

Trigonometrik B-Spline Subdomain Galerkin Yöntemi ile
Zamana Bağlı Bir Boyutlu Lineer Olmayan
Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemlerin
Yaklaşık Çözümleri

Buket Ay

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Aralık 2015

Numerical Solutions of The Time-Dependent
One-Dimensional Nonlinear Partial Differential Equations
Using Trigonometric B-spline Subdomain Galerkin Method

Buket Ay

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics-Computer

December 2015

Trigonometrik B-spline Subdomain Galerkin Yöntemi ile
Zamana Bağlı Bir Boyutlu Lineer Olmayan
Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemlerin
Yaklaşık Çözümleri

Buket Ay

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. İdiris Dağ

Aralık 2015

ONAY

Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Buket Ay'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Trigonometrik B-spline Subdomain-Galerkin Yöntemi ile Zamana Bağlı Bir Boyutlu Lineer Olmayan Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. İdiris Dağ

İkinci Danışman : -

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. İdiris Dağ

Üye : Prof. Dr. Bülent SAKA

Üye : Prof. Dr. Ahmet BEKİR

Üye : Doç. Dr. Dursun IRK

Üye : Doç. Dr. Ahmet BOZ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. İdris Dağ danışmanlığında hazırlamış olduğum “Trigonometrik B-spline Subdomain Galerkin Yöntemi ile Zamana Bağlı Bir Boyutlu Lineer Olmayan Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri.” başlıklı YÜKSEK LİSANS tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 18/12/2015

Buket Ay

İmza

ÖZET

Kısmi türevli diferansiyel denklemler temel doğa yasalarının matematiksel modellemesinde ve birçok problemin matematiksel analizinde ortaya çıkmaktadır. Bu tür denklemler lineer ve lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler olarak ikiye ayrılmaktadır ve uygulamalarda lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler ile sıkça karşılaşılmaktadır. Bu tür denklemlerin tam çözümleri bulunmadığı ya da çözümlerinin bulunmasının çok zor olduğu durumlarda nümerik yöntemler geliştirilmiş ve geliştirilmeye devam edilmektedir.

Bu tez çalışmasında, zamana bağlı bir boyutlu lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler için nümerik çözüm araştırılmıştır. Birinci bölümde, çalışılan konu ve tezin amacı hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, literatür araştırması yapılmıştır. Üçüncü bölümde ise tezde çalışılan temel kavramlar tanıtılmıştır.

Sonraki dört bölümde kuadratik B-spline subdomain Galerkin yönteminin ve kuadratik trigonometrik B-spline subdomain Galerkin yönteminin sırasıyla RLW ve Burger denklemlerine uygulaması verilmiştir.

Son olarak “bulgular ve tartışma“ başlığı altında, yapılan çalışmaların karşılaştırılması verilmiş ve “sonuç” bölümünde elde edilen sonuçlar yorumlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Lineer Olmayan Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler, Regularised Long Wave (RLW) Denklemi, Burgers Denklemi, Crank-Nicolson, Trigonometrik B-spline, Subdomain Galerkin.

SUMMARY

Partial differential equations arise in the mathematical models of fundamental laws of nature and the mathematical analysis of problems. These equations are known as linear and nonlinear partial differential equations and nonlinear partial differential equations are come across in applications. Generally, analytical solutions of nonlinear partial differential equations does not exist. In this case, numerical methods have been developed and research is going on developing new methods.

In this thesis, numerical solutions are researched for the time dependent one dimensional RLW and Burgers' equations. In the first chapter, both subject and aim of this thesis are mentioned. In the second chapter, some early studies are considered about the subject. In the third chapter, some definitions about needed in the next chapters are mentioned.

The next four chapters consist of numerical solutions of RLW and Burgers' equations using quadratic B-spline subdomain Galerkin method and quadratic trigonometric subdomain Galerkin method.

Finally, the results obtained using these methods are compared.

Key Words : Nonlinear Partial Differential Equations, Regularised Long Wave (RLW) Equation, Burgers' Equation, Crank-Nicolson, Trigonometric B-spline, Subdomain Galerkin Method.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarımın her aşamasında rehberlik eden, tüm desteği ve yardımları için değerli danışmanım Prof. Dr. İdiris DAĞ hocama; çalışmalarım boyunca bilgi birikimleri ve destekleriyle teşvik edici olan değerli hocalarım Prof. Dr. Bülent SAKA, Doç. Dr. Dursun IRK ve Öğr. Gör. Melis ZORŐAHİN GÖRGÜLÜ' ye; eğitim hayatım boyunca manevi ve maddi desteklerini esirgemeyen sevgili annem, babam ve kardeşime ve varlıklarından dolayı mutluluk duyduğum arkadaşlarıma destekleri için teşekkürlerimi sunarım.

Buket Ay

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	vi
SUMMARY	vii
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
ÇİZELGELER DİZİNİ	xii
1. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI	1
2. GİRİŞ VE AMAÇ	2
3. TEMEL KAVRAMLAR	5
3.1. Regularised Long Wave (RLW) Denklemi	5
3.1.1. Test problemleri.....	5
3.1.1.1. <u>Solitary dalga hareketi</u>	5
3.1.1.2. <u>Ardışık dalgaların oluşumu</u>	6
3.1.1.3. <u>Dalga üretimi</u>	7
3.2. Burgers Denklemi.....	7
3.2.1. Test problemleri.....	8
3.2.1.1. <u>Şok dalgası yayılımı</u>	8
3.2.1.2. <u>İlerleyen dalga yayılımı</u>	8
3.3. Sonlu Farklar Yöntemi	9
3.3.1. Crank-Nicolson yöntemi	9
3.4. Varyasyonel Yöntemler	10
3.5. Ağırlıklı Kalan Yöntemleri.....	11
3.5.1. Galerkin yöntemi	12
3.5.2. Petrov Galerkin yöntemi.....	12
3.5.3. Subdomain Galerkin yöntemi.....	13
3.6. Sonlu Elemanlar Yöntemi	13

İÇİNDEKİLER DİZİNİ (devam)

	<u>Sayfa</u>
3.7. Spline Fonksiyonlar	14
3.7.1. B-spline fonksiyonlar	15
3.7.1.1. <u>Lineer B-spline fonksiyon</u>	16
3.7.1.2. <u>Kuadratik B-spline fonksiyon</u>	17
3.7.2. Trigonometrik B-spline fonksiyon	18
3.7.2.1. <u>Kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyon</u>	20
3.8. Lineer Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri ve Thomas Algoritmaları....	22
3.8.1. 3-Bant katsayı matrisli cebirsel denklem sistemi	23
3.9. Hata Normları	24
3.9.1. Ortalama hata normu	24
3.9.2. Maksimum hata normu	24
4. KUADRATİK TRİGONOMETRİK B-SPLİNE SUBDOMAIN GALERKİN	
YÖNTEMİ İLE RLW DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ	25
4.1. Yöntemin Oluşturulması ve Uygulanması	25
4.2. Test Problemleri	27
4.2.1. Tek yalnız dalga hareketi.....	28
4.2.2. Ardışık dalgaların yayılımı	31
4.2.3. Dalga üretimi	33
5. KUADRATİK B-SPLİNE SUBDOMAIN GALERKİN YÖNTEMİ İLE	
BURGERS DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ	36
5.1. Yöntemin Oluşturulması ve Uygulanması	36
5.2. Test Problemleri	39
5.2.1. Şok dalgası yayılımı	39
5.2.2. İlerleyen dalga yayılımı	41
6. KUADRATİK TRİGONOMETRİK B-SPLİNE SUBDOMAIN GALERKİN	
YÖNTEMİ İLE RLW DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ	44
6.1. Yöntemin Oluşturulması ve Uygulanması	44
6.2. Test Problemleri	47

İÇİNDEKİLER DİZİNİ (devam)

	<u>Sayfa</u>
6.2.1. Tek yalnız dalga hareketi.....	49
6.2.2. Ardışık dalgaların yayılımı.....	50
6.2.3. Dalga üretimi	53
7. KUADRATİK TRİGONOMETRİK B-SPLİNE SUBDOMAIN GALERKİN YÖNTEMİ İLE BURGERS DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ	56
7.1. Yöntemin Oluşturulması ve Uygulanması	56
7.2. Test Problemleri	59
7.2.1. Şok dalgası yayılımı	59
7.2.2. İlerleyen dalga yayılımı	61
8. BULGULAR VE TARTIŞMA	64
9. SONUÇ	67
KAYNAKLAR DİZİNİ	68

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
4.1. $c=0.1$ için solitary dalga hareketi	28
4.2. $c=0.03$ için solitary dalga hareketi.....	28
4.3. $c=0.1$ için $t=20$ zamanında mutlak hata.....	29
4.4. $c=0.03$ için $t=20$ zamanında mutlak hata.....	29
4.5. $d=2$ için dalga profili	32
4.6. $d=5$ için dalga profili	32
4.7. Seçilmiş bazı zamanlarda dalga yayılımı (a) $t= 20$ anında dalga yayılımı, (b) $t=50$ anında dalga yayılımı, (c) $t=150$ anında dalga yayılımı, (d) $t=170$ anında dalga yayılımı	34
5.1. $v=0.005$ ve $h=0.005$ için çözüm	39
5.2. $v=0.005$ ve $h=0.001$ için çözüm	39
5.3. $v=0.005$ ve $h=0.005$ için mutlak hata	41
5.4. $v=0.005$ ve $h=0.001$ için mutlak hata	41
5.5. $v=0.01$ için çözüm	43
5.6. $v=0.005$ için çözüm	43
5.7. $v=0.01$ için $t=0.5$ zamanında mutlak hata	43
5.8. $v=0.005$ için $t=0.5$ zamanında mutlak hata	43
6.1. $t=0$ ve $t=20$ 'de $c=0.1$ için solitary dalga hareketi	47
6.2. $t=0$ ve $t=20$ 'de $c=0.03$ için solitary dalga hareketi	47
6.3. $c =0.1$ için $t=20$ zamanında mutlak hata.....	48
6.4. $c=0.03$ için $t=20$ zamanında mutlak hata.....	48
6.5. $t=20$ zamanında $-80 \leq x \leq 120$ aralığında mutlak hatalar	48
6.6. $d=2$ için $t=0$ ve $t=250$ zamanlarında başlangıç şartı ve undulation	51
6.7. $d=5$ için $t=0$ ve $t=250$ zamanlarında başlangıç şartı ve undulation	51
6.8. Seçilmiş bazı zamanlarda dalga yayılımı (a) $t= 20$ anında dalga yayılımı, (b) $t=50$ anında dalga yayılımı, (c) $t=150$ anında dalga yayılımı, (d) $t=170$ anında dalga yayılımı	54

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

7.1. $v=0.005$ ve $h=0.005$ için çözüm	60
7.2. $v=0.005$ ve $h=0.001$ için çözüm	60
7.3. $v=0.005$ ve $h=0.005$ için $t=3.1$ zamanında mutlak hata	60
7.4. $v=0.005$ ve $h=0.001$ için $t=3.1$ zamanında mutlak hata	60
7.5. $v=0.01$ için çözüm	62
7.6. $v=0.005$ için çözüm	62
7.7. $v=0.01$ için $t=0.5$ zamanında mutlak hata	63
7.8. $v=0.005$ için $t=0.5$ zamanında mutlak hata	63

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Cizelge</u>	<u>Sayfa</u>
4.1. $3c = 0.3, h = 0.125, \Delta t = 0.1$ için hata normları ve korunum sabitleri	29
4.2. $3c = 0.09, h = 0.125, \Delta t = 0.1$ için hata normları ve korunum sabitleri	30
4.3. $3c = 0.3, h = 0.125, \Delta t = 0.1$ hata normları ve korunum sabitleri karşılaştırması	30
4.4. $3c = 0.3, h = 0.125, \Delta t = 0.1$ hata normları ve korunum sabitleri karşılaştırması	31
4.5. $d = 2, h = 0.24, \Delta t = 0.1$ için korunum sabitleri	32
4.6. $d = 5, h = 0.125, \Delta t = 0.1$ için korunum sabitleri	32
4.7. $U_0 = 2, h = 0.4, \Delta t = 0.1$ için korunum sabitleri	35
5.1. Farklı zaman adımlarında hata normları karşılaştırması	40
5.2. $t = 0.5$ anında $h = 1/36, v = 0.01$ için hata karşılaştırması.....	42
5.3. $t = 0.5$ anında $h = 1/36, v = 0.005$ için hata karşılaştırması	42
6.1. $3c = 0.3, h = 0.125, \Delta t = 0.1$ için hata normları ve korunum sabitleri	49
6.2. $3c = 0.09, h = 0.125, \Delta t = 0.1$ için hata normları ve korunum sabitleri	49
6.3. $3c = 0.3, h = 0.125, \Delta t = 0.1$ hata normları ve korunum sabitleri karşılaştırması	50
6.4. $3c = 0.3, h = 0.125, \Delta t = 0.1$ hata normları ve korunum sabitleri karşılaştırması	50
6.5. $d = 2, h = 0.24, \Delta t = 0.1$ için korunum sabitleri	52
6.6. $d = 5, h = 0.125, \Delta t = 0.1$ için korunum sabitleri	52
6.7. $U_0 = 2, h = 0.4, \Delta t = 0.1$ için korunum sabitleri	55
7.1. Farklı zaman adımlarında hata normları.....	61
7.2. $t = 0.5$ anında $h = 1/36, v = 0.01$ için hata karşılaştırması.....	63
8.1. $c = 0.1$ için mutlak hata ve korunum sabitleri	64
8.2. $c = 0.03$ için mutlak hata ve korunum sabitleri	64
8.3. $d = 2$ için korunum sabitleri.....	65
8.4. $d = 5$ için korunum sabitleri.....	65
8.5. Korunum sabitleri	65
8.6. Hata normları karşılaştırılması	66
8.7. $v = 0.01$ için hata normları karşılaştırması	66

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

d	Durgun su ile derinlik arasındaki eğim
v	Kinematik viskozite parametresi
W	Ağırlık fonksiyonu
Δt	Zaman adımı
h	Konum adımı

Açıklama

Kısaltmalar

d.d	diğer durumlarda
KTDD	Kısmi türevli diferensiyel denklemler
QBCA1	Kuintik B spline kolokasyon yöntemi
QBCM	Kuartik B-spline kolokasyon yöntemi
QBCM1	Kuartik B-spline kolokasyon yöntemi-1
QBGM	Kuadratik B-spline Galerkin yöntemi
QBSGY	Kuadratik B-spline subdomain Galerkin yöntemi
QTBSGY	Kuadratik trigonometrik B-spline subdomain Galerkin yöntemi
RLW	Regularised Long Wave

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Kısmi türevli diferensiyel denklemler (KTDD), temel doğa yasalarının formüle edilmesinde; uygulamalı matematik, matematiksel fizik ve mühendislik bilimlerinde karşılaşılan çok sayıda problemin matematiksel analizinde ortaya çıkmaktadır. Bu konu modern matematik bilimlerinde, özellikle fizik, geometri ve analizde önemli bir rol oynar. Fizik bilimlerinin kapsamında çoğu problem, başlangıç ve/veya uygun sınır şartları ile diferensiyel denklemler kullanılarak açıklanmıştır. Bu problemler genellikle başlangıç değer problemleri, sınır değer problemleri ya da başlangıç-sınır değer problemleri olarak ortaya çıkar (Debnath, 2011). Kısmi türevli diferensiyel denklemler, lineer ve lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemler olarak iki kısma ayrılır. Uygulama alanlarına bağlı olarak da çeşitleri kendi içlerinde artmaktadır. Yukarıda bahsedilen alanlardaki olguların matematiksel modellemesinde genellikle lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemlerle karşılaşılır. Bu tür problemlerin analitik çözümlerini bulmak için genel olarak kabul edilmiş bir yöntem olmadığından çözümleri için nümerik yöntemlere ihtiyaç duyulur (Debnath, 2011).

Bu yüksek lisans tezinde, zamana bağlı bazı bir boyutlu lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemler için nümerik çözüm araştırılacaktır. Bahsedilen türdeki denklemler için model problem olarak, Regularised Long Wave (RLW) ve Burgers denklemleri seçilecektir. Çözümleri araştırırken zaman ayrıştırması için Crank-Nicolson yöntemi, konum ayrıştırması için ise kuadratik B-spline fonksiyonları yardımıyla subdomain Galerkin yöntemi ve kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonları yardımıyla subdomain Galerkin yöntemi çalışılacaktır. Bu nümerik yöntemler, model problemlere uygulanacak, maliyet ve doğruluk bakımından davranışları incelenecek ve karşılaştırmaları yapılacaktır. Bu bağlamda amaç; trigonometrik B-spline fonksiyonları yardımıyla oluşturulan algoritmadan, maliyet bakımından hesaplı, doğruluk olarak yeterli sonuçlar elde etmektir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

RLW (Regularised Long Wave) denklemi undular bore olayını modellemek için Peregrine (1966) tarafından önerilmiştir. Benjamin vd. (1972) bu denklemin daha yaygın olarak bilinen lineer olmayan KdV (Korteweg-de Vries) dalga denkleminin çözümüne benzerliğini göstermişlerdir ve RLW denkleminin KdV denklemine tercih edilebilir olduğunu ileri sürmüşlerdir. RLW denkleminin sadece özel analitik çözümleri mevcuttur. Genel çözümü olmayan bu denklemin, nümerik yöntemlerle çözümleri araştırılmıştır. Ayrıca bazı fiziksel olaylar, bulunan yaklaşık çözümler yardımıyla ifade edilmektedir. Sığ sularda lineer olmayan enine dalgalar, plazmalarda magnetohydrodynamic dalgalar ve lineer olmayan kristallerde foton paketleri RLW'nin çözümleri ile simüle edilmiştir. KTDD'yi çözmek için kullanılan nümerik yöntemler RLW'nin çözümlerini bulmak için kullanılmıştır. Literatürde polinom spline ve B-spline fonksiyonları kullanılarak RLW denkleminin yaklaşık çözümleri için yapılmış çalışmalar bulunmaktadır.

RLW denklemi için solitary dalga yayılımı analitik çözümü var olduğundan çok sayıda nümerik yöntem için test problemi olarak kullanılmaktadır. Eilbeck ve McGuire (1975, 1977), sonlu farklar yöntemini kullanarak, Jain ve Iskandar (1979) ise farklı formlardaki sonlu farklar yöntemlerini kullanarak denklemin nümerik çözümlerini elde etmişlerdir. Alexandar ve Morris (1979) kübik spline Galerkin yöntemiyle denklemin nümerik çözümlerini çalışmışlardır. Gardner ve Gardner (1990), Gardner ve Dağ (1995), kübik B-spline kullanarak Galerkin yöntemiyle RLW denkleminin nümerik çözümlerini elde etmişlerdir. Chang vd. (1991) denkleme korunumlu fark yöntemini uygulamışlar, yöntemin yakınsaklığını ve kararlılığını göstermişlerdir. Jain vd. (1993), denklemi kübik Spline sonlu farklar yöntemiyle, Gardner vd. (1995) kuadratik B-spline Galerkin yöntemiyle nümerik çözümleri elde etmişlerdir. Gardner vd. (1996) lineer şekil fonksiyonları yardımıyla en küçük kareler yöntemiyle nümerik sonuçlar elde etmişlerdir. Gardner vd. (1997) kuintik B-spline kullanarak Petrov-Galerkin yöntemi ile nümerik çözümler bulmuşlardır. Dağ (2000), kuadratik B-spline yardımıyla en küçük kareler yöntemini denkleme uygulamıştır. Bhardwaj ve Shankar (2000), RLW denklemini parçalayıp kuintik spline kullanarak sonlu farklar yöntemi ile nümerik

çözüm araştırmışlar, yerel kesme hatasını ve kararlılığını göstermişlerdir. Dağ ve Özer (2001), kübik B-spline yardımıyla en küçük kareler yöntemiyle nümerik çözümler elde etmişlerdir. Doğan (2001, 2002), kuadratik spline kullanarak, Petrov-Galerkin yöntemiyle ve lineer şekil fonksiyonlarını kullanarak Galerkin yöntemiyle denklemin nümerik çözümlerini araştırmıştır. Denklemin nümerik çözümü için Dağ vd. (2003), B-spline kollokasyon yöntemiyle; Avilez-Valente ve Seabra-Santos (2004), Petrov-Galerkin sonlu eleman yöntemiyle; Saka vd. (2004), kuadratik B-spline kullanarak Galerkin yöntemiyle; Raslan (2005), eşit genişlik denklemlerini kullanarak; Dağ vd. (2006), kuintik B-spline fonksiyonlarını kullanarak Galerkin yöntemiyle; Kutluay ve Esen (2006), sonlu fark yöntemiyle araştırmışlardır. Ayrıca yakın zamanda yapılmış olan çalışmalar olarak da Saka ve Dağ (2008) kuartik B-spline fonksiyonları yardımıyla Galerkin yöntemiyle, Mei ve Chen (2012) ekstrapolasyon teknikleri ile Galerkin yöntemini kullanarak çözümler elde etmişlerdir.

Burgers denklemi ilk olarak Bateman (1915) tarafından tanımlanmış ve ayrıntılı bir şekilde çalışılmıştır. Burgers (1948), türbülans modellemesi de dahil birçok matema- tikel modellemede kullanmıştır ve yaptığı bu çalışmalar dolayısıyla denklem Burgers denklemi olarak bilinmektedir. Difüzyon ve lineer olmayan terim içeren bu denklem, farklı alanlarda çok sayıda fiziksel olayın modellenmesinde kullanılmaktadır. Bu alanlardan bazıları; bağımsız türbülans, sayılar teorisi, gaz dinamiği, ısı iletimi, elastisite, trafik akışı, magneohydrodynamic dalgalar, şok dalga ve akustik yayılımıdır. Ayrıca Navier-Stokes denklemi için de basit bir form olarak bilinmektedir. Denklemin genel analitik çözümleri Hopf (1950) ve Cole (1951) tarafından verilmiştir. Bu çözümler yaklaşık yöntemlerin kontrolü için test problemi olarak kullanılmaktadır. Rubin ve Gravis (1975), nümerik olarak lineerleştirdikleri denklemi kübik spline fonksiyonları kullanarak çözmeye çalışmışlardır. Burgers denkleminin bazı çözümleri sonsuz seriler içerir ve küçük viskoziteli seri çözümlerinin yavaş yakınsaklığından dolayı çözümlerin kullanımı pratik olmaz. Bu durumda yaklaşık çözümlerin belirlenmesine ihtiyaç duyulur. Spline fonksiyonlar kullanılarak Burgers denklemi için yaklaşık çözümler; B-spline Galerkin sonlu elemanlar; Öziş vd. (2005), Chapani vd. (2012), Ali (1990), Dağ vd. (2004, 2005a), Davies (1978), Saka ve Dağ (2009), B-spline en küçük kareler; Kutluay vd. (2004), kollokasyon; Saka ve Dağ (2007, 2008), Mittal ve Jain (2012), Ramadan vd. (2005), Dağ vd. (2005b,2005c), Ali vd. (1992), sonlu farklar; Wu

ve Wu (2004), diferensiyel kuadrature; Korkmaz ve Dağ (2013), Arora ve Singh (2013) kübik B-spline quasi interpolasyon; Zhu ve Wang (2009), Jiang ve Wang (2010), Taylor-Galerkin ve Taylor-kollokasyon; Dağ vd. (2011) yöntemleri kullanılarak verilmiştir.

Buraya kadar, tezde kullanılan model problemler için yapılan çalışmalar anlatıldı. Tez içerisinde yer alan diğer konularla ilgili yapılan çalışmalar, akışı bozmamak amacıyla bölüm içerisinde aktarılmıştır.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde; tezde kullanılacak olan kavramlardan bahsedildi. İlk olarak lineer olmayan KTDD ve bu denklem türüne ait model denklemler olan RLW ve Burgers denklemlerinin yapısı, başlangıç ve sınır şartları ve test problemleri tanıtıldıktan sonra çözüm yöntemleri, tezde kullanılan B-spline ve trigonometrik B-spline fonksiyonları anlatıldı. Son olarak ise denklem sistemlerini çözmek için kullanılan Thomas algoritması ve yöntemlerin doğruluğunu ölçmek için kullanılan hata normları açıklandı.

