Minkowski Uzayında Yönlü Eğriler Üzerine

Gamze Tarım

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Aralık 2016

On The Directional Curves in Minkowski Space

Gamze Tarım

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics-Computer

December 2016

Minkowski Uzayında Yönlü Eğriler Üzerine

Gamze Tarım

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Cumali Ekici

”Bu Tez ESOGÜ BAP tarafından 2016-1189 no’lu proje çerçevesinde desteklenmiştir.”

Aralık 2016

ONAY

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Gamze Tarım' ın YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı "**Minkowski Uzayında Yönlü Eğriler Üzerine** " başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Cumali Ekici

İkinci Danışman : Doç. Dr. Mustafa Dede

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Cumali Ekici

Üye : Prof. Dr. Ali Görgülü

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mustafa Saltan

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet Erşahan

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Cumali Ekici danışmanlığında hazırlamış olduğum ”Minkowski Uzayında Yönlü Eğriler Üzerine” başlıklı YÜKSEK LİSANS tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim.

19/12/2016

Gamze Tarım

ÖZET

Bu tez çalışmasının amacı, Frenet çatısına benzer olan q-çatısı olarak adlandırılan yeni bir çatıyı bir izdüşüm vektörü ile tanımlayarak Minkowski uzayında yönlü eğriler üzerine inceleme yapmaktır.

Beş bölümden oluşan çalışmamızda giriş ve literatür araştırması bölümlerinde konunun tarihsel gelişimi hakkında bilgiler aktarılmıştır. Üçüncü bölümde çalışmamıza temel oluşturan tanımlar ve teoremler verilmiştir. Dördüncü bölümde Minkowski uzayında bir uzay eğrisinin ve alınan izdüşüm vektörünün timelike veya spacelike olmasına bağlı olarak quasi-normal vektörü yardımıyla q-çatısı tanımlanmıştır. Elde edilen bu q-çatıları için türev denklemleri ve q-eğrilikleri hesaplanmıştır. Son bölümde de Öklidyen ve Minkowski 3-uzaylarında değişik çatılar kullanılarak verilmiş eğri çiftleri ile ilgili özelliklerden yararlanılarak, Minkowski 3-uzayında q-çatısı ve q-eğrilikleri yardımıyla bir uzay eğrisinin timelike veya spacelike olma durumuna göre Bertrand, Mannheim ve involüt-evolüt eğri çiftleri ile ilgili bazı özellikler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Frenet çatısı, q-çatısı, Bertrand eğrileri, Mannheim eğrileri, Minkowski uzayı.

SUMMARY

The aim of this thesis is to define a new frame called q-frame, which is similar to Frenet frame, by a projection vector and investigate on directional curves in Minkowski space.

The study consists of five chapters. In introduction and literature search chapters, some information about historical development of the subject is given. In the third chapter, basic definitions and theorems that are necessary for the study are given. In the forth chapter a q-frame is defined by the quasi-normal vector, depending on a space curve and projection vector in Minkowski space is timelike or spacelike. The derivative equations and q-curvatures are calculated for the obtained frame. In the final part, in Minkowski 3-space, by the help of q-frame and q-curvatures, depending on a space curve is timelike or spacelike, some properties for Bertrand, Mannheim and involute-evolute curve couples are investigated by using some properties that are given for curve couples by using different frames in Euclidean and Minkowski 3-spaces.

Keywords: Frenet frame, q-frame, Bertrand curves, Mannheim curves, Minkowski space.

TEŞEKKÜR

Minkowski Uzayında Yönlü Eğriler Üzerine adlı tez çalışmamda, lisans eğitimimden bugüne kadar bana her konuda yardımcı olan, engin bilgilerini ve deneyimlerini benimle paylaşan, çalışmamın yürütülmesi sırasında desteğini esirgemeyen ve bana inanan çok kıymetli danışmanım Sayın

Prof. Dr. Cumali Ekici

hocama, beni yetiştirip bugünlere getiren, her zaman azmini örnek aldığım değerli anneme ve motivasyonumun düştüğü anlarda beni başarabileceğime inandıran değerli kardeşime ve arkadaşım Malik Kandilci’ ye kalbi teşekkürlerimi iletmeyi bir borç bilirim.

Ayrıca, yüksek lisans tez çalışmam sırasında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu’na, 2016-1189 no’lu proje çerçevesindeki destekleri ve yardımları için teşekkür ederim.

Gamze Tarım

Aralık 2016

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET vi

SUMMARY vii

TEŞEKKÜR viii

İÇİNDEKİLER ix

ŞEKİLLER DİZİNİ xi

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ xii

1. GİRİŞ 1

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI 3

3. TEMEL KAVRAMLAR 5

3.1 Öklid Uzayı 5

3.2 Öklid Uzayında Eğriler ve Frenet Formülleri 5

3.3 R_1^3 Minkowski Uzayı 7

3.4 Yarı-Riemann Manifoldları 10

3.5 R_1^3 Minkowski Uzayı Üzerinde Vektörel Çarpım 11

3.6 Eğri Çiftleri 12

3.7 Uzay Eğrisi Boyunca Yönlü q-Çatı 13

3.8 Frenet Çatısı ile q-Çatı Arasındaki İlişki 16

3.9 Yönlü Bertrand Eğrileri 17

İÇİNDEKİLER (devam)

4. MİNKOWSKİ UZAYINDA YÖNLÜ EĞRİLER ÜZERİNE . . . **19**

4.1 Minkowski Uzayında Spacelike Eğriler İçin q-Çatısı . . . 19

4.2 Minkowski Uzayında Timelike Eğriler İçin q-Çatısı . . . 39

5. MİNKOWSKİ UZAYINDA YÖNLÜ EĞRİ ÇİFTLERİ . . . **49**

5.1 Minkowski Uzayında Yönlü Bertrand Eğri Çiftleri . . . 49

5.1.1 Minkowski uzayında yönlü spacelike Bertrand eğri çiftleri . . . 50

5.1.2 Minkowski uzayında yönlü timelike Bertrand eğri çiftleri . . . 60

5.2 Minkowski Uzayında Yönlü Mannheim Eğri Çiftleri . . . 65

5.2.1 Minkowski uzayında yönlü spacelike Mannheim eğri çiftleri . . . 66

5.2.2 Minkowski uzayında yönlü timelike Mannheim eğri çiftleri . . . 73

5.3 Minkowski Uzayında Yönlü İnvolüt-Evolüt Eğri Çiftleri . . . 77

5.3.1 Minkowski uzayında yönlü spacelike involüt-evolüt eğri çiftleri . . . 77

5.3.2 Minkowski uzayında yönlü timelike involüt-evolüt eğri çiftleri . . . 80

6. SONUÇ VE ÖNERİLER . . . **82**

KAYNAKLAR DİZİNİ . . . **83**

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil **Sayfa**

3.1 İzdüşüm vektörü 14
3.2 Frenet çatısı 15
3.3 q-çatısı 15

5.1 Yönlü Bertrand eğrileri 49
5.2 Yönlü Mannheim eğrileri 66
5.3 Yönlü involüt-evolüt eğrileri 77

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Cismi
$\mathbb{R}_1^3$	Üç Boyutlu Minkowski Uzayı
α	Uzay Eğrisi
β	Uzay Eğrisi
α_1	Mannheim Uzay Eğrisi
t	Birim Teğet Vektör
n	Birim Normal Vektör
b	Birim Binormal Vektör
n_q	Quasi-Normal Vektör
b_q	Quasi-Binormal Vektör
k_1	Birinci q-Eğriliği
k_2	İkinci q-Eğriliği
k_3	Üçüncü q-Eğriliği
t^λ	Eğri Çifti İçin Birim Teğet Vektör
n_q^λ	Eğri Çifti İçin Quasi-Normal Vektör
b_q^λ	Eğri Çifti İçin Quasi-Binormal Vektör
k_1^λ	Eğri Çifti İçin Birinci q-Eğriliği
k_2^λ	Eğri Çifti İçin İkinci q-Eğriliği
k_3^λ	Eğri Çifti İçin Üçüncü q-Eğriliği
$\|.\|$	Norm Fonksiyonu
$<,>$	Skaler Çarpım Fonksiyonu
d	Uzaklık Fonksiyonu
$\wedge$	Vektörel Çarpım Fonksiyonu

1. GİRİŞ

3-boyutlu Öklid uzayında eğrilerin diferensiyel geometrisi üzerine birçok çalışma yapılmaktadır. Özellikle eğrilerin karşılıklı noktalarında Frenet çatıları arasında bağıntılar kurularak, birçok yeni teori elde edilmektedir. Bir uzay eğrisi üzerinde Frenet çatısından başka çatılar ile ilgili olarak ilk çalışma Bishop (1975) tarafından yapılmıştır. Bu çatılardan bir tanesi de rotation minimizing frame (minimize edilmiş dönme çatısı) olarak adlandırılır. Wang vd. (2008) çalışmasında minimize edilmiş dönme çatıları ile ilgili hesaplamalardaki sıkıntılar ve bunların düzeltilmesi üzerinde durmuştur. Bunlar dışında eğri üzerinde başka çatılarla da ilgilenilmiştir. q-çatısının tanımlanmasında kullanılan quasi-normal vektör, Coquillart (1987) tarafından verilmiştir.

Özel eğri çiftleri, eğri ve yüzey teorisinde çok önemli konulardan bir tanesi olup bu konuda pek çok çalışma bulunmaktadır. Venant (1845), bir eğrinin asli normal vektör alanı olup olamayacağı problemini ortaya koymuştur. Bu problemi, Bertrand (1850) yayınladığı bir makalesinde cevaplandırmıştır, böyle bir eğrinin var olması için gerek ve yeter koşulun verilen orijinal eğrinin birinci ve ikinci eğrilikleri arasında uygun bir bağıntının varlığı ile mümkün olduğunu göstermiştir. Diğer bir deyişle bu bağıntı, verilen bir eğrinin birinci ve ikinci eğrilikleri sırasıyla k_1 ve k_2 ile gösterilirse, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için $\lambda k_1 + \mu k_2 = 1$ şeklindedir. Bertrand' ın bu çalışmasından sonra bu şartı sağlayan eğriye Bertrand eğrisi ve ikinci eğriye de bu eğrinin Bertrand eşlenik eğrisi adı verilmiştir (Kuhnel, 2006). Bertrand eğrileri, eğriler ve yüzeyler teorisinde önemli bir yere sahip olmakla beraber günümüzde hala aktif bir çalışma alanıdır.

1878' de ilk olarak Mannheim tarafından $k_1^2 + k_2^2 = w^2 = sabit$ bağıntısı ile tanımlanan eğri sınıfı Mannheim eğrileri olarak adlandırılmıştır (Azak, 2009). Blum (1966), 3-boyutlu Öklid uzayında Riccati denklemlerini kullanarak Mannheim eğrileri ile ilgili çalışmıştır. 2007 yılında, Wang ve Liu tarafından özel eğri çiftinin yeni bir tanımı verilmiş ve bu eğri çifti Mannheim eğri çifti olarak adlandırılmıştır. Birçok çalışmada ise $\mathbb{R}^3$ Öklidyen uzayında ve $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında Mannheim eğri çifti için gerek ve yeter koşullar elde edilmiştir.

Eğri çiftlerinden biri de involüt-evolüt eğri çiftidir. Optikteki çalışmalarıyla da tanınan Christian Huygens 1658 yılında involüt fikrini ortaya atmıştır (As ve Sarıoğlugil, 2014). Huygens, daha doğru bir saat inşa etmeye çalışırken involütleri keşfetmiştir (Boyer, 1968). İnvolüt-evolüt eğri çifti $\mathbb{R}^3$ te iyi bilinen bir kavramdır. 20. yüzyılın başlarında A. Einstein' ın teorisi, yeni geometrilerin kullanımı için bir kapı açmıştır. Onlardan biri özel görecelilik geometrisi ve diğeri keyfi bir Lorentzian manifoldunun teğet uzayını içeren geometridir (Öztürk vd., 2013). Buna bağlı olarak Lorentzian 3–uzayı veya Minkowski 3-uzayında involüt-evolüt eğrileri çalışılmıştır.

