

Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Riemann Theta Fonksiyonları İle Periyodik  
Çözümleri

Seçil Demiray

**DOKTORA TEZİ**

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Ocak-2016

Periodic Solutions of Partial Differential Equations With Riemann Theta Functions

Seçil Demiray

**DOCTORAL DISSERTATION**

Department of Mathematics and Computer Science

January-2016

Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Riemann Theta Fonksiyonları İle Periyodik Çözümleri

Seçil Demiray

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca  
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı  
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında  
DOKTORA TEZİ  
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Filiz Taşcan

Bu Tez Eskişehir Osmangazi Üniversitesi BAP tarafından “201419A206” nolu proje çerçevesinde desteklenmiştir.

Ocak-2016

## ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Doktora öğrencisi Seçil DEMİRAY'ın DOKTORA tezi olarak hazırladığı “Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Riemann Theta Fonksiyonları İle Periyodik Çözümleri” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oy birliği ile kabul edilmiştir.

**Danışman** : Doç. Dr. Filiz TAŞCAN

### **Doktora Tez Savunma Jürisi:**

**Üye** : Doç. Dr. Filiz TAŞCAN

**Üye** : Prof. Dr. Mehmet Naci ÖZER

**Üye** : Prof. Dr. Elçin YUSUFOĞLU

**Üye** : Prof. Dr. Ahmet BEKİR

**Üye** : Yrd. Doç. Dr. Yusuf GÜREFE

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve  
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet ERŞAHAN  
Enstitü Müdürü

## ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Doç. Dr. Filiz Taşcan danışmanlığında hazırlamış olduğum “Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Riemann Theta Fonksiyonları İle Periyodik Çözümleri” başlıklı DOKTORA tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 14/01/2016

Seçil DEMİRAY

İmza

## ÖZET

Son yıllarda kısmi diferensiyel denklemlerin tam çözümlerinin bulunması hem matematik hem de fizik alanında çalışan bilim insanları için en popüler çalışma konularından birisidir. Çünkü bir denklemin tam çözümünün bulunması, o denklemin karmaşık fiziksel yapısının anlaşılmasını kolaylaştırır.

Tam çözümlerin bulunabilmesi için çeşitli yöntemler kullanılmaktadır. Bu yöntemler arasında cebirsel-geometrik yaklaşım çoğu lineer olmayan denklemler için periyodik veya kuasi periyodik çözümleri bulurken kullanılan önemli bir yöntemdir ancak periyodik çözümlerdeki, tüm esas fiziksel karakteristikleri (dalga sayısı, faz hızı ve dalganın genliği) doğrudan belirlemek oldukça zordur.

Fakat Nakamura 1980'li yıllarda Hirota bilineer metod ile Riemann theta fonksiyonlarını bir arada kullanarak periyodik çözümlerin doğrudan bulunabileceğini göstermiştir. Son zamanlarda çeşitli kısmi diferensiyel denklemlerin, fark denklemlerin ve süpersimetrik denklemlerin de periyodik çözümleri bu yöntem sayesinde bulunabilmektedir.

Tezde Hirota-Riemann metodu tanımlanmış ve tekli bilineer form şeklinde yazılabilen iki denklem türü (3+1) boyutlu Genelleştirilmiş BKP ve (3+1) boyutlu BKP denklemlerine uygulanışı gösterilmiştir. Literatürde çok karmaşık hesaplar içerdiği için üç-periyodik çözümün bulunmasıyla ilgili pek bir çalışma yapılamamıştır. Fakat tezde bu zorluk aşılabilmiş ve bu iki denklem için bir, iki-periyodik çözümlerin yanı sıra üç-periyodik dalga çözümleri bulunup her bir çözümün dalga grafikleri çizdirilmiştir. Belirli asimptotik şartlar altında bulunan periyodik çözümlerin bilinen soliton çözümlere gittiği gösterilmiştir.

İkili bilineer form için de Hirota-Riemann metodu anlatılıp (2+1) boyutlu Breaking Soliton denklemi için bir ve iki-periyodik çözümleri bulunup grafikleri çizdirilmiş, ve yine asimptotik şartlar altında periyodik çözümlerin, soliton çözümlere gittiği gösterilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Hirota'nın Bilineer Metodu, Riemann Theta Fonksiyonu, Periyodik Dalga Çözümü, Kuasi Periyodik Dalga Çözümü, (3+1) Boyutlu Genelleştirilmiş BKP Denklemi, (3+1) Boyutlu BKP Denklemi, (2+1) Boyutlu Breaking Soliton Denklemi.

## SUMMARY

In recent years, finding exact solutions of partial differential equations is the one of the most popular subject area for both mathematicians and physicists. Because we know that if we can find exact solutions of an equation, it can help us to understand complicated physical models.

There are various methods to obtain exact solutions. Among them algebro-geometric method is important method for finding periodic or quasi periodic solutions. But it is not easy to obtain all physical characteristics such as wave numbers, phase velocities, amplitudes directly.

But in 1980's Nakamura showed a way to construct the periodic wave solutions directly using with Hirota's bilinear method and Riemann theta functions. Recently the periodic solutions of some partial differential equations, difference discrete equations and supersymmetric equations was obtained using this method.

In this thesis Hirota-Riemann method was defined and for single bilinear form (3+1) dimensional Generalized BKP and (3+1) dimensional BKP equations was taken as a model to illustrate this method. Because of some difficulties in calculations of three-periodic wave solutions, hardly ever there has been a study in the literature . But here we could managed to solve this problem and we obtained one and two periodic solutions as well as three periodic wave solutions, plotted the graphics. And we showed under some asymptotic conditions periodic solutions tend to the known soliton solutions.

For coupled bilinear form we gave Hirota-Riemann method and we obtained one and two-periodic solutions, plotted the graphics of (2+1) dimensional Breaking Soliton equation and finally showed under some asymptotic conditions periodic solutions tend to the known soliton solutions

**Key Words:** Hirota's Bilinear Method, Riemann Theta Function, Periodic Wave Solution, Quasi Periodic Wave Solution, (3+1) Dimensional Generalized BKP Equation, (3+1) Dimensional BKP Equation, (2+1) Dimensional Breaking Soliton Equation.

## TEŞEKKÜR

Doktora sürecimin her aşamasında desteğini, bilgisini benden hiç bir zaman esirgemeyen, bana yol gösteren, güvenen, sabırla destek olan çok sevdiğim, kıymetli danışman hocam Doç Dr. Filiz TAŞCAN'a ...

Ayrıca doktora tez jürimde bulunmayı kabul ederek beni onurlandıran, tez hakkındaki kıymetli görüşlerini paylaşan çok değerli hocalarım Prof. Dr. Ahmet BEKİR ve Prof. Dr. Elçin YUSUFOĞLU'na...

Bu yola devam ederken en büyük destekçilerimden biri olan “ 2211-Yurt İçi Doktora Burs Programı“ kapsamında, sağladığı destekten ötürü TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı birimine...

Bu vakite kadar çocuklarının daha iyi yerlere gelebilmesi için kendilerinden bir çok fedakarlık yapan, bize her zaman güvenen, bizle hep gurur duyan, aldığımız kararların arkasında durup maddi manevi desteklerini bir an olsun esirgemeyen canım aileme...

Son olarak da en sıkıntılı anlarımda yanımda olan, bana olan güvenini hep hissettiren, yol arkadaşım, canım eşim Süleyman DEMİRAY'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.



## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
<b>ÖZET</b> .....	<b>vi</b>
<b>SUMMARY</b> .....	<b>vii</b>
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	<b>viii</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	<b>ix</b>
<b>ŞEKİLLER DİZİNİ</b> .....	<b>xi</b>
<b>1. GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
<b>2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI VE TEMEL TANIMLAR</b> .....	<b>2</b>
2.1. Temel Kavramlar .....	3
2.1.1 Pozitif tanımlı matris .....	3
2.1.2. Solitary ve soliton dalga .....	4
2.1.3. Holomorfik fonksiyon.....	5
2.1.4. Meramorfik fonksiyon .....	5
2.1.5. Periyodik ve kuasi periyodik fonksiyon .....	5
<b>3.HİROTA’NIN BİLİNEER METODU VE RIEMANN THETA FONKSİYONU..</b> 7	
3.1. Hirota’nın Bilineer Metodu .....	7
3.1.1. Bilineer forma dönüştürme ve Hirota’nın D türev operatörü .....	8
3.1.2. KdV denkleminin bilineerleştirilmesi ve soliton çözümleri .....	9
3.2. Riemann Theta Fonksiyonu .....	17
<b>4. HİROTA-RIEMANN METODU</b> .....	<b>20</b>
4.1. Lineer Olmayan Denklemler İçin Hirota-Riemann Metodu.....	20
4.1.1. Bir-periyodik dalga çözümlerin bulunması .....	22
4.1.2. İki-periyodik dalga çözümlerin bulunması .....	25
4.1.3. Üç-periyodik dalga çözümlerin bulunması.....	29
<b>5. TEKLİ BİLİNEER FORMLAR İÇİN HİROTA RIEMANN METODU</b> .....	<b>34</b>
5.1. (3+1) Boyutlu Genelleştirilmiş BKP Denkleminin Kuasi Periyodik Çözümü... 34	
5.1.1. Bir-periyodik dalga çözümü .....	36
5.1.2. İki-periyodik dalga çözümü .....	40
5.1.3. Üç-periyodik dalga çözümü.....	48

## İÇİNDEKİLER (devam)

5.2. (3+1) Boyutlu BKP Denkleminin Kuasi Periyodik Çözümü.....	54
5.2.1. Bir-periyodik dalga çözümü .....	56
5.1.2. İki-periyodik dalga çözümü .....	61
5.1.3. Üç-periyodik dalga çözümü.....	69
<b>6. İKİLİ (COUPLED) BİLİNEER FORMLAR İÇİN HİROTA RIEMANN</b>	
<b>METODU .....</b>	<b>75</b>
6.1. (2+1) Boyutlu Breaking Soliton Denkleminin Kuasi Periyodik Çözümü .....	79
6.1.1. Bir-periyodik dalga çözümü .....	79
6.1.2. İki-periyodik dalga çözümü .....	84
<b>7. SONUÇ VE ÖNERİLER .....</b>	<b>91</b>
<b>KAYNAKLAR DİZİNİ .....</b>	<b>94</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ</b>	

## ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>		<u>Sayfa</u>
5.1.	(3+1) Boyutlu Genelleştirilmiş BKP denkleminin bir-periyodik dalga çözümünün grafiğinin x-t düzleminden görünümü . . . . .	38
5.2.	(3+1) Boyutlu Genelleştirilmiş BKP denkleminin bir-periyodik dalga çözümünün grafiğinin y-t düzleminden görünümü . . . . .	38
5.3.	(3+1) Boyutlu Genelleştirilmiş BKP denkleminin bir-periyodik dalga çözümünün grafiğinin z-t düzleminden görünümü . . . . .	39
5.4.	(3+1) Boyutlu Genelleştirilmiş BKP denkleminin dejenere iki-periyodik dalga çözümünün grafiğinin x-t düzleminden görünümü . . . . .	44
5.5.	(3+1) Boyutlu Genelleştirilmiş BKP denkleminin dejenere iki-periyodik dalga çözümünün grafiğinin y-t düzleminden görünümü . . . . .	45
5.6.	(3+1) Boyutlu Genelleştirilmiş BKP denkleminin dejenere iki-periyodik dalga çözümünün grafiğinin z-t düzleminden görünümü . . . . .	45
5.7.	(3+1) Boyutlu Genelleştirilmiş BKP denkleminin asimetric iki-periyodik dalga çözümünün grafiğinin x-t düzleminden görünümü . . . . .	46
5.8.	(3+1) Boyutlu Genelleştirilmiş BKP denkleminin asimetric iki-periyodik dalga çözümünün grafiğinin y-t düzleminden görünümü . . . . .	46
5.9.	(3+1) Boyutlu Genelleştirilmiş BKP denkleminin asimetric iki-periyodik dalga çözümünün grafiğinin z-t düzleminden görünümü . . . . .	47
5.10.	(3+1) Boyutlu Genelleştirilmiş BKP denkleminin üç-periyodik dalga çözümünün grafiğinin x-y düzleminden görünümü . . . . .	51
5.11.	(3+1) Boyutlu Genelleştirilmiş BKP denkleminin üç-periyodik dalga çözümünün grafiğinin x-z düzleminde görünümü . . . . .	52
5.12.	(3+1) Boyutlu Genelleştirilmiş BKP denkleminin üç-periyodik dalga çözümünün grafiğinin y-z düzleminden görünümü . . . . .	52
5.13.	(3+1) Boyutlu BKP denkleminin bir-periyodik dalga çözümünün grafiğinin x-t düzleminden görünümü . . . . .	59
5.14.	(3+1) Boyutlu BKP denkleminin bir-periyodik dalga çözümünün grafiğinin y-t düzleminden görünümü . . . . .	59
5.15.	(3+1) Boyutlu BKP denkleminin bir-periyodik dalga çözümünün grafiğinin z-t düzleminden görünümü . . . . .	60
5.16.	(3+1) Boyutlu BKP denkleminin dejenere iki-periyodik dalga çözümünün grafiğinin x-t düzleminden görünümü . . . . .	65
5.17.	(3+1) Boyutlu BKP denkleminin dejenere iki-periyodik dalga çözümünün grafiğinin y-t düzleminden görünümü . . . . .	65

## ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
5.18.	(3+1) Boyutlu BKP denkleminin dejenere iki-periyodik dalga çözümünün grafiğinin z-t düzleminden görünümü..... 66
5.19.	(3+1) Boyutlu BKP denkleminin asimetric iki-periyodik dalga çözümünün grafiğinin x-t düzleminden görünümü ..... 66
5.20.	(3+1) Boyutlu BKP denkleminin asimetric iki-periyodik dalga çözümünün grafiğinin x-t düzleminden görünümü ..... 67
5.21.	(3+1) Boyutlu BKP denkleminin asimetric iki-periyodik dalga çözümünün grafiğinin z-t düzleminden görünümü..... 67
5.22.	(3+1) Boyutlu BKP denkleminin üç-periyodik dalga çözümünün grafiğinin x-y düzleminden görünümü ..... 72
5.23.	(3+1) Boyutlu BKP denkleminin üç-periyodik dalga çözümünün grafiğinin z-x düzleminden görünümü ..... 72
5.24.	(3+1) Boyutlu BKP denkleminin üç-periyodik dalga çözümünün grafiğinin y-z düzleminden görünümü ..... 73
6.1.	(2+1) Boyutlu Breaking Soliton denkleminin bir-periyodik dalga çözümünün grafiğinin x-y düzleminden görünümü ..... 82
6.2.	(2+1) Boyutlu Breaking Soliton denkleminin dejenere iki-periyodik dalga çözümünün grafiğinin x-y düzleminden görünümü..... 88
6.3.	(2+1) Boyutlu Breaking Soliton denkleminin simetric iki-periyodik dalga çözümünün grafiğinin x-y düzleminden görünümü..... 88

# 1. GİRİŞ

Son yıllarda, kısmi diferensiyel denklemlerin tam çözümlerinin bulunması hem matematik hem fizik araştırmacılarının ilgisini çeken en popüler konulardan biri olmuştur. Çünkü, bir kısmi diferensiyel denklemin tam çözümünün bilinmesi, karmaşık fiziksel modellerin anlaşılmasını daha çok kolaylaştırır. Bu yüzden tam çözümleri elde etmek için Hirota'nın bilinear metodu (Hirota, 1975), Lie simetri metodu (Bluman ve Kumei, 1989), Bäcklund dönüşüm metodu (Miura, 1978) ve cebirsel geometrik metod (Belokos vd., 1994) gibi bazı başarılı yöntemler mevcuttur.

Cebirsel geometrik metod, Riemann yüzeyleri üzerinde çok karmaşık hesapları içerdiğinden, kuasi periyodik çözümlerin dalga sayıları, faz hızları ve genlik gibi çoğu temel fiziksel karakteristik parametrelerini belirlemek oldukça zordur. Diğer yandan Hirota'nın bilinear metodu, çoklu soliton çözümleri oluştururken doğrudan bir yaklaşım olup cebirsel geometrik yöntemle göre daha kullanışlı bir yöntemdir.

1980 yılında Nakamura, Hirota'nın bilinear metodu aracılığı ile Kdv ve Boussinesq denklemlerinin periyodik dalga çözümlerini elde etmiştir (Nakamura, 1979a, 1979b). Gerçekten de kullandığı bu yöntemin cebirsel-geometrik yöntemlere göre çok büyük avantajları vardır. Örneğin bu yöntemle Riemann sabitlerini ve keyfi Riemann matrislerini içeren kuasi periyodik çözümleri bulmak için karmaşık Abel dönüşümlerinin yapılmasına gerek yoktur ve periyodik çözümler doğrudan elde edilebilir.

Tezde ise özellikle bu problemin üzerinde durulmuş olup, her denklem için neden bulunamadığından bahsedilip, ele alınan (3+1) boyutlu BKP ve (3+1) boyutlu Genelleştirilmiş BKP denklemlerinin  $N = 1, 2$  çözümlerinin yanı sıra  $N = 3$  periyodik dalga çözümleri elde edilmiştir. Bunun yanı sıra önceki örneklerden farklı olarak tek bir bilinear formda yazılamayan ama ikili bilinear forma sahip olan denklemler için çözümün nasıl olması gerektiğinden bahsedilmiş, (2+1) boyutlu Breaking Soliton denkleminin  $N = 1$  ve  $N = 2$  periyodik dalga çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca bulunan bu periyodik çözümlerin seçilen keyfi sabitler altında grafikleri çizdirilmiş ve ele alınan her bir denklem için bazı asimptotik şartlar altında bulunan periyodik çözümlerin, bilinen soliton çözümleri verdiği gösterilmiştir.

## 2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI VE TEMEL TANIMLAR

70'li yılların sonunda Novikov, Dubrovin, Mckean, Lax, Its, Matveev ve çalışma arkadaşları, soliton denklemlerin hemen hemen periyodik ya da cebirsel geometrik çözümlerini elde etmek için cebirsel geometrik metodu geliştirmişlerdir (Novikov, 1974; Dubrovin, 1975; Its ve Matveev, 1975; Lax, 1975). Ancak bu yöntem Riemann yüzeyleri üzerinde çok karmaşık hesapları içerdiğinden, kuasi periyodik çözümleri bulmak oldukça zahmetlidir.

Son zamanlarda Fan ve çalışma arkadaşları bu yöntemi, Toda lattice fark (Hon ve Fan, 2008) ve asimetric Nizhnik–Novikov–Veselov denklemlerine uygulayarak geliştirmiş (Fan, 2009), Lu B.,ve Zhang H. (3+1) Jimbo Miwa denkleminin hemen hemen periyodik dalga çözümlerini elde etmiş (Lu ve Zhang, 2009), Tian ve Zhang ise Riemann theta fonksiyonları yardımıyla, bazı lineer olmayan diferensiyel denklemlerin ve süpersimetrik denklemlerin periyodik çözümlerini elde etmişlerdir (Tian ve Zhang, 2012, 2013). Belirtilen çalışmaların haricinde de son zamanlarda yine bu konuda yapılmış çeşitli çalışmalar mevcuttur (Wu, 2012; Fan ve Hon, 2008; Lin, 2010; Whang vd., 2011; Qiao ve Fan, 2012; Ma ve Tian, 2014; Cheng ve Hao, 2014).

Fakat bu çalışmaların neredeyse hepsinde  $N = 1, 2$  periyodik dalga çözümleri bulunurken, işlem zorlukları nedeniyle  $N = 3$  periyodik dalga çözümleri bulunamamıştır. Sadece Lu ve Zhang (Lu ve Zhang, 2010) makalesinde çözümün nasıl bulunması gerektiğinden bahsetmiş fakat onlar da açık bir şekilde çözümü göstermemişlerdir.

## 2.1 Temel Tanımlar

### 2.1.1 Pozitif tanımlı matris

Sıfırdan farklı tüm  $x \in \mathbb{R}^n$  sütun vektörleri için  $x^T A x > 0$  şartını sağlayan  $n \times n$  tipinde simetrik bir matris bulunabiliyorsa<sup>1</sup>  $A$  matrisine pozitif tanımlı matris denir. Bu tanımdan hareketle bir çok özellik yazılabilir. Fakat bir matrisin pozitif tanımlı olup olmadığının daha kolay anlaşılması için en çok kullanılan bir kaç basit test verilebilir.

Tüm özdeğerleri pozitif olan simetrik matrislere, ya da bir başka deyişle tüm pivot elemanları pozitif olan simetrik matrislere pozitif tanımlı matris denir. Bu şartları sağlaması için ise özel bir kaç kısıt gerekir. Örneğin  $A_{n \times n}$  tipinde simetrik bir matris olsun. Pozitif tanımlı olması için  $1 \leq k \leq n$  için  $A$ 'nın  $k \times k$  tipindeki alt matrisinin sol üst matrislerinin determinantları pozitif olmalıdır. Örneğin  $2 \times 2$  tipinde simetrik bir matris olan

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

matrisini ele alalım. Bu matrisin pozitif tanımlı olabilmesi için

$$a_{11} > 0 \text{ ve } \det(A_{2 \times 2}) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \quad (2.2)$$

olmalıdır (Strang, 2005). Dolayısıyla buradan  $a_{22} > 0$  olması gerektiği kolaylıkla görülebilir. Determinantı her pozitif olan matris pozitif tanımlı olmayabilir burada  $a_{11} > 0$  ifadesinin pozitif olması da önemlidir. Örneğin

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantı pozitif olmasına rağmen pozitif tanımlı bir matris değildir. Buna rağmen bu şartları sağlayan

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

---

<sup>1</sup>Eğer  $A = A^T$  ise  $A$ 'ya simetrik matris denir.

matrisi pozitif tanımlı bir matristir.

$3 \times 3$  tipinde simetrik bir matris olan

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

şeklinde bir matrisin pozitif tanımlı olup olmadığı incelendiğinde, sol üst alt matrislerin determinantlarına bakılır ve

$$2 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

şeklinde hepsinin pozitif olduğu görülür yani matris pozitif tanımlıdır (Zwick, 2012).

### 2.1.2 Solitary ve soliton dalga

Sonlu bir genliğe sahip olan, sabit hızla ve sabit bir şekilde ilerleyen dalgalara solitary dalga denir (Hereman, 2009).

Soliton dalga ise benzer türdeki bir başka dalga ile çarpıştığında şeklini ve hızını koruyan solitary dalga çeşitidir. Bir dalga denkleminin, soliton çözümlere sahip olabilmesi için denklemin hem lineer olmaması hem de dağılma özelliğine sahip olması gerekir (Hirota, 2004).

### 2.1.3 Holomorfik fonksiyon

$\Omega$ ,  $\mathbb{C}$ 'nin açık bir kümesi olmak üzere eğer  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ 'ye tanımlanan  $f$  fonksiyonunun,  $z_0 \in \Omega$  noktasında

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$



şeklinde limiti varsa,  $f'(z_0)$  ifadesine  $z_0$  noktasında  $f$ 'nin karmaşık türevi denir. Eğer  $f$ ,  $\Omega$ 'nın tüm noktalarında türevlenebilir ise  $f$ 'ye holomorfik fonksiyon denir (Borreira ve Valls, 2012).

### 2.1.4 Meramorfik fonksiyon

Karmaşık düzlemin açık bir  $\Omega$  kümesi üzerinde fonksiyonun kutup noktaları olan izole edilmiş noktalar kümesi dışındaki diğer noktaların tümünde holomorfik olan fonksiyonlardır.

### 2.1.5 Periyodik ve kuasi periyodik fonksiyon

#### Periyodik fonksiyon

Belli zaman aralığıyla kendini tekrar eden fonksiyonlardır. Bir bölgedeki tüm  $x$  değerleri için

$$f(x + T) = f(x)$$

olacak şekilde bir eşitlik elde edilebiliyorsa,  $T$  sıfırdan farklı pozitif bir sabit olmak üzere  $f$  fonksiyonuna,  $T$  periyotlu periyodik fonksiyon denir.

Örneğin sintüs fonksiyonu

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

olduğundan  $2\pi$  periyotludur.

#### Kuasi periyodik fonksiyon

Eğer

$$f(x + \omega) = g(x, f(x))$$

olacak şekilde bir eşitlik yazılabiliyorsa  $f$  fonksiyonuna  $\omega$  quasiperiyotlu, kuasi periyodik fonksiyon denir. Örneğin

$$f(x + \omega) = f(x) + C$$

olduğunda aritmetik kuasi periyodik fonksiyon olarak adlandırılırken

$$f(x + \omega) = Cf(x)$$

olduğunda ise geometrik kuasi periyodik fonksiyon olarak adlandırılır.

## 3. HIROTA'NIN BİLİNEER METODU VE RIEMANN THETA FONKSİYONU

### 3.1 Hirota'nın Bilineer Metodu

İntegrallenebilen lineer olmayan oluşum denklemlerinin çoklu soliton çözümlerini oluşturmak için, Hirota tarafından öne sürülen doğrudan metod, geçtiğimiz 30 yıl boyunca kullanılan en popüler yöntemlerden birisi olmuştur. İlk olarak Ters Saçılım metodunun kullanılması ile soliton denklemleri<sup>1</sup> için bir çözümün var olduğu gösterilmiştir. Fakat daha sonra Hirota, bu teknikten yola çıkarak, ağır işlem yüküne gerek kalmadan soliton çözümlerin kolaylıkla bulunabileceğini ortaya koymuştur.

Hirota'nın doğrudan metodu, integrallenebilen sistemler için önemli rol oynamaktadır. Bilineer forma sahip çoğu denklem için bir ve iki soliton çözümler genelde mevcut olup, ele alınan denklem için üç soliton çözüm bulunabilirse, o takdirde integrallenebilirliğinden bahsedilebilir. Ayrıca dikkat edilmesi gereken bir başka husus da tamamen integrallenebilen, lineer olmayan bir kısmi diferensiyel denklem ya da fark denkleminin, mutlaka bilinear formu vardır. Ancak tersi doğru olmayabilir. Yani bilinear formda yazılıp, integrallenemeyen bazı denklemler de mevcuttur.

Bir lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemin lineerleştirilmesi, denklemin tam çözümlerinin bulunmasını oldukça kolaylaştırır. Lineerleştirme esasına dayanan bu yöntemde, incelenen denklemin bilinear formunun mutlaka biliniyor olması gerekir. Yani bu yöntem tek bir bilinear denklem veya birleştirilmiş lineer denklem sistemleri formunda yazılabilen herhangi bir kısmi denkleme uygulanabilir. Lineer olmayan oluşum denklemlerinin yanı sıra fark denklemleri ve integro-diferensiyel denklemlere de uygulanabilen Hirota'nın bilinear metodu, soliton çözümlerin, üstel fonksiyonlar cinsinden yazılabileceği esasına dayanır.

Yöntem uygulanırken ilk olarak denkleme uygun bir değişken dönüşümü tespit

---

<sup>1</sup>Soliton denklemleri: Soliton olmayan çözümlerinin yanı sıra soliton çözümlere sahip olan kısmi diferensiyel denklemlerdir (Druitt, 2005).

edilir. Bu dönüşümü tespit etmek her denklem için çok da kolay olmayıp bazen birden fazla bağımsız değişken kullanmak gerekebilir. Daha sonra Hirota D-türev operatörü olarak adlandırılan özel bir türev operatörü yardımı ile denklem, D-operatörlerinin polinomları olarak yazılır. Son olarak ise pertürbasyon tekniği kullanılarak denklemin tam çözümleri elde edilir.

### 3.1.1 Bilineer forma dönüştürme ve Hirota'nın D türev operatörü

$a_{ij}$  bir matris olmak üzere  $\sum_{j=1}^N a_{ij}x_j$  gibi  $x_j$  lineer ifadesinin bir açılımına bilineer denir. Bazen ele alınan diferensiyel denklem kuadratik formda olsa bile literatürde bilineer olarak adlandırılır. Tezde de bu şekilde adlandırılacaktır.

Hirota türevleri, Leibnitz kuralı olarak bilinen çarpımın türevine çok benzemektedir. Tek farkı işlemler arasında Hirota'nın türevinde negatif işaretler varken, bilinen türevde tüm işaretler pozitiftir. Yani

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^m}{\partial t^m} \frac{\partial^n}{\partial x^n} a(t, x) b(t, x) \\ &= \frac{\partial^m}{\partial s^m} \frac{\partial^n}{\partial y^n} a(t + s, x + y) b(t + s, x + y) \Big|_{s=0, y=0} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$m, n = 0, 1, 2, \dots$

ifadesi çarpımın türevi iken,

$$\begin{aligned} & D_t^m D_x^n a(t, x) . b(t, x) \\ &= \frac{\partial^m}{\partial s^m} \frac{\partial^n}{\partial y^n} a(t + s, x + y) b(t - s, x - y) \Big|_{s=0, y=0} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$m, n = 0, 1, 2, \dots$

ifadesi Hirota'nın türevidir.

**Not 3.1.1**  $O$  operatörü ,  $f$  ve  $g$  fonksiyon çiftine uygulandığında,  $O(f, g)$  şeklinde yazılır ve bu ifadeye ikili operatör denir. Bu tanıma göre normalde  $D$  operatörü de

$$D_x^n(a(t, x), b(t, x))$$

şeklinde yazılır. Fakat bu gösterimi kullanmak yerine genellikle

$$D_x^n a(t, x) \cdot b(t, x)$$

gösterimi kullanılmaktadır.

$D$ -operatörü için

$$\begin{aligned} D_x a \cdot b &= a_x b - a b_x \\ D_x^2 a \cdot b &= a_{xx} b - 2a_x b_x + a b_{xx} \\ D_x^3 a \cdot b &= a_{xxx} b - 3a_{xx} b_x + 3a_x b_{xx} - a b_{xxx} \\ &\dots \end{aligned}$$

şeklinde bir kaç örnek verilebilir. Ayrıca en çok bilinen ve tezde kullanılacak olacak olan bazı özellikler şunlardır.

1.  $D_t^m D_x^n a \cdot 1 = \partial_t^m \partial_x^n a$
2.  $D_x^n f \cdot f = 0$ , eğer  $n$  tek sayı ise
3.  $D_x^n f \cdot g = (-1)^n D_x^n g \cdot f$  (3.3)
4.  $D_x a \cdot b = D_x^{n-1} D_x a \cdot b$
5.  $D_x^n e^{p_1 x} \cdot e^{p_2 x} = (p_1 - p_2)^n e^{(p_1 + p_2)x}$

Geri kalan özelliklerin bazıları konuda gerektiğinde verilecektir. Bilineerleştirme işleminin daha kolay anlaşılması için Hirota'nın kitabından (Hirota, 2004) alınan bir örnek üzerinde yöntemin nasıl uygulandığı aşağıda incelenmiştir.

### 3.1.2 KdV denkleminin bilinearleştirilmesi ve soliton çözümleri

1985 yılında Korteweg ve de Vries tarafından oluşturulan

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{3.4}$$

KdV denklemini ele alalım (Korteweg ve Vries, 1895).

Bilineer forma dönüştürmek için kullanılan, rasyonel, logaritmik ve bilogaritmik dönüşüm gibi bir çok değişken dönüşümü mevcuttur. Hirota, kitabında ayrıntılı olarak diğer dönüşümlere de yer vermiştir. İlk olarak (3.4) denklemi

$$u_t + 3(u^2)_x + u_{xxx} = 0 \quad (3.5)$$

şeklinde düzenlenebilir.

$$u = \omega_x \quad (3.6)$$

olmak üzere bu dönüşüm (3.5) denkleminde uygulanıp,  $x$ 'e göre bir kez integre edilirse  $c$  integrasyon sabiti olmak üzere

$$\omega_t + 3(\omega_x)^2 + \omega_{xxx} = c \quad (3.7)$$

denklemi elde edilir.

$$u = 2(\log f)_{xx} \quad (3.8)$$

logaritmik dönüşümüne denk olan

$$\omega = 2(\log f)_x \quad (3.9)$$

dönüşümü, (3.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$2(\log f)_{xt} + 3[2(\log f)_{xx}]^2 + 2(\log f)_{4x} = c$$

ifadesi elde edilir.  $D$  operatörünün tanımı gereği

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log f &= \frac{D_x^2 f \cdot f}{f^2} \\ 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \log f &= \frac{D_x D_t f \cdot f}{f^2} \\ 2\frac{\partial^4}{\partial x^4} \log f &= \frac{D_x^4 f \cdot f}{f^2} - 3\left(\frac{D_x^2 f \cdot f}{f^2}\right)^2 \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

eşitlikleri yazılabilir. Buna göre KdV denklemi,

$$\frac{D_x D_t f \cdot f}{f^2} + 3\left(\frac{D_x^2 f \cdot f}{f^2}\right)^2 + \frac{D_x^4 f \cdot f}{f^2} - 3\left(\frac{D_x^2 f \cdot f}{f^2}\right)^2 = c$$

olarak yeniden düzenlenir ve

$$D_x(D_t + D_x^3)f \cdot f = cf^2$$

bilineer denklemi elde edilir. Soliton çözümler bulunurken denklemdeki integrasyon sabiti  $c = 0$  seçilebilir. Buna göre bilineer formun son hali

$$D_x(D_t + D_x^3)f \cdot f = 0$$

olacaktır.

Soliton çözümleri bulabilmek için  $f$  fonksiyonunun

$$f = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + \dots \quad (3.11)$$

şeklinde küçük bir  $\varepsilon$  parametresine göre açılımının yapıldığı, pertürbasyon metodu kullanılır. Genellikle bu yöntem kullanılırken, açılım  $\varepsilon$  parametresinin sonsuz mertebeleri ile devam eder ve uygun bir sonlu mertebesinde açılım kesilir. (3.11) denklemi, bilineer denklemde yerine yazılıp  $\varepsilon$  parametresine göre düzenlenilirse

$$\begin{aligned} \varepsilon : D_x(D_t + D_x^3)(f_1 \cdot 1 + 1 \cdot f_1) &= 0 \\ \varepsilon^2 : D_x(D_t + D_x^3)(f_2 \cdot 1 + f_1 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2) &= 0 \\ \varepsilon^3 : D_x(D_t + D_x^3)(f_3 \cdot 1 + f_2 \cdot f_1 + f_1 \cdot f_2 + 1 \cdot f_3) &= 0 \\ \dots & \end{aligned} \quad (3.12)$$

olacaktır.