3.1. Regularised Long Wave (RLW) Denklemi

Regularised Long Wave (RLW) denklemi, ε ve μ pozitif parametreler olmak üzere;

$$u_t + u_x + \varepsilon uu_x - \mu u_{xxt} = 0 \quad (3.1)$$

eşitliğiyle gösterilir. Burada x konum koordinatı, t zaman, u dalga genliğini temsil eder.

(3.1) denkleminin başlangıç ve sınır şartları

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \quad x \in [a, b], \\ u(a, t) &= \beta_1, \quad u(b, t) = \beta_2, \quad t \in (0, T]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

şeklindedir.

3.1.1. Test problemleri

Test problemleri bölümünde; tezde çalışılmış olan üç farklı çözüm tanıtılacaktır.

3.1.1.1. Solitary dalga hareketi

Bu test problemi Peregrine (1966) tarafından çalışılmıştır. Bir $[a, b]$ aralığında tanımlı, $3c$ genliğine ve $\nu = 1 + \varepsilon c$ dalga hızına sahip olan bir RLW dalgasının, $k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon c}{\mu(1+\varepsilon c)}}$ olmak üzere analitik çözümü:

$$U(x, t) = \frac{3c}{\cosh^2(k(x - x_0 - (1 + \varepsilon c)t))} \quad (3.3)$$

şeklindedir. Bu denklemde $t = 0$ alarak,

$$U(x, 0) = \frac{3c}{\cosh^2(k(x - x_0))} \quad (3.4)$$

başlangıç şartı elde edilir. Sınır şartları $t \geq 0$ için

$$U(a, t) = U(b, t) = 0 \quad (3.5)$$

olarak kullanılacaktır. Ayrıca, RLW denkleminin aşağıda verilmiş olan ve sırasıyla kütle, momentum ve enerjiye karşılık gelen korunum kanunlarını sağlar Olver (1979):

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} u dx \approx \int_a^b u dx \approx \frac{h}{2} \sum_{m=0}^{N-1} (u_m + u_{m+1}), \\ I_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + \mu (u_x)^2) dx \approx \int_a^b (u^2 + \mu (u_x)^2) dx \\ &\approx \frac{h}{2} \sum_{m=0}^{N-1} \left((u^2)_m + \mu ((u_x)^2)_m + (u^2)_{m+1} + \mu ((u_x)^2)_{m+1} \right), \\ I_3 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (u^3 + 3u^2) dx \approx \int_a^b (u^3 + 3u^2) dx \\ &\approx \frac{h}{2} \sum_{m=0}^{N-1} \left((u^3)_m + 3(u^2)_m + (u^3)_{m+1} + 3(u^2)_{m+1} \right). \end{aligned}$$

Korunum kanunları, önerilen yöntemler ile yaklaşık olarak bulunacak ve tam çözümler ile kıyaslanacaktır.

3.1.1.2. Ardışık dalgaların oluşumu

RLW denkleminin Peregrine (1979) tarafından verilen ardışık dalgaların oluşumu test probleminde $[a, b]$ tanım aralığı olmak üzere;

$$U(x, 0) = 0.5U_0 \left[1 - \tanh \left(\frac{x - x_c}{d} \right) \right], \quad (3.6)$$

başlangıç şartı ve $t \geq 0$ için

$$U(a, t) = U_0, U(b, t) = 0 \quad (3.7)$$

sınır şartları kullanılır. Burada başlangıç şartı, durgun su yüzeyinde soldan sağa doğru ilerleyen yükseltiyi, d ise durgun su ile derinlik arasındaki eğimi ifade etmektedir.

Nümerik yöntemlerin geçerliliği, uygulanan yöntemlerle elde edilen sonuçlar ile aşağıda verilen korunum kanunlarının zamana göre değişimlerinin teorik sonuçları karşılaştırılarak incelenecektir.

$$M_1 = \frac{d}{dt} I_1 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u dx = U_0 + \frac{\varepsilon}{2} U_0^2 = 0.1075,$$

$$M_2 = \frac{d}{dt} I_2 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + \mu (u_x)^2) dx = U_0^2 + \frac{2}{3} \varepsilon U_0^3 = 0.011,$$

$$M_3 = \frac{d}{dt} I_3 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} (u^3 + 3u^2) dx = 3U_0^2 + (1 + 2\varepsilon) U_0^3 + \frac{3}{4} \varepsilon U_0^4 = 0.034113.$$

3.1.1.3. Dalga üretimi

Kütle akışı, mekanik bir cihazın hareketi gibi serbest yüzeye uygulanan kuvvetler dalgaların oluşumunu tetikler. Bu test probleminde, belirli bir derinliğe sahip durgun su yüzeyi kenarında suya uygulanan kuvvet ile dalga oluşumu incelenecektir. Test probleminde RLW denkleminde dalga üretebilmek için sol sınır şartı aşağıdaki gibi alınır:

$$U(a, t) = \begin{cases} U_0 \frac{t}{\tau}, & 0 \leq t \leq \tau, \\ U_0, & \tau < t < t_0 - \tau, \\ U_0 \frac{t_0 - t}{\tau}, & t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \\ 0, & \text{d. d.} \end{cases} \quad (3.8)$$

ve sağ sınır şartı da $U(b, t) = 0$ olarak seçilir. Bu dış kuvvet sınır şartı, bir uçtaki dalga üreticisi olarak bilinir.

3.2. Burgers Denklemi

ν kinematik viskozite parametresi, x ve t sırasıyla konum ve zaman değişkenleri olmak üzere, Burgers denklemi;

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0, \quad (3.9)$$

eşitliği ile gösterilir. Denklemin başlangıç ve sınır şartları aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\begin{aligned} u(a, t) &= \alpha_1, & u(b, t) &= \alpha_2, & t &\in [0, T] \\ u(x, 0) &= f(x), & a &\leq x \leq b \end{aligned} \quad (3.10)$$

Burada α_1 , α_2 ve $f(x)$, hesaplamalar sırasında belirlenecektir.

3.2.1. Test problemleri

Burgers denklemi için bu tezde iki test problemi üzerinde çalışılmıştır. Bunlar; şok dalgası yayılımı ve ilerleyen dalga yayılımı simülasyonlarıdır.

3.2.1.1. Şok dalgası yayılımı

Burgers denkleminin şok dalgası yayılımı çözümü analitik olarak, $t_0 = \exp(\frac{1}{8\nu})$ olmak üzere;

$$U(x, t) = \frac{\frac{x}{t}}{1 + \sqrt{\frac{t}{t_0} \exp(\frac{x^2}{4\nu t})}}, \quad t \geq 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.11)$$

eşitliğiyle tanımlanmıştır (Dağ, vd., 2005). Denklemin bu çözümünde, seçilecek olan daha küçük ν değerlerine göre şok dalganın keskinlik durumu belirlenir. Yöntemler uygulanırken $t = 1$ anında elde edilen başlangıç şok dalgasının zamanla değişimi incelenecektir. Bu test probleminde seçilen sınır şartları aşağıdaki gibidir:

$$u(a, t) = 0, \quad u(b, t) = 0 \quad t \in (0, T]. \quad (3.12)$$

3.2.1.2. İlerleyen Dalga Yayılımı

Burgers denkleminin iyi bilinen bir analitik çözümü, $\eta = \frac{\alpha(x - \mu t - \gamma)}{\nu}$ olmak üzere;

$$U(x, t) = \frac{\alpha + \mu + (\mu - \alpha) \exp \eta}{1 + \exp \eta}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad (3.13)$$

formundadır. Bu test problemi, μ hızına sahip sağa doğru ilerleyen dalgayı modeller. Başlangıç şartı, denklemde t yerine 0 yazarak hesaplanır ve sınır şartları $t \geq 0$ için

$$u(a, t) = 1, \quad u(b, t) = 0.2 \quad (3.14)$$

olarak belirlidir.

3.3. Sonlu Farklar Yöntemi

Sonlu farklar yönteminin temeli, bir diferensiyel denklemin tanım aralığı, sonlu sayıda bölünme noktalarına ayrılarak, her bir bölünme noktasındaki türev değerleri yerine, sonlu fark yaklaşımlarının yazılması olarak özetlenebilir. Böylece diferensiyel denklem bir cebirsel denkleme dönüşür (Irk, 2007).

Bir kısmi diferensiyel denklemin sonlu fark yaklaşımını oluştururken aşağıdaki adımlar sırasıyla izlenir (Smith, 1987):

1. Problemin çözüm bölgesi eşit veya farklı boyutta geometrik şekiller içerecek şekilde parçalanır ve problemin yaklaşık çözümü herbir bölgenin düğüm noktaları üzerinden hesaplanır.
2. Diferensiyel denklemde görülen türevler yerine Taylor seri açılımı ile bulunan ileri, geri veya merkezi sonlu fark yaklaşımlarından biri yazılır. Böylece başlangıçta verilen diferensiyel denklemin çözümü problemi, cebirsel denklem sisteminin çözümü problemine indirgenir.
3. Elde edilen fark denkleminde çözüm bölgesi içinde yer almayan hayali düğüm noktalarını yok etmek için problem ile verilen sınır şartları yerine uygun sonlu fark yaklaşımları yazılır. Böylece bilinmeyen sayısı ile aynı sayıda cebirsel denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Elde edilen bu cebirsel denklem sistemi direkt veya iteratif yöntemlerden biri yardımıyla kolayca çözülür.

Sonlu farklar yöntemi kolay uygulanabilen bir yöntem olmasına rağmen sahip olduğu bazı dezavantajlar şöyle sıralanabilir; düzgün olmayan sınır şartlarının uygulanmasındaki zorluklar, karmaşık bölgelerde geometriksel gösterimin doğruluğundaki zorluklar ve nümerik çözümdeki türevlerin yanlış olması.

3.3.1. Crank-Nicolson yöntemi

Crank-Nicolson yöntemi nümerik analizde bir sonlu farklar yöntemidir. John Crank ve Phyllis Nicolson tarafından bulunan bu yöntem, zamana göre ikinci dereceden ve

kapalı bir yöntemdir (Crank ve Nicolson, 1947). Crank ve Nicolson yöntemlerinde, diferensiyel denklemin sonlu fark yöntemiyle sayısal çözümünü araştırmak için

$$\begin{aligned}
 u_t &\simeq \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, \\
 u &= \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, \\
 u_x &= \frac{(u_x)^{n+1} + (u_x)^n}{2}, \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

eşitliklerinin kullanılmasını önermişlerdir. (3.15)'ten görüldüğü gibi zamana göre türev için ileri sonlu fark yaklaşımı kullanılırken, kalan terimlerde şimdiki zaman ve bir sonraki zamandaki değerlerin ortalamaları alınmıştır. Zamana göre türev için geri veya merkezi sonlu fark yaklaşımları da kullanılabilir (Irk, 2007).

3.4. Varyasyonel Yöntemler

Varyasyonel yöntemlerde ise tam çözüm yerine kullanılacak nümerik çözüm, diferensiyel denklemin zayıf formundan, kuadratik fonksiyonelin minimumundan veya ağırlıklı integral ifadesinden elde edilir. Bu yöntemlere örnek olarak, Rayleigh-Ritz ve ağırlıklı kalan yöntemleri gösterilebilir. Bu yöntemlerde bir problemin yaklaşık çözümü $\sum c_j \varphi_j + \varphi_0$ şeklinde aranır. Burada φ 'ler genellikle polinom olan uygun yaklaşım fonksiyonları ve c_j 'ler ise hesaplanacak bilinmeyen parametrelerdir. c_j denklemin ağırlıklı integral formunu veya zayıf formunu sağlayacak şekilde veya denkleme karşılık gelen kuadratik fonksiyoneli minimum yapacak şekilde bulunur. $\sum c_j \varphi_j + \varphi_0$ yaklaşımı, verilen diferensiyel denklemde doğrudan yazıldığında c_j parametelerinin bulunması için her zaman gerekli ve yeterli sayıda lineer bağımsız denklem sistemi elde edilemeyebilir. Bu nedenle ağırlıklı integral forma ihtiyaç duyulur.

Ağırlıklı integral form, $\sum c_j \varphi_j + \varphi_0$ yaklaşık çözümünün diferensiyel denklemde yerine yazılmasıyla elde edilen kalan ile W ağırlık fonksiyonunun çarpımının seçilmiş bölge üzerindeki integralinin ifadesidir. Ağırlıklı integral formunda u_N yaklaşık çözümündeki φ_j yaklaşık fonksiyonları diferensiyel denklemin mertebesi kadar türevlenebilir olmalı ve problem ile birlikte verilen tüm sınır şartlarını sağlamalıdır.

Çünkü ağırlıklı integral form problemin hiçbir sınır şartını içermez. Ağırlıklı integral formunda W ağırlık fonksiyonunun lineer bağımsız N farklı seçimi için c_1, c_2, \dots, c_N bilinmeyenlerinden oluşan N tane cebirsel denklem elde edilir. Bu denklemlerin c_j parametreleri kolayca elde edilir (Karakoç, 2011).

Zayıf form ise denklemdaki diferensiyelin bağımlı değişken ile ağırlık fonksiyonu arasında paylaştırıldığı ve aynı zamanda verilen problemin doğal sınır şartlarını içeren ağırlıklı integral ifadesidir. Verilen her denklemin ağırlıklı ifadesi elde edilebilirken, zayıf formu elde edilemeyebilir. Varyasyonel yöntemler W ağırlık fonksiyonu ve φ_j yaklaşım fonksiyonlarının seçimi bakımından birbirinden farklıdırlar. Varyasyonel yöntemlerde yaklaşık çözüm bulunurken verilen denkleme karşılık gelen zayıf form kullanılır. Her denklemin zayıf formu oluşturulamayabileceği için sınırlı sayıda denkleme uygulanabilirler (Karakoç, 2011).

3.5. Ağırlıklı Kalan Yöntemleri

Sınır değer ya da başlangıç değer probleminin analitik çözümüne yakın olan fonksiyon formunda çözümler elde etmek için yapılan analitik işlemleri sağlayan yaklaşık metodlar ağırlıklı kalan yöntemi olarak bilinir. Bu yaklaşımı temel alan yöntemlere ise ağırlıklı kalan yöntemleri denir. Her denklemin ağırlıklı integral formu oluşturulabileceği için varyasyonel yöntemlerden daha geniş bir aralıktaki problemlere uygulanabilirler. Ağırlıklı kalan yöntemleri her denklemin ağırlıklı integral formunu oluşturmakta kullanılabilir. Ağırlıklı integral form problemin sınır şartlarından hiçbirini içermediğinden, ağırlık fonksiyonları yaklaşık çözümün hem doğal hem de sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilmelidir. Bu yöntemleri ifade etmek için Ω bölgesinde

$$A(U) = f \quad (3.16)$$

operatör denklemini ele alınsın. Burada A lineer veya lineer olmayan bir operatör, U bağımlı değişken ve f bağımsız değişkenin bir fonksiyonu olarak tanımlanır. Buradaki u çözümüne, bir yaklaşım olarak

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j + \varphi_0 \quad (3.17)$$

kullanılır ve (3.16) denkleminde (3.17) ile verilen u_N yaklaşık çözüm yerine yazıldığında $f_N = A(U_N)$ fonksiyonu elde edilir ki bu fonksiyon genelde f 'ye eşit değildir. $A(U_N)$ ile

f fonksiyonu arasındaki farkına $R = A(u_N) - f = A(\sum_{j=1}^N c_j \varphi_j + \varphi_0) - f \neq 0$ yaklaşımın kalanı (rezidü) denir. Burada R kalan fonksiyonu, hem c_j parametrelerine hem de konuma bağlıdır. Ağırlıklı kalan yöntemlerinde c_j parametreleri

$$\int_{\Omega} W_i(x) R(x, c_j) dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3.19)$$

ağırlıklı kalan integralindeki R kalanı sıfır olacak şekilde seçilir. Burada Ω bir boyutlu bir bölge ve W_i' ler ise ağırlıklı kalan fonksiyonlarıdır. (3.19) integralinin hesaplanması ile elde edilen denklemlerin çözülmesi için seçilen W_i ağırlıklı kalan fonksiyonlar kümesinin lineer bağımsız olması gerekir. Ağırlıklı kalan yöntemlerinden bazıları Galerkin, Petrov-Galerkin, kollokasyon ve Subdomain Galerkin yöntemleridir (Karakoç, 2011).

3.5.1. Galerkin yöntemi

Bu yöntemde W_i ağırlık fonksiyonu φ_i yaklaşım fonksiyonlarıyla aynı seçilir. Galerkin yaklaşımının cebirsel denklemleri

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = F_i \quad (3.20)$$

şeklinde olup burada A_{ij} ve F_i aşağıdaki gibidir:

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_i A(\varphi_j) dx, \quad (3.21)$$

$$F_i = \int_{\Omega} [f - A(\varphi_0)] dx. \quad (3.22)$$

3.5.2. Petrov-Galerkin yöntemi

$W_i \neq \varphi_i$ alınırsa bu yöntem ağırlıklı kalan yöntemlerinden Petrov-Galerkin yöntemi olarak bilinir. A lineer bir operatör olmak üzere Ω bölgesinde (3.19) yaklaşımı,

$$\sum_{j=1}^N \left[\int_{\Omega} \varphi_i A(\varphi_j) dx \right] c_j = \int_{\Omega} [f - A(\varphi_0)] dx \quad (3.23)$$

veya

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = F_i \quad (3.24)$$

şeklinde basit bir formda yazılabilir. Bu yöntemde elde edilen $[A_{ij}]$ katsayılar matrisi simetrik değildir. Yani, $A_{ij} = \int_{\Omega} W_i A(\varphi_j) dx \neq A_{ji}$ dir.

3.5.3. Subdomain Galerkin yöntemi

Bu yöntemde W_i ağırlık fonksiyonları

$$W_i = \begin{cases} 1 & , \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & , \quad d.d. \end{cases} \quad (3.25)$$

$i = 0, 1, \dots, N$ şeklinde seçilir. Alt aralıkların sayısı c_i parametrelerinin sayısına eşit olacak şekilde belirlenmelidir. W_i ağırlık fonksiyonları (3.19) denkleminde yazılırsa

$$\int_{\Omega} R(x^i, c_i) dx = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, N) \quad (3.26)$$

elde edilir. Bu denklem sisteminin çözülmesiyle c_i parametreleri elde edilir.

3.6. Sonlu Elemanlar Yöntemi

Varyasyonel yöntemler bir problemin yaklaşık çözümünün bulunmasında oldukça kolay ve etkili yöntemlerdir. Ancak bu yöntemlerde yaklaşım fonksiyonlarının oluşturulması işleminin zor olması yöntemlerin etkinliğini azaltmaktadır. Çünkü yaklaşım fonksiyonları sürekli, tam, lineer bağımsız ve aynı zamanda problemin temel sınır şartlarını sağlamalıdır. Ayrıca yaklaşım fonksiyonlarını üretecek sistematik bir algoritma bulunmamaktadır. Eğer problemin çözüm bölgesi karmaşık ise yaklaşım fonksiyonlarını belirleme işlemi oldukça zor hatta bazen imkansız olmaktadır. Varyasyonel yöntemlerin bu dezavantajlarını ortadan kaldırmak için son zamanlarda sonlu elemanlar yöntemi daha sıklıkla kullanılır hale gelmiştir.

Sonlu elemanlar yöntemi; yapı mühendisliği ve mekaniği, akışkanlar mekaniği, donanma mimarlığı, dinamik ve ısı iletim problemleri gibi farklı alanlardaki problemlere kolaylıkla uygulanabilmektedir. Bu yöntemin diğer yöntemlere göre avantajları aşağıdaki gibi sıralanabilir:

1. Düzensiz şekilli yapıları ve diğer yöntemlerle modellenemeyen farklı karmaşık bölgeleri oldukça kolay bir şekilde modelleyebilmesi,

2. Eleman denklemleri ayrı ayrı oluşturulduğundan farklı malzemelerden oluşan yapıları modelleyebilmesi,
3. Çok farklı sınır şartları ile birlikte kullanılabilmesi. Sınır şartlarının değişmesi durumunda sonlu eleman modelinin değişmemesi,
4. Gerekğinde eleman büyüklüklerinin değiştirilebilmesi,
5. Sonlu eleman modelinin istenildiği zaman kolayca değiştirilebilmesi,
6. Bilgisayar programlama mantığına uygun olması.

Bu avantajlarının yanı sıra sonlu elemanlar yönteminin de dezavantajları vardır. Bunlardan bazıları; çözüm bölgesinin alt bölgelere ayrılması işleminin belirli bir tecrübeyi gerektirmesi, süreklilik şartlarının alt bölgelere uygulanmasında birtakım zorluklarla karşılaşılması ve bilgisayar programında veri girişi sırasında hatalar yapılmasıdır.

3.7. Spline Fonksiyonlar

Problem çözümlerinde sıklıkla kullanılan yöntemler arasında yer alan interpolasyon yöntemleri fizik, kimya, biyoloji, mühendislik ve matematik gibi çeşitli bilim dallarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu yaklaşımlar arasında polinom yaklaşımı önemli bir yere sahiptir. Fakat polinom yaklaşımı ile her zaman istenilen hassasiyette sonuç elde edilemeyebilir. Yüksek dereceden polinomlarla interpolasyon sürecinde işlemlerin artışı sonucu gerçek anlamda kararsız algoritmalarla karşılaşılır. Yani birçok durumda bölünme noktalarının sayısının artması yakınsamanın artması yerine ıraksaması anlamına gelebilir. Ayrıca istenilen fonksiyon seçilen aralığın değişik kısımlarında değişik özelliklere sahip ise örneğin, bölgenin bir kısmında hızlı diğer kısmında yavaş değişiyorsa, fonksiyona tek bir eğri ile yaklaşmak uygun sonuçlara götürmeyebilir. Bu amaç için kullanılan Newton ve Lagrange interpolasyonlarının derecesi nokta sayısı arttıkça artacağından, bu tür polinomlarla yapılacak işlemler zorlaşır. Bu gibi durumlarda art arda gelen iki veri arasında birinci, ikinci veya üçüncü dereceden fonksiyonlarla yaklaşımın yapıldığı spline interpolasyon yöntemi önerilmektedir. Spline interpolasyonu veri noktalarını çeşitli aralıklara bölerek her

bir aralıkta daha düşük dereceden polinomlarla yaklaşma esasına dayanır. Verilere kolayca adapte olabilen yeteri kadar esnekliğe sahip, bilinmeyen fonksiyonların yaklaşık çözümünde kullanılan spline fonksiyonlar ve uygulamaları son zamanlarda oldukça yaygın olarak kullanılmaktadır. Spline fonksiyonlar parçalı fonksiyonlar sınıfından olup bu fonksiyonlar polinomların süreklilik özelliklerini taşıyan dizilişleri ile oluşmaktadır (Karakoç, 2011).

Spline fonksiyonların sahip olduğu özellikler:

1. Düzgün (smooth) fonksiyonlardır.
2. Uygun bazlara sahip olan sonlu boyutlu lineer uzaylardır.
3. Bu fonksiyonların türevleri ve integralleri de yine spline fonksiyonlardır.
4. Elde ya da bilgisayarda yapılan hesaplamalarda kolaylık sağlar.
5. Bu fonksiyonlar kullanıldığında elde edilen matrisler, determinant özellikleri açısından kolay hesaplanabilir.
6. Düşük dereceli spline fonksiyonlar oldukça esnektirler ve polinomlardaki gibi keskin salınımlar yapmazlar.
7. Spline fonksiyonlar kullanılarak sadece fonksiyona değil aynı zamanda bu fonksiyonun türevlerine de iyi yaklaşımlar yapılabilir.
8. Spline fonksiyonlar kullanıldığında yakınsaklık ve kararlılığın incelenmesi daha kolay olur.

