1$  ve  $v_1$  orta düzlemde ölçülen kayma şekil değişimleridir. Bu tezde şekil fonksiyonları  $s_1(z) = s_2(z)$  olarak alınmıştır. Farklı teoriler için bu çalışmada kullanılacak şekil fonksiyonları aşağıdaki çizelgede verilmiştir (Çizelge 2.1).

Çizelge 2.1. Düşey yönde kayma şekil değiştirme fonksiyonları

Teori	Şekil fonksiyonları	
EBT	$s_1(z) = 0$	$s_2(z) = 0$
BMKDT	$s_1(z) = z$	$s_2(z) = z$
PKDT	$s_1(z) = z(1 - 4z^2/3h^2)$	$s_2(z) = z(1 - 4z^2/3h^2)$

### 2.7.1. Birim şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları

Denklem 2.55 te verilen yer değiştirme alanlarının türevleri alınarak elde edilen birim şekil değiştirme kinematik bağıntıları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\varepsilon_x = u_{,x} - zw_{,xx} + s_1(z)u_{1,x} \quad (2.56a)$$

$$\varepsilon_y = v_{,y} - zw_{,yy} + s_2(z)v_{1,y} \quad (2.56b)$$

$$\gamma_{yz} = s_2'v_1 \quad (2.56c)$$

$$\gamma_{xz} = s_1'u_1 \quad (2.56d)$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} - 2zw_{,xy} + s_1u_{1,y} + s_2v_{1,x} \quad (2.56e)$$

Burada " ' " gösterimi z eksenine göre türevi, " ,x " ve " ,y " gösterimi sırasıyla x ve y eksenlerine göre türevleri göstermektedir.

### 2.7.2. Gerilme-birim şekil değiştirme bağıntıları

k. katman için gerilme- birim şekil değiştirme bağıntıları diğer tüm 5 serbestlik dereceli kayma şekil değiştirme plak teorilerinde olduğu gibi  $\sigma_z$  ihmal edilerek genelleştirilmiş Hooke kanununa göre aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^{(k)} \\ \sigma_y^{(k)} \\ \tau_{yz}^{(k)} \\ \tau_{xz}^{(k)} \\ \tau_{xy}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^{(k)} & \bar{Q}_{12}^{(k)} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16}^{(k)} \\ \bar{Q}_{12}^{(k)} & \bar{Q}_{22}^{(k)} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26}^{(k)} \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{44}^{(k)} & \bar{Q}_{45}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{45}^{(k)} & \bar{Q}_{55}^{(k)} & 0 \\ \bar{Q}_{16}^{(k)} & \bar{Q}_{26}^{(k)} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Burada  $Q_{ij}^{(k)}$  k. katman için dönüşmüş indirgenmiş katlıkları gösterir. Burada  $\sigma_x^{(k)}$ ,  $\sigma_y^{(k)}$ ,  $\tau_{yz}^{(k)}$ ,  $\tau_{xz}^{(k)}$ ,  $\tau_{xy}^{(k)}$  ve  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{xy}$  sırasıyla k. katmandaki gerilme ve birim şekil değiştirme bileşenlerini göstermektedir.

Hamilton ilkesi, parçacıkların, katı cisimlerin veya şekil değiştiren cisimlerin dinamikleri için uygulanan sanal yer değiştirme ilkesinin genelleştirilmiş halidir. Temel ilke biri kinetik enerji diğeri, potansiyel enerji (birim şekil değiştirme enerjisi, kuvvetlerin işi) olarak iki enerji şekli göz önüne alınır. Varyasyonu alınmış kinetik enerjiler ve potansiyel enerjilerin farkı alınarak belirli bir zaman aralığı için sıfıra eşitlenir. Aynı yer değiştirme bileşenlerine sahip denklemler gruplanır ve hareket denklemleri elde edilir.

Kompozit plak için statik ve dinamik davranışı tanımlayan yönetici denklemler Hamilton ilkesi ve minimum potansiyel enerji ilkesi yardımıyla elde edilebilir. Bu ilkeleri uygulayabilmek için öncelikle enerji denklemlerini elde edilmesi gerekir. Şekil değiştiren bir elastik cismin potansiyel enerjisi

$$U_c = \frac{1}{2} \int_{V_H} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV_H \quad (2.58)$$

olarak yazılabilir. Kinetik enerjisi ise

$$T_c = \frac{1}{2} \int_{V_H} \rho (U_{,t}^2 + V_{,t}^2 + W_{,t}^2) dV_H \quad (2.59)$$

Burada  $\rho$  yoğunluk  $V_H$  ise kompozitin hacmini göstermektedir. " $_{,t}$ " alt gösterimi ise zamana göre türevi gösterir. Dış kuvvetlerden elde edilen iş

$$W_d = \frac{1}{2} \int_A (q + N_x w_{,x}^2 + 2N_{xy} w_{,x} w_{,y} + N_y w_{,y}^2) dA \quad (2.60)$$

Bu denklemde  $q$  düşey yükü,  $N_x, N_y, N_{xy}$  aksenal kuvvetler ve düzlem içi kayma kuvvetleridir. Bu durumda enerjilerin varyasyonu alınırsa birim şekil değiştirme potansiyel enerjisinin varyasyonu

$$\delta U_c = \int_A \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}] dz \right\} dx dy \quad (2.61)$$

şeklinde yazılır.

Kinetik enerjini varyasyonu



$$\delta T_c = \int_A \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \rho [\dot{U}\delta\dot{U} + \dot{V}\delta\dot{V} + \dot{W}\delta\dot{W}] dz \right\} dx dy \quad (2.62)$$

ve dış kuvvetlerin işi için varyasyonu alınırsa

$$\delta W_d = \int_A \left\{ (q + N_x^d w_{,xx} + N_{xy}^d w_{,xy} + N_y^d w_{,yy}) \delta W \right\} dx dy \quad (2.63)$$

Hamilton ilkesi ile belirli zaman aralığında cismin tüm enerjilerinin farkının varyasyonu alınırsa

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T_c - \delta U_c + \delta W_d) = 0 \quad (2.64)$$

uygulanır ve sırasıyla  $\delta u, \delta v, \delta w, \delta u_1$  ve  $\delta v_1$  katsayılarının çarpanlarından plak için yönetici denklem sistemi aşağıdaki gibi elde edilir

$$N_{x,x}^{kl} + N_{xy,y}^{kl} = (\rho_0 u - \rho_1 w_{,x} + \rho_3 u_1)_{,tt} \quad (2.65a)$$

$$N_{y,y}^{kl} + N_{xy,x}^{kl} = (\rho_0 v - \rho_1 w_{,y} + \rho_3 v_1)_{,tt} \quad (2.65b)$$

$$M_{x,xx}^{kl} + M_{y,yy}^{kl} + 2M_{xy,xy}^{kl} + q + N_x^d w_{,xx} + N_y^d w_{,yy} + N_{xy}^d w_{,xy} = (\rho_1 u_{,x} - \rho_2 w_{,xx} + \rho_4 u_{1,x} + \rho_1 v_{,y} - \rho_2 w_{,yy} + \rho_4 v_{1,y} + \rho_0 w)_{,tt} \quad (2.65c)$$

$$M_{x,x}^{kd} + M_{xy,y}^{kd} - Q_x^{kd} = (\rho_3 u - \rho_4 w_{,x} + \rho_5 u_1)_{,tt} \quad (2.65d)$$

$$M_{y,y}^{kd} + M_{yx,y}^{kd} - Q_y^{kd} = (\rho_3 v - \rho_4 w_{,x} + \rho_5 v_1)_{,tt} \quad (2.65e)$$

Burada “kl” üst indisi klasik teoriden elde edilmiş kuvvet ve moment bileşenlerini, “kd” ise kayma şekil değiştirme teorisinden elde edilen kuvvet ve moment bileşenlerine karşılık gelir. Burada geçen terimlerden gerilme bileşenleri ve atalet terimlerinin karşılığı aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$(N_x^{kl}, N_y^{kl}, N_{xy}^{kl}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz, \quad (2.66)$$

$$(M_x^{kl}, M_y^{kl}, M_{xy}^{kl}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz, \quad (2.67)$$

$$(M_x^{kd}, M_y^{kd}, M_{xy}^{kd}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) s(z) dz, \quad (2.68)$$

$$(Q_x^{kd}, Q_y^{kd}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) s' dz, \quad (2.69)$$

Atalet terimleri ise

$$\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho [1, z, z^2, s(z), z s(z), s(z)s(z)] dz \quad (2.70)$$

olarak tanımlanır. Kuvvet ve moment bileşenleri yer değiştirme bileşenleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} N_x^{kl} \\ N_y^{kl} \\ N_{xy}^{kl} \\ M_x^{kl} \\ M_y^{kl} \\ M_{xy}^{kl} \\ M_x^{kd} \\ M_y^{kd} \\ M_{xy}^{kd} \\ M_{yx}^{kd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & E_{11} & E_{12} & E_{16} & E_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & E_{12} & E_{22} & E_{26} & E_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & E_{16} & E_{26} & E_{66} & E_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & F_{11} & F_{12} & F_{16} & F_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & F_{12} & F_{22} & F_{26} & F_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & F_{16} & F_{26} & F_{66} & F_{66} \\ E_{11} & E_{12} & E_{16} & F_{11} & F_{12} & F_{16} & H_{11} & H_{12} & H_{16} & H_{16} \\ E_{12} & E_{22} & E_{26} & F_{12} & F_{22} & F_{26} & H_{12} & H_{22} & H_{26} & H_{26} \\ E_{16} & E_{26} & E_{66} & F_{16} & F_{26} & F_{66} & H_{16} & H_{26} & H_{66} & H_{66} \\ E_{16} & E_{26} & E_{66} & F_{16} & F_{26} & F_{66} & H_{16} & H_{26} & H_{66} & H_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \\ -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \\ u_{1,x} \\ v_{1,y} \\ u_{1,y} \\ v_{1,x} \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

ve

$$\begin{bmatrix} Q_y^{kd} \\ Q_x^{kd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ u_1 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

burada belirtilen katsayılar aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} [Q_{ij}^{(k)}] [1, z, z^2, s(z), z s(z), s(z)s(z)] dz \quad (2.73)$$

Ayrıca Hamilton ilkesinin uygulanması ile elde edilen sınır şartları çizelge 3.4'de verilmiştir.

Çizelge 2.2. Plak için sınır şartları

$x = \pm a/2$ için	$y = \pm b/2$ için
ya $u = \bar{u}$ ya da $N_x^{kl} = \bar{N}_x^{kl}$	ya $v = \bar{v}$ ya da $N_y^{kl} = \bar{N}_y^{kl}$
ya $v = \bar{v}$ ya da $N_{xy}^{kl} = \bar{N}_{xy}^{kl}$	ya $u = \bar{u}$ ya da $N_{xy}^{kl} = \bar{N}_{xy}^{kl}$
ya $w = \bar{w}$ ya da	ya $w = \bar{w}$ ya da
$M_{x,x}^{kl} + 2M_{xy,y}^{kl} = \bar{M}_{x,x}^{kl} + 2\bar{M}_{xy,y}^{kl}$	$M_{y,y}^{kl} + 2M_{yx,x}^{kl} = \bar{M}_{y,y}^{kl} + 2\bar{M}_{yx,x}^{kl}$
ya $w_{,x} = \bar{w}_{,x}$ ya da $M_x^{kl} = \bar{M}_x^{kl}$	ya $w_{,y} = \bar{w}_{,y}$ ya da $M_y^{kl} = \bar{M}_y^{kl}$
ya $u_1 = \bar{u}_1$ ya da $M_x^{kd} = \bar{M}_x^{kd}$	ya $u_1 = \bar{u}_1$ ya da $M_x^{kd} = \bar{M}_x^{kd}$
ya $v = v_1$ ya da $M_{xy}^{kd} = \bar{M}_{xy}^{kd}$	ya $u_1 = \bar{u}_1$ ya da $M_y^{kd} = \bar{M}_y^{kd}$

Burada  $i,j=1,2,4,5,6$  alınır ve yer değiştirmeler ve d6nme terimlerinden oluşan diferansiyel denklem 2.64 aşağıdaki şekilde denklem 2.71 de verilen terimler cinsinden hareket denklemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}
& A_{11}u_{,xx} - B_{11}w_{,xxx} + E_{11}u_{1,xx} + A_{16}u_{,yy} + A_{16}v_{,xy} + 2B_{16}w_{,xyy} - E_{16}u_{1,yy} + \\
& A_{12}u_{,xx} - B_{12}w_{,xxx} + E_{12}u_{1,xx} + E_{16}v_{1,xy} + A_{26}u_{,yy} + A_{26}v_{,yy} - 2B_{26}w_{,xy} + \\
& E_{26}u_{1,yy} + E_{26}v_{1,xy} + A_{16}u_{,xx} - B_{16}w_{,xxx} + E_{16}u_{,xx} + A_{66}u_{,yy} + A_{66}v_{,xy} - \\
& 2B_{66}w_{,xyy} + A_{66}u_{1,yy} + E_{66}v_{1,xy} = (\rho_0u - \rho_1w_{,x} - \rho_3u_1)_{,tt} \quad (2.74a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{12}v_{,yy} - B_{12}w_{,yyy} + E_{12}v_{1,xy} + A_{16}u_{,yx} - A_{16}v_{,xx} + 2B_{16}w_{,xyx} + E_{16}u_{1,yx} + \\
& E_{16}v_{1,xx} + A_{22}v_{,yy} - B_{22}w_{,yyy} + E_{22}v_{1,yy} + A_{26}u_{,yx} + A_{26}v_{,yx} - 2B_{26}w_{,xyx} + \\
& B_{26}u_{1,yx} + E_{26}v_{1,xx} + A_{66}u_{,yx} + A_{66}v_{,xx} - 2B_{66}w_{,xyx} + E_{66}u_{1,yx} + E_{66}v_{1,xx} + A_{26}v_{,yy} - \\
& B_{26}w_{,yyy} + E_{26}v_{1,yy} = (\rho_0v - \rho_1w_{,y} - \rho_3v_1)_{,tt} \quad (2.74b)
\end{aligned}$$

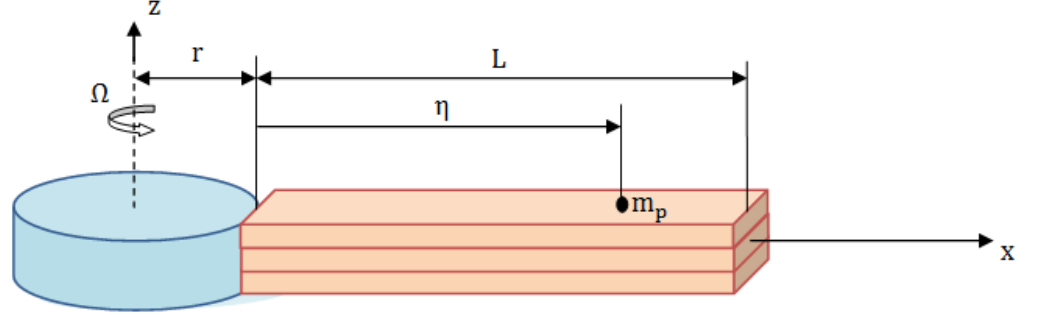
$$\begin{aligned}
& B_{11}u_{,xxx} - D_{11}w_{,xxxx} + F_{11}u_{1,xxx} + B_{12}v_{,yyy} - D_{12}w_{,yyxx} + F_{12}v_{1,yyy} + 2B_{16}u_{,yxy} + \\
& 2B_{16}v_{,xxy} - 4D_{16}w_{,xyxy} + 2F_{16}u_{1,yxy} + 2F_{16}v_{1,xyy} + B_{12}u_{,xxx} - D_{12}w_{,xxxx} + \\
& F_{12}u_{1,xxx} + B_{22}v_{,yyy} - D_{22}w_{,yyyx} + F_{22}v_{1,yyy} + 2B_{26}u_{,yxy} + 2B_{26}v_{,xyy} - \\
& 4D_{26}w_{,xyxy} + 2F_{26}u_{1,yxy} + 2F_{26}v_{1,xyy} + B_{16}u_{,xxx} - D_{16}w_{,xxxx} + F_{16}u_{1,xxx} + A_{26}v_{,yxx} - \\
& D_{26}w_{,yyxx} + F_{26}v_{1,yxx} + 2B_{66}u_{,yxy} + 2B_{66}v_{,xxy} - 4D_{66}w_{,xyxy} + F_{66}u_{1,yxy} + \\
& 2F_{66}v_{1,xyy} = (\rho_1u_{,x} - \rho_2w_{,xx} - \rho_1u_{1,x} + \rho_1v_{,y} - \rho_2w_{,yy} + \rho_4v_{1,y} + \rho_0w)_{,tt} \quad (2.74c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E_{11}u_{,xx} - F_{11}w_{,xxx} + H_{11}u_{1,xx} + E_{16}u_{,yy} + E_{16}v_{,xy} - 2F_{16}w_{,xyy} + H_{16}u_{1,yy} + \\
& H_{16}v_{1,xy} + E_{12}u_{,xy} - F_{12}w_{,xxx} + H_{12}u_{1,xx} + E_{26}u_{,yy} + E_{26}v_{,yy} - 2F_{26}w_{,xyy} + \\
& H_{26}u_{1,yy} + H_{26}v_{1,xy} + E_{16}u_{,xx} - F_{16}w_{,xxx} + H_{16}u_{1,xx} + E_{66}u_{,yy} + E_{66}v_{,xy} - \\
& 2F_{66}w_{,xyy} + H_{66}u_{1,yy} + H_{66}v_{1,xy} - A_{45}u_1 - A_{55}u_1 = (\rho_3u - \rho_4w_{,x} - \rho_5u_1)_{,tt} \quad (2.74d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E_{12}u_{,yx} - F_{12}w_{,yyx} + H_{12}v_{1,yx} + E_{16}u_{,yx} + E_{16}v_{,xx} - 2F_{16}w_{,xyx} + H_{16}u_{1,yx} + \\
& H_{16}v_{1,xx} + E_{22}v_{,yy} - F_{22}w_{,yyy} + H_{22}v_{1,yy} + E_{26}u_{,yx} - E_{26}v_{,yx} - 2F_{26}w_{,xyx} + \\
& H_{26}u_{1,yx} + H_{26}v_{1,xx} + E_{26}v_{,yy} - F_{26}w_{,yyy} + H_{66}v_{1,yy} + E_{66}u_{,yx} + E_{66}v_{,xx} - \\
& 2F_{66}w_{,xyx} + H_{66}u_{1,yx} + H_{66}v_{1,xx} - A_{44}v_1 - A_{45}v_1 = (\rho_3v - \rho_4w_{,y} - \rho_5v_1)_{,tt} \quad (2.74e)
\end{aligned}$$

Bu alışma için dik katmanlı kompozit plak ve kiriş yapıları g6z 6n6ne alınacağından katılık bileşenleri  $A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = E_{16} = E_{26} = F_{16} = F_{26} = H_{16} = H_{26} = B_{12} = B_{26} = B_{66} = 0$  olduğundan bazı bileşenler azalır.

## 2.8. Döner kompozit kirişin hareket denkleminin elde edilmesi



Şekil 2.13. Döner kompozit kiriş modeli

L uzunluğunda, h yüksekliğinde ve b kalınlığında bir kompozit kiriş Şekil 2.13 de gösterilmiştir. Kirişin lineer elastik dikine izotropik katmanlardan oluştuğu varsayılmıştır. Kök kısmı r yarıçapında ve rijit olduğu kabul edilerek, kompozit kiriş verilen bir  $\Omega$  açısal hızıyla sabit bir z eksenini etrafında dönmekte olduğu varsayılacaktır. Her bir katman için gerilmeler aşağıdaki gibi verilebilir. Denklem (2.57)'de gerilme-birim şekil değiştirme bağıntısı plak için verilen eşitlikten kiriş için gerilme-birim şekil değiştirme bağıntısı aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^{(k)} \\ \tau_{xz}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^{(k)} & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{55}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

Burada  $\bar{Q}_{ij}$  elastik indirgenmiş dönüşmüş katılığı göstermektedir. Yer değiştirme alanları ise kompozit plak için yazılan denklem 2.55a-2.55c göz önüne alınarak kompozit kiriş haline indirgenir ve aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$U(x, z; t) = u(x; t) - zw_{,x} + s(z)u_1(x; t) \quad (2.76a)$$

$$V(x, z; t) = 0 \quad (2.76b)$$

$$W(x, z; t) = w(x, z; t) \quad (2.76c)$$

Burada U, V ve W sırasıyla x y z yönlerindeki yer değiştirme bileşenlerini.  $u_1$  ise orta düzlemdeki kayma şekil değişimini vermektedir. Yer değiştirme alanlarının türevleri alınarak kinematik denklemler aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\varepsilon_{xx} = u_{,x} - zw_{,xx} + s(z)u_{1,x} \quad (2.77)$$

$$\gamma_{xz} = \dot{s}u_1 \quad (2.78)$$

Bu çalışmada, Euler-Bernouli kiriş teorisi, Mindlin 1.mertebe kayma şekil değiştirme teorisi (BMKDT) Parabolik kayma şekil değiştirme teorisi (PKDT) kullanılmıştır. Bu teorilere göre şekil fonksiyonları  $s(z)$  aşağıdaki gibi seçilmiştir.

$$\text{EBT} : s(z) = 0 \quad (2.79a)$$

$$\text{BMKDT} : s(z) = z \quad (2.79b)$$

$$\text{PKDT} : s(z) = z(1 - 4z^2/3h^2) \quad (2.79c)$$

Kuvvet ve moment ve kayma kuvveti bileşenleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\begin{bmatrix} N_x^{kl} \\ M_x^{kl} \\ M_x^{kd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & E_{11} \\ & D_{11} & F_{11} \\ \text{Sim} & & H_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,x} \\ -w_{,xx} \\ u_{1,x} \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

$$[Q_x^{kd}] = [A_{55}][u_1] \quad (2.81)$$

Bu tezde probleme uygun olarak kompozit kirişin enerjileri aşağıdaki gibi alınmıştır. Kompozit kirişin birim şekil değiştirme potansiyel enerjisi 2.61 denkleminde indirgenerek

$$U_c = \frac{1}{2} \int_{V_H} (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dV_H \quad (2.82)$$

denklemini elde edilir. Kompozit kirişin dönmeden dolayı oluşan potansiyel enerjisi aşağıdaki gibi ifade edilir (Auciello, 2013b)

$$U_T = \frac{1}{2} \int_0^L T(x) w_{,x}^2 dx \quad (2.83)$$

Kompozit kirişin dönmesi sebebiyle oluşan merkezkaç kuvveti  $T(x)$  aşağıdaki gibi tanımlanır

$$T(x) = \int_x^L \rho A \Omega^2 (r + x) dx \quad (2.84)$$

Burada  $r$  kök yarıçapını ve  $\Omega$  ise açısal dönme frekansını gösterir. Kesit alanı  $A=bh$  'tır. ve bu çalışma için  $b=1$  alınmıştır. Kiriş için kinetik enerji

$$T_c = \frac{1}{2} \int_{V_H} \rho (U_{,t}^2 + W_{,t}^2) dV_H \quad (2.85)$$

ve eklenen kütle sebebiyle sahip olunan potansiyel enerji

$$U_m = \frac{1}{2} \int_0^{x_p} m_p \Omega^2 (r + x_p) w_{,x}^2 dx \quad (2.86)$$

olarak verilir. Dönen kompozit kirişin hareket denklemleri elde etmek için Hamilton prensipleri kullanılarak aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$N_{x,x}^{kl} = (\rho_0 u - \rho_1 w_{,x} + \rho_3 u_1)_{,tt} \quad (2.87a)$$

$$M_{x,xx}^{kl} = (\rho_1 u_{,x} - \rho_2 w_{,xx} + \rho_4 u_{1,x} + \rho_0 w)_{,tt} - (Tw_{,x})_{,x} + m_p \Omega^2 (r + x_p) w_{,xx} \quad (2.87b)$$

$$M_{x,x}^{kd} - Q_x^{kd} = (\rho_3 u - \rho_4 w_{,x} + \rho_5 u_1)_{,tt} \quad (2.87c)$$

Hamilton ilkesi yardımıyla Çizelge 2.3'te verilen sınır şartları belirlenmiştir.

Çizelge 2.3. Kiriş için sınır şartları

ya $u = \bar{u}$ ya da $N_x^{kl} = \bar{N}_x^{kl}$
ya $w = \bar{w}$ ya da $M_{x,x}^{kl} = \bar{M}_{x,x}^{kl}$
ya $w_{,x} = \bar{w}_{,x}$ ya da $M_{x,x}^{kl} = \bar{M}_{x,x}^{kl}$
ya $u_1 = \bar{u}_1$ ya da $M_x^{kd} = \bar{M}_{x,x}^{kd}$

Ayrıca rijitlikler cinsinden kompozit kirişin hareket denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir

$$A_{11} u_{,xx} - B_{11} w_{,xxx} + E_{11} u_{1,xx} = (\rho_0 u - \rho_1 w_{,x} + \rho_3 u_1)_{,tt} \quad (2.88a)$$

$$B_{11} u_{,xxx} - D_{11} w_{,xxxx} + F_{11} u_{1,xxx} = (\rho_1 u_{,x} - \rho_2 w_{,xx} + \rho_4 u_{1,x} + \rho_0 w)_{,tt} - (Tw_{,x})_{,x} + m_p \Omega^2 (r + x) w_{,xx} \quad (2.88b)$$

$$E_{11} u_{,xx} - F_{11} w_{,xxx} + H_{11} u_{1,xx} = (\rho_3 u - \rho_4 w_{,x} + \rho_5 u_1)_{,tt} \quad (2.88c)$$

Eşitlik (2.88) de verilen hareket denklemleri eşitliğin sağ tarafındaki T terimi sebebiyle değişken katsayılı diferansiyel denklem sınıfına girmektedir. Bu denklemlerin genel çözümü bulmak analitik olarak bulmak pek mümkün değildir. Bu nedenle bu çalışmada bir enerji yöntemi olan Ritz Yöntemi ve Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

kullanılacaktır. (<http://nptel.ac.in/courses/112104116/4>; Langhaar, 1962; Ozdemir & Kaya, 2006; J. Reddy, 2002)



## BÖLÜM 3

### DÖNEN KATMANLI KOMPOZİT KİRİŞ VE PLAK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN RITZ VE DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMLERİ

#### 3.1.Giriş

Bu bölümde, bu tez kapsamında yer alan dönen katmanlı ve izotrop kiriş ve plakların titreşimlerini incelemek için kullanılan Ritz yöntemi ve Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi açıklanacaktır. Ardından her iki yöntem kullanılarak kiriş ve plak problemlerine uygulanacaktır.

#### 3.2. Ritz Yöntemi

Bir önceki bölümün son kısmında belirtildiği üzere, dönen katmanlı kompozit kiriş ve plak denklemleri değişken katsayılı diferansiyel denklemlerdir. Değişken katsayılı diferansiyel denklemlerin tam çözümünü doğrudan bulmak mümkün değildir. Bu yüzden çözümü elde etmek için yaklaşık yöntemler kullanılmaktadır. Ritz yöntemi (Ritz, 1909) bu yöntemlerden biridir ve ilk olarak 1908 yılında isviçreli fizikçi Walther Ritz tarafından ortaya atılan varyasyonel bir çözüm yöntemidir. Ritz yöntemi integral formülasyonu kullanılarak sınır değer problemlerine yaklaşık bir çözüm verir. Bu enerji formülasyonu bilinen fonksiyonlar ve bilinmeyen katsayıları içeren serileri içerir. İntegral formülasyon ile belirsiz katsayılar cinsinden bir dizi cebirsel denklemler sistemi elde edilir. Tam sonucu almak için genellikle sonlu bir seriye ihtiyaç vardır. Bu sonlu seri normalde yaklaşık çözümü verir. Bu sebeple yeterli sayıda terim alınarak tam sonuca oldukça hassas yaklaşılabılır (Langhaar, 1962). Ancak yeterli sayıda terim belirlenirken oluşturulan katsayılar matrisindeki hesaplamalar da terim sayısının artmasıyla doğru sonuçlar yerine hatalı ve beklenmeyen sonuçlar verebilmektedir. Bu durumdan dolayı katsayılar matrisinin elemanları çoğunlukla  $6 \times 6$  ve en fazlada  $7 \times 7$  alınmıştır. Bu hatanın nedeni katsayılar matrisindeki küçük değişimlerin elde edilen sonuçlarda oldukça büyük farklılıklara ve sapmalara yol açmasıdır. Bu kusurlu durum (ill-



conditioning) olarak adlandırılır. Ritz yöntemi yanı sıra diferansiyel dönüşüm yöntemi kullanılarak izotrop, kompozit EBT ve BMKDT teorileri için elde edilen frekans değerlerinin doğruluğu ve yakınsaklığı kontrol edilmiştir.

### 3.2.1. Dönen dik katmanlı kompozit kiriş için Ritz yöntemi ile çözümü

Dönmeyen kompozit kirişin hareket denklemi sabit katsayılı diferansiyel denklem iken dönen kompozit kiriş denklemleri değişken katsayılı diferansiyel denklemdir. Değişken katsayılı diferansiyel denklemlerin tam çözümü genel olarak doğrudan bulunamaz. Bu sebeple birçok araştırmacı tarafından çözümü elde etmek için yaklaşık yöntemler kullanılır. Yaklaşık yöntemler çözümlerin bulunmasında kiriş ve plaklara hızlı ve doğru olarak uygulanabilir.