Birinci ifadeden  $f_1$  için lineer diferensiyel denklem

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) f_1 = 0 \quad (3.13)$$

şeklinindedir. Solitary dalga ya da bir-soliton çözüm için  $f$

$$f_1 = e^{\eta_1} \quad (3.14)$$

şeklinde seçilmelidir. Burada soliton çözümün faz değişkeni  $\eta_1 = P_1 x + \Omega_1 t + \eta_1^0$  olmak

üzere, yayılma bağıntısı

$$\Omega_1 + P_1^3 = 0$$

dir.

$\varepsilon^2$  nin katsayısı ele alındığında ise

$$2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) f_2 = -D_x(D_t + D_x^3)f_1 \cdot f_1 \quad (3.15)$$

yazılabilir. (3.3) denkleminin beşinci özelliğine göre  $f_1 = e^{\eta_1}$  ifadesi, (3.15) te yerine yazılırsa denklemin sağ tarafı sıfır olur. Böylece  $f_2 = 0$  seçilebilir. Yani  $f$  açılımı

$$f = 1 + \varepsilon f_1$$

şeklinde kesilebilir.  $\varepsilon$  parametresi de faz değişkeni içerisindeki  $\eta_1^0$  faz sabiti içerisinde alınabileceğinden

$$f = 1 + e^{\eta_1} \quad (3.16)$$

elde edilir ve bu da bilinear denklemin tam çözümüdür.

İki-soliton çözüm bulunurken,  $f_1$  için

$$f_1 = e^{\eta_1} + e^{\eta_2} \quad (3.17)$$

olacak şekilde, lineer üst üste bindirme kuralı uygulanır. Burada  $\eta_i = P_i x + \Omega_i t + \eta_i^0$ ,  $i = 1, 2$  olmak üzere lineer olmayan yayılma bağıntısı

$$\Omega_i + P_i^3 = 0 \quad (3.18)$$

dir. Ayrıca (3.3) denkleminin beşinci özelliğine göre

$$D_x^m D_t^n e^{\eta_1} \cdot e^{\eta_2} = (P_1 - P_2)^m (\Omega_1 - \Omega_2)^n e^{\eta_1 + \eta_2} \quad (3.19)$$

şeklinde bir sonuç çıkarılabilir.

(3.17) ifadesi,  $\varepsilon^2$  nin katsayısı olan (3.15) denkleminde yerine yazılırsa yukarıda



geçen (3.19) özelliği de kullanılarak

$$\begin{aligned}
& D_x(D_t + D_x^3)f_1 \cdot f_1 \\
&= D_x(D_t + D_x^3)(e^{\eta_1} + e^{\eta_2}) \cdot (e^{\eta_1} + e^{\eta_2}) \\
&= 2D_x(D_t + D_x^3)e^{\eta_1} \cdot e^{\eta_2} \\
&= 2(P_1 - P_2)[\Omega_1 - \Omega_2 + (P_1 - P_2)^3]e^{\eta_1 + \eta_2}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

eşitliği yazılabilir. Bu denklemin çözümü ise

$$f_2 = a_{12}e^{\eta_1 + \eta_2} \tag{3.21}$$

şeklinde seçilmelidir. (3.20) ve (3.21) da bulunan bu ifadeler (3.15) ifadesinde yerine yazılırsa

$$a_{12} = -\frac{2(P_1 - P_2)[\Omega_1 - \Omega_2 + (P_1 - P_2)^3]}{2(P_1 + P_2)[\Omega_1 + \Omega_2 + (P_1 + P_2)^3]}$$

elde edilir. (3.18) da bulunan eşitliğin de yerine yazılması ile

$$a_{12} = \frac{(P_1 - P_2)^2}{(P_1 + P_2)^2} \tag{3.22}$$

olduğu görülür.

$f_3$  için, yukarıda verilen  $f_1$  ve  $f_2$  ifadelerinin  $\varepsilon^3$  ün katsayısında yerine yazılması ile

$$D_x(D_t + D_x^3)(f_3 \cdot 1 + f_2 \cdot f_1 + f_1 \cdot f_2 + 1 \cdot f_3) = 0 \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
& [D_x(D_t + D_x^3)](1 \cdot f_3 + f_3 \cdot 1) = -[D_x(D_t + D_x^3)](f_2 \cdot f_1 + f_1 \cdot f_2) \\
&= 2D_x(D_t + D_x^3)e^{\eta_1 + \eta_2} \cdot (e^{\eta_1} + e^{\eta_2}) \\
&= 2P_2(\Omega_2 + P_2^3)e^{2\eta_1 + \eta_2} + 2P_1(\Omega_1 + P_1^3)e^{\eta_1 + 2\eta_2}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

bulunur. (3.17) de verilen yayılma bağıntısının (3.24) te yerine yazılması ile denklemin sağ tarafı sıfıra eşit olur. Böylece aşikar çözüm olan  $f_3 = 0$  olmalıdır.

$f_3 = 0$  için  $\varepsilon^4$  ün katsayısından

$$D_x(D_t + D_x^3)(f_4 \cdot 1 + f_2 \cdot f_2 + 1 \cdot f_4) = 0$$

yazılır. Homojen olmayan terim

$$D_x(D_t + D_x^3)f_2 \cdot f_2 = 0$$

olup, yine  $f_4 = 0$  seçilebilir. Elde edilen tüm bu sonuçlar  $f$ 'nin pertürbasyon açılımında yerine yazılırsa

$$f = 1 + \varepsilon(e^{\eta_1} + e^{\eta_2}) + \varepsilon^2 a_{12} e^{\eta_1 + \eta_2} \quad (3.25)$$

bulunur. Yine  $\varepsilon$  parametresi  $\eta_j^0$  faz sabitlerinin içerisinde alınabileceğinden

$$f = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + a_{12} e^{\eta_1 + \eta_2} \quad (3.26)$$

şeklinde yazılabilir. Bu çözüm sağa doğru ilerleyen iki solitonu ifade eder. Uzun olan soliton bir süre sonra kısa olan solitondan daha hızlı ilerleyip onu geçer ve çözüm farklı  $t$  zamanlarında incelendiğinde, dalgaların etkileşim sonrasında da şekillerini korudukları görülür.  $f$ 'nin açılımındaki  $a_{12}$  terimi ise iki solitonun etkileşimi sonrası faz değişiminden sorumludur.

**Not 3.1.2** Genel olarak bilineer denklemi  $F$ ;  $D_t, D_x, \dots$  operatörlerinin genel bir polinomu olmak üzere

$$F(D_t, D_x, \dots)f \cdot f = 0 \quad (3.27)$$

şeklinde ele alınsın.

$$\mathbf{D} = (D_t, D_x, \dots)$$

için (3.27) ifadesi

$$F(\mathbf{D})f \cdot f = 0$$

formunda yazılabilir. Buna göre iki soliton çözüm için

$$\mathbf{P}_1 \pm \mathbf{P}_2 = (\Omega_1 \pm \Omega_2, P_1 \pm P_2, \dots)$$

$$\partial = (\partial_t, \partial_x, \dots)$$

olmak üzere

$$F(\mathbf{D})e^{\eta_1} \cdot e^{\eta_2} = \frac{F(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)}{F(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)} F(\partial)e^{\eta_1 + \eta_2}$$

olacak biçimde genel bir sonuç çıkartılabilir. Lineer olmayan dağılma bağıntısı ise

$$F(\mathbf{P}_i) = 0 \quad (i = 1, 2)$$

olup  $a_{12}$  faz değişkeni

$$a_{12} = -\frac{F(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)}{F(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)} \quad (3.28)$$

şeklindedir.

KdV denkleminin üç soliton çözümü için yukarıdakine benzer şekilde işlemler yapıldığında pertürbasyon metodundan

$$\begin{aligned} f = & 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_3} \\ & + a_{12}e^{\eta_1+\eta_2} + a_{13}e^{\eta_1+\eta_3} + a_{23}e^{\eta_2+\eta_3} \\ & + a_{123}e^{\eta_1+\eta_2+\eta_3} \end{aligned} \quad (3.29)$$

elde edilir. Burada  $i, j = 1, 2, 3$  olmak üzere  $\eta_i = P_i x + \Omega_i t + \eta_i^0$  için lineer olmayan yayılma bağıntısı  $\Omega_i + P_i^3 = 0$  dir. Ayrıca

$$a_{ij} = -\frac{(P_i - P_j)^2}{(P_i + P_j)^2} \quad (3.30)$$

olup, (3.29) denklemindeki son terimin katsayısı  $a_{123} = a_{12}a_{13}a_{23}$  şeklinde yazılabilir.

Genel olarak  $N$  soliton için

$$a_{ij} = e^{A_{ij}}$$

seçildiği takdirde  $f$  açılımı

$$f = \sum e^{\left[ \sum_{i=1}^N \mu_i \eta_i + \sum_{i<j}^N A_{ij} \mu_i \mu_j \right]}$$

şeklinde ifade edilebilir.  $\sum$  sembolü  $\mu_1 = 0, 1, \mu_2 = 0, 1, \dots, \mu_N = 0, 1$  için tüm olası ihtimallerin toplamını,  $\sum_{i<j}^N$  ise  $\{1, 2, \dots, N\}$  kümesinden seçilen tüm olası  $(i, j)$  çifti için  $i < j$  şartını sağlayan toplamı ifade etmek için kullanılır.

$$F(\mathbf{D})f \cdot f = 0$$

bilineer denklemi  $N$  soliton çözüme sahiptir ve  $\mathbf{P}_i = (\Omega_i, P_i, \dots)$  olmak üzere faz değişkeni

$$a_{ij} = -\frac{F(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j)}{F(\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_j)} \quad (3.31)$$

ile verilir. Burada  $F(\mathbf{D})$  fonksiyonu keyfi olmayıp

$$\sum F \left( \sum_{i=1}^N \sigma_i \mathbf{P}_i \right) \prod_{i < j}^{(N)} F(\sigma_i \mathbf{P}_i - \sigma_j \mathbf{P}_j) \sigma_i \sigma_j = 0 \quad (3.32)$$

şartını sağlamalıdır. Burada  $\sum$  sembolü  $\sigma_1 = 0, 1, \sigma_2 = 0, 1, \dots, \sigma_N = 0, 1$  için tüm olası ihtimallerin toplamını ifade edip, (3.32) ifadesi Hirota şartı olarak adlandırılmaktadır.

### Not 3.1.3

$$u = 2(\ln f)_{xx}$$

*gibi bir dönüşüm ile lineer olmayan bir denklem, bilineer formda yazılmak istendiğinde, aşağıda verilen dönüşümleri kullanmak büyük kolaylık sağlamaktadır.*

$$\begin{aligned} D_x^2 \frac{f \cdot f}{f^2} &= u \\ D_x^4 \frac{f \cdot f}{f^2} &= u_{xx} + 3u^2 \\ D_x^6 \frac{f \cdot f}{f^2} &= u_{xxxx} + 15u_{xx}u + 15u^3 \\ D_t^2 \frac{f \cdot f}{f^2} &= \iint u_{tt} d_x d_x \\ D_t D_x^3 \frac{f \cdot f}{f^2} &= u_{xt} + 3u \int u_t d_x \\ D_t D_x \frac{f \cdot f}{f^2} &= u_{xt} \end{aligned} \quad (3.33)$$

*Fakat kullanılacak olan  $u$  dönüşümüne göre bu eşitliklerdeki sağ tarafta yer alan ifadeler değişebilir. Yapılan dönüşüme göre yukarıdaki ifadeler tekrar düzenlenmelidir. Örneğin,  $u = 2(\ln f)_x$  şeklinde bir dönüşüm kullanılacaksa beşinci sırada olan özellik yerine*

$$D_t D_x^3 \frac{f \cdot f}{f^2} = u_{xxt} + 3u_x u_t \quad (3.34)$$

*kullanılır.*

## 3.2 Riemann Theta Fonksiyonu

$n = (n_1, \dots, n_N)^T \in \mathbb{Z}^N$  tamsayı değerli bir vektör,  $s = (s_1, \dots, s_N)^T \in \mathbb{C}^N$  ve  $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_N)^T \in \mathbb{C}^N$  kompleks vektörler ve  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)^T \in \mathbb{C}^N$  kompleks değerli faz değişkenleri olmak üzere,  $N$  boyutlu iki vektörün iç çarpımının  $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + \dots + u_N v_N$  şeklinde tanımlandığı

$$\vartheta(\xi, \epsilon, s \mid \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} e^{\pi i \langle \tau(n+s), n+s \rangle + 2\pi i \langle \xi + \epsilon, n+s \rangle} \quad (3.35)$$

çok boyutlu Riemann theta fonksiyonu ele alınsın. Burada theta fonksiyonunun periyot matrisi  $-i\tau = -i(\tau_{ij})$  olup  $N \times N$  tipinde reel değerli simetrik bir matristir ve theta fonksiyonunun keyfi bir parametresidir. Farkas'ın kitabında (Farkas ve Kra, 2001) (3.35) denkleminde görülen Fourier serisinin reel değerli bir fonksiyona yakınsadığının ispatını verilmiştir. Periyot matrisi olan ve  $-i$  ile çarpılan  $\tau$ 'nun, reel değerli olabilmesi için simetrik matris şartlarını sağlamalı ve  $\tau$  matrisi her bir elemanı sanal olacak şekilde bir matris olarak seçilmelidir. Kolaylık olması bakımından  $\epsilon = s = 0$  için  $\vartheta(\xi, 0, 0 \mid \tau) = \vartheta(\xi, \tau)$  fonksiyonu,

$$\vartheta(\xi, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} e^{\pi i \langle n\tau, n \rangle + 2\pi i \langle \xi, n \rangle} \quad (3.36)$$

şeklinde kullanılabilir.

Bazı çalışmalarda Riemann theta fonksiyonu

$$\vartheta(\xi, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} e^{-\pi \langle n\tau, n \rangle + 2\pi i \langle \xi, n \rangle} \quad (3.37)$$

biçiminde tanımlanmıştır (Fan, 2009). Fakat yukarıdakinden farklı olarak serinin yakınsak olabilmesi için  $\tau = \tau_{ij}$  matrisi pozitif tanımlı ve  $N \times N$  tipinde reel değerli simetrik bir matris olarak alınmalıdır.

**Özellik 3.2.1**  $\vartheta(\xi, \tau)$  theta fonksiyonu

$$\vartheta(\xi + 1 + \tau, \tau) = e^{-\pi i \tau - 2\pi i \xi} \vartheta(\xi, \tau) \quad (3.38)$$

olacak şekilde 1 ve  $\tau$  vektörleri, 1 ve  $e^{-\pi i\tau - 2\pi i\xi}$  çarpanlı theta fonksiyonunun periyotları olarak ele alınabilir. Burada 1 ve  $\tau$ ,  $\vartheta(\xi, \tau)$  theta fonksiyonunun periyodu olmayıp  $\partial_\xi^2 \ln \vartheta(\xi, \tau)$ ,  $\partial_\xi \ln[\vartheta(\xi+e, \tau)/\vartheta(\xi+h, \tau)]$  ve  $\vartheta(\xi+e, \tau)\vartheta(\xi-e, \tau)/\vartheta^2(\xi+h, \tau)$  ifadelerinin periyodudur (Mumford, 1983).

### İspat:

Rieman theta fonksiyonu  $N = 1$  için

$$\vartheta(\xi, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n \xi) \quad (3.39)$$

şeklinde tanımlanır.

$$\begin{aligned} \vartheta(\xi + 1 + \tau, \tau) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n(\xi + 1 + \tau)) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n \xi + 2\pi i n + 2\pi i n \tau) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i n} \exp(\pi i (n+1)^2 \tau + 2\pi i n \xi - \pi i \tau) \end{aligned} \quad (3.40)$$

$e^{2\pi i n} = (1)^n$ , olup kalan ifadede  $n+1 = m$  yazılırsa

$$\begin{aligned} &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp(\pi i m^2 \tau + 2\pi i (m-1)\xi - \pi i \tau) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp(\pi i m^2 \tau + 2\pi i m \xi - 2\pi i \xi - \pi i \tau) \\ &= \exp(-\pi i \tau - 2\pi i \xi) \vartheta(\xi, \tau) \end{aligned} \quad (3.41)$$

ifadesi elde edilir.

### Özellik 3.2.2

$f(\xi)$ ,  $\mathbb{C}$  üzerinde tanımlı meramorf bir fonksiyon olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} i) \quad f(\xi) &= \partial_\xi^2 \ln \vartheta(\xi, \tau), \quad \xi \in \mathbb{C} \\ ii) \quad f(\xi) &= \partial_\xi \ln \frac{\vartheta(\xi+e, \tau)}{\vartheta(\xi+h, \tau)}, \quad \xi, e, h \in \mathbb{C} \\ iii) \quad f(\xi) &= \partial_\xi \ln \frac{\vartheta(\xi+e, \tau)\vartheta(\xi-e, \tau)}{\vartheta(\xi, \tau)^2}, \quad \xi, e, h \in \mathbb{C} \end{aligned} \quad (3.42)$$

şeklinde yukarıdaki üç özelliği sağlayan  $f(\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{C}$  olmak üzere

$$f(\xi + 1 + i\tau) = f(\xi) \quad (3.43)$$

eşitliğini sağlar (Mumford, 1983).

**İspat:**

(3.38) eşitliği kullanılarak

$$\frac{\partial_{\xi} \vartheta(\xi + 1 + i\tau, \tau)}{\vartheta(\xi + 1 + i\tau, \tau)} = -2\pi i + \frac{\partial_{\xi} \vartheta(\xi, \tau)}{\vartheta(\xi, \tau)}$$

veya

$$\partial_{\xi} \ln \vartheta(\xi + 1 + i\tau, \tau) = -2\pi i + \partial_{\xi} \ln \vartheta(\xi, \tau) \quad (3.44)$$

yazılabilir. (3.44) eşitliğinde her iki tarafın,  $\xi$ 'ye göre bir kez türevi alınırsa, (3.42) deki *i*) koşulunun sağlandığı gösterilmiş olur. Benzer şekilde *ii*) ve *iii*) için de ispatlar yapılabilir.

**Not 3.2.3** Yukarıda verilen özelliğe göre Riemann theta fonksiyonu

$$2\partial_x^2(\ln \vartheta(\xi, \tau))$$

dönüşümüyle periyodiklik özelliğini sağlar ve bulunan çözümler periyodik çözüm olarak adlandırılır. Fakat tezdaki denklemlerin çözümünde

$$u = 2\partial_x(\ln \vartheta(\xi, \tau)) \quad (3.45)$$

dönüşümü kullanılacaktır. Yani (3.44) ten de görüldüğü üzere, theta fonksiyonu tam olarak periyodik olmayacak, dolayısıyla bulunacak olan çözümler kuasi periodik (hemen hemen periyodik) olarak adlandırılacaktır.

## 4. HIROTA-RIEMANN METODU

### 4.1 Lineer Olmayan Denklemler İçin Hirota-Riemann Metodu

İlk olarak  $N + 1$  boyutlu

$$\mathcal{N}(u, u_t, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_N}, \dots) = 0 \quad (4.1)$$

şeklinde lineer olmayan bir denklemin en genel formunu ele alalım.  $t \in \mathbb{R}$  zaman,  $x_1, x_2, \dots, x_N$  uzay değişkeni olmak üzere  $\mathcal{N}$  bir polinom fonksiyonudur. İlk olarak

$$u = a\partial_\Lambda^n \ln f(X, t) \quad (4.2)$$

gibi bir değişken dönüşümü, (4.1) denkleminde uyguladığında  $a$  bir sabit,  $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ ,  $\Lambda = (x_1^{n_1}, x_2^{n_2}, \dots, x_N^{n_N})$  ve  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_N$  olmak üzere

$$\mathcal{H}(D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_N}, D_t)f(X, t) \cdot f(X, t) = 0 \quad (4.3)$$

şeklinde (4.1) in bilinear formu elde edilir. Hirota'nın bilinear teorisine göre (4.1) denkleminin  $\eta = \mu x_1 + \nu x_2 + \dots + \Omega x_N + \gamma(\mu, \nu, \dots, \Omega)t + \delta$  faz değişkeni,  $\mu, \nu, \dots, \Omega, \delta$  sabitler ve  $\gamma(\mu, \nu, \dots, \Omega)$ ;  $\mu, \nu, \dots, \Omega$  sabitlerinin bir fonksiyonu olmak üzere

$$u_1 = a\partial_\Lambda^n \ln(1 + e^\eta) \quad (4.4)$$

şeklinde bir-soliton çözüme sahiptir.

Benzer şekilde iki-soliton çözümünün faz değişkeni  $\eta_i = \mu_i x_1 + \nu_i x_2 + \dots + \Omega_i x_N + \gamma(\mu_i, \nu_i, \dots, \Omega_i)t + \delta_i$ ,  $i = 1, 2$  için  $e^{A_{12}} = \Theta(\mu_i, \nu_i, \dots, \Omega_i)$  ve  $\gamma$  da  $\mu_i, \nu_i, \dots, \Omega_i$  keyfi sabitlerinin bir fonksiyonu olarak tanımlanmak üzere

$$u_2 = a\partial_\Lambda^n \ln(1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}}) \quad (4.5)$$



şeklindedir.

Üç-soliton çözüm ise  $i = 1, 2, 3$  için  $\eta_i = \mu_i x_1 + \nu_i x_2 + \dots + \Omega_i x_N + \gamma(\mu_i, \nu_i, \dots, \Omega_i)t + \delta_i$  faz değişkeni,  $j, l = 1, 2, 3, j < l$  için  $e^{A_{jl}} = \Theta(\mu_i, \nu_i, \dots, \Omega_i)$ ,  $\mu_i, \nu_i, \dots, \Omega_i, \delta_i$  sabitler ve  $\gamma$ ;  $\mu_i, \nu_i, \dots, \Omega_i$  keyfi sabitlerinin bir fonksiyonu olmak üzere

$$u_3 = a\partial_\Lambda^n \ln(1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_3} + e^{\eta_1+\eta_2+A_{12}} + e^{\eta_1+\eta_3+A_{13}} + e^{\eta_2+\eta_3+A_{23}} + e^{\eta_1+\eta_2+\eta_3+A_{12}+A_{13}+A_{23}}) \quad (4.6)$$

şeklindedir.

Bu yöntem ile lineer olmayan denklemlerin çok periyotlu periyodik çözümlerini oluştururken, (4.3) bilinear denklemin genelleştirilmiş formu kullanılır. Yani (4.1) denkleminin çözümünün,  $|\xi| \rightarrow 0$  ve  $u \rightarrow u_0$  asimptotik şartlar altında

$$u = u_0 + a\partial_\Lambda^n \ln \vartheta(\xi) \quad (4.7)$$

olduğu düşünülür. Burada  $u_0$ , (4.1) denklemi sağlayan özel bir çözümdür ve faz değişkeni olan  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)^T$ ,  $\xi_i = \alpha_i x_1 + \rho_i x_2 + \dots + \omega_i t + \varepsilon_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$

şeklindedir.

(4.7) denklemi (4.3) de yerine yazılıp,  $x_1$  e göre bir kez integre edilirse  $c = c(x_2, \dots, t)$  integrasyon sabiti olmak üzere

$$\mathcal{L}(D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_N}, D_t)\vartheta(\xi, \tau) \cdot \vartheta(\xi, \tau) = \mathcal{H}(D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_N}, D_t, c)\vartheta(\xi, \tau) \cdot \vartheta(\xi, \tau) = 0 \quad (4.8)$$

elde edilir.

**Not 4.1.1** *Soliton çözümleri oluştururken  $c = c(x_2, \dots, t)$  integrasyon sabiti sıfır seçilebilir. Fakat eliptik fonksiyonlar genelde sıfır integrasyon sabitli denklemleri sağlamazlar.  $c$ , periyodik çözümler için önemli bir rol oynar ve sıfırdan farklı seçilmelidir.*

### 4.1.1 Bir-periyodik dalga çözümlerin bulunması

**Teorem 4.1.2**  $\xi = \alpha x_1 + \rho x_2 + \dots + \omega t + \varepsilon$  faz değişkeni ve  $\text{Im}(\tau) > 0$  için

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(4n\pi i\alpha, 4n\pi i\rho, \dots, 4n\pi i\omega) e^{2n^2\pi i\tau} &= 0 \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(2\pi i(2n-1)\alpha, \dots, 2\pi i(2n-1)\omega) e^{(2n^2-2n+1)\pi i\tau} &= 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

sistemini sağlayan Riemann theta fonksiyonu

$$\vartheta(\xi, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau + 2\pi i n \xi} \quad (4.10)$$

şeklinde tanımlanmak üzere

$$u = u_0 + a\partial_{\lambda}^n \ln \vartheta(\xi, \tau) \quad (4.11)$$

ifadesi çözümü istenen denklemin bir-periyodik dalga çözümüdür (Tian ve Zhang, 2010).

**İspat:**

(3.3) te verilen özellikler yardımı ile

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_N}, D_t) \vartheta(\xi, \tau) \cdot \vartheta(\xi, \tau) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_N}, D_t) e^{\pi i m^2 \tau + 2\pi i m \xi} \cdot e^{\pi i n^2 \tau + 2\pi i n \xi} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(2\pi i(n-m)\alpha, 2\pi i(n-m)\rho, \dots, 2\pi i(n-m)\omega) e^{\pi i(m^2+n^2)\tau + 2\pi i(m+n)\xi} \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir.  $m' = m + n$  dönüşümü ile

$$\tilde{\mathcal{L}}(m') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(2\pi i(2n-m')\alpha, 2\pi i(2n-m')\rho, \dots, 2\pi i(2n-m')\omega) e^{\pi i[n^2+(n-m')^2]\tau}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} &= \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \mathcal{L}(2\pi i(2n-m')\alpha, 2\pi i(2n-m')\rho, \dots, 2\pi i(2n-m')\omega) \right. \\ &\quad \left. \times e^{\pi i[n^2+(n-m')^2]\tau} \right\} e^{2\pi i m' \xi} \\ &\triangleq \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{L}}(m') e^{2\pi i m' \xi} \end{aligned} \quad (4.12)$$

bulunur ve  $n' = n - 1$  alınırsa

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(2\pi i(2n' - (m' - 2))\alpha, 2\pi i(2n' - (m' - 2))\rho, \dots \\
&\quad, 2\pi i(2n' - (m' - 2))\omega) e^{\pi i[n'^2 + (n' - (m' - 2))^2]\tau} \cdot e^{2\pi i(m' - 1)\tau} \\
&= \tilde{\mathcal{L}}(m' - 2) e^{2\pi i(m' - 1)\tau} = \dots = \begin{cases} \tilde{\mathcal{L}}(0) e^{\pi i m' \tau}, & m' \text{ çift} \\ \tilde{\mathcal{L}}(1) e^{\pi i(m' + 1)\tau}, & m' \text{ tek} \end{cases} \quad m', n' \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada  $\tilde{\mathcal{L}}(m')$  fonksiyonu  $\tilde{\mathcal{L}}(0)$  ve  $\tilde{\mathcal{L}}(1)$  fonksiyonlarına bağlıdır. Eğer  $\tilde{\mathcal{L}}(0) = \tilde{\mathcal{L}}(1) = 0$  ise  $\tilde{\mathcal{L}}(m') = 0$ ,  $m' \in \mathbb{Z}$  olur ve böylece theta fonksiyonu (4.1) denkleminin tam çözümü olur yani  $\mathcal{L}(D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_N}, D_t) \vartheta(\xi, \tau) \cdot \vartheta(\xi, \tau) = 0$  dır. Eğer

$$\tilde{\mathcal{L}}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(4n\pi i\alpha, 4n\pi i\rho, \dots, 4n\pi i\omega) e^{2n^2\pi i\tau} = 0 \tag{4.13}$$

$$\tilde{\mathcal{L}}(1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(2\pi i(2n - 1)\alpha, \dots, 2\pi i(2n - 1)\omega) e^{(2n^2 - 2n + 1)\pi i\tau} = 0$$

sistemi  $(\omega, c)^T$  vektörüne göre çözülebilirse

$$u = u_0 + a \partial_{\lambda}^n \ln \vartheta(\xi, \tau) \tag{4.14}$$

bir periyodik çözüm elde edilir. Burada  $\omega$  ve  $c$ , (4.13) sisteminden bulunacak olup, diğer parametreler  $\alpha, \rho, \dots, \tau, \varepsilon$  ve  $u_0$  keyfi olarak seçilebilir.

### Bir-periyodik dalgaların asimptotik durumu ve grafik özellikleri

1. Bir periyodik dalga çözümleri bilinen bir boyutlu dalgalardır yani tek bir  $\xi$  faz değişkenine sahiptirler.
2. 1 ve  $\tau$  gibi iki temel periyotları vardır.
3. Alınan tüm  $t$  zamanları için bir tek dalga şekli vardır ve bir-periyodik dalgaların şekli çakışan bir-solitary dalgaların paralel olarak üst üste binmesi ile oluşur.

Şimdi bir-periyodik çözüm ile bir-soliton çözüm arasındaki ilişkiyi veren bir teoremden bahsedelim.

**Teorem 4.1.3** (4.1) denklemini, (4.4) te verilen bir-soliton çözüm için  $\eta = \mu x_1 + \nu x_2 + \dots + \Omega x_N + \gamma(\mu, \nu, \dots, \Omega)t + \delta$  şeklinde bir faz değişkenine sahipken, (4.14) te verilen bir periyodik çözüm ise  $\xi = \alpha x_1 + \rho x_2 + \dots + \omega t + \varepsilon$  şeklinde bir faz değişkenine sahip olsun. Buna göre parametreler arasındaki ilişki

$$\alpha = \frac{\mu}{2\pi i}, \quad \rho = \frac{\nu}{2\pi i}, \dots, \quad \varepsilon = \frac{\gamma - \pi i \tau}{2\pi i} \quad (4.15)$$

olarak seçildiği takdirde,  $e^{\pi i \tau} = \lambda$  olmak üzere  $\lambda \rightarrow 0$  iken

$$u_0 \rightarrow 0, \quad c \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow \frac{\eta - \pi i \tau}{2\pi i} \quad (4.16)$$

gibi bir asimptotik ilişki bulunur ve (4.14) te verilen bir-periyodik çözüm

$$\vartheta(\xi, \tau) \rightarrow 1 + e^\eta$$

olup bir-soliton çözümünü verir.

$N = 1$  için (3.36) da verilen Riemann theta fonksiyonu seriye açıldığında

$$\begin{aligned} \vartheta(\xi, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau + 2\pi i n \xi} \\ &= 1 + e^{\pi i \tau + 2\pi i \xi} + e^{\pi i \tau - 2\pi i \xi} + e^{4\pi i \tau + 4\pi i \xi} + \dots \end{aligned}$$

elde edilir.  $\xi \rightarrow \frac{\tilde{\xi} - \pi i \tau}{2\pi i}$  için  $\lambda = e^{\pi i \tau}$  alınırsa yukarıdaki ifade

$$\vartheta(\xi, \tau) = 1 + e^{\tilde{\xi}} + \lambda^2(e^{-\tilde{\xi}} + e^{2\tilde{\xi}}) + \dots$$

şeklinde yazılabilir.  $\lambda \rightarrow 0$  için

$$\vartheta(\xi, \tau) = 1 + e^{\tilde{\xi}} \quad (4.17)$$

bulunur. (4.15) şartları (4.17) ifadesinde yerine yazıldığında  $\tilde{\xi} \rightarrow \eta$  olup, denklemin bir-soliton çözümü yani

$$\vartheta(\xi, \tau) = 1 + e^\eta$$

elde edilir.

(4.15) şartları altında bir-periyodik çözümün  $c \rightarrow 0$  ve  $\omega$ 'nın da yayılma bağıntısını verdiği her bir örnek için yeri geldiğinde gösterilip, yayılma bağıntılarının elde edilmesi ile de bir-periyodik çözümlerin (4.15) şartları altında bir-soliton çözümlere gittiği gösterilecektir.

#### 4.1.2 İki-periyodik dalga çözümlerin bulunması

Bu bölümde aslında bir periyodik dalga çözümlerinin iki boyutlu genelleşmiş hali olan iki periyodik dalgalar ele alınacaktır.  $N = 2$  durumu için Riemann theta fonksiyonu

$$\vartheta(\xi, \tau) = \vartheta(\xi_1, \xi_2, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{\pi i \langle \tau n, n \rangle + 2\pi i \langle \xi, n \rangle} \quad (4.18)$$

şeklinindedir. Burada  $n = (n_1, n_2)^T \in \mathbb{Z}^2$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{C}^2$ ,  $\xi_i = \alpha_i x_1 + \rho_i x_2 + \dots + \omega_i t + \varepsilon_i$ ,  $i = 1, 2$  ve  $-i\tau$  pozitif tanımlı,  $2 \times 2$  tipinde reel değerli simetrik bir matristir ve

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \tau_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{Im}(\tau_{11}) > 0, \text{Im}(\tau_{22}) > 0, \tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2 < 0 \quad (4.19)$$

şartlarını sağlamalıdır.

**Teorem 4.1.4**  $\xi_i = \alpha_i x_1 + \rho_i x_2 + \dots + \omega_i t + \varepsilon_i$ ,  $i = 1, 2$  ve  $\alpha_i, \rho_i, \dots, \omega_i, \varepsilon_i \in \mathbb{Z}^2$ ,  $i = 1, 2$  iki-periyodik çözümün faz değişkeni

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{L}(2\pi i \langle 2n - \theta_i, \alpha \rangle, \dots, 2\pi i \langle 2n - \theta_i, \omega \rangle) e^{\pi i [\langle \tau(n - \theta_i), n - \theta_i \rangle + \langle \tau n, n \rangle]} = 0 \quad (4.20)$$

sistemini sağlayan  $\vartheta(\xi_1, \xi_2, \tau)$  Riemann theta fonksiyonu ve

$\theta_i = (\theta_i^1, \theta_i^2)^T$ ,  $\theta_1 = (0, 0)^T$ ,  $\theta_2 = (1, 0)^T$ ,  $\theta_3 = (0, 1)^T$ ,  $\theta_4 = (1, 1)^T$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  theta fonksiyonunun karakteristikleri olmak üzere

$$u = u_0 + a \partial_\Lambda^n \ln \vartheta(\xi_1, \xi_2, \tau) \quad (4.21)$$

ifadesi (4.1) denkleminin iki-periyodik dalga çözümüdür (Tian ve Zhang, 2010).