3.7.1. B-spline fonksiyonlar

Spline fonksiyonlar kullanılarak hesaplamalar yapıldığında lineer veya lineer olmayan sistemler elde edilir. Bu sistemler bazı durumlarda parametrelerin hesaplanması mümkün olmayacak şekilde iyi şartlı olmayan durumda olabilir. Ayrıca bir diğer zorluk olarak spline yaklaşımları elde etme sürecinde sayısal kararsızlıklarla karşılaşılabilir. Bu durumlar "B-spline " olarak adlandırılan farklı bir spline fonksiyon sınıfı ile aşılabılır. Bu fonksiyonlara B-spline adının verilmesinin sebebi, bütün spline fonksiyonlar kümesi için bir taban (basis) oluşturmasıdır.

B-spline fonksiyonlar da yine spline fonksiyonlardır. Ancak polinom derecesi, düzgünlük ve çözüm bölgesinin parçalanmasına göre, B-spline fonksiyonlar, minimal desteğe sahip fonksiyonlardır. Belirli derece ve düzgünlükteki her spline fonksiyon aynı derece ve düzgünlükteki B-spline fonksiyonların bir lineer kombinasyonu ile temsil edilebilir (de Boor, 1978). Bu sebeple de B-spline fonksiyonlar, spline fonksiyonlar için bir taban oluştururlar. Aynı zamanda bir B-spline fonksiyonu Bezier eğrilerinin de bir genelleştirmesidir. B-spline terimi ilk olarak "basis spline" kelimesinin kısaltması olarak (Schoenberg, 1946) tarafından kullanılmıştır.

B-spline fonksiyonların de Boor (1978) tarafından verilen ve literatürdeki yaygın kullanılan türetme yöntemi aşağıdaki gibidir:

Sıfırıncı dereceden B-spline fonksiyonu,

$$B_m^0 = \begin{cases} 1 & , \quad x_m \leq x < x_{m+1} \\ 0 & , \quad \text{d. d.} \end{cases} \quad (3.27)$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanıma göre $B_m^0(x_m) = 1$ ve $B_m^0(x_{m+1}) = 0$ dir. Sıfırıncı dereceden B-spline adım fonksiyonu kullanılarak daha yüksek dereceden B-spline fonksiyonlar $k = 1, 2, \dots$ ve $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ olmak üzere ardışık olarak

$$B_m^k(x) = \frac{x - x_m}{x_{m+k} - x_m} B_m^{k-1}(x) + \frac{x_{m+k+1} - x}{x_{m+k+1} - x_{m+1}} B_{m+1}^{k-1}(x) \quad (3.28)$$

formülüyle hesaplanır. B-spline fonksiyonların, $[x_0, x_N]$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir taban olduğu Prenter (1975) tarafından ifade edilmiştir. Verilen tanımdan da görüldüğü gibi B-spline fonksiyonlar, eşit uzunluklu alt aralıklar üzerinde tanımlanabileceği gibi çözüm bölgesi üzerinde eşit dağıtılmamış noktalar üzerinde de tanımlanabilir. B-spline fonksiyonların, geometrik olarak değişen uzunluğa sahip alt aralıklar üzerindeki tanımlamaları için (Dağ, 1994) referansı incelenebilir.

3.7.1.1. Lineer B-spline fonksiyonlar

Bir $[a, b]$ aralığının düzgün bir parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında $L_m(x)$ lineer B-spline fonksiyonlar $m = 0(1)N$ noktaları için;

$$L_m(x) = \frac{1}{h} \begin{cases} (x_{m+1} - x) - 2(x_m - x) & , \quad [x_{m-1}, x_m) \\ (x_{m+1} - x) & , \quad [x_m, x_{m+1}) \\ 0 & , \quad \text{d. d.} \end{cases} \quad (3.29)$$

şeklinde tanımlanır. $\{L_0(x), L_1(x), \dots, L_N(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Lineer B-spline fonksiyon ve türevi $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığı dışında sıfırdır. Her bir L_m B-spline fonksiyonu $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığında ardışık iki elemanı örtmekte ve dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman L_m, L_{m+1} gibi iki lineer B-spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir. Bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı

$$h\xi = x - x_m, 0 \leq \xi \leq 1 \quad (3.30)$$

lokal koordinat dönüşümü yardımıyla $[0, 1]$ aralığına dönüştür. Böylece lineer B-spline fonksiyonlar $[0, 1]$ aralığında ξ cinsinden

$$\begin{aligned} L_m &= 1 - \xi \\ L_{m+1} &= \xi \end{aligned} \quad (3.31)$$

olarak elde edilir.

3.7.1.2. Kuadratik B-spline fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının düzgün bir parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında $Q_m(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonlar $m = -1(1)N$ noktaları için;

$$Q_m(x) = \frac{1}{h^2} \begin{cases} (x_{m+2}-x)^2 - 3(x_{m+1}-x)^2 + 3(x_m-x)^2 & , [x_{m-1}, x_m) \\ (x_{m+2}-x)^2 - 3(x_{m+1}-x)^2 & , [x_m, x_{m+1}) \\ (x_{m+2}-x)^2 & , [x_{m+1}, x_{m+2}) \\ 0 & , \text{d. d.} \end{cases} \quad (3.32)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $\{Q_{-1}(x), Q_0(x), \dots, Q_N(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Kuadratik B-spline $Q_m(x)$ fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfırdır. Her bir $Q_m(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonu bu aralıkta ardışık üç elemanı örtmeli ve dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman Q_{m-1}, Q_m, Q_{m+1} gibi üç kuadratik B-spline fonksiyon tarafından örtülmektedir.

$U(x, t)$ analitik çözümüne bir $u_N(x, t)$ yaklaşımı kuadratik B-spline fonksiyonlarının birleşimiyle,

$$U(x, t) \approx u_N(x, t) = \sum_{i=-1}^N Q_i(x) \delta_i(t) \quad (3.33)$$

olarak yapılır. Burada $\delta_i(t)$ ile belirlenecek olan zamana bağlı bilinmeyen parametreler temsil edilir. $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerindeki $u_N(x_m, t)$ yaklaşık çözümünü aşağıdaki gibidir:

$$u_N(x_{m,t}) = Q_{m-1}(x)\delta_{m-1}(t) + Q_m(x)\delta_m(t) + Q_{m+1}\delta_{m+1}(t). \quad (3.34)$$

Bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı

$$h\xi = x - x_m, 0 \leq \xi \leq 1 \quad (3.35)$$

lokal koordinat dönüşümü yardımıyla $[0, 1]$ aralığına dönüştür. Böylece kuadratik B-spline fonksiyonlar $[0, 1]$ aralığında ξ cinsinden,

$$\begin{aligned} Q_{m-1} &= \frac{1}{h^2}(x_{m+1}-x_m - h\xi)^2 = \frac{1}{h^2}h^2(1 - \xi)^2 = (1 - \xi)^2 \\ Q_m &= \frac{1}{h^2}((x_{m+2}-x_m - h\xi)^2 - 3(x_{m+1}-x_m - h\xi)^2) \\ &= \frac{1}{h^2}((2h - h\xi)^2 - 3(h - h\xi)^2) \\ &= \frac{1}{h^2}h^2((2 - \xi)^2 - 3(1 - \xi)^2) = 1 + 2\xi - 2\xi^2 \\ Q_{m+1} &= \frac{1}{h^2}((x_{m+3}-x_m - h\xi)^2 - 3(x_{m+2}-x_m - h\xi)^2 + 3(x_{m+1}-x_m - h\xi)^2) \\ &= \frac{1}{h^2}h^2((3 - \xi)^2 - 3(2 - \xi)^2 + 3(1 - \xi)^2) = \xi^2 \end{aligned} \quad (3.36)$$

şeklinde bulunur. (3.34) kuadratik B-spline fonksiyonları kullanılarak x_m düğüm noktasında u_N yaklaşık çözümü ve x 'e göre birinci mertebeden türevi, δ_m eleman parametreleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} u_N(x_m, t) &= u_m = \delta_{m-1} + \delta_m \\ u'_m &= \frac{2}{h}(-\delta_{m-1} + \delta_m). \end{aligned} \quad (3.37)$$

3.8.2. Trigonometrik B-spline fonksiyonlar

Trigonometrik spline fonksiyonlar ilk olarak Schoenberg (1964) tarafından çalışılmıştır. Schoenberg bu çalışmasında trigonometrik spline fonksiyonları, parçalı

trigonometrik polinomlar yardımıyla;

$$a_0 + \sum_{i=1}^n (a_i \cos(ix) + b_i \sin(ix)) \quad (3.38)$$

şeklinde tanımlamıştır. Aynı zamanda her trigonometrik spline fonksiyonun, trigonometrik B-spline fonksiyonların bir lineer kombinasyonu olarak yazılabileceğini de göstermiştir. Bu konuda bir özet olarak Schumaker (2007) kitabı incelenebilir. Lyche ve Winther (1977) trigonometrik B-spline fonksiyonları tanımlamak için bölünmüş farkları kullanmışlardır. Diğer yandan trigonometrik B-spline fonksiyonlar için genel bir yineleme bağıntısı oluşturmuşlar ve bu fonksiyonların türevlenebilirliğini göstermişlerdir. Walz (1997) tek mertebeli trigonometrik B-spline fonksiyonlar, eşit aralıklı sabit bir bölge üzerinde convex-hull özelliğini sağladığını göstermiştir. Koch (1988) çok değişkenli polinomları kullanarak çok değişkenli trigonometrik B-spline fonksiyonları tanımlamıştır. Trigonometrik spline fonksiyonlar ve eğrilerle ilgili Goodman ve Lee (1984) ve Koch vd. (1995) çalışmaları da incelenebilir. Kuadratik trigonometrik spline fonksiyonlar ile ilgili Han (2003) ve Nikolis (2004) çalışmalar yapmıştır. Hamid vd. (2010) ikinci mertebeden lineer iki noktalı sınırdeğer problemini kübik trigonometrik B-spline kullanarak çözümünü elde etmişlerdir ve hiperbolik problemin yaklaşık çözümü kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlar yardımıyla çözümü Abbas vd. (2014) tarafından yapılmıştır.

$S_{m,t}$ ile trigonometrik spline uzayları temsil edilsin. $h = \frac{b-a}{N}$ ve $x_i = x_0 + ih$ olmak üzere $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$, $[a, b]$ tanım aralığının düzgün bir parçalanması olsun. Birinci dereceden trigonometrik B-spline T_m^1 aşağıdaki eşitlik ile verilir:

$$T_m^1(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x_m \leq x < x_{m+1} \\ 0 & , \quad \text{d. d.} \end{cases} \quad (3.39)$$

Bu eşitlik kullanılarak T_m^k daha yüksek mertebeden trigonometrik B-spline fonksiyonlar;

$$T_m^k(x) = \frac{\sin\left(\frac{x-x_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_{m+k}-x_m}{2}\right)} T_m^{k-1}(x) + \frac{\sin\left(\frac{x_{m+k}-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_{m+k}-x_{m+1}}{2}\right)} T_{m+1}^{k-1}(x), k = 2, 3, 4, \dots \quad (3.40)$$

yineleme formülüyle tanımlanır. Burada dikkat edilmesi gereken durum; n . dereceden trigonometrik B-spline formülünü oluştururken $k = n + 1$ olarak alınması gerektiğidir (Walz, 1997). Trigonometrik B-spline fonksiyonları birçok yönüyle polinomsal B-spline fonksiyonlara benzer. Örneğin; T_m^k B-spline fonksiyonları, B-spline fonksiyonlarda

olduğu gibi $[x_m, x_{m+k}]$ gibi sonlu bir aralıkta tanımlıdır ve bu aralık içerisinde pozitif değerler alır. Ayrıca, $\{T_m^k\}_{m=1}^N$ lineer bağımsızdır ve $S_{m,t}$ trigonometrik spline fonksiyonları için bir taban oluşturur. Böylece, her $s \in S_{m,t}$ elemanı için

$$s(x) = \sum_{m=1}^n c_m T_m^k(x), c_m \in \mathbb{R}, m = 1, 2, \dots, N \quad (3.41)$$

ifadesi yalnız bir şekilde yazılabilir.

3.8.2.1. Kuadratik trigonometrik B-spline

Kuadratik trigonometrik fonksiyonları tanımlamak için $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ $[a, b]$ tanım aralığının düzgün bir parçalamışı, $h = \frac{b-a}{N}$ ve $x_i = x_0 + ih$ olmak üzere, (3.38) ifadesinde $k = 3$ yazılırsa;

$$T_m^3(x) = \frac{\sin\left(\frac{x-x_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_{m+2}-x_m}{2}\right)} T_m^2(x) + \frac{\sin\left(\frac{x_{m+3}-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_{m+3}-x_{m+1}}{2}\right)} T_{m+1}^2(x) \quad (3.42)$$

elde edilir. (3.37) yardımıyla $T_m^2(x)$ ve $T_{m+1}^2(x)$ aşağıdaki gibi bulunur:

$$T_m^2(x) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{x-x_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}, & x \in [x_m, x_{m+1}) \\ \frac{\sin\left(\frac{x_{m+2}-x}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}, & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}) \\ 0 & \text{d. d.} \end{cases} \quad (3.43)$$

$$T_{m+1}^2(x) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{x-x_{m+1}}{2}\right)}{\sin(h)}, & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}) \\ \frac{\sin\left(\frac{x_{m+3}-x}{2}\right)}{\sin(h)}, & x \in [x_{m+2}, x_{m+3}) \\ 0 & \text{d. d.} \end{cases} \quad (3.44)$$

$T_m^3(x)$ ifadesine döndüğünde;

$$T_m^3(x) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{x-x_m}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_m}{2}\right)}{\sin(h) \sin\left(\frac{h}{2}\right)} & , x \in [x_m, x_{m+1}) \\ \frac{\sin\left(\frac{x-x_m}{2}\right) \sin\left(\frac{x_{m+2}-x}{2}\right)}{\sin(h) \sin\left(\frac{h}{2}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{x_{m+3}-x}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_{m+1}}{2}\right)}{\sin(h) \sin\left(\frac{h}{2}\right)} & , x \in [x_{m+1}, x_{m+2}) \\ \frac{\sin\left(\frac{x_{m+3}-x}{2}\right) \sin\left(\frac{x_{m+3}-x}{2}\right)}{\sin(h) \sin\left(\frac{h}{2}\right)} & , x \in [x_{m+2}, x_{m+3}) \\ 0 & , \text{d. d.} \end{cases} \quad (3.45)$$

(3.45) ifadesine ulaşılır. Bu ifade, verilen ayrık noktalar ve $[a, b]$ aralığının dışında kalan x_{-1}, x_{N+1} hayali noktaları ele alınarak ve aralık indisleri düzenlendiğinde kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonları, $T_m^3(x) \in C^1[a, b]$, $m = -1, \dots, N$ olmak üzere;

$$T_m^3(x) = \theta \begin{cases} \sin^2\left(\frac{x-x_{m-1}}{2}\right) & , x \in [x_{m-1}, x_m) \\ \sin\left(\frac{x-x_{m-1}}{2}\right) \sin\left(\frac{x_{m+1}-x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x_{m+2}-x}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_m}{2}\right) & , x \in [x_m, x_{m+1}) \\ \sin^2\left(\frac{x_{m+2}-x}{2}\right) & , x \in [x_{m+1}, x_{m+2}) \\ 0 & , \text{d. d.} \end{cases} \quad (3.46)$$

parçalı fonksiyonu ile tanımlanır. Burada $\theta = \frac{1}{\sin(h/2)\sin(h)}$ dir.

$U(x, t)$ fonksiyonuna bir $u_N(x, t)$ yaklaşımı kuadratik trigonometrik B-spline fonksiyonlarının birleşimiyle,

$$U(x, t) \approx u_N(x, t) = \sum_{m=-1}^N T_m^3(x) \delta_m(t) \quad (3.47)$$

olarak yapılır. Burada $\delta_m(t)$ ile belirlenecek olan zamana bağlı bilinmeyen parametreler temsil edilir. $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerindeki $u_N(x_m, t)$ yaklaşık çözümünü aşağıdaki gibidir:

$$u_N(x_{m,t}) = T_{m-1}(x_m)\delta_{m-1}(t) + T_m(x_m)\delta_m(t) + T_{m+1}(x_m)\delta_{m+1}(t). \quad (3.48)$$

Bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı,

$$h\xi = x - x_m, 0 \leq \xi \leq 1$$

lokal koordinat dönüşümü yardımıyla $[0, 1]$ aralığına dönüştür. Böylece kuadratik trigonometrik B-spline şekil fonksiyonları $[0, 1]$ aralığında

$$\begin{aligned} T_{m-1} &= \theta \sin^2\left(\frac{x - x_{m-1}}{2}\right) = \theta \sin^2\left(\frac{x_m + h\xi - x_{m-1}}{2}\right) = \theta \sin^2\left(\frac{h - h\xi}{2}\right) \\ T_m &= \theta \left[\sin\left(\frac{x - x_{m-1}}{2}\right) \sin\left(\frac{x_{m+1} - x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x_{m+2} - x}{2}\right) \sin\left(\frac{x - x_m}{2}\right) \right] \\ &= \theta \left[\sin\left(\frac{x_m + h\xi - x_{m-1}}{2}\right) \sin\left(\frac{x_{m+1} - x_m - h\xi}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \sin\left(\frac{x_{m+2} - x_m - h\xi}{2}\right) \sin\left(\frac{x_m + h\xi - x_m}{2}\right) \right] \\ &= \theta \left[\sin\left(\frac{h + h\xi}{2}\right) \sin\left(\frac{h - h\xi}{2}\right) + \sin\left(\frac{2h - h\xi}{2}\right) \sin\left(\frac{h\xi}{2}\right) \right] \\ T_{m+1} &= \sin^2\left(\frac{x_{m+2} - x}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{x_{m+2} - x_m - h\xi}{2}\right) = \theta \sin^2\left(\frac{h\xi}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.49)$$

olarak elde edilir. Yaklaşık çözüm ve birinci türev değerleri (3.46) ve (3.48) den bulunur:

$$u_m = u_N(x_{m,t}) = \frac{\sin(h/2)}{\sin(h)} (\delta_{m-1} + \delta_m) \quad (3.50)$$

$$u'_m = u'_N(x_{m,t}) = \frac{\cos(h/2)}{\sin(h)} (\delta_m - \delta_{m-1}). \quad (3.51)$$

3.9. Linear Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri ve Thomas Algoritmaları

Linear denklem sistemlerinin çözümlerini yapabilmek için çeşitli yöntemler bulunmaktadır. Bu yöntemlerden sıkça kullanılanlarından biri Gauss eliminasyon

Eleme Algoritması:

$$\alpha_0 = b_0, \beta_0 = d_0 \quad (3.53)$$

$$\alpha_i = \frac{b_i - a_i c_{i-1}}{\alpha_{i-1}}, \beta_i = \frac{d_i - a_i \beta_{i-1}}{\alpha_{i-1}}, i = 1, 2, \dots, N \quad (3.54)$$

Çözüm Algoritması:

$$x_N = \frac{\beta_N}{\alpha_N} \quad (3.55)$$

$$x_i = \frac{(\beta_i + c_i x_{i+1})}{\alpha_i}, i = N - 1, N - 2, \dots, 0. \quad (3.56)$$

3.10. Hata Normları

Uygulanan nümerik yöntemler ile elde edilen sonuçların doğruluğunu ölçmek için çeşitli hata normları kullanılmaktadır. Analitik çözümün bilindiği durumlarda nümerik çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkın ölçülmesi ile hata normları belirlenir. Test problemlerinden uygun olanlarda, uygulanan yöntemlerde elde edilen sonuçlardaki hatalar L_2 ve L_∞ olarak gösterilen hata normları ile ölçüldü. Tezde kullanılan bu iki hata normu sırasıyla tanıtılmıştır:

3.10.1. Ortalama hata normu:

$$L_2 = \|U^{analitik} - U^{nümerik}\|_2 \simeq \sqrt{h \sum_J^N |U_j^{analitik} - (U^{nümerik})_j|^2} \quad (3.57)$$

3.10.2. Maksimum hata normu:

$$L_\infty = \|U^{analitik} - U^{nümerik}\|_\infty \simeq \max_j |U_j^{analitik} - (U^{nümerik})_j|. \quad (3.58)$$

4. KUADRATİK B-SPLİNE SUBDOMAİN GALERKİN YÖNTEMİ İLE RLW DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

Tezin bu bölümünde zamana bağlı RLW denklemi için bir yaklaşık çözüm elde edildi. Yöntem oluşturulmasında, zaman ayrıştırması için Crank-Nicolson yöntemi kullanılırken konum ayrıştırması için ise kuadratik B-spline subdomain Galerkin yöntemi kullanıldı ve test problemleri üzerinde çalışıldı. Elde edilen sonuçlar literatürde var olan sonuçlarla karşılaştırıldı.

4.1. Yöntemin Oluşturulması ve Uygulanması

Bir $[a, b]$ aralığında (3.1) denkleminin subdomain Galerkin yöntemine ait ağırlık fonksiyonu uygulandığında, $m = 0, \dots, N - 1$ olmak üzere, bu $[a, b]$ elemanı üzerindeki integralin zayıf formu aşağıdaki gibidir:

$$\int_a^b W_m (u_t + u_x + \varepsilon uu_x - \mu u_{xxt}) dx = 0. \quad (4.1)$$

Seçilen bir $[x_m, x_{m+1}]$ örnek aralığı üzerinde, (4.1) denkleminin son hali;

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} 1. (u_t + u_x + \varepsilon uu_x - \mu u_{xxt}) dx = 0 \quad (4.2)$$

şeklindedir.