Bazı makalelerde Minkowski uzayında Mannheim eğrileri, Bertrand eğri çifti ve involüt-evolüt eğrileri incelenmiştir. Bu çalışmalarda Frenet çatısı kullanılarak hesaplamalar yapılmıştır. Frenet çatısı uygulamalarda birkaç kısıtlamaya sahiptir. Örneğin; eğrilik sıfır olduğunda Frenet çatısı tanımsızdır. Dede vd. (2015), ilk olarak bir uzay eğrisi boyunca quasi-normal vektörü kullanarak yeni bir çatı (q-çatısı) tanımlamışlardır. Bu q-çatısı, diğer çatılardan (Frenet, Bishop) daha fazla avantaja sahiptir. Örneğin; q-çatısı, eğriliği sıfır olan bir doğru boyunca bile tanımlanabilir.

Bu tez çalışmasının amacı, bir izdüşüm vektörü kullanarak Frenet çatısına benzer olan yeni bir çatı tanımlayarak Minkowski uzayında yönlü eğriler üzerine inceleme yapmaktır. Minkowski uzayında alınan izdüşüm vektörü ve uzay eğrisinin timelike veya spacelike olması durumuna göre beş farklı q-çatısı tanımlanmıştır. Elde edilen bu q-çatıları için türev denklemleri ve q-eğrilikleri hesaplanmıştır. Minkowski 3-uzayında q-çatısı ve q-eğriliklerinden yararlanılarak alınan uzay eğrisinin timelike veya spacelike olma durumuna göre Bertrand, Mannheim ve involüt-evolüt eğrileri ile bazı özellikleri incelenmiştir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Öklidyen 3-uzayında eğrilerin diferensiyel geometrisi ile ilgili pek çok çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmalarda genellikle Frenet çatısı kullanılmıştır. Frenet çatısından farklı olarak yapılan ilk çalışma Bishop (1975) tarafından yapılmıştır. Bu çatılardan bir diğeri de rotation minimizing frame (minimize edilmiş dönme çatısı) olarak adlandırılır. Uzay eğrisi üzerindeki minimize edilmiş dönme çatısı ile ilgili çalışmalar yapan araştırmacıların bazıları Yılmaz ve Turgut (2010), Farouki (2008), Wang ve Joe (1997), Klok (1986), Ravani vd. (2004), Maurer ve Jüttler (1999) ile Guggenheimer (1989) olarak görülmektedir. Çetin vd. (2014), Öklidyen 3-uzayında Bishop çatısına göre Smarandache eğrilerini incelemiş ve Smarandache eğrilerinin bazı geometrik özelliklerini vermişlerdir. Karacan ve Bükcü (2008), Minkowski 3-uzayında timelike bir eğri için Bishop çatısını kullanarak sonuçlar elde etmişlerdir. Bir başka çalışmalarında Bükcü ve Karacan (2008 a), Minkowski 3-uzayında esas normali spacelike olan spacelike eğrilerin Bishop çatısını incelemişlerdir. Ayrıca Minkowski 3-uzayında katı bir dik üçyüzlü, spacelike ve timelike eğriler için Frenet ve Darboux üçyüzlüleri ve bunların ani dönme vektörleri ile bunlar arasındaki ilişkiyi veren bazı sonuçlar ifade edilmiştir (Uğurlu ve Çalışkan, 2012).

Matematikçiler bu çalışmaların dışında eğriler için başka çatılarla da ilgilenmişlerdir. Coquillart (1987) tarafından tanımlanan quasi-normal vektörü yardımıyla q-çatısı tanımlanmıştır. Yönlü q-çatısının ardındaki temel fikir quasi-normal vektörün, izdüşüm vektörü ile teğet vektörün vektörel çarpımı olmasıdır (Dede vd., 2015).

Dede vd. (2015), yönlü q-çatısına göre uzay eğrilerinin lokal teorisini çalışmışlardır. Ayrıca q-çatısının, Frenet ve Bishop gibi diğer çatılardan daha fazla avantaja sahip olduğunu göstermişlerdir. Dede vd. (2015 a), tubular yüzeylerin yeni bir versiyonunu tanıtmışlar ve Frenet çatısı ile q-çatısı arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmışlardır.

Eğrilerin diferensiyel geometrisindeki önemli çalışma konularından biri özel eğri çiftleri üzerine olan çalışmalardır. Bertrand eğri çifti bu çalışma konularından bir tanesidir. Bu eğri çifti ilk olarak Bertrand (1850) tarafından tanımlanmıştır. Lai (1967) ise zayıflatılmış Bertrand eğriler üzerine çalışma yapmıştır. Matsuda ve Yorozu (2003), Öklidyen 4-uzayında Bertrand eğrilerinin genelleştirilmesi için bir fikir sunmuştur. Tunçer ve Ünal (2012), Öklidyen 3-uzayında Bertrand eğrilerinin küresel göstergelerinin özelliklerini incelemiş ve aynı zamanda küresel göstergelerin Mannheim, involüt-evolüt ve Bertrand çiftleri için yeni eğri çiftleri oluşturup oluşturmadığını araştırmışlardır. Minkowski uzayında da Bertrand eğri çiftleriyle ilgili pek çok çalışma bulunmaktadır. Kazaz vd. (2014), Minkowski 3-uzayında Darboux çatısı kullanarak Bertrand D-eğri çiftini tanımlamış ve bu eğrilerin genel karakterizasyonlarını vermişlerdir. Balgetir vd. (2004), Minkowski 3-uzayında null Bertrand eğrileri ve bu eğrilerin karakterizasyonları üzerine çalışmışlardır. Güner ve Ekmekçi (2012), 3-boyutlu Minkowski uzayında Bertrand eğrileri ve küresel eğrileri incelemişlerdir. Bu çalışmada aynı zamanda spacelike ve timelike eğrilerin küresel göstergelerine karşılık gelen Bertrand eğrilerini araştırmışlardır. Bu konu ile ilgili olarak Öztekin ve Bektaş (2010), Minkowski 3-uzayında Bertrand eğrileri üzerine çalışmışlardır. Choi vd. (2012) çalışmasında 3-boyutlu uzay formlarında Bertrand eğrileri üzerine inceleme yapmışlardır. Dede ve Ekici (2016), q-çatısı kullanarak yönlü Bertrand eğrileri için bazı özellikler vermiştir.

Özel eğri çiftlerinden bir diğeri Mannheim eğri çiftidir. Bu eğri çifti Mannheim tarafından 1878 yılında tanımlanmıştır. Öklidyen ve Minkowski uzayında bu konu ile ilgili yapılmış pek çok çalışma bulunmaktadır. 3-boyutlu Öklid uzayında Riccati denklemlerini kullanarak da Mannheim eğrileri ile ilgili çalışılmıştır (Blum, 1966). Wang ve Liu (2007) tarafından özel eğri çiftinin yeni bir tanımı verilmiştir. $k_1^2 + k_2^2 = w^2 = sabit$ bağıntısı ile tanımlanan eğri sınıfı Mannheim eğrileri olarak adlandırılmış ve 3-boyutlu Lorentz uzayında bu eğrilerin timelike olanı için ilgili hesaplamalar yapılmıştır (Azak, 2009). Liu ve Wang (2008), E_1^3 Minkowski uzayında ve E^3 Öklidyen uzayında Mannheim eğri çifti için gerek ve yeter koşulları elde etmişlerdir. 3-boyutlu Öklidyen uzayında Mannheim eğri çiftlerinin eğrilikleri ve torsiyonları arasındaki bazı ilişkiler elde edilmiştir (Orbay ve Kasap, 2009). Minkowski 3-uzayında null Mannheim eğrilerini tanımlayan Öztekin ve Ergüt (2011), null Mannheim eğrileri için gerek ve yeter koşulları incelemişlerdir.

Bir başka özel eğri çifti olan involüt-evolüt eğrileri ile ilgili literatürde çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Bu konu üzerine önemli çalışmaları olan Bilici ve Çalışkan (2009), Minkowski 3-uzayında binormali timelike olan spacelike eğrilerin involütlerini incelemişlerdir. Bilici ve Çalışkan (2011), Minkowski 3-uzayında timelike eğrilerin involütleri üzerine de çalışarak timelike ve spacelike eğriler arasındaki uzaklığın sabit olduğunu göstermişlerdir. Bükcü ve Karacan (2007), Minkowski 3-uzayında spacelike binormal ile verilen spacelike eğrilerin involüt-evolütlerini çalışmışlardır. Bir başka önemli çalışmada ise Bükcü ve Karacan (2009), Minkowski 3-uzayında esas normali spacelike olan spacelike eğrilerin involüt-evolütlerini incelemişlerdir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda çalışmamızda yararlanacağımız bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

3.1 Öklid Uzayı

Tanım 3.1.1 $\mathbb{R}^3$ 3-boyutlu standart reel vektör uzayı ile birleştirilmiş $\mathbb{R}^3$ afin uzayını ele alalım. $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3)$ iki vektör olsun. Bu $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında Öklid iç çarpımı

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

biçiminde tanımlanır. Böylece $\mathbb{R}^3$ Afin uzayı 3-boyutlu Öklid uzayı olur ve $\mathbb{E}^3$ ile gösterilir. Bununla beraber reel Afin uzaylar ile Öklid uzayları farklıdırlar. Çünkü, bir V reel vektör uzayı ile birleşen A afin uzayındaki metrik özellikler V de seçilecek olan iç çarpımdan doğarlar; bu nedenle Öklid uzayındaki özelliklerle diğer Afin uzaylarındakiler farklı olurlar (Hacısalioğlu, 1998).

3.2 Öklid Uzayında Eğriler ve Frenet Formülleri

Klasik Frenet çatısı diferensiyel geometride önemli bir rol oynamaktadır. Örneğin; küresel eğriler, Bertrand eğriler, basit ve klasik konular Frenet çatısı kullanarak araştırılmıştır. Bu bölümde bir uzay eğrisi üzerinde en çok bilinen ve kullanılan Frenet çatısı ile ilgili temel kavramlar verilecektir.

Tanım 3.2.1 $I \subseteq \mathbb{R}$ açık aralık olmak üzere, (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanan ve

$$\begin{aligned} \alpha : \quad I &\to E^n, \; I \subseteq \mathbb{R} \\ t &\to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), ..., \alpha_n(t)) \end{aligned}$$

parametrik ifadesi ile verilen $M = \alpha(I) \subset E^n$ kümesine uzay eğrisi adı verilir. Bu eğri kısaca α olarak gösterilecektir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 3.2.2 M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer $\forall s \in I$ için, $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise M eğrisi (I, α) ya göre birim hızlı eğridir denir ve s ye de yay-parametresi adı verilir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 3.2.3 $\alpha : I \to E^3$, $s \to \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$ eğrisi için s yay-parametresi olsun. Burada $t = V_1$ birim teğet, $n = V_2$ birim normal, $b = V_3$ binormal ve $\{t, n, b\}$ Frenet 3-ayaklısı adını alır. Buna göre

$$t = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} = \alpha'(s)$$

ve

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \frac{t'(s)}{\|t'(s)\|}$$

olmak üzere binormal vektör de

$$b(s) = t(s) \wedge n(s)$$

olarak verilir. Buradan da

$$b(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

olur (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 3.2.4 $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresine karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), ..., V_r(s)\}$ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} k_i : \; & I \to \mathbb{R} \qquad 1 < i < r \\ & s \to k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i-yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M nin i-yinci eğrilik denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Teorem 3.2.1 $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasında i-yinci eğrilik fonksiyonu $k_i(s)$ ve Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), ..., V_r(s)\}$ ise

$$\begin{aligned} V_1'(s) &= k_1(s)V_2(s) \\ V_i(s) &= -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s) \qquad 1 < i < r \\ V_r'(s) &= -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s) \end{aligned}$$

olur (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 3.2.5

$$\begin{aligned} \alpha : \; & I \to E^3 \\ & s \to \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s)) \end{aligned}$$

s yay parametresi ile verilen bir eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{t,n,b\}$ olsun.

$$\begin{aligned} t'(s) &= k_1(s)n(s) \\ n'(s) &= -k_1(s)t(s)+k_2(s)b(s) \\ b'(s) &= -k_2(s)n(s) \end{aligned}$$

formüllerine Frenet formülleri denir. Burada $k_1=\kappa$ ve $k_2=\tau$ için

$$\begin{bmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix}$$

eşitliği mevcuttur (Hacısalihoğlu, 1998). O halde

$$\begin{aligned} t' &= \kappa n \\ n' &= -\kappa t+\tau b \\ b' &= -\tau n. \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $k_2=\tau$ ile gösterilir. τ ya kısaca α eğrisinin burulması denir.