Öncelikle, Ritz yöntemini uygulayabilmek için enerji ifadelerinin maksimumlarının elde edilmesi gerekir. Öncelikle dönen kompozit bir kiriş için potansiyel enerji ve kinetik enerji ifadeleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$U_c = \frac{1}{2} \int_0^L \{A_{11}u_{,x}^2 - 2B_{11}w_{,xx}u_{,x} + 2E_{11}u_{1,x}u_{,x} + D_{11}w_{,xx}^2 - 2F_{11}u_{1,x}w_{,xx} + H_{11}u_{1,x}^2 + A_{55}u_1^2\} dx \quad (3.1a)$$

Dönmeden dolayı meydana gelen merkezkaç kuvvetinin potansiyel enerjisi

$$U_T = \frac{1}{2} \int_0^L \{T(x)(w_{,x})^2\} dx \quad (3.1b)$$

Kompozit kirişin dönmesi sebebiyle oluşan merkezkaç kuvveti  $T(x)$  aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$T(x) = \int_x^L \rho A \Omega^2 (r + x) dx \quad (3.1c)$$

Eklenen kütlelerin dönme etkisi ile oluşan merkezkaç kuvvetinden dolayı oluşan potansiyel enerjisi

$$U_m = \frac{1}{2} \int_0^{x_p} \{m_p \Omega^2 (r + x_p) w_{,x}^2\} dx \quad (3.1d)$$

olarak yazılabilir. Katmanlı kompozit kiriş için kinetik enerji

$$T_c = \frac{1}{2} \int_{V_H} \rho \omega^2 (u^2 - 2zuw_{,x} + 2us(z)u_1 + z^2w_{,x}^2 - 2zs(z)u_1w_{,x} + s(z)^2u_1^2 + w^2) dV_H \quad (3.2a)$$

kompozit kirişe ait noktasal kütle eklenmesi durumunda kütlelere ait kinetik enerji ise

$$T_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_p (w_{,t})^2 \quad (3.2b)$$

şeklinde olarak ifade edilir. Ritz yönteminde seçilen yer değiştirme alanı bileşenleri problemin en azından geometrik sınır şartlarını sağlamalı ve seçilen yer değiştirme alanı tam küme olmalıdır. Bu çalışmada aşağıdaki gibi cebirsel polinom grubu yer değiştirme alanı olarak seçilmiştir (Leissa, 1969).

$$u(\xi, t) = \sum_{i=i_0}^I A_i X_i(\xi) \sin \omega t \quad (3.3a)$$

$$u_1(\xi, t) = \sum_{p=p_0}^P D_p X_p(\xi) \sin \omega t \quad (3.3b)$$

$$w(\xi, t) = \sum_{m=m_0}^M C_m X_m(\xi) \sin \omega t \quad (3.3c)$$

$\xi = (r + x)/L$  şeklinde tanımlanmıştır ve bu ifadelerdeki  $X_f$  polinomları aşağıdaki gibi seçilmiştir.

$$X_f = \xi^f (\xi - 1)^{B_i}, \quad (f = i, p, m) \quad (3.4)$$

$A_i$ ,  $D_p$  ve  $C_m$  ise bilinmeyen belirsiz katsayıları tanımlar.  $B_i$  üst gösterimi ise kirişin uç noktaları için sınır şartlarına bağlı olarak belirlenen katsayıdır ve Çizelge 3.1'de verilmiştir. Sınır şartlarına bağlı olarak yer değiştirme alanı başlangıç indisleri ise Çizelge 3.3'te verilmiştir. Burada birinci harf ve ikinci harf sırasıyla  $\xi = 0$  ve  $\xi = 1$  deki uçlar için sınır şartlarını gösterir. Buradan 3.3a-3.3c denklemlerinin maksimumları düşünülerek, enerjilerin maksimumları toplamı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$(U_{top})_{maks} = (U_c)_{maks} + (U_T)_{maks} + (U_m)_{maks} \quad (3.5)$$

ve

$$(T_{top})_{maks} = (T_c)_{maks} + (T_m)_{maks} \quad (3.6)$$

Çizelge 3.1. Cebirsel polinom grubu için kullanılan  $B_i$  katsayısının farklı sınır şartları için değerleri

Sınır koşulları	$B_i$
Serbest (S)	0
Basit destekli (B)	1
Ankastre (A)	2

Kiriş için kinematik sınır şartları ve sınır şartları yer değiştirme alanı indisleri sırasıyla aşağıda verilmiştir.

Çizelge 3.2. Kinematik sınır şartları

Serbest(S)	$u \neq 0, u_1 \neq 0, w \neq 0$
Basit destekli(B)	$u \neq 0, u_1 \neq 0, w = 0$
Ankastre (A)	$u = 0, u_1 = 0, w = w, \xi = 0$

Çizelge 3.3. Sınır koşulları için yerdeğiştirme alanı indisleri

Sınır şartları	$i_0$	$p_0$	$m_0$
B-B	0	0	1
A-S	1	1	2
A-A	1	1	2

Ritz yöntemi gereği enerji farklarının belirsiz katsayılarla göre minimizasyonu aşağıdaki gibi yazılır (Aydogdu, 2006; Qatu, 1991).

$$\frac{\partial((U_{top})_{maks} - (T_{top})_{maks})}{A_i} = 0, \quad i = i_0, \dots, I \quad (3.7a)$$

$$\frac{\partial((U_{top})_{maks} - (T_{top})_{maks})}{D_p} = 0, \quad p = p_0, \dots, P \quad (3.7b)$$

$$\frac{\partial((U_{top})_{maks} - (T_{top})_{maks})}{C_m} = 0, \quad m = m_0, \dots, M \quad (3.7c)$$

Bu çalışmada, serilerinin üst limitleri eşit seçilmiştir ( $I=P=M$ ). 3.6 eşitliklerinde verilen işlemler ile aşağıdaki genelleştirilmiş özdeğer problemi elde edilir.

$$\{[K] - \omega^2[M]\}\{\Delta\} = 0 \quad (3.8)$$

Buradaki eşitlikte,  $[K]$  ve  $[M]$  sırasıyla katılık matrisi ve kütle matrisine karşılık gelir.  $\{\Delta\}$  ise denklem 3.4'deki bilinmeyen katsayılarından oluşan sütun vektörünü gösterir. Denklem 3.8'deki katsayılar matrisinin determinantını sıfır yapan değerler

problemin özdeğerlerini verir ve titreşim frekanslarına karşılık gelirler. Boyutsuz parametreler ise aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Kompozitler için boyutsuz frekans parametresi

$$\lambda = \sqrt{\frac{\rho\omega^2 L^4}{E_2 h^2}}, \sqrt{\frac{\rho\omega^2 L^4}{E_1 h^2}} \quad (3.9)$$

izotrop malzeme için

$$\lambda = \sqrt{\frac{\rho\omega^2 L^4}{EI}} \quad (3.10)$$

olarak alınmıştır. Boyutsuz dönme parametresi ise kompozit için,

$$\gamma = \sqrt{\frac{\rho\Omega^2 L^4}{E_2 h^2}}, \sqrt{\frac{\rho\Omega^2 L^4}{E_1 h^2}} \quad (3.11)$$

izotrop malzeme için ise

$$\gamma = \sqrt{\frac{\rho\Omega^2 L^4}{EI}} \quad (3.12)$$

dir.

Kök oranı

$$\delta = \frac{r}{L} \quad (3.13)$$

ve kütle eklenmiş durumda kütle oranı ise  $\alpha$  ile gösterilip aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\alpha = \frac{m_p}{\rho AL} \quad (3.14)$$

Eklenmiş kütle için yer ise  $\eta = x_p/L$  olarak alınmıştır.

### 3.2.2. Katmanlı kompozit kirişlerde katmanlar arası düşey kayma gerilmelerinin sürekliliği

Katmanlar arası kayma gerilmeleri ve katmanlar arası normal gerilmeler özellikle kompozitlerin hasar analizi için oldukça önemlidir. Birçok araştırma katmanlar arası gerilmelerin büyük olması, kompozitin ara yüzeylerinde hasara neden olabileceği gerçeğini ortaya atmıştır. Katmanlar arası gerilmelerin çok önemli olmasına rağmen büyüklükleri düzlem içi bileşenlere göre oldukça düşüktür.

Katmanlar arası gerilmeleri elde etmenin yollarından biri çok katmanlı teoriyi katmanların süreklilik denklemleri ile birlikte kullanmaktır. Katmanlar arası süreklilik koşulunu sağlayabilmek için yer değiştirme alanı, gerilme-yer değiştirme bağıntılarına ve ardından bünye denklemlerine etki ettirilir. Bu nedenle tek sayıda lineer elastik katmanlardan oluşan dik katmanlı kompozit yapılar için önceden Timarci ve Soldatos un (Timarci & Soldatos, 1995) un simetrik dik katmanlı kabuk için geliştirdikleri şekil fonksiyonları, kiriş için aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\varphi_1(z) = [A_k s_1(z) + B_k] \quad (3.15)$$

Burada  $A_k = \frac{\bar{Q}_{55}^{k-1}}{\bar{Q}_{55}^k} A_{k-1}$ ,  $A_0 = 1$  ve  $B_k = B_{k-1} + s_1(z_k)[A_{k-1} - A_k]$ ,  $B_0 = 1$  dir.

Katman sayısını ifade eden k negatif ve pozitif işareti orta katmanın sıfıncı katman olduğu varsayılarak sırasıyla altında ve üstünde olmasına göre adlandırılır. Burada  $\bar{Q}_{55}$  düşey kayma gerilmesi ile bağıntılı indirgenmiş katılığı gösterir.

### 3.3. Dönen dik katmanlı kompozit plağın titreşiminin Ritz yöntemi ile incelenmesi

Kompozit yapıların statik ve dinamik analizinde başlangıç aşaması yer değiştirme varsayımlarıdır. Plak için şekil değiştirme teorileri yer değiştirme ve gerilmeye dayalı teoriler olarak ikiye ayrılabilir. Yer değiştirme tabanlı teorilerde klasik plak teorisi ve kayma şekil değiştirme plak teorisi olarak ayrılabilir. Düşey kayma gerilmesi bileşenleri klasik teoride ihmal edilir. Klasik plak teorisi kalın kompozit plaklar için oldukça hatalı sonuçlar verdiği için yalnızca ince plaklar için kullanılabilir. Plakların serbest titreşim problemlerini çözmek içinde Ritz yöntemi kullanılabilir. Kirişlerde olduğu gibi kompozit plaklar için de enerjilerin maksimum değerlerinin farkı alınarak bilinmeyen katsayılar göre denklem sistemleri elde edilecektir. Şekil 2.12 de

gösterildiği gibi a,b ve h boyutlarında bir katmanlı kompozit plak göz önüne alınsın. Katmanlı kompozit kiriş analizine benzer şekilde yer değiştirme alanı aşağıdaki biçimde seçilmiştir.

$$u(\xi, \kappa; t) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J A_{ij} X_i(\xi) Y_j(\kappa) \sin \omega t \quad (3.16a)$$

$$v(\xi, \kappa; t) = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L B_{kl} X_k(\xi) Y_l(\kappa) \sin \omega t \quad (3.16b)$$

$$w(\xi, \kappa; t) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N C_{mn} X_m(\xi) Y_n(\kappa) \sin \omega t \quad (3.16c)$$

$$u_1(\xi, \kappa; t) = \sum_{p=0}^P \sum_{q=0}^Q D_{pq} X_p(\xi) Y_q(\kappa) \sin \omega t \quad (3.16d)$$

$$v_1(\xi, \kappa; t) = \sum_{r=0}^R \sum_{s=0}^S E_{rs} X_r(\xi) Y_s(\kappa) \sin \omega t \quad (3.16e)$$

Burada  $\xi = (r + x)/a$  ve  $\kappa = y/b$  eşittir.

$$X_f(\xi) = \xi^f (\xi + 1)^{B_1} (\xi - 1)^{B_3} \quad f = i, k, m, p, r \quad (3.17a)$$

$$Y_g(\kappa) = \kappa^g (\kappa + 1)^{B_2} (\kappa - 1)^{B_4} \quad g = j, l, n, q, s \quad (3.17b)$$

Bu denklemlerde  $A_{ij}, B_{kl}, C_{mn}, D_{pq}, E_{rs}$  bilinmeyen sabit katsayılardır.  $B_i$  katsayısı sınır şartlarına göre yazılan katsayıdır (Çizelge 3.1) ve i saat yönünün tersi yönde kenar numaralarını gösteren alt gösterimdir.

### 3.4. Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (DDY)

İlk olarak 1986 yılında Zhou (Zhou, 1986) tarafından önerilen, elektrik devreleri için uygulanan bu yöntem daha sonrasında adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözmek için kullanılmaya başlanmıştır. Yöntemin temeli Taylor serisi tabanlı bir açılımı içeren bir dönüşüm ile diferansiyel denklemleri belli kurallar ile analitik olarak çözülebilir hale dönüştüren bir yöntemdir. Bu yöntemde, denklem tekrarlama fonksiyonları olarak yazılır ve sınır koşullarının da diferansiyel dönüşüm yöntemi için verilen kurallara göre dönüşümü yapılır. Bu yöntem sınır koşullarını da göz önüne alınarak bir noktadaki analitik fonksiyonun n. dereceden türevini verir. Bu sebeple yeterli sayıda terim alınıp gerçek sonuca yaklaşımı öngören çözüm elde edilir.

Diferansiyel dönüşüm metodu diğer yarı analitik yöntemlerden üstünlükleri vardır. Kuvvet serisi yaklaşımlarına göre daha kesin sonuçlar verir. Basit iterasyon ile türevlerin hesaplanmasına ihtiyaç duyulmadan doğru sonuca kolaylıkla yaklaşım sağlar. Malzeme derecelendirilmesi ve kesit alanını değişmesi konusunda herhangi bir kısıtlamaya imkan vermediğinden homojen olmayan yapıların mekaniğinde de problem çözümlerini kolaylıkla karşılamaktadır. Tek değişkenli f fonksiyonun diferansiyel dönüşümü genel olarak aşağıdaki gibi yazılabilir

$$F[K] = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \quad (3.18)$$

Burada, f esas fonksiyonu ve F ise dönüşmüş fonksiyonu gösterir. Diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu ise aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k F[k] \quad (3.19)$$

Taylor serisinden elde edilen genel dönüşmüş fonksiyonu aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$F[K] = \frac{x^k}{k!} \left[ \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (3.20)$$

Bu yöntem çerçevesinde diferansiyel dönüşüm fonksiyonun diferansiyel denkleme uygulanacak temel matematiksel dönüşümlerini içeren çizelge aşağıda verilmiştir (Çizelge 3.4).

Çizelge 3.4. Bir boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi DDY dönüşüm kuralları

Esas fonksiyon	Dönüşmüş fonksiyon
$f(x) = g(x) \pm h(x)$	$F(K) = G(K) \pm H(K)$
$f(x) = \lambda g(x)$	$F(K) = \lambda G(K)$
$f(x) = g(x)h(x)$	$F(K) = \sum_{l=0}^K G(K-l)H(l)$
$f(x) = \frac{d^n g(x)}{dx^n}$	$F(K) = \frac{(k+n)!}{k!} G(K+n)$
$f(x) = x^n$	$F(K) = \delta(K-n) = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$

Diferansiyel dönüşüm kurallarına göre hareket denklemleri bulunduğundan sonra elde edilen denklemler sınır koşullarına göre esas fonksiyonun  $x = 0$  da ve  $x = 1$  de iken dönüşmüş denklemin sınır koşullarına göre dönüşümü Çizelge 3.2’de gösterilmiştir. Burada sınırlardaki şartlar  $x=0$  için ve  $x=1$  için esas fonksiyon olarak adlandırılan fonksiyonların dönüşümlerinin nasıl uygulanacağı ayrıntılı olarak verilmiştir. Bu tabloda 4. mertebeden diferansiyel denklemlere kadar uygulanacak kuralları göstermektedir.

Çizelge 3.5. Diferansiyel dönüşüm yöntemi için boyutsuz dönüşmüş sınır koşulları

$x = 0$		$x = 1$	
Esas fonksiyon	Dönüşmüş Sınır Koşulu	Esas fonksiyon	Dönüşmüş Sınır Koşulu
$f(0) = 0$	$F[0] = 0$	$f(1) = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} F[k]$
$\frac{df(0)}{dx} = 0$	$F[1] = 0$	$\frac{df(1)}{dx} = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} kF[k]$
$\frac{d^2f(0)}{dx^2} = 0$	$F[2] = 0$	$\frac{d^2f(1)}{dx^2} = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)F[k]$
$\frac{d^3f(0)}{dx^3} = 0$	$F[3] = 0$	$\frac{d^3f(1)}{dx^3} = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)F[k]$
$\frac{d^4f(0)}{dx^4} = 0$	$F[4] = 0$	$\frac{d^4f(1)}{dx^4} = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)(k-3)F[k]$



### 3.4.1. Diferansiyel dönüşüm yönteminin dönen katmanlı kompozit kiriş titreşim problemine uygulanması

Bu çalışmada, dönen izotrop ve kompozit kirişlerin titreşimleri EBT ve BMKDT çerçevesinde DDY kullanılarak incelenmiştir. Burada denklemler oluştururken özellikle kompozit için yazılan denklemlerde tekrarlı fonksiyonları oluşturularak denklem sistemleri elde edilmiştir. DDY ile dönen izotrop EBT kirişi için dönüşmüş denklem

$$W[k+4] = (1/((k+1)(k+2)(k+3)(k+4)))(\omega^2 W[k] + \gamma^2 \delta(k+1)(k+2) W[k+2] + \gamma^2 0.5(k+1)(k+2)W[k+2] - \gamma^2 \delta k(k+1)W[k+1] - \gamma^2 0.5 k^2 W[k] - \gamma^2 \delta(k+1)W[k+1] - \gamma^2 0.5 k W[k]) \quad (3.21)$$

olarak elde edilir. Dönen EBT ile kompozit kirişi için diferansiyel dönüşüm uygulanırsa aşağıdaki dönüşmüş denklem elde edilir.

$$W[k+4] = (1/((k+1)(k+2)(k+3)(k+4)))(\frac{\rho_0 E2 \times h^2}{\rho D11} \omega^2 W[k] + \frac{\rho_0 E2 \times h^2}{\rho D11} \gamma^2 \delta(k+1)(k+2)W[k+2] + \frac{\rho_0 E2 \times h^2}{\rho D11} \gamma^2 0.5(k+1)(k+2)W[k+2] - \frac{\rho_0 E2 \times h^2}{\rho D11} \gamma^2 \delta k(k+1)W[k+1] - \frac{\rho_0 E2 \times h^2}{\rho D11} \gamma^2 0.5 k^2 W[k] - \frac{\rho_0 E2 \times h^2}{\rho D11} \gamma^2 \delta(k+1)W[k+1] - \frac{\rho_0 E2 \times h^2}{\rho D11} \gamma^2 0.5 k W[k]) \quad (3.22)$$

BMKDT kullanılarak kompozit kiriş için elde edilen dönüşmüş denklemler tekrarlı fonksiyonları halinde yazılarak aşağıdaki gibi dönüşmüş denklem sistemi halinde verilmiştir.

$$U[k+2] = \left(\frac{1}{\alpha^2}\right) \left(\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) \left(-1 \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \left(\frac{E2 \times h^2}{D11}\right) (\lambda^2) U[k]\right) \quad (3.23a)$$

$$F[k+1] = \left(\frac{1}{(k+1)}\right) \left(\frac{1}{T^2}\right) \left(-\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \left(\frac{E2 \times h^2}{D11}\right) (\lambda^2) W[k] - \frac{\rho_0 E2 \times h^2}{\rho D11} \gamma^2 \delta(k+1)(k+2)W[k+2] - \frac{\rho_0 E2 \times h^2}{\rho D11} \gamma^2 0.5(k+1)(k+2)W[k+2] + \frac{\rho_0 E2 \times h^2}{\rho D11} \gamma^2 \delta k(k+1)W[k+1] + \frac{\rho_0 E2 \times h^2}{\rho D11} \gamma^2 0.5 k^2 W[k] + \frac{\rho_0 E2 \times h^2}{\rho D11} \gamma^2 \delta(k+1)W[k+1] + \frac{\rho_0 E2 \times h^2}{\rho D11} \gamma^2 0.5 k W[k]\right) \quad (3.23b)$$

$$W[k+3] =$$

$$\left(\frac{1}{((k+1)(k+2)(k+3))}\right) \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \left(\frac{E2 \times h^2}{D11}\right) \frac{\gamma^2 \times \delta}{A_{55} L^2 / D11} + \frac{\rho_0}{\rho} \left(\frac{E2 \times h^2}{D11}\right) \frac{\gamma^2 \times 0.5}{A_{55} L^2 / D11}}\right) \left(-\left(\frac{\rho_{011}}{(\rho \times L^2)}\right) \left(\frac{E2 \times h^2}{D11}\right) (\lambda^2) (k+3) W[k+3] + \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \left(\frac{E2 \times h^2}{D11}\right) (\lambda^2) W[k] + \frac{\rho_0 E2 \times h^2}{\rho D11} \gamma^2 \delta(k+1)(k+2)W[k+2] + \frac{\rho_0 E2 \times h^2}{\rho D11} \gamma^2 0.5(k+1)(k+2)W[k+2] - \frac{\rho_0 E2 \times h^2}{\rho D11} \gamma^2 \delta k(k+1)W[k+1] + \frac{\rho_0 E2 \times h^2}{\rho D11} \gamma^2 0.5 k^2 W[k] - \frac{\rho_0 E2 \times h^2}{\rho D11} \gamma^2 \delta(k+1)W[k+1] - \frac{\rho_0 E2 \times h^2}{\rho D11} \gamma^2 0.5 k W[k]\right)$$

$$\begin{aligned}
& 1)W[k + 1] + \left(\frac{ro02}{(ro \times L^2)}\right) \left(\frac{E2 \times h^2}{D11}\right) (\lambda^2)F[k] - A_{55}L^2/D11F[k] - \\
& \frac{1}{A_{55}L^2/D11} \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \left(\frac{E2 \times h^2}{D11}\right) (\lambda^2)(k + 1)W[k + 1] + \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \left(\frac{E2 \times h^2}{D11}\right) \frac{1}{A_{55}L^2/D11} \gamma^2 \delta k(k + 1)(k + \\
& 2)W[k + 2] + \frac{\rho_0}{\rho} \left(\frac{E2 \times h^2}{D11}\right) \frac{1}{A_{55}L^2/D11} \gamma^2 0.5 k^2(k + 1)W[k + 1] + \\
& \frac{\rho_0}{\rho} \frac{E2 \times h^2}{D11} \frac{1}{A_{55}L^2/D11} \gamma^2 \delta(k + 1)(k + 2)W[k + 2] + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{E2 \times h^2}{D11} \frac{1}{A_{55}L^2/D11} \gamma^2 0.5 k(k + \\
& 1)W[k + 1]) \tag{3.23c}
\end{aligned}$$

olarak dönüşmüş denklem sistemi elde edilir. Burada k iterasyon sayısını gösterir.

### 3.4.2. DDY yöntemi ile dönüşmüş sınır şartları

#### 3.4.2.1. İzotrop ve kompozit dönen kiriş için EBT teorisi kullanılarak DDY yöntemi sınır şartları

##### Ankastre-Serbest:

$x = 0$  da dönüştürülmüş sınır koşulları,

$$W[0] = 0, W[1] = 0, W[2] = C1, W[3] = C2 \tag{3.24a}$$

olarak verilir.

$x = 1$  da dönüştürülmüş sınır koşulları

$$\sum_{k=0}^N k(k - 1)(k - 2) W[k] = 0, \sum_{k=0}^N k(k - 1) W[k] = 0 \tag{3.24b}$$

elde edilir.

##### Ankastre-Basit:

$x = 0$  da dönüştürülmüş sınır koşulları,

$$W[0] = 0, W[1] = 0, W[2] = C1, W[3] = C2 \tag{3.25a}$$

olarak verilir.

$x = 1$  da dönüştürülmüş sınır koşulları

$$\sum_{k=0}^N k W[k] = 0, \sum_{k=0}^N k(k - 1)(k - 2)W[k] = 0 \tag{3.25b}$$

elde edilir.

**Ankastre-Ankastre:**

$x = 0$  da dönüştürülmüş sınır koşulları,

$$W[0] = 0, W[1] = 0, W[2] = C1, W[3] = C2 \quad (3.26a)$$

olarak verilir.

$x = 1$  da dönüştürülmüş sınır koşulları

$$\sum_{k=0}^N k W[k] = 0, \sum_{k=0}^N k(k-1)(k-2)W[k] = 0 \quad (3.27b)$$

elde edilir.

**Basit-Basit:**

$x = 0$  da dönüştürülmüş sınır koşulları,

$$W[0] = 0, W[1] = C1, W[2] = 0, W[3] = C2 \quad (3.28a)$$

olarak verilir.

$x = 1$  da dönüştürülmüş sınır koşulları

$$\sum_{k=0}^N W[k] = 0, \sum_{k=0}^N k(k-1)W[k] = 0 \quad (3.28b)$$

elde edilir.

**Basit-Serbest:**

$x = 0$  da dönüştürülmüş sınır koşulları,

$$W[0] = 0, W[1] = C1, W[2] = 0, W[3] = C2 \quad (3.29a)$$

olarak verilir.

$x = 1$  da dönüştürülmüş sınır koşulları

$$\sum_{k=0}^N kW[k] = 0, \sum_{k=0}^N k(k-1)(k-2)W[k] = 0 \quad (3.29b)$$

elde edilir.

### 3.4.2.2. Kompozit dönen kirişi için BMKDT teorisi kullanılarak DDY yöntemi sınır şartları

#### Ankastre-Serbest:

$x = 0$  da dönüştürülmüş sınır koşulları

$$U[0] = 0, U[1] = C1, W[0] = 0, W[1] = C2, W[2] = C3, U1[0] = C2 \quad (3.30a)$$

olarak verilir.

$x = 1$  da dönüştürülmüş sınır koşulları

$$\sum_{k=0}^N \left( \frac{A_{11}L^2}{D_{11}} \right) kU[k], \sum_{k=0}^N \left( \frac{A_{55}L^2}{D_{11}} \right) U1[k], \sum_{k=0}^N (k U1[k] - k(k-1)W[k]) \quad (3.30b)$$

elde edilir.

#### Ankastre-Basit:

$x = 0$  da dönüştürülmüş sınır koşulları

$$U[0] = 0, U[1] = C1, W[0] = 0, W[1] = C2, W[2] = C3, U1[0] = C2 \quad (3.31a)$$

olarak verilir.

$x = 1$  da dönüştürülmüş sınır koşulları

$$\sum_{k=0}^N \left( \frac{A_{11}L^2}{D_{11}} \right) U[k], \sum_{k=0}^N W[k], \sum_{k=0}^N (k U1[k] - k(k-1)W[k]) \quad (3.31b)$$

elde edilir.

#### Ankastre-Ankastre:

$x = 0$  da dönüştürülmüş sınır koşulları

$$U[0] = 0, U[1] = C1, W[0] = 0, W[1] = C2, W[2] = C3, U1[0] = C2 \quad (3.32a)$$

olarak verilir.

$x = 1$  da dönüştürülmüş sınır koşulları

$$\sum_{k=0}^N \left( \frac{A_{11}L^2}{D_{11}} \right) kU[k], \sum_{k=0}^N W[k], \sum_{k=0}^N (U1[k] - kW[k]) \quad (3.32b)$$

elde edilir.

**Basit-Basit:**

$x = 0$  da dönüştürülmüş sınır koşulları

$$U[0] = 0, U[1] = C1, W[0] = 0, W[1] = C2, W[2] = 0, U1[0] = C3 \quad (3.33a)$$

olarak verilir.

$x = 1$  da dönüştürülmüş sınır koşulları

$$\sum_{k=0}^N \left( \frac{A_{11}L^2}{D_{11}} \right) U[k], \sum_{k=0}^N W[k], \sum_{k=0}^N (k U1[k] - k(k-1)W[k]) \quad (3.33b)$$

elde edilir.

**Basit-Serbest:**

$x = 0$  da dönüştürülmüş sınır koşulları

$$U[0] = 0, U[1] = C1, W[0] = 0, W[1] = C2, W[2] = 0, U1[0] = C3 \quad (3.34a)$$

olarak verilir.

$x = 1$  da dönüştürülmüş sınır koşulları

$$\sum_{k=0}^N \left( \frac{A_{11}L^2}{D_{11}} \right) kU[k], \sum_{k=0}^N \left( \frac{A_{55}L^2}{D_{11}} \right) U1[k], \sum_{k=0}^N (k U1[k] - k(k-1)W[k]) \quad (3.34b)$$

Eğer bağlı kütle için  $x=1$  de serbest uç

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \left( \frac{A_{11}L^2}{D_{11}} \right) kU[k], \left( \frac{A_{55}L^2}{D_{11}} \right) \sum_{k=0}^n F[k] - \sum_{k=0}^n h \frac{E1 \times h^2}{D_{11}} \alpha \lambda^2 W[k], \sum_{k=0}^n (kF[k] - k \times \\ & (k-1) \times W[k]) - \sum_{k=0}^n 0.5 \times h \times \frac{E1 \times h^2}{D_{11}} \times \alpha \times \text{sigma}^2 \times \lambda^2 \times (F[k] - k \times W[k]) \end{aligned} \quad (3.35)$$

burada sigma,  $k_j/L$  jirasyon yarıçapının kirişin uzunluğuna oranını gösterir. Burada  $i$  özdeğerin numarasını göstermektedir. % Yakınsama ise yakınsama derecesini gösterir. Yakınsama derecesinin oldukça küçük olduğu bir değer için N sayısı belirlenir. Burada N sayısı tam sonuca yakınsayan yeterli terim sayısını gösterir. Denklem 3.18'de hareket denklemini sınır şartları göz önüne alınarak aşağıdaki öz değer matrisi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.36)$$

Burada [M] matris elemanları bilinmeyen katsayılara (C1,C2 ve C3) göre sınıflandırılmış terimleri göstermektedir. Denklem 3.37'deki katsayılar matrisinin determinantını sıfır yapan değerler titreşim frekanslarına karşılık gelen özdeğerleri verecektir.

$$\begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.37)$$

## BÖLÜM 4

### SAYISAL SONUÇLAR VE TARTIŞMA

#### 4.1.Giriş

Bu bölümde, öncelikle bu tezde kullanılan Ritz ve DDY yöntemleri için yakınsama çalışmaları gösterilecek ve elde edilen veriler literatürdeki daha önceki çalışmalarla karşılaştırılacaktır. Ardından dönen izotrop kiriş, dönen kompozit kiriş, dönen kütleli kiriş ve dönen kütleli kompozit kirişin düşey yöndeki titreşimine ait frekanslar çizelgeler ve şekillerle gösterilecektir. Son olarak dönen katmanlı kompozit plaklarla ilgili olarak klasik ve kayma deformasyon plak teorileri kullanılarak düşey yöndeki frekanslar elde edilerek sunulacaktır.