(4.2) denklemi integre edilir:

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} u_t dx + \int_{x_m}^{x_{m+1}} u_x dx + \int_{x_m}^{x_{m+1}} \varepsilon uu_x dx - \int_{x_m}^{x_{m+1}} \mu u_{xxt} dx = 0, \quad (4.3)$$

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} u_t dx + u \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} + \frac{1}{2} \varepsilon u^2 \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} - \mu u_{xxt} \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} = 0$$

(4.3) denkleminin ulaşılır.

x_m bölünme noktalarında u_m bilinmeyenlerine, zaman değişkeni için Crank-Nicolson yöntemi uygulanır, u_m^2 terimine n . ve $(n + 1)$. zamanlarda lineerleştirme yapılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$u_m = \frac{u_m^{n+1} + u_m^n}{2}, \quad \frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t}, \quad u_m^2 = u_m^{n+1} u_m^n. \quad (4.4)$$

(4.4) ile verilen yaklaşımlar (4.3) te yerine yazılır, $h\xi = x - x_m$, $0 \leq \xi \leq 1$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 h \sum_{i=-1}^N Q_m(\xi) \dot{\delta}_m(t) d\xi + \left(\frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right) \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} + \frac{1}{2} \varepsilon (u^{n+1} u^n) \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} - \mu \left(\frac{u_x^{n+1} - u_x^n}{\Delta t} \right) \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} = 0, \\
& h \int_0^1 (Q_{m-1}(\xi) \dot{\delta}_{m-1}(t) + Q_m(\xi) \dot{\delta}_m(t) + Q_{m+1}(\xi) \dot{\delta}_{m+1}(t)) d\xi \\
& + \left(\frac{u_{m+1}^{n+1} + u_{m+1}^n}{2} - \frac{u_m^{n+1} + u_m^n}{2} \right) + \frac{1}{2} \varepsilon (u_{m+1}^{n+1} u_{m+1}^n - u_m^{n+1} u_m^n) \\
& - \mu \left(\frac{(u_{m+1}^{n+1})' - (u_{m+1}^n)'}{\Delta t} - \frac{(u_m^{n+1})' - (u_m^n)'}{\Delta t} \right) = 0, \\
& h \left(\frac{\delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n}{\Delta t} \right) \int_0^1 Q_{m-1}(\xi) d\xi + h \left(\frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t} \right) \int_0^1 Q_m(\xi) d\xi \\
& + h \left(\frac{\delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m+1}^n}{\Delta t} \right) \int_0^1 Q_{m+1}(\xi) d\xi + \left(\frac{u_{m+1}^{n+1} + u_{m+1}^n}{2} - \frac{u_m^{n+1} + u_m^n}{2} \right) \\
& + \frac{1}{2} \varepsilon (u_{m+1}^{n+1} u_{m+1}^n - u_m^{n+1} u_m^n) - \mu \left(\frac{(u_{m+1}^{n+1})' - (u_{m+1}^n)'}{\Delta t} - \frac{(u_m^{n+1})' - (u_m^n)'}{\Delta t} \right) = 0, \\
& \frac{h}{3\Delta t} (\delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n) + \frac{4h}{3\Delta t} (\delta_m^{n+1} - \delta_m^n) + \frac{h}{3\Delta t} (\delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m+1}^n) \\
& + \frac{1}{2} (-\delta_{m-1}^{n+1} + \delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n + \delta_{m+1}^n) + \left(-\varepsilon \frac{f^*}{2} \delta_{m-1}^{n+1} + \varepsilon \frac{h^*}{2} \delta_m^{n+1} + \varepsilon \frac{g^*}{2} \right) \\
& - \frac{2\mu}{h\Delta t} (\delta_{m-1}^{n+1} - 2\delta_m^{n+1} + \delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n + 2\delta_m^n - \delta_{m+1}^n) = 0.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca burada $\dot{\delta}$ zamana göre türevi belirtir. a, b, c, d, f^*, g^* ve h^* değerleri

$$\begin{aligned}
a &= \frac{h}{3\Delta t}, & b &= \frac{2\mu}{h\Delta t}, & f^* &= \delta_{m-1}^n + \delta_m^n, \\
g^* &= \delta_m^n + \delta_{m+1}^n, & h^* &= \delta_{m+1}^n - \delta_{m-1}^n.
\end{aligned}$$

olmak üzere (4.5) sistemi

4.2.1. Solitary dalga hareketi

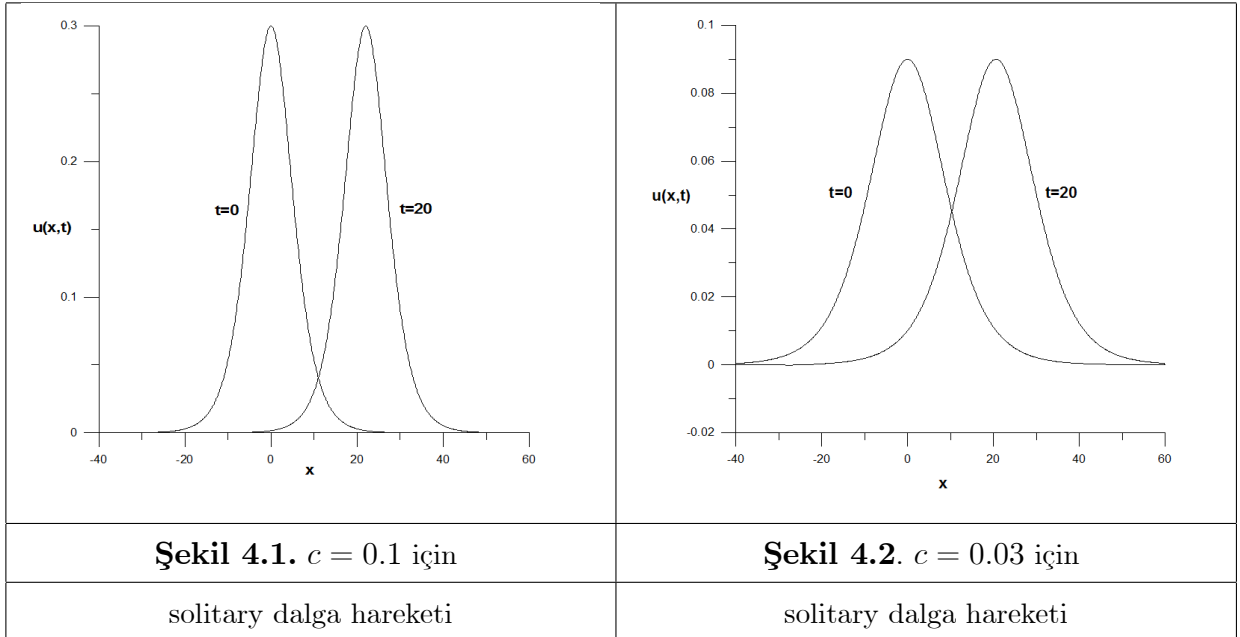
RLW denkleminin analitik çözümü $k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon c}{\mu(1 + \varepsilon c)}}$ olmak üzere;

$$U(x, t) = \frac{3c}{\cosh^2(k(x - x_0 - (1 + \varepsilon c)t))} \quad (4.9)$$

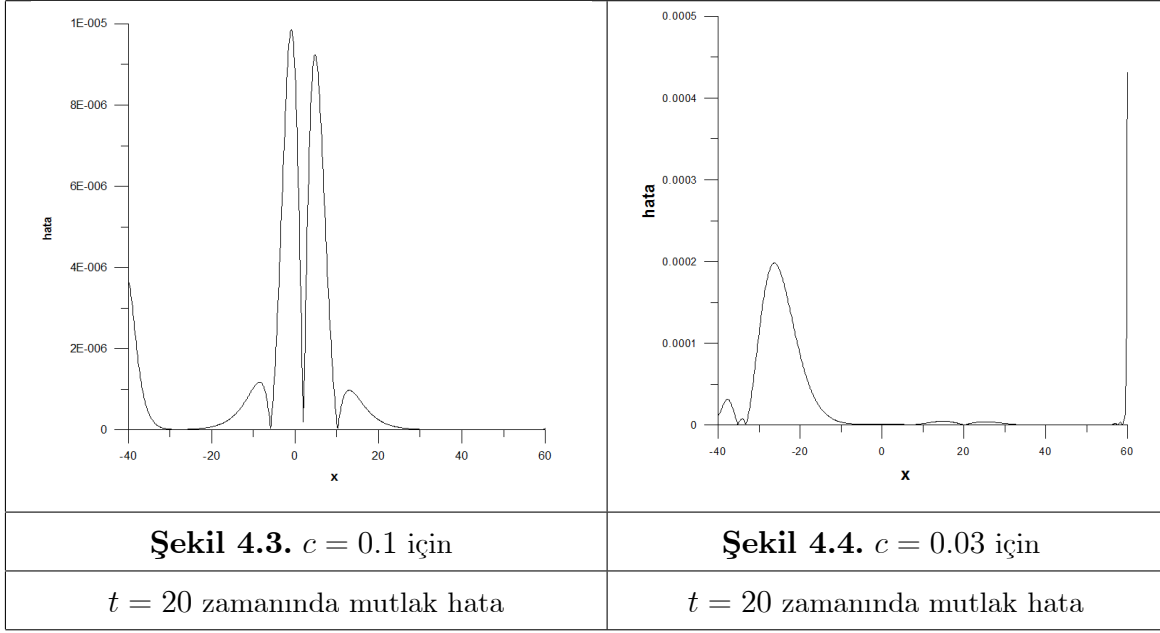
olarak belirtilmiştir. Bu çözüm $3c$ genliğine, $1 + \varepsilon c$ hıza sahip x_0 tepe noktasının apsisi olacak şekilde yerleştirilmiş bir soliton dalgasının soldan sağa doğru hareketini modeller. Başlangıç koşulu (4.9) denkleminde $t = 0$ yazılarak hesaplanır. Sınır şartları ise $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$ olarak alınmıştır. Yukarıdaki denklemde yer alan diğer parametre değerleri;

$$c = 0.1 \text{ ve } 0.03, \quad x_0 = 0, \quad \varepsilon = 1, \quad \mu = 1.$$

Bu parametreler ve belirtilen başlangıç koşulu ile solitary dalga $-40 \leq x \leq 60$ aralığı boyunca ve $0 \leq t \leq 20$ zaman aralığında hareket eder. Nümerik hesaplamalar yapılırken, daha önce yapılan çalışmalarla benzer olarak konum adımı $h = 0.125$ ve zaman adımı $\Delta t = 0.1$ olarak seçilmiştir. Elde edilen çözümün başlangıç ve $t = 20$ zamanındaki durumu Şekil 4.1 ve 4.2'de gösterilmiştir. Genliğin ilerleyen zaman süresince değişmediği şekilden görülebilir.



$t = 20$ zamanındaki 0.1 ve 0.03 genlikleriyle oluşan mutlak hata Şek.4.3 ve Şek.4.4'de sırasıyla gösterilmiştir.



Çizelge 4.1 ve 4.2’de farklı genlik değerleri kullanılarak elde edilen L_2 ve L_∞ hataları ile I_1 , I_2 , I_3 korunum sabitleri listelenmiştir. Çizelge 4.3 ve 4.4’de de daha önce yapılan çalışmalardaki maksimum hata (L_∞) ve I_1 , I_2 , I_3 korunum sabitleri verilerek karşılaştırma yapıldı.

Çizelge 4.1. $c = 0.1$ genliği için $h = 0.125$ ve $\Delta t = 0.1$ olmak üzere					
çeşitli zamanlarda elde edilen hata normları ve korunum sabitleri					
Zaman	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$	I_1	I_2	I_3
0	0.00000	0.00000	3.9799271	0.8104649	2.5790074
4	5.27767	2.11832	3.9799299	0.8104649	2.5790074
8	10.40534	4.25252	3.9799282	0.8104649	2.5790074
12	15.34791	6.21597	3.9799257	0.8104649	2.5790074
16	20.07348	7.99399	3.9799172	0.8104649	2.5790074
20	24.58416	9.60804	3.9798832	0.8104649	2.5790074

Çizelge 4.2. $c = 0.03$ genliği için $h = 0.125$ ve $\Delta t = 0.1$ olmak üzere					
çeşitli zamanlarda elde edilen hata normları ve korunum sabitleri					
Zaman	$L_2 \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$	I_1	I_2	I_3
0	0.0000	0.0000	2.10707185	0.127301305	0.38880466
4	4.125761	2.299776	2.10709816	0.127301155	0.38880405
8	5.113868	2.210282	2.10689725	0.127301158	0.38880403
12	5.358073	2.124982	2.10655094	0.127301177	0.38880395
16	5.437845	2.138706	2.10592774	0.127301260	0.38880362
20	5.653331	4.315118	2.10460421	0.127301619	0.38880284

Çizelge 4.3. $t = 20$ zamanında $c = 0.1$, $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$ için					
hata normları ve korunum sabitleri karşılaştırması					
Yöntem	Zaman	$L_\infty \times 10^3$	I_1	I_2	I_3
QBSGY	20	0.960804	3.9798832	0.8104649	2.579007
Avilez-Valente ve S.-S. (2004)	20	0.02643	3.979909	0.8104625	2.579007
Dağ vd. (2006)	20	0.07337	3.979883	0.8104612	2.579003
Dağ ve Özer (2001)	20	1.56640	3.961597	0.804185	2.558292
Dağ vd. (2003)	20	0.10299	3.979858	0.8104596	2.578999
Dağ vd. (2004)	20	0.116	3.979883	0.8102762	2.578393
Mei ve Chen (2012)	20	0.91465	3.97972	0.81026	2.57873
Saka ve Dağ (2008)	20	0.07344	3.979888	0.8104622	2.579006
Saka vd. (2004)	20	0.073	3.97989	0.81046	2.57901
Analitik	20		3.97995	0.8104624	2.579007

Çizelge 4.4. $t = 20$ zamanında $c = 0.03$, $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$ için					
hata normları ve korunum sabitleri karşılaştırması					
Yöntem	Zaman	$L_\infty \times 10^3$	I_1	I_2	I_3
QBSGY	20	0.4315118	2.10460421	0.127301619	0.3888047
Dağ vd. (2003)	20	1.5506	2.128869	0.127228	0.388571
Dağ vd. (2004)	20	0.432	2.104584	0.12729366	0.3887776
Mei ve Chen (2012)	20	0.439145	2.10902	0.12730	0.38880
Saka ve Dağ (2008)	20	0.19806	2.104708	0.1273006	0.3888025
Saka vd. (2004)	20	0.199	2.10467	0.12730	0.38880
Analitik	20		2.109407	0.12730171	0.3888059

4.2.2. Ardışık dalgaların yayılması

Bu bölümde, RLW denkleminin undulation çözümleri üzerinde çalışıldı. Başlangıç ve sınır şartları:

$$u(x, 0) = 0.5U_0 \left[1 - \tanh \left(\frac{x - x_c}{d} \right) \right],$$

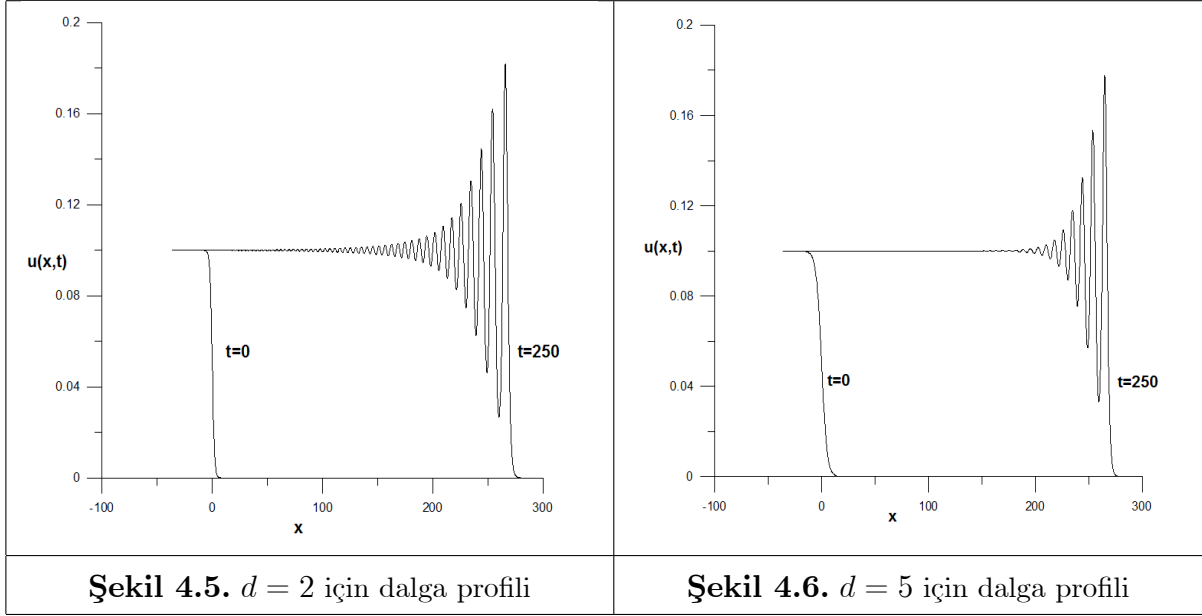
$$u(a, t) = u_0, u(b, t) = 0.$$

Burada parametreler literatürle uyumlu olarak aşağıdaki gibi alınmıştır:

$$\varepsilon = 1.5, \mu = 0.16666667, U_0 = 0.1, x_c = 0, d = 2 \text{ ve } 5.$$

Bu test probleminde başlangıç şartı durgun su yüzeyinde soldan sağa doğru ilerleyen yükseltiyi, d ise durgun su ile derinlik arasındaki eğimi ifade etmektedir. Başlangıçta, su yüzeyi ve durgun su arasında x_c merkezli bir arakesit bulunmaktadır. Dalgaların oluşumu gözlenecektir.

Hesaplamalar, $[-36, 300]$ aralığı boyunca $h = 0.24$ konum adımı ve $\Delta t = 0.1$ zaman adımı ile $t = 250$ anına kadar yapılmıştır. Şekil 4.5 ve 4.6'da sırasıyla $d = 2$ ve 5 için undulation oluşumları ve yayılımı gösterilmiştir. Simülasyon boyunca, başlangıç koşuluna bağlı olarak dik eğimlerde daha az undulation oluşumu gözlenmiştir.



Çizelge 4.5 ve 4.6'da seçilmiş bazı zamanlarda korunum sabitleri verilmiştir.

Çizelge 4.5. $d = 2$, $h = 0.24$, $\Delta t = 0.1$ değerleri için korunum sabitleri

Zaman	I_1	I_2	I_3
0	3.6120000536	0.3514783247	1.0882200329
50	8.9870002193	0.9014909104	2.7932904688
100	14.3620003851	1.4515084020	4.4981402396
150	19.7370005508	2.0015282012	6.2028854081
200	25.1120000392	2.5515487634	7.9075914586
250	30.4869992501	3.1015694420	9.6122817567

Çizelge 4.6. $d = 5$, $h = 0.24$, $\Delta t = 0.1$ değerleri için korunum sabitleri

Zaman	I_1	I_2	I_3
0	3.6120001863	0.3363111818	1.0409701151
50	8.9870003518	0.8863138358	2.7464668909
100	14.3620005175	1.4363224521	4.4517020163
150	19.7370006833	1.9863379845	6.1566373018
200	25.1120008491	2.5363571135	7.8614128612
250	30.4870010065	3.0863774992	9.5661304263

Nümerik yöntem kullanılarak elde edilen çözümler yardımıyla bulunan korunum sabitlerinin aşağıda verilen teorik korunum sabitleri ile karşılaştırma yapılarak da yaklaşık çözümlerin geçerliliği test edilebilir:

$$M_1 = \frac{d}{dt} I_1 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u dx = U_0 + \frac{\varepsilon}{2} U_0^2 = 0.1075,$$

$$M_2 = \frac{d}{dt} I_2 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + \mu (u_x)^2) dx = U_0^2 + \frac{2}{3} \varepsilon U_0^3 = 0.011,$$

$$M_3 = \frac{d}{dt} I_3 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} (u^3 + 3u^2) dx = 3U_0^2 + (1 + 2\varepsilon) U_0^3 + \frac{3}{4} \varepsilon U_0^4 = 0.034113.$$

Sabitlerin nümerik farklılıkları aşağıdaki formüllerle hesaplanır:

$$M_i = (I_i(t = 250) - I_i(t = 0)) / 250, \quad i = 1, 2, 3$$

Başlangıç şartında $d = 2$ kullanıldığında;

$$M_1 = 0.107499996786, \quad M_2 = 0.0110003644692, \quad M_3 = 0.0340962468952$$

değerleri bulundu. Benzer şekilde daha geniş eğim olan $d = 5$ seçildiğinde bu değerler;

$$M_1 = 0.1075000032808, \quad M_2 = 0.0110002652696, \quad M_3 = 0.0341006412448$$

olarak elde edildi.

4.2.3. Dalga üretimi

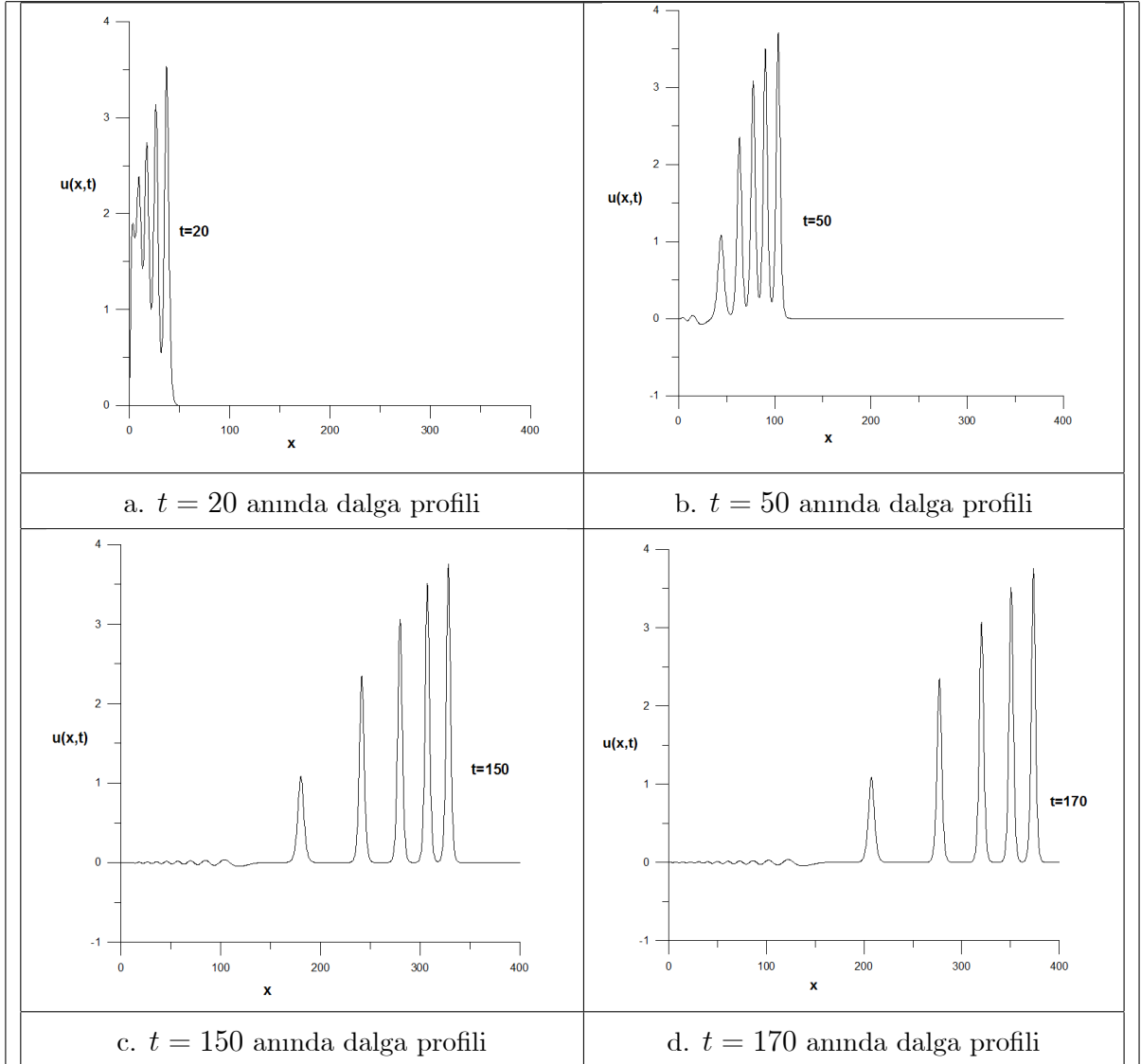
Bu nümerik deneyde, RLW denkleminde dalga üretimi için sol sınır şartı aşağıdaki gibi alınır:

$$u(a, t) = \begin{cases} U_0 \frac{t}{\tau}, & 0 \leq t \leq \tau, \\ U_0, & \tau < t < t_0 - \tau, \\ U_0 \frac{t_0 - t}{\tau}, & t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \\ 0, & \text{d. d.} \end{cases}$$

ve sağ sınır şartı $u(b, t) = 0$ dır. Daha önce yapılmış olan çalışmalarla karşılaştırma yapabilmek amacıyla hesaplamalar $0 \leq x \leq 400$ bölgesi üzerinde, $U_0 = 2$, $\Delta t = 0.1$, $h = 0.4$, $t_0 = 20$, $\tau = 0.1$ parametreleri seçilerek yapılmıştır. Algoritmanın çalışma süresi

boyunca, beş tane solitary dalga üretildi. İlk dört dalga güç uygulanan dalgalardan daha geniş genliğe ulaşmasına rağmen son dalga güç uygulanmış dalgadan daha zayıf bir şekilde oluştu. Güç kesildiğinde, son dalganın oluşmak için yeterli zamanı olmadı ve yeni bir dalga oluşmadı. Şekil 4.7 'de ilerleyen dalganın $t = 20, 50, 150, 170$ zamanlarındaki durumu gösterildi. Çizelge 4.7'de ise, çeşitli zamanlarda elde edilen korunum sabitleri verildi.

Şekil.4.7. Seçilmiş zamanlarda dalga yayılımı



Çizelge 4.7. $U_0= 2, h = 0.4, \Delta t = 0.1$ için			
farklı zamanlarda elde edilen korunum sabitleri			
Zaman	I_1	I_2	I_3
2.5	9.757764	18.032614	84.177506
5	20.182231	43.055366	215.235472
7.5	30.129525	66.200757	334.387092
10	40.023067	89.136149	452.117777
15	60.041500	135.932548	693.013860
20	77.291793	177.170946	890.910075
40	78.998483	176.653104	896.016145
60	79.002122	176.663738	896.116952
80	78.998379	176.665312	896.134001
100	79.001076	176.665667	896.138018

5. KUADRATİK B-SPLİNE SUBDOMAİN GALERKİN YÖNTEMİ İLE BURGERS DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

Tezin bu bölümünde zamana bağlı Burgers denkleminde kuadratik B-spline subdomain Galerkin yöntemiyle bir yaklaşım yapıldı. Yöntem oluşturulurken zaman ayrıştırması için Crank-Nicolson yöntemi, konum ayrıştırması için kuadratik B-spline subdomain Galerkin yöntemi kullanıldı ve 3.2.1'de tanımlanan test problemleri üzerinde çalışıldı. Elde edilen sonuçlar literatürde var olan sonuçlarla karşılaştırıldı.