Sonuç 3.2.1 $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi yay parametresi ile verilmiş olsun. $k_1(s)=\|\alpha''(s)\|$ değerine α eğrisinin s noktasındaki eğriliği denir (Carmo, 1976).

3.3 R_1^3 Minkowski Uzayı

Minkowski uzayı, Alman matematikçi Hermann Minkowski tarafından 1907 yılında ifade edilmiştir. Matematik ve fizikte Minkowski uzayı Einstein'ın izafiyet teorisini formüle etmek için en uygun yoldur. Minkowski uzayı spacetime'ı göstermek için uzayın genel 3 boyutu ile zamanın bir boyutunun birleştirilmesiyle elde edilen 4 boyutlu bir manifolddur. Albert Einstein' ın izafiyet teorisini açıkladıktan sonra Hermann Minkowski uzay ve zamanı aynı durumda ele almış ve iki tarafı tek çatı altında birleştirmiştir. Spacetime, fiziksel olayların yer aldığı bir alandır. Örnek olarak, gezegenlerin güneş etrafındaki hareketi spacetime'ın özel bir çeşiti olarak tanımlanabilir.

Çoğunlukla zaman boyutu, dikey bir boyut olarak ele alınır, uzayda Dünya'nın uydusu olan Ay'ın hareketi neredeyse çember şeklindeyken Minkowski uzayında bir helis şeklindedir.

Tanım 3.3.1 V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlı

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü bilineer ve simetrik ise g ye V üzerinde simetrik bilineer form denir. Bu dönüşüm aynı zamanda nondejenere ise g ye V üzerinde bir skaler çarpım, bu durumda V vektör uzayına da bir skaler çarpım uzayı denir (O Neill, 1983).

Ayrıca,

(i) $\forall\ \overrightarrow{v} \in V$ ve $\overrightarrow{v} \neq 0$ için $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) > 0$ ise g simetrik bilineer formuna pozitif tanımlı,

(ii) $\forall\ \overrightarrow{v} \in V$ ve $\overrightarrow{v} \neq 0$ için $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) < 0$ ise g simetrik bilineer formuna negatif tanımlı,

(iii) $\forall\ \overrightarrow{v} \in V$ ve $\overrightarrow{v} \neq 0$ için $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) \geq 0$ ise bu durumda g simetrik bilineer formuna yarı-pozitif tanımlı,

(iv) $\forall\ \overrightarrow{v} \in V$ ve $\overrightarrow{v} \neq 0$ için $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) \leq 0$ ise bu durumda g simetrik bilineer formuna yarı-negatif tanımlıdır denir.

Bundan başka,

(a) g nin nondejenere olması için gerek ve yeter koşul $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$ ve $\forall\ \overrightarrow{w} \in V$ için $v = 0$ olmasıdır.

(b) g nin dejenere olması için gerek ve yeter koşul $g(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$ ve $\forall\ \overrightarrow{w} \in V$ için $v \neq 0$ olmasıdır (O Neill, 1983).

Tanım 3.3.2 V bir skaler çarpım uzayı, W da üzerindeki skaler çarpım negatif tanımlı olacak şekilde V nin en büyük boyutlu altuzayı olsun. Bu durumda W nin boyutuna g skaler çarpımının indeksi denir (O Neill, 1983).

g skaler çarpımının indeksi ν ise $0 \leq \nu \leq boyV$ dir. Ayrıca V skaler çarpım uzayının indeksi, üzerinde tanımlı g skaler çarpımının indeksi olarak tanımlanır.

Tanım 3.3.3 V skaler çarpım uzayı olsun. V nin indeksi ν olmak üzere $\nu = 1$ ve $boyV \geq 2$ ise V skaler çarpım uzayına bir Lorentz uzayı denir (O Neill, 1983).

Tanım 3.3.4 V bir Lorentz uzayı olsun. $v \in V$ için

$i)$ $g(v,v) > 0$ veya $v = 0$ ise v ye spacelike vektör,

$ii)$ $g(v,v) < 0$ ise v ye timelike vektör,

$iii)$ $g(v,v) = 0$ ve $v \neq 0$ ise v ye null (lightlike) vektör ve $\|v\| = |g(v,v)|^{1/2}$ reel sayısına da v vektörünün normu denir. V Lorentz uzayında tüm timelike vektörlerin cümlesi Γ olsun.

$u \in \Gamma$ için

$$C(u) = \{v \in \Gamma \mid g(v,u) < 0\}$$

kümesine u vektörünü kapsayan V Lorentz uzayının time-konisi denir (O Neill, 1983).

Teorem 3.3.1 V Lorentz uzayı ve iki timelike vektör v ve w olsun. Bu durumda

$i)$ $|g(v,w)| \geq \|v\| . \|w\|$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlikte eşitlik olması için gerek ve yeter şart v ve w vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır.

$ii)$ v, w timelike vektörleri aynı time-konide ise

$$g(v,w) = -\|v\| . \|w\| \, ch\varphi$$

olacak şekilde bir tek $\varphi \geq 0$ sayısı vardır. Bu φ sayısına, v ve w timelike vektörleri arasındaki hiperbolik açı denir (O Neill, 1983).

Burada v ve w vektörleri aynı time-konide değilseler o zaman

$$|g(v,w)| = \|v\| . \|w\| \, ch\varphi$$

dir. V Lorentz uzayında spacelike vektörler v ve w olmak üzere

$$\cos\theta = \frac{g(v,w)}{\|v\| . \|w\|}$$

olacak şekilde bir tek $0 \leq \theta \leq \pi$ sayısı vardır. Bu sayıya, v ve w spacelike vektörler arasındaki açı denir. v ve w spacelike vektörler için

$$g(v,w) \leq \|v\| . \|w\|$$

eşitsizliği vardır .

Tanım 3.3.5 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında $M \subset \mathbb{R}_1^3$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet üçyüzlüsü $\{t(s), n(s), b(s)\}$ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} \kappa \;\; : I \;\; &\to \;\; \mathbb{R} \\ s \;\; &\to \;\; \kappa(s) = \left\langle t', n \right\rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan κ fonksiyonuna α eğrisinin eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $\kappa(s)$ sayısına da M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir (Kobayashi, 1983).

Tanım 3.3.6 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında $M \subset \mathbb{R}_1^3$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet üçyüzlüsü $\{t(s), n(s), b(s)\}$ olsun. Buna göre,

$$\begin{array}{rcl} \tau \;: I \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ s & \to & \tau(s) = \left\langle n', b \right\rangle \end{array}$$

şeklinde tanımlanan τ fonksiyonuna α eğrisinin burulma fonksiyonu ve $\tau(s)$ sayısına da M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir (Kobayashi, 1983).

3.4 Yarı-Riemann Manifoldları

Tanım 3.4.1 M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerinde simetrik, nondejenere ve sabit indeksli $(0,2)$-tipinden g tensör alanına bir metrik tensör denir. Başka bir deyişle g, M manifoldunun her p noktasına T_pM tanjant uzayı üzerinde bir g_p skaler çarpımı karşılık getirir ve g skaler çarpımının indeksi her $p \in M$ için aynıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 3.4.2 $\mathbb{R}^3$, standart reel vektör uzayı üzerinde her $p \in \mathbb{R}^3$ ve

$$v_p = (v_1, v_2, v_3), \qquad \omega_p = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in T_p\mathbb{R}^3$$

olmak üzere

$$g : \langle v_p, \omega_p \rangle = v_1\omega_1 + v_2\omega_2 - v_3\omega_3$$

eşitliğiyle verilen 1-indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayı denir (O Neill, 1983).

Tanım 3.4.3 M diferensiyellenebilir bir manifold ve g de M üzerinde sabit indeksli bir metrik tensör olmak üzere (M,g) ikilisine bir yarı-Riemann manifoldu denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.4.4 M bir yarı-Riemann manifoldu olsun. g nin sabit indeksine M yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.4.5 M bir yarı-Riemann manifoldu olsun. $boyM \geq 2$ ve M nin indeksi 1 ise M ye bir Lorentz manifoldu denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.4.6 M bir Lorentz manifoldu ve $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M$ bir eğri olsun. α eğrisinin teğet vektör alanı t olmak üzere *i*) $g(t,t) > 0$ ise α eğrisine spacelike eğri,

ii) $g(t,t) < 0$ ise α eğrisine timelike eğri,

iii) $g(t,t) = 0$ ve , $t \neq 0$ ise α eğrisine null eğri denir (O'Neill, 1983).

Eğrinin bir özel hali olan doğruyu göz önüne alalım. Doğrunun doğrultman vektörü spacelike ise doğru spacelike doğru, doğrultman vektörü timelike ise doğru timelike doğru, doğrultman vektörü null ise doğru null doğrudur.

3.5 R_1^3 Minkowski Uzayı Üzerinde Vektörel Çarpım

Tanım 3.5.1 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında iki vektör v ve ω olsun. $v = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ olmak üzere

$$(v_3\omega_2 - v_2\omega_3, v_1\omega_3 - v_3\omega_1, v_1\omega_2 - v_2\omega_1)$$

vektörüne v ve ω nin vektörel çarpımı (veya dış çarpımı) denir. $v \times \omega$ veya $v \wedge \omega$ şeklinde gösterilir (Akutagawa ve Nishikawa, 1990).

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad i = j \text{ ise} \\ 0 & , \quad i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad \text{ve } e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$$

olmak üzere

$$v \wedge \omega = -\det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{bmatrix}$$

veya

$$v \wedge \omega = \det \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanabilir. Burada

$$e_1 \wedge e_2 = e_3, \; e_2 \wedge e_3 = -e_1, \; e_3 \wedge e_1 = -e_2$$

dir. Saat yönünün ters yönü pozitif yön olarak alınmıştır.

Saat yönünün tersi negatif yön olarak kabul edilecek olursa o zaman

$$e_1 \wedge e_2 = -e_3, \; e_2 \wedge e_3 = e_1, \; e_3 \wedge e_1 = e_2$$

olur. Bu durumda

$$v \wedge \omega = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{bmatrix}$$

biçimindedir (Turgut, 1995).

Teorem 3.5.1 $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski uzayında üç vektör $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{lll} i) & \langle u \wedge v, \omega \rangle & = -\det(u, v, \omega) \\ ii) & (u \wedge v) \wedge \omega & = -\langle u, \omega \rangle v + \langle v, \omega \rangle u \\ iii) & \langle u \wedge v, u \rangle & = 0 \ \text{ ve } \langle u \wedge v, v \rangle = 0 \\ iv) & \langle u \wedge v, u \wedge v \rangle & = -\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle + (\langle u, v \rangle)^2 \end{array}$$

dir (Turgut, 1995).