Bu çalışmada, dönen yapıların titreşim probleminin çözümünde enerji farklarının minimizasyonunu temel alan Ritz yöntemi kullanılmıştır. Fortran programı yardımıyla, dönen yapılarda en çok karşılaşılan ve incelenen sınır koşulu olarak ankastre-serbest (A-S) alınmıştır. Ayrıca simetrik katmanlı kompozit kirişlerde katmanlar arası düşey kayma gerilmelerinin süreklilik koşullarının sağlandığı durum için de frekans değerleri verilecektir. Çözümde kullanılan diğer yöntem olan Diferansiyel Dönüşüm Yönteminin (DDY) probleme uygulanması için tekrarlı fonksiyonları oluşturulmuş ve sınır koşulları hesaba katılarak çözüm denklemi Mathematica programı yardımıyla elde edilmiştir. DDY ile hesaplamalarda sınır koşulları ise ankastre-serbest (A-S), ankastre-ankastre (A-A), ankastre-basit (A-B), basit-basit (B-B) ve basit-serbest (B-S) olarak ele alınmıştır. Bu çalışmada BMKDT ile elde edilen sonuçlar için kayma düzeltme faktörü  $kdf=(5/6)$  olarak alınmıştır (Roark, 1954).

Bu çalışmada kullanılan malzeme özellikleri Çizelge 4.1'de gösterilmiştir. Bu tezde titreşimi incelenen malzeme türleri literatürde sıkça kullanılan grafit/epoksi, E-cam/epoksi malzemeleridir.

Çizelge 4.1. Farklı kompozit malzemelerin katmanlarındaki malzeme özellikleri

	$E_1$	$E_2$	$\nu_{12}$	$G_{12}$	$G_{13}$	$G_{23}$
Malzeme I	$E_1/E_2$ =değişken		0.25	$0.6 E_2$	$0.6 E_2$	$0.5 E_2$
Malzeme II (Grafit/Epoksi)	144.80	9.65	0.3	4.14	4.14	3.45
Malzeme III (E-Cam/Epoksi)	60.7	24.8	0.23	11.99	-	-
Malzeme IV (Grafit/Epoksi)	138	8.96	0.3	7.1	-	-

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar ile literatürde verilen sonuçlar arasındaki % farklar aşağıda verilen ifadeye göre hesaplanmaktadır.

$$\%Fark=(Literatür\ değeri-bu\ çalışma) \times 100 / \text{Literatür değeri} \quad (4.1)$$

Ayrıca yakınsama derecesini gösteren % Yakınsama aşağıdaki gibi hesaplanacaktır.

$$\%Yakınsama=(n.değer-(n-1).değer) \times 100 / n. değeri \quad (4.2)$$

#### 4.2. Dönen izotrop ve katmanlı kompozit kirişlere ait sayısal sonuçlar

Dönen katmanlı kompozit ankastre kirişin Ritz yöntemi ile elde edilen titreşim frekanslarına ait yakınsama çalışması Çizelge 4.2 de verilmiştir. Matris boyutu ( $M \times N$ ) için 1. 2. ve 3. modlarda frekans değişimleri görülmektedir. İlk üç mod için en fazla değişim %0.066 ile ikinci mod için elde edilmiştir.

Diğer bir çizelgede (Çizelge 4.3) BMKDT teorisi kullanılarak elde edilen frekanslar görülmektedir. BMKDT için de en büyük fark %0.076 2. modda bulunmuştur.

Çizelge 4.2. Dönen dik katmanlı kompozit ankastre kirişin düşey yönde ilk üç frekansının Ritz yöntemi için yakınsama çizelgesi  $E_1/E_2=40$ ,  $\delta=1$ ,  $\gamma=5$ ,  $L/h=10$  PKDT, Malzeme I

$M \times N$	1. mod	2. mod	3. mod
3×3	9.8570	30.903	79.548
4×4	9.7830	30.633	79.553
5×5	9.7450	30.417	79.551
6×6	9.7350	30.293	79.551
7×7	9.7330	30.273	79.551
% Yakınsama	0.020	0.066	0



Çizelge 4.3. Dönen dik katmanlı kompozit ankastre kirişin düşey yönde ilk üç frekansının Ritz yöntemi için yakınsama çizelgesi  $E_1/E_2=40$ ,  $\delta=1$ ,  $\gamma=5$ ,  $L/h=10$ , BMKDT, Malzeme I

M×N	1. mod	2. mod	3. mod
3×3	9.8630	30.880	78.690
4×4	9.7830	30.626	78.695
5×5	9.7430	30.329	78.693
6×6	9.7310	30.221	78.693
7×7	9.7270	30.198	78.693
% Yakınsama	0.061	0.076	0

Burada verilen iki Çizelgede de (Çizelge 4.2 ve Çizelge 4.3) elde edilen yakınsama çalışmaları ışığında 7×7 terim sayısı ile elde edilen sonuçların oldukça hassas olduğu görülmektedir. Bu nedenle bu çalışmada sunulacak olan dönen izotrop ve katmanlı kompozit kiriş titreşim frekansları 7×7 terim sayısı ile elde edilmiştir.

Ritz yöntemi yanısıra dönen izotrop ve kompozit kirişler için DDY yöntemi ile elde edilen frekans parametresi yakınsamalarını gösteren çizelgeler verilmiştir (Çizelge 4.4-4.5). Burada  $E_2$  ye bağlı olarak verilen frekans parametresinin DDY için hesaba katılan eleman sayısına göre değişimleri çizelge ile gösterilmiştir. Çizelge 4.4’de EBT teorisi kullanılarak kompozit kirişin ilk 3 frekans değeri için seri de 50 terim almak yeterli iken, ilk 5 frekans için en az 70 terim alınarak çözüm yapmanın daha yakınsak sonuçlar verdiği görülmektedir. Terim sayısı arttıkça daha fazla moda ait frekans değerleri elde edilmektedir.

Çizelge 4.4. Dönen kompozit ankastre kiriş DDY yöntemi ile EBT kullanılarak frekans yakınsama çizelgesi ( $E_1/E_2=40$ ,  $\delta=1$ ,  $\gamma=10$ )  $\lambda = \omega L^2 \sqrt{\rho/E_2 h^2}$  ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) Malzeme I

N	$\lambda$				
	1	2	3	4	5
10	6.298	-	-	-	-
20	6.307	39.526	-	-	-
30	6.307	39.527	110.677	-	-
40	6.307	39.527	110.677	216.882	359.321
<b>50</b>	6.307	39.527	110.677	216.882	358.522
60	6.307	39.527	110.677	216.822	358.522
<b>70</b>	6.307	39.527	110.677	216.822	358.522

Çizelge 4.5’de BMKDT kullanılarak kayma şekil değişimi ile frekans değerleri elde edilmiştir. Bu çizelgede dik katmanlı dönen kompozit kiriş için frekans değerleri ilk 3 frekans için en az 100 terim kullanılması ilk 5 frekans için de en az 150 terim alınması değerlerin yakınsaklığı için daha uygundur.

Çizelge 4.5. Dönen kompozit ankastre kiriş DDY yöntemi ile BMKDT kullanılarak yakınsamasını gösteren çizelge,  $E_1/E_2=40$ ,  $L/h=5$ ,  $\lambda = \omega L^2 \sqrt{\rho/E_2 h^2}$ ,  $\delta=1$ ,  $\gamma=10$ ,  $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ , Malzeme I

N	$\lambda$				
	1	2	3	4	5
10	15.938	39.661	40.842	67.361	110.26
20	15.397	37.435	40.842	66.596	91.116
30	15.278	36.883	40.842	66.409	92.780
40	15.236	36.687	40.842	66.344	93.371
50	15.220	36.608	40.842	66.319	93.580
60	15.213	36.574	40.842	66.309	93.659
70	15.209	36.559	40.842	66.305	93.692
80	15.208	36.552	40.842	66.303	93.706
90	15.207	36.548	40.842	66.302	93.712
<b>100</b>	<b>15.207</b>	<b>36.547</b>	<b>40.842</b>	66.301	93.715
110	15.207	36.546	40.842	66.301	93.717
120	15.206	36.546	40.842	66.301	93.717
130	15.206	36.545	40.842	66.301	93.718
140	15.206	36.545	40.842	66.301	93.718
<b>150</b>	<b>15.206</b>	<b>36.545</b>	<b>40.842</b>	<b>66.301</b>	<b>93.718</b>

Bu tezde kullanılan yöntemler ile elde edilen sonuçlar literatürdeki çalışmalarla karşılaştırılmıştır. Çizelge 4.6’te öncelikle izotrop ankastre kiriş için ilk 5 frekans değeri verilmiştir. Bu çalışmada Ritz ve DDY yöntemleriyle elde edilen sonuçlar ile Auciello (Auciello, 2013a) tarafından Rayleigh yöntemi ile elde edilen sonuçların uyumlu olduğu görülmüştür. Ayrıca bir ucu mafsallı diğer ucu serbest düzgün kesitli dönen kirişin düşey yönde frekansları elde edilmiş ve çizelge olarak sunulmuştur (Çizelge 4.7). Bu çizelgede bu çalışmada elde edilen frekanslar ile Wright vd. (Wright, Smith, Thresher, & Wang, 1982) çalışmaları karşılaştırılmıştır. Çizelge 4.6 ve Çizelge 4.7’te verilen tüm sonuçlarda DDY yöntemi için çözüm serilerde 100 terim alınarak hesaplanmıştır. Çizelge 4.8’de beş farklı sınır şartına sahip kiriş için elde edilen boyutsuz frekans

parametreleri literatürdekiler ile kıyaslanmıştır. Burada DDY yöntemi kullanılarak ilk üç frekans için sonuçlar literatürdeki çalışmalarla tamamen aynı sonuçlar vermiştir. Burada da serilerdeki terim sayıları 100 ve üzerinde alınmıştır.

Çizelge 4.6. İzotrop, dönen bir ankastre kirişin düşey yönde temel doğal frekanslarının literatür ile karşılaştırılması  $\lambda = \omega L^2 \sqrt{\rho h/EI}$

	$\lambda$	Auci.(2003)	Ritz	DDY		$\lambda$	Auci.(2003)	Ritz	DDY
$\delta=0,$ $\gamma=5$	1	6.4495	6.4495	6.4495	$\delta=0,$ $\gamma=12$	1	13.170	13.171	13.170
	2	25.446	25.445	25.446		2	37.603	37.604	37.603
	3	65.205	65.219	65.205		3	79.614	79.611	79.614
	4	124.56	127.028	124.56		4	140.53	142.95	140.53
	5	203.62	-	203.62		5	220.53	-	220.53
$\delta=2,$ $\gamma=5$	1	10.861	10.862	10.861	$\delta=2,$ $\gamma=12$	1	24.549	24.568	24.549
	2	32.764	32.764	32.764		2	61.464	61.489	61.464
	3	73.984	73.993	73.984		3	113.78	114.03	113.78
	4	134.36	136.829	134.36		4	183.32	185.85	183.32
	5	214.04	-	214.04		5	269.74	-	269.74

Çizelge 4.7. İzotrop, dönen bir ucu mafsallı diğer ucu serbest (B-S) bir kirişin düşey yönde temel doğal frekanslarının karşılaştırma çizelgesi  $\lambda = \omega L^2 \sqrt{\rho h/EI}$

	$\lambda$	Wright vd. (1981)	Du vd. (1994)	DDY		$\lambda$	Wright vd. (1981)	Du vd. (1994)	DDY
$\delta=0,$ $\gamma=5$	1	5.00000	5.00000	5.0000	$\delta=0,$ $\gamma=12$	1	12.000	12.0000	12.000
	2	19.9197	19.9197	19.919		2	33.760	33.7603	33.760
	3	54.2419	54.2419	54.241		3	70.837	70.8373	70.837
	4	108.469	108.469	108.46		4	126.43	126.431	126.43
	5	182.469	-	182.46		5	201.12	-	201.12
$\delta=2,$ $\gamma=5$	1	-	-	9.9313	$\delta=2,$ $\gamma=12$	1	-	-	23.777
	2	-	-	28.898		2	-	-	59.120
	3	-	-	64.984		3	-	-	108.31
	4	-	-	120.00		4	-	-	173.63
	5	-	-	194.37		5	-	-	255.19

Çizelge 4.8. İzotrop, homojen düzgün kesitli ankastre kirişin DDY yöntemi ile farklı sınır şartları için boyutsuz frekans değerleri  $\lambda = \sqrt{\rho A \omega^2 L^4 / EI}$

Sınır Şartları		$\lambda$		
		1	2	3
A – S	DDY	1.8751	4.6940	7.8547
	Coşkun vd.(2010)	1.8751	4.6940	7.8547
A – B	DDY	3.9266	7.0685	10.210
	Coşkun vd.(2010)	3.9266	7.0685	10.210
A – A	DDY	4.7300	7.8532	10.995
	Coşkun vd.(2010)	4.7300	7.8532	10.995
B – B	DDY	3.1415	6.2831	9.4247
	Coşkun vd.(2010)	3.1415	6.2831	9.4247
B – S	DDY	0	15.418	49.964
	Wright vd. (1982)	0	15.418	49.964

Çizelge 4.9’ de farklı sınır koşulları için dönmeyen homojen bir kiriş doğal frekans değerleri verilmiştir. Simetrik 4 katmanlı kompozit kiriş için boyutsuz frekansları literatürdeki bazı kaynaklarla karşılaştırmalı olarak verilmiştir (Çizelge 4.9). Malzeme II özelliklerine sahip ( $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) ankastre dönmeyen bir kompozit kiriş için ilk 5 frekans değerleri verilmiştir.

Çizelge 4.9. Simetrik 4 katmanlı kompozit ankastre kirişin boyutsuz ilk beş frekansının literatürdeki bazı çalışmalar ile karşılaştırılması,  $\lambda = \omega L^2 \sqrt{\rho / E_1 h^2}$ , Malzeme II

Çalışmalar	$\lambda$				
	1	2	3	4	5
Ritz (BMKDT)	0.9251	4.9515	11.662	17.016	18.511
Ritz (PKDT)	0.9252	4.9542	11.692	17.088	18.645
DDY (BMKDT)	0.9241	4.8930	11.442	17.258	18.701
Chandra. ve Bang. (1993)	0.9230	4.8884	11.433	-	18.688
Chandrashekhara vd. (1990)	0.9241	4.8925	11.440	-	18.697
Chen vd. (2003)	0.9149	4.8820	11.389	17.067	18.421

Elde edilen sonuçlardan görüldüğü gibi 4 katmanlı kompozit kiriş için elde edilen sonuçların literatür ile uyumlu olduğu görülmüştür. BMKDT kapsamında Ritz yöntemi ile elde edilen frekans parametrelerinin elastik çözüm sonuçlarından(Chen ve ark (2003)) en düşük farkı %0.29 ile 4.mod için elde edilmişken, en yüksek fark %1.42 ile 2.mod için elde edilmiştir. Ritz yöntemi PKDT ile elastik çözüm arasındaki fark yine

en düşük %0.29 ile 4.modda görülürken en yüksek fark yine %1.42 ile 2. modda görülmüştür. DDY ile elde edilen boyutsuz frekans değerleri ile elastik çözümden elde edilen frekans değerleri arasındaki en büyük fark %1.52 ile 5.modda görülürken en düşük fark %0.22 ile 2.modda görülmüştür.

Çizelge 4.10'de farklı açılarda simetrik dört katmanlı kompozit kirişin DDY yöntemi ile elde edilen temel frekans değerleri diğer çalışmalarla karşılaştırılmıştır. Burada farklı çözüm yöntemleri ve farklı yaklaşımlar kullanılarak 5 ayrı sınır koşulu için frekanslar karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmalarda  $0^\circ$ 'den  $90^\circ$ 'ye kadar farklı yönlenme açılarında temel frekans değerleri verilmiştir.

Özellikle  $0^\circ$  ve  $90^\circ$  lik açılarda farklı çalışmalara göre temel frekans değerleri birbirine oldukça yakındır. Boyutsuz doğal frekansların mevcut modelin doğruluğu ve verimliliği Çizelge 4.4den Çizelge 4.8 ya kadar, kompozit kiriş için önceki yıllarda yayımlanmış çalışmalar ile karşılaştırıldığında oldukça uyumlu oldukları gözlenmiştir.

Çizelge 4.10. Kompozit simetrik dört katmanlı kirişin DDY yöntemi ile temel boyutsuz frekans değerlerinin diğer çalışmalarla karşılaştırma çizelgesi,  $\lambda = \omega L^2 \sqrt{\rho/E_1 h^2}$   
 $L/h=15, (\theta^\circ/-\theta^\circ/-\theta^\circ/\theta^\circ)$  Malzeme II

Sınır Koşulu	Çalışmalar	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
A – S	DDY	0.9820	0.9213	0.7565	0.5868	0.3618	0.2722	0.2618
	Ayd.(2006)	0.9810	0.6760	0.4140	0.2880	0.2620	0.2580	0.2600
	Chand.(1990)	0.9820	0.9249	0.7678	0.5551	0.3631	0.2723	0.2619
	Vo (2012)	0.9801	0.8836	0.5614	0.3253	0.2634	0.2593	0.2611
A – B	DDY	3.7308	3.5041	2.8929	2.1723	1.5224	1.1719	1.1310
	Ayd.(2006)	3.7750	2.9600	1.6710	1.1780	1.1500	1.1220	1.1290
	Chand.(1990)	3.7310	3.5590	3.0570	2.3030	1.5510	1.1750	1.1360
	Krisna.(1992)	3.8370	3.2430	2.2130	1.3880	1.1460	1.1290	1.1310
	Vo (2012)	3.8183	3.5079	2.3538	1.4019	1.1407	1.1231	1.1302
A – A	DDY	4.8494	4.5433	3.7680	2.9001	2.1293	1.6732	1.6195
	Chen (2004)	4.8575	3.6484	2.3445	1.8383	1.6711	1.6161	1.6237
	Ayd.(2006)	4.9730	4.2940	2.1950	1.9290	1.6690	1.6120	1.6190
	Chand.(1990)	4.8487	4.6635	4.0981	3.1841	2.1984	1.6815	1.6200
	Vo (2012)	4.8969	4.5695	3.2355	1.9918	1.6309	1.6056	1.6152
	Krisna.(1992)	4.8690	3.9880	2.8780	1.9470	1.6690	1.6120	1.6190
B – B	DDY	2.6561	2.4911	2.0577	1.5008	1.0052	0.7602	0.7319
	Ayd.(2006)	2.6510	1.8960	1.1410	0.8040	0.7360	0.7250	0.7290
	Chand.(1990)	2.6560	2.5105	2.1032	1.5368	1.0124	0.7611	0.7320
	Vo (2012)	2.6494	2.4039	1.5540	0.9078	0.7361	0.7247	0.7295
B – S	DDY	4.0933	3.8387	3.1661	2.3203	1.5610	1.1824	1.1386
	Ayd.(2006)	4.0880	2.9530	1.7640	1.2440	1.1480	1.1280	1.1350
	Chand.(1990)	4.0931	3.8728	3.2530	2.3841	1.5738	1.1840	1.1389

Dönen izotrop ankastre kirişe ait boyutsuz frekans parametreleri ilk üç frekans için literatürde bulunan değerlerle kıyaslanarak Çizelge 4.11-4.13'de verilmiştir. Çizelge 4.11'da kuvvet serisi çözümü (Du vd. (1994)), Hodges (Hodges(1979))' un tam çözümü ve Hoa (Hoa vd.(1980)) nin sonlu elemanlar yöntemi çözümü ile DDY ve Ritz yöntemi frekans sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Temel frekans değerleri burada oldukça uyumludur. Şekil 4.12 te 2.ci frekans değerleri içinse kuvvet serileri ile çözümü(Du vd.(1992)), tam çözüm (Hodges (1979)) ve Frobenius(Wright vd. (1982)) yöntemi ile karşılaştırılmıştır. 3. frekans içinde seri çözümü Du'nun (Du vd. (1994), Khulief (Khulief, 1989)'in sonlu elemanlar çözümü ve Wright vd.'nin Frobenius yöntemi ile çözümü karşılaştırıldığında da sonuçların oldukça uyumlu olduğu görülmüştür.

Çizelge 4.11. Dönen izotrop ankastre kirişin 1. frekans değerlerinin önceki yıllardaki çalışmalarla karşılaştırılması  $\delta=0$ ,

$\gamma$	Du vd. (1992) Kuv.seri.	Hodges (1979) Tam çöz.	Hoa vd. (1980) SEY	DDY	Ritz
0	3.51602	3.51602	3.51602	3.51602	3.51583
1	3.68165	3.68165	3.68165	3.68165	3.68152
2	4.13732	4.13732	4.13732	4.13732	4.13725
3	4.79728	4.79728	4.79728	4.79728	4.79713
4	5.58500	5.58500	5.58501	5.58500	5.58484
5	6.44954	6.44954	6.44957	6.44954	6.44939
6	7.36037	7.36037	7.36041	7.36037	7.36026
7	8.29964	8.29964	8.29970	8.29964	8.29952
8	9.25684	9.25684	9.25694	9.25684	9.25680
9	11.2257	10.2257	10.2258	10.2257	10.2256
10	11.2023	11.2023	11.2026	11.2023	11.2023
11	12.1843	12.1843	12.1847	12.1843	12.1845
12	13.1702	13.1702	13.1706	13.1702	13.1706

Çizelge 4.12. Dönen izotrop ankastre kirişin 2. frekans değerlerinin önceki yıllardaki çalışmalarla karşılaştırılması,  $\delta=0$ ,  $\lambda = \omega L^2 \sqrt{\rho h/EI}$

$\gamma$	Du vd. (1992) Kuv.seri.	Hodges (1979) Tam çöz.	Wright vd.(1982) Frobenius	DDY	Ritz
0	22.0345	22.0345	22.0345	22.0345	22.0324
1	22.1810	22.1810	22.1810	22.1810	22.1789
2	22.6149	22.6149	22.6149	22.6149	22.6128
3	23.3203	23.3203	23.3202	23.3203	23.3180
4	24.2734	24.2733	24.2714	24.2733	24.2710
5	25.4461	25.4461	25.4461	24.4461	25.4436
6	26.8091	26.8091	26.8091	26.8091	26.8065
7	28.3341	28.3341	28.3341	28.3341	28.3313
8	29.9954	29.9954	29.9954	29.9954	29.9924
9	31.7705	31.7705	31.7705	31.7705	31.7675
10	33.6404	33.6404	33.6404	33.6404	33.6372
11	35.5890	35.5890	35.5890	35.5890	35.5859
12	37.6031	37.6031	37.6031	37.6031	37.6002

Çizelge 4.13. Dönen izotrop ankastre kirişin 3. frekans değerlerinin literatürdeki çalışmalarla karşılaştırılması,  $\delta=0$ ,  $\lambda = \omega L^2 \sqrt{\rho h/EI}$

$\gamma$	Du vd. (1992) Kuv.seri.	Khulief (1989) SEM	Wright vd. (1982) Frobenius	DDY	Ritz
0	61.6972	61.8421	61.6972	61.6972	61.7065
1	61.8418	-	61.8418	61.8418	61.8506
2	62.2732	-	62.2732	62.2732	62.2808
3	62.9850	-	62.9850	62.9850	62.9904
4	63.9668	-	63.9668	63.9668	63.9688
5	65.2050	65.2050	65.2050	65.2050	65.2022
6	66.6839	-	66.6840	66.6839	66.6738
7	68.3860	-	68.3860	68.3860	68.3650
8	70.2930	-	70.2930	70.2930	70.2557
9	72.3867	-	72.3867	72.3867	72.3244
10	74.6493	74.6493	74.6493	74.6493	74.5479
11	77.0638	-	77.0638	77.0638	76.9000
12	79.6145	-	79.6145	79.6145	79.3479

Ankastre kiriş dışında bir ucu mafsallı ve diğer ucu serbest dönen bir kirişin titreşimi de incelenmiştir. Dönen mafsallı kirişin ilk iki frekans değerleri çizelge 4.12’de verilmiştir. Bu sınır şartı için Wright (Wright vd. (1982 )) ‘ın Frobenius yöntemi ile diferansiyel dönüşüm yönteminden elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Boyutsuz hız parametresi 1’den 12’ye kadar alınmıştır. Burada görüldüğü gibi diferansiyel dönüşüm yöntemi ile Frobenius yönteminden elde edilen sonuçlar birebir örtüşmektedir.

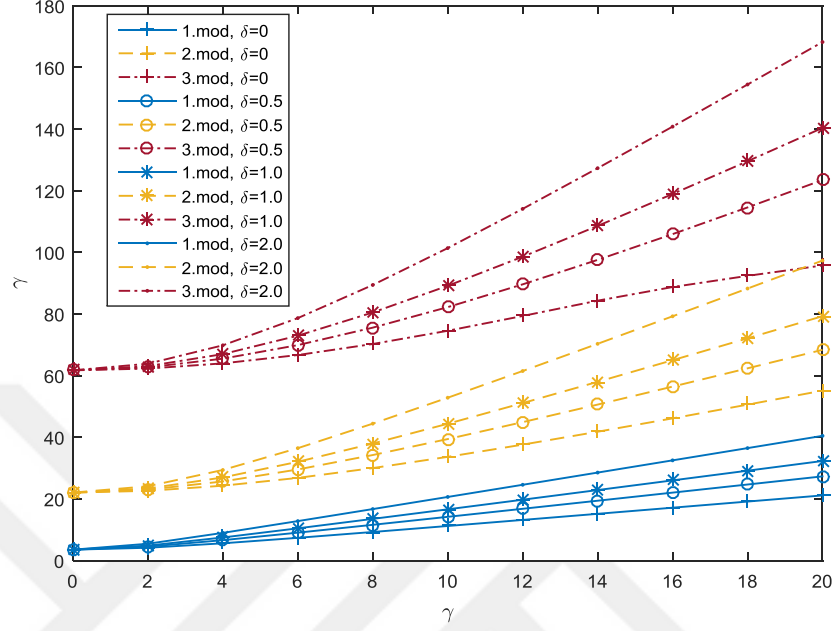


Çizelge 4.14. Dönen bir ucu mafsallı diğer ucu serbest kirişin ilk iki frekans değerlerinin önceki çalışmalarla karşılaştırılması,  $\delta=0$ .  $\lambda = \omega L^2 \sqrt{\rho h/EI}$

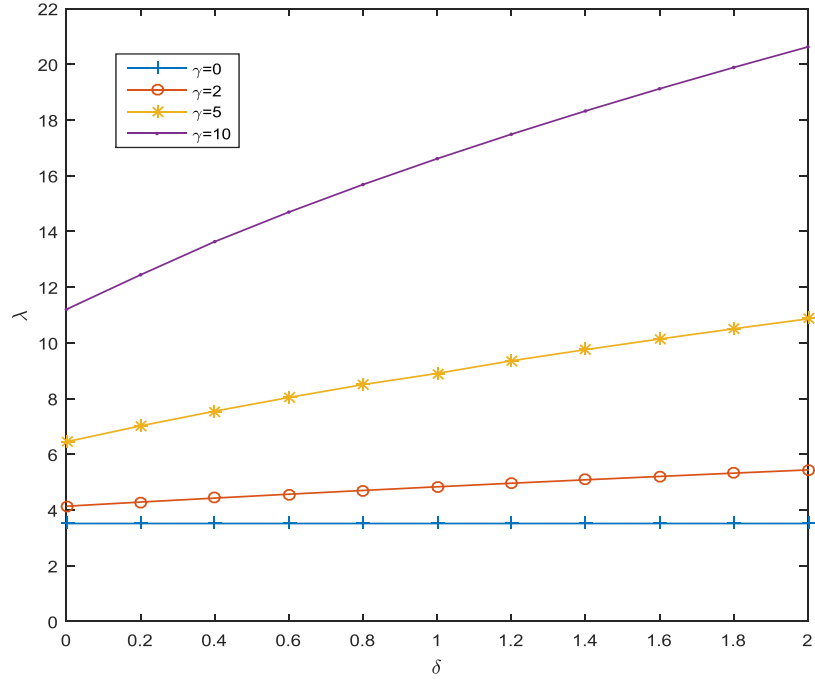
$\gamma$	Wright vd.(1982) Frobenius		DDY	
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$
0	0.0000	15.4182	0.0000	15.4182
1	1.0000	15.6242	1.0000	15.6242
2	2.0000	16.2261	2.0000	16.2261
3	3.0000	17.1807	3.0000	17.1807
4	4.0000	18.4313	4.0000	18.4313
5	5.0000	19.9197	5.0000	19.9197
6	6.0000	21.5944	6.0000	21.5944
7	7.0000	23.4133	7.0000	23.4133
8	8.0000	25.3436	8.0000	25.3436
9	9.0000	27.3601	9.0000	27.3601
10	10.0000	29.4439	10.0000	29.4439

Dönen izotrop ankastre kirişin BFP nin dönme hızı ile değişimi Şekil 4.1’de gösterilmiştir. Bu şekilden görüldüğü gibi ilk üç doğal frekansın kirişin dönme hızı arttıkça arttığı görülmüştür. Burada kök oranı olarak 0,0.5,1 ve 2 değerleri alınmıştır. Kök oranın artmasıyla ilk üç frekansta artışın meydana geldiği görülmüştür. Özellikle yüksek modlarda frekansların artışı kök oranının artmasıyla daha belirgin olmaktadır. Bunun sebebi dönen kiriş sisteminin rijit kök kısmı arttıkça elastik kirişin dönme ekseninden uzaklaşmasıyla merkezkaç atalet kuvvetinin artmasıdır. Merkezkaç kuvvetinin artmasıyla da frekanslar artacaktır. Dönen izotrop ankastre kirişin farklı boyutsuz dönme hızına göre BFP’nin kök oranı ile değişimleri Şekil 4.2’de gösterilmiştir. Boyutsuz frekans parametresi dönme hızınının 0, 2, 5 ve 10 değerleri için sunulmuştur. Dönen izotrop ankastre kirişin dönme hızı ve kök oranına göre frekans değişimleri Şekil 4.1, Şekil 4.2 ve Şekil 4.3 te gösterilmiştir. Boyutsuz frekans parametresi her üç şekil için de  $\lambda = \sqrt{\rho A \omega^2 L^4 / EI}$  olarak alınmıştır. Şekil 4.2’ den görüldüğü gibi hız parametresinin  $\gamma=10$  değeri için frekanslardaki artışı özellikle kök oranın 2 olması ile frekans değerinin kök oranı 0 olması durumuna göre yaklaşık 2 kat artmaktadır. Şekil 4.3’te dönen ankastre kirişin farklı kök oranlarında temel frekans parametresinin dönme hızına göre değişimi verilmiştir. Burada kesikli çizgi ile belirtilen eğri boyutsuz frekans parametresinin boyutsuz dönme parametresine eşit olduğu durum için dönme rezonans eğrisidir. Kök oranı arttıkça frekans değerleri bu eğriden

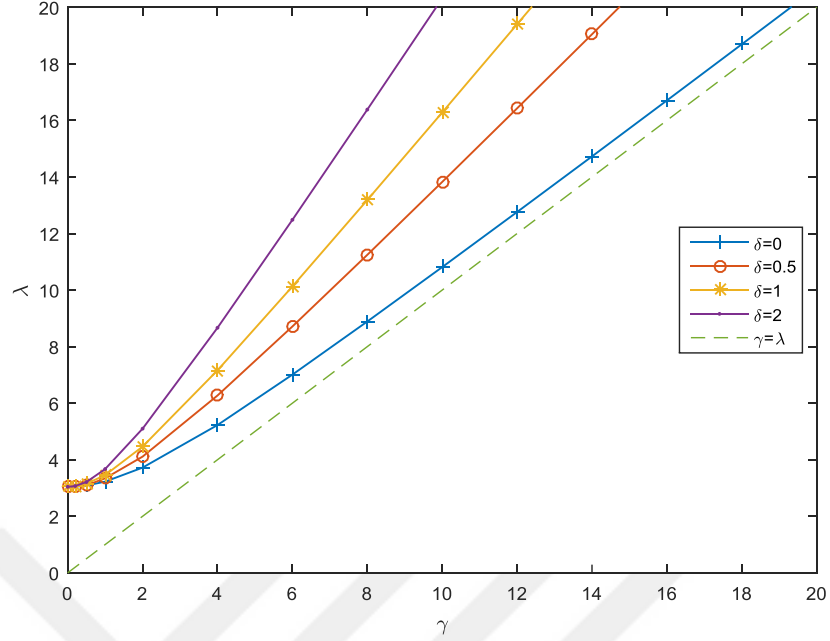
uzaklaştığı gözlenmiştir. Dönme hızının artışıyla birlikte özellikle kök oranı sıfır ise BFP değeri bu eğriye yakınsar ve bu eğriye paralel olarak artış gösterir.