5.1. Yöntemin Oluşturulması ve Uygulanması

(3.9)'da verilen Burgers denkleminde , bir $[a, b]$ elemanı üzerinde kuadratik B-spline subdomain Galerkin yöntemi uygulandığında, $m = 0, \dots, N - 1$ olmak üzere integralin zayıf formu

$$\int_a^b W_m (u_t + uu_x - \nu u_{xx}) dx = 0. \quad (5.1)$$

şeklindedir.

Seçilen bir $[x_m, x_{m+1}]$ örnek elemanı ele alındığında (5.1) denklemi aşağıdaki gibi olur:

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} 1 (u_t + uu_x - \nu u_{xx}) dx = 0. \quad (5.2)$$

İntegral işlemleri yapılarak aşağıdaki (5.3) elde edildi.

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} u_t dx + \int_{x_m}^{x_{m+1}} uu_x dx - \int_{x_m}^{x_{m+1}} \nu u_{xx} dx = 0, \quad (5.3)$$

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} u_t dx + \frac{1}{2} u^2 \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} - \nu u_x \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} = 0$$

x_m bölünme noktalarında u_m bilinmeyenlerine zaman için Crank-Nicolson yöntemi ile yaklaşım uygulanır ve u_m^2 terimine n . ve $(n + 1)$. zamanlarda lineerleştirme yapılırsa

$$u_m = \frac{u_m^{n+1} + u_m^n}{2}, \quad \frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t}, \quad u_m^2 = u_m^{n+1} u_m^n. \quad (5.4)$$

elde edilir. Bu ifadeler (5.3) te yerine yazılır ve $h\xi = x - x_m$, $0 \leq \xi \leq 1$ dönüşümü yapılırsa $\dot{\delta}$ işareti zamana göre türevi göstermek üzere;

$$\int_0^1 h \sum_{m=-1}^N Q_m(\xi) \dot{\delta}_m(t) d\xi + \frac{1}{2} u^{n+1} u^n \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} - \nu \left(\frac{u_x^{n+1} - u_x^n}{2} \right) \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} = 0,$$

$$h \int_0^1 (Q_{m-1}(\xi) \dot{\delta}_{m-1}(t) + Q_m(\xi) \dot{\delta}_m(t) + Q_{m+1}(\xi) \dot{\delta}_{m+1}(t)) d\xi$$

$$+ \frac{1}{2} \varepsilon (u_{m+1}^{n+1} u_{m+1}^n - u_m^{n+1} u_m^n) - \nu \left(\frac{(u_{m+1}^{n+1})' - (u_{m+1}^n)'}{2} - \frac{(u_m^{n+1})' - (u_m^n)'}{2} \right) = 0,$$

$$h \left(\frac{(\delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n)}{\Delta t} \right) \int_0^1 Q_{m-1}(\xi) d\xi + h \left(\frac{(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n)}{\Delta t} \right) \int_0^1 Q_m(\xi) d\xi +$$

$$h \left(\frac{(\delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m+1}^n)}{\Delta t} \right) \int_0^1 Q_{m+1}(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \varepsilon (u_{m+1}^{n+1} u_{m+1}^n - u_m^{n+1} u_m^n)$$

$$- \nu \left(\frac{(u_{m+1}^{n+1})' - (u_{m+1}^n)'}{2} - \frac{(u_m^{n+1})' - (u_m^n)'}{2} \right) = 0,$$

$$\frac{h}{3\Delta t} (\delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n) + \frac{4h}{3\Delta t} (\delta_m^{n+1} - \delta_m^n) + \frac{h}{3\Delta t} (\delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m+1}^n) + \left(-\varepsilon \frac{f^*}{2} \delta_{m-1}^{n+1} + \varepsilon \frac{h^*}{2} \delta_m^{n+1} + \varepsilon \frac{g^*}{2} \right)$$

$$- \frac{\nu}{h} (\delta_{m-1}^{n+1} - 2\delta_m^{n+1} + \delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m-1}^n - 2\delta_m^n + \delta_{m+1}^n) = 0.$$

ifadesi bulunur. Denklemden yapılan düzenlemeler sonrası yarı-lineer yineleme bağıntısı olan

$$\begin{aligned} \left[a - \frac{f^*}{2} - b \right] \delta_{m-1}^{n+1} + \left[4a + \frac{h^*}{2} - 2b \right] \delta_m^{n+1} + \left[a + \frac{g^*}{2} - b \right] \delta_{m+1}^{n+1} \\ = [a + b] \delta_{m-1}^n + [4a - 2b] \delta_m^n + [a + b] \delta_{m+1}^n \end{aligned} \quad (5.5)$$

$m = 0, 1, \dots, N - 1$ için (5.5) denklem sistemi elde edildi. Burada $a, b, c, d, f^*, g^*, h^*$:

$$\begin{aligned} a &= \frac{h}{3\Delta t}, & b &= \frac{\nu}{h}, \\ f^* &= \delta_{m-1}^n + \delta_m^n, & g^* &= \delta_m^n + \delta_{m+1}^n, \\ h^* &= \delta_{m+1}^n - \delta_{m-1}^n. \end{aligned}$$

dir. Böylece, $A\mathbf{X} = B$ şeklinde (5.7) ile gösterilen N tane denklem, $N + 2$ tane bilinmeyenden oluşan bir denklem sistemi elde edildi.

5.2. Test Problemleri

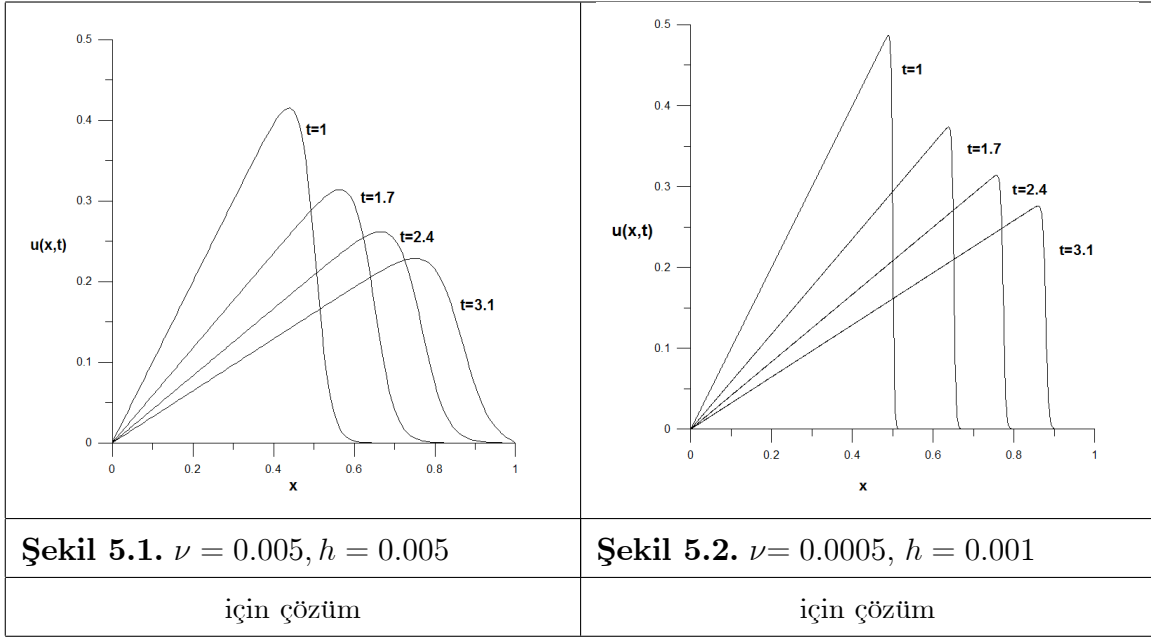
Yöntemin performansını ölçmek için iki test problemi üzerinde çalışıldı. Nümerik çözümlerin hataları L_2 ve L_∞ normları ile hesaplandı.

5.2.1. Şok dalgası yayılımı

Burgers denkleminin bir şok yayılma çözümü

$$u(x, t) = \frac{x/t}{1 + \sqrt{t/t_0} \exp(x^2/(4\nu t))}, \quad t \geq 1, \quad (5.10)$$

şeklindedir. Burada $t_0 = \exp(1/(8\nu))$ dir. Burgers denkleminin bu çözümü daha küçük ν değerleri için daha keskin şokları verir.



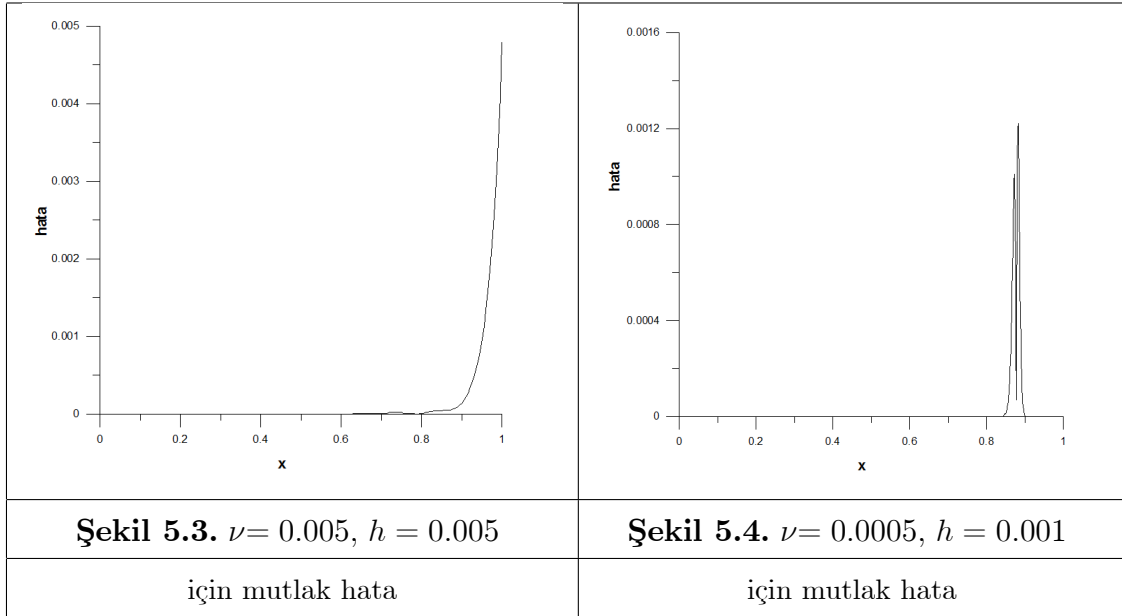
$t = 1$ anında elde edilen başlangıç şartı (5.10) denkleminde kullanılır ve zaman ilerledikçe dalganın durumu gözlenebilecektir. Sınır şartları olarak $u(0, t) = 0$ ve $u(1, t) = u_x(1, t) = 0$ kullanıldı. Daha önceki çalışmalarla karşılaştırma yapabilmek için hesaplamalar, $\nu = 0.005, 0.0005, h = 0.02, 0.001, 0.005$ ve $\Delta t = 0.01$ seçilerek $[0, 1]$ tanım kümesi üzerinde yapılmıştır. Şekil 5.1 ve 5.2'de $\nu = 0.005, h = 0.005$ ve $\nu = 0.0005, h = 0.001$ için şok dalganın yayılımı görülebilir. Bu şekillerden anlaşılıyor ki, ne kadar küçük değerlerde viskozite seçilirse o kadar keskin dalga oluşur. $\nu = 0.005$ için $t = 1$ 'deki düzgün başlangıç şartıyla, algoritma zamanla daha düzgün şok dalgaları oluşturmaktadır. Daha küçük viskozite değeri olan $\nu = 0.0005$ seçildiğinde, daha

keskin başlangıç şartı elde edilir ve nümerik çözümün dikliği program boyunca neredeyse değişmeden kalmaktadır. Şok dalganın genliği zamanla azalmaktadır.

Çizelge 5.1. Farklı zaman adımlarında hata normlarının karşılaştırılması						
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
$h = 0.005, \nu = 0.005$	$t = 1.7$	$t = 1.7$	$t = 2.4$	$t = 2.4$	$t = 3.1$	$t = 3.1$
QBSGY	0.01699	0.00000	0.01464	0.06463	0.65079	4.79061
A.H.A vd. (1990)	0.857	2.576	0.423	1.242	0.235	0.688
Dağ vd. (2005) (QBGM)	0.35133	1.20755	0.24451	0.80187	0.63335	4.79061
Saka ve Dağ (2007) (QBCM1)	0.01705	0.06192	0.01252	0.05882	0.60199	4.43469
Saka ve Dağ (2008) (QBCA1)	0.35008	1.21175	0.24439	0.80771	0.63309	4.79061
Saka ve Dağ (2009)	0.01098	0.04284	0.00976	0.06464	0.65137	4.79061
$h = 0.02, \nu = 0.005$	$t = 1.8$	$t = 1.8$	$t = 2.4$	$t = 2.4$	$t = 3.2$	$t = 3.2$
QBSGY	0.36661	0.00000	0.25061	0.06463	1.24558	7.49146
Ramadan vd. (2005)	0.68761	2.47189	0.67943	2.16784	1.48559	7.49146
Saka ve Dağ (2007) (QBCM1)	0.19127	0.54058	0.14246	0.39241	0.93617	5.54899
Saka ve Dağ (2008) (QBCA1)	0.33376	1.15263	0.24522	0.80008	1.22981	7.49147
Saka ve Dağ (2009)	0.00980	0.03546	0.01167	0.06464	1.26114	7.49147
$h = 0.02, \nu = 0.01$	$t = 1.7$	$t = 1.7$	$t = 2.1$	$t = 2.1$	$t = 2.6$	$t = 2.6$
QBSGY	0.15183	0.09592	0.24292	1.14760	1.55790	8.06799
Ramadan vd. (2005)	0.69910	3.13476	0.72976	2.66986	1.74570	8.06798
Saka ve Dağ (2007) (QBCM1)	0.17014	0.40431	0.20476	0.86363	1.29951	6.69425
Saka ve Dağ (2008) (QBCA1)	0.17792	0.47456	0.24875	1.14759	1.54108	8.06798
Saka ve Dağ (2009)	0.01665	0.09592	0.20839	1.14760	1.57287	8.06799

Bu problem için algoritmanın doğruluğu L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak gösterildi. Bu sonuçlar, seçilen bazı zamanlarda Çizelge 5.1'de gösterilmiştir. Elde edilen bu sonuçlar, A.H.A vd. (1990), Dağ vd. (2005), Ramadan vd (2005), Saka ve Dağ (2007, 2008, 2009) çalışmalarında bulunan sonuçlarla aynı çizelgede gösterilmiştir.

Analitik ve nümerik çözümler arasındaki hata dağılımı sırasıyla $\nu = 0.005$, $h = 0.005$ ve $\nu = 0.0005$, $h = 0.001$ için Şekil 5.3 ve 5.4'de gösterildi.



5.2.2. İlerleyen dalga yayılımı

Burgers denkleminin bir analitik çözümü aşağıdaki gibidir:

$$u(x, t) = \frac{\alpha + \mu + (\mu - \alpha) \exp \eta}{1 + \exp \eta}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad (5.11)$$

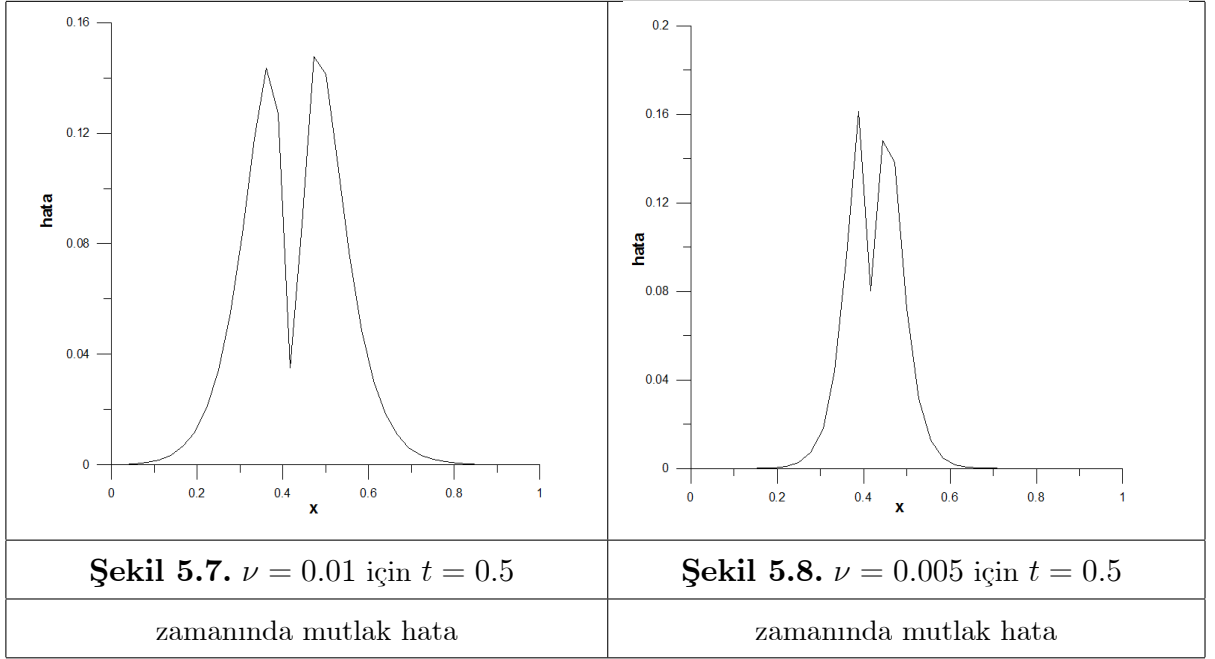
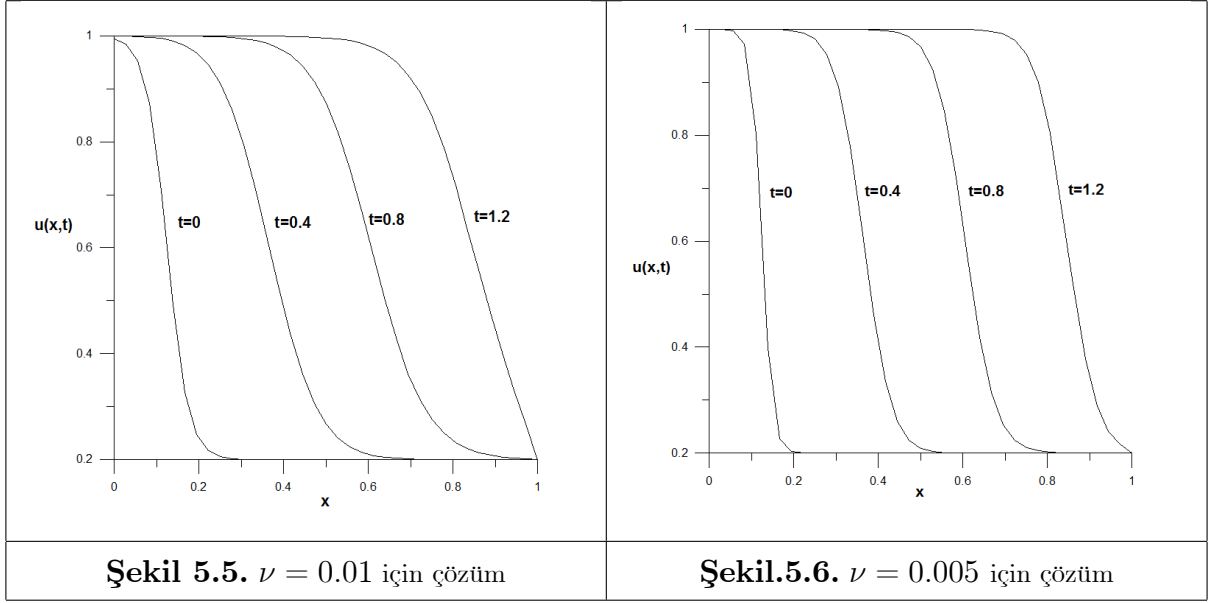
burada $\eta = \frac{\alpha(x - \mu t - \gamma)}{\nu}$ dir. α , μ ve γ parametreleri, önceki çalışmalarla karşılaştırma yapabilmek için $\alpha = 0.4$, $\mu = 0.6$ ve $\gamma = 0.125$ olarak seçilmişlerdir. Bu çözüm, sağa doğru μ hızıyla ilerleyen bir dalga çözümünü içerir. $t = 0$ iken (5.11) denkleminde başlangıç şartı elde edilir. Bu test probleminde sınır şartları, $t \geq 0$ için $u(0, t) = 1$, $u(1, t) = 0.2$ ve $u_x(0, t) = 0$, $u_x(1, t) = 0$ 'dir.

Program, zaman adımı $\Delta t = 0.01$, konum adımı $h = 1/36$ ve viskozite katsayısı $\nu = 0.01$ ve 0.005 kullanılarak, $t = 0.5$ 'e kadar çalıştırılmıştır. QBSGY için $L_2 = 1.48311 \times 10^{-3}$ ve $L_\infty = 5.5140383 \times 10^{-3}$ bulunmuş ve elde edilen sonuçlar Çizelge 5.2 ve 5.3'de kuadratik B-spline Galerkin yöntemi Dağ vd. (2005), kuartik B-spline kollokasyon yöntemi Saka ve Dağ (2007), kuintik B-spline kollokasyon yöntemi Saka ve Dağ (2008) ve kuartik B-spline Galerkin yöntemi Saka ve Dağ (2009) sonuçlarıyla verilmiştir.

Çizelge 5.2. $t = 0.5$ zamanında $h = 1/36$, $\nu = 0.01$		
için hata karşılaştırması		
Yöntem	$L_2 \times 10^2$	$L_\infty \times 10$
QBSGY	6.10924	1.47772
Dağ vd. (2005) (QBGM)	1.92558	6.35489
Saka ve Dağ (2007) (QBCM1)	0.77033	3.03817
Saka ve Dağ (2008) (QBCA1)	1.72434	5.78454
Saka ve Dağ (2009) (QBGM)	0.39	1.44

Çizelge 5.3. $t = 0.5$ zamanında $h = 1/36$, $\nu = 0.005$		
için hata karşılaştırması		
Yöntem	$L_2 \times 10^2$	$L_\infty \times 10$
QBSGY	5.04123	1.613741
Dağ vd. (2005) (QBGM)	1.92558	6.35489
Saka ve Dağ (2007) (QBCM1)	0.77033	3.03817
Saka ve Dağ (2008) (QBCA1)	1.72434	5.78454
Saka ve Dağ (2009) (QBGM)	0.39	1.44

Şekil 5.5 ve 5.6'da başlangıç dalgası ile bazı zamanlardaki çözümler gösterilmektedir. Şekil 5.7 ve 5.8'de ise $t = 0.5$ için hata dağılımları gösterilmiştir.



6. KUADRATİK TRİGONOMETRİK B-SPLİNE SUBDOMAIN GALERKİN YÖNTEMİ İLE RLW DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, zamana bağlı RLW denklemi için bir yaklaşık çözüm elde edildi. Yöntem oluşturulmasında, zaman ayrıştırması için Crank-Nicolson, konum ayrıştırması için kuadratik trigonometrik B-spline subdomain Galerkin yöntemi kullanıldı ve test problemleri üzerinde çalışıldı. Elde edilen sonuçlar literatürde var olan sonuçlarla karşılaştırıldı.