Teorem 3.5.2 $\mathbb{R}^3_1$ 3- boyutlu Minkowski uzayında $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3)$ iki vektör olsun. Bu durumda

i) u ve v spacelike vektör ise $u \wedge v$ bir timelike vektördür.

ii) u spacelike ve v timelike vektör ise $u \wedge v$ bir spacelike vektördür.

iii) u spacelike ve v null vektör olmak üzere $< u, v >= 0$ ise $u \wedge v$ null vektör, eğer $< u, v > \neq 0$ ise $u \wedge v$ bir spacelike vektördür.

iv) u ve v null vektörler ise $u \wedge v$ bir spacelike vektördür.

v) u timelike ve v null vektör ise $u \wedge v$ bir spacelike vektördür.

vi) u ve v timelike ise $u \wedge v$ bir spacelike vektördür (Turgut, 1995).

3.6 Eğri Çiftleri

Tanım 3.6.1 $M, N \subset E^n$ eğrileri, sırasıyla, $(I, \alpha), (I, \beta)$ koordinat komşulukları ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ ve $\beta(s) \in N$ noktalarında M ve N nin $\{V_1(s), \ldots, V_r(s)\}, \{V_1^*(s), \ldots, V_r^*(s)\}$ Frenet r-ayaklıları verildiğinde $\forall s \in I$ için $\{V_2(s), V_2^*(s)\}$ lineer bağımlı ise (M, N) eğri ikilisine bir Bertrand çifti denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Teorem 3.6.1 (M,N) Bertrand eğri çifti verilsin. M ve N sırasıyla, (I,α) ve (I,β) koordinat komşulukları ile verildiğine göre, $\forall s \in I$ için $d(\alpha(s),\beta(s)) = sabit$ tir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 3.6.2 α ve α_1, 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı eğriler olsun. Eğer α eğrisinin asli normali ile α_1 eğrisinin binormali lineer bağımlı ise, α eğrisine Mannheim eğrisi, α_1 eğrisine de Mannheim eğri ortağı denir (Liu ve Wang, 2008).

Teorem 3.6.2 E^3 te Mannheim eğrilerinin ilgili noktaları arasındaki uzaklık sabittir (Orbay ve Kasap, 2009).

Teorem 3.6.3 E^3 Öklid uzayında bir uzay eğrisi Mannheim eğri çiftidir ancak ve ancak eğrinin eğriliği κ ve burulması τ olmak üzere $\kappa = \lambda(\kappa^2+\tau^2)$ olmasıdır, burada λ sıfırdan farklı bir sabittir (Wang ve Liu, 2007).

Tanım 3.6.3 $M,N \subset E^n$ iki eğri olsun. M ve N sırasıyla $(I,\alpha),(I,\beta)$ koordinat komşulukları ile verilsin. $\alpha(s)$ve $\beta(s)$ noktalarında M ve N nin Frenet r-ayaklıları, sırasıyla, $\{V_1(s),\ldots,V_r(s)\}$ ve $\{V_1^*(s),\ldots,V_r^*(s)\}$ olmak üzere, $\langle V_1(s),V_1^*(s)\rangle = 0$ ise N ye M nin involütü, M ye de N nin evolütü denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Teorem 3.6.4 $M,N \subset E^n$ eğrileri $(I,\alpha),(I,\beta)$ koordinat komşulukları ile verilsin. Eğer, N,M nin involütü ise $d(\alpha(s),\beta(s)) = |c-s|, \forall s \in I,\ c = sabit$ tir (Hacısalihoğlu, 1998).

3.7 Uzay Eğrisi Boyunca Yönlü q-Çatı

Son zamanlarda Dede ve arkadaşları bir uzay eğrisi boyunca q-çatıyı tanıttılar. q-çatısı Frenet çatısına göre iki önemli avantaj sunmaktadır:

a)İkinci türevi tanımsız eğri de tanımlanabilir.

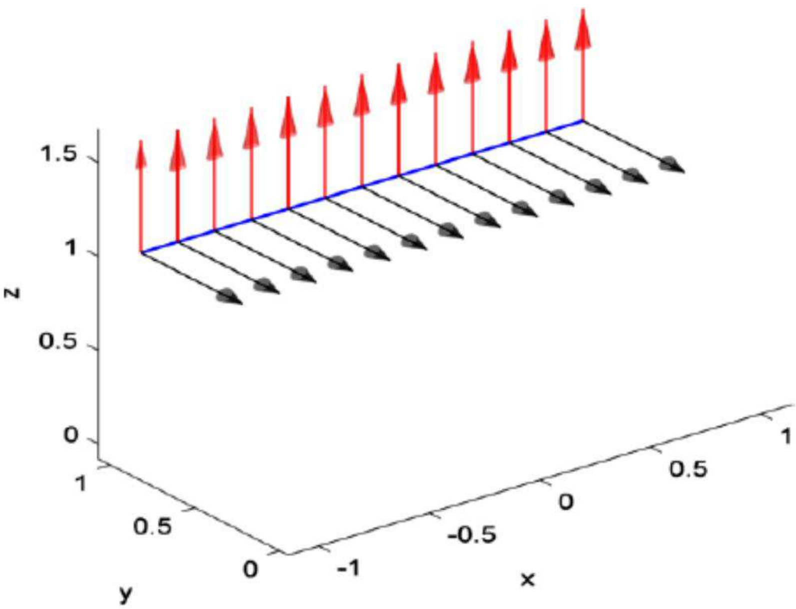
b)Teğet etrafında gereksiz bükülmeyi önler.

Bu kısımda bir uzay eğrisi boyunca q-çatı tanımlanmış ve q-eğrilikleri elde edilmiştir.

$k_z = (0,0,1)$ ve $X = (x,y,z)$ olsun.

$$X \wedge k_z = (x,y,z) \wedge (0,0,1) = (y,-x,0)$$

olduğundan X vektörü xy-düzlemine izdüşürülmüş olur. Buna göre k izdüşüm vektörü eksenler doğrultusunda birim vektör olarak alınır. Bir eğrinin t teğet vektörü ile k izdüşüm vektörü paralel olursa $t \wedge k = 0$ olduğu dikkate alınmalıdır. q-çatısını üç tipte sınıflandırabiliriz: z-ekseni,



Şekil 3.1: İzdüşüm vektörü

y-ekseni ve x-ekseni yönündeki q-çatıları sırasıyla, $\{t, n_q, b_q, k_z\}$, $\{t, n_q, b_q, k_y\}$ ve $\{t, n_q, b_q, k_x\}$ ile gösterilir. Şekil 3.1 ile bir doğru boyunca y-ekseni yönündeki q-çatısı gösterilmiştir. Burada izdüşüm vektörleri sırasıyla $k_z = (0,0,1)$, $k_y = (0,1,0)$ ve $k_x = (1,0,0)$ dır (Dede vd., 2015).

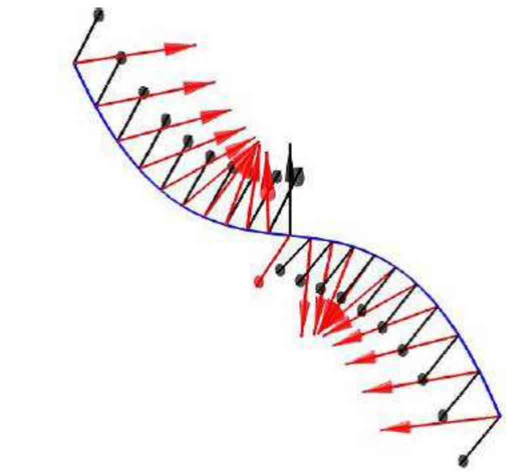
Örnek 3.7.1 $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t^3)$ eğrisi verilsin. İzdüşüm vektörü $k_z = (0,0,1)$ olan z ekseni yönündeki q-çatısı

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\sqrt{1+9t^2}}(-\sin(t), \cos(t), 3t^2) \\ n_q &= (\cos(t), \sin(t), 0) \\ b_q &= \frac{1}{\sqrt{1+9t^2}}(-3t^2\sin(t), 3t^2\cos(t), -\sqrt{1+9t^2}) \end{aligned}$$

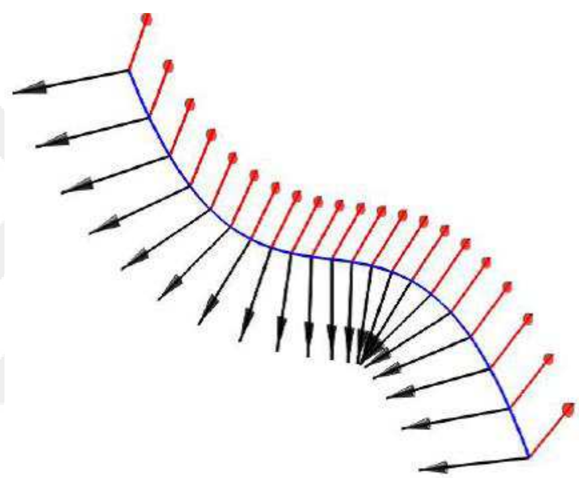
olarak bulunur. q-eğrilikleri ise

$$k_1 = -\frac{1}{\sqrt{1+9t^2}}, k_2 = -\frac{6t}{1+9t^2}, k_3 = \frac{3t^2}{\sqrt{1+9t^2}}$$

olarak elde edilir (Dede vd.,2015).



Şekil 3.2: Frenet çatısı



Şekil 3.3: q-çatısı

Şekil 3.2 de α eğrisi boyunca Frenet çatısı ile normal düzlem vektörleri gösterilmiştir.

Aynı α eğrisi boyunca z-ekseni yönündeki q-çatısı için normal düzlem vektörleri Şekil 3.3 ile verilmiştir.

Tanım 3.7.1 Bir uzay eğrisi boyunca yönlü q-çatı

$$t = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, n_q = \frac{t \wedge k}{\|t \wedge k\|}, b_q = t \wedge n_q \tag{3.1}$$

olarak tanımlanır. Burada k izdüşüm vektörüdür ve t eğrinin teğeti, n_q eğrinin quasi-normali ve b_q ise eğrinin quasi-binormali olarak adlandırılır. Yönlü q-çatısı ile verilen uzay eğrisine yönlü uzay eğrisi adı verilir (Dede vd., 2015).

Teorem 3.7.1 Bir uzay eğrisi boyunca q-çatının Frenet formülleri benzeri varyasyon denklemi

$$\begin{bmatrix} t' \\ n'_q \\ b'_q \end{bmatrix} = \|\alpha'\| \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & k_3 \\ -k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix}$$

şeklindedir. q-eğrilikleri ise

$$k_1 = \frac{\langle t', n_q \rangle}{\|\alpha'\|}, k_2 = \frac{\langle t', b_q \rangle}{\|\alpha'\|}, k_3 = \frac{\langle n'_q, b_q \rangle}{\|\alpha'\|} \tag{3.2}$$

olarak ifade edilebilir (Dede vd., 2015).

Teorem 3.7.2 Öklid uzayında $\alpha(t)$ düzgün bir eğri olsun. q-eğrilikler $\alpha(t)$ eğrisinin türevleri cinsinden

$$k_1 = \frac{\det[\alpha'', \alpha', k]}{\|\alpha' \wedge k\| \, \|\alpha'\|^2}$$

$$k_2 = \frac{\langle \alpha', k \rangle \langle \alpha'', \alpha' \rangle - \|\alpha'\|^2 \langle \alpha'', k \rangle}{\|\alpha'\|^3 \, \|\alpha' \wedge k\|}$$

ve

$$k_3 = \frac{\langle \alpha', k \rangle \det[\alpha', \alpha'', k]}{\|\alpha' \wedge k\|^2 \, \|\alpha'\|^2}$$

bu şekilde verilmektedir (Dede vd., 2015).

Sonuç 3.7.1 q-çatının k_1, k_2, k_3 q-eğrilikleri izdüşüm vektörü k ya bağlı olduğu kolayca görülür (Dede vd., 2015).