**İspat:**

(4.18) theta fonksiyonunun (4.8) denklemini sağlaması için, denklemin sol tarafında (3.3) te verilen özellikler kullanılarak yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(D_{x_1}, D_{x_2}, \dots, D_{x_N}, D_t) \vartheta(\xi_1, \xi_2, \tau) \cdot \vartheta(\xi_1, \xi_2, \tau) \\ &= \sum_{m, n \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{L}(2\pi i \langle n - m, \alpha \rangle, 2\pi i \langle n - m, \rho \rangle, \dots, 2\pi i \langle n - m, \omega \rangle) \\ & \quad \times e^{2\pi i \langle \xi, m+n \rangle + \pi i (\langle \tau m, m \rangle + \langle \tau n, n \rangle)} \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitlikte  $m' = m + n$  yazıldığı taktirde

$$= \sum_{m' \in \mathbb{Z}^2} \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{L}(2\pi i \langle 2n - m', \alpha \rangle, 2\pi i \langle 2n - m', \rho \rangle, \dots, 2\pi i \langle 2n - m', \omega \rangle) \right. \\ \left. \times e^{\pi i [\langle \tau(n-m'), n-m' \rangle + \langle \tau n, n \rangle]} \right\} e^{2\pi i \langle \xi, m' \rangle}$$

$$\triangleq \sum_{m' \in \mathbb{Z}^2} \tilde{\mathcal{L}}(m'_1, m'_2) e^{2\pi i \langle \xi, m' \rangle} = \sum_{m' \in \mathbb{Z}^2} \tilde{\mathcal{L}}(m') e^{2\pi i \langle \xi, m' \rangle}$$

elde edilir.  $n' = n - \delta_{ij}$ ,  $j = 1, 2$  için

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}(m') &= \tilde{\mathcal{L}}(m'_1, m'_2) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{L}(2\pi i \langle 2n - m', \alpha \rangle, 2\pi i \langle 2n - m', \rho \rangle, \dots, \\ & \quad 2\pi i \langle 2n - m', \omega \rangle) e^{\pi i [\langle \tau(n-m'), n-m' \rangle + \langle \tau n, n \rangle]} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{L}(2\pi i \sum_{i=1}^2 [2n'_i - (m'_i - 2\delta_{ij})] \alpha_i, 2\pi i \sum_{i=1}^2 [2n'_i - (m'_i - 2\delta_{ij})] \rho_i, \dots, \\ & \quad 2\pi i \sum_{i=1}^2 [2n'_i - (m'_i - 2\delta_{ij})] \omega_i) e^{\pi i \sum_{i,k=1}^2 [(n'_i + \delta_{ij})(n'_k + \delta_{kj}) + (m'_i - n'_i - \delta_{ij})(m'_k - n'_k - \delta_{kj})] \tau_{ik}} \\ &= \begin{cases} \tilde{\mathcal{L}}(m'_1 - 2, m'_2) e^{2\pi i (m'_1 - 1) \tau_{11} + 2\pi i m'_2 \tau_{12}}, & j = 1 \\ \tilde{\mathcal{L}}(m'_1, m'_2 - 2) e^{2\pi i (m'_2 - 1) \tau_{22} + 2\pi i m'_1 \tau_{12}}, & j = 2 \end{cases} \quad m', n' \in \mathbb{Z}^2 \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada  $\delta_{ij}$  Kronecker delta olup  $\tilde{\mathcal{L}}(m')$ ,  $m' \in \mathbb{Z}^2$ ,  $\tilde{\mathcal{L}}(0, 0)$ ,  $\tilde{\mathcal{L}}(1, 0)$ ,  $\tilde{\mathcal{L}}(0, 1)$  ve  $\tilde{\mathcal{L}}(1, 1)$  fonksiyonları tarafından belirlenir. Yani eğer  $\tilde{\mathcal{L}}(0, 0) = \tilde{\mathcal{L}}(1, 0) = \tilde{\mathcal{L}}(0, 1) = \tilde{\mathcal{L}}(1, 1) = 0$  ise  $\tilde{\mathcal{L}}(m') = 0$  olup theta fonksiyonu (4.1) denkleminin tam çözümü olur.  $\theta_i = (\theta_i^1, \theta_i^2)^T$ ,  $\theta_1 = (0, 0)^T$ ,  $\theta_2 = (1, 0)^T$ ,  $\theta_3 = (0, 1)^T$ ,  $\theta_4 = (1, 1)^T$ ,

$i = 1, 2, 3, 4$  karakteristikleri için

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}}(0, 0) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{L}(2\pi i < 2n - \theta_1, \alpha >, \dots, 2\pi i < 2n - \theta_1, \omega >) \\
&\quad \times e^{\pi i [< \tau(n-\theta_1), n-\theta_1 > + < \tau n, n >]} = 0 \\
\tilde{\mathcal{L}}(1, 0) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{L}(2\pi i < 2n - \theta_2, \alpha >, \dots, 2\pi i < 2n - \theta_2, \omega >) \\
&\quad \times e^{\pi i [< \tau(n-\theta_2), n-\theta_2 > + < \tau n, n >]} = 0 \\
\tilde{\mathcal{L}}(0, 1) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{L}(2\pi i < 2n - \theta_3, \alpha >, \dots, 2\pi i < 2n - \theta_3, \omega >) \\
&\quad \times e^{\pi i [< \tau(n-\theta_3), n-\theta_3 > + < \tau n, n >]} = 0 \\
\tilde{\mathcal{L}}(1, 1) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{L}(2\pi i < 2n - \theta_4, \alpha >, \dots, 2\pi i < 2n - \theta_4, \omega >) \\
&\quad \times e^{\pi i [< \tau(n-\theta_4), n-\theta_4 > + < \tau n, n >]} = 0
\end{aligned} \tag{4.22}$$

sistemi elde edilir ve sistemin çözümü ile birlikte denklemin iki periyodik çözümü bulunur. Burada  $\omega_1, \omega_2, u_0$  ve  $c$ ; (4.22) sisteminin çözümünden elde edilirken, diğer  $\alpha_1, \alpha_2, \rho_1, \rho_2, \dots, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$  gibi  $2N + 3$  tane parametre de keyfi olarak seçilir.

### İki-periyodik dalgaların asimptotik durumu ve grafik özellikleri

Bir-periyodik dalgaların iki boyutlu genelleşmiş hali olarak düşünülebilir.

1. İki-periyodik dalgaları  $\xi_1$  ve  $\xi_2$  gibi iki adet faz değişkenine sahiptir.
2. İki-periyodik dalgalar  $2N$  tane temel periyot içerir.
3. Dalganın faz değişkeni  $\xi_i = \alpha_i x + \rho_i y + \dots + \omega_i t + \delta_0$  olmak üzere eğer parametreler arasında

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \dots = \lambda \quad (\text{sabit sayı}) \tag{4.23}$$

şeklinde bir ilişki varsa, iki-periyodik dalga aslında bir boyutlu olur ve bir-periyodik dalga gibi davranır. Bu sebeple yukarıdaki şartı sağlayan dalgalar **dejenere** iki-periyodik dalgalar olarak adlandırılır.

4. Eğer bu parametreler yukarıdaki ilişkiyi sağlamaz ise yani

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \neq \frac{\rho_2}{\rho_1} \neq \dots \tag{4.24}$$

ise  $\lambda_1, \lambda_2$  sabitler olmak üzere  $\xi_1 = \lambda_1$  ve  $\xi_2 = \lambda_2$  olup herhangi bir  $t$  zamanında tek bir noktada kesişirler. Bu nokta ise  $t$  zamanı değiştikçe uzay düzleminde sabit bir hızla hareket eder. Eğer faz değişkeni  $\xi_i = \alpha_i x + \rho_i y + k_i z + \omega_i t$  ise parametreler arası ilişki

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \neq \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{k_2}{k_1}, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \neq \frac{k_2}{k_1}, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \neq \frac{\rho_2}{\rho_1} \neq \frac{k_2}{k_1} \quad (4.25)$$

olacak şekilde aranmalıdır (Tian ve Ma, 2014).

İki fazlı her çözüm aslında iki boyutludur fakat  $x$  ya da  $y$  eksenleri doğrultularında periyodik olmak zorunda değildir. Eğer çözüm hem  $x$  hem  $y$  doğrultusunda periyodikse **simetrik çözüm** olarak adlandırılır (Dubrovin, 1997). 1989 yılında yayınlanmış olan (Hammack vd., 1989) makalesinde

$$\tau_{11} = \tau_{22}, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -\frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (4.26)$$

seçilmesi durumunda bulunan çözümün simetrik olacağı belirtilmiştir. (4.25) teki gibi eşit seçilmediği durumlarda **asimetrik çözüm** olarak adlandırılacaktır.

**Teorem 4.1.5** (4.1) denklemini, (4.5) te verilen iki-soliton çözüm için,  $\eta = \mu_j x_1 + \nu_j x_2 + \dots + \Omega_j x_N + \gamma_j(\mu, \nu, \dots, \Omega)t + \delta_j$  ( $j = 1, 2$ ) şeklinde bir faz değişkenine sahipken, (4.21) de verilen iki-periyodik çözüm ise  $\xi_j = \alpha_j x_1 + \rho_j x_2 + \dots + \omega_j t + \varepsilon_j$  şeklinde bir faz değişkenine sahip olsun. Buna göre parametreler arasındaki ilişki

$$\alpha_j = \frac{\mu_j}{2\pi i}, \quad \rho_j = \frac{\nu_j}{2\pi i}, \dots, \quad \varepsilon_j = \frac{\gamma_j - \pi i \tau_{jj}}{2\pi i}, \quad \tau_{12} = \frac{A_{12}}{2\pi i} \quad (4.27)$$

şeklinde seçildiği takdirde,  $\lambda_1 = e^{\pi i \tau_{11}}, \lambda_2 = e^{\pi i \tau_{22}}$  için  $\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow 0$  iken

$$u_0 \rightarrow 0, \quad c \rightarrow 0, \quad \xi_j \rightarrow \frac{\eta_j - \pi i \tau_{jj}}{2\pi i} \quad (4.28)$$

gibi bir asimptotik ilişki bulunur ve iki-periyodik çözüm

$$\vartheta(\xi_1, \xi_2, \tau) \rightarrow 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}}$$

şeklinde iki-soliton çözümünü verir.



**İspat:**

$N = 2$  için Riemann theta fonksiyonu

$$\begin{aligned}\vartheta(\xi_1, \xi_2, \tau) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{\pi i \langle \tau n, n \rangle + 2\pi i \langle \xi, n \rangle} \\ &= \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i (\xi_1 n_1 + \xi_2 n_2) + \pi i [n_1 (\tau_{11} n_1 + \tau_{12} n_2) + n_2 (\tau_{12} n_1 + \tau_{22} n_2)]} \\ &= 1 + e^{2\pi i \xi_1 + \pi i \tau_{11}} + e^{-2\pi i \xi_1 + \pi i \tau_{11}} + \dots\end{aligned}$$

şeklinde seriye açılmış halde yazılsın. Yukarıdaki ifadede  $\tilde{\xi}_j \rightarrow 2\pi i \xi_j + \pi i \tau_{jj}$  alınıp  $\lambda_1 = e^{\pi i \tau_{11}}$ ,  $\lambda_2 = e^{\pi i \tau_{22}}$  yazılırsa

$$\vartheta(\xi_1, \xi_2, \tau) = 1 + e^{\tilde{\xi}_1} + e^{\tilde{\xi}_2} + e^{\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 + 2\pi i \tau_{12}} + \lambda_1^2 e^{-\tilde{\xi}_1} + \lambda_2^2 e^{-\tilde{\xi}_2} + \dots$$

olup,  $\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow 0$  iken

$$\vartheta(\xi_1, \xi_2, \tau) = 1 + e^{\tilde{\xi}_1} + e^{\tilde{\xi}_2} + e^{\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 + 2\pi i \tau_{12}}$$

ifadesi bulunur. (4.27) deki ifadeler yerine yazılırsa, iki periyodik çözümün

$$\vartheta(\xi_1, \xi_2, \tau) \rightarrow 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}}$$

şeklinde iki soliton çözüme gittiği görülür.

Çözümü bulunacak olan her bir denklem için (4.20) sisteminin çözümü ile bulunacak olan  $\omega_j$  lerin (4.27) şartları altında dağılma bağıntısını vereceğinin gösterilmesi ile birlikte ispat tamamlanmış olur.

### 4.1.3 Üç-periyodik dalga çözümlerin bulunması

$N = 3$  için Riemann theta fonksiyonu

$$\vartheta(\xi, \tau) = \vartheta(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} e^{\pi i \langle \tau n, n \rangle + 2\pi i \langle \xi, n \rangle} \quad (4.29)$$

şeklindedir. Burada  $n = (n_1, n_2, n_3)^T \in \mathbb{Z}^3$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{C}^3$  için  $\xi_i = \alpha_i x + \rho_i y + \dots + \omega_i t + \varepsilon_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  olup  $-i\tau$ ,  $3 \times 3$  tipinde pozitif ve reel değerli simetrik bir matristir yani  $1 \leq k \leq 3$  için simetrik matrisin tüm  $k \times k$  tipindeki üst sol matrislerinin determinantları pozitif olmalıdır. Bir başka deyişle

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33} \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

için periyot matrisleri

$$\text{Im } \tau_{11} > 0, \quad \tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2 < 0 \text{ ve } \det(\tau) < 0.$$

şartlarını sağlayacak şekilde seçilmelidir. (Lu ve Zhang, 2010).

**Teorem 4.1.6**  $\xi_i = \alpha_i x + \rho_i y + \dots + \omega_i t + \delta_i$  ve  $\alpha_i, \rho_i, \dots, \omega_i, \delta_i \in \mathbb{Z}^3$ ,  $i = 1, 2, 3$  faz değişkeni

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^3} H(2\pi i \langle 2n - \theta_j, \alpha \rangle, \dots, 2\pi i \langle 2n - \theta_j, \omega \rangle) e^{\pi i [\langle \tau(n - \theta_j), n - \theta_j \rangle + \langle \tau n, n \rangle]} = 0 \quad (4.31)$$

sistemini sağlayan  $\vartheta(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau)$  Riemann theta fonksiyonu ve theta fonksiyonunun karakteristikleri  $\theta_j = (\theta_j^1, \theta_j^2, \theta_j^3)^T$ ,  $\theta_1 = (0, 0, 0)^T$ ,  $\theta_2 = (0, 0, 1)^T$ ,  $\theta_3 = (0, 1, 0)^T$ ,  $\theta_4 = (0, 1, 1)^T$ ,  $\theta_5 = (1, 0, 0)^T$ ,  $\theta_6 = (1, 0, 1)^T$ ,  $\theta_7 = (1, 1, 0)^T$ ,  $\theta_8 = (1, 1, 1)^T$   $j = 1, \dots, 8$  olmak üzere

$$u = u_0 + a \partial_\Lambda^n \ln \vartheta(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau) \quad (4.32)$$

ifadesi (4.1) denkleminin üç-periyodik dalga çözümüdür.

**İspat:**

(4.29) ifadesi (4.8) denklemini sağlaması için, denklemin sol tarafında, (3.3) te verilen özellikler kullanılarak yerine yazılırsa

$$H(D_x, D_y, D_z, D_t) \vartheta(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau) \cdot \vartheta(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}^3} H(2\pi i \langle n - m, \alpha \rangle, \dots, 2\pi i \langle n - m, \omega \rangle) \\
&\quad \times e^{2\pi i \langle \xi, m+n \rangle + \pi i (\langle \tau m, m \rangle + \langle \tau n, n \rangle)}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

elde edilir.  $m' = m + n$  için

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m' \in \mathbb{Z}^3} \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} H(2\pi i \langle 2n - m', \alpha \rangle, \dots, 2\pi i \langle 2n - m', \omega \rangle) \right. \\
&\quad \left. \times e^{\pi i (\langle \tau(n-m'), n-m' \rangle + \langle \tau n, n \rangle)} \right\} e^{2\pi i \langle \xi, m' \rangle} \\
&= \sum_{m' \in \mathbb{Z}^3} \hat{H}(m'_1, m'_2, m'_3) e^{2\pi i \langle \xi, m' \rangle} \\
&= \sum_{m' \in \mathbb{Z}^3} \hat{H}(m') e^{2\pi i \langle \xi, m' \rangle}, \quad m' = m + n
\end{aligned}$$

yazılabilir.  $n' = n - \delta_{ij}$ ,  $j = 1, 2, 3$  dönüşümü yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\hat{H}(m') = \hat{H}(m'_1, m'_2, m'_3) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} H(2\pi i \langle 2n - m', \alpha \rangle, \dots, 2\pi i \langle 2n - m', \omega \rangle) e^{\pi i (\langle \tau(n-m'), n-m' \rangle + \langle \tau n, n \rangle)} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} H(2\pi i \sum_{i=1}^3 [2n'_i - (m'_i - 2\delta_{ij})] \alpha_i, \dots, 2\pi i \sum_{i=1}^3 [2n'_i - (m'_i - 2\delta_{ij})] \omega_i) \\
&\quad \times e^{\pi i \sum_{i,k=1}^3 [(n'_i + \delta_{ij})(n'_k + \delta_{kj}) + (m'_i - n'_i - \delta_{ij})(m'_k - n'_k - \delta_{kj})] \tau_{ik}} \\
&= \begin{cases} \hat{H}(m'_1 - 2, m'_2, m'_3) e^{2\pi i (m'_1 - 1) \tau_{11} + 2\pi i (m'_2 \tau_{12} + m'_3 \tau_{13})} & , j = 1 \\ \hat{H}(m'_1, m'_2 - 2, m'_3) e^{2\pi i (m'_2 - 1) \tau_{22} + 2\pi i (m'_1 \tau_{12} + m'_3 \tau_{13})} & , j = 2 \\ \hat{H}(m'_1, m'_2, m'_3 - 2) e^{2\pi i (m'_3 - 1) \tau_{33} + 2\pi i (m'_1 \tau_{11} + m'_2 \tau_{12})} & , j = 3 \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

bulunur.  $m'_1 = 0, 1$ ,  $m'_2 = 0, 1$ ,  $m'_3 = 0, 1$  ifadelerinin tüm kombinasyonları için

$$\hat{H}(m'_1, m'_2, m'_3) = 0$$

olmalıdır. Buna göre  $\theta_j = (\theta_j^1, \theta_j^2, \theta_j^3)^T$  olmak üzere  $\theta_1 = (0, 0, 0)^T$ ,  $\theta_2 = (0, 0, 1)^T$ ,  $\theta_3 = (0, 1, 0)^T$ ,  $\theta_4 = (0, 1, 1)^T$ ,  $\theta_5 = (1, 0, 0)^T$ ,  $\theta_6 = (1, 0, 1)^T$ ,  $\theta_7 = (1, 1, 0)^T$ ,

$\theta_8 = (1, 1, 1)^T$ ,  $j = 1, \dots, 8$  alındığında

$$\hat{H}(m') = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} H(2\pi i \langle 2n - \theta_j, \alpha \rangle, \dots, 2\pi i \langle 2n - \theta_j, \omega \rangle) e^{\pi i (\langle \tau(n - \theta_j), n - \theta_j \rangle + \langle \tau n, n \rangle)} \quad (4.35)$$

elde edilir ve bu sistemin çözümü ile denklemin üç-periyodik dalga çözümü elde edilir.

**Teorem 4.1.7** (4.1) denklemi, (4.6) da verilen üç-soliton çözüm için  $\eta = \mu_j x_1 + \nu_j x_2 + \dots + \Omega_j x_N + \gamma_j(\mu, \nu, \dots, \Omega)t + \delta_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  şeklinde bir faz değişkenine ve (4.32) de verilen üç-periyodik çözüm için  $\xi_j = \alpha_j x_1 + \rho_j x_2 + \dots + \omega_j t + \varepsilon_j$  şeklinde bir faz değişkenine sahip olsun. Buna göre  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $i < j$  için

$$\alpha_j = \frac{\mu_j}{2\pi i}, \quad \rho_j = \frac{\nu_j}{2\pi i}, \quad \dots, \quad \varepsilon_j = \frac{\gamma_j - \pi i \tau_{jj}}{2\pi i}, \quad \tau_{ij} = \frac{A_{ij}}{2\pi i}, \quad (4.36)$$

şeklinde seçildiği takdirde  $\lambda_1 = e^{\pi i \tau_{11}}$ ,  $\lambda_2 = e^{\pi i \tau_{22}}$ ,  $\lambda_3 = e^{\pi i \tau_{33}}$  olmak üzere  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rightarrow 0$  iken

$$u_0 \rightarrow 0, \quad c \rightarrow 0, \quad \xi_j \rightarrow \frac{\eta_j - \pi i \tau_{jj}}{2\pi i}$$

gibi bir asimptotik ilişki bulunup

$$\begin{aligned} \vartheta(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau) &\rightarrow 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_3} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}} \\ &+ e^{\eta_1 + \eta_3 + A_{13}} + e^{\eta_2 + \eta_3 + A_{23}} + e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + A_{12} + A_{13} + A_{23}} \end{aligned} \quad (4.37)$$

şeklinde üç-soliton çözüm elde edilir (Lu ve Zhang, 2010).

### İspat:

$N = 3$  için Riemann theta fonksiyonu

$$\begin{aligned} \vartheta(\xi_1, \xi_2, \tau) &= \sum_{n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}^3} e^{\pi i \langle \tau n, n \rangle + 2\pi i \langle \xi, n \rangle} \\ &= 1 + (e^{2\pi i \xi_1} + e^{-2\pi i \xi_1}) e^{\pi i \tau_{11}} + (e^{2\pi i \xi_2} + e^{-2\pi i \xi_2}) e^{\pi i \tau_{22}} + (e^{2\pi i \xi_3} + e^{-2\pi i \xi_3}) e^{\pi i \tau_{33}} \\ &+ (e^{2\pi i (\xi_1 + \xi_2)} + e^{-2\pi i (\xi_1 + \xi_2)}) e^{\pi i (\tau_{11} + 2\tau_{12} + \tau_{22})} + (e^{2\pi i (\xi_1 + \xi_3)} + e^{-2\pi i (\xi_1 + \xi_3)}) e^{\pi i (\tau_{11} + 2\tau_{13} + \tau_{33})} + \dots \end{aligned}$$

şeklinde seriye açılsın. Yukarıdaki ifadede  $\tilde{\xi}_j \rightarrow 2\pi i \xi_j + \pi i \tau_{jj}$  alınıp  $\lambda_1 = e^{\pi i \tau_{11}}$ ,  $\lambda_2 = e^{\pi i \tau_{22}}$ ,  $\lambda_3 = e^{\pi i \tau_{33}}$  yazılırsa

$$\begin{aligned} \vartheta(\xi_1, \xi_2, \tau) &= 1 + e^{\tilde{\xi}_1} + e^{\tilde{\xi}_2} + e^{\tilde{\xi}_3} + e^{\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 + 2\pi i \tau_{12}} \\ &+ e^{\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_3 + 2\pi i \tau_{13}} + e^{\tilde{\xi}_2 + \tilde{\xi}_3 + 2\pi i \tau_{23}} + e^{\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 + \tilde{\xi}_3 + 2\pi i \tau_{12} + 2\pi i \tau_{13} + 2\pi i \tau_{23}} \\ &+ \lambda_1^2 e^{-\tilde{\xi}_1} + \lambda_2^2 e^{-\tilde{\xi}_2} + \lambda_3^2 e^{-\tilde{\xi}_3} + \lambda_1^2 \lambda_2^2 e^{-\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_2 + 2\pi i \tau_{12}} + \dots \end{aligned}$$

olup,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rightarrow 0$  iken

$$\begin{aligned} \vartheta(\xi_1, \xi_2, \tau) &\rightarrow 1 + e^{\tilde{\xi}_1} + e^{\tilde{\xi}_2} + e^{\tilde{\xi}_3} + e^{\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 + 2\pi i \tau_{12}} \\ &+ e^{\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_3 + 2\pi i \tau_{13}} + e^{\tilde{\xi}_2 + \tilde{\xi}_3 + 2\pi i \tau_{23}} + e^{\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 + \tilde{\xi}_3 + 2\pi i \tau_{12} + 2\pi i \tau_{13} + 2\pi i \tau_{23}} \end{aligned}$$

ifadesi bulunur. (4.36) daki ifadeler yerine yazılırsa, üç-periyodik çözümün

$$\vartheta(\xi_1, \xi_2, \tau) \rightarrow 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}}$$

şeklinde üç-soliton çözüme gittiği görülür.

## 5. TEKLİ BİLİNEER FORMLAR İÇİN HIROTA RIEMANN METODU

### 5.1 (3+1) Boyutlu Genelleştirilmiş BKP Denklemi- nin Kuasi Periyodik Çözümü

KdV, Boussinesq ve KP denklemi gibi soliton denklemlerinin çoklu soliton çözümleri mevcuttur. Bunlardan biri de (3+1) boyutlu genelleştirilmiş BKP denklemi olan

$$u_{ty} - u_{xxxxy} - 3(u_x u_y)_x + 3u_{xz} = 0 \quad (5.1)$$

dir (Ma ve Zhang, 2012). Bu bölümle bir, iki ve üç-periyodik dalga çözümleri elde edilecek ve bazı şartlar altında bulunan çözümlerin bilinen soliton çözümlere gittiği gösterilecektir.

Bilineer formun yazılabilmesi için

$$u = 2(\ln f)_x \quad (5.2)$$

değişken dönüşümü kullanılır. (3.33) ve (3.34) te verilen özellikler doğrultusunda bu dönüşüm, (5.1) de yerine yazılırsa denklemin

$$(D_y D_t - D_x^3 D_y + 3D_x D_z) f \cdot f = 0 \quad (5.3)$$

bilineer formu elde edilir. Faz değişkeni  $\eta = \mu x + \nu y + \kappa z + \varpi t + \gamma$  olmak üzere

$$u_1 = 2\partial_x(\ln(1 + e^\eta)) \quad (5.4)$$

şeklinde bir-soliton çözüme sahip olup,  $\mu, \nu, \kappa$  ve  $\gamma$  sabitleri için yayılma bağıntısı

$$\varpi = -3\frac{\mu\kappa}{\rho} + \mu^3 \quad (5.5)$$

şeklindedir. İki-soliton çözüm ise  $\eta_j = \mu_j x + \nu_j y + \kappa_j z + \varpi_j t + \gamma_j$ ,  $j = 1, 2$  için

$$e^{A_{12}} = -\frac{(\nu_1 - \nu_2)(\varpi_1 - \varpi_2) - (\mu_1 - \mu_2)^3(\nu_1 - \nu_2) + 3(\mu_1 - \mu_2)(\kappa_1 - \kappa_2)}{(\nu_1 + \nu_2)(\varpi_1 + \varpi_2) - (\mu_1 + \mu_2)^3(\nu_1 + \nu_2) + 3(\mu_1 + \mu_2)(\kappa_1 + \kappa_2)} \quad (5.6)$$

olmak üzere

$$u_2 = 2\partial_x(\ln(1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}})) \quad (5.7)$$

şeklindedir ve  $\mu_j, \nu_j, \kappa_j, \gamma_j$  sabitleri için yayılma bağıntısı

$$\varpi_1 = -3\frac{\mu_1 \kappa_1}{\rho_1} + \mu_1^3, \quad \varpi_2 = -3\frac{\mu_2 \kappa_2}{\rho_2} + \mu_2^3 \quad (5.8)$$

dir. Son olarak üç-soliton çözüm  $\eta_j = \mu_j x + \nu_j y + \kappa_j z + \varpi_j t + \gamma_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $i < j$  için

$$f = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_3} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}} + e^{\eta_1 + \eta_3 + A_{13}} + e^{\eta_2 + \eta_3 + A_{23}} + e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + A_{12} + A_{13} + A_{23}} \quad (5.9)$$

ve

$$e^{A_{ij}} = -\frac{(\nu_i - \nu_j)(\varpi_i - \varpi_j) - (\mu_i - \mu_j)^3(\nu_i - \nu_j) + 3(\mu_i - \mu_j)(\kappa_i - \kappa_j)}{(\nu_i + \nu_j)(\varpi_i + \varpi_j) - (\mu_i + \mu_j)^3(\nu_i + \nu_j) + 3(\mu_i + \mu_j)(\kappa_i + \kappa_j)} \quad (5.10)$$

olmak üzere

$$u_3 = 2\partial_x(\ln(f)) \quad (5.11)$$

şeklinde olup, yayılma bağıntısı

$$\begin{aligned} \varpi_1 &= -3\frac{\mu_1 \kappa_1}{\rho_1} + \mu_1^3, \quad \varpi_2 = -3\frac{\mu_2 \kappa_2}{\rho_2} + \mu_2^3 \\ \varpi_3 &= -3\frac{\mu_3 \kappa_3}{\rho_3} + \mu_3^3 \end{aligned} \quad (5.12)$$

dir. Hirota-Riemann yönteminin kullanılabilmesi için (5.3) te verilen bilineer denklemin kısmen genelleştirilmiş formu ele alınmalıdır. Buna göre  $|\xi| \rightarrow 0$  iken  $u_0 y$ , (5.1) denklemini sağlayan özel bir çözüm ve faz değişkeni  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)^T$ ,  $\xi_i = \alpha_i x + \rho_i y + k_i z + \omega_i t + \delta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  olmak üzere, (5.2) dönüşümünün genelleştirilmiş formu olan

$$u = u_0 y + 2(\ln \vartheta(\xi, \tau))_x \quad (5.13)$$

dönüşümü kullanılır. (5.13) dönüşümü (5.1) denkleminde yerine yazılıp  $x$  değişkenine

göre bir kez integre edilirse,  $c = c(y, z, t)$  integrasyon sabiti olmak üzere

$$H(D_x, D_y, D_z, D_t, ) = (D_y D_t + 3D_x D_z - D_x^3 D_y - 3u_0 D_x^2 + c)\vartheta(\xi, \tau) \cdot \vartheta(\xi, \tau) = 0 \quad (5.14)$$

şeklinde (5.1) denkleminin bilineer formu elde edilir. Burada verilen  $\vartheta(\xi, \tau)$ ,  $n = (n_1 \dots n_N)^T \in \mathbb{Z}^N$  tamsayı değerli bir vektör ve  $\xi = (\xi_1 \dots \xi_N)^T \in \mathbb{C}^N$  kompleks değerli faz değişkenleri olmak üzere (3.35) te verilen Riemann theta fonksiyonunun bir boyutlu hali olan

$$\vartheta(\xi, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} e^{\pi i \langle n, \tau \rangle + 2\pi i \langle \xi, n \rangle} \quad (5.15)$$

dir.