Şekil 4.1. Dönen izotrop ankastre kirişin farklı kök oranına göre ilk üç frekans parametresinin değişimi



Şekil 4.2. Dönen izotrop ankastre kirişin temel BFP'nin kök oranı ile değişimi



Şekil 4.3. Dönen izotrop ankastre kirişin birinci BFP'nin kök oranı ile değişimi

Dönen ankastre kirişlerden başka literatürde farklı sınır şartlarına sahip dönen kirişlerin titreşimi üzerine çalışmalara rastlanmaktadır. Bu nedenle, bu çalışmada farklı kök oranları ve hızlar için A-S, A-A,B-S, B-B ve A-B sınır şartlarına sahip dönen izotrop kirişlerin temel frekans değerleri de verilmiştir (Çizelge 4.15). Burada kullanılan DDY yöntemi için serilerde 150 terim alınmıştır. B-S sınır şartı için frekans parametresi kök oranı  $\delta = 2$  iken kök oranı sıfır  $\delta = 0$  durumuna göre yaklaşık iki katına çıkmaktadır. A-A sınır şartı için boyutsuz hız 20 iken dönmeyen duruma göre frekans parametresi iki katına çıkmaktadır.  $\delta=0$  ve  $\gamma=20$  iken, dönmeyen duruma göre en fazla frekans artışı 6 kat artış ile A-S sınır şartı için gerçekleşmiştir. Hız artışıyla diğer sınır şartları 3.4 kat ile B-B sınır şartı 2.33 kat ile A-B sınır şartı için ve 1.97 kat ile A-A sınır şartında görülmüştür. Dönen izotrop kirişlerde  $\delta=0$  için B-S sınır şartlarında boyutsuz frekanslar, boyutsuz dönme hızı ile aynı iken kök oranının artışıyla frekanslar artmaktadır.

Çizelge 4.15. İzotrop dönen kirişin ankastre kirişin DDY yöntemi kullanılarak temel BFP değerleri,  $\lambda = \omega L^2 \sqrt{\rho h / EI}$

$\delta$	$\gamma$	A-S	A-A	B-S	B-B	A-B
0	0	3.51602	22.3730	0.00000	9.86960	15.4182
	5	6.44954	24.5440	5.00000	13.0953	17.6130
	10	11.2023	29.9189	10.0000	19.4625	22.7973
	15	16.1416	36.7822	15.0000	26.4539	29.1700
	20	21.1165	44.2069	20.0000	33.5472	35.9426
0.5	0	3.51602	22.3730	0.00000	9.86960	15.4182
	5	7.79789	26.0128	6.60381	15.1109	19.0317
	10	14.1720	34.2065	13.1948	24.0842	26.7300
	15	20.7059	43.8643	19.7856	33.3984	35.5288
	20	27.2724	53.8870	26.3771	42.6963	44.5813
1	0	3.51602	22.2730	0.00000	9.86960	15.4182
	5	8.94036	27.3788	7.87648	16.8218	20.3317
	10	16.6064	37.8588	15.7263	27.7436	30.0403
	15	24.4092	49.6408	23.5773	38.8301	40.6979
	20	32.2398	61.6363	31.4298	49.8410	51.5088
2	0	3.51602	22.3730	0.00000	9.86960	15.4182
	5	10.8616	29.8664	9.93138	19.6840	22.6631
	10	20.6112	43.9885	19.8205	33.6161	35.5573
	15	30.4674	59.0570	29.7137	47.5108	49.1266
	20	42.1842	73.6208	39.8302	61.2869	62.6168

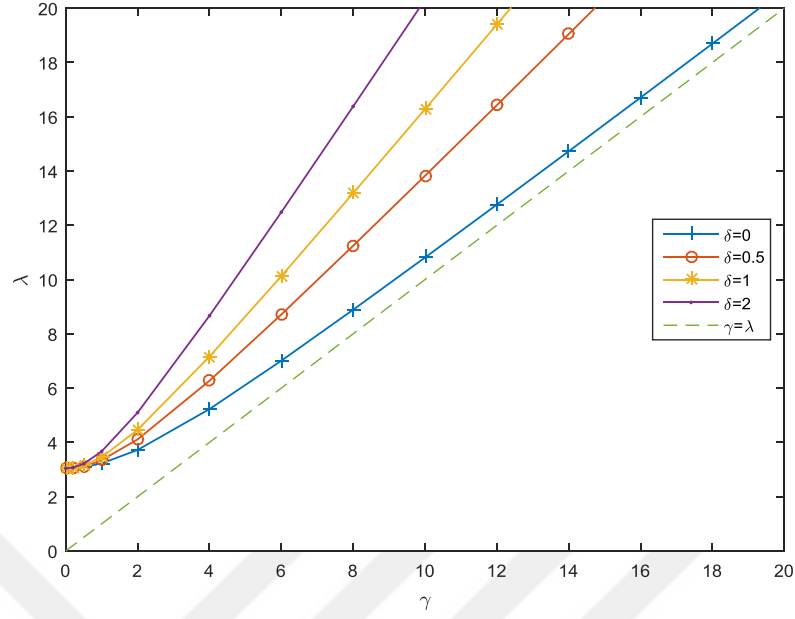
Döner kompozit kirişe ait BFP farklı sınır şartları için Çizelge 4.16'da verilmiştir. Çizelgeden görüldüğü gibi katmanlı kompozit kirişin A-A sınır şartı için kök oranı 1 iken dönmeyen kompozit kirişin frekansına göre iki katına çıkmaktadır. Döner uç basit destekli sınır şartları için hız 0 dan 5'e doğru artış sınırlı kalırken boyutsuz hızın 5 in üzerine çıkmasıyla oldukça belirgin bir frekans artışı gözlenmiştir.

Farklı sınır şartlarına sahip döner kompozit kirişlerde dönme hızının  $\gamma=20$  olması ile kök oranı  $\delta=2$  iken frekanslar sıralandığında en büyük artış oranının 6.41 kat ile A-S sınır şartında görülmüştür (Çizelge 4.16). Daha sonra en büyük frekans artışı B-B sınır şartında ve A-A ve A-B sınır şartları için döner kompozit kirişin frekansları yaklaşık olarak 2.3 kat artmıştır. B-S sınır şartında kompozit kiriş için dönmeyen durumda temel frekans 0'dır. Ancak kök oranının değişimi ile birlikte frekanslar artmaktadır.

Çizelge 4.16. Dönen kompozit ankastre kirişin farklı sınır şartları için DDY yöntemi kullanılarak BMKDT ile temel frekans parametre değerleri  $E_1/E_2=40$ ,  $L/h=20$ ,  $\lambda = \omega L^2 \sqrt{\rho/E_2 h^2}$ ,  $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ , Malzeme I

$\delta$	$\gamma$	A-S	A-A	B-S	B-B	A-B
0	0	6.06779	29.4791	0.00000	16.3688	22.8220
	5	7.95170	30.8544	4.86730	18.3546	24.1473
	10	11.8351	34.4768	9.72603	22.9860	27.5491
	15	16.2400	39.4075	14.5701	28.4532	31.9718
	20	20.7881	44.9522	19.3880	33.8244	36.5951
0.5	0	6.06779	29.4791	0.00000	16.3688	22.8220
	5	9.03080	31.8737	6.45384	19.7847	25.1321
	10	14.5544	37.7197	12.8714	26.8051	30.5808
	15	20.5743	45.0464	19.2577	34.2387	36.9970
	20	26.7066	52.8309	25.5925	40.9177	43.0698
1	0	6.06779	29.4791	0.00000	16.3688	22.8220
	5	9.98992	32.8422	7.71316	21.0770	26.0618
	10	16.8293	40.5539	15.3623	29.8933	33.1829
	15	24.1271	49.6972	22.9685	38.5887	40.9556
	20	31.4832	59.1178	30.4811	47.7795	47.6491
2	0	6.06779	29.4791	0.00000	16.3688	22.8220
	5	11.6664	34.6495	9.74319	23.3545	27.7823
	10	20.6243	45.4000	19.3805	34.8003	37.5161
	15	29.9682	57.2729	28.9518	44.9302	46.8959
	20	38.9439	69.1715	38.0424	51.5448	53.1505

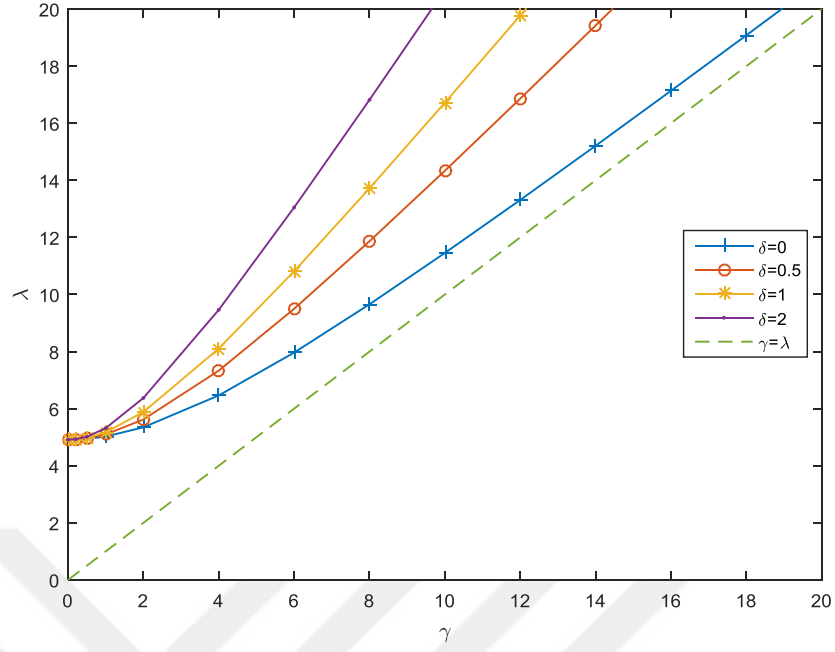
Dönen dik katmanlı  $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$  dizilişine sahip kompozit ankastre kirişlerin frekanslarının dönme hızı ile değişimi Ritz yöntemi ile parabolik kayma şekil değiştirme teorisi kullanılarak bulunmuş ve Şekil 4.4'te verilmiştir. Burada kesikli çizgi rezonans eğrisini gösterirken diğer eğriler ise farklı kök oranına göre frekans değişimlerini göstermektedir.  $E_1/E_2 = 10$ ,  $L/h=10$  ve kök oranı sıfır olan katmanlı kompozit kirişte düşük hızlardan yüksek hızlara çıkıldıkça frekansların rezonans eğrisine yaklaştığı ve eğriye paralel arttığı görülmektedir. BFP'nin artışı büyük kök oranları için, daha belirgindir.



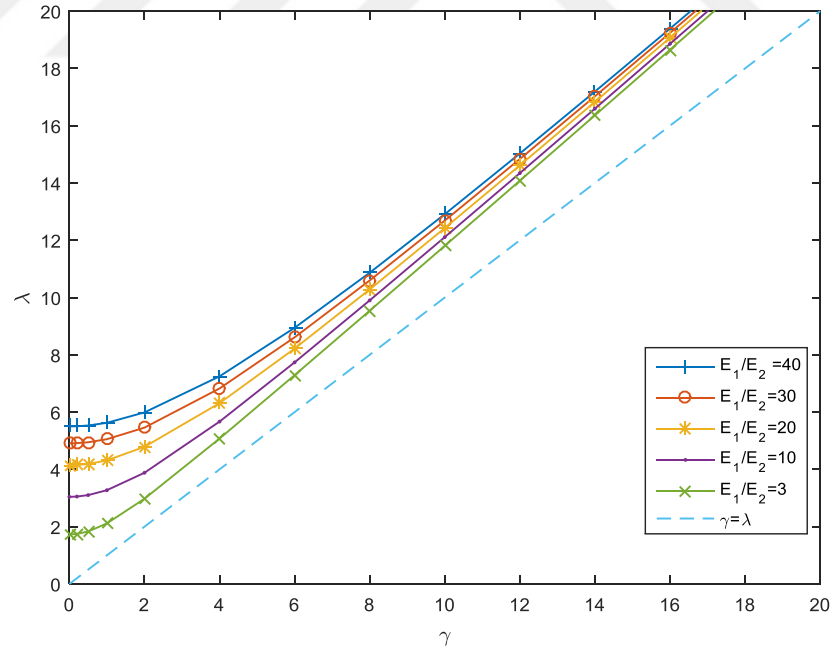
Şekil 4.4. Dönen kompozit ankastre kirişte BFP'nin dönme hızı ile değişimi ( $E_1/E_2 = 10$ ,  $L/h=10$ , PKDT)

Dönen kompozit kirişlerin frekansları için hızın artışı yüksek ortotropi oranına doğru frekansı arttırır (Şekil 4.5). Aynı kök oranına sahip olan kirişte ortotropi oranı farklı olmasına rağmen hızın artışıyla frekanslar artarak değişir ve birbirine yaklaşır. Yüksek kök oranına bakıldığında ise hızın artışıyla birlikte frekans artışı daha belirgindir. Dönen kompozitler için ortotropi oranı farklı olsa bile frekanslar ortotropi oranı farklılığına rağmen artarak birbirine yakınsar (Şekil 4.6 ve Şekil 4.7).

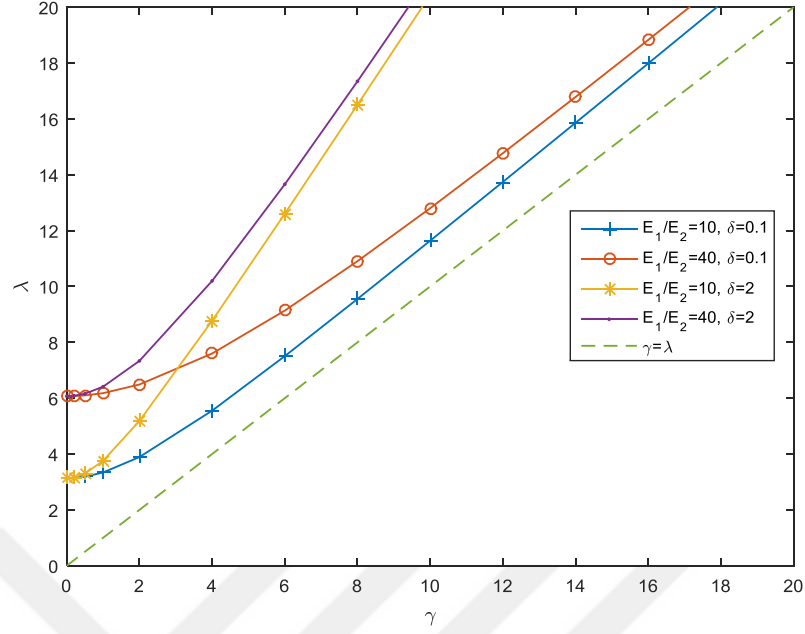
Dönen kompozit kirişlerin farklı ortotropi oranı için hızın değişimine bakılırsa burada  $E_1/E_2$  ortotropi oranı yüksek olan malzemenin daha yüksek frekanslar meydana getirdiği görülmektedir (Şekil 4.6). Ayrıca  $\delta=0$  olan tasarım için dönme hızının artışıyla 1.mod değeri için Şekil 4.3'teki malzemeye göre sadece ortotropi oranı artan malzemenin daha yüksek hızlarda rezonans eğrisine yakınsadığı görülmektedir.



Şekil 4.5. Dönen kompozit ankastre kirişin farklı kök oranında hız ile ilk frekans parametresinin değişimi ( $E_1/E_2 = 30$ ,  $L/h=10$ , PKDT)



Şekil 4.6. Dönen kompozit ankastre kirişin farklı ortropi oranında hız ile ilk frekans parametresinin değişimi ( $\delta=0.2$ ,  $L/h=10$ , PKDT) Malzeme I



Şekil 4.7. Dönen kompozit ankastre kirişin farklı ortotropi oranında hız ile ilk frekans parametresinin değişimi (  $L/h=20$ , PKDT)

Kompozit üç katmanlı dönen bir ankastre kirişte ortotropi oranı  $E_1/E_2=40$  iken  $L/h$  ise 20 ve 50 olması ile frekanslar Çizelge halinde sunulmuştur (Çizelge 4.17 ve Çizelge 4.18). Burada Ritz yöntemi kullanılarak EBT, BMKDT ve PKDT gibi üç farklı teori ile çözümler elde edilmiştir. Katmanlar arası kayma gerilmelerinin sürekli olması durumunda BMKDT ve PKDT ile ilk üç frekansındaki değişimler de ayrıca gösterilmiştir. DDY sonuçları ise yalnızca BMKDT kullanılarak verilmiştir. Her iki çizelgede de aynı hız değerleri ve kök oranlarına göre ilk üç frekans değerleri karşılaştırılmıştır. Her iki yöntemde incelendiğinde yüksek mertebeden teori ile karşılaştırıldığında DDY sonuçları %3.36 ya varan farklılıklar görülmektedir. Ritz yöntemi ile elde edilen frekans değerleri her iki teori de karşılaştığında en fazla %0.15 fark görülmektedir.  $L/h$  oranı 20 olduğunda farklı kök oranlarına göre frekanslar verilen sonuçlar  $L/h$  oranı 50 iken frekanslar değerleri birbirine yakındır. EBT ile elde edilen kompozit kiriş frekans değerleri de birbirine çok yakındır. Bunun nedeni artan  $L/h$  değerleri için kompozit kayma şekil değiştirme etkisinin azalmasıdır. Katmanlar arası kayma gerilmelerinin sürekli ve süresiz olduğu durumlar için elde edilen frekanslar arasında % 5 civarında fark bulunduğu gözlenmektedir.



Çizelge 4.17. Dönen kompozit ankstre kirişin  $\delta$  kök oranına göre farklı sınır koşulları için ilk üç frekans değerleri, ( $E_1/E_2=40$ ,  $\gamma=10$ ,  $L/h=20$ ) Malzeme I

$\delta$	EBT	PKDT <sub>sz</sub>	PKDT <sub>sü</sub>	BMKDT <sub>sz</sub>	BMKDT <sub>sü</sub>	BMKDT <sub>sz</sub> (DDY)
0	12.495	12.204	12.184	12.207	12.178	11.835
	46.852	40.748	40.417	40.811	40.316	39.428
	117.53	86.059	84.811	86.166	84.271	83.960
0.01	12.556	12.265	12.246	12.268	12.239	11.896
	46.943	40.855	40.525	40.918	40.425	39.529
	117.64	86.213	84.967	86.319	84.428	84.108
0.2	13.667	13.375	13.357	13.378	13.350	12.994
	48.638	42.832	42.521	42.892	42.428	41.392
	119.59	89.056	87.855	89.159	87.338	86.841
0.5	15.253	14.959	14.941	14.961	14.935	14.554
	51.192	45.757	45.470	45.812	45.384	44.141
	122.60	93.302	92.161	93.399	91.669	90.914
1	17.574	17.273	17.257	17.275	17.250	16.829
	55.166	50.207	49.951	50.257	49.874	48.311
	127.45	99.836	98.771	99.921	98.306	97.161
2	21.457	21.147	21.132	21.148	21.126	20.624
	62.304	57.981	57.762	58.023	57.697	55.554
	136.54	111.38	110.42	111.45	109.98	108.16

Çizelge 4.18. Dönen kompozit ankstre kirişin  $\delta$  kök oranına göre farklı sınır koşulları için ilk üç frekans değerleri, ( $E_1/E_2=40$ ,  $\gamma=10$ ,  $L/h=50$ ) Malzeme I

$\delta$	EBT	PKDT <sub>sz</sub>	PKDT <sub>sü</sub>	BMKDT <sub>sz</sub>	BMKDT <sub>sü</sub>	BMKDT <sub>sz</sub> (DDY)
0	12.499	12.445	12.440	12.446	12.439	12.379
	46.987	45.633	45.527	45.665	45.510	45.339
	118.33	109.49	108.86	109.68	108.75	108.71
0.01	12.560	12.506	12.501	12.507	12.501	12.440
	47.078	45.727	45.621	45.759	45.605	45.431
	118.43	109.61	108.97	109.79	108.87	108.82
0.2	13.672	13.615	13.611	13.617	13.610	13.545
	48.779	47.476	47.374	47.507	47.359	47.146
	120.40	111.77	111.15	111.94	111.04	110.92
0.5	15.259	15.198	15.194	15.200	15.193	15.121
	51.342	50.104	50.008	50.133	49.993	49.720
	123.44	115.07	114.48	115.25	114.37	114.12
1	17.580	17.514	17.509	17.516	17.508	17.423
	55.330	54.177	54.088	54.204	54.075	53.707
	128.32	120.35	119.78	120.51	119.68	119.23
2	21.465	21.389	21.383	21.390	21.382	21.269
	62.493	61.457	61.378	61.481	61.366	60.818
	137.49	130.13	129.61	130.28	129.52	128.67

Çizelge 4.19 ve Çizelge 4.20 incelendiğinde boyutsuz frekansların L/h oranına göre değişimi incelenmiştir. L/h oranına göre dönen kompozit kirişin birinci frekansı, PKDT ile sürekli ve süreksiz durumdaki frekanslar arasındaki farklar en büyük %1.32 ile L/h=5 iken görülmektedir. L/h= 100 durumunda % 0.0103 ile aradaki fark azalmaktadır. BMKDT teori ile sürekli ve süreksiz durumundaki frekanslar arası farklar incelendiğinde en büyük farkın %2.07 ile L/h=5 iken görülmüştür. L/h artışı ile her iki teori (PKDT, BMKDT) ile elde edilen frekans sonuçları incelendiğinde aradaki frekans farklarının L/h artışıyla azaldığı görülmektedir.

Çizelge 4.19. Dönen kompozit ankastre kirişin L/h oranına göre farklı sınır koşulları için ilk üç frekans değerleri ( $E_1/E_2=40$ ,  $\delta=0.2$ ,  $\gamma=2$ ) Malzeme I

L/h	EBT	PKDT <sub>sz</sub>	PKDT <sub>sü</sub>	BMKDT <sub>sz</sub>	BMKDT <sub>sü</sub>
5	6.7673	4.8344	4.7703	4.7864	4.6872
	39.935	15.672	15.465	15.061	14.710
	111.09	30.187	29.975	27.918	27.408
10	6.7673	5.9890	5.9412	5.9924	5.9202
	39.935	23.637	23.174	23.511	22.782
	111.09	49.030	47.971	48.202	46.473
20	6.7673	6.5367	6.5192	6.5413	6.5153
	39.935	32.472	32.048	32.558	31.925
	111.09	75.186	73.723	75.322	73.099
50	6.7673	6.7288	6.7251	6.7297	6.7245
	39.935	38.362	38.239	38.400	38.220
	111.09	101.45	100.75	101.65	100.64
100	6.7673	6.7577	6.7570	6.7578	6.7570
	39.935	39.527	39.492	39.538	39.488
	111.09	108.43	108.21	108.50	108.18

Çizelge 4.20. Dönen kompozit ankastre kirişin L/h oranına göre farklı sınır koşulları için ilk üç frekans değerleri ( $E_1/E_2=10$ ,  $\delta=0.2$ ,  $\gamma=2$ ) Malzeme I

L/h	EBT	PKDT <sub>sz</sub>	PKDT <sub>sü</sub>	BMKDT <sub>sz</sub>	BMKDT <sub>sü</sub>
5	4.0024	3.6180	3.5972	3.6174	3.5860
	20.646	12.682	12.481	12.630	12.312
	56.368	20.278	20.220	20.052	19.869
10	4.0024	3.8823	3.8742	3.8848	3.8723
	20.646	16.906	16.708	16.949	16.653
	56.368	38.309	37.622	38.380	37.331
20	4.0024	3.9701	3.9673	3.9714	3.9676
	20.646	19.435	19.348	19.462	19.336
	56.368	49.184	48.734	49.314	48.652
50	4.0024	3.9965	3.9962	3.9965	3.9958
	20.646	20.437	20.420	20.443	20.418
	56.368	54.989	54.881	55.025	54.868
100	4.0024	4.0012	4.0012	4.0012	4.0012
	20.646	20.595	20.591	20.597	20.591
	56.368	56.026	55.997	56.035	55.994

Çizelge 4.21. Dönen kompozit ankastre kirişin  $\gamma$  boyutsuz frekans parametresine göre farklı sınır koşulları için ilk üç frekans değerleri ( $E_1/E_2=40$ ,  $\delta=0.2$ ,  $L/h=10$ ) Malzeme I

$\gamma$	EBT	PKDT <sub>sz</sub>	PKDT <sub>sü</sub>	BMKDT <sub>sz</sub>	BMKDT <sub>sü</sub>
0	6.2947	5.5000	5.4494	5.5060	5.4284
	39.003	22.906	22.425	22.773	22.015
	107.31	47.977	46.894	47.116	45.343
5	8.7690	8.0591	8.0206	8.0566	7.9966
	41.481	27.121	26.725	27.022	26.402
	109.77	54.122	53.161	53.406	51.854
10	13.649	12.913	12.884	12.904	12.860
	48.142	36.758	36.472	36.698	36.253
	116.82	68.530	67.760	67.917	66.687
15	19.079	18.294	18.272	18.285	18.251
	57.513	48.482	48.265	48.441	48.103
	127.60	79.551	79.336	78.694	78.001
20	24.658	23.855	23.838	23.846	23.819
	68.436	61.040	60.865	61.011	60.737
	141.17	79.553	79.339	78.697	78.005

Çizelge 4.22. Dönen kompozit ankastre kirişin  $\gamma$  boyutsuz frekans parametresine göre farklı sınır koşulları için ilk üç frekans değerleri ( $E_1/E_2=10$ ,  $\delta=0.2$ ,  $L/h=10$ ) Malzeme I

$\gamma$	EBT	PKDT <sub>sz</sub>	PKDT <sub>sü</sub>	BMKDT <sub>sz</sub>	BMKDT <sub>sü</sub>
0	3.1591	3.0413	3.0331	3.0446	3.0315
	19.576	15.924	15.712	15.971	15.653
	40.974	37.048	36.331	37.122	36.027
5	6.8304	6.6848	6.6758	6.6865	6.6728
	24.131	21.306	21.155	21.337	21.110
	58.597	41.373	41.335	41.233	41.110
10	12.333	12.113	12.103	12.114	12.099
	34.261	32.310	32.215	32.328	32.185
	70.742	41.373	41.336	41.234	41.110
15	17.979	17.735	17.727	17.735	17.722
	46.310	41.373	41.335	41.233	41.110
	86.874	44.846	44.780	44.857	44.758
20	23.633	23.425	23.418	23.425	23.414
	59.052	41.373	41.335	41.234	41.110
	104.83	57.894	57.845	57.901	57.826

Çizelge 4.23. Dönen kompozit ankastre kirişin kök oranına göre farklı sınır koşulları için ilk üç frekans değerleri ( $E_1/E_2=40$ ,  $L/h=5$ ,  $\gamma=5$ ) Malzeme I

$\delta$	EBT	PKDT <sub>sz</sub>	PKDT <sub>sü</sub>	BMKDT <sub>sz</sub>	BMKDT <sub>sü</sub>
0	8.2680	6.6444	6.6007	6.5938	6.5246
	39.430	19.430	19.265	18.980	18.696
	40.844	35.789	35.594	33.959	33.531
0.01	8.2910	6.6722	6.6290	6.6199	6.5544
	39.454	19.489	19.325	19.042	18.759
	40.844	35.878	35.683	34.056	33.627
0.2	8.7202	7.1914	7.1514	7.1437	7.0851
	39.916	20.569	20.414	20.169	19.899
	40.844	37.400	37.190	35.771	35.306
0.5	9.3564	7.9378	7.9037	7.8963	7.8464
	40.634	22.133	21.992	21.782	21.531
	40.844	37.828	37.636	36.855	36.227
1	10.328	9.0415	9.0133	9.0049	8.9652
	40.841	24.455	24.334	24.156	23.927
	41.801	37.862	37.674	36.914	36.302
2	12.034	10.908	10.888	10.877	10.851
	40.844	28.405	28.313	28.158	27.948
	44.033	37.883	37.700	36.946	36.349

Çizelge 4.24. Dönen kompozit ankastre kirişin kök oranına göre farklı sınır koşulları için ilk üç frekans değerleri ( $E_1/E_2=40$ ,  $L/h=20$ ,  $\gamma=5$ ) Malzeme I

$\delta$	EBT	PKDT <sub>sz</sub>	PKDT <sub>sü</sub>	BMKDT <sub>sz</sub>	BMKDT <sub>sü</sub>
0	8.3260	8.0972	8.0792	8.1009	8.0752
	41.835	34.376	33.978	34.456	53.861
	111.81	77.613	76.204	77.742	75.608
0.01	8.3498	8.1207	8.1030	8.1243	8.0986
	41.411	34.409	34.011	34.488	33.894
	111.84	77.657	76.249	77.786	75.649
0.2	8.7813	8.5546	8.5375	8.5587	8.5334
	41.900	35.013	34.623	35.091	34.509
	112.36	78.481	77.092	78.610	76.501
0.5	9.4219	9.1976	9.1810	9.2011	9.1766
	42.659	35.942	35.566	36.018	35.456
	113.18	79.759	78.397	79.887	77.820
1	10.400	10.176	10.160	10.179	10.155
	43.894	37.435	37.077	37.507	36.973
	114.52	81.829	80.507	81.954	79.949
2	12.116	11.888	11.873	11.890	11.868
	46.259	40.235	39.907	40.301	39.812
	117.16	85.764	84.513	85.883	83.987

### 4.3. Kütle bağlanmış dönen katmanlı kompozit ve izotrop kirişlerin titreşim sonuçları

Birçok yapısal tasarımda ucuna kütle bağlanmaktadır. Bu kütlelerin işlevi hava akışını arttırmak, helikopter kanadı gibi dönen mekanizmalarda titreşim frekanslarını değiştirmektir. Bu amaçla bu çalışmada dönen izotrop ve kompozit kirişe kütle eklenmesiyle frekansların detaylı incelemesi yapılmıştır.