3.8 Frenet Çatısı ile q-Çatı Arasındaki İlişki

$\mathbb{R}^3$ 3-boyutlu uzayda keyfi parametreye bağlı herhangi bir uzay eğrisi için Frenet vektörleri

$$t = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, b = \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}, n = b \wedge t$$

olarak verilir. Ayrıca eğrinin eğriliği κ ve eğrinin burulması τ olmak üzere

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2}$$

şeklinde ifade edilir. Frenet çatısı ile q-çatısı arasındaki ilişki ise

$$\begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilir (Dede vd. 2015 a).

Teorem 3.8.1 $\alpha(s)$ yay parametresi ile verilen bir uzay eğrisi olsun. $\|\alpha'\| = 1$ dir. n ve n_q vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere q-eğrilikler ve Frenet eğrilikler arasıdaki ilişki

$$\begin{aligned} k_1 &= \kappa\cos\theta \\ k_2 &= -\kappa\sin\theta \\ k_3 &= d\theta + \tau \end{aligned}$$

ve

$$\cos\theta = \frac{\det(\alpha'', \alpha', \kappa)}{\|\alpha' \wedge k\|\,\|\alpha''\|}$$

şeklindedir (Dede ve Ekici, 2016).

3.9 Yönlü Bertrand Eğrileri

Bu kısımda 3-boyutlu Öklid uzayında bir uzay eğrisinin quasi-normal vektörü kullanılarak yönlü Bertrand eğrileri tanımlanmıştır. Ayrıca yönlü Bertrand eğrilerin q-eğrilikleri arasındaki ilişki verilmiştir.

Tanım 3.9.1 $\alpha, \beta \subset E^3$ iki uzay eğrisi olsun. α eğrisinin q-çatısı $\{t, n_q, b_q\}$ ve β eğrisinin q-çatısı $\{t^\lambda, n_q^\lambda, b_q^\lambda\}$ olmak üzere, n_q ve n_q^λ quasi-normal vektörleri lineer bağımlı ise α ve β eğrilerine yönlü Bertrand eğri çifti denir (Dede ve Ekici, 2016).

Teorem 3.9.1 $\alpha(s)$ birim hızlı bir uzay eğrisi ve $\beta(s_1)$ ile yönlü Bertrand eğri çifti olsun. O halde

(a) Yönlü Bertrand eğrileri olan $\alpha(s)$ ve $\beta(s_1)$ eğrileri arasındaki mesafe sabittir.

(b) $k_3 = 0$ ise yönlü Bertrand eğrilerinin teğet vektörleri arasındaki açı sabittir (Dede ve Ekici, 2016).

Teorem 3.9.2 $\alpha(s)$ birim hızlı bir uzay eğrisi ve $\beta(s_1)$ ile yönlü Bertrand eğri çifti olsun. Bu iki eğrinin q-çatıları arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} t^\lambda \\ n_q^\lambda \\ b_q^\lambda \end{bmatrix} = \frac{\pm 1}{\sqrt{(1-k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} \begin{bmatrix} 1-\lambda k_1 & 0 & \lambda k_3 \\ 0 & \sqrt{(1-k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2} & 0 \\ -\lambda k_3 & 0 & 1-\lambda k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir (Dede ve Ekici, 2016).

Teorem 3.9.3 $\alpha(s)$ yay uzunluğu parametresi ile verilen bir uzay eğrisi olsun. Ayrıca $\alpha(s)$, $\beta(s)$ yönlü Bertrand eğrisi olsun. O halde q- eğrilikleri arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} k_1^\lambda &= \frac{(1-\lambda k_1)k_1 - \lambda k_3^2}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} \\ k_2^\lambda &= \pm\frac{\lambda k_3'(1-\lambda k_1) + \lambda^2 k_1' k_3 + ((1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2)k_2}{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2} \\ k_3^\lambda &= \pm\frac{k_3}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} \end{aligned}$$

olarak verilir. Burada $\beta(s)$ eğrisinin q-eğrilikleri k_1^λ, k_2^λ ve k_3^λ dir (Dede ve Ekici, 2016).

4. MİNKOWSKİ UZAYINDA YÖNLÜ EĞRİLER ÜZERİNE

Bu bölümde ilk olarak Minkowski 3-uzayında bir uzay eğrisi boyunca quasi-normal vektörü kullanarak diğer çatılardan (Frenet,Bishop) daha fazla avantaja sahip olan yeni bir çatı (q-çatısı) tanımlanmıştır. Minkowski uzayında uzay eğrisinin ve izdüşüm vektörünün timelike veya spacelike olmasına bağlı olarak beş farklı q-çatısı ve bunların türev denklemleri elde edilmiştir.

4.1 Minkowski Uzayında Spacelike Eğriler İçin q-Çatısı

Bu kısımda k izdüşüm vektörünün timelike veya spacelike olması durumlarına göre spacelike eğrilerin q-çatısı oluşturulmuştur. Normal ve binormal vektörlerin timelike veya spacelike kabul edilmesi halinde quasi-normal vektör, quasi-binormal vektör ve q-eğrilikleri arasındaki bağıntıların yanısıra q-çatısı ile Frenet çatısı arasındaki denklemler bulunmuştur.

k izdüşüm vektörü timelike olan spacelike eğrilerin q-çatısı

Bu kısımda q-çatılar için iki durum mevcuttur.

i) Normal vektörü spacelike, binormal vektörü timelike olan spacelike eğrilerin q-çatısı

Teorem 4.1.1 Minkowski uzayında birim teğet vektör t (spacelike), izdüşüm vektör $k = (0,0,1)$ (timelike), quasi-normal vektör n_q (spacelike) ve quasi-binormal vektör b_q (timelike) olduğunda spacelike eğri boyunca q-çatının Frenet formülleri benzeri varyasyon denklemi

$$\begin{bmatrix} t' \\ n_q' \\ b_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & -k_2 \\ -k_1 & 0 & -k_3 \\ -k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix}$$

şeklindedir. q-eğrilikleri ise

$$k_1 = \kappa \cosh\theta, k_2 = \kappa \sinh\theta, k_3 = -d\theta - \tau$$

şeklinde ifade edilebilir.

İspat. İlk olarak $\{t,n,b\}$ Frenet üçlüsünün t (spacelike), n (spacelike), b (timelike) olduğunda Frenet formüllerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} t' &= a_{11}t + a_{12}n + a_{13}b \\ n' &= a_{21}t + a_{22}n + a_{23}b \\ b' &= a_{31}t + a_{32}n + a_{33}b \end{aligned} \tag{4.1}$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi a_{11}, a_{12}, a_{13} değerlerini hesaplayalım. Bunun için (4.1) denklemindeki t' ifadesi t ile skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle t',t\rangle &= a_{11}\langle t,t\rangle + a_{12}\langle n,t\rangle + a_{13}\langle b,t\rangle \\ &= a_{11} \end{aligned}$$

olup $\langle t,t\rangle' = 0$ olduğundan

$$a_{11} = 0$$

olur. t' ifadesi n ile skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle t',n\rangle &= a_{11}\langle t,n\rangle + a_{12}\langle n,n\rangle + a_{13}\langle b,n\rangle \\ &= a_{12} \end{aligned}$$

elde edilir. t' ifadesi b ile skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle t',b\rangle &= a_{11}\langle t,b\rangle + a_{12}\langle n,b\rangle + a_{13}\langle b,b\rangle \\ &= -a_{13} \end{aligned}$$

olur. a_{21}, a_{22}, a_{23} değerlerini hesaplamak için benzer şekilde (4.1) denklemindeki n' ifadesi sırasıyla t,n,b vektörleriyle skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle n',t\rangle &= a_{21} \\ \langle n',n\rangle &= a_{22} \\ \langle n',b\rangle &= -a_{23} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $\langle n,n\rangle' = 0$ olduğundan

$$a_{22} = 0$$

elde edilir. Son olarak a_{31}, a_{32}, a_{33} değerlerini hesaplamak için benzer şekilde (4.1) denklemindeki b' ifadesi sırasıyla t,n,b vektörleriyle skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle b',t\rangle &= a_{31} \\ \langle b',n\rangle &= a_{32} \\ \langle b',b\rangle &= -a_{33} \end{aligned}$$

olur. Burada $\langle b,b\rangle' = 0$ olduğundan

$$a_{33} = 0$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$$\langle t,n\rangle = 0$$

olup eşitliğin her iki tarafının türevi alınarak $\langle t',n\rangle$ ve $\langle t,n'\rangle$ değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\langle t',n\rangle + \langle t,n'\rangle &= 0\\ a_{12} + a_{21} &= 0\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Buradan

$$a_{12} = -a_{21} = \kappa$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\langle n,b\rangle = 0$$

olup eşitliğin her iki tarafının türevi alınarak $\langle n',b\rangle$ ve $\langle n,b'\rangle$ değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\langle n',b\rangle + \langle n,b'\rangle &= 0\\ -a_{23} + a_{32} &= 0\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$a_{23} = a_{32} = \tau$$

elde edilir. Ayrıca $\langle t,b\rangle = 0$ olup eşitliğin her iki tarafının türevi alınarak $\langle t',b\rangle$ ve $\langle t,b'\rangle$ elde edilir. Eğrilik tanımı ile uygun olmadığından $\langle t',b\rangle = -a_{13} = 0$ ve $\langle t,b'\rangle = a_{31} = 0$ dır. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}t' &= 0t + \kappa n + 0b\\ n' &= -\kappa t + 0n + \tau b\\ b' &= 0t + \tau n + 0b\end{aligned}$$

olur. Bulduğumuz formüller matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

bulunur. b ve b_q arasındaki hiperbolik açı θ alınırsa

$$b_q = \lambda n + \mu b \tag{4.3}$$

olur. Burada (4.3) ifadesi b ile skaler olarak çarpılırsa

$$\langle b,b_q\rangle = \lambda\langle b,n\rangle + \mu\langle b,b\rangle$$

elde edilir. $\langle b,b\rangle = -1, \langle b,n\rangle = 0$ ve b ile b_q aynı timekonide olduğundan $\langle b,b_q\rangle = -\cosh\theta$ olup

$$\mu = \cosh\theta$$

olarak bulunur. Benzer şekilde λ katsayısını hesaplayalım. (4.3) eşitliğindeki b_q kendisi ile skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned}\left\langle b_q, b_q \right\rangle = -1 &= \langle \lambda n + \mu b, \lambda n + \mu b \rangle \\ &= \lambda^2 \langle n, n \rangle + \lambda\mu \langle n, b \rangle + \lambda\mu \langle b, n \rangle + \mu^2 \langle b, b \rangle \\ &= \lambda^2 - \mu^2\end{aligned}$$

olur. Uygun hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= \cosh^2\theta - 1 \\ \lambda^2 &= \sinh^2\theta \\ \lambda &= \sinh\theta\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre

$$b_q = \sinh\theta n + \cosh\theta b$$

olarak yazılır. Şimdi n_q yu hesaplayalım.