### 5.1.1 Bir-periyodik dalga çözümü

Teorem 4.1.2 deki ifadeler (5.14) denkleminde uygulandığında,  $\xi = \alpha x + \rho y + kz + \omega t + \delta$  faz değişkeni olmak üzere  $\alpha, \rho, k$  ve  $\omega$  parametreleri, Teorem 4.1.2 de verilen (4.9) sistemini yani

$$\begin{aligned} \tilde{H}(0) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-16\pi^2 n^2 \rho \omega - 48\pi^2 n^2 \alpha k - 256\pi^4 n^4 \rho \alpha^3 \\ &\quad + 48u_0 \pi^2 n^2 \alpha^2 + c) e^{2\pi i n^2 \tau} = 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}(1) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-4\pi^2 (2n-1)^2 \rho \omega - 12\pi^2 (2n-1)^2 \alpha k - 16\pi^4 (2n-1)^4 \rho \alpha^3 \\ &\quad + 12\pi^2 u_0 (2n-1)^2 \alpha^2 + c) e^{(2n^2 - 2n + 1)\pi i \tau} = 0 \end{aligned}$$

ifadesini sağlamalıdır. (5.16) sistemi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (5.17)$$



şeklinde  $\omega$  ve  $c$  ye göre çözülecek biçimde düzenlenmelidir. Buna göre bu katsayılar  $\lambda = e^{\pi i \tau}$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -16\pi^2 n^2 \rho \lambda^{2n^2} \\
a_{12} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^{2n^2} \\
a_{21} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -4\pi^2 (2n-1)^2 \rho \lambda^{2n^2-2n+1} \\
a_{22} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^{2n^2-2n+1} \\
b_1 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (48\pi^2 n^2 \alpha k + 256\pi^4 n^4 \rho \alpha^3 - 48\pi^2 n^2 \alpha^2 u_0) \lambda^{2n^2} \\
b_2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (12\pi^2 (2n-1)^2 \alpha k + 16\pi^4 (2n-1)^4 \rho \alpha^3 \\
&\quad - 12\pi^2 (2n-1)^2 \alpha^2 u_0) \lambda^{2n^2-2n+1}
\end{aligned} \tag{5.18}$$

olacak şekilde yazılabilir ve küçük parametrelerin açılım yöntemi ile yukarıdaki sistem çözülebilir. Bunun için katsayılar matrisindeki tüm terimler  $\omega$ ,  $c$ ,  $b_1$  ve  $b_2$  de dahil olmak üzere her birisi  $\lambda$  parametresine göre seriye açılıp, (5.17) sisteminde yerine yazılır. Ardından aynı dereceli  $\lambda$  terimlerinin katsayılarının birbirlerine eşitlenmesi ile

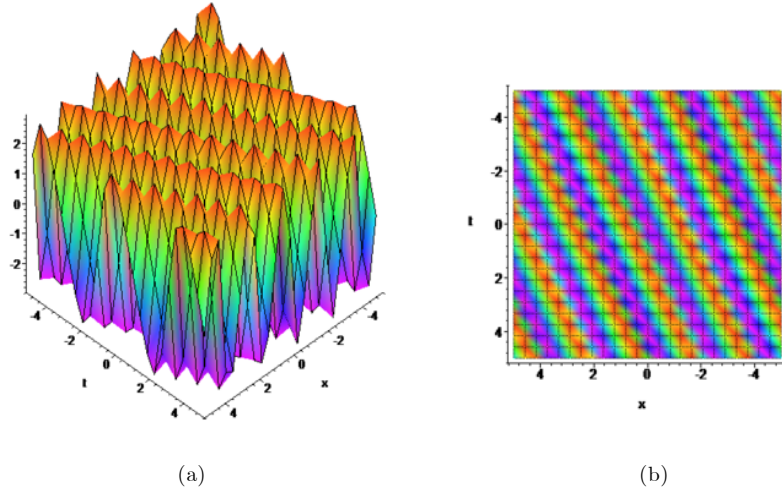
$$\omega = \left(-3\frac{\alpha k}{\rho} - 4\pi^2 \alpha^3 + 3u_0 \frac{\alpha^2}{\rho}\right) + (96\pi^2 \alpha^3) \lambda^2 + (288\pi^2 \alpha^3) \lambda^4 + o(\lambda^4) \tag{5.19}$$

$$c = (384\pi^4 \rho \alpha^3) \lambda^2 + (2304\pi^4 \rho \alpha^3) \lambda^4 + o(\lambda^4) .$$

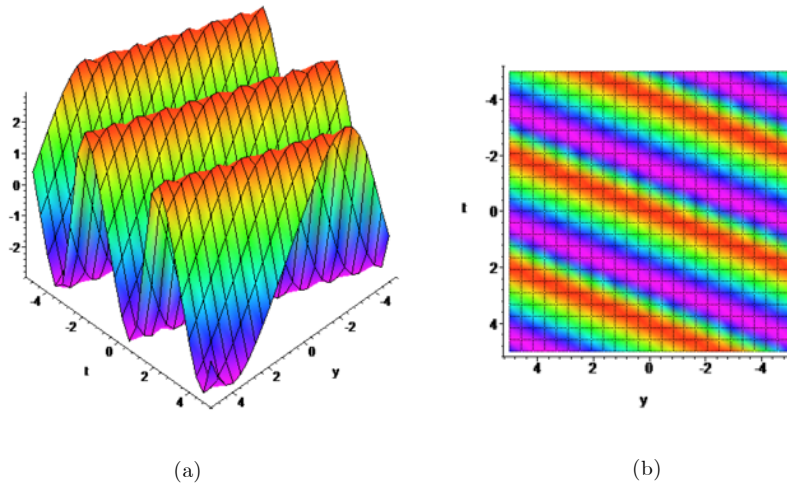
elde edilir. Buna göre

$$u = u_0 y + 2 \left( \ln \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau + 2\pi i n \xi} \right) \right)_x \tag{5.20}$$

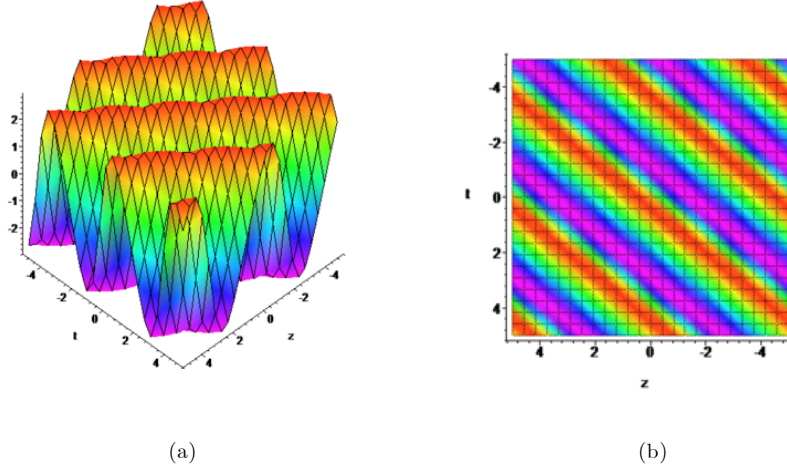
olmak üzere (5.19) da bulunan  $\omega$  değeri yerine yazılıp diğer  $\alpha, \rho, k, \delta, \tau$  ve  $u_0$  parametrelerinin de keyfi seçilmesiyle birlikte aranan bir-periyodik çözüm elde edilir. Şekil 5.1, Şekil 5.2, Şekil 5.3 de,  $\alpha = 0.5$ ,  $\rho = 0.1$ ,  $k = 0.2$ ,  $\tau = 0.5i$  ve  $u_0 = \delta = 0$  keyfi seçimleri ile (3+1) boyutlu BKP denkleminin bir-periyodik çözümünün grafikleri farklı açılardan gösterilmiştir. Şekillerden de görüleceği üzere çakışan bir-solitary dalgaların paralel olarak üst üste binmesiyle oluşan bir-periyodik dalgalar tek bir dalga şekline sahiptir.



Şekil 5.1 : (a)  $y=z=1$  seçimi ile bir-periyodik dalganın  $x-t$  düzleminden perspektif görünümü. (b) Üstten görünümü.



Şekil 5.2 : (a)  $x=z=1$  seçimi ile bir-periyodik dalganın  $y-t$  düzleminden perspektif görünümü. (b) Üstten görünümü.



Şekil 5.3 : (a)  $x=y=1$  seçimi ile bir-periyodik dalganın  $z-t$  düzleminde perspektif görünümü. (b) Üstten görünümü

### Asimptotik Durum

Teorem 4.1.3 bazı şartlar altında bulunan bir-periyodik çözümün bir-soliton çözümü vereceğini ifade etmişti. (5.20) de bulunan bir-periyodik çözüm için faz değişkeni  $\xi = \alpha x + \rho y + kz + \omega t + \delta$  ve (5.4) te verilen soliton çözümün faz değişkeni  $\eta = \mu x + \nu y + \kappa z + \varpi t + \gamma$  olmak üzere  $\lambda \rightarrow 0$  seçtiğimiz taktirde (5.19) daki ifadelerin

$$\begin{aligned} c &\rightarrow 0 \\ \omega &= \left(-3\frac{\alpha k}{\rho} - 4\pi^2\alpha^3 + 3u_0\frac{\alpha^2}{\rho}\right) \end{aligned} \quad (5.21)$$

olacağı görülür. Teorem 4.1.3 teki ifadeler

$$u_0 = 0, \quad \alpha = \frac{\mu}{2\pi i}, \quad \rho = \frac{\nu}{2\pi i}, \quad k = \frac{\kappa}{2\pi i}, \quad \omega = \frac{\varpi}{2\pi i}, \quad \delta = \frac{\gamma - \pi i \tau}{2\pi i}$$

(5.21) de yerine yazılırsa soliton çözüm için (5.5) te verilen

$$\varpi = 2\pi i \omega = -3\frac{\mu^2}{\kappa} + \frac{\mu^3 \nu}{\kappa}$$

yayıma bağıntısı elde edilir. Bulunan bu yayılma bağıntısı ve Teorem 4.1.3 ün ispatıyla birlikte (3+1) boyutlu genelleştirilmiş BKP denklemi için bulunan bir-periyodik çözüm,

küçük bir genlik sınırı  $\lambda \rightarrow 0$  altında, bir-soliton çözüm elde edilir.

### 5.1.2 İki-periyodik dalga çözümü

İki-periyodik çözümün bulunması ile ilgili Teorem 4.1.4 te verilen sistem ele alındığında  $\xi_i = \alpha_i x + \rho_i y + k_i z + \omega_i t + \delta_i$   $i = 1, 2$  faz değişkeni ve  $j = 1, 2, 3, 4$  olmak üzere  $\alpha_i, \rho_i, k_i$  and  $\omega_i$  parametreleri

$$\begin{aligned} & \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} [-4\pi^2 \langle 2n - \theta_j, \rho \rangle \langle 2n - \theta_j, \omega \rangle - 12\pi^2 \langle 2n - \theta_j, \alpha \rangle \langle 2n - \theta_j, k \rangle \\ & - 16\pi^4 \langle 2n - \theta_j, \alpha \rangle^3 \langle 2n - \theta_j, \rho \rangle + 12\pi^2 u_0 \langle 2n - \theta_j, \alpha \rangle^2 \\ & + c] \times e^{\pi i [\langle \tau(n-\theta_j), n-\theta_j \rangle + \langle \tau n, n \rangle]} = 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

sistemini sağlamalıdır. Buna göre yukarıdaki ifadeler  $\omega_1, \omega_2, u_0$  ve  $c$  ye göre düzenirse  $X = (a_{ij})_{4 \times 4}$ ,  $(4 \times 4)$  tipinde katsayılar matrisi olmak üzere

$$X \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ u_0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

şeklinde yazılabilir. Yine seri açılımından faydalanabilmek için

$$\lambda_1 = e^{\pi i \tau_{11}}, \quad \lambda_2 = e^{\pi i \tau_{22}}, \quad \lambda_3 = e^{2\pi i \tau_{12}}$$

olmak üzere matristeki terimler

$$\begin{aligned} \varepsilon_j &= \lambda_1^{n_1^2+(n_1-\theta_j^1)^2} \lambda_2^{n_2^2+(n_2-\theta_j^2)^2} \lambda_3^{n_1 n_2+(n_1-\theta_j^1)(n_2-\theta_j^2)} \\ a_{j4} &= \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^2} \varepsilon_j \\ a_{j3} &= 12\pi^2 \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} \langle 2n - \theta_j, \alpha \rangle^2 \varepsilon_j \\ a_{j2} &= -4\pi^2 \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} \langle 2n - \theta_j, k \rangle (2n_2 - \theta_j^2) \varepsilon_j \\ a_{j1} &= -4\pi^2 \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} \langle 2n - \theta_j, k \rangle (2n_1 - \theta_j^1) \varepsilon_j \\ b_j &= \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} 12\pi^2 \langle 2n - \theta_j, \alpha \rangle^2 + 16\pi^4 \langle 2n - \theta_j, \alpha \rangle^3 \langle 2n - \theta_j, \rho \rangle \varepsilon_j \end{aligned} \tag{5.24}$$

olacak şekilde seriye açılır. Küçük parametrelerin açılım yönteminden tüm katsayılar  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  'nin kuvvetlerine göre

$$\begin{aligned} X &= X_0 + X_1 \lambda_1 + X_2 \lambda_2 + X_{11} \lambda_1^2 + X_{22} \lambda_2^2 \\ &\quad + X_{12} \lambda_1 \lambda_2 + o(\lambda_1^k, \lambda_2^l) \quad , \quad k + l \geq 2 \end{aligned} \tag{5.25}$$

olacak biçimde düzenlenmelidir. Bunun için

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ u_0 \\ c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \omega_1^0 \\ \omega_2^0 \\ u_0^0 \\ c^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1^1 \\ \omega_2^1 \\ u_0^1 \\ c^1 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ u_0^2 \\ c^2 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \\ u_0^3 \\ c^3 \end{pmatrix} \lambda_1^2 \\ &\quad + \begin{pmatrix} \omega_1^4 \\ \omega_2^4 \\ u_0^4 \\ c^4 \end{pmatrix} \lambda_2^2 + \begin{pmatrix} \omega_1^5 \\ \omega_2^5 \\ u_0^5 \\ c^5 \end{pmatrix} \lambda_1 \lambda_2 + o(\lambda_1^k \lambda_2^l) \quad , \quad k + l \geq 2 \end{aligned} \tag{5.26}$$

olmak üzere (5.24) teki her bir terimin toplam sembolleri açık bir şekilde yazılır.

Maple 14 paket programı ile Teorem 4.1.4 te belirtilen karakteristikler yerine yazılırsa  $X_i$  katsayıları ve  $b_j$  terimi

$$\begin{aligned}
a_{j4} &= \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^2} \varepsilon_j \\
a_{14} &= 1 + 2\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2 + o(\lambda_1^k, \lambda_2^j) \\
a_{24} &= 2\lambda_1 + o(\lambda_1^k, \lambda_2^j) \\
a_{34} &= 2\lambda_2 + o(\lambda_1^k, \lambda_2^j) \\
a_{44} &= 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + o(\lambda_1^k, \lambda_2^j) \quad , \quad k + l \geq 2
\end{aligned} \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned}
a_{j3} &= 12\pi^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \langle 2n - \theta_j, \alpha \rangle^2 \varepsilon_j \\
a_{13} &= 96\pi^2 \alpha_1^2 \lambda_1^2 + 96\pi^2 \alpha_2^2 \lambda_2^2 + o(\lambda_1^k, \lambda_2^j) \\
a_{23} &= 24\pi^2 \alpha_1^2 \lambda_1 + o(\lambda_1^k, \lambda_2^j) \\
a_{33} &= 24\pi^2 \alpha_2^2 \lambda_2 + o(\lambda_1^k, \lambda_2^j) \\
a_{43} &= 24\pi^2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \lambda_1 \lambda_2 + 24\pi^2 (\alpha_1 + \alpha_2)^2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\
&+ o(\lambda_1^k, \lambda_2^j) \quad , \quad k + l \geq 2
\end{aligned} \tag{5.28}$$

$$\begin{aligned}
a_{j2} &= -4\pi^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \langle 2n - \theta_j, \rho \rangle (2n_2 - \theta_j^2) \varepsilon_j \\
a_{12} &= -32\pi^2 \rho_2 \lambda_2^2 + o(\lambda_1^k, \lambda_2^j) \\
a_{22} &= o(\lambda_1^k, \lambda_2^j) \\
a_{32} &= -8\pi^2 \rho_2 \lambda_2 + o(\lambda_1^k, \lambda_2^j) \\
a_{42} &= 8\pi^2 (\rho_1 - \rho_2) \lambda_1 \lambda_2 - 8\pi^2 (\rho_1 + \rho_2) \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\
&+ o(\lambda_1^k, \lambda_2^j) \quad , \quad k + l \geq 2
\end{aligned} \tag{5.29}$$

$$\begin{aligned}
a_{j1} &= -4\pi^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \langle 2n - \theta_j, \rho \rangle (2n_1 - \theta_j^1) \varepsilon_j \\
a_{11} &= -32\pi^2 \rho_1 \lambda_1^2 + o(\lambda_1^k, \lambda_2^j) \\
a_{21} &= -8\pi^2 \rho_1 \lambda_1 + o(\lambda_1^k, \lambda_2^j) \\
a_{31} &= o(\lambda_1^k, \lambda_2^j) \\
a_{41} &= -8\pi^2 (\rho_1 - \rho_2) \lambda_1 \lambda_2 - 8\pi^2 (\rho_1 + \rho_2) \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\
&+ o(\lambda_1^k, \lambda_2^j) \quad , \quad k + l \geq 2
\end{aligned} \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned}
b_j &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} 12\pi^2 \langle 2n - \theta_j, \alpha \rangle \langle 2n - \theta_j, k \rangle + 16\pi^4 \langle 2n - \theta_j, \alpha \rangle^3 \langle 2n - \theta_j, \rho \rangle \varepsilon_j \\
b_1 &= (96\pi^2 \alpha_1 k_1 + 512\pi^4 \alpha_1^3 \rho_1) \lambda_1^2 + (96\pi^2 \alpha_2 k_2 + 512\pi^4 \alpha_2^3 \rho_2) \lambda_2^2 + o(\lambda_1^k, \lambda_2^j) \\
b_2 &= (24\pi^2 \alpha_1 k_1 + 32\pi^4 \alpha_1^3 \rho_1) \lambda_1 + o(\lambda_1^k, \lambda_2^j) \\
b_3 &= (24\pi^2 \alpha_2 k_2 + 32\pi^4 \alpha_2^3 \rho_2) \lambda_2 + o(\lambda_1^k, \lambda_2^j) \\
b_4 &= (24\pi^2 (\alpha_1 - \alpha_2) (k_1 - k_2) + 32\pi^4 (\alpha_1 - \alpha_2)^3 (\rho_1 - \rho_2)) \lambda_1 \lambda_2 \\
&+ (24\pi^2 (\alpha_1 + \alpha_2) (k_1 + k_2) + 32\pi^4 (\alpha_1 + \alpha_2)^3 (\rho_1 + \rho_2)) \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\
&+ o(\lambda_1^k, \lambda_2^j) \quad , \quad k + l \geq 2
\end{aligned} \tag{5.31}$$

şeklinde seriye açılır. Seriyeye açılmış bu haller (5.23) sisteminde yerine yazılır,  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  nin aynı dereceli terimlerinin katsayılarının birbirine eşitlenmesi ile çözüm için gerekli olan

$$\begin{aligned}
c &= (384\pi^4 \alpha_1^3 \rho_1) \lambda_1^2 + (384\pi^4 \alpha_2^3 \rho_2) \lambda_2^2 + o(\lambda_1, \lambda_2) \\
\omega_1 &= \left(-3 \frac{\alpha_1 k_1}{\rho_1} - 4\pi^2 \alpha_1^3 + 3 \frac{\alpha_1^2}{\rho_1} u_0^0\right) + \left(3 \frac{\alpha_1^2}{\rho_1} u_0^1\right) \lambda_1 + \left(3 \frac{\alpha_1^2}{\rho_1} u_0^2\right) \lambda_2 \\
&+ o(\lambda_1, \lambda_2) \\
\omega_2 &= \left(-3 \frac{\alpha_2 k_2}{\rho_2} - 4\pi^2 \alpha_2^3 + 3 \frac{\alpha_2^2}{\rho_2} u_0^0\right) + \left(3 \frac{\alpha_2^2}{\rho_2} u_0^1\right) \lambda_1 + \left(3 \frac{\alpha_2^2}{\rho_2} u_0^2\right) \lambda_2 \\
&+ o(\lambda_1, \lambda_2)
\end{aligned} \tag{5.32}$$

ifadeleri elde edilir.

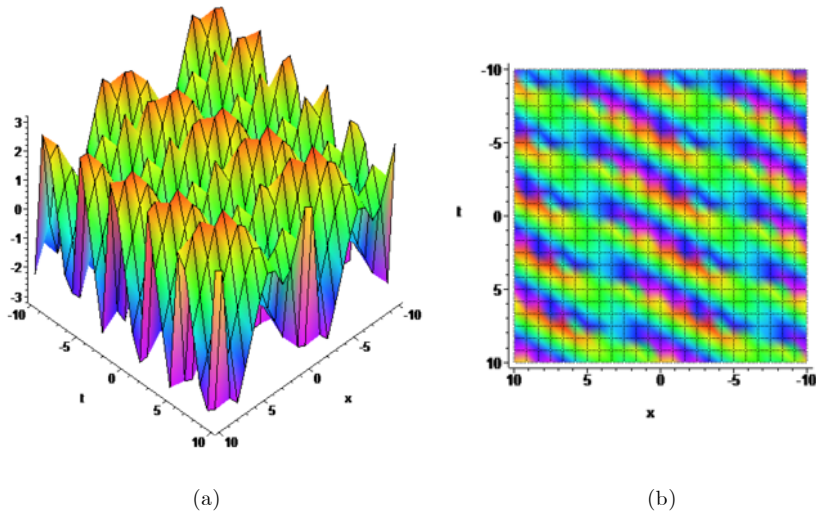
İki-periyodik çözüm için Riemann theta fonksiyonu

$$\vartheta(\xi_1, \xi_2, \tau) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \langle \tau n, n \rangle + 2\pi i \langle \xi, n \rangle}$$

olmak üzere

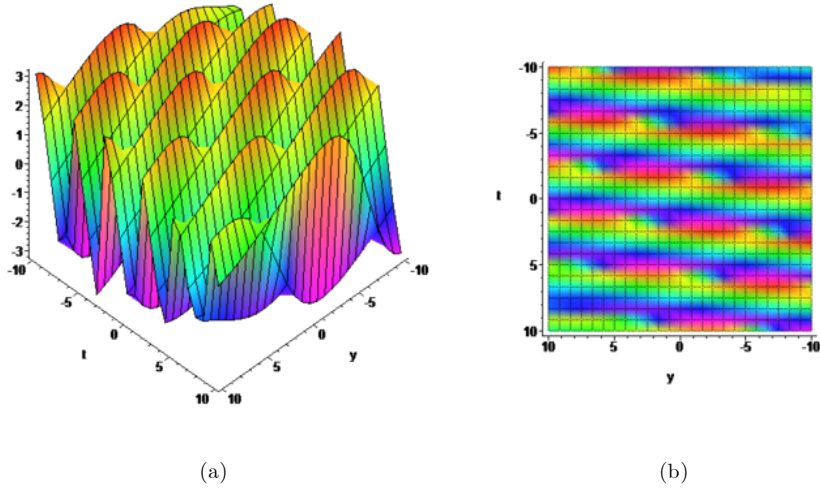
$$u = u_0 y + 2(\ln \vartheta(\xi_1, \xi_2, \tau))_x \quad (5.33)$$

şeklindedir. Burada faz değişkenindeki  $\omega_1$  ve  $\omega_2$ , (5.32) de bulunmuş olup, diğer  $\alpha_1, \alpha_2, \rho_1, \rho_2, k_1, k_2, \tau_{11}, \tau_{12}$  ve  $\tau_{22}$  parametreleri keyfi olarak seçilecektir. Şekil 5.4, Şekil 5.5 ve Şekil 5.6 da, (4.23) deki dejenere periyodiklik şartlarını sağlayan keyfi parametrelerin de  $\alpha_1 = 0.2, \alpha_2 = 0.1, \rho_1 = 0.04, \rho_2 = 0.02, k_1 = 0.6, k_2 = 0.3, \tau_{11} = 0.5i, \tau_{12} = 0.1i, \tau_{22} = 0.2i$  ve  $u_0 = \delta = 0$  şeklinde seçilmesi ile (3+1) boyutlu genelleştirilmiş BKP denkleminin dejenere iki-periyodik dalga grafiklerinin nasıl görüneceği aşağıda gösterilmiştir.

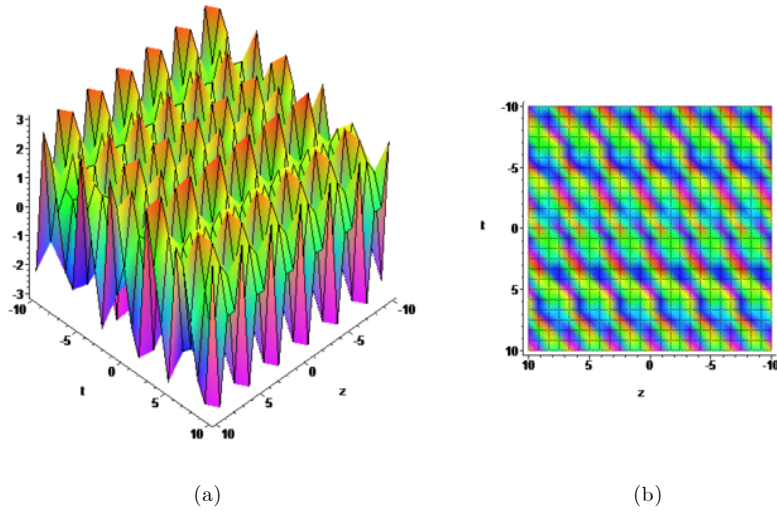


Şekil 5.4 : (a)  $y=z=0$  seçimi ile iki-periyodik dalganın  $x-t$  düzleminde perspektif görünümü. (b) Üstten görünümü.



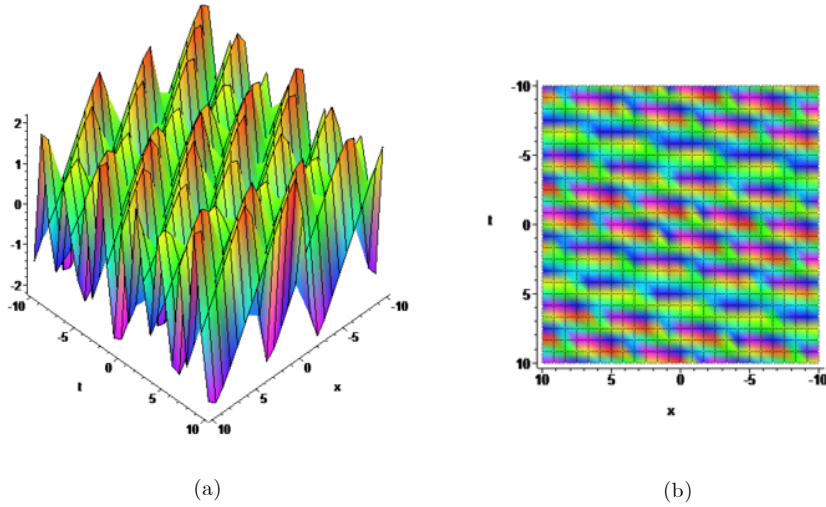


Şekil 5.5 : (a)  $x=z=0$  seçimi ile iki-periyodik dalganın  $y-t$  düzleminden perspektif görünümü. (b) Üstten görünümü.

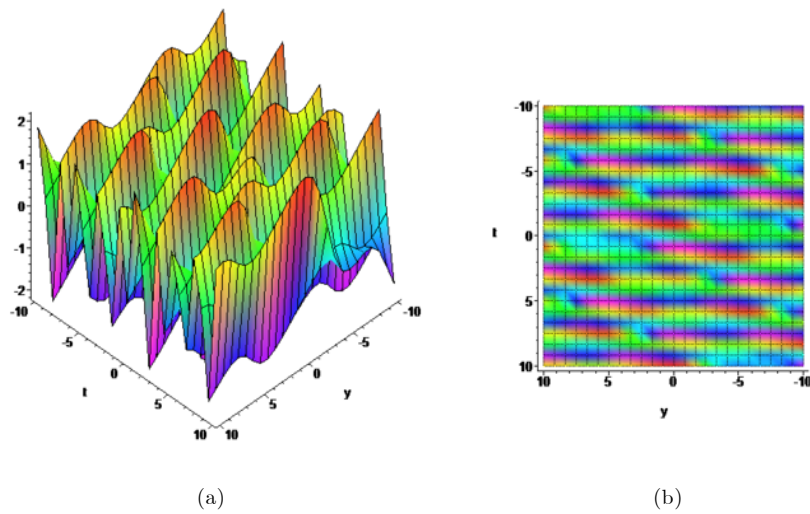


Şekil 5.6 : (a)  $x=y=0$  seçimi ile iki-periyodik dalganın  $z-t$  düzleminden perspektif görünümü. (b) Üstten görünümü.

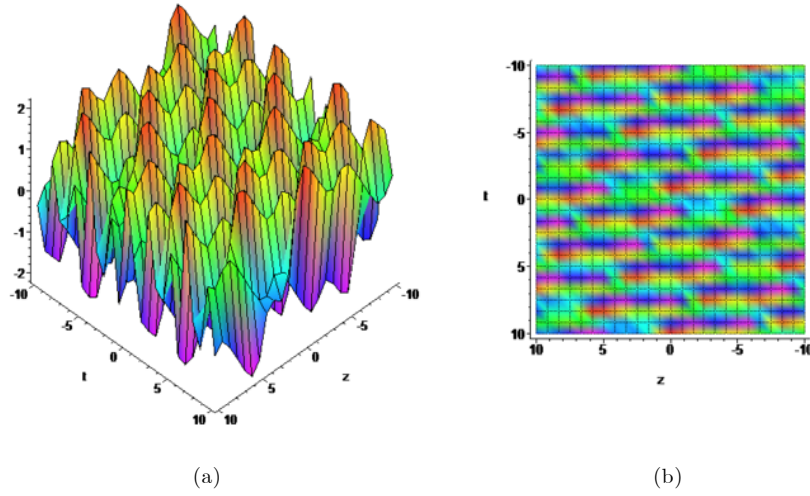
Aşağıda verilen Şekil 5.7, Şekil 5.8 ve Şekil 5.9 da ise (4.25) teki şartları sağlayan  $\alpha_1 = 0.1$ ,  $\alpha_2 = 0.08$ ,  $\rho_1 = 0.1$ ,  $\rho_2 = 0.02$ ,  $k_1 = -0.2$ ,  $k_2 = -0.04$ ,  $\tau_{11} = 0.5i$ ,  $\tau_{12} = 0.1i$ ,  $\tau_{22} = 0.2i$  ve  $u_0 = \delta = 0$  keyfi parametrelerin seçimi ile (3+1) boyutlu Genelleştirilmiş BKP denkleminin asimetrik iki-periyodik dalga grafiklerinin nasıl olacağı gösterilmiştir.



Şekil 5.7 : (a)  $y=z=0$  seçimi ile iki-periyodik dalganın  $x-t$  düzleminden perspektif görünümü. (b) Üstten görünümü.



Şekil 5.8 : (a)  $x=z=0$  seçimi ile iki-periyodik dalganın  $y-t$  düzleminden perspektif görünümü. (b) Üstten görünümü



Şekil 5.9 : (a)  $x=y=0$  seçimi ile iki-periyodik dalganın  $z-t$  düzleminde perspektif görünümü. (b) Üstten görünümü.

### Asimptotik Durum

Teorem 4.1.5 e göre (5.33) iki-periyodik dalga çözümü için faz değişkeni  $\xi_i = \alpha_i x + \rho_i y + \omega_i t + \delta_i$ , (5.7) de verilmiş olan iki-soliton için faz değişkeni  $\eta_i = \mu_i x + \nu_i y + \varpi_i t + \gamma_i$ ,  $i = 1, 2$  olmak üzere,  $(\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (0, 0)$  ifadesi (5.32) de yerine yazıldığı takdirde

$$\begin{aligned}
 c &\rightarrow 0 \\
 \omega_1 &= -3 \frac{\alpha_1 k_1}{\rho_1} - 4\pi^2 \alpha_1^3 + 3 \frac{\alpha_1^2}{\rho_1} u_0^0 \\
 \omega_2 &= -3 \frac{\alpha_2 k_2}{\rho_2} - 4\pi^2 \alpha_2^3 + 3 \frac{\alpha_2^2}{\rho_2} u_0^0
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

olduğu görülür. (4.28) de belirtildiği gibi soliton çözüme gitme şartlarından biri de  $u_0 \rightarrow 0$  seçilmesidir. (5.26) dan görüleceği üzere  $(\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (0, 0)$  olduğunda  $u_0 = u_0^0$  bulunur. Demek ki  $u_0 \rightarrow 0$  olması için  $u_0^0 = 0$  seçilmelidir. Buna göre  $u_0^0 = 0$  (5.34) te yerine yazıldığı takdirde

$$\begin{aligned}
 u_0 &= o(\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow 0, \quad c \rightarrow 0 \\
 \omega_1 &= -3 \frac{\alpha_1 k_1}{\rho_1} - 4\pi^2 \alpha_1^3 \\
 \omega_2 &= -3 \frac{\alpha_2 k_2}{\rho_2} - 4\pi^2 \alpha_2^3
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

olduğu görülür. Soliton çözüme gitmesi için Teorem 4.1.5 teki, (4.27) de verilen diğer

şartlar (5.35) te yerine yazılırsa soliton çözüm için (5.8) de belirtilmiş olan

$$\begin{aligned}\varpi_1 &= -\frac{3\mu_1\kappa_1}{\nu_1} + \mu_1^3 \\ \varpi_2 &= -\frac{3\mu_2\kappa_2}{\nu_2} + \mu_2^3\end{aligned}$$

yayıma bağıntıları elde edilir. Ayrıca (4.27) de bahsi geçen  $\tau_{12} = \frac{A_{12}}{2\pi i}$  ifadesinin ispatı Teorem 4.1.5 te verilmiş olmasına rağmen (5.23) sisteminin çözümünden de

$$\lambda_3 = -\frac{(\nu_1-\nu_2)(\varpi_1-\varpi_2)-(\mu_1-\mu_2)^3(\nu_1-\nu_2)+3(\mu_1-\mu_2)(\kappa_1-\kappa_2)}{(\nu_1+\nu_2)(\varpi_1+\varpi_2)-(\mu_1+\mu_2)^3(\nu_1+\nu_2)+3(\mu_1+\mu_2)(\kappa_1+\kappa_2)} \quad (5.36)$$

ifadesinin elde edilebileceği görülür. Sonuç olarak Teorem 4.1.5 in ispatı ve yukarıda elde edilmiş olan yayılma bağıntıları ile birlikte, bulunan iki-periyodik çözüm küçük bir genlik sınırı altında bilinen soliton çözümü verir.