Ritz yöntemi ile PKDT kullanılarak kütle eklenmiş kompozit kirişlerin frekansları için yakınsamalar çizelgeler halinde sunulmuştur (Çizelge 4.24 - Çizelge 4.27). Bu çizelgelerde Ritz yöntemi için teim sayısına göre yakınsama yüzdeleri de verilmiştir. Dış ucuna kütle eklenmiş dönen katmanlı kompozit ankastre kirişe ait ilk üç boyutsuz frekans parametreleri, kütlelerin merkezkaç kuvveti etkisinin göz önüne alınmadığı (KMEY) ve alındığı (KMEV) durumlar için sırasıyla Çizelge 4.25 ve Çizelge 4.26-4.27'de gösterilmiştir. Özellikle 3.mod da kütle bağlanmış dönen ankastre katmanlı kompozit kirişin serbest titreşim frekanslarının kütlelerin merkezkaç kuvvetinden etkilenmediği görülmektedir. En yüksek yüzde yakınsamaları %0.069 ile 2. modda elde edilmiştir. Ayrıca bazı sonuçlar için kütlelerin merkezcil etkisi gözönüne alınmadan DDY ile elde edilen yakınsama sonuçları Çizelge 4.29 te verilmiştir. Bu çizelgede görüldüğü gibi DDY yöntemi ile uç kütleyle sahip ankastre kompozit kirişin ilk üç frekansı için 100 seri terimi yeterli iken ilk beş frekans için 160 terim alınması ile yakınsamaktadır.

Çizelge 4.25. Dönen uç noktada katmanlı kompozit kirişin ilk üç frekansının Ritz yöntemi için yakınsaması  $E_1/E_2=40$ ,  $\delta=1$ ,  $\eta=1$ ,  $\gamma=5$ ,  $\alpha=0.25$ ,  $L/h=10$  (PKDT), KMEY

M×N	1. mod	2. mod	3. mod
3×3	7.0639	25.143	59.054
4×4	7.0256	24.934	51.238
5×5	7.0092	24.731	51.158
6×6	7.0035	24.665	51.020
7×7	7.0026	24.654	51.009
%Yakınsama	0.012	0.044	0.021

Çizelge 4.26. Dış ucuna kütleli dönen kompozit ankastre kirişin ilk üç frekansın Ritz yakınsama çizelgesi  $E_1/E_2=40$ ,  $\delta=1$ ,  $\eta=1$ ,  $\gamma=5$ ,  $\alpha=0.25$ ,  $L/h=10$  (PKDT, KMEV)

M×N	1. mod	2. mod	3. mod
3×3	7.701	26.573	61.467
4×4	7.655	26.351	53.207
5×5	7.634	26.143	53.125
6×6	7.627	26.070	52.989
7×7	7.626	26.059	52.976
% Yakınsama	0.013	0.042	0.024

Çizelge 4.27. Uç noktada kütleli dönen kompozit ankastre kirişin ilk üç frekansın Ritz yakınsama çizelgesi  $E_1/E_2=40$ ,  $\delta=1$ ,  $\eta=1$ ,  $\gamma=5$ ,  $\alpha=0.25$ ,  $L/h=10$  (BMKDT, KMEV)

M×N	1. mod	2. mod	3. mod
3×3	7.704	26.609	60.536
4×4	7.657	26.368	52.596
5×5	7.633	26.129	52.862
6×6	7.626	26.053	52.668
7×7	7.624	26.035	52.660
% Yakınsama	0.026	0.069	0.015

Çizelge 4.28. Dönen uç kütleli kompozit kiriş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (DDY) sonuçları yakınsama tablosu ( $E_1/E_2=40$ ,  $L/h=5$ , BMKDT,  $\delta=1$ ,  $\gamma=10$ ,  $\alpha=0.5$ ,  $\eta=1.0$ )  
 $\lambda = \omega L^2 \sqrt{\rho/E_2 h^2}$  (0/90/0) KMEY

N	$\lambda$				
	1	2	3	4	5
10	14.583	40.842	46.282	62.236	80.590
20	13.309	40.842	43.494	66.786	113.24
30	13.022	40.842	42.669	66.595	91.318
40	12.918	40.842	42.353	66.520	90.940
50	12.874	40.842	42.219	66.488	90.819
60	12.853	40.842	42.160	66.474	90.771
70	12.844	40.842	42.132	66.468	90.750
80	12.839	40.842	42.119	66.465	90.741
90	12.837	40.842	42.112	66.464	90.736
100	12.836	40.842	42.109	66.463	90.734
110	12.835	40.842	42.107	66.463	90.733
<b>120</b>	<b>12.835</b>	<b>40.842</b>	<b>42.107</b>	66.463	90.732
130	12.835	40.842	42.106	66.463	90.732
140	12.835	40.842	42.106	66.462	90.732
150	12.834	40.842	42.106	66.462	90.732
<b>160</b>	<b>12.834</b>	<b>40.842</b>	<b>42.106</b>	<b>66.462</b>	<b>90.732</b>

Çizelge 4.29’da izotrop dış ucuna kütle bağlanmış kirişe ait ilk üç frekans parametresi literatürdeki çalışmalarla karşılaştırılmıştır. Burada farklı kütle oranlarında frekanslar elde edilmektedir. Ayrıca, burada ilk üç frekansın hem Ritz yöntemi hemde DDY yöntemi ile % farkları verilmiştir. Bu çizelgedeki frekans değerleri yalnızca kütlelerin merkezci etkisinin göz önüne alınmadığında (KMEY) elde edilen frekans değerleridir. İlk üç frekans, izotrop dönen kiriş için önceki çalışmalarla kıyaslandığında en büyük fark %0.25 olmaktadır. Mevcut sonuçlar önceki çalışmalar ile oldukça iyi bir uyum içerisindedir.

Kompozit dört katmanlı simetrik ankastre kiriş için, kiriş jirasyon yarıçapının kiriş uzunluğuna oranına göre düşey frekans parametresine etkisi çizelgede verilmiştir (Çizelge 4.30). Bu çizelgede DDY yöntemi elde edilen BFP ile literatürdeki sonuçlar karşılaştırılmıştır. Verilen  $k_j/L$  oranına göre frekanslar 1. mod için %0.13 fark elde edilmesine rağmen 2. mod için %0.10 ve 3.mod için % 0.08 frekans değerlerinde fark elde edilmiştir.



Çizelge 4.29. İzotrop uç kütleli bir kirişin ilk üç boyutsuz frekans parametresinin farklı yöntemler için önceki çalışmalar ile karşılaştırılması,  $\lambda = (\omega L^2 \sqrt{E\rho}/12(1 - \nu^2)h^2)^{1/2}$

Çalışmalar	$\lambda$	$\alpha$					
		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
Ritz	1	1.8745	1.6162	1.4723	1.3756	1.3042	1.2485
DDY		1.8751	1.6164	1.4724	1.3756	1.3040	1.2479
Chan. & Ban.(1993)		1.8750	1.6163	1.4723	1.3756	1.3040	1.2478
Laura vd. (1974)		1.8751	1.6163	1.4724	1.3756	1.3040	1.2479
% Fark (Ritz)Laura		0.031	0.006	0.006	0.000	0.015	0.048
% Fark (DDY)Laura		0.000	0.006	0.000	0.000	0.000	0.000
Ritz		2	4.6884	4.2626	4.1404	4.0825	4.0490
DDY	4.6940		4.2670	4.1444	4.0866	4.0530	4.0311
Chan. & Ban.(1993)	4.6931		4.2663	4.1438	4.0860	4.0524	4.0305
Laura vd. (1974)	4.6940		4.2670	4.1444	4.0866	4.0530	4.0311
% Fark (Ritz)Laura	0.119		0.103	0.096	0.100	0.098	0.101
% Fark (DDY)Laura	0.000		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Ritz	3		7.8340	7.2997	7.1971	7.1542	7.1307
DDY		7.8547	7.3183	7.2154	7.1725	7.1489	7.1341
Chan.&Ban.(1993)		7.8511	7.3154	7.2126	7.1697	7.1462	7.1313
Laura vd. (1974)		7.8547	7.3183	7.2154	7.1725	7.1489	7.1341
% Fark (Ritz)Laura		0.263	0.254	0.253	0.255	0.254	0.255
% Fark (DDY)Laura		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Çizelge 4.30. Kompozit ankastre kiriş için ilk üç boyutsuz frekansın karşılaştırılması ( $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$ ),  $L/h=15, \alpha=0.5, \eta=1.0, \lambda = \omega L^2 \sqrt{\rho/E_1 h^2}$ , Malzeme II

$k_j/L$	$\lambda$					
	1		2		3	
	Chand. (1993)	DDY	Chand. (1993)	DDY	Chand. (1993)	DDY
0	0.5343	0.5350	3.8495	3.8532	9.7742	9.7819
0.1	0.5326	0.5332	3.7022	3.7059	9.0910	9.0991
0.2	0.5274	0.5281	3.2639	3.2674	7.0508	7.0575
0.3	0.5189	0.5196	2.7077	2.7107	6.0176	6.0231
0.4	0.5074	0.5080	2.2491	2.2516	5.6303	5.6353
0.5	0.4930	0.4936	1.9207	1.9228	5.4585	5.4633

Dört katmanlı uç noktasına kütle eklenmiş katmanlı kompozit kirişin frekans değerleri Şekil 4.31’de verilmiştir. DDY ile birinci merteye teori elde edilen sonuçlar verilirken, Ritz yöntemi ile PKDT ile elde edilen sonuçlar verilmiştir. Bu nedenle

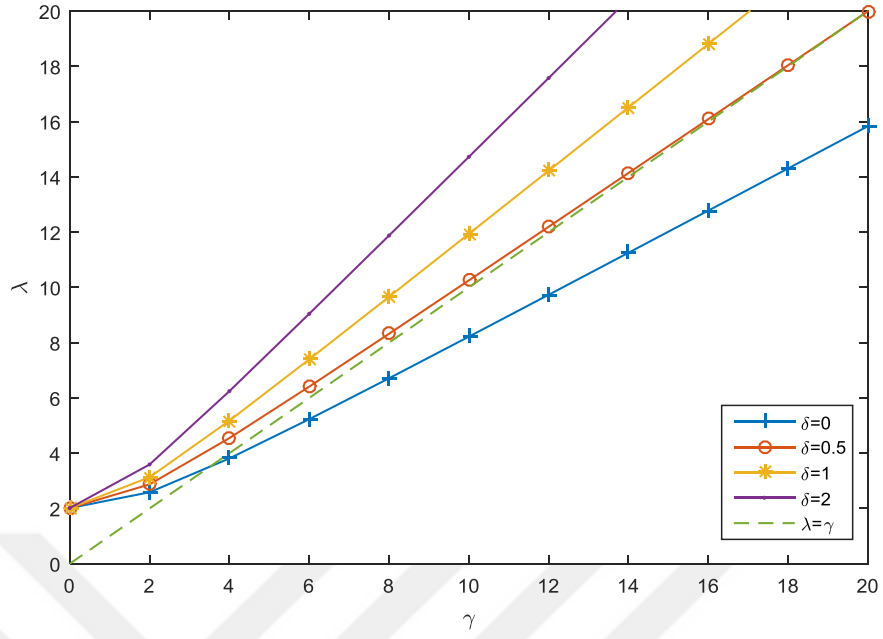
özellikle 3. mod için %1.98 kadar fark görülmüştür. DDY yöntemi ile elde edilen sonuçlar literatürdeki çalışmalarla karşılaştırıldığında birbirine oldukça yakındır ve en büyük fark % 0.18 ile birinci modda görülmektedir.

Çizelge 4.31. Katmanlı kompozit kütleli kirişin ilk üç frekans parametresinin farklı yöntemler için literatürdeki çalışmalarla karşılaştırılması  $\lambda = \omega L^2 \sqrt{\rho/E_1 h^2}$  ( $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$ ),  $L/h=15, \alpha=0.5, \eta=1.0$ , Malzeme II

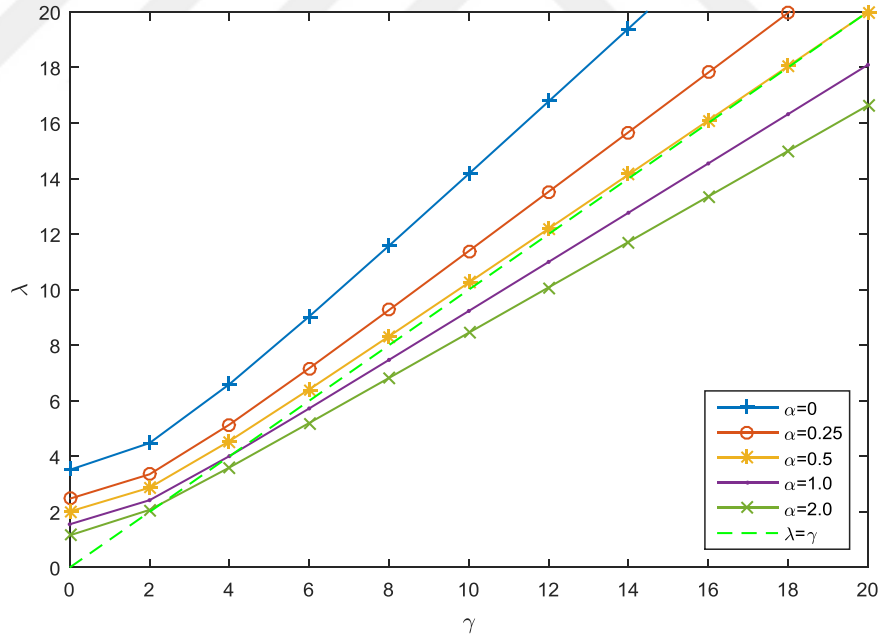
	$\lambda$	
Ritz	1	0.53535
DDY		0.53536
Chan. & Ban.(1993)		0.53439
% Fark (Ritz)		0.179
% Fark (DDY)		0.181
Ritz	2	3.88835
DDY		3.85325
Chan. & Ban.(1993)		3.84950
% Fark (Ritz)		1.009
% Fark (DDY)		0.097
Ritz	3	9.96778
DDY		9.78198
Chan. & Ban.(1993)		9.77421
% Fark (Ritz)		1.980
% Fark (DDY)		0.079

İzotrop dönen dış uca kütle bağlanmış ankastre kirişin frekanslarının dönme hızı ile değişimi farklı kök oranları için Şekil 4.8’de verilmiştir. Genel olarak kök oranı artışı frekansları arttırır. Kütle bağlanmış kirişte dönme hızının artışı ile kütle düğüm noktasına bağlanmadıkça frekanslar artar.

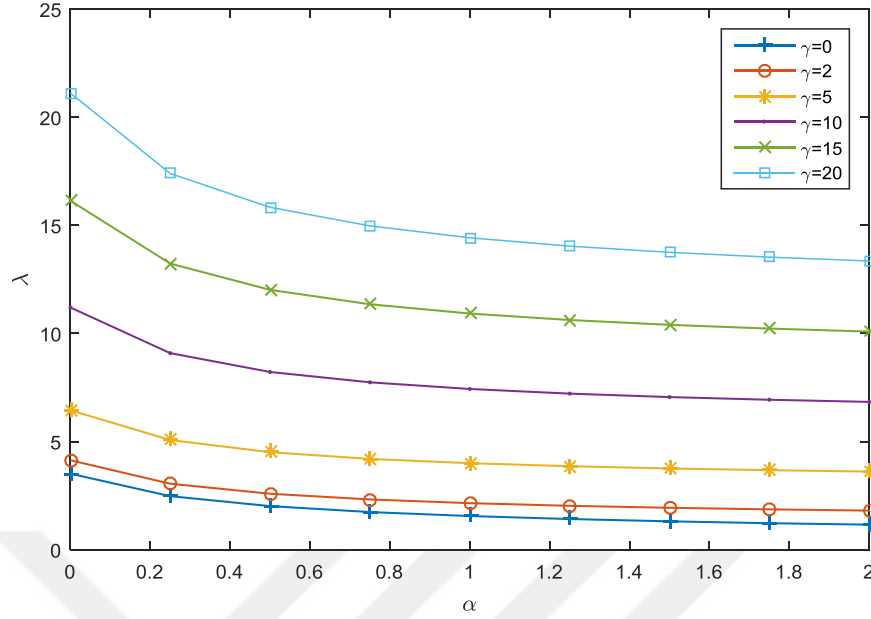
Kirişin dönme hızının artışı dış ucuna kütle bağlanmış kirişe ait frekansın değişim eğrilerinin küçük kök oranları için dönme rezonans eğrisini kesmesine neden olur. BFP nin kök oranı 1 ile 2 arasındaki kritik bir değerden büyük ise dönme rezonans eğrisinden uzaklaşarak artacağı açıkça görülmektedir. Kök oranı  $\delta=0.5$  iken kütle oranı artışı belirli bir kritik değerden sonra rezonans eğrisine yaklaşır ve frekanstaki artış miktarı azalır (Şekil 4.9). Dönen ankstre izotrop kirişin için tüm hız değerlerinde kütle oranı artmasıyla BFP’nin azaldığı Şekil 4.10’da görülebilir.



Şekil 4.8. Dönen ankastre izotrop dış uca bağlı kütleli kirişin BFP'nin dönme hızıyla değişimi ( $\alpha=0.5$ ,  $\eta=1.0$ )



Şekil 4.9. Dönen ankastre izotrop dış uca kütle bağlanmış ankastre kirişin BFP'nin dönme hızıyla değişimi ( $\delta=0.5$ )



Şekil 4.10. Dönen ankastre izotrop uç kütleli ankastre kirişin dönme hızıyla değişimi ( $\delta=0$ )

Kütlenin merkezci kuvveti dahil edilmeden dönen ankastre kompozit kirişin kütleinin yerinin değiştirilmesi ile elde edilen frekans değerleri Çizelge 4.32, Çizelge 4.33, Çizelge 4.34 ve Çizelge 4.35 de verilmiştir. Burada BFP hepsi için  $\lambda = \omega L^2 \sqrt{\rho/E_2 h^2}$  olarak alınmıştır. Dönen kompozit kirişin için kütleinin kiriş kütleisine oranı 0.25, 0.5, 0.75 ve 1 için ilk üç frekans parametresi değerleri verilmiştir. Kirişin boyutsuz dönme hızı parametresi 5, 10, 15 ve 20 olarak alınmıştır. Malzeme I özelliklerine sahip malzemenin ortotropi oranı  $E_1/E_2=40$  olarak seçilmiştir. Bu çizelgelerden görüldüğü gibi kütle serbest uca doğru yaklaştırıldıkça ankastre kirişin frekanslarında azalma gözlenmiştir. Ayrıca yüksek hızlarda döndürülen kirişin kütle artışı frekanstaki azalmaya etkisi daha belirgin olmaktadır. Yüksek hızda dönen kompozit kirişin frekansları birbirine yaklaşmaktadır. Hızın artışı ile birlikte merkezkaç kuvvetinin artışı kompozit malzemedeki kayma şekil değişimlerinin etkisini azaltmakta ve frekanslar birbirine yakınsadığı görülmektedir.

Çizelge 4.32. Dönen ankastre kirişin ilk üç frekansının kütle oranı ile değişimi  
 $E_1/E_2=40$ ,  $\delta = 0$ ,  $\eta=0.25$ , ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ), PKDT,  $L/h=5$ , KMEY

$\gamma$	Mod numarası	$\alpha$			
		0.25	0.5	1	2
0	1	4.1710	4.1060	3.9690	3.6860
	2	12.377	10.874	9.0850	7.4710
	3	24.140	22.742	21.754	21.179
5	1	6.525	6.3980	6.1290	5.5750
	2	16.822	14.881	12.555	10.539
	3	30.326	28.569	27.341	26.646
10	1	10.814	10.572	10.055	9.0080
	2	25.683	22.894	19.499	16.626
	3	37.391	37.270	37.049	36.777
15	1	15.500	15.135	14.352	12.783
	2	35.581	31.912	27.316	23.444
	3	37.954	37.876	37.853	37.844
20	1	20.310	19.821	18.768	16.670
	2	37.828	37.802	35.341	30.470
	3	45.958	41.294	37.907	37.866

Çizelge 4.33. Dönen ankastre kirişin ilk üç frekansının kütle oranı ile değişimi  
 $E_1/E_2=40$ ,  $\delta = 0$ ,  $\eta=0.5$ , ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ), PKDT,  $L/h=5$ , KMEY

$\gamma$	Mod numarası	$\alpha$			
		0.25	0.5	1	2
0	1	3,8920	3.6080	3.1730	2.6170
	2	12.496	11.455	10.423	9.6250
	3	27.580	27.164	26.779	26.503
5	1	6.0950	5.6340	4.9260	4.0320
	2	16.778	15.420	14.103	13.119
	3	30.806	30.744	30.683	30.636
10	1	10.117	9.3340	8.1290	6.6160
	2	25.329	23.354	21.462	20.077
	3	37.377	37.335	37.300	37.278
15	1	14.512	13.378	11.634	9.4520
	2	34.928	32.316	29.787	27.942
	3	37.951	37.901	37.883	37.875
20	1	19.023	17.533	15.237	12.369
	2	37.820	37.790	37.574	35.998
	3	45.027	41.724	38.737	37.984

Çizelge 4.34. Döner ankastre kirişin ilk üç frekansının kütle oranı ile değişimi  
 $E_1/E_2=40$ ,  $\delta = 0$   $\eta=0.75$ ,  $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ , PKDT,  $L/h=5$ , KMEY

$\gamma$	Mod numarası	$\alpha$			
		0.25	0.5	1	2
0	1	3.5180	3.0720	2.5270	1.9690
	2	14.474	14.457	14.438	14.421
	3	26.070	24.973	23.903	23.094
5	1	5.5260	4.8250	3.9680	3.0880
	2	19.420	19.414	19.407	19.401
	3	30.045	29.110	27.970	27.043
10	1	9.1930	8.0230	6.5910	5.1250
	2	29.167	29.162	29.155	29.149
	3	37.152	36.790	36.181	35.483
15	1	13.198	11.515	9.455	7.3450
	2	37.713	37.703	37.691	37.678
	3	40.233	40.189	40.132	40.072
20	1	17.309	15.101	12.394	9.6230
	2	37.833	37.831	37.828	37.827
	3	51.203	51.080	50.908	50.724

Çizelge 4.35. Döner ankastre kirişin ilk üç frekansının kütle oranı ile değişimi  
 $E_1/E_2=40$ ,  $\delta = 0$   $\eta=1.0$ ,  $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ , PKDT,  $L/h=5$ , KMEY

$\gamma$	Mod numarası	$\alpha$			
		0.25	0.5	1	2
0	1	3.1710	2.6260	2.0540	1.5360
	2	12.080	11.386	10.892	10.593
	3	24.548	23.803	23.344	23.090
5	1	4.9300	4.0520	3.1430	2.3400
	2	15.628	14.662	14.021	13.651
	3	30.287	29.654	29.221	28.980
10	1	8.0580	6.5420	5.0180	3.7080
	2	22.341	20.890	20.003	19.520
	3	37.489	37.486	37.484	37.483
15	1	11.396	9.1650	6.9740	5.1280
	2	29.620	27.691	26.573	25.984
	3	37.879	37.870	37.866	37.864
20	1	14.777	11.802	8.9330	6.5450
	2	36.909	34.617	33.291	32.603
	3	37.984	37.884	37.872	37.868

Dönen kompozit ankastre kiriş için eklenen kütle için merkezkaç etkisi de denklemlerde hesaba katılarak elde edilen boyutsuz ilk üç frekans değerleri Çizelge 4.36-4.39' de gösterilmiştir. Bu çizelgeler incelendiğinde, frekanslar eklenen kütle ile birlikte azalmaktadır. Ancak kütle için merkezkaç kuvvetinin etkisi frekanslardaki azalma oranını düşürmüştür. Özellikle yüksek dönme hızlarındaki frekans değerleri için merkezkaç etkisinin artmasıyla frekanslar daha az değişmektedir. İkinci frekanslarda dönme hızı arttıkça kütle artsa bile değişim oldukça azdır. Üçüncü frekansların yüksek dönme hızlarında (özellikle kütle için  $\eta=0.75$  konumunda iken) oldukça arttığı gözlemlenmiştir.