6.1. Yöntemin Oluşturulması ve Uygulanması

(3.1) denkleminde, subdomain Galerkin yöntemi uygulandığında ve $m = 0, \dots, N - 1$ olmak üzere, $[a, b]$ elemanı üzerinde integralin zayıf formu aşağıdaki gibidir:

$$\int_a^b W_m (u_t + u_x + \varepsilon u u_x - \mu u_{xxt}) dx = 0. \quad (6.1)$$

$[x_m, x_{m+1}]$ örnek aralığı üzerinde, (6.1) denkleminin son hali;

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} 1 (u_t + u_x + \varepsilon u u_x - \mu u_{xxt}) dx = 0 \quad (6.2)$$

şeklindedir.

(6.2) denklemi integre edildiğinde

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} u_t dx + \int_{x_m}^{x_{m+1}} u_x dx + \int_{x_m}^{x_{m+1}} \varepsilon u u_x dx - \int_{x_m}^{x_{m+1}} \mu u_{xxt} dx = 0, \quad (6.3)$$

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} u_t dx + u \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} + \frac{1}{2} \varepsilon u^2 \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} - \mu u_{xt} \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} = 0$$

denkleminde ulaşılır.

x_m bölünme noktalarında u_m bilinmeyenlerine zaman için Crank-Nicolson yöntemi ile yaklaşım uygulanır ve u_m^2 terimine ardışık olarak n . ve $(n + 1)$. zamanlarında lineerleştirme yapılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$u_m = \frac{u_m^{n+1} + u_m^n}{2}, \quad \frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t}, \quad u_m^2 = u_m^{n+1} u_m^n. \quad (6.4)$$

u_t terimi için $\dot{\delta}$ işareti zamana göre türevi göstermek üzere $h\xi = x - x_m$, $0 \leq \xi \leq 1$ dönüşümü yapılır ve (6.4) yaklaşımları yerine yazılırsa:

$$\int_0^1 h \sum_{m=-1}^N T_m(\xi) \dot{\delta}_m(t) d\xi + \left(\frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right) \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} + \frac{1}{2} \varepsilon (u^{n+1} u^n) \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} - \mu \left(\frac{u_x^{n+1} - u_x^n}{\Delta t} \right) \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} = 0,$$

$$h \int_0^1 (T_{m-1}(\xi) \dot{\delta}_{m-1}(t) + T_m(\xi) \dot{\delta}_m(t) + T_{m+1}(\xi) \dot{\delta}_{m+1}(t)) d\xi + \left(\frac{u_{m+1}^{n+1} + u_{m+1}^n}{2} - \frac{u_m^{n+1} + u_m^n}{2} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \varepsilon (u_{m+1}^{n+1} u_{m+1}^n - u_m^{n+1} u_m^n) - \mu \left(\frac{(u_{m+1}^{n+1})' - (u_{m+1}^n)'}{\Delta t} - \frac{(u_m^{n+1})' - (u_m^n)'}{\Delta t} \right) = 0,$$

$$h \left(\frac{(\delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n)}{\Delta t} \right) \int_0^1 T_{m-1}(\xi) d\xi + h \left(\frac{(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n)}{\Delta t} \right) \int_0^1 T_m(\xi) d\xi$$

$$+ h \left(\frac{(\delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m+1}^n)}{\Delta t} \right) \int_0^1 T_{m+1}(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \varepsilon (u_{m+1}^{n+1} u_{m+1}^n - u_m^{n+1} u_m^n)$$

$$- \mu \left(\frac{(u_{m+1}^{n+1})' - (u_{m+1}^n)'}{\Delta t} - \frac{(u_m^{n+1})' - (u_m^n)'}{\Delta t} \right) = 0,$$

$$\left(\frac{\theta(h - \sin(h))}{2\Delta t} \right) (\delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n) + \left(\frac{\theta(h - \sin(h) - h \cos(h))}{\Delta t} \right) (\delta_m^{n+1} - \delta_m^n)$$

$$+ \left(\frac{\theta(h - \sin(h))}{2\Delta t} \right) (\delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m+1}^n) + \left(\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{2 \sin(h)} \right) (-\delta_{m-1}^{n+1} + \delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n + \delta_{m+1}^n)$$

$$+ \varepsilon \left(\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{2 \sin(h)} \right)^2 (-f^* \delta_{m-1}^{n+1} + h^* \delta_m^{n+1} + g^* \delta_{m+1}^{n+1})$$

$$- \left(\frac{\mu \cos\left(\frac{h}{2}\right)}{\Delta t \sin(h)} \right) (\delta_{m-1}^{n+1} - 2\delta_m^{n+1} + \delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n + 2\delta_m^n - \delta_{m+1}^n) = 0.$$

elde edilir. Denklem düzenlendiğinde aşağıdaki ifadeye ulaşılır:

$$\begin{aligned}
& \left[a - \frac{c}{2} - \varepsilon \frac{c^2}{2} f^* - \mu \frac{d}{\Delta t} \right] \delta_{m-1}^{n+1} + \left[b + \varepsilon \frac{c^2}{2} h^* + 2\mu \frac{d}{\Delta t} \right] \delta_m^{n+1} \\
& + \left[a + \frac{c}{2} + \varepsilon \frac{c^2}{2} g^* - \mu \frac{d}{\Delta t} \right] \delta_{m+1}^{n+1} = \left[a + \frac{c}{2} - \mu \frac{d}{\Delta t} \right] \delta_{m-1}^n \\
& + \left[b + 2\mu \frac{d}{\Delta t} \right] \delta_m^n + \left[a + \frac{c}{2} - \mu \frac{d}{\Delta t} \right] \delta_{m+1}^n.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

burada a, b, c, d, f^*, g^* ve h^* ,

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\theta(h - \sin(h))}{\frac{2\Delta t}{\sin(h/2)}}, & b &= \frac{\theta(h - \sin(h) - h \cos(h))}{\Delta t} \\
c &= \frac{\sin(h/2)}{\sin(h)}, & d &= \frac{\cos(h/2)}{\sin(h)} \\
f^* &= \delta_m^n + \delta_{m-1}^n, & g^* &= \delta_{m+1}^n + \delta_m^n, & h^* &= \delta_{m+1}^n - \delta_{m-1}^n.
\end{aligned}$$

değerlerini ifade eder. $m = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ değerleri (6.5)'te yerinde yazıldığında N tane denklem $N + 2$ tane bilinmeyenden oluşan aşağıdaki sistem elde edildi:

$$\begin{bmatrix}
\alpha_{0,1} & \alpha_{0,2} & \alpha_{0,3} & & & & & & \\
& \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & & & & & \\
& & & & \ddots & & & & \\
& & & & & \alpha_{N-2,1} & \alpha_{N-2,2} & \alpha_{N-2,3} & \\
& & & & & & \alpha_{N-1,1} & \alpha_{N-1,2} & \alpha_{N-1,3}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\delta_{-1}^{n+1} \\
\delta_0^{n+1} \\
\delta_1^{n+1} \\
\vdots \\
\delta_{N-2}^{n+1} \\
\delta_{N-1}^{n+1} \\
\delta_N^{n+1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
f_0 \\
f_1 \\
\vdots \\
f_{N-2} \\
f_{N-1}
\end{bmatrix} \tag{6.5}$$

(6.5) denklem sisteminde katsayılar $m = 0, \dots, N - 1$ için;

$$\alpha_{m,1} = \left(a - \frac{c}{2} - \varepsilon \frac{c^2}{2} f^* - \mu \frac{d}{\Delta t} \right),$$

$$\alpha_{m,2} = \left(b + \varepsilon \frac{c^2}{2} h^* + 2\mu \frac{d}{\Delta t} \right),$$

$$\alpha_{m,3} = \left(a + \frac{c}{2} + \varepsilon \frac{c^2}{2} g^* - \mu \frac{d}{\Delta t} \right),$$

$$f_m = \left[a + \frac{c}{2} - \mu \frac{d}{\Delta t} \right] \delta_{m-1}^n + \left[b + 2\mu \frac{d}{\Delta t} \right] \delta_m^n + \left[a + \frac{c}{2} - \mu \frac{d}{\Delta t} \right] \delta_{m+1}^n.$$

şeklindedir. (6.4)'de sınır koşullarını kullanarak aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$u_0 = c (\delta_{-1}^n + \delta_0^n), \quad u_N = c (\delta_{N-1}^n + \delta_N^n) \tag{6.6}$$

Bu denklemler (6.5) sisteminden δ_{-1}^n ve δ_N^n parametrelerini yok etmek için kullanılır. Böylece çözülebilir 3-bant köşgensel matris denklemi oluşur. Bu sistem Thomas algoritması ile çözülecektir.

6.2. Test Problemleri

6.2.1. Solitary dalga hareketi

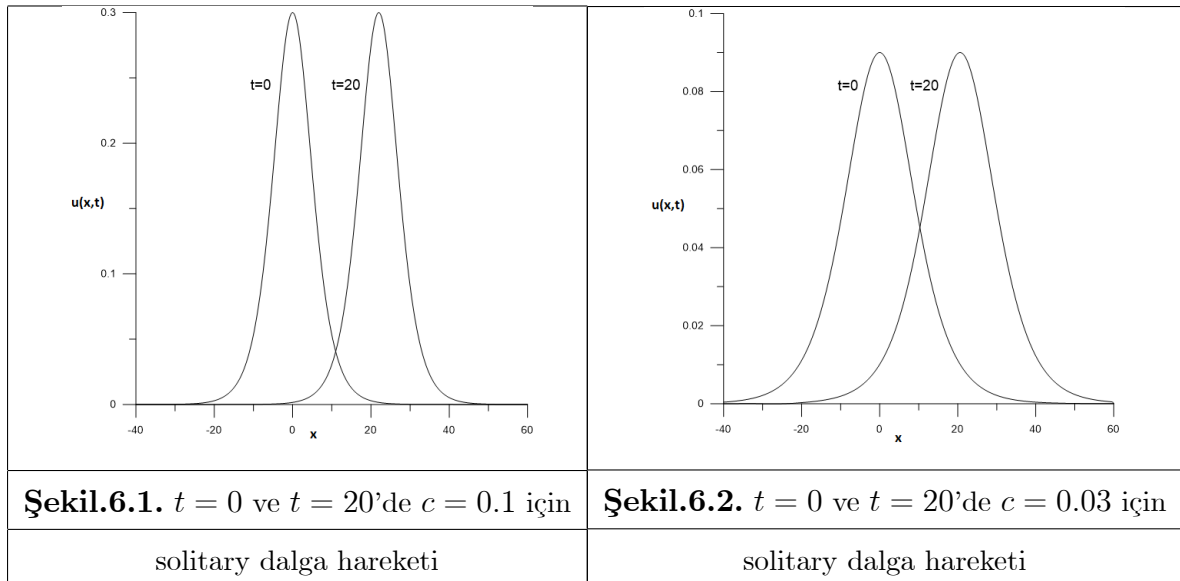
RLW denkleminin Peregrine (1976) tarafından önerilen analitik çözümü $k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon c}{\mu(1 + \varepsilon c)}}$ olmak üzere aşağıdaki gibidir:

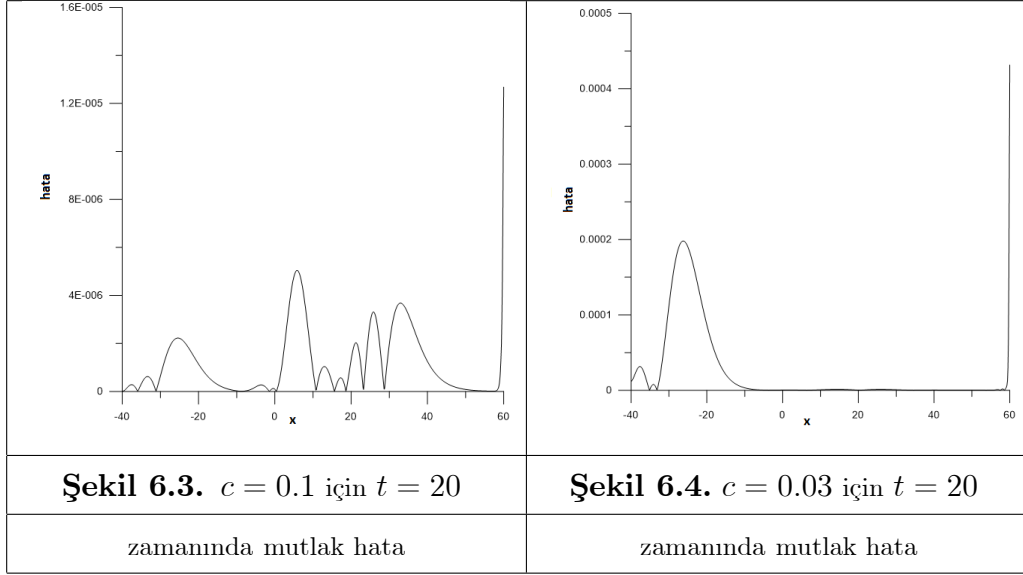
$$u(x, t) = \frac{3c}{\cosh^2(k(x - x_0 - (1 + \varepsilon c)t))}. \quad (6.7)$$

Başlangıç koşulu (6.7) denkleminde $t = 0$ yazılarak hesaplanır. Sınır şartları ise $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$ olarak alınmıştır. Yukarıdaki denkleminde yer alan diğer parametre değerleri;

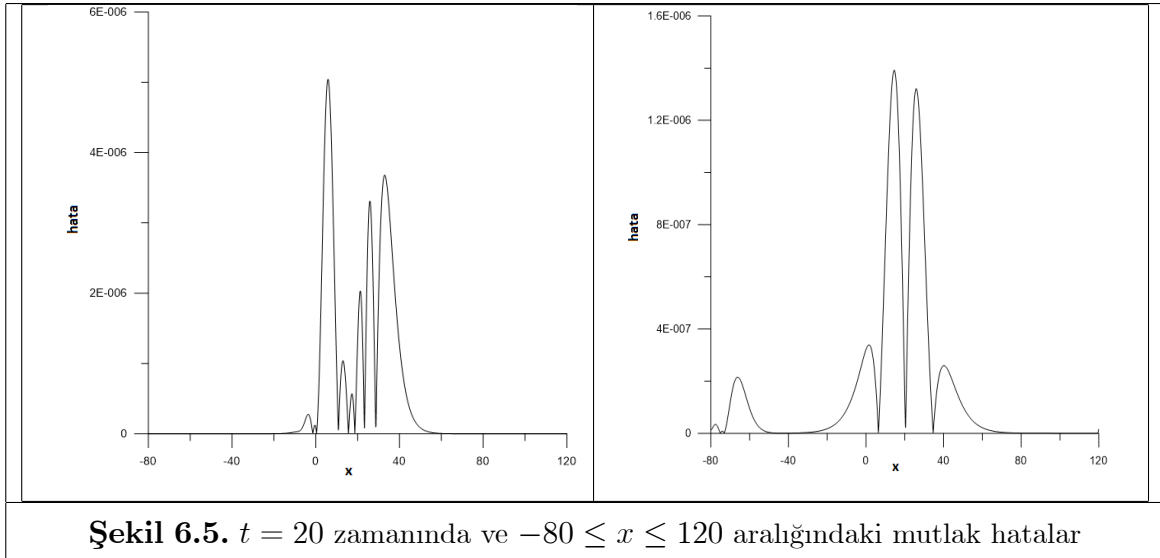
$$c = 0.1 \text{ ve } 0.03, \quad x_0 = 0, \quad \varepsilon = 1, \quad \mu = 1.$$

Bu parametreler ve hesaplanan başlangıç koşulu ile solitary dalga, $-40 \leq x \leq 60$ aralığı boyunca ve $0 \leq t \leq 20$ süresince hareket eder. Daha önce yapılan çalışmalarla benzer olarak nümerik hesaplamalar yapılırken, konum adımı $h = 0.125$ ve zaman adımı $\Delta t = 0.1$ alınmıştır. Elde edilen çözümün $t = 0$ ve $t = 20$ zamanındaki durumu Şekil 6.1 ve Şekil 6.2'de gösterilmiştir. Bu şekillerden görülüyor ki, dalganın genliği ilerleyen zaman süresince değişmemektedir.





$t = 20$ anındaki 0.1 ve 0.03 genlikleriyle oluşan mutlak hata Şek.6.3 ve Şek.6.4'de gösterilmiştir. Bu şekillerden de görüleceği gibi maksimum hata sağ sınırda oluşmuştur. Bunun sebebi olarak dalganın büyüklüğü ve fiziksel sınır şartları olarak $u(a, 0) \approx 0$ ve $u(b, 20) \approx 0$ alınmasından kaynaklanmış olduğu düşünülmektedir. Eğer aralık boyu $-40 \leq x \leq 60$ 'tan $-80 \leq x \leq 120$ 'ye genişletilirse bu hata yok olacaktır. Bu durum Şekil 6.5'de incelenebilir.



Çizelge 6.1 ve 6.2'de farklı genlik değerleri kullanılarak elde edilen mutlak hata büyüklükleri ve I_1 , I_2 , I_3 korunum sabitleri listelenmiştir. Çizelge 6.3 ve 6.4'te de daha

önce yapılan çalışmalardaki maksimum hata ve I_1, I_2, I_3 korunum sabitleri verilerek karşılaştırma yapılması sağlandı. Bu çizelgelere göre önerilen yöntem diğerlerinden daha doğru sonuçlar vermektedir. Farklı zamanlarda I_1, I_2, I_3 korunum sabitlerinin değerleri, 0.1 ve 0.03 genlik büyüklükleri alınarak yapılan hesaplamalarda elde edilen Çizelge 6.3 ve 6.4'teki analitik çözümlerle neredeyse aynı kalmıştır. Her iki genlik değeri 0.1 ve 0.03 alındığında, görülüyor ki I_1 değerinde çok küçük bir değişim olurken I_2 ve I_3 değerleri, farklı zamanlarda neredeyse aynı kalmaktadır.

Çizelge 6.1. $c = 0.1$ genliği için $h = 0.125$ ve $\Delta t = 0.1$ olmak üzere					
çeşitli zamanlarda elde edilen hata normları ve korunum sabitleri					
Zaman	$L_2 \times 10^6$	$L_\infty \times 10^6$	I_1	I_2	I_3
0	0.0029	0.0083	3.9799271	0.8104273	2.5790075
4	6.7909	2.8474	3.9799300	0.8104273	2.5790075
8	9.9346	2.6175	3.9799283	0.8104273	2.5790075
12	12.4396	3.4384	3.9799257	0.8104273	2.5790075
16	16.6703	4.4420	3.9799170	0.8104273	2.5790075
20	17.8105	12.6845	3.9798825	0.8104273	2.5790075

Çizelge 6.2. $c = 0.03$ genliği için $h = 0.125$ ve $\Delta t = 0.1$ olmak üzere					
çeşitli zamanlarda elde edilen hata normları ve korunum sabitleri					
Zaman	$L_2 \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$	I_1	I_2	I_3
0	0.0000	0.0000	2.1070711	0.1273004	0.3888047
4	4.1261	2.3003	2.1070959	0.1273003	0.3888041
8	5.1151	2.2109	2.1068936	0.1273003	0.3888040
12	5.3624	2.1255	2.1065447	0.1273003	0.3888040
16	5.4574	2.1387	2.1059145	0.1273003	0.3888036
20	5.7336	4.3151	2.1045777	0.1273003	0.3888022

Çizelge 6.3. $t = 20$ zamanında $c = 0.1$, $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$ için					
hata normları ve korunum sabitleri karşılaştırması					
Yöntem	Zaman	$L_\infty \times 10^3$	I_1	I_2	I_3
QBSGY	20	0.01268	3.9798882	0.8104273	2.579007
Avilez-Valente ve S.-S. (2004)	20	0.02643	3.979909	0.8104625	2.579007
Dağ vd. (2006)	20	0.07337	3.979883	0.8104612	2.579003
Dağ ve Özer (2001)	20	1.56640	3.961597	0.804185	2.558292
Dağ vd. (2003)	20	0.10299	3.979858	0.8104596	2.578999
Dağ vd. (2004)	20	0.116	3.979883	0.8102762	2.578393
Mei ve Chen (2012)	20	0.91465	3.97972	0.81026	2.57873
Saka ve Dağ (2008)	20	0.07344	3.979888	0.8104622	2.579006
Saka vd. (2004)	20	0.073	3.97989	0.81046	2.57901
Analitik	20		3.97995	0.8104624	2.579007

Çizelge 6.4. $t = 20$ zamanında $c = 0.03$, $h = 0.125$, $\Delta t = 0.1$ için					
hata normları ve korunum sabitleri karşılaştırması					
Yöntem	Zaman	$L_\infty \times 10^3$	I_1	I_2	I_3
QBSGY	20	0.431512	2.104578	0.12730032	0.3888022
Dağ vd. (2003)	20	1.5506	2.128869	0.127228	0.388571
Dağ vd. (2004)	20	0.432	2.104584	0.12729366	0.3887776
Mei ve Chen (2012)	20	0.439145	2.10902	0.12730	0.38880
Saka ve Dağ (2008)	20	0.19806	2.104708	0.1273006	0.3888025
Saka vd. (2004)	20	0.199	2.10467	0.12730	0.38880
Analitik	20		2.109407	0.12730171	0.3888059

6.2.2. Ardışık dalgaların yayılımı

Bu bölümde, RLW denkleminin undulation çözümleri üzerinde çalışıldı. Başlangıç

ve sınır şartları:

$$u(x, 0) = 0.5U_0 \left[1 - \tanh \left(\frac{x - x_c}{d} \right) \right],$$

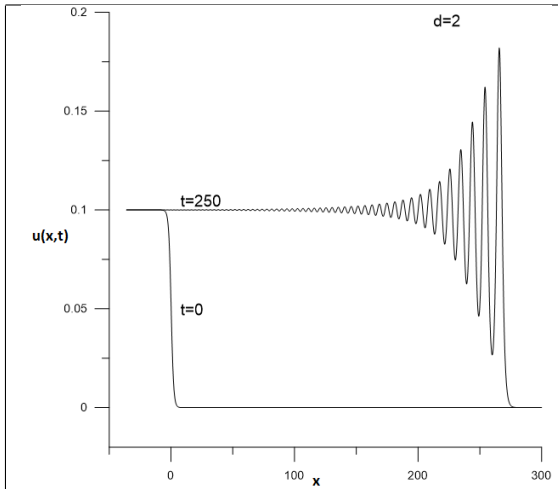
$$u(a, t) = u_0, u(b, t) = 0.$$

olmak üzere ilgili parametreler literatürle uyumlu olarak aşağıdaki gibi alınmıştır:

$$\varepsilon = 1.5, \mu = 0.16666667, U_0 = 0.1, x_c = 0, d = 2 \text{ ve } 5.$$

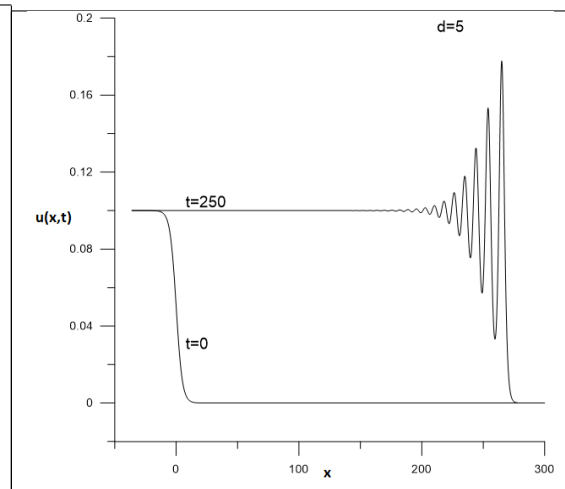
Başlangıç şartı durgun suya doğru akan suyun eğimini/yüksekliğini temsil etmektedir. d parametresi durgun su ve derinlik arasındaki eğimdir. Başlangıçta, su yüzeyi ve durgun su arasında x_c merkezli bir arakesit bulunmaktadır. Dalganın oluşumu gözlenecektir.

Bu hesaplamalar $[-36, 300]$ aralığı boyunca $h = 0.24$ konum adımı ve $\Delta t = 0.1$ zaman adımı ile $t = 250$ anına kadar yapılmıştır. Şekil 6.6 ve 6.7'de sırasıyla $d = 2$ ve 5 için undulation oluşumları ve yayılımı gösterilmiştir. Simülasyon boyunca, başlangıç koşuluna bağlı olarak dik eğimlerde daha az undulation oluşumu gözlenmiştir.