$$b_q \wedge t = -n_q$$

olduğundan

$$t \wedge b_q = n_q$$

olur. Bu durumda

$$n_q = \sinh\theta t \wedge n + \cosh\theta t \wedge b$$

elde edilir. O halde n_q

$$n_q = \cosh\theta n + \sinh\theta b$$

olarak bulunur. Şimdi n_q ve b_q kullanılarak n ve b hesaplanabilir. Bunun için

$$\begin{aligned}\cosh\theta n_q &= \cosh^2\theta n + \sinh\theta\cosh\theta b \\ -\sinh\theta b_q &= -\sinh^2\theta n - \sinh\theta\cosh\theta b\end{aligned}$$

ifadeleri taraf tarafa toplanırsa

$$n = \cosh\theta n_q - \sinh\theta b_q$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}-\sinh\theta n_q &= -\sinh\theta\cosh\theta n - \sinh^2\theta b \\ \cosh\theta b_q &= \sinh\theta\cosh\theta n + \cosh^2\theta b\end{aligned}$$

ifadeleri taraf tarafa toplanırsa

$$b = -\sinh\theta n_q + \cosh\theta b_q$$

bulunur. Yapılan hesaplar matris formunda yazılarak

$$\begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\theta & \sinh\theta \\ 0 & \sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

ve

$$\begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\theta & -\sinh\theta \\ 0 & -\sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

elde edilir. (4.2) ve (4.5) kullanılırsa

$$\begin{aligned} t' &= \kappa n \\ &= \kappa(\cosh\theta n_q - \sinh\theta b_q) \\ &= \kappa\cosh\theta n_q - \kappa\sinh\theta b_q \end{aligned}$$

olur. (4.2), (4.4) ile (4.5) kullanılırsa

$$\begin{aligned} n_q' &= \sinh\theta d\theta n + \cosh\theta n' + \cosh\theta d\theta b + \sinh\theta b' \\ &= \sinh\theta d\theta n + \cosh\theta(-\kappa t + \tau b) + \cosh\theta d\theta b + \sinh\theta(\tau n) \\ &= t(-\kappa\cosh\theta) + n(\sinh\theta d\theta + \tau\sinh\theta) + b(\tau\cosh\theta + \cosh\theta d\theta) \\ &= t(-\kappa\cosh\theta) + \left(\cosh\theta n_q - \sinh\theta b_q\right)(\sinh\theta d\theta + \tau\sinh\theta) \\ &\quad + \left(-\sinh\theta n_q + \cosh\theta b_q\right)(\tau\cosh\theta + \cosh\theta d\theta) \\ &= n_q(\sinh\theta\cosh\theta d\theta + \tau\sinh\theta\cosh\theta - \tau\sinh\theta\cosh\theta - \sinh\theta\cosh\theta d\theta) \\ &\quad + t(-\kappa\cosh\theta) + b_q\left(-\sinh^2\theta d\theta - \tau\sinh^2\theta + \tau\cosh^2\theta + \cosh^2\theta d\theta\right) \\ &= t(-\kappa\cosh\theta) + b_q(d\theta + \tau) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} b_q' &= \cosh\theta d\theta n + \sinh\theta n' + \sinh\theta d\theta b + \cosh\theta b' \\ &= \cosh\theta d\theta n + \sinh\theta(-\kappa t + \tau b) + \sinh\theta d\theta b + \cosh\theta(\tau n) \\ &= t(-\kappa\sinh\theta) + n(\cosh\theta d\theta + \tau\cosh\theta) + b(\tau\sinh\theta + \sinh\theta d\theta) \\ &= t(-\kappa\sinh\theta) + \left(\cosh\theta n_q - \sinh\theta b_q\right)(\cosh\theta d\theta + \tau\cosh\theta) \\ &\quad + \left(-\sinh\theta n_q + \cosh\theta b_q\right)(\tau\sinh\theta + \sinh\theta d\theta) \\ &= t(-\kappa\sinh\theta) + n_q(\cosh^2\theta d\theta + \tau\cosh^2\theta - \tau\sinh^2\theta - \sinh^2\theta d\theta) \\ &\quad + b_q(-\sinh\theta\cosh\theta d\theta - \tau\sinh\theta\cosh\theta + \tau\sinh\theta\cosh\theta + \sinh\theta\cosh\theta d\theta) \\ &= t(-\kappa\sinh\theta) + n_q(d\theta + \tau) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da k_1, k_2 ve k_3 eğrilikleri

$$\begin{aligned} k_1 &= \langle t', n_q \rangle \\ &= \kappa\cosh\theta \langle n_q, n_q \rangle \\ &= \kappa\cosh\theta \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} k_2 &= \langle t', b_q \rangle \\ &= -\kappa \sinh\theta \langle b_q, b_q \rangle \\ &= \kappa \sinh\theta \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} k_3 &= \langle n_q', b_q \rangle \\ &= d\theta + \tau \langle b_q, b_q \rangle \\ &= -d\theta - \tau \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Tüm bu hesaplar matris formunda

$$\begin{bmatrix} t' \\ n_q' \\ b_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & -k_2 \\ -k_1 & 0 & -k_3 \\ -k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

şeklinde yazılır.

ii) Normal Vektörü Timelike, Binormal Vektörü Spacelike Olan Spacelike Eğrilerin q-Çatısı

Teorem 4.1.2 Minkowski uzayında birim teğet vektör t (spacelike), izdüşüm vektör $k = (0,0,1)$ (timelike), quasi-normal vektör n_q (spacelike) ve quasi-binormal vektör b_q (timelike) olduğunda spacelike eğri boyunca q-çatının Frenet formülleri benzeri varyasyon denklemi

$$\begin{bmatrix} t' \\ n_q' \\ b_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & -k_2 \\ -k_1 & 0 & -k_3 \\ -k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix}$$

şeklindedir. q-eğrilikleri ise

$$k_1 = \kappa \sinh\theta, k_2 = -\kappa \cosh\theta, k_3 = d\theta + \tau$$

şeklinde ifade edilebilir.

İspat. İlk olarak $\{t, n, b\}$ Frenet üçlüsünün t (spacelike), n (timelike), b (spacelike) olduğunda Frenet formüllerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} t' &= a_{11}t + a_{12}n + a_{13}b \\ n' &= a_{21}t + a_{22}n + a_{23}b \\ b' &= a_{31}t + a_{32}n + a_{33}b \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi a_{11}, a_{12}, a_{13} değerlerini hesaplayalım. Bunun için (4.1) denklemindeki t' ifadesi t ile skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle t', t \rangle &= a_{11} \langle t, t \rangle + a_{12} \langle n, t \rangle + a_{13} \langle b, t \rangle \\ &= a_{11} \end{aligned}$$

olup $\langle t, t \rangle' = 0$ olduğundan

$$a_{11} = 0$$

olur. t' ifadesi n ile skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle t', n \rangle &= a_{11} \langle t, n \rangle + a_{12} \langle n, n \rangle + a_{13} \langle b, n \rangle \\ &= -a_{12} \end{aligned}$$

elde edilir. t' ifadesi b ile skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle t', b \rangle &= a_{11} \langle t, b \rangle + a_{12} \langle n, b \rangle + a_{13} \langle b, b \rangle \\ &= a_{13} \end{aligned}$$

olur. a_{21}, a_{22}, a_{23} değerlerini hesaplamak için benzer şekilde (4.1) denklemindeki n' ifadesi sırasıyla t, n, b vektörleriyle skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle n', t \rangle &= a_{21} \\ \langle n', n \rangle &= -a_{22} \\ \langle n', b \rangle &= a_{23} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $\langle n, n \rangle' = 0$ olduğundan

$$a_{22} = 0$$

elde edilir. Son olarak a_{31}, a_{32}, a_{33} değerlerini hesaplamak için benzer şekilde (4.1) denklemindeki b' ifadesi sırasıyla t, n, b vektörleriyle skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle b', t \rangle &= a_{31} \\ \langle b', n \rangle &= -a_{32} \\ \langle b', b \rangle &= a_{33} \end{aligned}$$

olur. Burada $\langle b, b \rangle' = 0$ olduğundan

$$a_{33} = 0$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$$\langle t, n \rangle = 0$$

olup eşitliğin her iki tarafının türevi alınarak $\langle t', n \rangle$ ve $\langle t, n' \rangle$ değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \langle t', n \rangle + \langle t, n' \rangle &= 0 \\ -a_{12} + a_{21} &= 0 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Buradan

$$a_{12} = a_{21} = \kappa$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\langle n, b \rangle = 0$$

olup eşitliğin her iki tarafının türevi alınarak $\langle n', b \rangle$ ve $\langle n, b' \rangle$ değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \langle n', b \rangle + \langle n, b' \rangle &= 0 \\ a_{23} - a_{32} &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$a_{23} = a_{32} = \tau$$

elde edilir. Ayrıca $\langle t, b \rangle = 0$ olup eşitliğin her iki tarafının türevi alınarak $\langle t', b \rangle$ ve $\langle t, b' \rangle$ elde edilir. Eğrilik tanımı ile uygun olmadığından $\langle t', b \rangle = a_{13} = 0$ ve $\langle t, b' \rangle = a_{31} = 0$ dır. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} t' &= 0t + \kappa n + 0b \\ n' &= \kappa t + 0n + \tau b \\ b' &= 0t + \tau n + 0b \end{aligned}$$

olur. Bulduğumuz formüller matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

bulunur. n ve b_q arasındaki hiperbolik açı θ alınırsa

$$b_q = \lambda n + \mu b \tag{4.8}$$

olur. Burada (4.8) ifadesi n ile skaler olarak çarpılırsa

$$\langle n, b_q \rangle = \lambda \langle n, n \rangle + \mu \langle n, b \rangle$$

elde edilir. $\langle n, n \rangle = -1, \langle b, n \rangle = 0$ ve n ile b_q aynı timekonide olduğundan $\langle n, b_q \rangle = -\cosh\theta$ olup

$$\lambda = \cosh\theta$$

olarak bulunur. Benzer şekilde μ katsayısını hesaplayalım. (4.8) eşitliğindeki b_q kendisi ile skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle b_q, b_q \rangle = -1 &= \langle \lambda n + \mu b, \lambda n + \mu b \rangle \\ &= \lambda^2 \langle n, n \rangle + \lambda\mu \langle n, b \rangle + \lambda\mu \langle b, n \rangle + \mu^2 \langle b, b \rangle \\ &= \mu^2 - \lambda^2 \end{aligned}$$

olur. Uygun hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}\mu^2 &= \cosh^2\theta - 1\\ \mu^2 &= \sinh^2\theta\\ \mu &= \sinh\theta\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre

$$b_q = \cosh\theta n + \sinh\theta b$$

olarak yazılır. Şimdi n_q yu hesaplayalım.

$$b_q \wedge t = -n_q$$

olduğundan

$$t \wedge b_q = n_q$$

olur. Bu durumda

$$n_q = \cosh\theta t \wedge n + \sinh\theta t \wedge b$$

elde edilir. O halde n_q

$$n_q = -\sinh\theta n - \cosh\theta b$$

olarak bulunur. Şimdi n_q ve b_q kullanılarak n ve b hesaplanabilir. Bunun için

$$\begin{aligned}\sinh\theta n_q &= -\sinh^2\theta n - \sinh\theta\cosh\theta b\\ \cosh\theta b_q &= \cosh^2\theta n + \sinh\theta\cosh\theta b\end{aligned}$$

ifadeleri taraf tarafa toplanırsa

$$n = \sinh\theta n_q + \cosh\theta b_q$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}-\cosh\theta n_q &= \sinh\theta\cosh\theta n + \cosh^2\theta b\\ -\sinh\theta b_q &= -\sinh\theta\cosh\theta n - \sinh^2\theta b\end{aligned}$$

ifadeleri taraf tarafa toplanırsa

$$b = -\cosh\theta n_q - \sinh\theta b_q$$

bulunur. Yapılan hesaplar matris formunda yazılarak

$$\begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sinh\theta & -\cosh\theta \\ 0 & \cosh\theta & \sinh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

ve

$$\begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh\theta & \cosh\theta \\ 0 & -\cosh\theta & -\sinh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

elde edilir. (4.7) ve (4.10) kullanılırsa

$$\begin{aligned} t' &= \kappa n \\ &= \kappa(\sinh\theta n_q + \cosh\theta b_q) \\ &= \kappa\sinh\theta n_q + \kappa\cosh\theta b_q \end{aligned}$$