Çizelge 4.36. Dönen ankastre kirişin ilk üç frekansının kütle oranı ile değişimi  
 $E_1/E_2=40$ ,  $\eta=0.25$ ,  $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ , PKDT,  $L/h=5$ ,  $\delta = 0$ , KMEV

$\gamma$	Mod numarası	$\alpha$				
		0	0.25	0.5	1	2
0	1	4.2340	4.1710	4.1060	3.9690	3.6860
	2	14.504	12.377	10.874	9.0850	7.4710
	3	27.801	24.140	22.742	21.754	21.179
5	1	6.6440	6.6380	6.6100	6.5010	6.1510
	2	19.430	17.095	15.340	13.321	11.872
	3	30.934	30.763	29.439	29.054	29.954
10	1	11.039	11.082	11.068	10.903	10.311
	2	29.174	26.448	24.136	21.487	19.928
	3	37.500	37.849	37.831	37.829	37.841
15	1	15.838	15.920	15.905	15.664	14.806
	2	37.727	36.792	33.969	30.539	28.683
	3	40.293	38.054	37.891	37.867	37.864
20	1	20.763	20.879	20.862	20.540	19.413
	2	37.837	37.838	37.834	37.804	37.441
	3	51.357	47.845	44.197	39.934	38.073

Çizelge 4.37. Dönen ankastre kirişin ilk üç frekansının kütle oranı ile değişimi  
 $E_1/E_2=40$ ,  $\eta=0.5$ ,  $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ , PKDT,  $L/h=5$ ,  $\delta=0$ , KMEV

$\gamma$	Mod numarası	$\alpha$				
		0	0.25	0.5	1	2
0	1	4.2340	3,8920	3.6080	3.1730	2.6170
	2	14.504	12.496	11.455	10.423	9.6250
	3	27.801	27.580	27.164	26.779	26.503
5	1	6.6440	6.2970	5.9820	5.4780	4.8390
	2	19.430	17.397	16.574	16.211	16.886
	3	30.934	31.659	32.427	33.958	36.863
10	1	11.039	10.586	10.129	9.3800	8.4500
	2	29.174	27.050	26.443	26.845	29.231
	3	37.500	37.874	37.871	37.872	37.876
15	1	15.838	15.240	14.607	13.565	12.288
	2	37.727	37.400	37.149	37.637	37.824
	3	40.293	38.391	38.157	38.689	42.436
20	1	20.763	20.006	19.188	17.840	16.196
	2	37.837	37.839	37.841	37.846	37.854
	3	51.357	49.138	48.746	50.320	55.708

Çizelge 4.38. Dönen ankastre kirişin ilk üç frekansının kütle oranı ile değişimi  
 $E_1/E_2=40$ ,  $\eta=0.75$ ,  $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ , PKDT,  $L/h=5$ ,  $\delta=0$ , KMEV

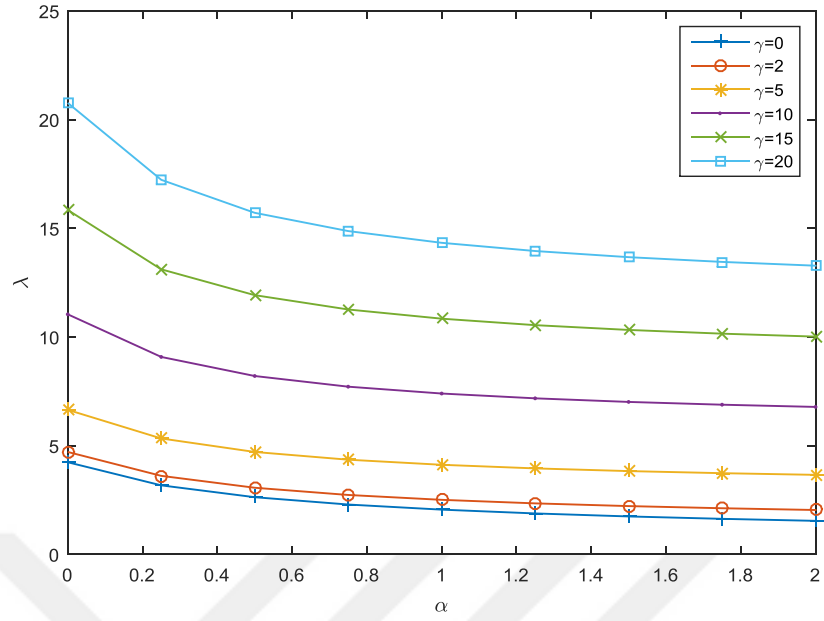
$\gamma$	Mod numarası	$\alpha$				
		0	0.25	0.5	1	2
0	1	4.2340	3.5180	3.0720	2.5270	1.9690
	2	14.504	14.474	14.457	14.438	14.421
	3	27.801	26.070	24.973	23.903	23.094
5	1	6.6440	5.8100	5.2990	4.6970	4.1230
	2	19.430	20.406	21.297	22.895	25.637
	3	30.934	31.341	31.696	32.965	36.258
10	1	11.039	9.8470	9.1010	8.2310	7.4240
	2	29.174	31.955	34.276	37.581	37.834
	3	37.500	37.891	37.908	38.487	44.493
15	1	15.838	14.209	13.176	11.978	10.881
	2	37.727	37.820	37.837	37.848	37.854
	3	40.293	44.940	48.701	54.762	64.336
20	1	20.763	18.671	17.335	15.792	14.385
	2	37.837	37.848	37.851	37.855	37.857
	3	51.357	58.079	63.219	71.337	83.820



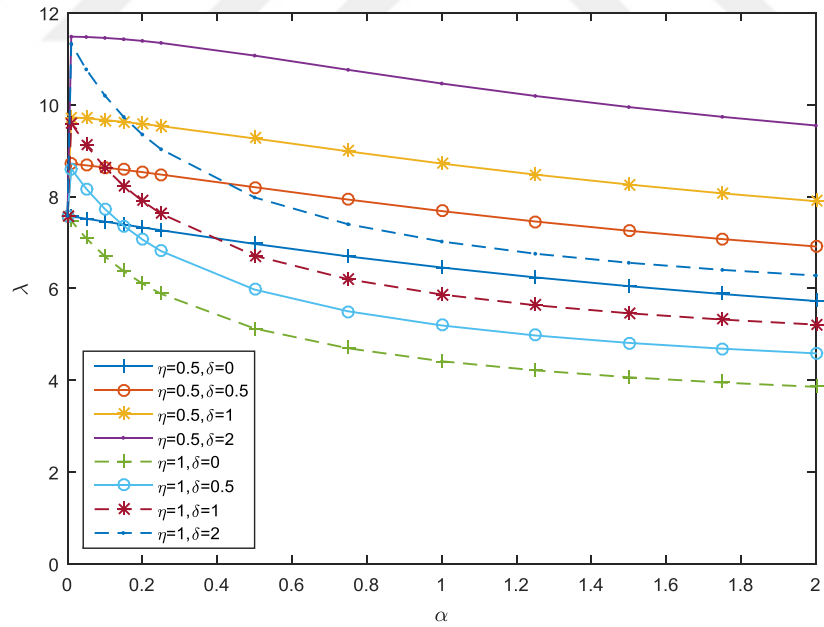
Çizelge 4.39. Dönen ankastre kirişin ilk üç frekansının kütle oranı ile değişimi  
 $E_1/E_2=40$ ,  $\eta=1.0$ ,  $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ , PKDT,  $L/h=5$ ,  $\delta=0$ , KMEV

$\gamma$	Mod numarası	$\alpha$				
		0	0.25	0.5	1	2
0	1	4.2340	3.1710	2.6260	2.0540	1.5360
	2	14.504	12.080	11.386	10.892	10.593
	3	27.801	24.548	23.803	23.344	23.090
5	1	6.6440	5.3280	4.7080	4.1170	3.6530
	2	19.430	16.722	16.581	17.373	19.484
	3	30.934	31.914	32.705	34.900	37.862
10	1	11.039	9.0780	8.2010	7.3950	6.7790
	2	29.174	25.621	26.363	29.022	34.282
	3	37.500	37.874	37.870	37.868	37.874
15	1	15.838	13.108	11.920	10.838	10.013
	2	37.727	35.526	37.117	37.848	37.858
	3	40.293	37.916	37.968	41.702	49.969
20	1	20.763	17.226	15.008	14.328	13.276
	2	37.837	37.849	37.855	37.859	37.860
	3	51.357	45.887	48.414	54.621	65.798

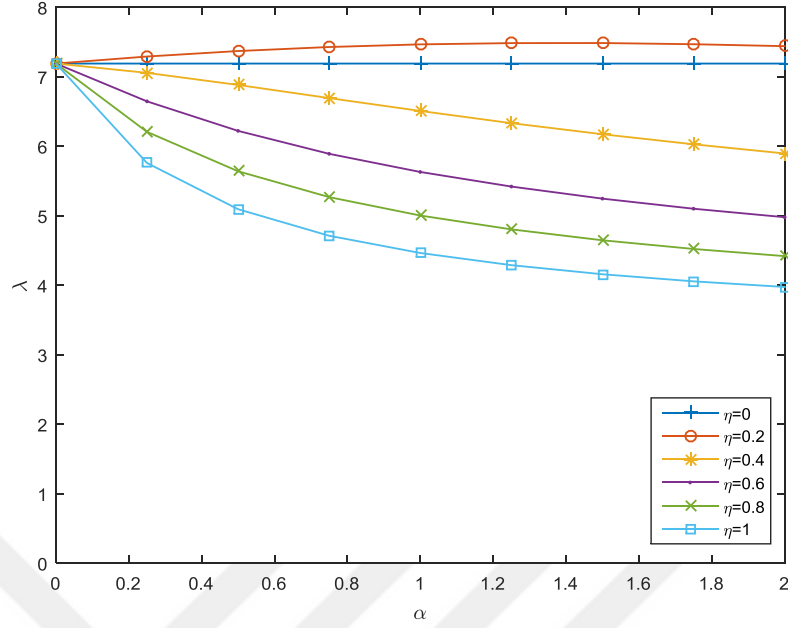
Dış ucunda kütle bağlanmış dönen ankastre kompozit kirişin temel frekans parametresi, kütle oranının artışıyla azalmaktadır (Şekil 4.11). Kök oranı arttıkça frekanslardaki azalma oranı düşmektedir. Kök oranının artışı ile beraber sabit bir hızda dönen orta noktada kütle eklenmiş kompozit kirişin frekansları, dönen dış uca kütle eklenmiş kompozit kirişin frekanslarına göre daha az azalma görülmektedir (Şekil 4.12). Dönen kütleli kompozit kirişin eklenmiş kütlelerin farklı noktalarda yer değiştirmesi ile frekanslardaki değişimler Şekil 4.13'te gösterilmiştir. Şekil incelendiğinde dönen kompozit kirişe eklenen kütlelerin kök ucundan dış uca doğru taşınması ile frekanslarda azalmanın daha da etkin olduğu görülmüştür. Uç kütleli dönen ankastre kirişte hız parametresinin artışı, temel frekans parametresinin kütle oranı artışıyla dönme rezonans eğrisini kesmektedir (Şekil 4.14). Kütle oranı büyükse daha düşük hızlarda dönme rezonans eğrisini kesmektedir. Kütlelerin merkezci kuvvetinin etkisi var iken ve kütlelerin merkezci etkisinin hesaba katılmadığı durumda frekansların değişimi Şekil 4.15'te gösterilmiştir. Bu şekilden görüldüğü gibi kütle oranının artışı ile birlikte, kütlelerin merkezci etkisi hesaba katıldığında frekanslardaki azalma daha az olmaktadır. Ayrıca yüksek hızlar ve yüksek kütle oranlarında KMEV etkisi daha belirgin olmaktadır ve frekanslar arası fark KMEV durumuna göre daha çok artmaktadır.



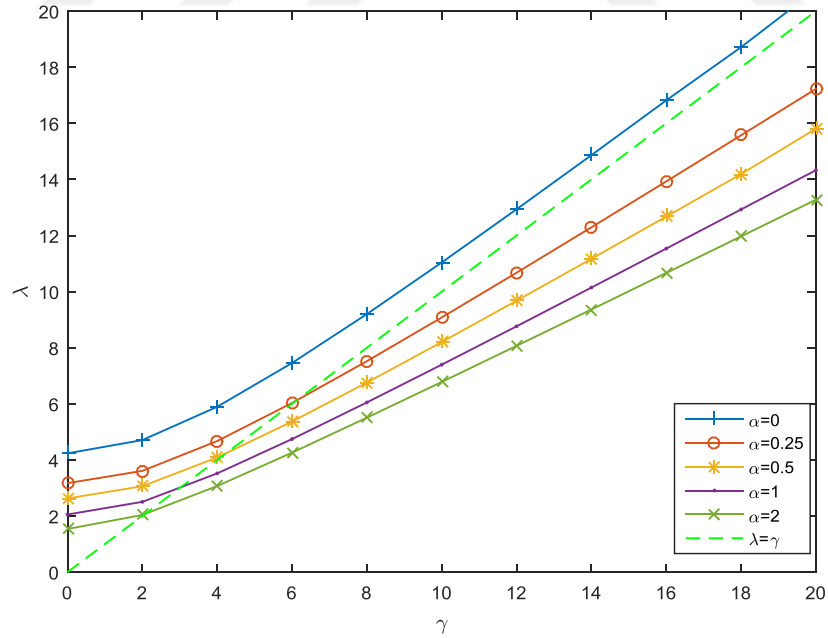
Şekil 4.11. Dönen ankastre kompozit uç kütleli kirişin temel frekans parametresinin kütle oranı ile değişimi ( $\delta = 0, \eta = 1.0, L/h=5$ )



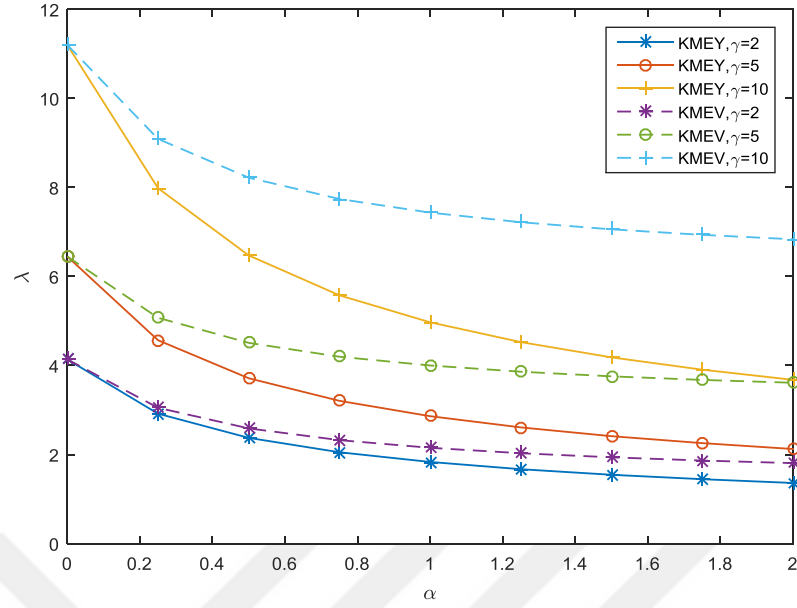
Şekil 4.12. Dönen ankastre kompozit kirişin temel frekans parametresinin kütle oranı ile değişimi ( $E_1/E_2=40, L/h=5, \gamma=5$ )



Şekil 4.13. Dönen ankastre kompozit kirişin temel frekans parametresinin kütle oranı ile değişimi ( $E_1/E_2=40$ ,  $L/h=5$ ,  $\delta=0.2$ ,  $\gamma=5$ )



Şekil 4.14. Dönen ankastre kompozit kirişin temel frekans parametresinin kütle oranı ile değişimi ( $E_1/E_2=40$ ,  $L/h=5$ ,  $\delta=0$ ,  $\eta = 1.0$ )



Şekil 4.15. Dönen ankastre izotrop kirişin kütle merkezkaç kuvvetinin etkisinin kütle oranına göre frekanslarının değişimi ( $\delta=0$ ,  $\eta=1$ )

Dönen kütleli kompozit kirişin boyutsuz frekanslarının dönme hızları ve ortotropi oranına göre değişimi KMEY durumunda Çizelge 4.40-4.43'de verilmiştir. Bu çizelgelerde PKDT ve BMKDT teorisine göre bulunan temel BFP'nin  $E_1/E_2$  ortotropi oranı arttıkça frekanslar artmaktadır.  $E_1/E_2$  ortotropi oranının dönen kirişin yüksek hızlarda döndürülmesi ile frekanslardaki etkinliği azalmaktadır. Dönen kütleli kompozitin frekansların birbirine yaklaşması ve hız parametresi ile artışının azalmasının nedeni dönme hızı ile rijitliğin artmasıdır.

Çizelge 4.40. Dönen kütleli kompozit kirişin temel BFP'nin dönme hızları ve ortotropi oranına göre değişimi ( $L/h=10$ ,  $\delta=0$ ,  $\eta=1$ ,  $\alpha=0.25$ ), KMEY

$\gamma$	Teori	$E_1/E_2$				
		40	30	20	10	3
0	PKDT	3.9770	3.5320	2.9640	2.1610	1.2220
	BMKDT	3.9820	3.5370	2.9670	2.1600	1.2230
5	PKDT	5.4910	5.1800	4.8120	4.3620	3.9590
	BMKDT	5.4920	5.1800	4.8130	4.3630	3.9600
10	PKDT	8.4740	8.2690	8.0340	7.7500	7.4640
	BMKDT	8.4700	8.2660	8.0330	7.7510	7.4650
15	PKDT	11.790	11.633	11.451	11.221	10.955
	BMKDT	11.783	11.628	11.449	11.224	10.956
20	PKDT	15.191	15.056	14.898	14.689	14.421
	BMKDT	15.179	15.048	14.894	14.689	14.422

Çizelge 4.41. Dönen kütleli kompozit kirişin temel BFP'nin, dönme hızları ve ortotropi oranına göre değişimi ( $L/h=10$ ,  $\delta=0$ ,  $\eta=0.5$ ,  $\alpha=0.25$ ), KMEY

$\gamma$	Teori	$E_1/E_2$				
		40	30	20	10	3
0	PKDT	5.1400	4.6020	3.8960	2.8680	1.6350
	BMKDT	5.1440	4.6080	3.9010	2.8710	1.6360
5	PKDT	7.0520	6.6910	6.2620	5.6910	5.1420
	BMKDT	7.0490	6.6910	6.2530	5.6920	5.1440
10	PKDT	10.814	10.594	10.330	9.9490	9.6280
	BMKDT	10.803	10.588	10.328	9.9490	9.6290
15	PKDT	15.051	14.895	14.707	14.459	14.189
	BMKDT	15.036	14.886	14.703	14.459	14.190
20	PKDT	19.460	19.340	19.194	18.999	18.785
	BMKDT	19.444	19.329	19.188	18.998	18.785

Çizelge 4.42. Dönen kütleli kompozit kirişin temel BFP'nin dönme hızları ve ortotropi oranına göre değişimi ( $L/h=10$ ,  $\delta=1$ ,  $\eta=1$ ,  $\alpha=1.0$ ), KMEY

$\gamma$	Teori	$E_1/E_2$				
		40	30	20	10	3
0	PKDT	2.5320	2.2420	1.8760	1.3640	0.7700
	BMKDT	2.5350	2.2460	1.8790	1.3650	0.7700
5	PKDT	6.3390	6.2240	6.0970	5.9560	5.8750
	BMKDT	6.3210	6.2250	6.0980	5.9560	5.8470
10	PKDT	11.875	11.814	11.717	11.674	11.619
	BMKDT	11.876	11.814	11.747	11.674	11.619
15	PKDT	17.580	17.538	17.493	17.444	17.407
	BMKDT	17.586	17.539	17.493	17.444	17.407
20	PKDT	23.331	23.299	23.265	23.288	23.199
	BMKDT	23.331	23.299	23.265	23.228	23.199

Çizelge 4.43. Dönen kütleli kompozit kirişin BFP'nin dönme hızları ve ortotropi oranına göre değişimi ( $L/h=10$ ,  $\delta=1$ ,  $\eta=0.5$ ,  $\alpha=1.0$ ), KMEY

$\gamma$	Teori	$E_1/E_2$				
		40	30	20	10	3
0	PKDT	4.3370	3.9050	3.3280	2.4700	1.4170
	BMKDT	4.3400	3.9100	3.3330	2.4730	1.4180
5	PKDT	11.592	11.411	11.206	10.971	10.782
	BMKDT	11.595	11.413	11.208	10.972	10.782
10	PKDT	21.849	21.751	21.643	21.520	21.423
	BMKDT	21.851	21.752	21.643	21.520	21.423
15	PKDT	32.387	32.320	32.245	32.162	32.095
	BMKDT	32.388	32.320	32.246	32.162	32.095
20	PKDT	43.000	42.948	42.890	42.826	42.775
	BMKDT	43.001	42.948	42.891	42.826	42.775

Dönen kütleli kompozit kirişin BPF'nin, KMEV durumunda sabit hızda dönerken kütle oranı ve  $E_1/E_2$  oranını ile değişimleri Çizelge 4.44-4.47'de verilmiştir. Bu çizelgelerde KMEV olduğu durumda, farklı ortotropi oranlarına sahip dönen dış ucuna kütle bağlanmış kompozit kirişin frekansları verilmiştir. Çizelge 4.44 ve 4.45'te sabit dönme hızında farklı kök oranlarına göre incelenmiş ve ortotropi oranının azalmasıyla frekansların azaldığı görülmektedir.  $\delta=0$  iken ortotropi oranının 40 'tan 10'a doğru azaldıkça en fazla frekans azalışı %46.3 ile 3.modda oluşmuştur. Aynı ortotropi oranı aralıkları için,  $\delta=0$  durumunda en fazla frekans azalışı %33.1 ile 3.modda oluşmuştur. Çizelge 4.46-4.47 'de EBT, BMKDT ve PKDT kullanılarak dış uçta kütle bağlı kompozit kirişin ortotropi oranları  $E_1/E_2=40$  ve  $E_1/E_2=30$  için ilk üç frekansları karşılaştırılmıştır. Tüm değerler için kayma şekil değiştirme teorisinden elde edilen temel frekansların tümü en fazla EBT kadar olmaktadır.

Çizelge 4.44. Dış ucuna kütle bağlı dönen kompozit kirişin ilk üç frekansın farklı ortotropi oranlarına göre değişimi  $\gamma=5$ ,  $\delta=0$ ,  $L/h =5$ , KMEV

$E_1/E_2$	$\alpha$				
	0	0.25	0.5	1	2
40	6.6440	5.3280	4.7080	4.1170	3.6530
	19.430	16.722	16.581	17.373	19.484
	30.934	31.914	32.705	34.900	37.862
30	6.4570	5.1820	4.5930	4.0370	3.6040
	18.877	16.339	16.260	17.106	19.263
	29.887	31.172	32.115	33.284	33.284
20	6.2060	4.9920	4.4440	3.9340	3.5410
	18.121	15.797	15.803	16.725	18.949
	27.734	27.734	27.733	27.733	27.733
10	5.8360	4.7220	4.2400	3.7950	3.4540
	16.860	14.480	14.984	16.038	18.384
	20.280	20.278	20.278	20.278	20.278

Çizelge 4.45. Dış ucuna kütle bağlı dönen kompozit kirişin ilk üç frekansın farklı ortotropi oranlarına göre değişimi  $\gamma=5$ ,  $\delta=1$ ,  $L/h=5$ , KMEV

$E_1/E_2$	$\alpha$				
	0	0.25	0.5	1	2
40	9.0410	7.2160	6.4000	5.6440	5.0610
	24.455	21.119	21.293	22.814	26.172
	37.862	37.870	37.867	37.865	37.865
30	8.8930	7.1000	6.3100	5.5840	5.0240
	23.959	20.794	21.030	22.601	26.001
	33.292	33.288	33.286	33.285	33.285
20	8.6980	6.9510	6.1970	5.5080	4.9780
	23.271	20.329	20.651	22.295	25.752
	27.741	27.735	27.734	27.734	27.735
10	8.4230	6.7470	6.0430	5.4080	4.9180
	20.275	19.793	19.961	20.277	20.278
	22.115	20.281	20.283	21.740	25.305

Çizelge 4.46. Dış ucuna kütle bağlı dönen kompozit kirişin frekanslarının farklı teoriler için farklı hızlarda değişimi  $E_1/E_2=40$ ,  $L/h=10$ ,  $\delta=0.2$ ,  $\eta=1.0$ , KMEV

$\gamma$	Teori	$\alpha$				
		0	0.25	0.5	1	2
0	EBT	6.2950	4.4370	3.6130	2.7910	2.0770
	BMKDT	5.5060	3.9820	3.2650	2.5340	1.8890
	PKDT	5.5010	3.9780	3.2610	2.5310	1.8880
5	EBT	8.7690	6.6550	5.7790	4.9650	4.3390
	BMKDT	8.0570	6.2700	5.4810	4.7410	4.1630
	PKDT	8.0580	6.2700	5.4810	4.7410	4.1640
10	EBT	13.649	10.811	9.6520	8.6060	7.8080
	BMKDT	12.905	10.402	9.3260	8.3420	7.5890
	PKDT	12.910	10.404	9.3270	8.3440	7.5900
15	EBT	19.079	15.348	13.817	12.438	11.383
	BMKDT	18.285	14.894	13.454	12.149	11.151
	PKDT	18.287	14.894	13.454	12.148	11.151
20	EBT	24.658	19.978	18.050	16.312	14.982
	BMKDT	23.846	19.500	17.673	16.020	14.756
	PKDT	23.842	19.497	17.670	16.018	14.754



Çizelge 4.47. Dış ucuna kütle bağlı dönen kompozit kirişin frekanslarının farklı teoriler için farklı hızlarda değişimi,  $E_1/E_2=30$ ,  $L/h=10$ ,  $\delta = 0.2$ ,  $\eta=1.0$ , KMEV

$\gamma$	Teori	$\alpha$				
		0	0.25	0.5	1	2
0	EBT	5.4530	3.8440	3.1310	2.4190	1.7970
	BMKDT	4.9170	3.5380	2.8960	2.2460	1.6740
	PKDT	4.9120	3.5340	2.8930	2.2420	1.6720
5	EBT	8.1810	6.2620	5.4820	4.7600	4.2060
	BMKDT	7.6830	6.0040	5.2760	4.5990	4.0730
	PKDT	7.6830	6.0050	5.2760	4.5990	4.0740
10	EBT	13.252	10.562	9.4630	8.4720	7.7160
	BMKDT	12.679	10.243	9.2060	8.2620	7.5390
	PKDT	12.686	10.246	9.2090	8.2640	7.5410
15	EBT	18.757	15.148	13.664	12.326	11.303
	BMKDT	18.121	14.778	13.368	12.091	11.116
	PKDT	18.130	14.782	13.371	12.094	11.117
20	EBT	24.370	19.799	17.912	16.210	14.908
	BMKDT	23.710	19.407	17.604	15.974	14.727
	PKDT	23.720	19.410	17.607	15.976	14.728

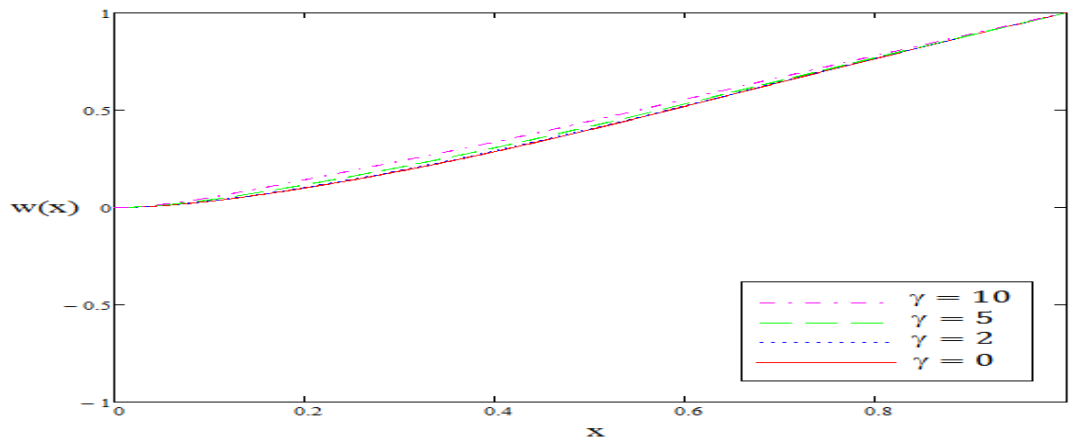
#### 4.4. Mod Biçimleri

Elastik cisimlerin harekete zorlandığında şekilsel olarak değiştiği bilinmektedir. Dönme etkisine maruz kalan kiriş ve plak yapılarda merkezkaç atalet kuvvetinin etkisinin eğilme ve uzama yönünde artmasına neden olur ve şekilsel olarak değişime uğrar. Dönen yapılardan örneğin helikopter kanadında güvenilir tasarımlar için şekilsel özellikler doğru olarak bilinmesi gerekir. Bu nedenle farklı parametreler için dönen kirişin ilk üç frekansı için mod biçimleri ayrıntılı olarak incelenmiştir. Ankastre katmanlı kompozit bir kirişe ait mod biçim denklemi aşağıdaki gibidir.

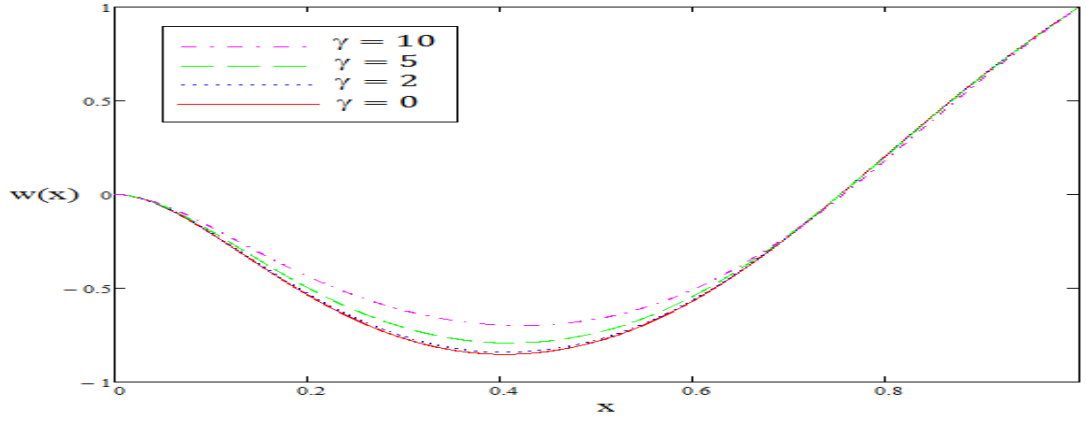
$$w(x) = C_1x^2 + C_2x^3 + C_3x^4 + C_4x^5 + C_5x^6 + C_6x^7 \quad (4.3)$$

##### 4.4.1. Dönen kompozit ankastre kiriş için mod biçimleri

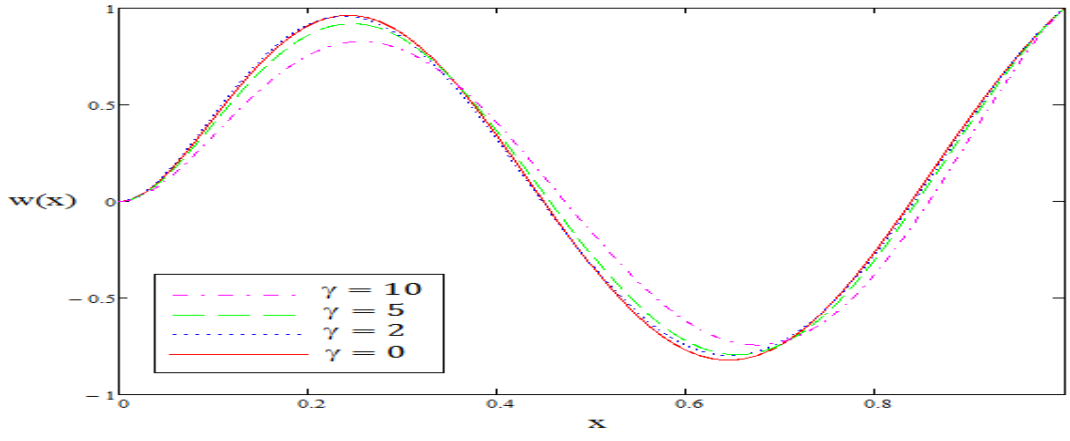
Dönen katmanlı kompozit kirişe ait ilk üç frekansın mod biçimleri farklı boyutsuz dönme hızları için sırasıyla Şekil 4.16-4.18’de verilmiştir. Bu şekillerde sunulan mod biçimlerinin en büyük genlikleri 1’ e normalize edilmiştir. Hızın artmasıyla kirişin aksenal sertleşmesi sebebiyle genliklerin azaldığı gözlenmektedir. Ayrıca artan boyutsuz dönme hızıyla düğüm noktalarının (sıfır genliğe sahip noktalar) kiriş dış ucuna doğru kaydığı gözlenmektedir. Bu özellikler dönem katmanlı kompozit kirişlerin tasarımlarında faydalı olabilir. Buradaki mod biçimlerine ait denklemler Ek-A’da verilmiştir.