Şekil 6.6. $d = 2$ için $t = 0$ ve 250

başlangıç şartı ve undulation.



Şekil 6.7. $d = 5$ için $t = 0$ ve 250

başlangıç şartı ve undulation.

Nümerik yöntem, aşağıda verilen zamanla sabitlerin teorik oranlarıyla karşılaştırma

yapılarak da geçerlilik kazanabilir:

$$M_1 = \frac{d}{dt} I_1 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u dx = U_0 + \frac{\varepsilon}{2} U_0^2 = 0.1075,$$

$$M_2 = \frac{d}{dt} I_2 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + \mu (u_x)^2) dx = U_0^2 + \frac{2}{3} \varepsilon U_0^3 = 0.011,$$

$$M_3 = \frac{d}{dt} I_3 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} (u^3 + 3u^2) dx = 3U_0^2 + (1 + 2\varepsilon) U_0^3 + \frac{3}{4} \varepsilon U_0^4 = 0.034113.$$

Sabitlerin nümerik farklılıkları aşağıdaki formüllerle hesaplanır:

$$M_i = (I_i(t = 250) - I_i(t = 0)) / 250, i = 1, 2, 3$$

Başlangıç şartında $d = 2$ kullanıldığında sabitleri $M_1 = 0.1075$, $M_2 = 0.01140034$, $M_3 = 0.03405626$ olarak ve benzer şekilde daha geniş eğim olan $d = 5$ için bu değerler $M_1 = 0.1075$, $M_2 = 0.01100021$, $M_3 = 0.03410065$ olarak elde edildi. Çizelge 6.5 ve 6.6'da seçilmiş bazı anlarda korunum sabitleri verilmiştir. Tablo 6.5'e göre etkileşim süresince herbir korunum sabiti I_1 , I_2 ve I_3 te bazı değişiklikler meydana gelmiştir.

Çizelge 6.5. $d = 2$, $h = 0.24$, $\Delta t = 0.1$ değerleri için				
korunum sabitleri				
Zaman	I_1	I_2	I_3	
0	3.612000	0.357784	1.088220	
50	8.987000	0.921405	2.793292	
100	14.362000	1.490512	4.498142	
150	19.737001	2.062203	6.202887	
200	25.112000	2.634851	7.907593	
250	30.48700	3.207870	9.612284	

Çizelge 6.6. $d = 5, h = 0.24, \Delta t = 0.1$ değerleri için				
korunum sabitleri				
Zaman	I_1	I_2	I_3	
0	3.612000	0.336310	1.040970	
50	8.987000	0.886312	2.746467	
100	14.362001	1.436319	4.451703	
150	19.737001	1.986331	6.156639	
200	25.112001	2.536346	7.861414	
250	30.487001	3.086362	9.566132	

6.2.3. Dalga üretimi

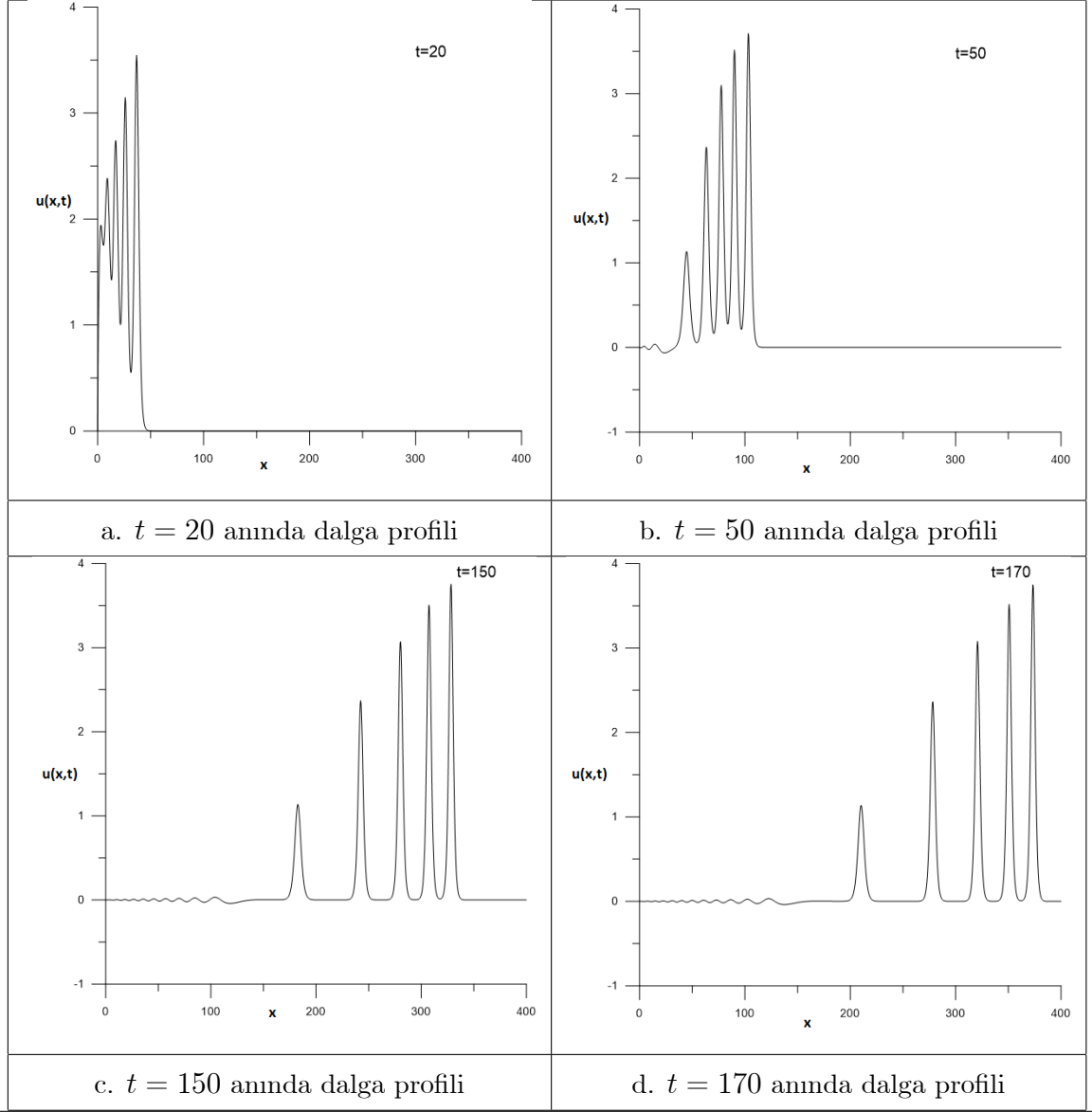
Kütle akışı, mekanik bir cihazın hareketi gibi serbest yüzeye uygulanan kuvvetler dalgaları güçlendirecektir. Bu nümerik deneyde, RLW denkleminde dalga üretimi için sınır şartları aşağıdaki gibi alınır:

$$u(a, t) = \begin{cases} U_0 \frac{t}{\tau}, & 0 \leq t \leq \tau, \\ U_0, & \tau < t < t_0 - \tau, \\ U_0 \frac{t_0 - t}{\tau}, & t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \\ 0, & \text{d. d.} \end{cases}$$

ve $u(b, t) = 0$. Bu güçlendirilmiş sınır şartı bir uçtaki dalga üreticisi olarak bilinir.

$U_0 = 2, \Delta t = 0.1, h = 0.4, t_0 = 20, \tau = 0.1$ parametreleri, $0 \leq x \leq 400$ bölgesi üzerinde daha önce yapılmış çalışmalarla karşılaştırma yapabilmek amacıyla bu şekilde seçilmiştir. Algoritmanın çalışma süresi boyunca, beş tane solitary dalga üretildi. İlk dört dalga güç uygulanan dalgalardan daha geniş genliğe ulaşmasına rağmen son dalga güç uygulanmış dalganın daha zayıf bir şekilde oluştu. Güç kesildiğinde, son dalganın oluşmak için yeterli zamanı olmadı. Ardından yeni bir dalga oluşmadı. Şekil 6.8'de ilerleyen dalganın $t = 20, 50, 150, 170$ zamanlarındaki durumu gösterildi. Çizelge 6.7'de ise, çeşitli zamanlarda korunum sabitleri verildi.

Şekil.6.8. Seçilmiş bazı zaman adımlarında dalga profilleri



Çizelge 6.7. $U_0=2$, $h=0.4$, $\Delta t=0.1$ için korunum sabitleri

Zaman	I_1	I_2	I_3
2.5	9.765366	21.225255	84.552126
5	20.172239	48.515381	215.187397
7.5	30.138928	74.990856	334.802674
10	40.017906	101.472306	452.181612
15	60.047899	155.859897	693.359011
20	77.315027	211.583259	891.574335
40	79.004013	223.068113	896.667422
60	79.000908	224.230812	896.717055
80	79.000449	224.274449	896.718655
100	78.999746	224.276957	896.718726

7. KUADRATİK TRİGONOMETRİK B-SPLİNE SUBDOMAIN GALERKİN YÖNTEMİ İLE BURGERS DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

Tezin bu bölümünde, Burgers denkleminin bir yaklaşık çözümü elde edildi. Zaman için Crank-Nicolson, konum için kuadratik trigonometrik B-spline subdomain Galerkin ayrıştırması yapılarak çalışıldı.

7.1. Yöntemin Oluşturulması ve Uygulanması

Subdomain Galerkin yöntemi Burgers denkleminin uygulandığında bir $[a, b]$ elemanı üzerinde $m = 0, \dots, N - 1$ için integralin zayıf formu:

$$\int_a^b W_m (u_t + uu_x - \nu u_{xx}) dx = 0. \quad (7.1)$$

şeklindedir.

$[x_m, x_{m+1}]$ örnek elemanı ele alındığında (7.1) denklemi aşağıdaki gibi olur:

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} (u_t + uu_x - \nu u_{xx}) dx = 0. \quad (7.2)$$

İntegral işlemleri yapıldığında;

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} u_t dx + \int_{x_m}^{x_{m+1}} uu_x dx - \int_{x_m}^{x_{m+1}} \nu u_{xx} dx = 0, \quad (7.3)$$

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} u_t dx + \frac{1}{2} u^2 \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} - \nu u_x \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} = 0$$

elde edilir. x_m bölünme noktalarında u_m bilinmeyenlerine zaman için Crank-Nicolson yöntemi ile yaklaşım uygulanır ve u_m^2 terimine ardışık olarak n . ve $(n+1)$. zamanlarında linerleştirme yapılırsa aşağıdaki denklemlere ulaşılır:

$$u_m = \frac{u_m^{n+1} + u_m^n}{2}, \quad \frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t}, \quad u_m^2 = u_m^{n+1} u_m^n.$$

Bu ifadeler (7.3) te yerine yazılır ve $h\xi = x - x_m$, $0 \leq \xi \leq 1$ dönüşümü yapılırsa $\dot{\delta}$ zamana göre türevi göstermek üzere

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 h \sum_{i=-1}^N T_i^3(\xi) \dot{\delta}_i(t) d\xi + \frac{1}{2} (u^{n+1} u^n) \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} - \nu \left(\frac{u_x^{n+1} - u_x^n}{2} \right) \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} = 0, \\
& h \int_0^1 (T_{m-1}(\xi) \dot{\delta}_{m-1}(t) + T_m(\xi) \dot{\delta}_m(t) + T_{m+1}(\xi) \dot{\delta}_{m+1}(t)) d\xi \\
& + \frac{1}{2} \varepsilon (u_{m+1}^{n+1} u_{m+1}^n - u_m^{n+1} u_m^n) \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} - \nu \left(\frac{(u_{m+1}^{n+1})' - (u_{m+1}^n)'}{2} - \frac{(u_m^{n+1})' - (u_m^n)'}{2} \right) = 0, \\
& h \left(\frac{(\delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n)}{\Delta t} \right) \int_0^1 T_{m-1}(\xi) d\xi + h \left(\frac{(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n)}{\Delta t} \right) \int_0^1 T_m(\xi) d\xi \\
& + h \left(\frac{(\delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m+1}^n)}{\Delta t} \right) \int_0^1 T_{m+1}(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \varepsilon (u_{m+1}^{n+1} u_{m+1}^n - u_m^{n+1} u_m^n) \\
& - \nu \left(\frac{(u_{m+1}^{n+1})' - (u_{m+1}^n)'}{2} - \frac{(u_m^{n+1})' - (u_m^n)'}{2} \right) = 0, \\
& \left(\frac{\theta(h - \sin(h))}{2\Delta t} \right) (\delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n) + \left(\frac{\theta(h - \sin(h) - h \cos(h))}{\Delta t} \right) (\delta_m^{n+1} - \delta_m^n) \\
& + \left(\frac{\theta(h - \sin(h))}{2\Delta t} \right) (\delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m+1}^n) + \varepsilon \left(\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{2 \sin(h)} \right)^2 (-f^* \delta_{m-1}^{n+1} + h^* \delta_m^{n+1} + g^* \delta_{m+1}^{n+1}) \\
& - \nu \left(\frac{\cos\left(\frac{h}{2}\right)}{2 \sin(h)} \right) (\delta_{m-1}^{n+1} - 2\delta_m^{n+1} + \delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m-1}^n - 2\delta_m^n + \delta_{m+1}^n) = 0.
\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen bu ifadeler yerine yazıldığında lineer yineleme bağıntısı olan

$$\begin{aligned}
& \left[a - \frac{c^2}{2} f^* - \nu \frac{d}{2} \right] \delta_{m-1}^{n+1} + \left[b + \frac{c^2}{2} h^* - \nu d \right] \delta_m^{n+1} + \left[a + \frac{c^2}{2} g^* - \nu \frac{d}{2} \right] \delta_{m+1}^{n+1} \quad (7.4) \\
& = \left[a + \nu \frac{d}{2} \right] \delta_{m-1}^n + [b - \nu d] \delta_m^n + \left[a + \nu \frac{d}{2} \right] \delta_{m+1}^n
\end{aligned}$$

7.2. Test Problemleri

Bu bölümde, önerilen yöntemin performansını ölçmek için iki test problemi üzerinde çalışıldı.

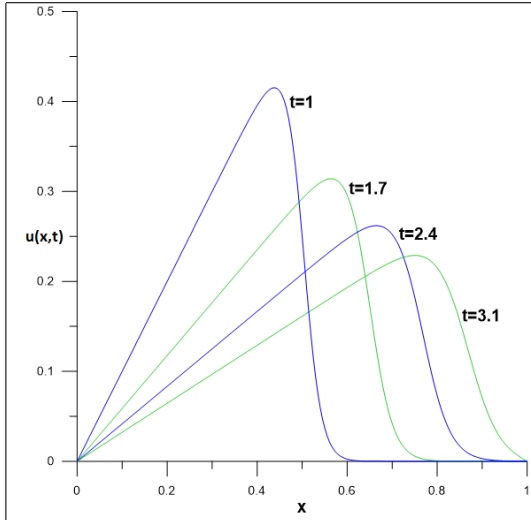
7.2.1. Şok dalgası yayılımı

Burgers denkleminin bir şok yayılma çözümü

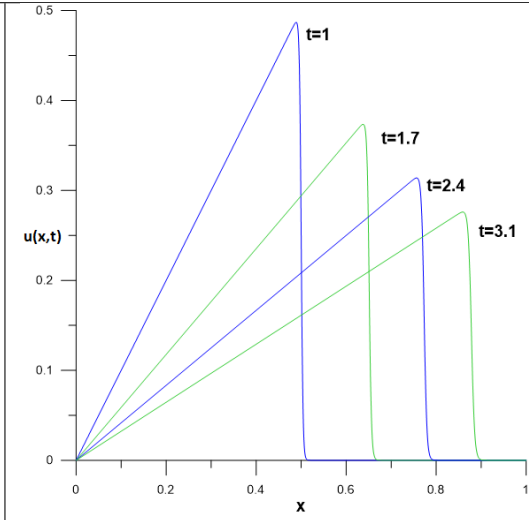
$$u(x, t) = \frac{x/t}{1 + \sqrt{t/t_0} \exp(x^2/(4\nu t))}, \quad t \geq 1, \quad (7.4)$$

şeklinindedir. Burada $t_0 = \exp(1/(8\nu))$ dir. Burgers denkleminin bu çözümü daha küçük ν değerleri için daha keskin şokları verir.

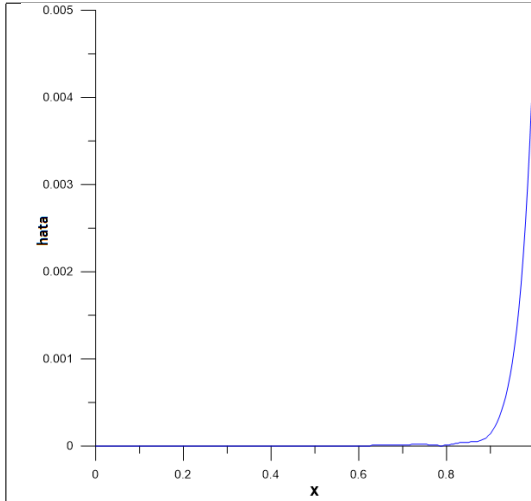
$t = 1$ anında elde edilen başlangıç şartı denklemde kullanıldığında zaman ilerledikçe dalganın durumu gözlenecektir. Sınır şartları olarak $u(0, t) = u_x(0, t) = 0$ ve $u(1, t) = u_x(1, t) = 0$ kullanıldı. Daha önceki çalışmalarla karşılaştırma yapabilmek için hesaplamalar, $\nu = 0.005, 0.0005, h = 0.02, 0.001, 0.005$ ve $\Delta t = 0.01$ seçilerek $[0, 1]$ tanım kümesi üzerinde yapılmıştır. Şekil 7.1 ve 7.2'de $\nu = 0.005, h = 0.005$ ve $\nu = 0.0005, h = 0.001$ için şok dalganın yayılımı görülebilir. Bu şekillerden anlaşılıyor ki, ne kadar küçük değerlerde viskozite seçilirse o kadar dik dalga oluşur. $\nu = 0.005$ için $t = 1$ 'deki düzgün başlangıç şartıyla, algoritma zamanla daha düzgün şok dalgaları oluşturmaktadır. Daha küçük viskozite değeri olan $\nu = 0.0005$ seçildiğinde, daha keskin başlangıç şartı elde edilir ve nümerik çözümün dikliği, program boyunca neredeyse değişmeden kalmaktadır. Şok dalganın genliği zamanla azalmaktadır. Bu problem için algoritmanın doğruluğu L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak gösterildi. Bu sonuçlar seçilmiş bazı zamanlarda Çizelge 7.1'de gösterilmiştir. Elde edilen bu sonuçlar, daha önce yapılan çalışmalar bulunan sonuçlarla aynı çizelgede gösterilmiştir. Bu çizelge incelendiğinde önerilen algoritma küçük bir farkla daha iyi çıkmış olsa da genel olarak neredeyse aynı sonuçlar elde edilmiştir.



Şekil.7.1. $\nu = 0.005$, $h = 0.005$ için çözüm

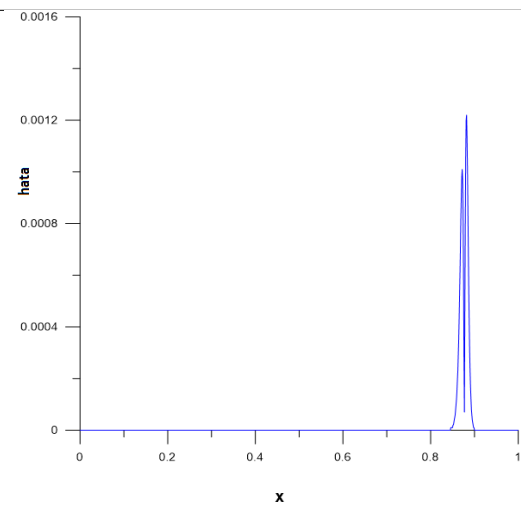


Şekil. 7.2. $\nu = 0.0005$, $h = 0.001$ için çözüm



Şekil. 7.3. $\nu = 0.005$, $h = 0.005$ için $t = 3.1$

zamanındaki mutlak hata



Şekil.7.4. $\nu = 0.0005$, $h = 0.001$ için $t = 3.1$

zamanındaki mutlak hata

Analitik ve nümerik çözümler arasındaki $t = 3.1$ 'deki hata dağılımı sırasıyla $\nu = 0.005$, $h = 0.005$ ve $\nu = 0.0005$, $h = 0.001$ için Şekil 7.3 ve 7.4'de gösterildi. Şekil 7.3'de, en yüksek hata sağ sınırdaki ortaya çıkmıştır. Bu sorunu yok etmek için programı genişletilmiş aralık olan $[0, 1.2]$ kümesinde $\nu = 0.005$, $h = 0.005$ parametreleriyle yeniden çalıştırıldı. Hata normları L_2 ve L_∞ , $t = 3.1$ 'de 0.65079×10^{-3} 'den 0.91690×10^{-5} 'e ve 4.7906111×10^{-3} 'den 3.12555×10^{-5} 'e azaldığı görülmektedir.

Çizelge 7.1. Çeşitli zamanlarda hata normlarının karşılaştırılması

	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
$h = 0.005, \nu = 0.005$	$t = 1.7$	$t = 1.7$	$t = 2.4$	$t = 2.4$	$t = 3.1$	$t = 3.1$
QTBSGY	0.01699	0.06511	0.01463	0.04322	0.65079	4.79061
A.H.A vd. (1990)	0.857	2.576	0.423	1.242	0.235	0.688
Dağ vd. (2005) (QBGM)	0.35133	1.20755	0.24451	0.80187	0.63335	4.79061
Saka ve Dağ (2007) (QBCM1)	0.01705	0.06192	0.01252	0.05882	0.60199	4.43469
Saka ve Dağ (2008) (QBCA1)	0.35008	1.21175	0.24439	0.80771	0.63309	4.79061
Saka ve Dağ (2009)	0.01098	0.04284	0.00976	0.06464	0.65137	4.79061
$h = 0.02, \nu = 0.005$	$t = 1.8$	$t = 1.8$	$t = 2.4$	$t = 2.4$	$t = 3.2$	$t = 3.2$
QTBSGY	0.36608	1.42677	0.25011	0.89905	0.12456	7.49147
Ramadan vd. (2005)	0.68761	2.47189	0.67943	2.16784	1.48559	7.49146
Saka ve Dağ (2007) (QBCM1)	0.19127	0.54058	0.14246	0.39241	0.93617	5.54899
Saka ve Dağ (2008) (QBCA1)	0.33376	1.15263	0.24522	0.80008	1.22981	7.49147
Saka ve Dağ (2009)	0.00980	0.03546	0.01167	0.06464	1.26114	7.49147
$h = 0.02, \nu = 0.01$	$t = 1.7$	$t = 1.7$	$t = 2.1$	$t = 2.1$	$t = 2.6$	$t = 2.6$
QTBSGY	0.15117	0.42203	0.24362	1.14760	1.55800	8.06799
Ramadan vd. (2005)	0.69910	3.13476	0.72976	2.66986	1.74570	8.06798
Saka ve Dağ (2007) (QBCM1)	0.17014	0.40431	0.20476	0.86363	1.29951	6.69425
Saka ve Dağ (2008) (QBCA1)	0.17792	0.47456	0.24875	1.14759	1.54108	8.06798
Saka ve Dağ (2009)	0.01665	0.09592	0.20839	1.14760	1.57287	8.06799

7.2.2.İlerleyen dalga yayılımı

Burgers denkleminin iyi bilinen bir analitik çözümü aşağıdaki gibidir:

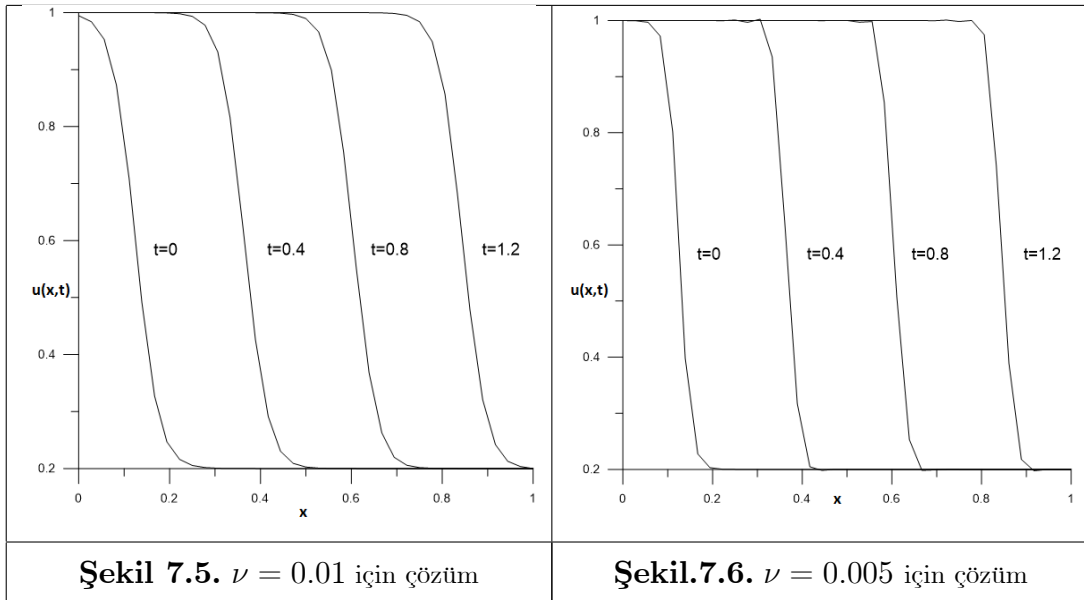
$$u(x, t) = \frac{\alpha + \mu + (\mu - \alpha) \exp \eta}{1 + \exp \eta}, \quad 0 \leq x \leq 1, t \geq 0,$$

burada $\eta = \frac{\alpha(x - \mu t - \gamma)}{\nu}$ dir. α , μ ve γ , $\alpha = 0.4$, $\mu = 0.6$ ve $\gamma = 0.125$ olarak seçilmiş önceki çalışmalarla karşılaştırma yapılabilecek şekilde seçilmiş sabitlerdir. Bu çözüm

sağa doğru μ hızıyla ilerleyen bir dalga çözümü içerir. $t = 0$ iken başlangıç şartını elde edilir. Bu test probleminde sınır şartları ise $t \geq 0$ için $u(0, t) = 1$, $u(1, t) = 0.2$ ve $u_x(0, t) = 0$, $u_x(1, t) = 0$ 'dir.