### 5.1.3 Üç-periyodik dalga çözümü

Üç-periyodik çözüm için Teorem 4.1.4 te verilen sistem ele alındığında  $\xi_i = \alpha_i x + \rho_i y + k_i z + \omega_i t + \delta_i$   $i = 1, 2, 3$  faz değişkeni ve karakteristikler  $\theta_j = (\theta_j^1, \theta_j^2, \theta_j^3)^T$   $\theta_1 = (0, 0, 0)^T$ ,  $\theta_2 = (0, 0, 1)^T$ ,  $\theta_3 = (0, 1, 0)^T$ ,  $\theta_4 = (0, 1, 1)^T$ ,  $\theta_5 = (1, 0, 0)^T$ ,  $\theta_6 = (1, 0, 1)^T$ ,  $\theta_7 = (1, 1, 0)^T$ ,  $\theta_8 = (1, 1, 1)^T$   $j = 1, \dots, 8$  olmak üzere  $\alpha_i, \rho_i, k_i$  and  $\omega_i$  parametreleri

$$\begin{aligned}&\sum_{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3} [-4\pi^2 < 2n - \theta_j, \rho > < 2n - \theta_j, \omega > \\ &-12\pi^2 < 2n - \theta_j, \alpha > < 2n - \theta_j, k > -16\pi^4 < 2n - \theta_j, \alpha >^3 < 2n - \theta_j, \rho > \\ &+12\pi^2 u_0 < 2n - \theta_j, \alpha >^2 + c] \times e^{\pi i [< \tau(n-\theta_j), n-\theta_j > + < \tau n, n >]} = 0\end{aligned} \quad (5.37)$$

sistemini sağlamalıdır. Bu sistem  $X = (a_{ij})_{8 \times 8}$  tipinde bir matris ve  $b = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8)$  olmak üzere

$$X(\omega_1, \omega_2, \omega_3, k_1, k_2, k_3, u_0, c)^T = b \quad (5.38)$$

formunda düzenlenip sistemin çözümü elde edilir. Bunun için

$$\begin{aligned}
X &= X_0 + X_1\lambda_1 + X_2\lambda_2 + X_3\lambda_3 + X_4\lambda_1^2 + X_5\lambda_2^2 + X_6\lambda_3^2 \\
&+ X_7\lambda_1\lambda_2 + X_8\lambda_1\lambda_3 + X_9\lambda_2\lambda_3 + \dots
\end{aligned}$$

olacak şekilde (5.38) sistemi  $\lambda_1, \lambda_2$  ve  $\lambda_3$  serisine açılmalıdır. Burada

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= e^{\pi i \tau_{11}}, \quad \lambda_2 = e^{\pi i \tau_{22}}, \quad \lambda_3 = e^{\pi i \tau_{33}} \\
\lambda_{12} &= e^{2\pi i \tau_{12}}, \quad \lambda_{13} = e^{2\pi i \tau_{13}}, \quad \lambda_{23} = e^{2\pi i \tau_{23}} \\
j &= 1, \dots, 8
\end{aligned} \tag{5.39}$$

ve

$$\begin{aligned}
\varepsilon_j &= \sum_{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3} e^{\pi i [\langle \tau(n-\theta_j), n-\theta_j \rangle + \langle \tau n, n \rangle]} \\
&= \lambda_1^{n_1^2 + (n_1 - \theta_j^1)^2} \lambda_2^{n_2^2 + (n_2 - \theta_j^2)^2} \lambda_3^{n_3^2 + (n_3 - \theta_j^3)^2} \\
&\quad \lambda_{12}^{n_1 n_2 + (n_1 - \theta_j^1)(n_2 - \theta_j^2)} \lambda_{13}^{n_1 n_3 + (n_1 - \theta_j^1)(n_3 - \theta_j^3)} \lambda_{23}^{n_2 n_3 + (n_2 - \theta_j^2)(n_3 - \theta_j^3)}
\end{aligned} \tag{5.40}$$

olmak üzere tüm katsayılar

$$a_{j8} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \varepsilon_j$$

$$a_{j7} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} 12\pi^2 \langle 2n - \theta_j, \alpha \rangle^2 \varepsilon_j$$

$$a_{j6} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} -12\pi^2 \langle 2n - \theta_j, \alpha \rangle (2n_3 - \theta_j^3) \varepsilon_j$$

$$a_{j5} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} -12\pi^2 \langle 2n - \theta_j, \alpha \rangle (2n_2 - \theta_j^2) \varepsilon_j$$

$$a_{j4} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} -12\pi^2 \langle 2n - \theta_j, \alpha \rangle (2n_1 - \theta_j^1) \varepsilon_j$$

$$a_{j3} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} -4\pi^2 \langle 2n - \theta_j, \rho \rangle (2n_3 - \theta_j^3) \varepsilon_j$$

$$\begin{aligned}
a_{j2} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} -4\pi^2 \langle 2n - \theta_j, \rho \rangle (2n_2 - \theta_j^2) \varepsilon_j \\
a_{j1} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} -4\pi^2 \langle 2n - \theta_j, \rho \rangle (2n_1 - \theta_j^1) \varepsilon_j
\end{aligned} \tag{5.41}$$

$$b_j = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} 16\pi^4 \langle 2n - \theta_j, \alpha \rangle^3 \langle 2n - \theta_j, \rho \rangle \varepsilon_j$$

şeklinde yazılabilir. (5.41) seri açılımları ile birlikte,  $i = 1, 2, 3$  olmak üzere  $\omega_i, k_i, u_0, c$  için  $\lambda'$ ya göre seri açılımları olan

$$\begin{aligned}
\omega_i &= \omega_i^0 + \omega_i^1 \lambda_1 + \omega_i^2 \lambda_2 + \omega_i^3 \lambda_3 + \omega_i^{11} \lambda_1^2 + \omega_i^{22} \lambda_2^2 + \omega_i^{33} \lambda_3^2 \\
&\quad + \omega_i^{12} \lambda_1 \lambda_2 + \omega_i^{13} \lambda_1 \lambda_3 + \omega_i^{23} \lambda_2 \lambda_3 + \omega_i^{123} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\
&\quad + o(\lambda_1^m \lambda_2^j \lambda_3^l), \quad m + j + l \geq 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_i &= k_i^0 + k_i^1 \lambda_1 + k_i^2 \lambda_2 + k_i^3 \lambda_3 + k_i^{11} \lambda_1^2 + k_i^{22} \lambda_2^2 + k_i^{33} \lambda_3^2 \\
&\quad + k_i^{12} \lambda_1 \lambda_2 + k_i^{13} \lambda_1 \lambda_3 + k_i^{23} \lambda_2 \lambda_3 + k_i^{123} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\
&\quad + o(\lambda_1^m \lambda_2^j \lambda_3^l), \quad m + j + l \geq 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &= u_0^0 + u_0^1 \lambda_1 + u_0^2 \lambda_2 + u_0^3 \lambda_3 + u_0^{11} \lambda_1^2 + u_0^{22} \lambda_2^2 + u_0^{33} \lambda_3^2 \\
&\quad + u_0^{12} \lambda_1 \lambda_2 + u_0^{13} \lambda_1 \lambda_3 + u_0^{23} \lambda_2 \lambda_3 + u_0^{123} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\
&\quad + o(\lambda_1^m \lambda_2^j \lambda_3^l), \quad m + j + l \geq 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c &= c_0 + c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 + c_3 \lambda_3 + c_{11} \lambda_1^2 + c_{22} \lambda_2^2 + c_{33} \lambda_3^2 \\
&\quad + c_{12} \lambda_1 \lambda_2 + c_{13} \lambda_1 \lambda_3 + c_{23} \lambda_2 \lambda_3 + c_{123} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\
&\quad + o(\lambda_1^m \lambda_2^j \lambda_3^l), \quad m + j + l \geq 3
\end{aligned}$$

ifadeleri (5.38) sisteminde yerine yazılır. Aynı dereceli  $\lambda_i$  terimlerinin katsayılarının eşitlenmesi ile

$$c = (384\pi^4 \alpha_1^3 \rho_1) \lambda_1^2 + (384\pi^4 \alpha_2^3 \rho_2) \lambda_2^2 + (384\pi^4 \alpha_3^3 \rho_3) \lambda_3^2 + o(\lambda_1^i, \lambda_2^j, \lambda_3^k), \quad i + j + k \geq 3$$

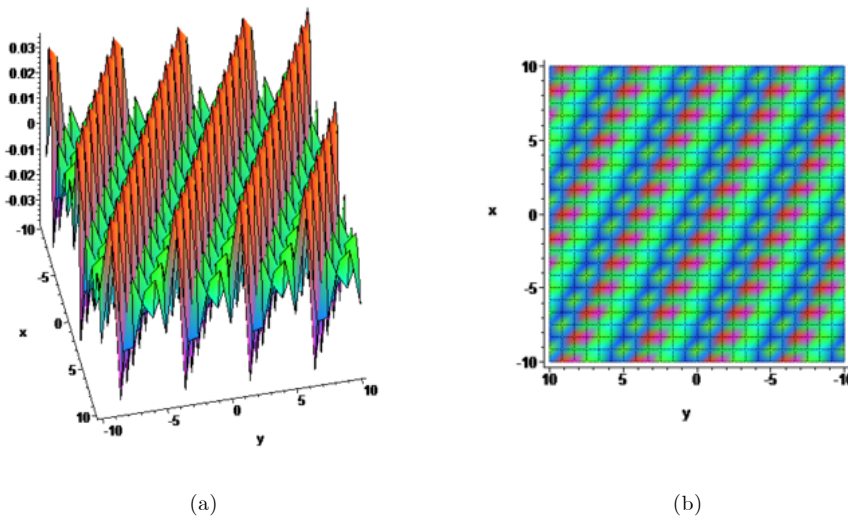
$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \left(-3 \frac{\alpha_1 k_1^{(0)}}{\rho_1} - 4\pi^2 \alpha_1^3 + 3 \frac{\alpha_1^2}{\rho_1} u_0^{(0)}\right) + \left(-3 \frac{\alpha_1 k_1^{(1)}}{\rho_1} + 3 \frac{\alpha_1^2}{\rho_1} u_0^{(1)}\right) \lambda_1 + \left(-3 \frac{\alpha_1 k_1^{(2)}}{\rho_1} + 3 \frac{\alpha_1^2}{\rho_1} u_0^{(2)}\right) \lambda_2 \\
&\quad + \left(-3 \frac{\alpha_1 k_1^{(3)}}{\rho_1} + 3 \frac{\alpha_1^2}{\rho_1} u_0^{(3)}\right) \lambda_3 + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_2 &= \left(-3\frac{\alpha_2 k_2^{(0)}}{\rho_2} - 4\pi^2 \alpha_2^3 + 3\frac{\alpha_2^2}{\rho_2} u_0^{(0)}\right) + \left(-3\frac{\alpha_2 k_2^{(1)}}{\rho_2} + 3\frac{\alpha_2^2}{\rho_2} u_0^{(1)}\right) \lambda_1 + \left(-3\frac{\alpha_2 k_2^{(2)}}{\rho_2} + 3\frac{\alpha_2^2}{\rho_2} u_0^{(2)}\right) \lambda_2 \\
&\quad + \left(-3\frac{\alpha_2 k_2^{(3)}}{\rho_2} + 3\frac{\alpha_2^2}{\rho_2} u_0^{(3)}\right) \lambda_3 + \dots \\
\omega_3 &= \left(-3\frac{\alpha_3 k_3^{(0)}}{\rho_3} - 4\pi^2 \alpha_3^3 + 3\frac{\alpha_3^2}{\rho_3} u_0^{(0)}\right) + \left(-3\frac{\alpha_3 k_3^{(1)}}{\rho_3} + 3\frac{\alpha_3^2}{\rho_3} u_0^{(1)}\right) \lambda_1 + \left(-3\frac{\alpha_3 k_3^{(2)}}{\rho_3} + 3\frac{\alpha_3^2}{\rho_3} u_0^{(2)}\right) \lambda_2 \\
&\quad + \left(-3\frac{\alpha_3 k_3^{(3)}}{\rho_3} + 3\frac{\alpha_3^2}{\rho_3} u_0^{(3)}\right) \lambda_3 + \dots
\end{aligned} \tag{5.42}$$

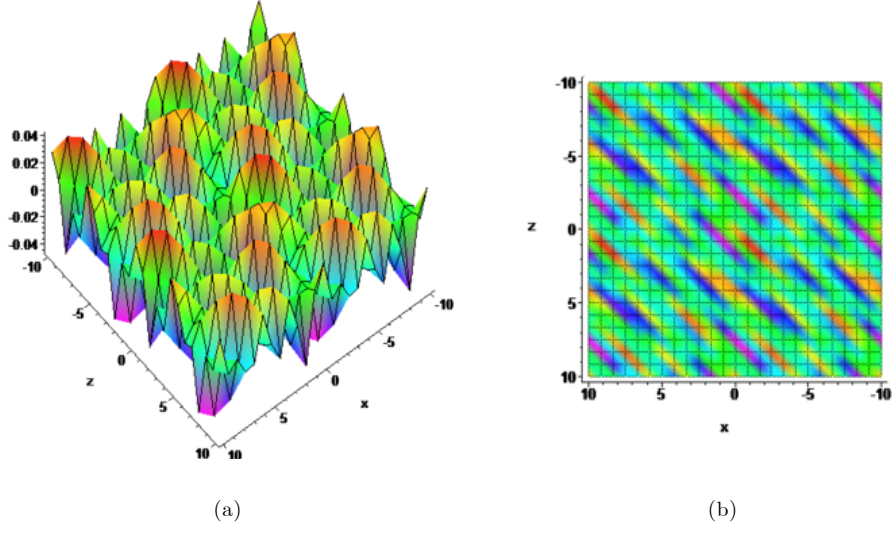
elde edilir. Böylece aranan çözüm  $\vartheta(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} e^{\pi i \langle \tau n, n \rangle + 2\pi i \langle \xi, n \rangle}$  olmak üzere

$$u = u_0 y + 2(\ln \vartheta(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau))_x \tag{5.43}$$

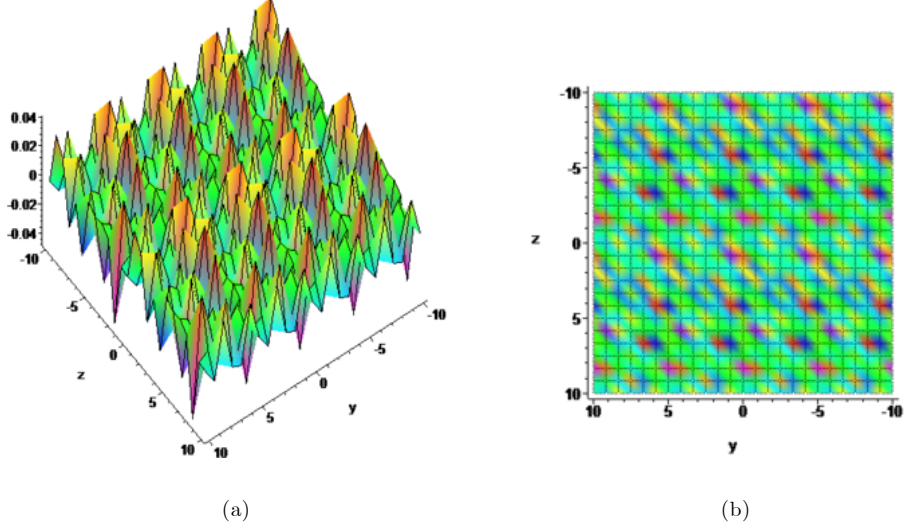
şekindedir. Çözüm için gerekli olan  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  ve  $c$ ; (5.42) te bulunmuş olup diğer  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \rho_1, \rho_2, \rho_3, k_1, k_2, k_3, u_0, \tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}, \tau_{12}, \tau_{13}$  ve  $\tau_{23}$  parametreleri keyfi olarak seçilir. Aşağıda verilen Şekil 5.10, Şekil 5.11 ve Şekil 5.12 de  $\alpha_1 = 0.2, \alpha_2 = 0.1, \alpha_3 = 0.4, \rho_1 = 0.4, \rho_2 = 0.2, \rho_3 = 0.8, k_1 = 0.2, k_2 = 0.3, k_3 = 0.5, \tau_{11} = 2i, \tau_{22} = 2i, \tau_{33} = 2i, \tau_{12} = i, \tau_{13} = 0.5i, \tau_{23} = i$  ve  $u_0 = \delta = 0$  keyfi parametrelerin seçimi ile (3+1) boyutlu Genelleştirilmiş BKP denkleminin üç-periyodik dalga çözümünün grafiğinin nasıl olacağı farklı açılardan verilmiştir.



Şekil 5.10 : (a)  $z=t=1$  seçimi ile üç-periyodik dalganın  $x-y$  düzleminde perspektif görünümü. (b) Üstten görünümü.



Şekil 5.11 : (a)  $y=t=1$  seçimi ile üç-periyodik dalganın  $x-z$  düzleminde perspektif görünümü. (b) Üstten görünümü.



Şekil 5.12 : (a)  $x=t=1$  seçimi ile üç-periyodik dalganın  $y-z$  düzleminde perspektif görünümü. (b) Üstten görünümü.



### Asimptotik Durum

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \rightarrow (0, 0, 0)$  için

$$c \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -3\frac{\alpha_1 k_1^{(0)}}{\rho_1} - 4\pi^2 \alpha_1^3 + 3\frac{\alpha_1^2}{\rho_1} u_0^{(0)} \\ \omega_2 &= -3\frac{\alpha_2 k_2^{(0)}}{\rho_2} - 4\pi^2 \alpha_2^3 + 3\frac{\alpha_2^2}{\rho_2} u_0^{(0)} \\ \omega_3 &= -3\frac{\alpha_3 k_3^{(0)}}{\rho_3} - 4\pi^2 \alpha_3^3 + 3\frac{\alpha_3^2}{\rho_3} u_0^{(0)}\end{aligned}\tag{5.44}$$

bulunur. Teorem 4.1.7 ye göre,  $u_0 \rightarrow 0$  olması için  $u_0^0 = 0$  seçilmelidir ayrıca (5.82) de verilen  $k_i$ 'nin seri açılımında  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rightarrow 0$  iken  $k_i^0 = k_i$  olduğu görülür. Bu ifadeler (5.44) te yerine yazılırsa

$$u_0 \rightarrow 0 \quad , \quad c \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -3\frac{\alpha_1 k_1}{\rho_1} - 4\pi^2 \alpha_1^3 \\ \omega_2 &= -3\frac{\alpha_2 k_2}{\rho_2} - 4\pi^2 \alpha_2^3 \\ \omega_3 &= -3\frac{\alpha_3 k_3}{\rho_3} - 4\pi^2 \alpha_3^3\end{aligned}\tag{5.45}$$

elde edilir. Yine Teorem 4.1.7 de verilen (4.36) daki ifadeler (5.45) e uygulandığı takdirde  $u_0 = o(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\varpi_1 &= -\frac{3\mu_1 \kappa_1}{\nu_1} + \mu_1^3 \\ \varpi_2 &= -\frac{3\mu_2 \kappa_2}{\nu_2} + \mu_2^3 \\ \varpi_3 &= -\frac{3\mu_3 \kappa_3}{\nu_3} + \mu_3^3\end{aligned}\tag{5.46}$$

$$c \rightarrow 0$$

olup (5.12) de soliton çözüm için verilmiş olan yayılma bağıntısı elde edilir. Sonuç

olarak (5.43) te bulunmuş olan üç-periyodik dalga çözümü, Teorem 4.1.7 deki şartlar altında üç-soliton çözümü verir.

## 5.2 (3+1) Boyutlu BKP Denkleminin Kuasi Periyodik Çözümü

(3+1) boyutlu BKP denklemi

$$u_{zt} - u_{xxxxy} - 3(u_x u_y)_x + 3u_{xx} = 0 \quad (5.47)$$

ele alınsın (Ma ve Fan, 2011). Daha önce Asaad tarafından Pfaffian ve N-soliton çözümleri elde edilmiş (Asaad, 2013), burada ise bir, iki ve üç-periyodik dalga çözümleri elde edilip, bulunan periyodik çözümlerin bazı küçük limitler altında bilinen soliton çözümleri verdiği gösterilecektir.

(3.33) ve (3.34) te verilen özellikler doğrultusunda (5.47) denkleminde,  $u = 2(\ln f)_x$  değişken dönüşümü uygulanırsa denklemin

$$(D_z D_t - D_x^3 D_y + 3D_x^2) f \cdot f = 0 \quad (5.48)$$

bilineer formu elde edilir.

Hirota'nın bilineer teorisine ve birinci bölümde bahsedilen özelliklere göre  $\mu, \nu, \kappa$  ve  $\gamma$  sabitler olmak üzere faz değişkeni  $\eta = \mu x + \nu y + \kappa z + \varpi t + \gamma$  şeklinde seçilirse, yayılma bağıntısı  $\varpi = -3\frac{\mu^2}{\kappa} + \frac{\mu^3 \nu}{\kappa}$  olup (5.47) denklemini

$$u_1 = 2\partial_x(\ln(1 + e^\eta)) \quad (5.49)$$

şeklinde bir-soliton çözüme sahiptir.

$\mu_j, \nu_j, \kappa_j$  ve  $\gamma_j$  keyfi sabitler ve  $\eta_j = \mu_j x + \nu_j y + \kappa_j z + \varpi_j t + \gamma_j$ ,  $j = 1, 2$  olmak

üzere

$$e^{A_{12}} = -\frac{(\kappa_1 - \kappa_2)(\varpi_1 - \varpi_2) - (\mu_1 - \mu_2)^3(\nu_1 - \nu_2) + 3(\mu_1 - \mu_2)^2}{(\kappa_1 + \kappa_2)(\varpi_1 + \varpi_2) - (\mu_1 + \mu_2)^3(\nu_1 + \nu_2) + 3(\mu_1 + \mu_2)^2}$$

$$\varpi_1 = -3\frac{\mu_1^2}{\kappa_1} + \frac{\mu_1^3\nu_1}{\kappa_1}, \quad \varpi_2 = -3\frac{\mu_2^2}{\kappa_2} + \frac{\mu_2^3\nu_2}{\kappa_2} \quad (5.50)$$

şeklinde yayılma bağıntısına sahip olup iki-soliton çözümü

$$u_2 = 2\partial_x(\ln(1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}})) \quad (5.51)$$

şeklindedir.

Üç soliton çözüm ise  $\mu_j, \nu_j, \kappa_j$  ve  $\gamma_j$  keyfi sabitler ve  $\eta_j = \mu_j x + \nu_j y + \kappa_j z + \varpi_j t + \gamma_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$   $i < j$  için

$$e^{A_{ij}} = -\frac{(\kappa_i - \kappa_j)(\varpi_i - \varpi_j) - (\mu_i - \mu_j)^3(\nu_i - \nu_j) + 3(\mu_i - \mu_j)(\kappa_i - \kappa_j)}{(\kappa_i + \kappa_j)(\varpi_i + \varpi_j) - (\mu_i + \mu_j)^3(\nu_i + \nu_j) + 3(\mu_i + \mu_j)(\kappa_i + \kappa_j)} \quad (5.52)$$

$$\varpi_1 = -3\frac{\mu_1^2}{\kappa_1} + \frac{\mu_1^3\nu_1}{\kappa_1}, \quad \varpi_2 = -3\frac{\mu_2^2}{\kappa_2} + \frac{\mu_2^3\nu_2}{\kappa_2} \quad (5.53)$$

$$\varpi_3 = -3\frac{\mu_3^2}{\kappa_3} + \frac{\mu_3^3\nu_3}{\kappa_3}$$

ve

$$f = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_3} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}} + e^{\eta_1 + \eta_3 + A_{13}} + e^{\eta_2 + \eta_3 + A_{23}} + e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + A_{12} + A_{13} + A_{23}} \quad (5.54)$$

olmak üzere

$$u_3 = 2\partial_x(\ln(f)) \quad (5.55)$$

şeklindedir.

Önceki örnekte de olduğu gibi, (5.48) bilineer denklemin kısmen genelleştirilmiş formu ele alınmalıdır.  $|\xi| \rightarrow 0$  iken  $u \rightarrow u_0 y$  asimptotik şartı göz önünde bulunduru-

arak, (5.47) denkleminin çözümü

$$u = u_0 y + 2(\ln \vartheta(\xi))_x \quad (5.56)$$

formunda aranır. Burada verilen  $u_0 y$ , (5.47) denkleminin özel bir çözümü olup faz değişkeni  $\xi_i = \alpha_i x + \rho_i y + \kappa_j z + \omega_i t + \delta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  olmak üzere  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)^T$  dir.

(5.56) ifadesi (5.47) de yerine yazılır ve  $x$  değişkenine göre bir kez integre edilirse  $c = c(y, z, t)$  integral sabiti ve  $\vartheta(\xi, \tau)$ , (5.15) te verilen theta fonksiyonu olmak üzere

$$H(D_x, D_y, D_t) = (D_z D_t + 3D_x^2 - D_x^3 D_y - 3u_0 D_x^2 + c)\vartheta(\xi, \tau) \cdot \vartheta(\xi, \tau) = 0 \quad (5.57)$$

ifadesi elde edilir.

### 5.2.1 Bir-periyodik dalga çözümü

Teorem 4.1.2 deki ifadeler (5.57) denkleminde uygulandığında,  $\xi = \alpha x + \rho y + \kappa z + \omega t + \delta$

faz değişkeni olmak üzere

$$\begin{aligned} \tilde{H}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} & (-16\pi^2 n^2 k \omega - 48\pi^2 n^2 \alpha^2 - 256\pi^4 n^4 \rho \alpha^3 \\ & + 48u_0 \pi^2 n^2 \alpha^2 + c) e^{2\pi i n^2 \tau} = 0 \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}(1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} & (-4\pi^2 (2n-1)^2 k \omega - 12\pi^2 (2n-1)^2 \alpha^2 - 16\pi^4 (2n-1)^4 \rho \alpha^3 \\ & + 12\pi^2 u_0 (2n-1)^2 \alpha^2 + c) e^{(2n^2 - 2n + 1)\pi i \tau} = 0 \end{aligned}$$

sistemi elde edilir.

Bu durumdan kurtulmak için  $\lambda = e^{\pi i \tau}$  olmak üzere, pertürbasyon tekniğinden tüm katsayılar  $\lambda$  nın bir serisine açılıp uygun katsayılar eşitlendiği takdirde  $\lambda$  parametresine göre yaklaşık değerler elde edilir.

Buna göre sistemin katsayıları

$$\begin{aligned}
 \lambda &= e^{\pi i \tau} \\
 a_{11} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -16\pi^2 n^2 k \lambda^{2n^2} \\
 a_{12} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^{2n^2} \\
 a_{21} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -4\pi^2 (2n-1)^2 k \lambda^{2n^2-2n+1} \\
 a_{22} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^{2n^2-2n+1} \\
 b_1 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (48\pi^2 n^2 \alpha^2 + 256\pi^4 n^4 \rho \alpha^3 - 48u_0 \pi^2 n^2 \alpha^2) \lambda^{2n^2} \\
 b_2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (12\pi^2 (2n-1)^2 \alpha^2 + 16\pi^4 (2n-1)^4 \rho \alpha^3 \\
 &\quad - 12u_0 \pi^2 (2n-1)^2 \alpha^2) \lambda^{2n^2-2n+1}
 \end{aligned} \tag{5.59}$$

şeklinde  $\lambda$  serisine açıldığında

$$u = u_0 y + 2(\ln \vartheta(\xi, \tau))_x$$

ile tanımlanan bir-periyodik çözümü kolaylıkla bulunabilir. Burada  $\omega$  ve  $c$  (5.58) denklem sisteminin çözümünden bulunacak olup, diğer parametreler  $\alpha, \rho, k, \delta, \tau, u_0$  keyfi olarak seçilecektir. Sisteminin katsayılar matrisi ve eşitliğin sağ tarafındaki değerler  $\lambda$

nın bir serisi olduğu için  $(\omega, c)^T$  çözümünü de  $\lambda$ 'nın bir serisi olmalıdır. Buna göre

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -8\pi^2 k & 2 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} -32\pi^2 k & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^2 \\ + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -72\pi^2 k & 2 \end{pmatrix} \lambda^5 + o(\lambda^5)$$

$$\begin{pmatrix} w \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_0 \\ c_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} w_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \lambda^2 \\ + \begin{pmatrix} w_3 \\ c_3 \end{pmatrix} \lambda^3 + \begin{pmatrix} w_4 \\ c_4 \end{pmatrix} \lambda^4 + \begin{pmatrix} w_5 \\ c_5 \end{pmatrix} \lambda^5 + o(\lambda^5)$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 24\pi^2 \alpha^2 + 32\pi^4 \rho \alpha^3 - 24u_0 \pi^2 \alpha^2 \end{pmatrix} \lambda \\ + \begin{pmatrix} 96\pi^2 \alpha^2 + 512\pi^4 \rho \alpha^3 - 96u_0 \pi^2 \alpha^2 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda^2 \\ + \begin{pmatrix} 0 \\ 216\pi^2 \alpha^2 + 2592\pi^4 \rho \alpha^3 - 216u_0 \pi^2 \alpha^2 \end{pmatrix} \lambda^5 + o(\lambda^5) .$$

şeklinde seriye açılmış halleri sistemde yerine yazılıp,  $\lambda$  nın aynı dereceli katsayıları birbirine eşitlendiğinde

$$\omega = \left(-3\frac{\alpha^2}{k} - 4\pi^2\frac{\alpha^3\rho}{k} + 3u_0\frac{\alpha^2}{k}\right) + (96\pi^2\frac{\alpha^3\rho}{k})\lambda^2 + (288\pi^2\frac{\alpha^3\rho}{k})\lambda^4 + o(\lambda^4) \quad (5.60)$$

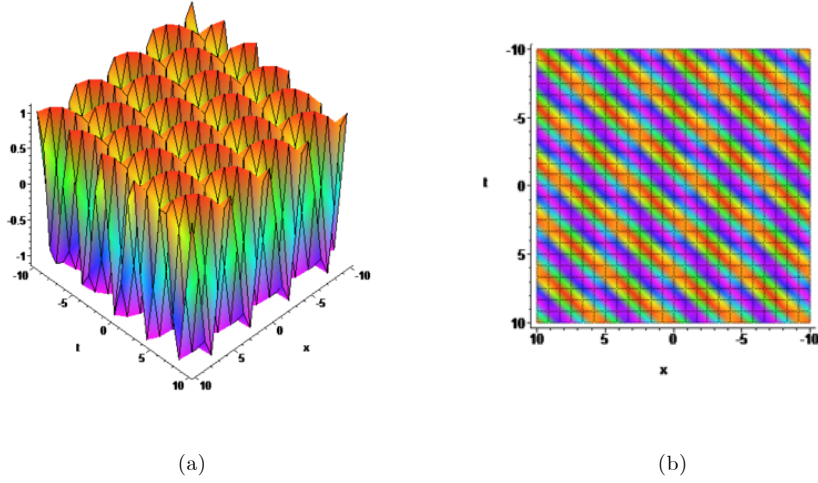
$$c = (384\pi^4\rho\alpha^3)\lambda^2 + (2304\pi^4\rho\alpha^3)\lambda^4 + o(\lambda^4) .$$

elde edilir. Bulunan  $\omega$  değeri aranan çözüm olan

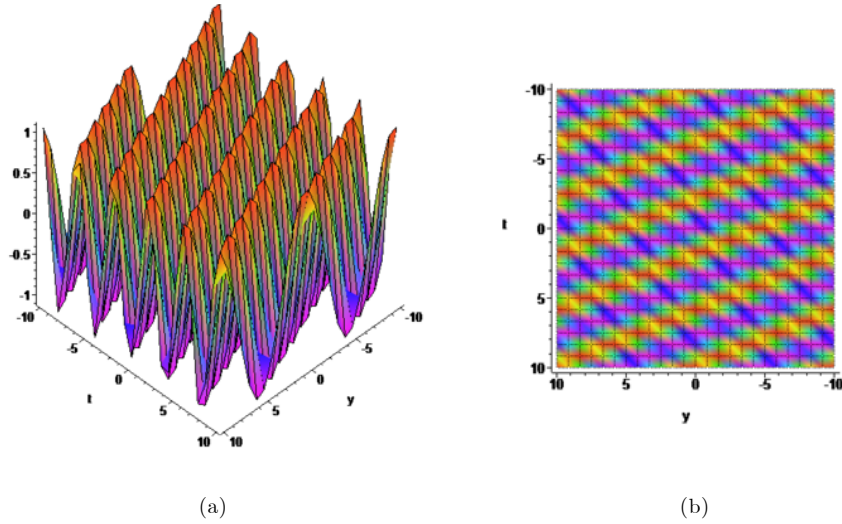
$$u = u_0 y + 2(\ln(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau + 2\pi i n \xi}))_x \quad (5.61)$$

ifadesinde yerine yazılır ve  $\alpha, \rho, k, \delta, \tau$  ve  $u_0$  parametrelerinin keyfi seçilmesiyle, (3+1) boyutlu BKP denkleminin kuasi periyodik çözümü elde edilmiş olur. Aşağıda verilen Şekil 5.13, Şekil 5.14 ve Şekil 5.15 te  $\alpha = 1$ ,  $\rho = 0.1$ ,  $k = 0.2$ ,  $\tau = i$  ve  $u_0 = \delta =$

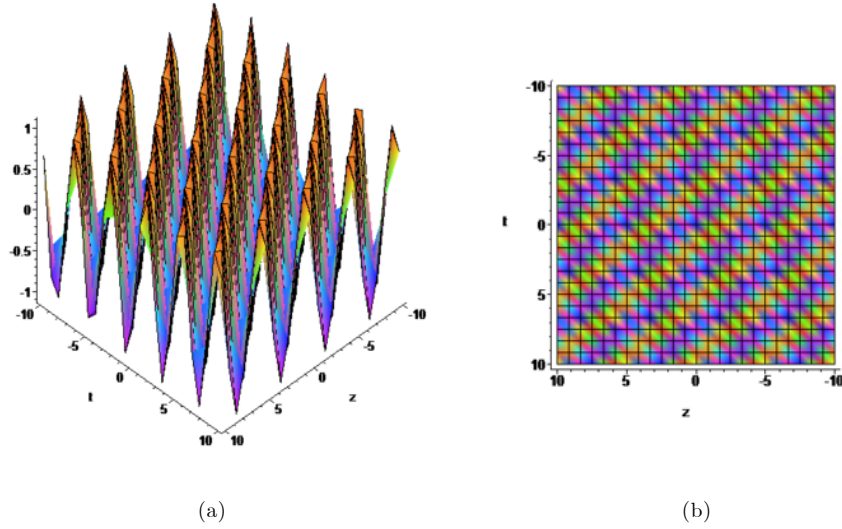
0 keyfi parametreleri için (3+1) boyutlu BKP denkleminin bir-periyodik çözümünün nasıl olacağı farklı açılardan gösterilmiştir. Şekillerden de görüleceği üzere çakışan bir-solitary dalgaların paralel olarak üst üste binmesiyle oluşan bir-periyodik dalgalar tek bir dalga şekline sahiptir.



Şekil 5.13 : (a)  $y=z=1$  seçimi ile bir-periyodik dalganın  $x-t$  düzleminden perspektif görünümü. (b) Üstten görünümü.



Şekil 5.14 : (a)  $x=z=1$  seçimi ile bir-periyodik dalganın  $y-t$  düzleminden perspektif görünümü. (b) Üstten görünümü.



Şekil 5.15 : (a)  $x=y=1$  seçimi ile bir-periyodik dalganın  $z-t$  düzleminde perspektif görünümü. (b) Üstten görünümü.

### Asimptotik Durum

Teorem 3.1.3 bize küçük bir genlik sınırı altında yukarıda bulunan quasi periyodik çözümün bilinen soliton çözüme gittiğini ifade etmişti. (5.61) bir-periyodik dalga çözümü için faz değişkeni  $\xi = \alpha x + \rho y + kz + \omega t + \delta$  ve soliton çözüm için  $\eta = \mu x + \nu y + \kappa z + \varpi t + \gamma$  olmak üzere  $\lambda \rightarrow 0$  iken (5.60) ifadesinden

$$\begin{aligned} c &\rightarrow 0 \\ \omega &= \left(-3\frac{\alpha^2}{k} - 4\pi^2\frac{\alpha^3\rho}{k} + 3u_0\frac{\alpha^2}{k}\right) \end{aligned} \quad (5.62)$$

bulunur. Teorem 4.1.3 e göre

$$u_0 = 0, \quad \alpha = \frac{\mu}{2\pi i}, \quad \rho = \frac{\nu}{2\pi i}, \quad k = \frac{\kappa}{2\pi i}, \quad \omega = \frac{\varpi}{2\pi i}, \quad \delta = \frac{\gamma - \pi i \tau}{2\pi i}$$

seçildiğinde soliton çözüm için dağılma bağıntı elde edilir ve (5.61) in soliton çözümü vermesi gerekir. Buna göre yukarıdaki ifadelerin (5.62) de bulunan

$$\omega = \left(-3\frac{\alpha^2}{k} - 4\pi^2\frac{\alpha^3\rho}{k} + 3u_0\frac{\alpha^2}{k}\right)$$



ifadesinde yerine yazılmasıyla

$$\varpi = 2\pi i\omega = -3\frac{\mu^2}{\kappa} + \frac{\mu^3\nu}{\kappa} .$$

yayılma bağıntısı elde edilir. Bu şartlar altında soliton çözümü gittiği ise Teorem 4.1.3 ün ispatında verilmişti o yüzden tekrar gösterilmeyecektir.