Şekil 4.16. Dönen kompozit ankastre kirişlerin birinci mod biçimi



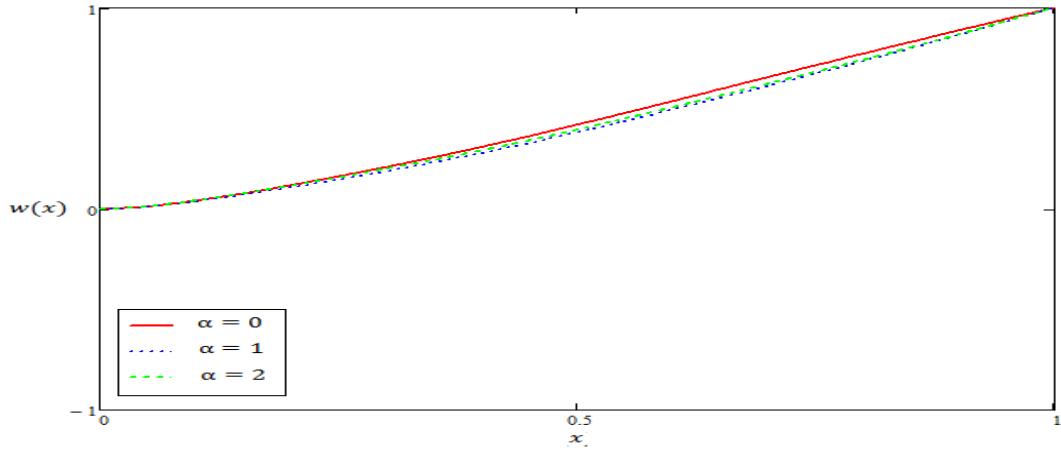
Şekil 4.17. Dönen kompozit ankastre kirişlerin ikinci mod biçimi



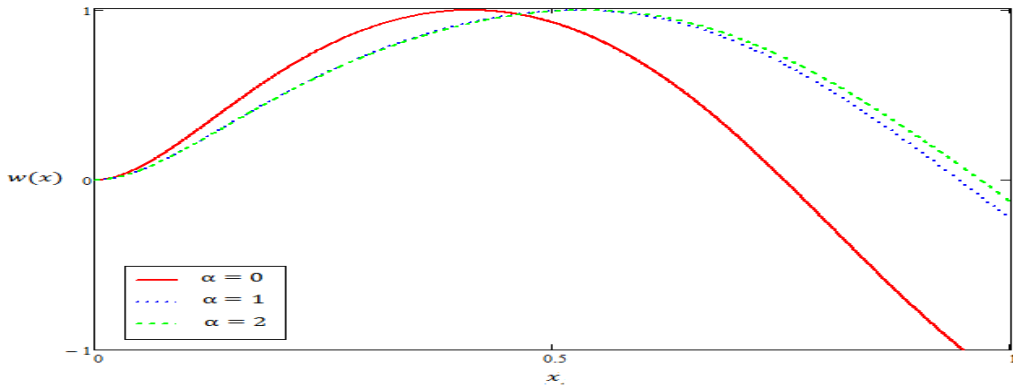
Şekil 4.18. Dönen kompozit ankastre kirişlerin üçüncü mod biçimi

#### 4.4.2.Kütle bağlanmış dönen kompozit ankastre kiriş için mod biçimleri

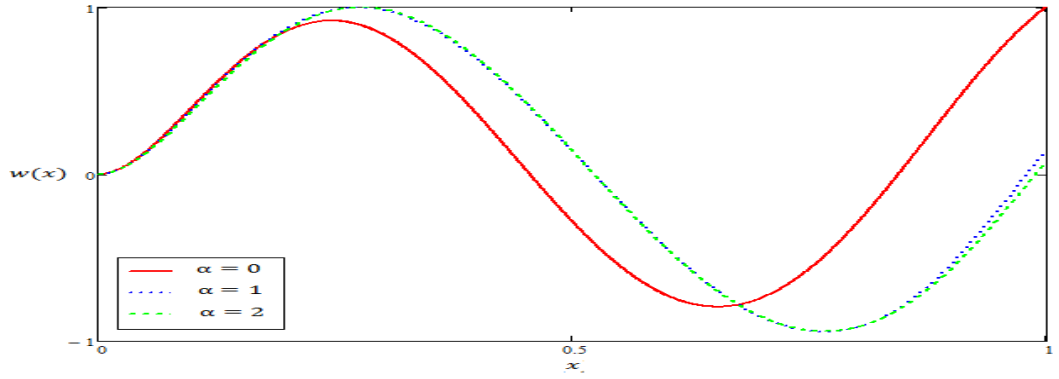
Kütle eklenmiş dönen katmanlı kompozit kirişe ait ilk üç frekansın mod biçimleri farklı kütle oran ve konumları için Şekil 4.18-4.23'te verilmiştir. Bu şekillilerde sunulan mod biçimlerinin en büyük genlikleri 1' e normalize edilmiştir. Kütle dış uca bağlanmışsa ikinci ve üçüncü modlarda bu noktanın yer değiştirmesi azalmaktadır. Bunun yanında düğüm noktaları yine dış uca doğru kaymaktadır. Kütlenin orta noktaya bağlanmasıyla mod biçimlerinde kütle oranlarına bağlı olarak karmaşık bir değişim gözlenmektedir. Buradaki mod biçimine ait denklemler Ek-B'de verilmiştir.



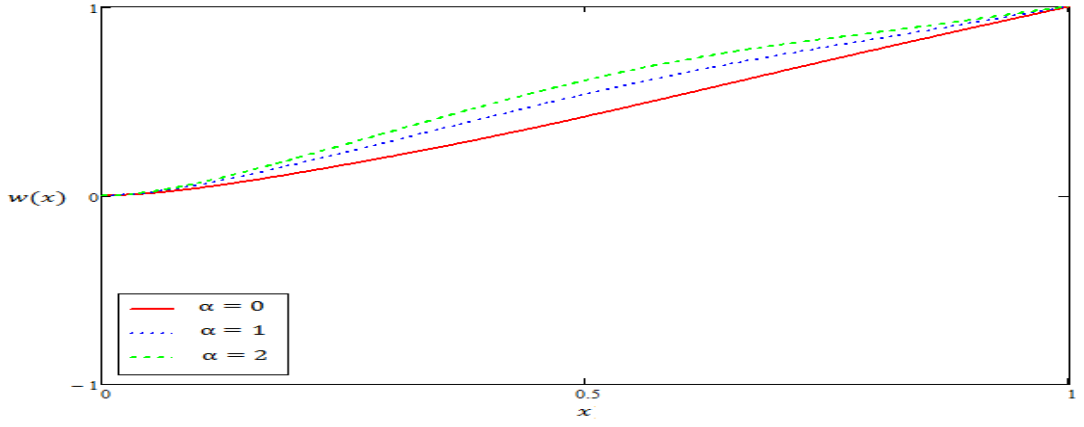
Şekil 4.19. Dönen dış ucunda kütleli ankastre kompozit kirişin birinci mod şekli  
( $E_1/E_2=40$ ,  $L/h=10$ ,  $\gamma=5$ ,  $\delta=0$ ,  $\eta=1.0$ )



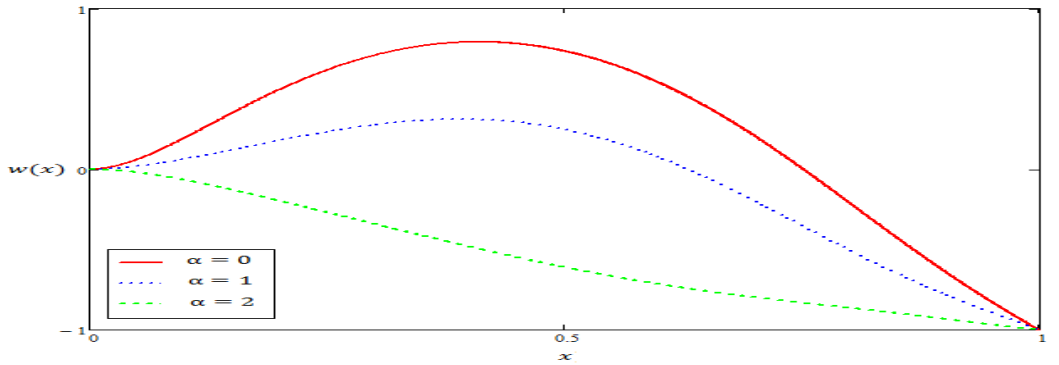
Şekil 4.20. Dönen dış ucunda kütleli ankastre kompozit kirişin ikinci mod şekli  
( $E_1/E_2=40$ ,  $L/h=10$ ,  $\gamma=5$ ,  $\delta=0$ ,  $\eta=1.0$ )



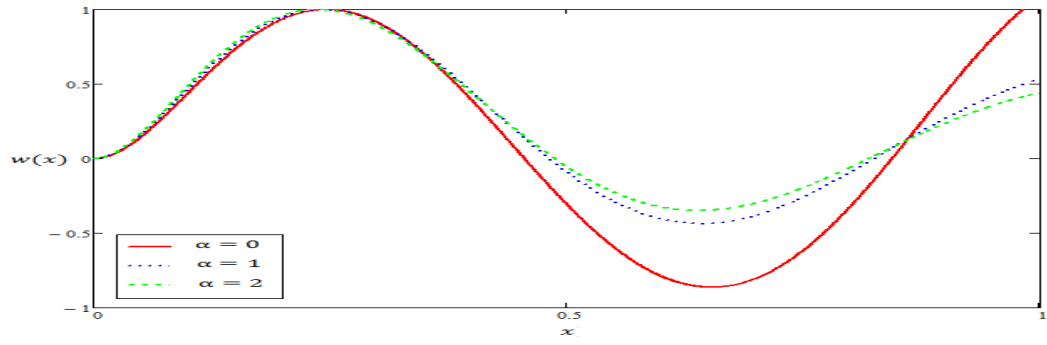
Şekil 4.21. Dönen dış ucunda kütleli ankastre kompozit kirişin üçüncü mod şekli  
( $E_1/E_2=40$ ,  $L/h=10$ ,  $\gamma=5$ ,  $\delta=0$ ,  $\eta=1.0$ )



Şekil 4.22. Dönen dış ucunda kütleli ankastre kompozit kirişin birinci mod şekli  
( $E_1/E_2=40$ ,  $L/h=10$ ,  $\gamma=5$ ,  $\delta=0$ ,  $\eta=0.5$ )



Şekil 4.23. Dönen dış ucunda kütleli ankastre kompozit kirişin ikinci mod şekli  
( $E_1/E_2=40$ ,  $L/h=10$ ,  $\gamma=5$ ,  $\delta=0$ ,  $\eta=0.5$ )



Şekil 4.24. Dönen dış ucunda kütleli ankastre kompozit kirişin üçüncü mod şekli  
 ( $E_1/E_2=40$ ,  $L/h=10$ ,  $\gamma=5$ ,  $\delta=0$ ,  $\eta=0.5$ )

#### 4.5. Dönen katmanlı kompozit plak için Ritz yöntemi ile elde edilen sayısal sonuçlar

Dönen izotrop ve katmanlı kompozit plakların dikine titreşimleri incelenirken bir ucu ankastre diğer uçları serbest olan plakların serbest titreşimi incelenecektir.

Dönen izotrop plaklar için ilk üç frekansının Ritz yönteminde kullanılan terim sayısı boyutuna göre yakınsama çizelgesi aşağıda verilmiştir (Çizelge 4.48). Burada izotrop plak için Poisson oranı  $\nu=0.3$  alınmıştır. Plak boyutları  $a/b=1$  dir. Bu çizelge incelendiğinde  $6 \times 6$  ve  $7 \times 7$  terim sayısı boyutları arasındaki frekans değişimleri incelendiğinde 1. mod için %0.25, 2.mod için %0.001 ve 3. mod için ise %0.07 fark elde edilmiştir. Bu nedenle terim sayısı  $7 \times 7$  alınmasıyla oldukça iyi bir yakınsama göstermiştir.

Çizelge 4.48. İzotrop ankastre (ASSS) plağın ilk üç frekans parametresinin Ritz yöntemi ile yakınsaması  $a/b=1$ ,  $\lambda = \omega L^2 / h \sqrt{\rho / 12E(1 - \nu^2)}$

Terim sayısı (M×N)	1.mod	2.mod	3.mod
2×2	3.5327	8.9844	34.806
3×3	3.4939	8.5970	21.560
4×4	3.4885	8.5463	21.504
5×5	3.4753	8.5441	21.315
6×6	3.4746	8.5135	21.313
7×7	3.4737	8.5134	21.298

Ritz yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların güvenilirliğini sorgulamak amacıyla önce izotrop plağın ilk üç frekansı karşılaştırılmıştır (Çizelge 4.49). Öncelikle izotrop ankastre dönmeyen plaktan elde edilen frekans sonuçları Gorman(Gorman, 1930) 'ın çalışmasıyla karşılaştırıldığında en büyük farkın 2.modda ve % 1.88 olduğu görülmektedir. Bu sonuçlara göre izotrop plak için dönmeyen plak frekansları ile karşılaştırıldığında oldukça iyi bir uyum görülmüştür.

Çizelge 4.49. İzotrop ankastre (ASSS) plak için ilk üç frekans parametresinin karşılaştırılması  $a/b=1$ ,  $\lambda = \omega L^2 / \sqrt{\rho h / 12 E h^3 (1 - \nu^2)}$

Çalışmalar	1.mod	2.mod	3.mod
Leissa (Leissa, 1969)	3.4917	8.5246	21.429
Gorman(Gorman, 1930)	3.4959	8.3560	21.090
Bhumbla 4×4 (SEY)(Bhumbla, 1989)	3.4275	8.0545	20.144
Bhumbla 8×8 (SEY)(Bhumbla, 1989)	3.4338	8.0833	20.752
Ritz (Bu çalışma)	3.4737	8.5134	21.298
% Fark (Leissa)	0.51	0.13	0.61
% Fark (Gorman)	0.63	1.88	0.98

Daha sonra dönen izotrop ankastre plağın titreşim frekansları karşılaştırılmıştır. Buradaki frekansların elde edilmesinde göz önüne alınan  $\lambda_0$  değeri dönmeyen durumdaki frekans değerini göstermektedir. Buradaki ilk üç frekans değerlerine bakıldığında en büyük frekans farkı 3.modda görülmektedir. 1. mod değerlerine bakıldığında %0.40 ile en küçük frekans değeri farkı elde edilmiştir. En büyük frekans farkı %2.19 ile 3. modda elde edilmiştir.

Çizelge 4.50. Ankastre (ASSS) izotrop dönen plak için ilk üç frekans parametresinin karşılaştırılması  $a/b=1$ ,  $\lambda = \omega L^2 / \sqrt{\rho / 12 E h^2 (1 - \nu^2)}$ ,  $\gamma / \lambda_0 = 1$

	$\lambda$		
	1.mod	2.mod	3.mod
Dokainish & Rawtani (1971)	5.097	9.824	22.913
Bhumbla (1989)	5.113	9.635	22.649
Ritz (Bu çalışma)	5.134	9.745	22.421
%Fark (Dokainish&Rawtani)	0.72	0.81	2.19
%Fark (Bhumbla)	0.40	0.81	1.01

Dönen izotrop kiriş için farklı kök oranları ve dönme parametrelerine göre daha önceden yapılmış farklı çalışmalar ile karşılaştırılmıştır. Çizelgedeki karşılaştırmalarda, dönen izotrop kirişin dönme hızı ile farklı kök oranlarında frekansların değişimi Şekil 4.50'de verilmiştir. Buradaki frekans değişimleri incelendiğinde 1. ve 3. mod için frekanslar birbirine yakın değerler alırken 2.mod da fark artmaktadır.  $\delta=0$ ,  $\gamma=1$  iken izotrop dönen plağın frekansları arasında en büyük fark 2. modda oluşmaktadır.



Çizelge 4.51. Dönen izotrop plağa ait ilk üç frekans parametresinin karşılaştırılması  
(a/b=1,  $\delta=0$ )

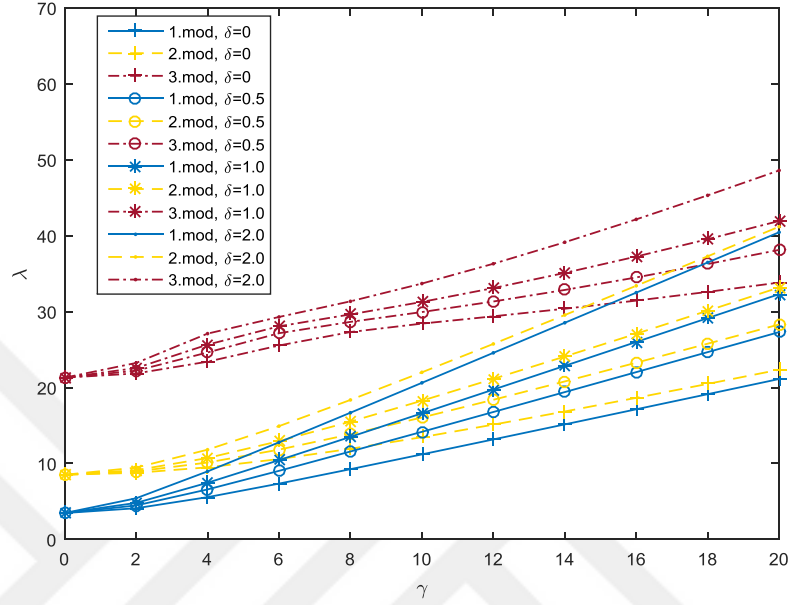
$\gamma$	$\delta$	$\lambda$	Yoo & Kim (2002a)	Southwell & Gough (1921)	Ritz (Bu çalışma)
1	0	1	3.65280	3.65427	3.64192
		2	8.64590	8.64350	8.57658
		3	21.5337	21.5569	21.4397
2	0	1	4.11312	4.11280	4.10360
		2	9.00317	8.98438	8.76756
		3	21.9665	22.0120	21.8560
1	1	1	3.86185	3.80871	3.85167
		2	8.73585	8.72801	8.66779
		3	21.7196	21.7413	21.6259
2	1	1	4.81385	4.63956	4.80607
		2	9.34355	9.30544	9.11682
		3	22.6798	22.7260	22.5663

Dönen izotrop ankastre plağa ait boyutsuz hız parametresine göre farklı kök oranlarında izotrop kirişin dikine yönde frekansları şekilde verilmiştir (Şekil 4.25). Bu şekilden görüldüğü gibi 1.mod ve 2. mod frekans değerleri birbirine yakındır. Dönme hızı arttıkça 1. ve 2. mod değerleri artarak birbirine yakınsamaktadır. 1.mod ve 2.mod değerleri hız parametresinin artışıyla birlikte artmadır ve eğrilerin eğilimleri düşünüldüğünde 3.mod değerlerinin daha düşük artış oranına sahip olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.52. Dönen kompozit plakların KPT ile boyutsuz frekans parametrelerinin farklı açılarda( $\theta$ /- $\theta$ / $\theta$ ) dizlişine göre ilk üç frekans değerleri (ASSS)  $\delta=0.5$   $\gamma=10$ ,  
Malzeme III

Fiber yönlendirme açısı( $\theta$ )	1.mod	2.mod	3.mod
0	23.247	23.304	23.860
15	23.242	23.307	23.895
30	23.231	23.309	23.983
45	23.221	23.304	24.095
60	23.213	23.288	24.214
75	23.210	23.273	24.315
90	23.209	23.267	24.355

Çizelge 4.53 te hız parametresinin  $\delta=0.5$  ve  $\gamma=10$  olduğunda üç katmanlı dönen kompozit plağın KPT ile elde edilen değerleri oldukça birbirine yakındır. Burada görüldüğü gibi hızın artışı ile birlikte frekanslar birbirine oldukça yaklaşmıştır.



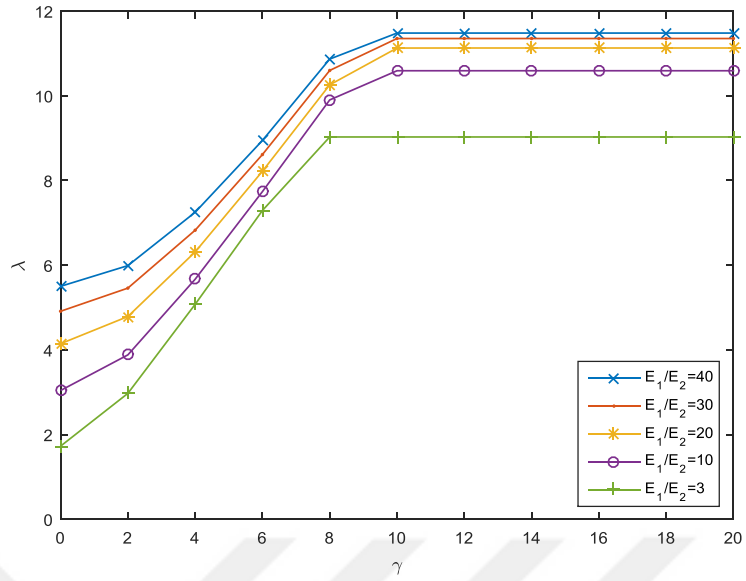
Şekil 4.25. Dönen izotrop plağın farklı kök oranlarına göre ilk üç frekansının hız parametresi ile değişimi

Malzeme III ve Malzeme IV gibi iki farklı kompozit malzeme kullanılarak dönen katmanlı kompozit plakların titreşim frekansları için KPT kullanılarak elde edilen frekans değerleri Çizelge 4.53'te verilmiştir. KPT kullanılarak dönen kompozitler için hız parametresinin artışı ile birlikte frekanslar artmaktadır. Yüksek hızlarda frekans parametresi birbirine 1. 2. ve 3. mod değerleri için yakınsamaktadır. Farklı malzeme özelliklerine sahip kompozit plaklar incelenmesine rağmen hız değeri yaklaşık 5 ve daha büyük dönme frekansına sahip olduğunda frekanslar birbirine oldukça yaklaşır. Kök oranının artması da frekansların birbirine yaklaşmasına katkıda bulunur ve daha düşük hızlarda frekansların birbirine yakınsamasını sağlar.

Çizelge 4.53. Dönen kompozit plağın klasik teori ile ilk üç frekans parametresinin farklı malzemeler için değişimi (30°/-30°/30°)

$\delta$	$\gamma$	Malzeme III			Malzeme IV		
		1.mod	2.mod	3.mod	1.mod	2.mod	3.mod
0	0	0.8660	2.1070	5.3240	0.6520	1.4390	3.1590
	5	8.9550	9.1400	10.685	8.9250	9.0320	9.6340
	10	17.701	17.796	18.649	17.682	17.739	18.072
	15	26.482	26.545	27.129	26.468	26.507	26.739
	20	35.274	35.322	35.129	35.264	35.294	35.471
0.5	0	0.8660	2.1070	5.3240	0.6520	1.4390	3.1590
	5	11.679	11.832	13.092	11.662	11.751	12.237
	10	23.231	23.309	23.983	23.220	23.267	23.531
	15	34.806	34.859	35.317	34.799	34.831	35.013
	20	46.389	46.429	46.776	46.384	46.408	46.547
1	0	0.8660	2.1070	5.3240	0.6520	1.4390	3.1590
	5	13.867	14.003	15.096	13.858	13.931	14.353
	10	27.635	27.703	28.280	27.626	27.667	27.894
	15	41.422	41.468	41.859	41.416	41.443	41.599
	20	55.214	55.249	55.545	55.210	55.231	55.350
2	0	0.8660	2.1070	5.3240	0.6520	1.4390	3.1590
	5	17.429	17.541	18.439	17.417	17.482	17.830
	10	34.782	34.838	35.307	34.775	34.809	34.994
	15	52.149	52.188	52.504	52.145	52.168	52.294
	20	69.522	69.551	69.789	69.518	69.536	69.632

$E_1/E_2$  oranına göre dönen kompozit plağın frekansları Şekil 4.26’da verilmiştir. Hız parametresinin belli bir değer üstüne çıkmasıyla yüksek hız değerleri için frekansların değişmediği gözlemlenmiştir. Bunun nedeni dönen plağın belirli bir değerinden sonra kayma şekil değişim etkisini kaybetmesidir. Dönen kompozit plağın EBT, BMKDT ve PKDT kullanılarak frekanslar Çizelge 4.54’te gösterilmiştir.  $\delta$  ‘nın belirli bir değerine kadar kayma şekil değiştirme teorisinden elde edilen frekanslarda 3. mod değerleri değişmemiştir. Kök oranı arttıkça 2.mod değeri 3. mod frekans değerlerine yaklaşmaktadır.



Şekil 4.26. Döner kompozit dik katmanlı ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) kompozit plağın birinci frekansını farklı hızlarda frekanslarının ortotropi oranına göre değişimi, PKDT, ( $a/b=1, a/h=10, \delta=0.2$ )

Çizelge 4.54. Döner kompozit plağın üç farklı teori ile farklı kök oranlarında ilk üç frekans parametresinin değişimi ( $E_1/E_2=40, \gamma=5, L/h=10$ )

$\delta$	$\lambda$	KPT	PKDT	BMKDT
0	1	8.3300	7.5813	7.5799
	2	8.9271	8.0675	8.0643
	3	14.671	11.481	11.481
0.01	1	8.3534	7.6062	7.6045
	2	8.9485	8.0906	8.0872
	3	14.685	11.481	11.481
0.2	1	8.7853	8.0591	8.0566
	2	9.3521	8.5144	8.5105
	3	14.932	11.481	11.481
0.5	1	9.4257	8.7261	8.7231
	2	9.9545	9.1434	9.1394
	3	15.315	11.481	11.481
1	1	10.404	9.7349	9.7310
	2	10.883	10.103	10.099
	3	15.931	11.481	11.481
2	1	12.121	11.789	11.783
	2	17.094	15.816	15.844
	3	32.572	27.644	28.051

## BÖLÜM 5

### GENEL SONUÇLAR

Dönen kiriş ve plak yapıların titreşimini incelemenin mühendislik açısından önemli bir yeri vardır. Yapıların doğru tasarımı için doğal frekansların ve mod biçimlerinin gerçekçi olarak bilinmesi gerekir. Dönmeyen yapılara göre dönen yapıların titreşim özelliklerinde önemli farklılıklar bulunmaktadır. Bu farklılık dönme hareketinin etkisiyle merkezkaç atalet kuvvetinin ortaya çıkmasıdır. Merkezkaç kuvvetleri yapının katılığının artmasına neden olur ve bu nedenle doğal frekansları ve mod biçimlerini değiştirir.

Bu tezde, dönen katmanlı kompozit ve izotrop kiriş ve plak yapıların dinamik analizleri klasik ve kayma şekil değiştirme teorileri kullanılarak Ritz yöntemi ve DDY yardımıyla incelenmiştir. Simetrik dik katmanlı kompozit kirişlerde katmanlar arası kayma gerilmelerinin sürekliliği de gözönüne alınarak bazı sonuçlar verilmiştir. Ayrıca, kütle eklenmiş dönen izotrop ve katmanlı kompozit kirişlerin titreşimleri çalışılmış ve bazı mod biçimleri de verilmiştir.

Ortotropi oranı, kenar kalınlık oranı, dönme hızı, kök oranı, kütle oranı ve sınır şartlar gibi parametrelerin izotrop ve katmanlı kompozit kiriş ve plakların dinamiği üzerine etkileri detaylı olarak incelenmiştir. Yapılan bu incelemelerden sonra aşağıdaki genel sonuçlara ulaşılmıştır.

\*Dönen kirişin doğal frekansları hız parametresinin artmasıyla artar. Bunun nedeni dönme hızının merkezkaç kuvvetinin artmasına neden olması ve kirişin katılığı artmasıdır. Bu etki yüksek mod sayıları için daha belirgindir. Dönme hızı arttıkça uzama şekil değişimi de artacağından doğal frekanslar artacaktır. Kütle eklenmiş dönen kirişler için frekans parametresi ile dönme parametresi birbirine eşit olduğu dönme rezonanslarına (tuning) rastlanmıştır.

\*Eğer kök oranı sıfır ise ( $\delta=0$ ) frekans parametresi rezonans eğrisine yaklaşarak yakınsar. Yüksek kök oranına ( $\delta>0$ ) sahip kirişler için hızın artışı frekansın rezonans sınırından uzaklaşmasına neden olur.

\*Dönme hızının artışıyla  $E_1/E_2$  oranının artışıyla BFP'si artmaktadır. Yüksek dönme hızlarında  $E_1/E_2$  oranının etkisi hemen hemen kaybolur. Bunun nedeni artan hız ile birlikte kirişteki sertleşmenin etkisinin  $E_1/E_2$  oranının artmasıyla olan etkiye göre önem kazanmasıdır.