Bu hesaplama, zaman adımı $\Delta t = 0.01$, konum adımı $h = 1/36$ ve viskozite katsayısı $\nu = 0.01$ ve $\nu = 0.005$ kullanılarak yapılmıştır. Program $t = 0.5$ 'e kadar çalıştırılmıştır. QTBSGY için $L_2 = 1.48311 \times 10^{-3}$ ve $L_\infty = 5.5140383 \times 10^{-3}$ bulunmuş ve elde edilen sonuçlar Çizelge 7.2 ve 7.3'te sırasıyla $\nu = 0.01$ ve $\nu = 0.005$ için kuadratik B-spline Galerkin yöntemi, kuartik B-spline kollokasyon yöntemi, kuintik B-spline kollokasyon yöntemi ve kuartik B-spline Galerkin yöntemi sonuçlarıyla beraber verilmiştir.

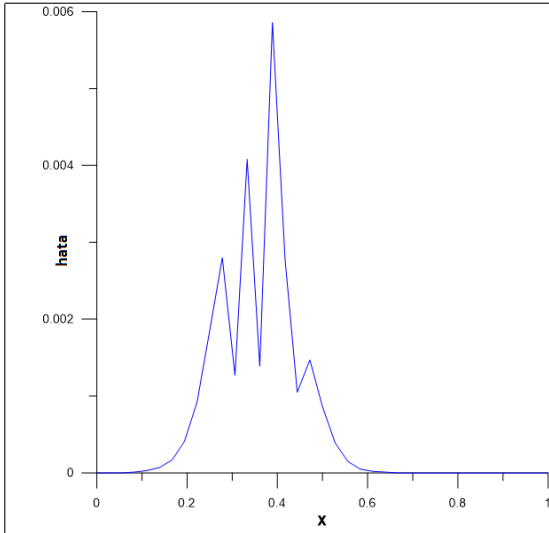
Bu nümerik çözüm L_2 ve L_∞ hata normlarıyla da doğrulandığı üzere tatmin edici sonuçlar vermektedir. Şekil 7.5 ve 7.6'da başlangıç dalgası ve seçilen bazı zamanlardaki çözümler gösterilmektedir. Şekil 7.7 ve 7.8'da ise $t = 0.5$ için hata dağılımları gösterilmiştir.



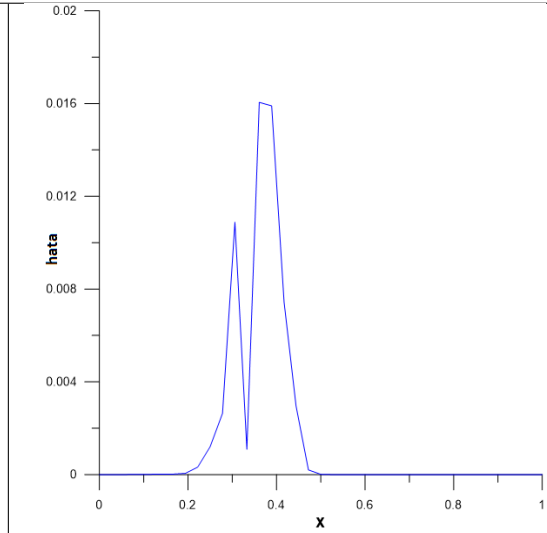
Çizelge 7.2. $t = 0.5$ zamanında $h = 1/36$, $\nu = 0.01$

için hata karşılaştırması

Yöntem	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
QTBSGY	1.48311	5.5140383
Dağ vd. (2005) (QBGM)	1.92558	6.35489
Saka ve Dağ (2007) (QBCM1)	0.77033	3.03817
Saka ve Dağ (2008) (QBCA1)	1.72434	5.78454
Saka ve Dağ (2009) (QBGM)	0.39	1.44

**Şekil. 7.7.** $\nu = 0.01$ için $t = 0.5$

zamanında mutlak hata

**Şekil. 7.8.** $\nu = 0.005$ için $t = 0.5$

zamanında mutlak hata

8. BULGULAR VE TARTIŞMA

Polinom B-spline Burgers Galerkin (QBSGY) ve trigonometrik B-spline subdomain Galerkin(QTBSGY) yöntemleri kullanılarak RLW denkleminin yaklaşık çözümleri elde edildi. İlk olarak solitary dalga yayılımı çalışıldı ve bu iki yöntemin sonuçları Çizelge 8.1 ve Çizelge 8.2 de verildi. Bu iki yöntem aynı hatayı vermekle beraber büyük genlikli dalga için QTBSGY yönteminin biraz daha iyi sonuç verdiği gözlemlenmektedir. Ayrıca korunum sabitleri her iki yöntem için sabit kalmıştır. Solitary dalga simülasyonu 4.2.1 ve 6.2.1 bölümlerinde grafiksel olarak verilmiştir.

Çizelge 8.1. $c = 0.1$ için mutlak hata ve korunum sabitleri						
	Zaman	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$	I_1	I_2	I_3
QBSGY	20	24.58416	9.60804	3.9798832	0.8104649	2.5790074
QTBSGY	20	1.78105	1.26845	3.9798825	0.8104273	2.5790075

Çizelge 8.2. $c = 0.03$ için mutlak hata ve korunum sabitleri						
	Zaman	$L_2 \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$	I_1	I_2	I_3
QBSGY	20	5.653331	4.315118	2.10460421	0.127301619	0.38880284
QTBSGY	20	5.7336	4.3151	2.1045777	0.1273003	0.3888022

İkinci olarak, ardışık dalgaların oluşumu ve yayılımı modellenmesi gerçekleştirilmiştir. Bu deneyin analitik sonucu mevcut olmadığından korunum sabitleri Çizelge 8.3 ve 8.4'te yazılmıştır. Her iki yöntemin sonuçlarına göre korunum sabitleri sabit kalmıştır. Ardışık dalgaların zaman içindeki davranışları görsel olarak 4.2.2 ve 6.2.2 bölümlerinde grafiklerle gösterilmiştir.

Çizelge 8.3. $d = 2$ için korunum sabitleri

	Zaman	I_1	I_2	I_3
QBSGY	250	30.486999	3.101569	9.612281
QTBSGY	250	30.487000	3.207870	9.612284

Çizelge 8.4. $d = 5$ için korunum sabitleri

	Zaman	I_1	I_2	I_3
QBSGY	250	30.487001	3.086377	9.5661304
QTBSGY	250	30.487001	3.086362	9.566132

Son olarak zaman içinde yamuk formunda olan sınır koşulu uygulanmasıyla dalga üretimi modeli çalışılmıştır. Bu üretilen solitary dalgaların görünümü 4.2.3 ve 6.2.3 bölümlerinden incelenebilir. Ayrıca sol sınır koşulunun zaman içinde sonlandırılması ile elde edilen solitary dalgaların korunum sabitleri Çizelge 8.5'te verilmiştir.

Çizelge 8.5. Korunum sabitleri

	Zaman	I_1	I_2	I_3
QBSGY	100	79.001076	176.665667	896.138018
QTBSGY	100	78.999746	224.276957	896.718726

Burgers denkleminin şok dalga yayılımı ile birlikte söntümü çalışılmıştır. Şok dalga ve sert şok dalga simülasyonu 5. ve 6. bölümde gösterilmiştir. Dalganın sert inişi düzgün biçimde sayısal olarak modellenmiştir. Bu çözümüm analitik çözümü var olduğundan analitik ve nümerik çözüm arasındaki mutlak ve L_2 hata değerleri farklı konum adımı ve viskozite değerleri için çeşitli zamanlarda Çizelge 8.6'ya yazılmıştır.

Çizelge 8.6. Hata normları karşılaştırması

	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
$h = 0.005, v = 0.005$	$t = 1.7$	$t = 1.7$	$t = 2.4$	$t = 2.4$	$t = 3.1$	$t = 3.1$
QBSGY	0.01699	0.00000	0.01464	0.06463	0.65079	4.79061
QTBSGY	0.36608	1.42677	0.25011	0.89905	0.12456	7.49147
$h = 0.02, v = 0.005$	$t = 1.8$	$t = 1.8$	$t = 2.4$	$t = 2.4$	$t = 3.2$	$t = 3.2$
QBSGY	0.36661	0.00000	0.25061	0.06463	1.24558	7.49146
QTBSGY	0.36608	1.42677	0.25011	0.89905	0.12456	7.49147
$h = 0.02, v = 0.01$	$t = 1.7$	$t = 1.7$	$t = 2.1$	$t = 2.1$	$t = 2.6$	$t = 2.6$
QBSGY	0.15183	0.09592	0.24292	1.14760	1.55790	8.06799
QTBSGY	0.15117	0.42203	0.24363	1.14760	1.55800	8.06799

Burgers denkleminin son test problemi olan ilerleyen dalga yayılımı test problemi için elde edilen sonuçların karşılaştırması aşağıdaki gibidir (Çizelge 8.7):

Çizelge 8.7. $\nu = 0.01$ için hata normları karşılaştırması

	$t = 0.5$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
QBSGY	61.0924	147.772	
QTBSGY	1.48311	5.51403	

Çizelge 8.7'den görüldüğü ki; trigonometrik B-spline kullanılarak uygulanan yöntemde polinom B-spline kullanılarak oluşturulan yöntemle göre daha küçük hatalarla sonuç elde edilmiştir.

9. SONUÇ

Polinom ve trigonometrik kuadratik B-spline fonksiyonlar yardımıyla oluşturulan subdomain Galerkin yöntemleri kullanılarak RLW ve Burgers denklemlerinin yaklaşık çözümleri elde edildi. Elde edilen sonuçlara göre, trigonometrik B-spline Subdomain Galerkin yönteminin, kuadratik B-spline subdamain Galerkin yöntemine göre daha yüksek doğrulukta sonuçlar vermiştir. RLW ve Burgers denklemleri zaman ve konum ayrıştırması yapıldığında üç bantlı köşegensel matris sistemi elde edilmiştir. Kuadratik polinomlar yerine daha yüksek dereceli polinomlar kullanılarak bu denklemlerin çözümleri elde edilmiştir. Yüksek dereceli polinomlar ile oluşturulan kolokasyon ve Galerkin yöntemleri sonucunda yüksek boyutlu matris denklemleri elde edilir. Bu durum, denklem sistemlerinin çözülmesi maliyetini artırır. Böylece RLW ve Burgers denklemlerinin çözmek için yapılmış olan önceki çalışmalarla karşılaştırıldığında ise hata normları bakımından benzer doğruluklar elde edilmiş fakat maliyet bakımından önemli ölçüde avantaj sağlayan bir yöntem olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Abbas M., Majid, A. A., Ismail A. I. M, Rashid A., 2014, The application of cubic trigonometric B-spline to the numerical solution of the hyperbolic problems, *Applied Mathematics and Computation*, 239, 74-88.
- Abd Hamid N. N., Majid A. A., Ismail A. I. M., 2010, Cubic trigonometric B-spline applied to linear two-point boundary value problems of order two, *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 70, 798-803.
- Alexander, M. E., Morris, J. L., 1979, Galerkin methods applied to some model equations for non-linear dispersive waves", *Journal of Computational Physics*, 30, 428-451.
- Ali, A. H. A., Gardner, L. R. T., Gardner, G. A. A., 1990, Galerkin approach to the solution of Burgers' equation, *U.C.N.W. Maths. Preprint*, 90, 04.
- Ali, A. H. A., Gardner, L. R. T., Gardner, G.A.A., 1992, A collocation method for Burgers' equation using cubic splines, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 100, 325-37.
- Arora, G., Singh, B. K., 2013, Numerical solution of Burgers' equation with modified cubic B-spline differential quadrature method, *Applied Mathematics and Computation*, 224, 166-177.
- Avilez-Valente P., Seabra-Santos F.J., 2004, A Petrov-Galerkin finite element scheme for the regularized long wave equation, *Computational Mechanics*, 34, 256-270.
- Bateman, H., 1915, Some recent researches on the motion of the fluids, *Monthly Weather Review*, 43, 163-70.
- Benjamin, T. B., Bona, J. L., Mahony, J. J., 1972, Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Philosophical Transactions of the Royal Society A-Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 272, 47-78.
- Bhardwaj, D., Shankar, R., 2000, A computational method for Regularised Long Wave Equation, *Applied Mathematics and Computation*, 40, 1397-1404.
- Burgers, J.M., 1948, A mathematical model illustrating the theory of turbulence, *Advances in Applied Mathematics*, 1, 171-99.
- Chang, Q., Wang, G., Guo, B., 1991, Conservative scheme for a model of nonlinear dispersive waves and its solitary waves induced by boundary motion, *Journal of Computational Physics*, 93, 360-375.
- Chapani, H. V., Pradhan, V. H., Mehta, M. N., 2012, Numerical simulation of Burgers' equation using quadratic B-splines, *International Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 8, 11, 18-32.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Cole, J. D., 1951, On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics, Quarterly of Applied Mathematics, 9, 225-236.
- Dağ, İ., 2000, Least-squares quadratic B-spline finite element method for the regularised long wave equation, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 182, 205-215.
- Dağ, İ., Saka, B., Boz, A., 2004, Quintic B-spline Galerkin method for numerical solutions of the Burgers' equation, Dynamical Systems and Applications, Proceedings, 295-309.
- Dağ, İ., Saka, B., Boz, A. 2005a., B-spline Galerkin methods for numerical solutions of the Burgers' equation, Applied Mathematics and Computation, 166, 506-522.
- Dağ, İ., Özer, M. N., 2001, Approximation of the RLW equation by the least square cubic B-spline finite element method, Applied Mathematical Modelling, 25, 221-231.
- Dağ, İ., Doğan, A., Saka, B., 2003, B-spline collocation methods for numerical solutions of the RLW equation, International Journal of Computer Mathematics, 80, 743-757.
- Dağ, İ., Saka, B., Irk, D., 2006, Galerkin method for the numerical solution of the RLW equation using quintic B-splines, Journal of Computational and Applied Mathematics, 190, 532-547.
- Dağ, İ., Irk, D., Şahin, A. 2005b., B-spline collocation methods for numerical solutions of the Burgers' equation, Mathematical Problems in Engineering, 521-38.
- Dağ, İ., Irk, D., Saka, B., 2005c., A numerical solution of the Burgers' equation using cubic B-splines, Applied Mathematics and Computation, 163, 199-211.
- Dağ, İ., Canıvar, A., Şahin, A., 2011, Taylor-Galerkin and Taylor-collocation methods for the numerical solutions of Burgers' equation using B-splines, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 16, 2696-2708.
- Davies, A. M., 1978, Application of the Galerkin method to the solution of Burgers' equation, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 14, 305-321.
- de Boor, C., 1978, A Practical Guide to Splines, Springer.
- Debnath, L., 2012, Nonlinear Partial Differential Equations, Birkhäuser, p.1-205.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Doğan, A., 2001, Numerical Solution of Regularized Long Wave Equation Using Petrov-Galerkin Method., Communications in Numerical Methods in Engineering, 17, 485- 494.
- Doğan, A., 2002, Numerical Solution of RLW Equation Using Linear Finite Elements within Galerkin's Method, Applied Mathematical Modelling, 26, 7, 771-783.
- Eilbeck, J. C., McGuire, G. R., 1975, Numerical study of the RLW equation 1: Numerical methods, Journal of Computational Physics, 19, 43-57.
- Eilbeck, J. C., McGuire G. R., 1977, Numerical Study of the Regularized Long Wave Equation II: Interaction of Solitary Waves, Journal of Computational Physics, 23, 63-73.
- Gardner, L. R. T., Dağ, İ., 1995, The Boundary-Forced Regularised Long Wave Equation, Il Nuovo Cimento, 110, 12, 1487-1496.
- Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., 1990, Solitary waves of the regularised long-wave equation, Journal of Computational Physics, 91, 2, 441-459.
- Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., Dağ, İ., 1995., A B-spline finite element method for the regularized long wave equation, Communications in Numerical Methods in Engineering, 11, 59-68.
- Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., Doğan, A., 1996, A Least Squares Finite Element Scheme for the RLW Equation, Communications in Numerical Methods in Engineering, 12, 795-804.
- Gardner, L. R. T., Gardner G. A., Ayoub F. A., Ameen., N. K., 1997, Modelling an undular bore with B-splines, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 147, 147-152.
- Goodman, T. N. T., Lee S. L., 1984, B-splines on the circle and trigonometric b-splines, Approximation Theory and Spline Functions, 136, 297-325.
- Han X., 2003, Piecewise Quadratic Trigonometric Polynomial Curves, Mathematics of Computation, 72, 1369-1377.
- Hopf, E. 1950. "The partial differential equation $u_t + uu_x = \nu u_{xx}$ ", Communications on Pure and Applied Mathematics, 3, 201-230.
- Irk, D., 2007, Bazı Kısmi Türevli Denklem Sistemlerinin B-Spline Sonlu Elemanlar Çözümleri, Doktora tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 148 s.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Jain, P. C., Shankar, R., Singh, T. V., 1993, Numerical solution of regularized long-wave equation, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9, 579-586.
- Jain, P. J., Iskandar, L., 1979, Numerical solutions of the regularized long wave equation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 20, 195-201.
- Jiang, Z., Wang, R., 2010, An improved numerical solution of Burgers' equation by cubic B-spline quasi-interpolation, *Journal of Information & Computational Science*, 7, 5, 1013-1021.
- Karakoç, S. B. G., Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Modifiye Edilmiş Eşit Genlikli Dalga Denkleminin Sayısal Çözümleri, Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 219 s.
- Korkmaz, A., Dağ, İ., 2013, Numerical simulations of boundary-forced RLW equation with cubic B-spline-based differential quadrature methods, *Arabian Journal for Science and Engineering*, 38, 5, 1151-1160.
- Kutluay, S., Esen, A., 2006, A finite difference solution of regularized long-wave equation, *Mathematical Problems In Engineering*, 1-14.
- Kutluay, S., Esen, A., Dağ, İ., 2004, Numerical solutions of the Burgers' equation by the Least squares quadratic B-spline finite element method, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 167, 21-33.
- Koch P. E., 1988, Multivariate Trigonometric B-Splines, *Journal of Approximation Theory*, 54, 162-168.
- Koch P. E., Lyche T., Neamtu M., Schumaker L. L., 1995, Control curves and knot insertion for trigonometric splines, *Advances in Computational Mathematics*, 3, 4, 405-424.
- Korkmaz, A., 2010, Bazı Tek Boyut Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemlerin B-Spline Diferensiyel Quadrature Metotlar ile Sayısal Çözümleri, Doktora tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 104s.
- Lyche T., Winther R., 1979, A stable recurrence relation for trigonometric B-splines, *Journal of Approximation Theory*, 25, 266-279.
- Mei L., Chen Y., 2012, Numerical solution of RLW equation using Galerkin method with extrapolation techniques, *Computer Physics Communications*, 183, 1609-1616.
- Mittal, R. C., Jain, R. K. 2012. "Numerical solutions of nonlinear Burgers' equation with modified cubic B-splines collocation method", *Applied Mathematics and Computation*, 218, 7839-7855.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Nikolis A., 2004, Numerical solutions of ordinary differential equations with quadratic trigonometric splines, *Applied Mathematics E-Notes*, 142-149.
- Olver P. J., 1979, Euler operators and conservation laws of the BBM equation, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philophysical Society*, 85, 143-159.
- Öziş, T., Esen, A., Kutluay, S., 2005, Numerical solution of Burgers equation by quadratic B-spline finite elements", *Applied Mathematics and Computation* 165, 237-249.
- Peregrine, D. H., 1966, Calculations of the development of an undular bore", *Journal of Fluid Mechanics*, 25, 2, 321-330.
- Prenter, P., M., 1975, *Splines and Variational Methods*, Wiley, New York.
- Ramadan, M. A., El-Danaf, T. S., Abd Alaal, F. E. I., 2005, A numerical solution of the Burgers' equation using septic B-splines, *Chaos, Solitons and Fractals*, 26, 795-804.
- Raslan, K. R., 2005, A computational method for the regularized long wave (RLW) equation, *Applied Mathematics and Computation*, 167, 2, 1101-1118.
- Rubin, S. G., Graves, R. A., 1975, *A cubic spline approximation for problems in fluid mechanics*, Nasa TR R-436, Washington, DC.
- Saka, B., Dağ, İ., Doğan, A., 2004, Galerkin method for the numerical solution of the RLw equation using quadratic B-splines, *International Journal of Computer Mathematics*, 81, 6, 727-739.
- Saka, B., Dağ, İ., 2008, A numerical solution of the RLW equation by Galerkin method using quartic B-splines, *Communications in numerical methods in engineering*, 24, 1339-1361.
- Saka, B., Dağ, İ., 2007, Quartic B-spline collocation methods to the numerical solutions of the Burgers' equation, *Chaos, Solitons and Fractals*, 32, 1125-1137.
- Saka, B., Dağ, İ., 2008, A numerical study of the Burgers' equation, *Journal of the Franklin Institute*, 345, 328-348.
- Saka, B., Dağ, İ., 2009, Quartic B-spline Galerkin approach to the numerical solution of the KdVB equation, *Applied Mathematics and Computation*, 215, 746-758.
- Schoenberg I. J., 1946, Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, *Quarterly of Applied Mathematics*, 4, 45-99.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Smith, G. D., 1987, Numerical Solutions of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods (Third Edition), Clarendon Press, Oxford.
- Walz G., 1997, Identities for trigonometric B-splines with an application to curve design, BIT Numerical Mathematics, 37, 1, 189-201.
- Wu, Y., Wu, X., 2004, Linearized and rational approximation method for solving nonlinear Burgers' equation, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 45, 5, 509-25.
- Zhu, C., Wang, R., 2009, Numerical solution of Burgers' equation by cubic B-spline quasi-interpolation, Applied Mathematics and Computation, 208, 260-272.