## 5.2.2 İki-periyodik dalga çözümü

Teorem 4.1.4 e göre  $\xi_i = \alpha_i x + \rho_i y + k_i z + \omega_i t + \delta_i$   $i = 1, 2$  faz değişkeni ve  $j = 1, 2, 3, 4$  olmak üzere  $\alpha_i, \rho_i, k_i$  and  $\omega_i$

$$\begin{aligned} & \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} [-4\pi^2 \langle 2n - \theta_j, k \rangle \langle 2n - \theta_j, \omega \rangle - 12\pi^2 \langle 2n - \theta_j, \alpha \rangle^2 \\ & - 16\pi^4 \langle 2n - \theta_j, \alpha \rangle^3 \langle 2n - \theta_j, \rho \rangle + 12\pi^2 u_0 \langle 2n - \theta_j, \alpha \rangle^2 \\ & + c] \times e^{\pi i [\langle \tau(n - \theta_j), n - \theta_j \rangle + \langle \tau n, n \rangle]} = 0 \end{aligned} \quad (5.63)$$

ifadesini sağlamalıdır. Burada amaç  $X = (a_{ij})_{4 \times 4}$  şeklinde bir matris olmak üzere

$$X \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ u_0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \quad (5.64)$$

şeklinde bir denklem sistemini çözmektir. Yine küçük parametreler açılımından faydalanabilmek için katsayılar

$$\lambda_1 = e^{\pi i \tau_{11}}, \quad \lambda_2 = e^{\pi i \tau_{22}}, \quad \lambda_3 = e^{2\pi i \tau_{12}}$$

olmak üzere

$$\varepsilon_j = \lambda_1^{n_1^2+(n_1-\theta_j^1)^2} \lambda_2^{n_2^2+(n_2-\theta_j^2)^2} \lambda_3^{n_1 n_2+(n_1-\theta_j^1)(n_2-\theta_j^2)}$$

$$a_{j4} = \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^2} \varepsilon_j$$

$$a_{j3} = 12\pi^2 \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} \langle 2n - \theta_j, \alpha \rangle^2 \varepsilon_j$$

$$a_{j2} = -4\pi^2 \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} \langle 2n - \theta_j, k \rangle (2n_2 - \theta_j^2) \varepsilon_j$$

$$a_{j1} = -4\pi^2 \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} \langle 2n - \theta_j, k \rangle (2n_1 - \theta_j^1) \varepsilon_j \quad (5.65)$$

$$b_j = \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} 12\pi^2 \langle 2n - \theta_j, \alpha \rangle^2 + 16\pi^4 \langle 2n - \theta_j, \alpha \rangle^3 \langle 2n - \theta_j, \rho \rangle \varepsilon_j$$

şeklinde yazılabilir. Burada her bir terim  $k + l \geq 2$  için

$$X = X_0 + X_1 \lambda_1 + X_2 \lambda_2 + X_{11} \lambda_1^2 + X_{22} \lambda_2^2 + X_{12} \lambda_1 \lambda_2 + o(\lambda_1^k, \lambda_2^j) \quad (5.66)$$

şeklinde  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  serisine açılabilir. Yani

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= -8\pi^2(k_1 - k_2) - 8\pi^2(k_1 + k_2)\lambda_3 \\ \Gamma_2 &= 8\pi^2(k_1 - k_2) - 8\pi^2(k_1 + k_2)\lambda_3 \\ \Gamma_3 &= 24\pi^2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + 24\pi^2(\alpha_1 + \alpha_2)^2 \lambda_3 \\ \Gamma_4 &= 2 + 2\lambda_3 \end{aligned} \quad (5.67)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
X = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8\pi^2 k_1 & 0 & 24\pi^2 \alpha_1^2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_1 \\
& + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8\pi^2 k_2 & 24\pi^2 \alpha_2^2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} -32\pi^2 k_1 & 0 & 96\pi^2 \alpha_1^2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_1^2 \\
& + \begin{pmatrix} 0 & -32\pi^2 k_2 & 96\pi^2 \alpha_2^2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_2^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 & \Gamma_4 \end{pmatrix} \lambda_1 \lambda_2 + o(\lambda_1^k \lambda_2^l)
\end{aligned} \tag{5.68}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer açılımlar ise

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ u_0 \\ c \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} \omega_1^0 \\ \omega_2^0 \\ u_0^0 \\ c^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1^1 \\ \omega_2^1 \\ u_0^1 \\ c^1 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ u_0^2 \\ c^2 \end{pmatrix} \lambda_2 \\
& + \begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \\ u_0^3 \\ c^3 \end{pmatrix} \lambda_1^2 + \begin{pmatrix} \omega_1^4 \\ \omega_2^4 \\ u_0^4 \\ c^4 \end{pmatrix} \lambda_2^2 + \begin{pmatrix} \omega_1^5 \\ \omega_2^5 \\ u_0^5 \\ c^5 \end{pmatrix} \lambda_1 \lambda_2 + o(\lambda_1^k \lambda_2^l)
\end{aligned} \tag{5.69}$$

ve  $\Delta = 24\pi^2((\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)^2 \lambda_3) + 32\pi^4((\alpha_1 - \alpha_2)^3(\rho_1 - \rho_2) + (\alpha_1 + \alpha_2)^3(\rho_1 + \rho_2)\lambda_3)$  olmak üzere

$$b = \begin{pmatrix} (96\pi^2 \alpha_1^2 + 512\pi^4 \alpha_1^3 \rho_1) \lambda_1^2 + (96\pi^2 \alpha_2^2 + 512\pi^4 \alpha_2^3 \rho_2) \lambda_2^2 \\ (24\pi^2 \alpha_1^2 + 32\pi^4 \alpha_1^3 \rho_1) \lambda_1 \\ (24\pi^2 \alpha_2^2 + 32\pi^4 \alpha_2^3 \rho_2) \lambda_2 \\ \Delta \lambda_1 \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{5.70}$$

şeklindedir. Buradaki açılımlarda iki toplam sembolü kullanıldığından işlem yükü çok fazladır ve seri açılımlarını elle yapmayı oldukça zorlaştırmaktadır. Dolayısıyla kolaylık olması bakımından Maple 14 paket programı kullanılmış, Teorem 4.1.4 te verilen  $\theta_j$  karakteristiklerinin her bir değeri yerine yazılmış ve  $\lambda_1^k \lambda_2^l$  için  $k + l > 2$  terimleri kesilmiştir.

Yukarıda geçen tüm bu açılımlar (5.64) sisteminde yerine yazılıp, uygun katsayılar eşitlendiği taktirde

$$c = (384\pi^4 \alpha_1^3 \rho_1) \lambda_1^2 + (384\pi^4 \alpha_2^3 \rho_2) \lambda_2^2 + o(\lambda_1, \lambda_2)$$

$$\omega_1 = \left( \frac{3\alpha_1^2 u_0^0}{k_1} - 3\frac{\alpha_1^2}{k_1} - 4\pi^2 \frac{\alpha_1^3 \rho_1}{k_1} \right) + \left( 3\frac{\alpha_1^2}{k_1} u_0^1 \right) \lambda_1 + \left( 3\frac{\alpha_1^2}{k_1} u_0^2 \right) \lambda_2 + o(\lambda_1, \lambda_2) \quad (5.71)$$

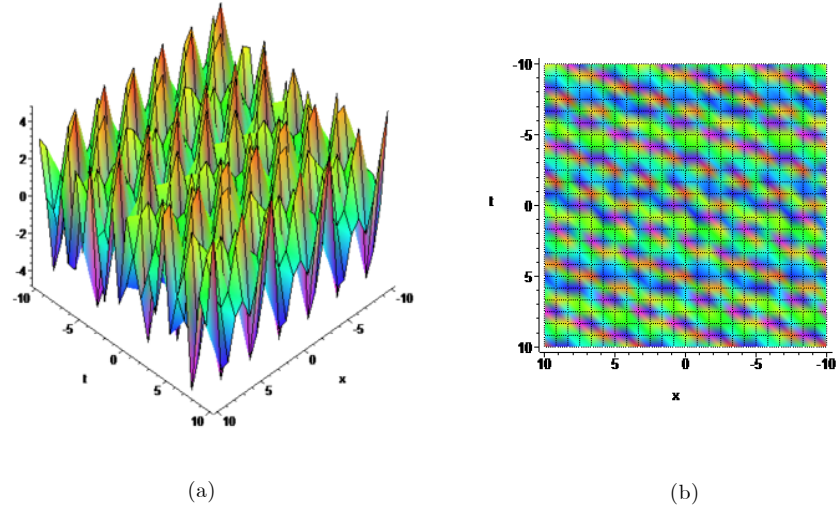
$$\omega_2 = \left( \frac{3\alpha_2^2 u_0^0}{k_2} - 3\frac{\alpha_2^2}{k_2} - 4\pi^2 \frac{\alpha_2^3 \rho_2}{k_2} \right) + \left( 3\frac{\alpha_2^2}{k_2} u_0^1 \right) \lambda_1 + \left( 3\frac{\alpha_2^2}{k_2} u_0^2 \right) \lambda_2 + o(\lambda_1, \lambda_2).$$

ifadeleri elde edilir.

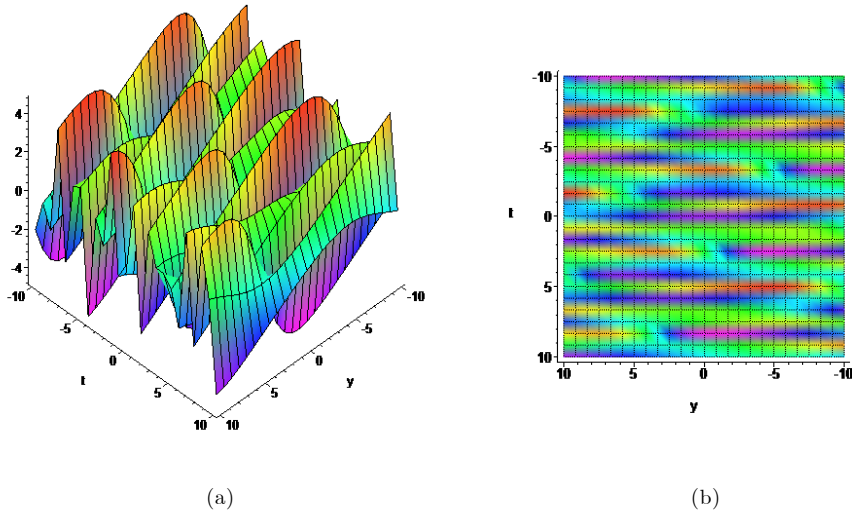
$$\text{Aranan çözüm } \vartheta(\xi_1, \xi_2, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{\pi i \langle \tau n, n \rangle + 2\pi i \langle \xi, n \rangle} \text{ olmak üzere}$$

$$u = u_0 y + 2(\ln \vartheta(\xi_1, \xi_2, \tau))_x \quad (5.72)$$

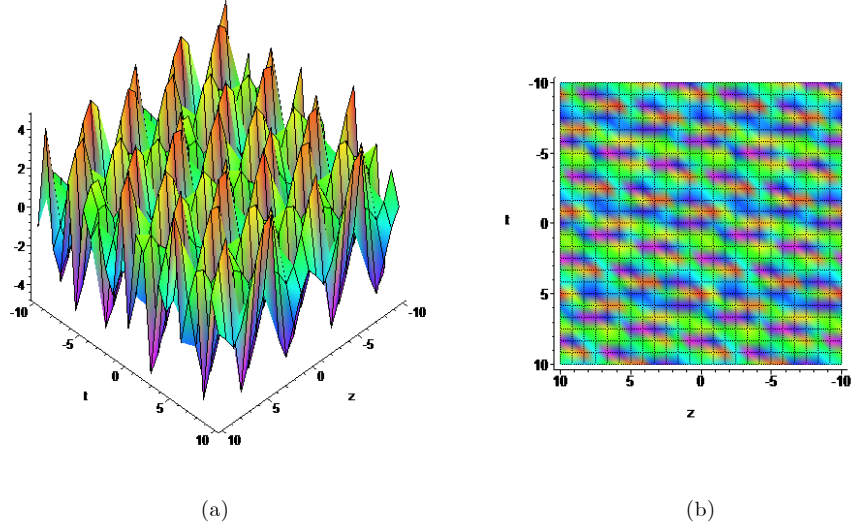
şeklindedir. Burada bilinmesi gereken  $\omega_1, \omega_2$ ; (5.71) ifadesinde bulunmuş olup, diğer  $\alpha_1, \alpha_2, \rho_1, \rho_2, k_1, k_2, \tau_{11}, \tau_{12}$  ve  $\tau_{22}$  parametrelerinin de keyfi olarak seçilmesi ile (3+1) boyutlu BKP denkleminin iki-periyodik çözümleri elde edilebilir. Şekil 5.16, Şekil 5.17 ve Şekil 5.18 de, (4.23) deki dejenere periyodik dalga şartlarını sağlayan  $\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 0.15, \rho_1 = 0.04, \rho_2 = 0.02, k_1 = 0.2, k_2 = 0.1, \tau_{11} = 0.5i, \tau_{12} = 0.1i, \tau_{22} = 0.2i$  ve  $u_0 = \delta = 0$  keyfi parametreleri altında (3+1) boyutlu BKP denkleminin dejenere iki-periyodik dalga çözümünün grafiklerinin nasıl olacağı farklı açılardan gösterilmiştir.



Şekil 5.16 : (a)  $y=z=1$  seçimi ile iki-periyodik dalganın  $x-t$  düzleminden perspektif görünümü. (b) Üstten görünümü.

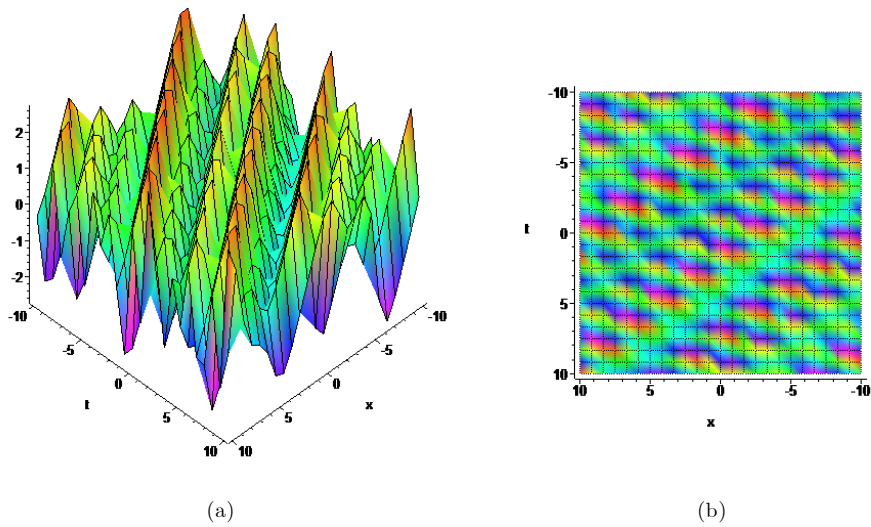


Şekil 5.17 : (a)  $x=z=1$  seçimi ile iki-periyodik dalganın  $y-t$  düzleminden perspektif görünümü. (b) Üstten görünümü.

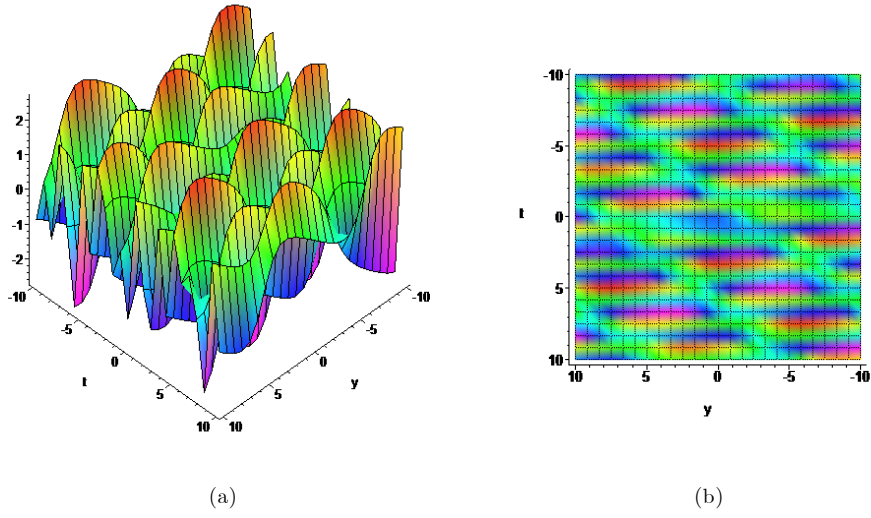


Şekil 5.18 : (a)  $x=y=1$  seçimi ile iki-periyodik dalganın  $z-t$  düzleminde perspektif görünümü. (b) Üstten görünümü.

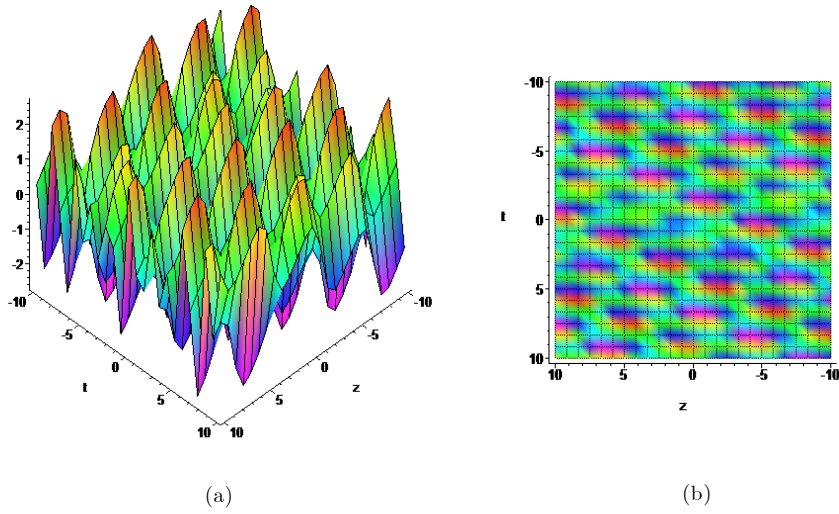
Şekil 5.19, Şekil 5.20 ve Şekil 5.21 de ise asimetrik periyodiklik şartlarını sağlayan  $\alpha_1 = -0.1$ ,  $\alpha_2 = 0.08$ ,  $\rho_1 = 0.1$ ,  $\rho_2 = 0.02$ ,  $k_1 = -0.2$ ,  $k_2 = -0.04$ ,  $\tau_{11} = 0.5i$ ,  $\tau_{12} = 0.1i$ ,  $\tau_{22} = 0.2i$  ve  $u_0 = \delta = 0$  keyfi parametreleri için (3+1) boyutlu BKP denkleminin asimetrik iki-periyodik çözümünün grafiklerinin nasıl olacağı farklı açılardan gösterilmiştir.



Şekil 5.19 : (a)  $y=z=1$  seçimi ile iki-periyodik dalganın  $x-t$  düzleminde perspektif görünümü. (b) Üstten görünümü.



Şekil 5.20 : (a)  $x=z=1$  seçimi ile iki-periyodik dalganın  $y-t$  düzleminde perspektif görünümü. (b) Üstten görünümü.



Şekil 5.21 : (a)  $x=y=1$  seçimi ile iki-periyodik dalganın  $z-t$  düzleminde perspektif görünümü. (b) Üstten görünümü.

Bu denklem için  $u_0$ ,  $c$  integral sabiti,  $\alpha_i, \rho_i, k_i, \omega_i$  ve  $\tau_{jk} = \tau_{kj}$ ,  $1 \leq j, k \leq N$  bilinmeyen parametrelerin toplam sayısını veren formülün

$$\frac{1}{2}N(N+1) + 3N + 2 \quad (5.73)$$

şeklinde olduğu görülür.

### Asimptotik Durum

Teorem 4.1.5 bize küçük bir genlik sınırı altında yukarıda bulunan iki-periyodik çözümün bilinen iki-soliton çözüme gittiğini ifade etmişti. (5.72) iki-periyodik dalga çözümü için faz değişkeni  $\xi_i = \alpha_i x + \rho_i y + k_i z + \omega_i t + \delta_i$  ve iki-soliton çözüm için faz değişkeni  $\eta_i = \mu_i x + \nu_i y + \kappa_i z + \varpi_i t + \gamma_i$ ,  $i = 1, 2$  olmak üzere Teorem 4.1.5 teki şartlar altında  $(\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (0, 0)$  iken

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0^0, \quad c \rightarrow 0 \\ \omega_1 &= \frac{3\alpha_1^2 u_0^0}{k_1} - 3\frac{\alpha_1^2}{k_1} - 4\pi^2 \frac{\alpha_1^3 \rho_1}{k_1} \\ \omega_2 &= \frac{3\alpha_2^2 u_0^0}{k_2} - 3\frac{\alpha_2^2}{k_2} - 4\pi^2 \frac{\alpha_2^3 \rho_2}{k_2}. \end{aligned} \quad (5.74)$$

bulunur. Teoreme göre

$$\alpha_i = \frac{\mu_i}{2\pi i}, \quad \rho_i = \frac{\nu_i}{2\pi i}, \quad k_i = \frac{\kappa_i}{2\pi i}, \quad \omega_i = \frac{\varpi_i}{2\pi i}, \quad \delta_i = \frac{\gamma_i - \pi i \tau}{2\pi i}$$

seçildiği takdirde soliton çözüm için yayılma bağıntısı elde edilecek olup, (5.72) nin soliton çözümü vermesi gerekir. Soliton çözümün elde edilebilmesi için, periyodik çözümde verilen sabit çözümün  $u_0 \rightarrow 0$  olması gerekir ve bunun için de  $u_0^0 = 0$  seçilmelidir. Buna göre bu ifadeler (5.74) te yerine yazılırsa soliton çözüm için dağılma bağıntısı olan

$$\begin{aligned} \varpi_1 &= -3\frac{\mu_1^2}{\kappa_1} + \frac{\mu_1^3 \nu_1}{\kappa_1} \\ \varpi_2 &= -3\frac{\mu_2^2}{\kappa_2} + \frac{\mu_2^3 \nu_2}{\kappa_2} \\ c &\rightarrow 0 \\ u_0 &= o(\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5.75)$$

elde edilir. Ayrıca sistem çözülürken  $\lambda_1 \lambda_2$  li terimin katsayısından

$$\lambda_3 = e^{2\pi i \tau_{12}} = -\frac{(\kappa_1 - \kappa_2)(\varpi_1 - \varpi_2) - (\mu_1 - \mu_2)^3(\nu_1 - \nu_2) + 3(\mu_1 - \mu_2)^2}{(\kappa_1 + \kappa_2)(\varpi_1 + \varpi_2) - (\mu_1 + \mu_2)^3(\nu_1 + \nu_2) + 3(\mu_1 + \mu_2)^2}. \quad (5.76)$$

eşitliğinin elde edilebileceği görülür ki bu da (5.50) de soliton çözüm için verilen ifade olup  $\tau_{12} = \frac{A_{12}}{2\pi i}$  olduğunun da kanıtı olmuş olur. (5.75) te bulunan dağılma bağıntısıyla birlikte  $\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow 0$  iken bulunan iki-periyodik çözüm, iki-soliton çözüme gider. İspatı



ise Teorem 4.1.5 in ispatında verilmiştir ayrıca burada gösterilmeyecektir.

### 5.2.3 Üç-periyodik dalga çözümü

Teorem 4.1.6 ya göre  $i = 1, 2, 3$  ve  $j = 1, \dots, 8$  olmak üzere  $\alpha_i, \rho_i, k_i$  ve  $\omega_i$  ifadeleri

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \sum_{n_3=-\infty}^{\infty} [-4\pi^2 \langle 2n - \theta_j, k \rangle \langle 2n - \theta_j, \omega \rangle - 12\pi^2 \langle 2n - \theta_j, \alpha \rangle^2$$

$$-16\pi^4 \langle 2n - \theta_j, \alpha \rangle^3 \langle 2n - \theta_j, \rho \rangle + 12\pi^2 u_0 \langle 2n - \theta_j, \alpha \rangle^2$$

$$+ c] \times e^{\pi i [\langle \tau(n-\theta_j), n-\theta_j \rangle + \langle \tau n, n \rangle]} = 0$$

(5.77)

sistemini sağlamalıdır. Burada amaç  $X = (a_{ij})_{8 \times 8}$  matris ve  $b = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8)$  olmak üzere  $\omega_i, k_i, u_0$  ve  $c$  ifadelerine göre

$$X(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \rho_1, \rho_2, \rho_3, u_0, c)^T = b \quad (5.78)$$

sistemini çözmektir. Yine küçük parametrelerin açılımından

$$\lambda_1 = e^{\pi i \tau_{11}}, \quad \lambda_2 = e^{\pi i \tau_{22}}, \quad \lambda_3 = e^{\pi i \tau_{33}}$$

(5.79)

$$\lambda_{12} = e^{2\pi i \tau_{12}}, \quad \lambda_{13} = e^{2\pi i \tau_{13}}, \quad \lambda_{23} = e^{2\pi i \tau_{23}}$$

$j = 1, \dots, 8$  için

$$\varepsilon_j = \sum_{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3} e^{\pi i [\langle \tau(n-\theta_j), n-\theta_j \rangle + \langle \tau n, n \rangle]}$$

$$= \lambda_1^{n_1^2 + (n_1 - \theta_j^1)^2} \lambda_2^{n_2^2 + (n_2 - \theta_j^2)^2} \lambda_3^{n_3^2 + (n_3 - \theta_j^3)^2} \quad (5.80)$$

$$\lambda_{12}^{n_1 n_2 + (n_1 - \theta_j^1)(n_2 - \theta_j^2)} \lambda_{13}^{n_1 n_3 + (n_1 - \theta_j^1)(n_3 - \theta_j^3)} \lambda_{23}^{n_2 n_3 + (n_2 - \theta_j^2)(n_3 - \theta_j^3)}$$

olmak üzere (5.78) sistemindeki tüm ifadeleri

$$\begin{aligned}
a_{j8} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \varepsilon_j \\
a_{j7} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} 12\pi^2 \langle 2n - \theta_j, \alpha \rangle^2 \varepsilon_j \\
a_{j6} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} -16\pi^4 \langle 2n - \theta_j, \alpha \rangle^3 (2n_3 - \theta_j^3) \varepsilon_j \\
a_{j5} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} -16\pi^4 \langle 2n - \theta_j, \alpha \rangle^3 (2n_2 - \theta_j^2) \varepsilon_j \\
a_{j4} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} -16\pi^4 \langle 2n - \theta_j, \alpha \rangle^3 (2n_1 - \theta_j^1) \varepsilon_j \\
a_{j3} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} -4\pi^2 \langle 2n - \theta_j, k \rangle (2n_3 - \theta_j^3) \varepsilon_j \\
a_{j2} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} -4\pi^2 \langle 2n - \theta_j, k \rangle (2n_2 - \theta_j^2) \varepsilon_j \\
a_{j1} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} -4\pi^2 \langle 2n - \theta_j, k \rangle (2n_1 - \theta_j^1) \varepsilon_j \\
b_j &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} 12\pi^2 \langle 2n - \theta_j, \alpha \rangle^2 \varepsilon_j
\end{aligned} \tag{5.81}$$

şeklinde seriye açabiliriz. (5.81) deki ifadelerle birlikte

$$\begin{aligned}
\omega_i &= \omega_i^0 + \omega_i^1 \lambda_1 + \omega_i^2 \lambda_2 + \omega_i^3 \lambda_3 + \omega_i^{11} \lambda_1^2 + \omega_i^{22} \lambda_2^2 + \omega_i^{33} \lambda_3^2 \\
&\quad + \omega_i^{12} \lambda_1 \lambda_2 + \omega_i^{13} \lambda_1 \lambda_3 + \omega_i^{23} \lambda_2 \lambda_3 + \omega_i^{123} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\
&\quad + o(\lambda_1^m \lambda_2^j \lambda_3^l), \quad m + j + l \geq 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_i &= k_i^0 + k_i^1 \lambda_1 + k_i^2 \lambda_2 + k_i^3 \lambda_3 + k_i^{11} \lambda_1^2 + k_i^{22} \lambda_2^2 + k_i^{33} \lambda_3^2 \\
&\quad + k_i^{12} \lambda_1 \lambda_2 + k_i^{13} \lambda_1 \lambda_3 + k_i^{23} \lambda_2 \lambda_3 + k_i^{123} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\
&\quad + o(\lambda_1^m \lambda_2^j \lambda_3^l), \quad m + j + l \geq 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_0 &= u_0^0 + u_0^1 \lambda_1 + u_0^2 \lambda_2 + u_0^3 \lambda_3 + u_0^{11} \lambda_1^2 + u_0^{22} \lambda_2^2 + u_0^{33} \lambda_3^2 \\
&\quad + u_0^{12} \lambda_1 \lambda_2 + u_0^{13} \lambda_1 \lambda_3 + u_0^{23} \lambda_2 \lambda_3 + u_0^{123} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\
&\quad + o(\lambda_1^m \lambda_2^j \lambda_3^l), \quad m + j + l \geq 3
\end{aligned} \tag{5.82}$$

$$\begin{aligned}
c &= c_0 + c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 + c_3 \lambda_3 + c_{11} \lambda_1^2 + c_{22} \lambda_2^2 + c_{33} \lambda_3^2 \\
&\quad + c_{12} \lambda_1 \lambda_2 + c_{13} \lambda_1 \lambda_3 + c_{23} \lambda_2 \lambda_3 + c_{123} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\
&\quad + o(\lambda_1^m \lambda_2^j \lambda_3^l), \quad m + j + l \geq 3
\end{aligned}$$

seri açılımları (5.78) denklem sisteminde yerine yazılıp,  $\lambda_1, \lambda_2$  ve  $\lambda_3$ 'ün aynı dereceli terimlerinin katsayılarının eşitlenmesiyle

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \left( -3 \frac{\alpha_1^2}{k_1} - 4\pi^2 \frac{\alpha_1^3 \rho_1^0}{k_1} + 3 \frac{\alpha_1^2 u_0^0}{k_1} \right) + \left( 3 \frac{\alpha_1^2}{k_1} u_0^1 - 4\pi^2 \frac{\alpha_1^3}{k_1} \rho_1^1 \right) \lambda_1 \\
&\quad + \left( 3 \frac{\alpha_1^2}{k_1} u_0^2 - 4\pi^2 \frac{\alpha_1^3}{k_1} \rho_1^2 \right) \lambda_2 + \left( 3 \frac{\alpha_1^2}{k_1} u_0^3 - 4\pi^2 \frac{\alpha_1^3}{k_1} \rho_1^3 \right) \lambda_3 + \dots \\
\omega_2 &= \left( -3 \frac{\alpha_2^2}{k_2} - 4\pi^2 \frac{\alpha_2^3 \rho_2^0}{k_2} + 3 \frac{\alpha_2^2 u_0^0}{k_2} \right) + \left( 3 \frac{\alpha_2^2}{k_2} u_0^1 - 4\pi^2 \frac{\alpha_2^3}{k_2} \rho_2^1 \right) \lambda_1 \\
&\quad + \left( 3 \frac{\alpha_2^2}{k_2} u_0^2 - 4\pi^2 \frac{\alpha_2^3}{k_2} \rho_2^2 \right) \lambda_2 + \left( 3 \frac{\alpha_2^2}{k_2} u_0^3 - 4\pi^2 \frac{\alpha_2^3}{k_2} \rho_2^3 \right) \lambda_3 + \dots \\
\omega_3 &= \left( -3 \frac{\alpha_3^2}{k_3} - 4\pi^2 \frac{\alpha_3^3 \rho_3^0}{k_3} + 3 \frac{\alpha_3^2 u_0^0}{k_3} \right) + \left( 3 \frac{\alpha_3^2}{k_3} u_0^1 - 4\pi^2 \frac{\alpha_3^3}{k_3} \rho_3^1 \right) \lambda_1 \\
&\quad + \left( 3 \frac{\alpha_3^2}{k_3} u_0^2 - 4\pi^2 \frac{\alpha_3^3}{k_3} \rho_3^2 \right) \lambda_2 + \left( 3 \frac{\alpha_3^2}{k_3} u_0^3 - 4\pi^2 \frac{\alpha_3^3}{k_3} \rho_3^3 \right) \lambda_3 + \dots
\end{aligned} \tag{5.83}$$

ve

$$c = (384\pi^4 \alpha_1^3 \rho_1^0) \lambda_1^2 + (384\pi^4 \alpha_2^3 \rho_2^0) \lambda_2^2 + (384\pi^4 \alpha_3^3 \rho_3^0) \lambda_3^2 + \dots \tag{5.84}$$

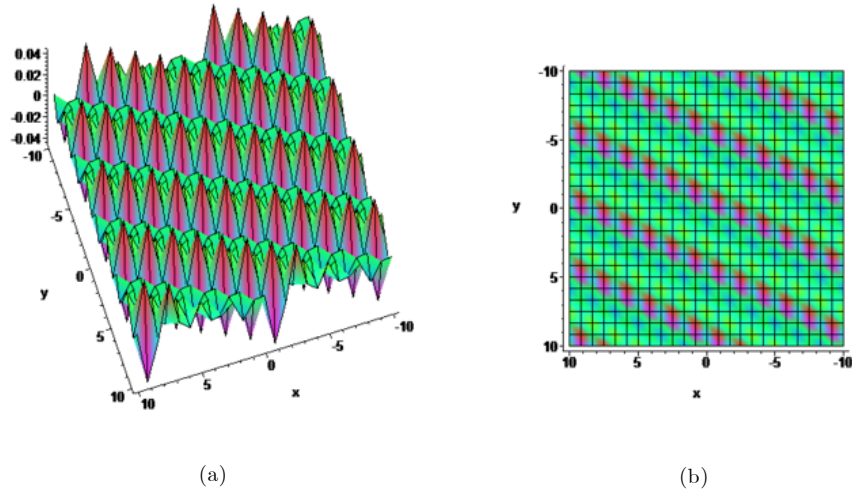
elde edilir. Böylece Teorem 4.1.6 da da belirtildiği gibi  $\vartheta(\xi_1, \xi_2, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} e^{\pi i \langle \tau n, n \rangle + 2\pi i \langle \xi, n \rangle}$  olmak üzere aranan çözüm

$$u = u_0 y + 2(\ln \vartheta(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau))_x \tag{5.85}$$

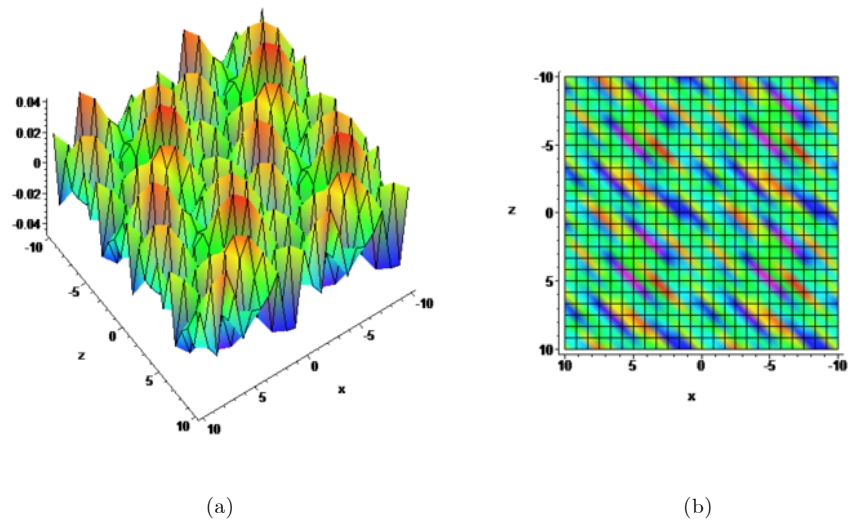
şeklinindedir.