\*L/h oranı arttıkça farklı teoriler ile elde edilen frekans sonuçları birbirlerine yaklaşmaktadır. Ayrıca dönen kompozit kiriş için L/h oranı arttıkça kayma şekil değiştirme etkisi azalmaktadır.

\*Dönen kirişlerin sınırlarındaki kısıtlar arttıkça hız parametresinin artışı ile frekans değerleri artmaktadır.

\*Katmanlı kompozit kirişlerde düşey kayma gerilmelerinin sürekliliğinin sağlandığı durumlarda elde edilen frekans değerleri sürekliliğin sağlanmadığı durumda elde edilenlerden %5 daha düşüktür.

\*Dönme hızının titreşim frekansına etkisi plaklarla kıyaslandığında kirişlerde daha belirgindir.

\*Kompozitlerin serbest titreşimleri için yapının düşük ortotropi oranı ve yüksek L/h oranları için klasik teori ile kayma şekil değiştirme teorileri ile elde edilen frekans değerleri arasındaki farklar az iken, ortotropi oranının artışı ve L/h oranının azalmasıyla artmaktadır. Bunun nedeni ikinci durumda düşey kayma gerilmelerinin etkilerinin öneminin artmasıdır.

\*Bu çalışmada kullanılan Ritz ve DDY yöntemleri dönen kompozitlerin dönme davranışlarının analizine kolaylıkla uygulanabilmektedir. Ancak, DDY yönteminin yüksek mertebe kayma deformasyonlu teorilere uygulanmasında bazı güçlüklerle karşılaşmaktadır.

\*Kirişin dönme hızı arttıkça kayma şekil değiştirme teorisinden elde edilen frekans değerleri EBT teorisinden elde edilen değerlere yakınsamaktadır.

\*Kütle eklenmesi ile dönen kirişlerin frekansları azalmaktadır. Bunun nedeni yapının katılığının değişmemesine rağmen kütesinin artmasıdır. Kütlelerin merkezkaç

etkisinin göz önüne alınmaması durumunda, kütle bağlanmamış kirişin frekanslarına göre değişim daha belirgindir. Kütlenin konumunun etkisi serbest uca yaklaştıkça daha artmaktadır. Kütle bağlantı noktasının düğüm noktasına yaklaşmasıyla etkisi azalmakta ve kütlenin bir düğüm noktasına bağlanmasıyla tamamen kaybolmaktadır.

Bu çalışma genel katmanlı kompozit kiriş ve plak yapılara genişletilebilir. Ayrıca son yıllarda büyük ilgi çeken nanoteknolojiye uygulanabilir. Yapının dönme hızı arttıkça yapının değişen şekilsel özellikleri güvenilir tasarımlar için doğru şekilde tanımlanmalıdır.



## KAYNAKLAR

- Ahn, H. J. (1983). On random transverse vibrations of a rotating beam with a tip mass: Method of integral equations. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 36(1), 97-109.
- Arumugam, A., Rajamohan, V., Pandey, A., & Sudhagar, P. (2017). Finite element vibration analysis of rotating laminated composite beam with varying cross-section using HSDT. *International Journal on Interactive Design and Manufacturing (IJIDeM)*, 11(3), 703-712.
- Arvin, H., & Bakhtiari-Nejad, F. (2013). Nonlinear free vibration analysis of rotating composite Timoshenko beams. *Composite Structures*, 96, 29-43.
- Arvin, H., & Lacarbonara, W. (2014). A fully nonlinear dynamic formulation for rotating composite beams: Nonlinear normal modes in flapping. *Composite Structures*, 109, 93-105.
- Auciello, N. (2013a). *Dynamic analysis of rotating tapered Rayleigh beams using two general approaches*. Paper presented at the Proceedings in EIIC-The 2nd Electronic International Interdisciplinary Conference.
- Auciello, N. (2013b). *Flapwise bending vibration of rotating Euler-Bernoulli beam with non-uniform tapers*. Paper presented at the Proceedings in Scientific Conference.
- Aydogdu, M. (2006). Free vibration analysis of angle-ply laminated beams with general boundary conditions. *Journal of Reinforced plastics and composites*, 25(15), 1571-1583.
- Aydogdu, M. (2009). A new shear deformation theory for laminated composite plates. *Composite Structures*, 89(1), 94-101.
- Aydogdu, M., & Timarci, T. (2003). Vibration analysis of cross-ply laminated square plates with general boundary conditions. *Composites Science and Technology*, 63(7), 1061-1070.
- Banerjee, J., & Kennedy, D. (2014). Dynamic stiffness method for inplane free vibration of rotating beams including Coriolis effects. *Journal of Sound and Vibration*, 333(26), 7299-7312.
- Bauchau, O., & Craig, J. (2009). *Structural analysis: with applications to aerospace structures* (Vol. 163): Springer Science & Business Media.
- Bhat, R. (1986). Transverse vibrations of a rotating uniform cantilever beam with tip mass as predicted by using beam characteristic orthogonal polynomials in the Rayleigh-Ritz method. *Journal of Sound and Vibration*, 105(2), 199-210.
- Bhumbla, R. (1989). *A study of vibrations in rotating laminated composite plates accounting for shear deformation and rotary inertia*. Virginia Tech,
- Boyce, W. E., & Handelman, G. H. (1961). Vibrations of rotating beams with tip mass. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 12(5), 369-392.
- Carnegie, W., & Thomas, J. (1972). The Coupled Bending-Bending Vibration of Pre-Twisted Tapered Blading. *Journal of Engineering for Industry*, 94(1), 255-266.
- Carrera, E., Filippi, M., & Zappino, E. (2013). Free vibration analysis of rotating composite blades via Carrera Unified Formulation. *Composite Structures*, 106, 317-325.



- Chandiramani, N., Librescu, L., Saxena, V., & Kumar, A. (2004). Optimal vibration control of a rotating composite beam with distributed piezoelectric sensing and actuation. *Smart materials and structures*, 13(2), 433.
- Chandiramani, N., Librescu, L., & Shete, C. (2002). On the free-vibration of rotating composite beams using a higher-order shear formulation. *Aerospace Science and Technology*, 6(8), 545-561.
- Chandra, R., & Chopra, I. (1992). Experimental-theoretical investigation of the vibration characteristics of rotating composite box beams. *Journal of Aircraft*, 29(4), 657-664.
- Chandrashekhara, K., & Bangera, K. (1993). Vibration of symmetrically laminated clamped-free beam with a mass at the free end. *Journal of Sound and Vibration*, 160(1), 93-101.
- Chandrashekhara, K., Krishnamurthy, K., & Roy, S. (1990). Free vibration of composite beams including rotary inertia and shear deformation. *Composite Structures*, 14(4), 269-279.
- Chen, J., Ding, Y., & Ding, H. (2016). An efficient approach for dynamic analysis of a rotating beam using the discrete singular convolution. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 230(20), 3642-3654.
- Chen, W., Lv, C., & Bian, Z. (2003). Elasticity solution for free vibration of laminated beams. *Composite Structures*, 62(1), 75-82.
- Chen, W., Lv, C., & Bian, Z. (2004). Free vibration analysis of generally laminated beams via state-space-based differential quadrature. *Composite Structures*, 63(3-4), 417-425.
- Chung, J., & Yoo, H. H. (2002). Dynamic analysis of a rotating cantilever beam by using the finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, 249(1), 147-164.
- Coşkun, S. B., Atay, M. T., & Öztürk, B. (2011). Transverse vibration analysis of Euler-Bernoulli beams using analytical approximate techniques. In F. Ebrahimi (Ed.), *Advances in Vibration Analysis Research*: InTech.
- Deshpande, M., & Mote, C. (2003). In-plane vibrations of a thin rotating disk. *Journal of vibration and acoustics*, 125(1), 68-72.
- Dokainish, M., & Rawtani, S. (1971). Vibration analysis of rotating cantilever plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 3(2), 233-248.
- Dokumaci, E., Thomas, J., & Carnegie, W. (1967). Matrix displacement analysis of coupled bending-bending vibrations of pretwisted blading. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 9(4), 247-254.
- Du, H., Lim, M., & Liew, K. (1994). A power series solution for vibration of a rotating Timoshenko beam. *Journal of Sound and Vibration*, 175(4), 505-523.
- Ebrahimi, F., & Mokhtari, M. (2016). Free vibration analysis of a rotating Mori-Tanaka-based functionally graded beam via differential transformation method. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 41(2), 577-590.
- Farhadi, S., & Hosseini-Hashemi, S. (2011). Aeroelastic behavior of cantilevered rotating rectangular plates. *International Journal of Mechanical Sciences*, 53(4), 316-328.
- Ghayour, R., Ghayour, M., & Ziaei-Rad, S. (2010). Vibration analysis of tapered rotating composite beams using the hierarchical finite element. *Applied and Computational Mechanics*, 4(2), 157-170.

- Gorman, D. (1930). *Free Vibration Analysis of Rectangular Plates*. Newyork: ELsevier
- Gupta, R., & Rao, S. (1978). Finite element eigenvalue analysis of tapered and twisted Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, 56(2), 187-200.
- Hashemi, S., & Arsanjani, M. (2005). Exact characteristic equations for some of classical boundary conditions of vibrating moderately thick rectangular plates. *International Journal of Solids and Structures*, 42(3-4), 819-853.
- Hashemi, S., Farhadi, S., & Carra, S. (2009). Free vibration analysis of rotating thick plates. *Journal of Sound and Vibration*, 323(1-2), 366-384.
- Herakovich, C. (1998). *Mechanics of fibrous composites*. Newyork: John Wiley
- Hodges, D. H. (1979). Vibration and response of nonuniform rotating beams with discontinuities. *Journal of the American Helicopter Society*, 24(4), 43-50.
- Hodges, D. H., Chung, Y. Y., & Shang, X. Y. (1992). *Discrete transfer matrix method for rotating beams*. Paper presented at the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, 33 rd, Dallas, TX.
- Hodges, D. H., & Rutkowski, M. J. (1981). Free vibration analysis of rotating beams by a variable-order finite-element method. *AIAA*, 19(11), 1459-1466.
- Hong, C. H., & Chopra, I. (1985). Aeroelastic stability analysis of a composite rotor blade. *Journal of the American Helicopter Society*, 30(2), 57-67.
- Hong, C. H., & Chopra, I. (1986). Aeroelastic stability analysis of a composite bearingless rotor blade. *Journal of the American Helicopter Society*, 31(4), 29-35.
- <http://nptel.ac.in/courses/112104116/4>.
- Jones, R. (1999). *Mechanics of Composite Materials*. USA: Taylor and Francis Inc.
- Karama, M., Afaq, K., & Mistou, S. (2003). Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. *International Journal of Solids and Structures*, 40(6), 1525-1546.
- Karmakar, A., & Sinha, P. (1997). Finite element free vibration analysis of rotating laminated composite pretwisted cantilever plates. *Journal of Reinforced plastics and composites*, 16(16), 1461-1491.
- Khulief, Y. (1989). Vibration frequencies of a rotating tapered beam with end mass. *Journal of Sound and Vibration*, 134(1), 87-97.
- Kim, H., Yoo, H. H., & Chung, J. (2013). Dynamic model for free vibration and response analysis of rotating beams. *Journal of Sound and Vibration*, 332(22), 5917-5928.
- Kirchhoff, G. (1850). On the equilibrium and deflection of an elastic plate German. *J. Reine Angew. Math*, 40, 51-88.
- Kirchoff, G. (1850). Uber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. *Journal fur die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal)*, 40, 51-88.
- Krishnaswamy, S., Chandrashekhara, K., & Wu, W. (1992). Analytical solutions to vibration of generally layered composite beams. *Journal of Sound and Vibration*, 159(1), 85-99.
- Langhaar, H. L. (1962). *Energy methods in applied mechanics*: John Willey&Sons Inc.
- Laura, P., Pombo, J., & Susemihl, E. (1974). A note on the vibrations of a clamped-free beam with a mass at the free end. *Journal of Sound and Vibration*, 37(2), 161-168.
- Leissa, A. (1969). *Vibration of plates* (SP-160). Retrieved from Wahington DC:

- Leissa, A. (1980). Vibrations of turbine engine blades by shell analysis. *Shock Vib. Dig*, 12(11), 3-10.
- Leissa, A. (1981). Vibrational aspects of rotating turbomachinery blades. *Appl. Mech. Rev*, 34(5), 629-635.
- Lekhnitski, S. (1968). *Anisotropic Plates (2nd Edn)(translated by SW Tsai and T. Cheron)*.
- Liebers, F. (1930). *Contribution to the theory of propeller vibrations* (NACA-TM-568). Retrieved from
- Love, A. (1920). *A treatise on the mathematical theory of elasticity*: at the University Press.
- Love, A. (1934). *Mathematical theory of elasticity*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Mindlin, R. D. (1951). Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of applied mechanics*, 18, 31.
- Ozdemir, O., & Kaya, M. O. (2006). Flapwise bending vibration analysis of a rotating tapered cantilever Bernoulli–Euler beam by differential transform method. *Journal of Sound and Vibration*, 289(1), 413-420.
- Ozgunus, O. O., & Kaya, M. O. (2006). Flapwise bending vibration analysis of double tapered rotating Euler–Bernoulli beam by using the differential transform method. *Meccanica*, 41(6), 661-670.
- Ozgunus, O. O., & Kaya, M. O. (2007). Energy expressions and free vibration analysis of a rotating double tapered Timoshenko beam featuring bending–torsion coupling. *International journal of engineering science*, 45(2), 562-586.
- Park, J., & Kim, J. (1999). Dynamic analysis of rotating curved beam with a tip mass. *Journal of Sound and Vibration*, 228(5), 1017-1034.
- Patel, B., Ganapathi, M., & Touratier, M. (1999). Free Vibrations Analysis of Laminated Composite Rotating Beam using C'Shear Flexible Element. *Defence Science Journal*, 49(1), 3.
- Piovan, M., Sampaio, R., & Ramirez, J. (2012). Dynamics of rotating non-linear thin-walled composite beams: analysis of modeling uncertainties. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 34(SPE2), 612-621.
- Pister, K., & Dong, S. (1959). Elastic bending of layered plates. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 85(4), 1-10.
- Qatu, M. S. (1991). Free vibration of laminated composite rectangular plates. *International Journal of Solids and Structures*, 28(8), 941-954.
- Rafiee, M., Nitzsche, F., & Labrosse, M. (2017). Dynamics, vibration and control of rotating composite beams and blades: A critical review. *Thin-Walled Structures*, 119, 795-819.
- Ramamurti, V., & Kielb, R. (1984). Natural frequencies of twisted rotating plates. *Journal of Sound and Vibration*, 97(3), 429-449.
- Rand, O. (1995). Experimental study of the natural frequencies of rotating thin-walled composite blades. *Thin-Walled Structures*, 21(2), 191-207.
- Rao, S., & Gupta, R. (2001). Finite element vibration analysis of rotating Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, 242(1), 103-124.
- Reddy, J. (2002). *Energy principles and variational methods in applied mechanics*: John Wiley & Sons.
- Reddy, J. N. (1984). A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of applied mechanics*, 51(4), 745-752.

- Reissner, E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. appl. Mech.*, A69-A77.
- Reissner, E. (1961). On some variational theorems in elasticity. *Problem in Continuum Mechanics. Philadelphia: SIAM*, 370-381.
- Reissner, E. (1985). Reflections on the theory of elastic plates. *Applied mechanics reviews*, 38(11), 1453-1464.
- Ren, Y. S., Du, X. H., & Yao, W. L. (2010). *On the Modeling of Coupled Vibration of Rotating Thin-Walled Closed-Section Composite Beams*. Paper presented at the Applied Mechanics and Materials.
- Ren, Y. S., Sun, S. S., & Zhang, C. J. (2013). *Nonlinear natural frequencies of rotating composite thin-walled beam with geometrical nonlinear*. Paper presented at the Advanced Materials Research.
- Ritz, W. (1909). Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 135, 1-61.
- Roark, R. J. (1954). *Formulas for stress and strain* (Third Edition ed.). Newyork: Mc Graw Hill Book Comp. .
- Sabuncu, M., & Thomas, J. (1992). Vibration characteristics of pretwisted aerofoil cross-section blade packets under rotating conditions. *AIAA journal*, 30(1), 241-250.
- Schilhansl, M. (1958). Bending frequency of a rotating cantilever beam. *Journal of applied mechanics*, 25(1), 28-30.
- Sina, S., & Haddadpour, H. (2014). Axial-torsional vibrations of rotating pretwisted thin walled composite beams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 80, 93-101.
- Smith, C. (1953). Some new types of orthotropic plates laminated of orthotropic material. *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, 20, 286-288.
- Soldatos, K. (1992). A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. *Acta Mechanica*, 94(3-4), 195-220.
- Soldatos, K., & Timarci, T. (1993). A unified formulation of laminated composite, shear deformable, five-degrees-of-freedom cylindrical shell theories. *Composite Structures*, 25(1-4), 165-171.
- Song, O., & Librescu, L. (1997). Structural Modeling and Free Vibration Analysis of Rotating Composite Thin-Walled Beams. *Journal of the American Helicopter Society*, 42(4), 358-369.
- Song, O., Librescu, L., & Oh, S. (2001). Vibration of pretwisted adaptive rotating blades modeled as anisotropic thin-walled beams. *AIAA journal*, 39(2), 285-295.
- Southwell, R., & Gough, F. (1921). *The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades, British ARC Reports and Memoranda No. 766*. Retrieved from
- Stavsky, Y. (1964). On the general theory of heterogeneous aeolotropic plates. *The Aeronautical Quarterly*, 15(1), 29-38.
- Tang, A.-Y., Li, X.-F., Wu, J.-X., & Lee, K. (2015). Flapwise bending vibration of rotating tapered Rayleigh cantilever beams. *Journal of Constructional Steel Research*, 112, 1-9.
- Theodorsen, T. (1935). *Propeller Vibrations and the Effect of the Centrifugal Force* (NACA-TN-516). Retrieved from

- Timarci, T., & Soldatos, K. (1995). Comparative dynamic studies for symmetric cross-ply circular cylindrical shells on the basis of a unified shear deformable shell theory. *Journal of Sound and Vibration*, 187(4), 609-624.
- Timoshenko, S., & Woinowsky-Krieger, S. (1956). Theory of Plates and Shells, New York, London, 1940. *Eingegangen am 25. 10.*
- Timoshenko, S. P. (1921). On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 41(245), 744-746.
- Timoshenko, S. P. (1922). On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 43(253), 125-131.
- Timoshenko, S. P. (1934). *Theory of elasticity*: McGraw-Hill, New York.
- Touratier, M. (1991). An efficient standard plate theory. *International journal of engineering science*, 29(8), 901-916.
- Vinson, J., & Sierakowski, R. (2006). *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*: Springer Netherlands.
- Vo, T. P., & Thai, H.-T. (2012). Vibration and buckling of composite beams using refined shear deformation theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, 62(1), 67-76.
- Wang, C., Reddy, J., & Lee, K. (2000). *Shear deformable beams and plates: Relationships with classical solutions*: Elsevier.
- Wang, Y., & Zhu, D. (1996). Research progress of composite thin-walled rotating beams. *Advances in Mechanics*, 26(2), 179-186.
- Wright, A., Smith, C., Thresher, R., & Wang, J. (1982). Vibration modes of centrifugally stiffened beams. *Journal of applied mechanics*, 49(1), 197-202.
- Yamanouchi, M., & Koizumi, M. (1991). *Functionally gradient materials*. Paper presented at the FGM 90, Sendai-Japan.
- Yan, S., Zhang, Z., Wei, D., & Li, X. (2011). Bending vibration of rotating tapered cantilevers by integral equation method. *AIAA journal*, 49(4), 872-876.
- Yokoyama, T. (1988). Free vibration characteristics of rotating Timoshenko beams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 30(10), 743-755.
- Yoo, H., & Kim, S. (2002a). Flapwise bending vibration of rotating plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55(7), 785-802.
- Yoo, H., & Kim, S. (2002b). Free vibration analysis of rotating cantilever plates. *AIAA journal*, 40(11), 2188-2196.
- Yoo, H., & Pierre, C. (2003). Modal characteristic of a rotating rectangular cantilever plate. *Journal of Sound and Vibration*, 259(1), 81-96.
- Yoo, H., & Shin, S. (1998). Vibration analysis of rotating cantilever beams. *Journal of Sound and Vibration*, 212(5), 807-828.
- Zhou, J. (1986). *Differential transformation and its applications for electrical circuits*: Huazhong University Press, Wuhan, China.

## EKLER

### Ek A-Döner kompozit ankastre kirişin mod biçimi denklemleri

#### 1. mod biçimleri

$$w_1(x) = 94872.64x^2 - 304904.90x^3 + 683477.77x^4 - 868930.31x^5 + 562693.27x^6 - 145153.85x^7 \quad (\gamma = 0) \quad \text{A.1}$$

$$w_1(x) = 84023.72x^2 - 263364.56x^3 + 561435.77x^4 - 680795.19x^5 + 422819.00x^6 - 105072.47x^7 \quad (\gamma = 2) \quad \text{A.2}$$

$$w_1(x) = 59536.67x^2 - 212046.50x^3 + 462569.93x^4 - 560543.14x^5 + 348015.79x^6 - 86693.58x^7 \quad (\gamma = 5) \quad \text{A.3}$$

$$w_1(x) = 29503.14x^2 - 111346.40x^3 + 231064.97x^4 - 259886.76x^5 + 149041.66x^6 - 34222.87x^7 \quad (\gamma = 10) \quad \text{A.4}$$

#### 2. mod biçimleri

$$w_2(x) = 21186.75x^2 - 93397.37x^3 + 190937.19x^4 - 229472.23x^5 + 148890.30x^6 - 39319.93x^7 \quad (\gamma = 0) \quad \text{A.5}$$

$$w_2(x) = 20753.04x^2 - 90098.24x^3 + 186206.88x^4 - 225765.93x^5 + 147227.09x^6 - 38974.73x^7 \quad (\gamma = 2) \quad \text{A.6}$$

$$w_2(x) = 16929.86x^2 - 75645.52x^3 + 162046.40x^4 - 201547.78x^5 + 132927.48x^6 - 35264.37x^7 \quad (\gamma = 5) \quad \text{A.7}$$

$$w_2(x) = 10449.132x^2 - 49290.60x^3 + 112085.84x^4 - 144410.29x^5 + 96185.41x^6 - 25393.23x^7 \quad (\gamma = 10) \quad \text{A.8}$$

#### 3. mod biçimleri

$$w_3(x) = 7445.71x^2 - 35159.87x^3 + 53813.86x^4 - 26873.07x^5 + 4006.95x^6 - 4883.57x^7 \quad (\gamma = 0) \quad \text{A.9}$$

$$w_3(x) = 7395.57x^2 - 37817.53x^3 + 68982.04x^4 - 56603.05x^5 + 20841.63x^6 - 2703.77x^7 \quad (\gamma = 2) \quad \text{A.10}$$

$$w_3(x) = 6003.38x^2 - 28139.16x^3 + 43560.40x^4 - 24286.44x^5 + 671.82x^6 - 2279.47x^7 \quad (\gamma = 5) \quad \text{A.11}$$

$$w_3(x) = 3464.83x^2 - 15711.41x^3 + 24108.43x^4 - 15182.46x^5 + 3706.27x^6 - 323.60x^7 \quad (\gamma = 10) \quad \text{A.12}$$



## Ek B-Dönen dış uçta kütleli kompozit ankastre kirişin mod biçimi denklemleri

### 1. mod biçimleri ( $\eta=1.0$ )

$$w_1(x) = 60415.08x^2 - 220792.03x^3 + 493024.50x^4 - 609921.58x^5 + 385942.03x^6 - 97851.98x^7 \quad (\alpha = 0) \quad \text{B.1}$$

$$w_1(x) = 183638.15x^2 - 737605.29x^3 + 1748431.59x^4 - 2261944.96x^5 + 1491445.11x^6 - 393069.62x^7 \quad (\alpha = 1) \quad \text{B.2}$$

$$w_1(x) = 259329.54x^2 - 10073791.48x^3 + 2560561.78x^4 - 3309016.94x^5 + 2179288.17x^6 - 573670.65x^7 \quad (\alpha = 2) \quad \text{B.3}$$

### 2. mod biçimleri( $\eta=1.0$ )

$$w_2(x) = 16929.86x^2 - 75645.52x^3 + 162046.40x^4 - 201547.78x^5 + 132947.48x^6 - 35264.37x^7 \quad (\alpha = 0) \quad \text{B.4}$$

$$w_2(x) = 16589.77x^2 - 71449.51x^3 + 154538.75x^4 - 190496.55x^5 + 121754.64x^6 - 31077.47x^7 \quad (\alpha = 1) \quad \text{B.5}$$

$$w_2(x) = 14345.70x^2 - 61965.49x^3 + 133850.79x^4 - 163890.20x^5 + 103944.02x^6 - 26348.32x^7 \quad (\alpha = 2) \quad \text{B.6}$$

### 3. mod biçimleri( $\eta=1.0$ )

$$w_3(x) = 6003.38x^2 - 28139.16x^3 + 43560.40x^4 - 24286.44x^5 + 671.82x^6 + 2279.49x^7 \quad (\alpha = 0) \quad \text{B.7}$$

$$w_3(x) = 7709.26x^2 - 37690.32x^3 + 73994.46x^4 - 78974.63x^5 + 47510.79x^6 - 12533.93x^7 \quad (\alpha = 1) \quad \text{B.8}$$

$$w_3(x) = 6707.58x^2 - 30907.26x^3 + 54802.81x^4 - 50892.28x^5 + 26790.85x^6 - 6494.21x^7 \quad (\alpha = 2) \quad \text{B.9}$$



### **1. mod biçimleri( $\eta=0.5$ )**

$$w_1(x) = 59536.67x^2 - 212046.50x^3 + 462569.93x^4 - 560543.14x^5 + 348015.79x^6 - 86693.58x^7 \quad (\alpha = 0) \quad \text{B.10}$$

$$w_1(x) = 97200.16x^2 - 354383.21x^3 + 793227x^4 - 1049832.28x^5 + 728161.95x^6 - 202125.12x^7 \quad (\alpha = 1) \quad \text{B.11}$$

$$w_1(x) = 131385.31x^2 - 475025x^3 + 1055422.02x^4 - 1424070.40x^5 + 1015495.65x^6 - 289203.81x^7 \quad (\alpha = 2) \quad \text{B.12}$$

### **2. mod biçimleri( $\eta=0.5$ )**

$$w_2(x) = 16929.86x^2 - 75645.52x^3 + 162046.40x^4 - 201547.78x^5 + 132927.48x^6 - 35264.37x^7 \quad (\alpha = 0) \quad \text{B.13}$$

$$w_2(x) = 52295.65x^2 - 197592.80x^3 + 426802.85x^4 - 682502.95x^5 + 587118.03x^6 - 191750.57x^7 \quad (\alpha = 1) \quad \text{B.14}$$

$$w_2(x) = 131385.31x^2 - 475025x^3 + 1055422.02x^4 - 1424070.40x^5 + 1015495x^6 - 289203.81x^7 \quad (\alpha = 2) \quad \text{B.15}$$

### **3. mod biçimleri ( $\eta=0.5$ )**

$$w_3(x) = 6003.38x^2 - 28139.16x^3 + 43560.40x^4 - 24286.44x^5 + 671.82x^6 + 2279.49x^7 \quad (\alpha = 0) \quad \text{B.16}$$

$$w_3(x) = 5879.31x^2 - 30824.26x^3 + 59422.16x^4 - 52422.54x^5 + 20592.51x^6 - 2608.72x^7 \quad (\alpha = 1) \quad \text{B.17}$$

$$w_3(x) = 5676.35x^2 - 31538.27x^3 + 66716.65x^4 - 68086.11x^5 + 33903.78x^6 - 6644.07x^7 \quad (\alpha = 2) \quad \text{B.18}$$

## ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Denizli'nin Sarayköy İlçesinde doğdu. Orta öğrenimini Denizli Sarayköy Lisesinde tamamladı. 2007 yılında Trakya Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümünden mezun oldu. 2007 yılında Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisansa başladı. 2010 yılında Şubat ayından beri Trakya Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makine Mühendisliği bölümü Mekanik kürsüsünde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır. 2010 yılında yüksek lisansı onur derecesiyle bitirmiştir. Aynı yıl Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilim Dalında doktora başlamıştır. 2013 yılında askerlik görevini tamamlamıştır.

## TEZ ÖĞRENCİSİNE AİT TEZ İLE İLGİLİ BİLİMSEL FAALİYETLER

### 1. Uluslararası makale (SCI – SCI Exp.)

- a) **Tolga Aksencer**, Metin Aydogdu, “Vibration of a rotating composite beam with an attached point mass”, Composite Structures, Volume 190, 15 April 2018, Pages 1-9.
- b) **Tolga Aksencer**, Metin Aydogdu, “Flapwise vibration of rotating composite beams”, Composite Structures, Volume 134, 15 December 2015, Pages 672–679.

### 2. Uluslararası bildiri

- a) **Tolga Aksencer**, Metin Aydogdu, “Effects on an attached mass on the vibration analysis of rotating composite beams”, 3rd International Conference on Mechanics of Composites, 2017, Bologna / Italy.
- b) Metin Aydogdu, **Tolga Aksencer**, “ Flapwise vibration of a rotating composite cantilever plate”, 3rd International Conference on Mechanics of Composites, 2017, Bologna / Italy.
- c) **Tolga Aksencer**, Metin Aydogdu, “ Dynamic analysis of rotating composite beams with general boundary conditions”, 2nd International Conference on Mechanics of Composites, 2016, Porto / Portugal.
- d) **Tolga Aksencer**, Metin Aydogdu, “ Free vibration of rotating composite beams”, International Conference on Advances in Composite Materials and Structures, 2015, Istanbul / Turkey.