olur. (4.7), (4.9) ile (4.10) kullanılırsa

$$\begin{aligned} n_q' &= -\cosh\theta d\theta n - \sinh\theta n' - \sinh\theta d\theta b - \cosh\theta b' \\ &= -\cosh\theta d\theta n - \sinh\theta(\kappa t + \tau b) - \sinh\theta d\theta b - \cosh\theta\,(\tau n) \\ &= t\,(-\kappa\sinh\theta) + n\,(-\cosh\theta d\theta - \tau\cosh\theta) + b\,(-\tau\sinh\theta - \sinh\theta d\theta) \\ &= t\,(-\kappa\sinh\theta) + \left(\sinh\theta n_q + \cosh\theta b_q\right)(-\cosh\theta d\theta - \tau\cosh\theta) \\ &\quad + \left(-\cosh\theta n_q - \sinh\theta b_q\right)(-\tau\sinh\theta - \sinh\theta d\theta) \\ &= n_q(-\sinh\theta\cosh\theta d\theta - \tau\sinh\theta\cosh\theta + \tau\sinh\theta\cosh\theta + \sinh\theta\cosh\theta d\theta) \\ &\quad + t\,(-\kappa\sinh\theta) + b_q\left(-\cosh^2\theta d\theta - \tau\cosh^2\theta + \tau\sinh^2\theta + \sinh^2\theta d\theta\right) \\ &= t\,(-\kappa\sinh\theta) + b_q\,(-d\theta - \tau) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} b_q' &= \sinh\theta d\theta n + \cosh\theta n' + \cosh\theta d\theta b + \sinh\theta b' \\ &= \sinh\theta d\theta n + \cosh\theta(\kappa t + \tau b) + \cosh\theta d\theta b + \sinh\theta\,(\tau n) \\ &= t\,(\kappa\cosh\theta) + n\,(\sinh\theta d\theta + \tau\sinh\theta) + b\,(\tau\cosh\theta + \cosh\theta d\theta) \\ &= t\,(\kappa\cosh\theta) + \left(\sinh\theta n_q + \cosh\theta b_q\right)(\sinh\theta d\theta + \tau\sinh\theta) \\ &\quad + \left(-\cosh\theta n_q - \sinh\theta b_q\right)(\tau\cosh\theta + \cosh\theta d\theta) \\ &= t\,(\kappa\cosh\theta) + n_q(\sinh^2\theta d\theta + \tau\sinh^2\theta - \tau\cosh^2\theta - \cosh^2\theta d\theta) \\ &\quad + b_q\,(\sinh\theta\cosh\theta d\theta + \tau\sinh\theta\cosh\theta - \tau\sinh\theta\cosh\theta - \sinh\theta\cosh\theta d\theta) \\ &= t\,(\kappa\cosh\theta) + n_q\,(-d\theta - \tau) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da k_1, k_2 ve k_3 eğrilikleri

$$\begin{aligned} k_1 &= \langle t', n_q \rangle \\ &= \kappa\sinh\theta \langle n_q, n_q \rangle \\ &= \kappa\sinh\theta \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} k_2 &= \langle t', b_q \rangle \\ &= \kappa\cosh\theta \langle b_q, b_q \rangle \\ &= -\kappa\cosh\theta \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} k_3 &= \langle n'_q, b_q \rangle \\ &= -d\theta - \tau \langle b_q, b_q \rangle \\ &= d\theta + \tau \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Tüm bu hesaplar matris formunda

$$\begin{bmatrix} t' \\ n'_q \\ b'_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & -k_2 \\ -k_1 & 0 & -k_3 \\ -k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

şeklinde yazılır.

k İzdüşüm Vektörü Spacelike Olan Spacelike Eğrilerin q-Çatısı

Bu kısımda q-çatılar için iki durum mevcuttur:

iii) Normal Vektörü Timelike, Binormal Vektörü Spacelike Olan Spacelike Eğrilerin q-Çatısı

Teorem 4.1.3 Minkowski uzayında birim teğet vektör t (spacelike), izdüşüm vektör $k = (0,1,0)$ (spacelike), quasi-normal vektör n_q (timelike) ve quasi-binormal vektör b_q (spacelike) olduğunda spacelike eğri boyunca q-çatının Frenet formülleri benzeri varyasyon denklemi

$$\begin{bmatrix} t' \\ n'_q \\ b'_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & k_3 \\ -k_2 & k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix}$$

şeklindedir. q-eğrilikleri ise

$$k_1 = -\kappa \cosh\theta, k_2 = -\kappa \sinh\theta, k_3 = d\theta + \tau$$

şeklinde ifade edilebilir.

İspat. İlk olarak $\{t, n, b\}$ Frenet üçlüsünün t (spacelike), n (timelike), b (spacelike) olduğunda Frenet formüllerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} t' &= a_{11}t + a_{12}n + a_{13}b \\ n' &= a_{21}t + a_{22}n + a_{23}b \\ b' &= a_{31}t + a_{32}n + a_{33}b \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi a_{11}, a_{12}, a_{13} değerlerini hesaplayalım. Bunun için (4.1) denklemindeki t' ifadesi t ile skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle t', t \rangle &= a_{11} \langle t, t \rangle + a_{12} \langle n, t \rangle + a_{13} \langle b, t \rangle \\ &= a_{11} \end{aligned}$$

olup $\langle t, t \rangle' = 0$ olduğundan

$$a_{11} = 0$$

olur. t' ifadesi n ile skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle t', n \rangle &= a_{11} \langle t, n \rangle + a_{12} \langle n, n \rangle + a_{13} \langle b, n \rangle \\ &= -a_{12} \end{aligned}$$

elde edilir. t' ifadesi b ile skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle t', b \rangle &= a_{11} \langle t, b \rangle + a_{12} \langle n, b \rangle + a_{13} \langle b, b \rangle \\ &= a_{13} \end{aligned}$$

olur. a_{21}, a_{22}, a_{23} değerlerini hesaplamak için benzer şekilde (4.1) denklemindeki n' ifadesi sırasıyla t, n, b vektörleriyle skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle n', t \rangle &= a_{21} \\ \langle n', n \rangle &= -a_{22} \\ \langle n', b \rangle &= a_{23} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $\langle n, n \rangle' = 0$ olduğundan

$$a_{22} = 0$$

elde edilir. Son olarak a_{31}, a_{32}, a_{33} değerlerini hesaplamak için benzer şekilde (4.1) denklemindeki b' ifadesi sırasıyla t, n, b vektörleriyle skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle b', t \rangle &= a_{31} \\ \langle b', n \rangle &= -a_{32} \\ \langle b', b \rangle &= a_{33} \end{aligned}$$

olur. Burada $\langle b, b \rangle' = 0$ olduğundan

$$a_{33} = 0$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$$\langle t, n \rangle = 0$$

olup eşitliğin her iki tarafının türevi alınarak $\langle t', n \rangle$ ve $\langle t, n' \rangle$ değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \langle t', n \rangle + \langle t, n' \rangle &= 0 \\ -a_{12} + a_{21} &= 0 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Buradan

$$a_{12} = a_{21} \quad = \quad \kappa$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\langle n, b \rangle = 0$$

olup eşitliğin her iki tarafının türevi alınarak $\langle n', b \rangle$ ve $\langle n, b' \rangle$ değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \langle n', b \rangle + \langle n, b' \rangle &= 0 \\ a_{23} - a_{32} &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$a_{23} = a_{32} \quad = \quad \tau$$

elde edilir. Ayrıca $\langle t, b \rangle = 0$ olup eşitliğin her iki tarafının türevi alınarak $\langle t', b \rangle$ ve $\langle t, b' \rangle$ elde edilir. Eğrilik tanımı ile uygun olmadığından $\langle t', b \rangle = a_{13} = 0$ ve $\langle t, b' \rangle = a_{31} = 0$ dır. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} t' &= 0t + \kappa n + 0b \\ n' &= \kappa t + 0n + \tau b \\ b' &= 0t + \tau n + 0b \end{aligned}$$

olur. Bulduğumuz formüller matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

bulunur. n ve n_q arasındaki hiperbolik açı θ alınırsa

$$n_q = \lambda n + \mu b \tag{4.13}$$

olur. Burada (4.13) ifadesi n ile skaler olarak çarpılırsa

$$\langle n, n_q \rangle = \lambda \langle n, n \rangle + \mu \langle n, b \rangle$$

elde edilir. $\langle n, n \rangle = -1, \langle b, n \rangle = 0$ ve n ile n_q aynı timekonide olduğundan $\langle n, n_q \rangle = -\cosh\theta$ olup

$$\lambda = \cosh\theta$$

olarak bulunur. Benzer şekilde μ katsayısını hesaplayalım. (4.13) eşitliğindeki n_q kendisi ile skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle n_q, n_q \rangle = -1 &= \langle \lambda n + \mu b, \lambda n + \mu b \rangle \\ &= \lambda^2 \langle n, n \rangle + \lambda\mu \langle n, b \rangle + \lambda\mu \langle b, n \rangle + \mu^2 \langle b, b \rangle \\ &= -\lambda^2 + \mu^2 \end{aligned}$$

olur. Uygun hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned} \mu^2 &= \cosh^2\theta - 1 \\ \mu^2 &= \sinh^2\theta \\ \mu &= \sinh\theta \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre

$$n_q = \cosh\theta n + \sinh\theta b$$

olarak yazılır. Şimdi b_q yu hesaplayalım.

$$t \wedge n_q = -b_q$$

olduğundan

$$n_q \wedge t = b_q$$

olur. Bu durumda

$$b_q = \cosh\theta n \wedge t + \sinh\theta b \wedge t$$

elde edilir. O halde b_q

$$b_q = \sinh\theta n + \cosh\theta b$$

olarak bulunur. Şimdi n_q ve b_q kullanılarak n ve b hesaplanabilir. Bunun için

$$\begin{aligned} \cosh\theta n_q &= \cosh^2\theta n + \sinh\theta\cosh\theta b \\ -\sinh\theta b_q &= -\sinh^2\theta n - \sinh\theta\cosh\theta b \end{aligned}$$

ifadeleri taraf tarafa toplanırsa

$$n = \cosh\theta n_q - \sinh\theta b_q$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} -\sinh\theta n_q &= -\sinh\theta\cosh\theta n - \sinh^2\theta b \\ \cosh\theta b_q &= \sinh\theta\cosh\theta n + \cosh^2\theta b \end{aligned}$$

ifadeleri taraf tarafa toplanırsa

$$b = -\sinh\theta n_q + \cosh\theta b_q$$

bulunur. Yapılan hesaplar matris formunda yazılarak

$$\begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\theta & \sinh\theta \\ 0 & \sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

ve

$$\begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\theta & -\sinh\theta \\ 0 & -\sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

elde edilir. (4.12) ve (4.15) kullanılırsa

$$\begin{aligned} t' &= \kappa n \\ &= \kappa(\cosh\theta n_q - \sinh\theta b_q) \\ &= \kappa\cosh\theta n_q - \kappa\sinh\theta b_q \end{aligned}$$