Burada bilinmesi gereken  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, k_1, k_2, k_3, u_0$  ve  $c$  (5.83) te verilmiş olup, diğer  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}, \tau_{12}, \tau_{13}$  and  $\tau_{23}$  parametreleri keyfi olarak seçildiği tak-

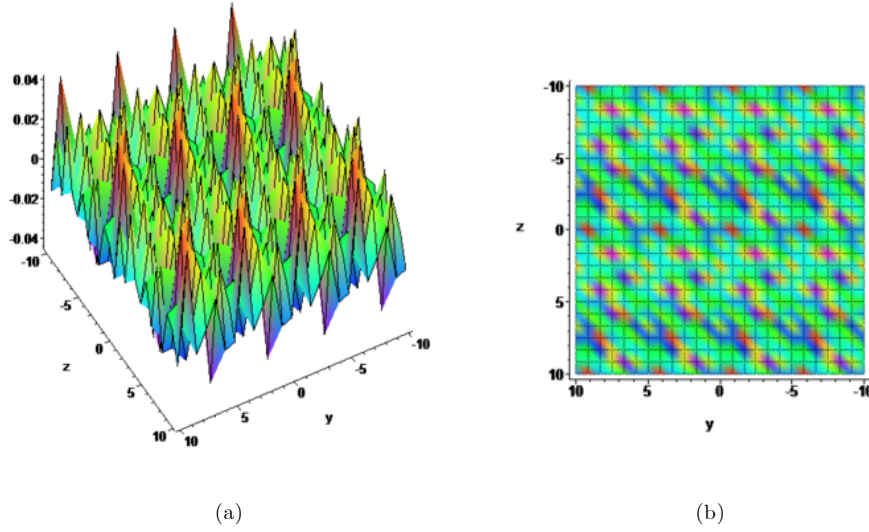
tirde (3+1) boyutlu BKP denkleminin üç-periyodik çözümleri elde edilir. Şekil 5.22, Şekil 5.23 ve Şekil 5.24 te  $\alpha_1 = 0.2$ ,  $\alpha_2 = 0.1$ ,  $\alpha_3 = 0.4$ ,  $\rho_1 = 0.4$ ,  $\rho_2 = 0.2$ ,  $\rho_3 = 0.8$ ,  $k_1 = 0.2$ ,  $k_2 = 0.3$ ,  $k_3 = 0.5$ ,  $\tau_{11} = 2i$ ,  $\tau_{22} = 2i$ ,  $\tau_{33} = 2i$ ,  $\tau_{12} = i$ ,  $\tau_{13} = 0.5i$ ,  $\tau_{23} = i$  ve  $u_0 = \delta = 0$  şeklinde seçilen keyfi parametreler için (3+1) boyutlu BKP denkleminin üç-periyodik çözümünün grafiklerinin nasıl olacağı gösterilmiştir.



Şekil 5.22 : (a)  $z=t=1$  seçimi ile üç-periyodik dalganın  $x-y$  düzleminde perspektif görünümü. (b) Üstten görünümü.



Şekil 5.23 : (a)  $y=t=1$  seçimi ile üç-periyodik dalganın  $z-x$  düzleminde perspektif görünümü. (b) Üstten görünümü.



Şekil 5.24 : (a)  $x=t=1$  seçimi ile üç-periyodik dalgaının  $y-z$  düzleminde perspektif görünümü. (b) Üstten görünümü.

### Asimptotik Durum

(5.83) ten  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rightarrow 0$  iken

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= -3 \frac{\alpha_1^2}{k_1} - 4\pi^2 \frac{\alpha_1^3 \rho_1^0}{k_1} + 3 \frac{\alpha_1^2 u_0^0}{k_1} \\
 \omega_2 &= -3 \frac{\alpha_2^2}{k_2} - 4\pi^2 \frac{\alpha_2^3 \rho_2^0}{k_2} + 3 \frac{\alpha_2^2 u_0^0}{k_2} \\
 \omega_3 &= -3 \frac{\alpha_3^2}{k_3} - 4\pi^2 \frac{\alpha_3^3 \rho_3^0}{k_3} + 3 \frac{\alpha_3^2 u_0^0}{k_3} \\
 c &\rightarrow 0
 \end{aligned} \tag{5.86}$$

bulunur. Teorem 4.1.7 ye göre,  $u_0 \rightarrow 0$  olması için  $u_0^0 = 0$  seçilip, (4.36) daki ifadeler (5.86) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
 \varpi_1 &= -3 \frac{\mu_1^2}{\kappa_1} + \frac{\mu_1^3 \nu_1}{\kappa_1} \\
 \varpi_2 &= -3 \frac{\mu_2^2}{\kappa_2} + \frac{\mu_2^3 \nu_2}{\kappa_2} \\
 \varpi_3 &= -3 \frac{\mu_3^2}{\kappa_3} + \frac{\mu_3^3 \nu_3}{\kappa_3} \\
 c &\rightarrow 0 \\
 u_0 &= o(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \rightarrow 0
 \end{aligned} \tag{5.87}$$

şeklinde, (5.53) te de gösterilmiş olan, üç-soliton çözüm için dağılma bağıntısı elde

edilir. Yani Teorem 4.1.7 deki şartlar altında (5.85) te bulunan üç-periyodik dalga çözümü, bilinen üç-soliton çözümü verir.

## 6. İKİLİ (COUPLED) BİLİNEER FORMLAR İÇİN HIROTA-RIEMANN METODU

Lineer olmayan bir kısmi diferensiyel denklemin bilineer formunu yazmak her zaman kolay olmayıp çoğu zaman doğrudan bulunamayabilir. Önceki bölümde ele aldığımız örneklerde görüleceği üzere tek bir bilineer form bulunmuştur. Fakat bazı denklemlerin bilineer formları yapılan dönüşümler sayesinde ikili ya da daha fazla denklem sistemi şeklinde yazılabilmektedir. İşte bu durumda ilk bölümde bahsedilmiş olan, Hirota-Riemann metodundaki teoremlerin daha genel formlarını kullanmak gerekecektir. Bu bölümde ise bu tip bilineer formları ve Riemann theta fonksiyonlarını kullanarak kuasi-periodik çözümlerin nasıl bulunacağı gösterilecektir.

(3.35) ifadesinde de daha önce karşımıza çıkmış olan çok-boyutlu Riemann theta fonksiyonunu tanımlayalım. Fakat (3.37) de belirttiğimiz üzere farklı gösterimlerinin de kullanılabileceğini göstermek amacıyla Riemann Theta fonksiyonu (3.35) ten farklı olarak aşağıdaki gibi seçilecektir.

$n = (n_1, \dots, n_N)^T \in \mathbb{Z}^N$  tamsayı değerli bir vektör,  $s = (s_1, \dots, s_N)^T \in \mathbb{C}^N$ ,  $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_N)^T \in \mathbb{C}^N$  kompleks vektörler ve  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)^T \in \mathbb{C}^N$  kompleks değerli faz değişkenleri olmak üzere,  $N$  boyutlu iki vektörün iç çarpımının  $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + \dots + u_N v_N$  şeklinde tanımlandığı

$$\vartheta(\xi, \epsilon, s \mid \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} e^{2\pi i \langle \xi + \epsilon, n + s \rangle - \pi \langle \tau(n+s), n+s \rangle} \quad (6.1)$$

çok boyutlu Riemann theta fonksiyonunu ele alalım. Burada ifadenin yakınsak olması için theta fonksiyonunun periyod matrisi olan  $\tau = \tau_{ij}$ ,  $N \times N$  tipinde pozitif tanımlı ve reel değerli bir matris seçilmelidir.

**Teorem 6.0.1**  $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_N)^T$ ,  $\epsilon' = (\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_N)^T$  kompleks vektörler,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)^T$ ,  $\xi_j = \alpha_j x + \dots + \omega_j t + \delta_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  faz değişkeni için  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$  olmak üzere,  $\sum_{\theta} \theta$  ifadesi  $\theta_1 = 0, 1; \dots; \theta_N = 0, 1$  tüm olası kombinasyonlarına karşılık  $2^N$  farklı dönüşümü ifade etmek üzere,  $\vartheta(\xi, \epsilon', 0 \mid \tau)$  ve  $\vartheta(\xi, \epsilon, 0 \mid \tau)$  iki Riemann theta fonksiyonu,  $D_x$ ,  $D_y$

ve  $D_t$  Hirota bilineer operatörleri ile birlikte

$$\begin{aligned}
& D_x \vartheta(\xi, \epsilon', 0 \mid \tau) \cdot \vartheta(\xi, \epsilon, 0 \mid \tau) \\
&= \left[ \sum_{\theta} \partial_x \vartheta(2\xi, \epsilon' - \epsilon, -\theta/2 \mid 2\tau) \Big|_{\xi=0} \right] \\
&\quad \times \vartheta(2\xi, \epsilon' + \epsilon, \theta/2 \mid 2\tau)
\end{aligned} \tag{6.2}$$

ifadesini sağlar.

Genel olarak  $F(D_x, D_y, D_t)$  bir polinom operatörü için

$$\begin{aligned}
& \sum_{\theta} C(\epsilon', \epsilon, \theta) \\
&= \sum_{\theta} F(4\pi i \langle n - \theta/2, \alpha \rangle, \dots, 4\pi i \langle n - \theta/2, \omega \rangle) \\
&\quad \times e^{\{-2\pi \langle \tau(n-\theta/2), n-\theta/2 \rangle + 2\pi i \langle n-\theta/2, \epsilon' - \epsilon \rangle\}}
\end{aligned} \tag{6.3}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
& F(D_x, D_y, D_t) \vartheta(\xi, \epsilon', 0 \mid \tau) \cdot \vartheta(\xi, \epsilon, 0 \mid \tau) \\
&= \left[ \sum_{\theta} C(\epsilon', \epsilon, \theta) \right] \vartheta(2\xi, \epsilon' + \epsilon, \theta/2 \mid 2\tau)
\end{aligned} \tag{6.4}$$

dir (Luo ve Fan, 2010).

Teoremin ispatı kolaylık olması bakımından bir-boyutlu durum için yapılacaktır. Daha sonra N-boyutlu durum için genelleme yapılabilir. (3.19) da verilmiş olan bilineer formun özelliğine göre

$$\begin{aligned}
& D_x \vartheta(\xi, \epsilon', 0 \mid \tau) \cdot \vartheta(\xi, \epsilon, 0 \mid \tau) \\
&= \sum_{m', m \in \mathbb{Z}} D_x e^{2\pi i m'(\xi + \epsilon') - \pi m'^2 \tau} \\
&\quad \times e^{2\pi i m(\xi + \epsilon) - \pi m^2 \tau} \\
&= \sum_{m', m \in \mathbb{Z}} 2\pi i(m' - m)\alpha \\
&\quad \times e^{2\pi i(m'+m)\xi - 2\pi i(m'\epsilon' + m\epsilon) - \pi \tau(m'^2 + m^2)}
\end{aligned} \tag{6.5}$$



ifadesi elde edilir.  $m = l' - m'$  değişken dönüşümü yapıldığı taktirde

$$\begin{aligned} & \sum_{m', l' \in \mathbb{Z}} 2\pi i (2m' - l') \alpha e^{2\pi i l' \xi - 2\pi i [m' \epsilon' + (l' - m') \epsilon] - \pi \tau [m'^2 + (l' - m')^2]} \\ & \stackrel{l' = 2l + \theta}{=} \sum_{\theta=0,1} \sum_{m' \in \mathbb{Z}} 2\pi i (2m' - 2l - \theta) \alpha \\ & \quad \times e^{4\pi i (l + \theta/2) \xi - 2\pi i (m' \epsilon' - (m' - 2l - \theta) \epsilon) - \pi \tau (m'^2 + (m' - 2l - \theta)^2)} \end{aligned}$$

bulunur. Son olarak da

$$\begin{aligned} n + l &= (n - \theta/2) + (l + \theta/2) \\ n - l - \theta &= (n - \theta/2) - (l + \theta/2) \end{aligned}$$

ile birlikte  $m' = n + l$  alındığı taktirde

$$\begin{aligned} & \sum_{\theta=0,1} \left[ \sum_{n \in \mathbb{Z}} 4\pi i (n - \theta/2) \alpha e^{2\pi i (n - \theta/2) (\epsilon' - \epsilon) - 2\pi \tau (n - \theta/2)^2} \right] \\ & \quad \times \left[ \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i (l + \theta/2) (2\xi + \epsilon' + \epsilon) - 2\pi \tau (l + \theta/2)^2} \right] \\ & = \left[ \sum_{\theta=0,1} D_x \vartheta(2\xi, \epsilon' - \epsilon, -\theta/2 \mid 2\tau) \Big|_{\xi=0} \right] \\ & \quad \times \vartheta(2\xi, \epsilon' + \epsilon, \theta/2 \mid 2\tau) \end{aligned}$$

elde edilir ve teoremin ispatı tamamlanmış olur.

$\theta_1 = 0, 1; \dots; \theta_N = 0, 1$  tüm olası kombinasyonları için

$$\sum_{\mu} C(\theta) = 0 \tag{6.6}$$

için (6.3) ve (6.4) teki ifadeler sağlanır. Yani (6.6) için böyle tüm kombinasyonlar sağlandığında  $\vartheta(\xi, \epsilon', 0 \mid \tau)$  ve  $\vartheta(\xi, \epsilon, 0 \mid \tau)$  fonksiyonları

$$F(D_x, D_y, D_t) \vartheta(\xi, \epsilon', 0 \mid \tau) \cdot \vartheta(\xi, \epsilon, 0 \mid \tau)$$

bilineer denklemin kuasi-periyodik çözümleri olurlar.

**Teorem 6.0.2** *Teorem 6.0.1'de verilen  $C(\theta)$  ve  $F(D_x, D_y, D_t)$  için  $\epsilon'_j - \epsilon_j = \pm \frac{1}{2}$  olmak üzere iki durum mevcuttur.*

(i) Eğer  $F(D_x, D_y, D_t)$  bir simetrik operatör yani

$$F(-D_x, -D_y, -D_t) = F(D_x, D_y, D_t)$$

ise  $\sum_{j=1}^N \theta_j$  tek sayı olduğu durumda

$$\sum_{j=1}^N \theta_j = 1 \pmod{2} \quad \text{için} \quad C(\theta) |_{\theta=0} = 0 \quad (6.7)$$

olup  $C(\theta)$  sıfıra eşittir.

(ii) Eğer  $F(D_x, D_y, D_t)$  bir aykırı simetrik operatör yani

$$F(-D_x, -D_y, -D_t) = -F(D_x, D_y, D_t)$$

ise  $\sum_{j=1}^N \theta_j$  çift sayı olduğu durumda

$$\sum_{j=1}^N \theta_j = 0 \pmod{2} \quad \text{için} \quad C(\theta) |_{\theta=0} = 0 \quad (6.8)$$

olup  $C(\theta)$  sıfıra eşittir.

**İspat :** (ii)'nin ispatı diğerine çok benzediği için ispat (i) için yani  $F(D_x, D_y, D_t)$  çift fonksiyon olduğu durum için yapılacaktır.  $j = 1, \dots, N$  için  $\bar{n}_j \in \mathbb{Z}$ ,  $\bar{n} = (\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_N)$  olmak üzere  $n = -\bar{n} + \theta$  dönüşümü  $C(\theta)$ 'ya uygulandığı takdirde

$$\begin{aligned} C(\theta) &= \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}} F(-M) e^{\left\{ -2\pi i \langle \tau(\bar{n}-\theta/2), \bar{n}-\theta/2 \rangle + 2\pi i \langle \bar{n}-\theta/2, \epsilon' - \epsilon \rangle \right\}} \\ &= C(\theta) e^{4\pi i \langle \bar{n}-\theta/2, \epsilon' - \epsilon \rangle} \\ &= C(\theta) e^{\pm 2\pi i \sum_{j=1}^N \bar{n}_j} e^{\pm \pi i \sum_{j=1}^N \theta_j} \\ &= C(\theta) e^{\pm \pi i} = -C(\theta) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan  $C(\theta) = -C(\theta)$  olup  $C(\theta) = 0$  olduğu görülür ve ispat tamamlanmış olur.

**Not 6.0.3** Bu bölümde verilen teoremler aslında ikinci bölümde verilen teoremlerin daha genel bir formudur. Dikkat edilirse önceki bölümlerde verilen bilineer formlar

$H(D_x, \dots, D_t)f \cdot f$  şeklinde tek bir bilineer form halinde yazılmış ve tek bir  $f$  fonksiyonu kullanılmış.  $H(D_x, \dots, D_t)$  ifadeleri hepsinde çift fonksiyon olduğundan yukarıdaki teoremlerden (i) maddesi uygulanır. Bilineer formu yazarken sadece  $f$  kullanıldığından  $\epsilon' = \epsilon$  olup  $\epsilon' - \epsilon = 0$  seçilir. Bu bilgiler göz önüne alındığında yine Teorem 6.0.2 de ikinci bölümde verilen teoreme karşılık gelir. İkinci bölümde verilen teorem daha sadeleştirilmiş olduğundan tek fonksiyonlu ifadelerde genelde önceden ispatlamış olduğumuz teoremler kullanılmaktadır. Fakat burada bahsi geçen teorem de aynı sonucu vereceğinden ikisi de kullanılabilir. İki kullanımının da görülmesi açısından tezde iki teoreme de yer verilmiştir.

## 6.1 (2+1) Boyutlu Breaking Soliton Denkleminin Kuasi Periyodik Çözümü

$$u_{xt} + u_{xxxxy} - 4u_x u_{xy} - 2u_{xx} u_y = 0 \quad (6.9)$$

ile belirtilen (2+1) boyutlu breaking soliton denklemi ele alınsın (Fan ve Chow, 2011). Bu makalede Fan ve Chow, bilineer formalizmi, bilineer Backlund dönüşümlerini, Lax çiftlerini ve Darboux kovaryant Lax çiftlerini oluşturabilmek için ikili Bell polinomu yaklaşımını kullanmışlardır. Bu çalışmada ise Bell polinomları yardımıyla bulunmuş olan

$$\begin{aligned} H_1(\mathbf{D}) &= (D_x^2 - \lambda)F \cdot G = 0 \\ H_2(\mathbf{D}) &= (D_t + D_y D_x^2 + 3\lambda D_y - \mu)F \cdot G = 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

şeklindeki bilineer Backlund dönüşümü kullanılarak, kuasi periyodik çözümleri elde edilecektir. Fakat burada çözümü bulabilmek için  $\mu = 0$  seçilecektir. Aksi takdirde çözümde kompleks ifadeler kalmaktadır.

### 6.1.1 Bir-periyodik dalga çözümü

Bilineer formda verilen  $F$  ve  $G$  fonksiyonlarını Teorem 6.0.2 de verilen  $\epsilon'_j - \epsilon_j = \pm \frac{1}{2}$  şartına uymak koşulu ile theta fonksiyonunun kolay bir gösterimi olan  $N = 1$  ve  $s = 0$

için  $\xi = kx + ly + \omega t + \xi^{(0)}$  faz değişkeni ve  $\tau > 0$  pozitif bir parametre olmak üzere

$$\begin{aligned} F &= \vartheta(\xi, 0, 0 \mid \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i n \xi - \pi n^2 \tau} \\ G &= \vartheta(\xi, \frac{1}{2}, 0 \mid \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i n (\xi + \frac{1}{2}) - \pi n^2 \tau} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n e^{2\pi i n \xi - \pi n^2 \tau} \end{aligned} \quad (6.11)$$

şeklinde tanımlansın. Teorem 6.0.1 ve Teorem 6.0.2 den

$$\begin{aligned} &\sum_{n \in \mathbb{Z}} H(4\pi i < n - \theta/2, k >, \dots, 4\pi i < n - \theta/2, \omega >) \\ &\quad \times e^{-2\pi < \tau(n - \theta/2), n - \theta/2 > + 2\pi i < n - \theta/2, \epsilon' - \epsilon >} \end{aligned} \quad (6.12)$$

olmalıdır.

Teorem 6.0.2 ye göre  $H_1$  bir simetrik operatör olduğundan  $\theta = 1$  için  $C(\theta) = 0$  olur. Yani sistemde  $C(\theta)$  ifadesinin kalabilmesi için  $\theta = 0$  seçilmelidir. Aynı şekilde  $H_2$  bir anti simetrik operatördür. Dolayısıyla  $\theta = 0$  için  $C(\theta) = 0$  dır. Yani sistemde  $C(\theta)$  ifadesinin kalabilmesi için  $\theta = 1$  seçilmelidir. Buna göre

$$\begin{aligned} &\sum_{n \in \mathbb{Z}} ((4\pi i(n - \theta/2))^2 k^2 - \lambda) e^{-2\pi \tau(n - \theta/2)^2 + 2\pi i(n - \theta/2)\frac{1}{2}} \Big|_{\theta=0} = 0 \\ &\sum_{n \in \mathbb{Z}} (4\pi i(n - \theta/2)\omega + (4\pi i(n - \theta/2))^3 k^2 l + 3\lambda(4\pi i(n - \theta/2))l) \\ &\quad \times e^{-2\pi \tau(n - \theta/2)^2 + 2\pi i(n - \theta/2)\frac{1}{2}} \Big|_{\theta=1} = 0 \end{aligned}$$

olup yukarıdaki açıklama gereği

$$\begin{aligned} &\sum_{n \in \mathbb{Z}} ((4\pi i)^2 n^2 k^2 - \lambda) e^{-2\pi \tau n^2 + \pi i n} = 0 \\ &\sum_{n \in \mathbb{Z}} ((4\pi i(n - 1/2)\omega + (4\pi i(n - 1/2))^3 k^2 l + 3\lambda(4\pi i(n - 1/2))l) \\ &\quad \times e^{-2\pi \tau(n - \frac{1}{2})^2 + \pi i(n - \frac{1}{2})} = 0 \end{aligned} \quad (6.13)$$

yazılır. Burada  $\rho = e^{-\frac{\pi \tau}{2}}$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \vartheta_1(\xi, \tau) &= \vartheta(2\xi, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \mid 2\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho^{(2n-1)^2} e^{2\pi i(2n-1)(\xi + \frac{1}{4})} \\ \vartheta_2(\xi, \tau) &= \vartheta(2\xi, \frac{1}{2}, 0 \mid 2\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho^{4n^2} e^{4\pi i n(\xi + \frac{1}{4})} \end{aligned}$$

şeklinde gösterilsin.

$$\vartheta'_j = \vartheta'_j(0, \rho) = \left. \frac{d\vartheta_j(\xi, \rho)}{d\xi} \right|_{\xi=0}$$

olmak üzere (6.13) sistemi

$$\begin{aligned} \vartheta''_2 k^2 - \lambda \vartheta_2 &= 0 \\ \vartheta'_1 \omega + \vartheta'''_1 k^2 l + 3\lambda \vartheta'_1 l &= 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

olarak yazılabilir. Bu haliyle sistem kolay bir şekilde çözülebilir ve

$$\lambda = \frac{\vartheta''_2 k^2}{\vartheta_2} \quad (6.15)$$

ve

$$\omega = \frac{-3\lambda \vartheta'_1 l - \vartheta'''_1 k^2 l}{\vartheta'_1} \quad (6.16)$$

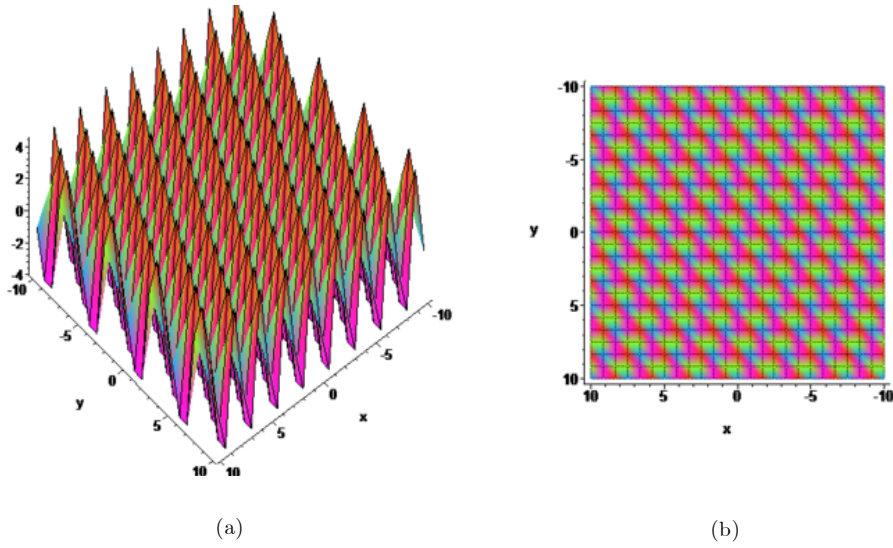
bulunur. (6.15), (6.16) da yerine yazılırsa

$$\omega = \frac{-3\vartheta''_2 \vartheta'_1 l - \vartheta'''_1 \vartheta_2 k^2 l}{\vartheta'_1 \vartheta_2} \quad (6.17)$$

elde edilir. Böylece  $\xi = kx + ly + \omega t + \xi^{(0)}$  olmak üzere (6.17)'de bulunan  $\omega$  nın yerine yazılması ile bir-periyodik dalga çözümü

$$u = 2\partial_x \ln(\vartheta(\xi, 0, 0 | \tau)) \quad (6.18)$$

elde edilir. Önceki örneklerde de belirtildiği gibi  $\omega$  çözülen sistemden bulunacak olup diğer parametreler  $k, l$  ve  $\tau$  keyfi parametrelerdir. Şekil 6.1 de  $k = 0.8$ ,  $l = 0.2$ ,  $\xi^{(0)} = 0$  ve  $\tau = 0.5$  şeklinde seçilen keyfi parametreler altında (2+1) boyutlu Breaking Soliton denkleminin bir-periyodik dalga çözüm grafiklerinin nasıl olacağı gösterilmiştir.



Şekil 6.1 : (a)  $t=1$  seçimi ile bir-periyodik dalganın  $x-y$  düzleminde perspektif görünümü.(b)Üstten görünümü

### Asimptotik Durum

Bir-periyodik çözümün küçük genlik sınırı altında bir-soliton çözüme gitmesi şartları Teorem 4.1.3 te verilmişti. Burada teoremden farklı olarak  $\varepsilon = \frac{\gamma - \pi i \tau}{2\pi i}$ , yerine  $\varepsilon = \frac{\gamma + \pi \tau}{2\pi i}$  seçilmelidir. Çünkü (6.1) de verilen Riemann theta fonksiyonunu öncekinden biraz farklı seçilmişti. Asimptotik durumu incelemek için (6.14) de verilen sistem  $(\omega, \lambda)^T$  parametrelerine göre çözülmelidir. Küçük parametrelerin açılımı yöntemine göre bu parametreleri

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_0 + \lambda_1 \rho + \lambda_2 \rho^2 + \dots = \lambda_0 + o(\rho) \\ \omega &= \omega_0 + \omega_1 \rho + \omega_2 \rho^2 + \dots = \omega_0 + o(\rho)\end{aligned}\tag{6.19}$$

ve katsayıları da

$$\begin{aligned}\vartheta_2 &= 1 + 2\rho^4 + \dots \\ \vartheta_2'' &= 32\pi^2 \rho^4 + \dots \\ \vartheta_1' &= -4\pi \rho + 12\pi \rho^9 + \dots \\ \vartheta_1''' &= 16\pi^3 \rho + 432\pi^3 \rho^9 + \dots\end{aligned}\tag{6.20}$$

olacak şekilde  $\rho$  parametresine göre seriye açılmalıdır. (6.19) ve (6.20) yi (6.14) te verilen sistemde yerine yazıp, aynı dereceli terimlerin katsayıları eşitlendiğinde  $\rho \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\lambda &\rightarrow \lambda_0 = 0 \\ \omega &\rightarrow \omega_0 = 4\pi^2 k^2 l\end{aligned}\tag{6.21}$$

elde edilir. Teorem 4.1.3 bu denklemin faz değişkenlerine uyarlandığında  $\xi = kx + ly + \omega t + \xi^0$  periyodik çözümlerin faz değişkeni,  $\eta = \mu x + \nu y + \varpi t + \gamma$  ise soliton çözümlerin faz değişkeni olmak üzere

$$k = \frac{\mu}{2\pi i}, \quad l = \frac{\nu}{2\pi i}, \quad \omega = \frac{\varpi}{2\pi i}, \quad \xi^0 = \frac{\gamma + \pi\tau}{2\pi i}$$

ifadeleri (6.21) de yerine yazıldığı taktirde (6.9) da verilen (2+1) boyutlu breaking soliton denkleminin soliton çözümü için

$$\begin{aligned} \lambda &\rightarrow 0 \\ \varpi &= -\mu^2\nu \end{aligned}$$

şeklindeki yayılma bağıntısı elde edilir. Yukarıdaki bilgiler de kullanılarak (6.18) de verilen periyodik çözümün soliton çözüme gittiği gösterilebilir.

$$F = \vartheta(\xi, 0, 0 | \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i n \xi - \pi n^2 \tau}$$

theta fonksiyonunu  $\rho = e^{-\frac{\pi\tau}{2}}$  olmak üzere  $\rho$  serisine açılırsa

$$F = 1 + \rho^2(e^{2\pi i \xi} + e^{-2\pi i \xi}) + \rho^8(e^{4\pi i \xi} + e^{-4\pi i \xi}) + \dots$$

elde edilir.  $\zeta = 2\pi i \xi - \pi\tau$  olmak üzere yukarıdaki ifade

$$F = 1 + e^\zeta + \rho^4(e^{-\zeta} + e^{2\zeta}) + \rho^{12}(e^{-2\zeta} + e^{3\zeta}) + \dots$$

şeklinde düzenlenebilir.  $\rho \rightarrow 0$  ise bir soliton çözüme karşılık gelen

$$1 + e^\zeta$$

elde edilir.

### 6.1.2 İki-periyodik dalga çözümü

$N = 2$ ,  $\mathbf{s} = 0$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  için  $\mathbf{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ , faz değişkeni  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{C}^2$ ,  $\xi_j = k_j x + l_j y + \omega_j t + \xi_j^{(0)}$   $j = 1, 2$  ve  $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $\mathbf{l} = (l_1, l_2) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{Z}^2$  olmak üzere  $F$  ve  $G$  fonksiyonları

$$\begin{aligned} F &= \vartheta(\xi, 0, 0 \mid \tau) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} e^{2\pi i \langle \xi, \mathbf{n} \rangle - \pi \langle \tau \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle} \\ G &= \vartheta(\xi, \frac{1}{2}, 0 \mid \tau) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} e^{2\pi i \langle \xi + \frac{1}{2}, \mathbf{n} \rangle - \pi \langle \tau \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle} \\ &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} (-1)^{n_1 + n_2} e^{2\pi i \langle \xi, \mathbf{n} \rangle - \pi \langle \tau \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle} \end{aligned} \quad (6.22)$$

olacak şekilde seçilsin. (6.12) de verilen ifade iki boyut için uyarlanırsa  $\boldsymbol{\theta} = \theta_i = (\theta_i^1, \theta_i^2)^T$ ,  $\theta_1 = (0, 0)^T$ ,  $\theta_2 = (1, 0)^T$ ,  $\theta_3 = (0, 1)^T$ ,  $\theta_4 = (1, 1)^T$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  theta fonksiyonunun karakteristikleri olmak üzere

$$\begin{aligned} &\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} H(4\pi i \langle \mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}/2, \mathbf{k} \rangle, \dots, 4\pi i \langle \mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}/2, \boldsymbol{\omega} \rangle) \\ &\quad \times e^{-2\pi \langle \tau(\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}/2), \mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}/2 \rangle + 2\pi i \langle \mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}/2, \boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\varepsilon} \rangle} \end{aligned} \quad (6.23)$$

yazılır. Teorem 6.0.2 ye göre  $H_1$  bir simetrik operatör olduğundan  $(\theta_2, \theta_3) = (1, 0), (0, 1)$  için doğrudan sifira gider.  $H_2$  ise bir anti simetrik operatör olduğu için  $(\theta_1, \theta_4) = (0, 0), (1, 1)$  için sıfır olacaktır. Buna göre

$$\begin{aligned} &\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} (-16\pi^2 \langle \mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}/2, \mathbf{k} \rangle^2 - \lambda) e^{-2\pi \langle \tau(\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}/2), \mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}/2 \rangle + \pi i \langle \mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}/2, \boldsymbol{\omega} \rangle} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=(\theta_1, \theta_4)} = 0 \\ &\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} (4\pi i \langle \mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}/2, \boldsymbol{\omega} \rangle - 64\pi^3 i \langle \mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}/2, \mathbf{l} \rangle \langle \mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}/2, \mathbf{k} \rangle^2 + 3\lambda (4\pi i \langle \mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}/2, \mathbf{l} \rangle) \\ &\quad \times e^{-2\pi \langle \tau(\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}/2), \mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}/2 \rangle + \pi i \langle \mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}/2, \boldsymbol{\omega} \rangle} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=(\theta_2, \theta_3)} = 0 \end{aligned} \quad (6.24)$$

şeklinde bir sistem yazılabilir ve bu sistem Riemann theta fonksiyonu kullanılarak düzenlenebilir. Bunun için

$$\rho_{kl} = e^{-\frac{\pi \tau_{kl}}{2}}, \quad k, l = 1, 2, \quad \rho = (\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{22})$$



seçildiği takdirde  $s_j = (s_{j,1}, s_{j,2})$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ ,  $s_1 = (0, 1)$ ,  $s_2 = (1, 0)$ ,  $s_3 = (0, 0)$ ,  $s_4 = (1, 1)$  olmak üzere theta fonksiyonu

$$\begin{aligned} \vartheta_j(\xi, \rho) &= \vartheta\left(2\xi, \frac{1}{2}, \frac{-s_j}{2} \mid 2\tau\right) = \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i \langle 2\xi + \frac{1}{2}, n - \frac{s_j}{2} \rangle - \pi \langle \tau(n - \frac{s_j}{2}), n - \frac{s_j}{2} \rangle} \\ &= \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} e^{4\pi i \langle \xi + \frac{1}{4}, n - \frac{s_j}{2} \rangle} \prod_{k, l=1}^2 \rho_{kl}^{(2n_k - s_{j,k})(2n_l - s_{j,l})} \end{aligned} \quad (6.25)$$

olacaktır.

(6.24) sistemindeki ilk denklemin düzenlenebilmesi için (6.25) te verilen theta fonksiyonunda  $j = 3$  alınsın. Bu durumda  $s_j$  den  $s_3 = (0, 0)$  seçilmelidir. Yani theta fonksiyonu

$$\begin{aligned} \vartheta_3(\xi, \rho) &= \vartheta\left(2\xi, \frac{1}{2}, -\frac{s_3}{2} \mid 2\tau\right) \\ &= \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} e^{4\pi i \left\langle \begin{pmatrix} \xi_1 + \frac{1}{4} \\ \xi_2 + \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \right\rangle} \rho_{11}^{(2n_1)^2} \rho_{12}^{2(4n_1 n_2)} \rho_{22}^{(2n_2)^2} \\ &= \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} e^{4\pi i [n_1 \xi_1 + n_2 \xi_2 + \frac{1}{4}(n_1 + n_2)]} \rho_{11}^{(2n_1)^2} \rho_{12}^{2(4n_1 n_2)} \rho_{22}^{(2n_2)^2} \end{aligned} \quad (6.26)$$

olacaktır. (6.24) sistemindeki ilk denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned} &\sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} (-16\pi^2 \langle \mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}/2, \mathbf{k} \rangle^2 - \lambda) e^{-2\pi \langle \tau(\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}/2), \mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}/2 \rangle + \pi i \langle \mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}/2, \mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}/2 \rangle} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=(\theta_1, \theta_4)} \\ &= \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \left( -16\pi^2 \left\langle \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \right\rangle^2 - \lambda \right) e^{-2\pi \left\langle \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \tau_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \right\rangle + \pi i (n_1 + n_2)} \\ &= \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} (-16\pi^2 (n_1 k_1 + n_2 k_2)^2 - \lambda) e^{-2\pi (\tau_{11} n_1^2 + 2\tau_{12} n_1 n_2 + \tau_{22} n_2^2) + \pi i (n_1 + n_2)} \\ &= \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} (-16\pi^2 (n_1 k_1 + n_2 k_2)^2 - \lambda) \rho_{11}^{(2n_1)^2} \rho_{12}^{2(4n_1 n_2)} \rho_{22}^{(2n_2)^2} e^{\pi i (n_1 + n_2)} = 0 \end{aligned} \quad (6.27)$$

elde edilir.  $\nabla = (\partial_{\xi_1}, \partial_{\xi_2}, \dots, \partial_{\xi_n})$  türev operatörü ve

$$\mathbf{k} \cdot \nabla = k_1 \partial_{\xi_1} + k_2 \partial_{\xi_2} + \dots + k_n \partial_{\xi_n} \quad (6.28)$$

olmak üzere (6.26) da tanımlanan Riemann theta fonksiyonu göz önünde bulundurulursa son denklem

$$(\mathbf{k} \cdot \nabla)^2 \vartheta_3 - \lambda \vartheta_3 = 0 \quad (6.29)$$

şeklinde düzenlenebilir. Aynı şekilde  $j = 4$  seçilirse de

$$(\mathbf{k} \cdot \nabla)^2 \vartheta_4 - \lambda \vartheta_4 = 0 \quad (6.30)$$

yazılabileceği görülecektir. Dolayısıyla (6.29) ve (6.30) dan

$$(\mathbf{k} \cdot \nabla)^2 \vartheta_j - \lambda \vartheta_j = 0, \quad j = 3, 4 \quad (6.31)$$

yazılabilir.

(6.24) sistemindeki ikinci denklemin düzenlenebilmesi için (6.25) te verilen theta fonksiyonunda  $j = 1$  yazılsın. Bu durumda  $s_j$  den  $s_1 = (0, 1)$  seçilmelidir. Yani theta fonksiyonu

$$\begin{aligned} \vartheta_1(\xi, \rho) &= \vartheta(2\xi, \frac{1}{2}, -\frac{s_1}{2} \mid 2\tau) \\ &= \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} e^{4\pi i \left\langle \begin{pmatrix} \xi_1 + \frac{1}{4} \\ \xi_2 + \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle} \rho_{11}^{(2n_1)^2} \rho_{12}^{2(2n_1)(2n_2-1)} \rho_{22}^{(2n_2-1)^2} \\ &= \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} e^{4\pi i [n_1 \xi_1 + n_2 \xi_2 + \frac{1}{4}(n_1 + n_2) - \frac{1}{2} \xi_2 - \frac{1}{8}]} \rho_{11}^{(2n_1)^2} \rho_{12}^{2(2n_1)(2n_2-1)} \rho_{22}^{(2n_2-1)^2} \end{aligned} \quad (6.32)$$

olacaktır. (6.24) sistemindeki ikinci denklem olan

$$\begin{aligned} &\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} (4\pi i \langle \mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}/2, \boldsymbol{\omega} \rangle - 64\pi^3 i \langle \mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}/2, \mathbf{l} \rangle \langle \mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}/2, \mathbf{k} \rangle^2 + 3\lambda (4\pi i \langle \mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}/2, \mathbf{l} \rangle) \\ &\times e^{-2\pi \langle \tau(\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}/2), \mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}/2 \rangle + \pi i (\mathbf{n} - \boldsymbol{\theta}/2)} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=(\theta_2, \theta_3)} = 0 \end{aligned}$$

ifadesi düzenlenirse

$$\begin{aligned} &= \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \left( 4\pi i \left\langle \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \right\rangle^2 - 64\pi^3 i \left\langle \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \right\rangle^2 \right) \\ &+ 3\lambda \left[ 4\pi i \left\langle \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \right\rangle \right] e^{-2\pi \left\langle \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \tau_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle + \pi i (n_1 + n_2 - \frac{1}{2})} \\ &= \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \left\{ 4\pi i (n_1 \omega_1 + (n_2 - \frac{1}{2}) \omega_2) - 64\pi^3 i (n_1 l_1 + (n_2 - \frac{1}{2}) l_2) (n_1 k_1 + (n_2 - \frac{1}{2}) k_2)^2 \right. \\ &\quad \left. + 3\lambda (4\pi i (n_1 l_1 + (n_2 - \frac{1}{2}) l_2)) \right\} \rho_{11}^{(2n_1)^2} \rho_{12}^{2(2n_1)(2n_2-1)} \rho_{22}^{(2n_2-1)^2} e^{\pi i (n_1 + n_2 - \frac{1}{2})} = 0 \end{aligned} \quad (6.33)$$

elde edilir. (6.28) de verilen türev ifadesi ve (6.32) de tanımlanan Riemann theta fonksiyonuna göre

$$4(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \vartheta_1 + (\mathbf{k} \cdot \nabla)^2 (\mathbf{l} \cdot \nabla) \vartheta_1 + 3\lambda (\mathbf{l} \cdot \nabla) \vartheta_1 = 0 \quad (6.34)$$

bulunur. Yine  $j = 2$  alındığında da

$$4(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \vartheta_2 + (\mathbf{k} \cdot \nabla)^2 (\mathbf{l} \cdot \nabla) \vartheta_2 + 3\lambda (\mathbf{l} \cdot \nabla) \vartheta_2 = 0 \quad (6.35)$$

olup (6.34) teki ifadenin aynısı  $\vartheta_2$  için de yazılabilir. Buna göre (6.34) ve (6.35) ten

$$4(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \vartheta_j + (\mathbf{k} \cdot \nabla)^2 (\mathbf{l} \cdot \nabla) \vartheta_j + 3\lambda (\mathbf{l} \cdot \nabla) \vartheta_j = 0, \quad j = 1, 2$$

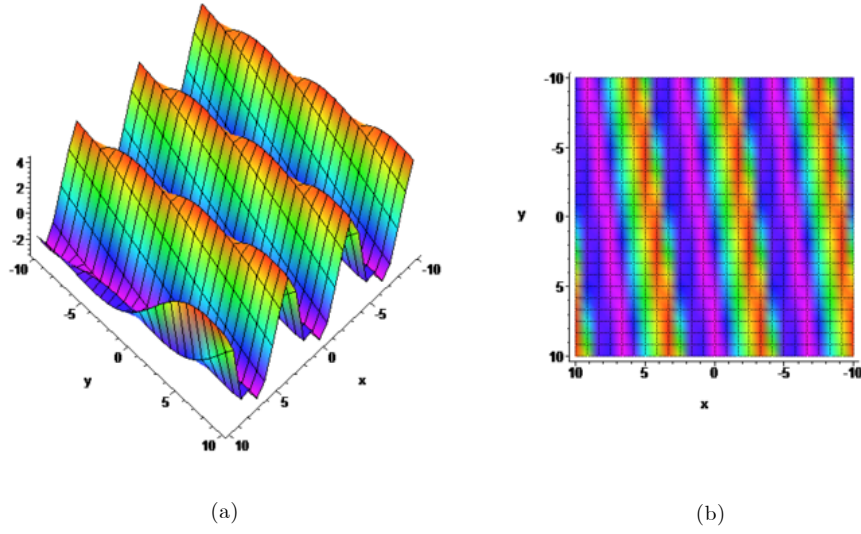
yazılabilir. Sonuç olarak (6.24) sistemi

$$\begin{aligned} (\mathbf{k} \cdot \nabla)^2 \vartheta_j - \lambda \vartheta_j &= 0, \quad j = 3, 4 \\ 4(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \vartheta_j + (\mathbf{k} \cdot \nabla)^2 (\mathbf{l} \cdot \nabla) \vartheta_j + 3\lambda (\mathbf{l} \cdot \nabla) \vartheta_j &= 0, \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (6.36)$$

şeklinde  $\omega$  ve  $\lambda$  ya göre çözülebilen bir sistem haline getirilebilir. Bu sistemin çözümünden bulunacak olan  $\omega$  ile  $k_1, k_2, l_1, l_2, \tau_{11}, \tau_{12}$  ve  $\tau_{22}$  parametrelerinin keyfi seçilmesi ile

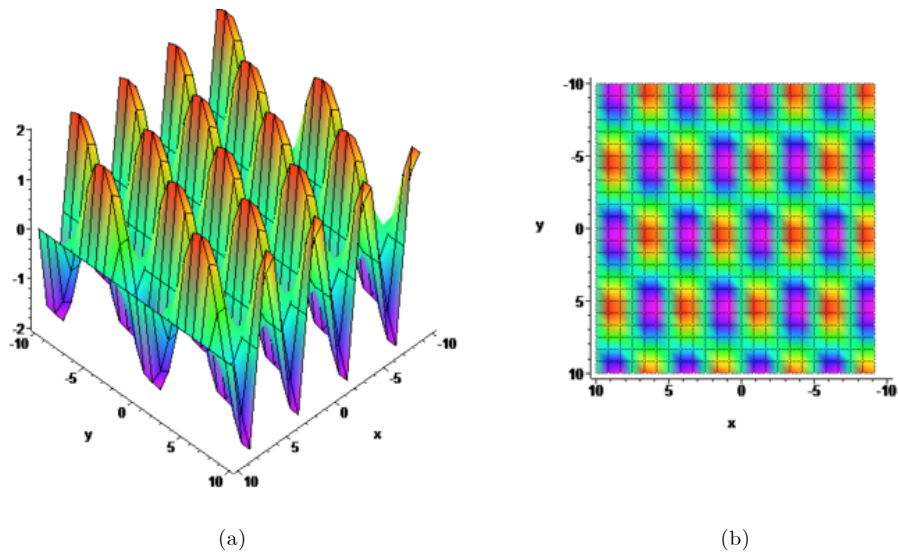
$$u = \partial_x \ln(\vartheta(\boldsymbol{\xi}, 0, 0 \mid \tau)) \quad (6.37)$$

ile verilen iki-periyodik çözüm elde edilir. Şekil 6.2 de  $k_1 = 0.3$ ,  $k_2 = 0.15$ ,  $l_1 = 0.04$ ,  $l_2 = 0.02$ ,  $\xi^0 = 0$ ,  $\tau_{11} = 0.5$ ,  $\tau_{12} = 0.1$  ve  $\tau_{22} = 0.2$  şeklinde seçilen keyfi parametreler ile (2+1) boyutlu Breaking Soliton denkleminin dejenere iki-periyodik dalga çözüm grafiklerinin nasıl olacağı gösterilmiştir.



Şekil 6.2 : (a)  $t=1$  seçimi ile dejenere iki-periyodik dalganın  $x-y$  düzleminde perspektif görünümü. (b) Üstten görünümü.

Şekil 6.3 te ise  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$ ,  $l_1 = 0.1$ ,  $l_2 = -0.1$ ,  $\xi^0 = 0$ ,  $\tau_{11} = 1$ ,  $\tau_{12} = 0.2$  ve  $\tau_{22} = 1$  şeklinde seçilen keyfi parametreler ile (2+1) boyutlu Breaking Soliton denkleminin simetrik iki-periyodik dalga çözüm grafiklerinin nasıl olacağı gösterilmiştir.



Şekil 6.3 : (a)  $t=1$  seçimi ile simetrik iki-periyodik dalganın  $x-y$  düzleminde perspektif görünümü. (b) Üstten görünümü.

### Asimptotik Durum

Asimptotik durumun incelenebilmesi için Teorem (4.1.5) bu denklemin faz değişkenlerine uyarlanmalıdır. Yani  $j = 1, 2$  için  $\xi_j = k_j x + l_j y + \omega_j t + \xi_j^0$  periyodik çözümün faz değişkeni  $\eta_j = \mu_j x + \nu_j y + \varpi_j t + \gamma_j$  ise soliton çözümün faz değişkeni olmak üzere  $\rho_1 = e^{\pi i \tau_{11}}, \rho_2 = e^{\pi i \tau_{22}}$  için  $\rho_1, \rho_2 \rightarrow 0$  iken

$$k_j = \frac{\mu_j}{2\pi i}, \quad l_j = \frac{\nu_j}{2\pi i}, \quad \omega_j = \frac{\varpi_j}{2\pi i}, \quad \xi_j^0 \rightarrow \frac{\gamma_j + \pi \tau}{2\pi i}, \quad \tau_{12} = \frac{A_{12}}{-2\pi} \quad (6.38)$$

şeklinde seçildiği takdirde

$$\vartheta(\xi_1, \xi_2, \tau) \rightarrow 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}} \quad (6.39)$$

şeklinde iki-soliton çözümün elde edilebileceği görülür. İspatı daha önceki bölümlerde yapılmış olup, bu ifadenin ispatı da benzer şekilde olduğundan ispata tekrardan değinilmeyecektir. Eğer iki-soliton çözüm için yayılma bağıntısı elde edilebilirse, iki-periyodik çözüm yukarıdaki şartlar altında iki-soliton çözüme gider. Bunun için aynı  $N = 1$  de olduğu gibi (6.36) sistemindeki  $j = 1, 2, 3, 4$  için  $\vartheta_j$  fonksiyonları,

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_1^0 + \omega_1^1 \rho_{11} + \omega_1^2 \rho_{22} + o(\rho_{11}, \rho_{22}) \\ \omega_2 &= \omega_2^0 + \omega_2^1 \rho_{11} + \omega_2^2 \rho_{22} + o(\rho_{11}, \rho_{22}) \\ \lambda &= \lambda_0 + \lambda_1 \rho_{11} + \lambda_2 \rho_{22} + o(\rho_{11}, \rho_{22}) \end{aligned} \quad (6.40)$$

açılımları da kullanılarak seriye açılıp, (6.36) da yerine yazılmalıdır.

Buradan  $\rho_{11}, \rho_{22} \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 \rightarrow 0 \\ 4\pi i \left(-\frac{1}{2}\right) \omega_1^0 - 64\pi^3 i \left(-\frac{1}{2}\right) l_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 k_1^2 &= 0 \\ 4\pi i \left(-\frac{1}{2}\right) \omega_2^0 - 64\pi^3 i \left(-\frac{1}{2}\right) l_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 k_2^2 &= 0 \end{aligned} \quad (6.41)$$

elde edilir. (6.40) ve (6.41) den

$$\lambda = o(\rho_{11}, \rho_{22}) \rightarrow 0$$

$$\omega_1 = 4\pi^2 k_1^2 l_1$$

$$\omega_2 = 4\pi^2 k_2^2 l_2$$

bulunur. (6.38) de verilen şartlar yerine yazıldığında ise iki-soliton çözüm için yayılma bağıntısı olan

$$\lambda = o(\rho_{11}, \rho_{22}) \rightarrow 0$$

$$\varpi_1 = -\mu_1^2 \nu_1$$

$$\varpi_2 = -\mu_1^2 \nu_1$$

ifadeleri elde edilir. Böylece (2+1) boyutlu kırılan soliton denklemin, Riemann theta fonksiyonları kullanılarak bulunan iki-periyodik çözümün,  $\rho \rightarrow 0$  küçük bir genlik sınırı altında bilinen iki-soliton çözüme gittiği gösterilmiş olur.

## 8. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tezde Hirota-Riemann metodu kullanılarak kısmi diferensiyel denklemlerin periyodik ve kuasi periyodik çözümlerinin nasıl bulunacağı anlatılmıştır. Giriş kısmının ardından literatürde yapılan çalışmaların neler olduğundan bahsedilmiş ve tez içinde bahsi geçen temel kavramların tanımları yapılmıştır.

Ardından üçüncü bölümde yöntemin temelini oluşturan Hirota bilineer metodun ne olduğundan bahsedilip, ele alınan bir örnekle ayrıntılı bir biçimde uygulaması gösterilmiştir. Yine aynı bölümde Riemann Theta fonksiyonun tanımı yapılmış ve bazı önemli özelliklerinden bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde Hirota-Riemann metodunun tanımı yapılmış ve bir kısmi diferensiyel denklemin bir, iki ve üç periyodik dalga çözümlerini bulabilmek için gerekli olan teoremler ispatları ile birlikte verilmiştir.

Uygulamalar beşinci bölümden itibaren yapılmış ve tekli bilineer forma sahip olan (3+1) boyutlu genelleştirilmiş BKP denklemi ve (3+1) boyutlu BKP denklemlerinin çözümleri elde edilmiştir. Bu bölümde ele alınan denklemlerin her biri için bir-periyodik çözümler elde edilmiş ve belirtilen bazı asimptotik şartlar altında, bulunan bir-periyodik çözümlerin, bir-soliton çözümlere gittiği görülmüştür. Bu özellik soliton çözümlerin bulunuşu için önemli bir kolaylık olup, soliton çözümleri bulabilmek için ayrıca başka bir yönteme ihtiyaç duyulmadığının göstergesidir. Dalga yapısının daha iyi anlaşılabilmesi için seçilen keyfi parametreler altında, bir-periyodik çözümün grafikleri farklı açılardan çizdirilmiş ve bir-periyodik çözümlerin üst üste binmiş tek bir dalga şekline sahip dalgalar olduğu görülmüştür. Aynı şekilde verilen teoremlere göre iki-periyodik dalga çözümleri de elde edilmiş ve belirtilen şartlar altında iki-periyodik çözümlerin bilinen iki-soliton çözümlere gittiği görülmüştür. Dalgaların yapısını daha iyi anlamak için çeşitli açılardan grafikleri çizdirilmiştir. Örneğin her bir alt bölüm için çizdirilen ilk grafiklerde dejenere periyodiklik şartlarını sağlayan keyfi parametreler altında iki-periyodik dalga grafikleri çizdirilmiş fakat grafikler incelendiğinde seçilen keyfi sabitler yüzünden dalgaların yine bir-periyodik dalgalarda olduğu gibi üst üste binen ve tek bir dalga şeklinde ilerleyen dalgalar olduğu görülmüştür. Daha sonrasında asimetrik

periyodiklik şartına uyacak şekilde değiştirilen keyfi parametreler altında asimetrik iki-periyodik dalgaların grafiği çizdirilmiş ve tek bir dalga gibi davranmadıkları ancak iki yönde de uzaysal periyodiklik şartını sağladıkları görülmüştür. Ayrıca işlem zorlukları sebebiyle literatürde daha önce uygulaması bu kadar açık şekilde yapılamayan üç-periyodik dalga çözümleri elde edilmiş ve yine belirtilen şartlar altında üç-soliton çözümlerin bulunabileceği gösterilmiştir. Dalga yapısını anlayabilmek için keyfi olarak seçilen parametreler altında grafikler farklı açılardan çizdirilmiştir. Üç boyutlu uzayda çizim yapabilmek için herhangi bir uzay değişkeni ve zaman değişkeni keyfi bir şekilde seçilip, o andaki dalganın görüntüsü verilmiştir. Buradaki dalgaların ise yine periyodiklik özellikleri sağlamasına rağmen şekilsel olarak bir periyodik dalga gibi düzgün olmadıkları tespit edilmiştir.

Son bölümde ise ikili bilinear forma sahip olan denklemler için teoremin nasıl olması gerektiği ispatları ile birlikte verilmiştir. Ardından uygulaması, bilinear Bell polinomları yardımı ile bilinear formu yazılabilen (2+1) boyutlu Breaking Soliton denkleminde yapılmıştır. İlk olarak seçilen keyfi parametreler altında denklemin bir-periyodik çözümü bulunmuş, belirtilen şartlar altında bir-soliton çözüme gittiği gösterilmiştir. Bulunan çözümün grafikleri çizdirilmiş ve önceki denklemlerde olduğu gibi, bir-periyodik dalga şeklinin tek bir dalga gibi ilerlediği görülmüştür. Ardından verilen teoremlere göre iki-periyodik dalga çözümü elde edilmiş ve belirtilen koşullar altında iki-soliton çözüm de bulunmuştur. Simetrik periyodiklik şartlarını sağlayacak şekilde seçilen keyfi parametreler altında çözümün grafikleri çizdirilmiştir.  $N > 2$  için her zaman yeterli parametre olmadığından ya da ara işlemler çok uzun ve karmaşık olduğundan her zaman çözüm bulunamayabilir. Tezde BKP denklemleri için bu problem aşılabılmış ve  $N = 3$  için kuasi-periyodik çözümler bulunabilmiştir. Fakat son bölümde verilen (2+1) boyutlu Breaking Soliton denklemi için bu hesap zorluklarından dolayı  $N = 3$  çözümü bulunamayıp, ileriki çalışmalara bırakılmıştır.

Yine tezde çözümleri ele alınmasa da Hirota-Riemann yönteminin süpersimetrik denklemlerinin periyodik çözümleri bulunurken de kullanılabileceğinden bahsedilmiştir. Literatür incelendiğinde şimdiye kadar belirtilen hesap ve parametre sıkıntıları yüzünden  $N = 3$  için bu yöntemle süpersimetrik denklemlerin periyodik çözümlerinin bulunmadığı görülmüştür. İleriki çalışmalarda tezde  $N = 3$  için verilen çalışmaların yardımı



ile süpersimetrik denklemler için de bu sıkıntının çözülebileceğine inanılmaktadır.

Şimdilik periyodik çözümlerin sadece soliton çözümlerle ilişkisi bulunmuş olsa da diğer çözüm çeşitleri ile daha başka ilişkiler de kurulabileceği düşünülmektedir.

## KAYNAKLAR DİZİNİ

- Asaad, M., 2013, Exact Pfaffian and N-Soliton Solutions To a (3+1)-Dimensional Generalized Integrable Nonlinear Partial Differential Equations, World Academy of Science, Engineering and Technology, International Science Index 76, 7(4), 769-776.
- Belokolos, E., Bobenko, A., Enol'skii, V., Its, A., Matveev, V., 1994, Algebrogeometric Approach To Nonlinear Integrable Equations, Springer, Berlin.
- Bluman, G., Kumei, S., 1989, Symmetries and Differential Equations, Springer-Verlag New York, Heidelberg, Berlin.
- Borreira, L., Valls, C., 2012, Complex Analysis and Differential Equations, Springer-Verlag London, 415 p.
- Cheng, Z., Hao, X., 2014, The Periodic Wave Solutions For a (2 + 1) Dimensional AKNS Equation, Applied Mathematics and Computation, 234, 118-126.
- Dubrovin, B., 1975, Periodic Problems For The Korteweg - de Vries Equation In the Class of Finite Band Potentials, Functional Analysis and Its Applications, 9 (3), 215-223.
- Dubrovin, B., Flickinger, R., Segur, H., 1997, Three-Phase Solutions of the Kadomtsev-Petviashvili Equation, Studies in Applied Mathematics, 99, 2, 137-203.
- Druitt, F., 2005, Hirota's Direct Method and Sato's Formalism In Soliton Theory, Honours Thesis, The University of Melbourne, Department of Mathematics and Statistics, 122 p.
- Fan, E., 2009, Quasi Periodic Waves and An Asymptotic Property For the Asymmetrical Nizhnik-Novikov-Veselov Equation, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 42, 095206.
- Fan, E., Chow, K., 2011, Darboux Covariant Lax Pairs and Infinite Conservation Laws of the (2+1) Dimensional Breaking Soliton Equation, Journal of Mathematical Physics, 52 (2), 023504.

### KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Fan, E., Hon, Y., 2008, Quasiperiodic Waves and Asymptotic Behavior For Bogoyavlenskii's Breaking Soliton Equation In (2+1) Dimensions, Physical Review E, 78, 036607.
- Farkas, H., Kra I., 2001, Theta Constants Riemann Surfaces and Modular Group: An Introduction With Applications To Uniformization Theorems, Partition Identities and Combinatorial Number Theory, American Mathematical Society, vol. 37, 553p.
- Hammack, J., Scheffner, N., Segur, H., 1989, Two-Dimensional Periodic Waves In Shallow Water, Journal of Fluid Mechanics, 209, 567-589.
- Hereman, W., 2009, Shallow Water Waves and Solitary Waves, Encyclopedia of Complexity and Systems Science, Springer New York, p. 8112-8125.
- Hirota, R., 1975, Exact Solution of the Korteweg de Vries Equation for Multiple Collisions of Solitons, Physical Review Letters, 27, 1192-1194.
- Hirota, R., 2004, The Direct Method in Soliton Theory, Cambridge University Press.
- Hon, Y., Fan, E., 2008, A Kind of Explicit Quasi-Periodic Solution and Its Limit For The TODA Lattice Equation, Modified Physics Letters B, 22, 547.
- Its, A., Matveev, V., 1975, Hill Operators With a Finite Number of Gaps., Functional Analysis and Applications, 9, 65-66.
- Korteweg, D. J. , De Vries, G., 1895, On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal and On a New Type of Long Stationary Wave, Philosophical Magazine Series 5, 39, 240.
- Lax P., 1975, Periodic Solutions of the KdV Equation, Communications on Pure and Applied Mathematics, 28, 141-188.
- Lin, L., 2010, Quasi-Periodic Waves and Asymptotic Property for Boiti-Leon-Manna-Pempinelli Equation, Communications in Theoretical Physics, 54, 208-214.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)**

- Lu, B., Zhang, H., 2010, Quasi-periodic Wave Solutions of (3+1) dimensional Jimbo-Miwa Equation, International Journal of Nonlinear Science, 10, 452-461.
- Luo, L., Fan, E., 2010, Bilinear Approach To the Quasi Periodic Wave Solutions of Modified Nizhnik-Novikov-Vesselov Equation in (2+1) Dimensions, Physics Letters A, 374, 3001-3006.
- Ma, P., Tian, S., 2014, Quasi-Periodic Solutions and Asymptotic Properties For the Isospectral BKP Equation, Communications in Theoretical Physics 62,17-25.
- Ma, W., Fan, E., 2011, Linear Superposition Principle Applying to Hirota Bilinear Equations, Computers and Mathematics with Applications 61, 950-959.
- Ma, W., Zhu, Z., 2012, Solving the (3 + 1) Dimensional Generalized KP and BKP Equations by the Multiple Exp-Function Algorithm, Applied Mathematics and Computation 218, 11871-11879
- Miura, M., 1978, Bäcklund Transformation, Springer Verlag, Berlin.
- Mumford, D., 1983, Tata Lectures On Theta 1, Birkhäuser, Boston, Vol. 28, 247 p.
- Nakamura, A., 1979, A Direct Method of Calculating Periodic Wave Solutions to Nonlinear Evolution Equations. I. Exact Two-Periodic Wave Solution, Journal of the Physical Society of Japan, 47, 1701.
- Nakamura, A., 1979, A Direct Method of Calculating Periodic Wave Solutions to Nonlinear Evolution Equations. II. Exact One- and Two-Periodic Wave Solution of the Coupled Bilinear Equations., Journal of the Physical Society of Japan, 48, 1365.
- Novikov, S., 1974, A Periodic Problem For the Korteweg de Vries Equation, Functional Analysis and Applications 8, 236-246.
- Qiao, Z., Fan, E., 2012, Negative Order Korteweg-de Vries Equations, Physical Review E 86, 016601.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)**

- Strang. G., 2005, Linear Algebra and Its Applications, Brooks Cole; Fourth Edition, p. 352.
- Tian, S., Zhang, H., 2010, Riemann Theta Functions Periodic Wave Solutions and Rational Characteristics For The Nonlinear Equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 371, 585-608.
- Tian, S., Zhang, H., 2012, Super Riemann Theta Function Periodic Wave Solutions and Rational Characteristics for a Supersymmetric KdV-Burgers Equation, Theoretical and Mathematical Physics, 170 (3), 287-314,
- Tian, S., Zhang, H., 2013, Riemann Theta Functions Periodic Wave Solutions and Rational Characteristics For the (1+1) Dimensional and (2+1) Dimensional Ito Equation, Chaos Solitons and Fractals, 47, 27-41.
- Tian, S., Ma, P., 2014, On The Quasi-Periodic Wave Solutions and Asymptotic Analysis To a (3+1) Dimensional Generalized Kadomtsev Petviashvili Equation, Communications in Theoretical Physics, 62, 245-258
- Wu, Y., 2012, Quasi Periodic Wave Solution and Asymptotic Behavior For the (2 + 1) Dimensional Toda Lattice Equation, Applied Mathematics and Computation, 219, 3065-3072.
- Wang, Z., Zou, L., Zong, Z., 2011, Periodic Solutions of the Camassa-Holm Equation Based On the Bilinear Form, Journal of Physics A: Mathematical Theory 44, 355204
- Zwick D., 2012, [http://www.math.utah.edu/~zwick/Classes/Fall2012\\_2270/Lectures/Lecture33\\_with\\_Examples.pdf](http://www.math.utah.edu/~zwick/Classes/Fall2012_2270/Lectures/Lecture33_with_Examples.pdf)

# ÖZGEÇMİŞ

Seçil DEMİRAY

**Doğum Yeri-Yılı :** Kırıkkale / 11.12.1987

**Yabancı Dil :** İngilizce

## Öğrenim Durumu

Derece	Mezuniyet Yılı	Üniversite
Y. Lisans	2011	Dumlupınar Üniversitesi-Fen Bilimleri Enstitüsü- Matematik Ana Bilim Dalı
Lisans	2009	Selçuk Üniversitesi-Fen Fakültesi- Matematik Bölümü
Lise	2005	Tavşanlı Anadolu Lisesi

## İş

- 2014-... Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi, Bozüyük Meslek Yüksek Okulu,  
Öğretim Görevlisi
- 2009-2010 Tavşanlı Pi Analitik Dersanesi, Matematik Öğretmeni

## Yayınlar

- 1) Demiray S., Ünsal Ö., Bekir A., 2014, New Exact Solutions for Boussinesq Type Equations by Using  $(G'/G, 1/G)$  and  $(1/G')$ -Expansion Methods, Acta Physica Polonica A, 125(5), 1093-1098 .
- 2) Demiray S., Ünsal Ö., Bekir A., 2015, Journal of the Egyptian Mathematical Society, Exact Solutions of Nonlinear Wave Equations Using  $(G'/G,1/G)$ -Expansion Method, 23, 78-84.
- 3) Demiray S., Tascan F., 2016, Applied Mathematics and Computation, Quasi Periodic Solutions of (3+1) Generalized BKP Equation by Using Riemann Theta Functions, 273, 131-141.

### **Bildiriler**

- 1) Ünsal Ö., Demiray S., Bekir A., 2013, “Lineer Olmayan Oluşum Denklemlerinin ( $G^2/G$ ,  $1/G$ ) Metodu ile Hareketli Dalga Çözümleri, Matder 12. Matematik Sempozyumu Hacettepe, Ankara.
- 2) Demiray S., Ünsal Ö., Bekir A., 2013, Travelling Wave Solutions of Nonlinear Equations Using the ( $G^2/G, 1/G$ )-Expansion Method, ICAAMM 2013 International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, Yıldız Technical University, Istanbul, Turkey
- 3) Demiray S., Taşcan F., 2014, Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Riemann Theta Fonksiyonları İle Periyodik Çözümleri, Matder 13. Matematik Sempozyumu, Karabük.
- 4) Demiray S., Taşcan F., 2015, Riemann Theta Fonksiyonları ile (3+1) BKP Denkleminin Quasi-Periyodik Çözümleri, Matder 14. Matematik Sempozyumu, Niğde.