olur. (4.12), (4.14) ile (4.15) kullanılırsa

$$\begin{aligned} n_q' &= \sinh\theta d\theta n + \cosh\theta n' + \cosh\theta d\theta b + \sinh\theta b' \\ &= \sinh\theta d\theta n + \cosh\theta(\kappa t + \tau b) + \cosh\theta d\theta b + \sinh\theta(\tau n) \\ &= t(\kappa\cosh\theta) + n(\sinh\theta d\theta + \tau\sinh\theta) + b(\tau\cosh\theta + \cosh\theta d\theta) \\ &= t(\kappa\cosh\theta) + \left(\cosh\theta n_q - \sinh\theta b_q\right)(\sinh\theta d\theta + \tau\sinh\theta) \\ &\quad + \left(-\sinh\theta n_q + \cosh\theta b_q\right)(\tau\cosh\theta + \cosh\theta d\theta) \\ &= n_q(\sinh\theta\cosh\theta d\theta + \tau\sinh\theta\cosh\theta - \tau\sinh\theta\cosh\theta - \sinh\theta\cosh\theta d\theta) \\ &\quad + t(\kappa\cosh\theta) + b_q\left(-\sinh^2\theta d\theta - \tau\sinh^2\theta + \tau\cosh^2\theta + \cosh^2\theta d\theta\right) \\ &= t(\kappa\cosh\theta) + b_q(d\theta + \tau) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} b_q' &= \cosh\theta d\theta n + \sinh\theta n' + \sinh\theta d\theta b + \cosh\theta b' \\ &= \cosh\theta d\theta n + \sinh\theta(\kappa t + \tau b) + \sinh\theta d\theta b + \cosh\theta(\tau n) \\ &= t(\kappa\sinh\theta) + n(\cosh\theta d\theta + \tau\cosh\theta) + b(\tau\sinh\theta + \sinh\theta d\theta) \\ &= t(\kappa\sinh\theta) + \left(\cosh\theta n_q - \sinh\theta b_q\right)(\cosh\theta d\theta + \tau\cosh\theta) \\ &\quad + \left(-\sinh\theta n_q + \cosh\theta b_q\right)(\tau\sinh\theta + \sinh\theta d\theta) \\ &= t(\kappa\sinh\theta) + n_q(\cosh^2\theta d\theta + \tau\cosh^2\theta - \tau\sinh^2\theta - \sinh^2\theta d\theta) \\ &\quad + b_q(-\sinh\theta\cosh\theta d\theta - \tau\sinh\theta\cosh\theta + \tau\sinh\theta\cosh\theta + \sinh\theta\cosh\theta d\theta) \\ &= t(\kappa\sinh\theta) + n_q(d\theta + \tau) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da k_1, k_2 ve k_3 eğrilikleri

$$\begin{aligned} k_1 &= \langle t', n_q \rangle \\ &= \kappa\cosh\theta\langle n_q, n_q\rangle \\ &= -\kappa\cosh\theta \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} k_2 &= \langle t', b_q \rangle \\ &= -\kappa\sinh\theta\langle b_q, b_q\rangle \\ &= -\kappa\sinh\theta \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} k_3 &= \langle n_q', b_q \rangle \\ &= d\theta + \tau\langle b_q, b_q\rangle \\ &= d\theta + \tau \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Tüm bu hesaplar matris formunda

$$\begin{bmatrix} t' \\ n_q' \\ b_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & k_3 \\ -k_2 & k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

şeklinde yazılır.

iv) Normal Vektörü Spacelike, Binormal Vektörü Timelike Olan Spacelike Eğrilerin q-Çatısı

Teorem 4.1.4 Minkowski uzayında birim teğet vektör t (spacelike), izdüşüm vektör $k = (0,1,0)$ (spacelike), quasi-normal vektör n_q (timelike) ve quasi-binormal vektör b_q (spacelike) olduğunda spacelike eğri boyunca q-çatının Frenet formülleri benzeri varyasyon denklemi

$$\begin{bmatrix} t' \\ n_q' \\ b_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & k_3 \\ -k_2 & k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix}$$

şeklindedir. q-eğrilikleri ise

$$k_1 = \kappa \sinh\theta, k_2 = -\kappa\cosh\theta, k_3 = -d\theta - \tau$$

şeklinde ifade edilebilir.

İspat. İlk olarak $\{t,n,b\}$ Frenet üçlüsünün t (spacelike), n (spacelike), b (timelike) olduğunda Frenet formüllerini hesaplayalım.

$$t' = a_{11}t + a_{12}n + a_{13}b$$
$$n' = a_{21}t + a_{22}n + a_{23}b$$
$$b' = a_{31}t + a_{32}n + a_{33}b$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi a_{11}, a_{12}, a_{13} değerlerini hesaplayalım. Bunun için (4.1) denklemindeki t' ifadesi t ile skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle t',t\rangle &= a_{11}\langle t,t\rangle + a_{12}\langle n,t\rangle + a_{13}\langle b,t\rangle \\ &= a_{11} \end{aligned}$$

olup $\langle t,t\rangle' = 0$ olduğundan

$$a_{11} = 0$$

olur. t' ifadesi n ile skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned}\langle t',n\rangle &= a_{11}\langle t,n\rangle + a_{12}\langle n,n\rangle + a_{13}\langle b,n\rangle \\ &= a_{12}\end{aligned}$$

elde edilir. t' ifadesi b ile skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned}\langle t',b\rangle &= a_{11}\langle t,b\rangle + a_{12}\langle n,b\rangle + a_{13}\langle b,b\rangle \\ &= -a_{13}\end{aligned}$$

olur. a_{21}, a_{22}, a_{23} değerlerini hesaplamak için benzer şekilde (4.1) denklemindeki n' ifadesi sırasıyla t, n, b vektörleriyle skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned}\langle n',t\rangle &= a_{21} \\ \langle n',n\rangle &= a_{22} \\ \langle n',b\rangle &= -a_{23}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $\langle n,n\rangle' = 0$ olduğundan

$$a_{22} = 0$$

elde edilir. Son olarak a_{31}, a_{32}, a_{33} değerlerini hesaplamak için benzer şekilde (4.1) denklemindeki b' ifadesi sırasıyla t, n, b vektörleriyle skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned}\langle b',t\rangle &= a_{31} \\ \langle b',n\rangle &= a_{32} \\ \langle b',b\rangle &= -a_{33}\end{aligned}$$

olur. Burada $\langle b,b\rangle' = 0$ olduğundan

$$a_{33} = 0$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$$\langle t,n\rangle = 0$$

olup eşitliğin her iki tarafının türevi alınarak $\langle t',n\rangle$ ve $\langle t,n'\rangle$ değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\langle t',n\rangle + \langle t,n'\rangle &= 0 \\ a_{12} + a_{21} &= 0\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Buradan

$$a_{12} = -a_{21} = \kappa$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\langle n,b\rangle = 0$$

olup eşitliğin her iki tarafının türevi alınarak $\langle n',b\rangle$ ve $\langle n,b'\rangle$ değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \langle n',b\rangle + \langle n,b'\rangle &= 0 \\ -a_{23}+a_{32} &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$a_{23} = a_{32} = \tau$$

elde edilir. Ayrıca $\langle t,b\rangle = 0$ olup eşitliğin her iki tarafının türevi alınarak $\langle t',b\rangle$ ve $\langle t,b'\rangle$ elde edilir. Eğrilik tanımı ile uygun olmadığından $\langle t',b\rangle = -a_{13} = 0$ ve $\langle t,b'\rangle = a_{31} = 0$ dır. Sonuç olarak

$$t' = 0t + \kappa n + 0b$$

$$n' = -\kappa t + 0n + \tau b$$

$$b' = 0t + \tau n + 0b$$

olur. Bulduğumuz formüller matris formunda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

bulunur. b ve n_q arasındaki hiperbolik açı θ alınırsa

$$n_q = \lambda n + \mu b \tag{4.18}$$

olur. Burada (4.18) ifadesi b ile skaler olarak çarpılırsa

$$\langle b,n_q\rangle = \lambda\langle b,n\rangle + \mu\langle b,b\rangle$$

elde edilir. $\langle b,b\rangle = -1, \langle b,n\rangle = 0$ ve b ile n_q aynı timekonide olduğundan $\langle b,n_q\rangle = -\cosh\theta$ olup

$$\mu = \cosh\theta$$

olarak bulunur. Benzer şekilde λ katsayısını hesaplayalım. (4.18) eşitliğindeki n_q kendisi ile skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle n_q,n_q\rangle = -1 &= \langle \lambda n+\mu b, \lambda n+\mu b\rangle \\ &= \lambda^2\langle n,n\rangle + \lambda\mu\langle n,b\rangle + \lambda\mu\langle b,n\rangle + \mu^2\langle b,b\rangle \\ &= \lambda^2 - \mu^2 \end{aligned}$$

olur. Uygun hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \cosh^2\theta - 1 \\ \lambda^2 &= \sinh^2\theta \\ \lambda &= \sinh\theta \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre

$$n_q = \sinh\theta n + \cosh\theta b$$

olarak yazılır. Şimdi b_q yu hesaplayalım.

$$t \wedge n_q = -b_q$$

olduğundan

$$n_q \wedge t = b_q$$

olur. Bu durumda

$$b_q = \sinh\theta n \wedge t + \cosh\theta b \wedge t$$

elde edilir. O halde b_q

$$b_q = -\cosh\theta n - \sinh\theta b$$

olarak bulunur. Şimdi n_q ve b_q kullanılarak n ve b hesaplanabilir. Bunun için

$$\begin{aligned} -\sinh\theta n_q &= -\sinh^2\theta n - \sinh\theta\cosh\theta b \\ -\cosh\theta b_q &= \cosh^2\theta n + \sinh\theta\cosh\theta b \end{aligned}$$

ifadeleri taraf tarafa toplanırsa

$$n = -\sinh\theta n_q - \cosh\theta b_q$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \cosh\theta n_q &= \sinh\theta\cosh\theta n + \cosh^2\theta b \\ \sinh\theta b_q &= -\sinh\theta\cosh\theta n - \sinh^2\theta b \end{aligned}$$

ifadeleri taraf tarafa toplanırsa

$$b = \cosh\theta n_q + \sinh\theta b_q$$

bulunur. Yapılan hesaplar matris formunda yazılarak

$$\begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh\theta & \cosh\theta \\ 0 & -\cosh\theta & -\sinh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

ve

$$\begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sinh\theta & -\cosh\theta \\ 0 & \cosh\theta & \sinh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

elde edilir. (4.17) ve (4.20) kullanılırsa

$$\begin{aligned} t' &= \kappa n \\ &= \kappa(-\sinh\theta n_q - \cosh\theta b_q) \\ &= -\kappa\sinh\theta n_q - \kappa\cosh\theta b_q \end{aligned}$$

olur. (4.17), (4.19) ile (4.20) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
n_q' &= \cosh\theta d\theta n + \sinh\theta n' + \sinh\theta d\theta b + \cosh\theta b' \\
&= \cosh\theta d\theta n + \sinh\theta(-\kappa t + \tau b) + \sinh\theta d\theta b + \cosh\theta(\tau n) \\
&= t(-\kappa\sinh\theta) + n(\cosh\theta d\theta + \tau\cosh\theta) + b(\tau\sinh\theta + \sinh\theta d\theta) \\
&= t(-\kappa\sinh\theta) + \left(-\sinh\theta n_q - \cosh\theta b_q\right)(\cosh\theta d\theta + \tau\cosh\theta) \\
&\quad + \left(\cosh\theta n_q + \sinh\theta b_q\right)(\tau\sinh\theta + \sinh\theta d\theta) \\
&= n_q(-\sinh\theta\cosh\theta d\theta - \tau\sinh\theta\cosh\theta + \tau\sinh\theta\cosh\theta + \sinh\theta\cosh\theta d\theta) \\
&\quad + b_q\left(-\cosh^2\theta d\theta - \tau\cosh^2\theta + \tau\sinh^2\theta + \sinh^2\theta d\theta\right) + t(-\kappa\sinh\theta) \\
&= t(-\kappa\sinh\theta) + b_q(-d\theta - \tau)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
b_q' &= -\sinh\theta d\theta n - \cosh\theta n' - \cosh\theta d\theta b - \sinh\theta b' \\
&= -\sinh\theta d\theta n - \cosh\theta(-\kappa t + \tau b) - \cosh\theta d\theta b - \sinh\theta(\tau n) \\
&= t(\kappa\cosh\theta) + n(-\sinh\theta d\theta - \tau\sinh\theta) + b(-\tau\cosh\theta - \cosh\theta d\theta) \\
&= t(\kappa\cosh\theta) + \left(-\sinh\theta n_q - \cosh\theta b_q\right)(-\sinh\theta d\theta - \tau\sinh\theta) \\
&\quad + \left(\cosh\theta n_q + \sinh\theta b_q\right)(-\tau\cosh\theta - \cosh\theta d\theta) \\
&= t(\kappa\cosh\theta) + n_q(\sinh^2\theta d\theta + \tau\sinh^2\theta - \tau\cosh^2\theta - \cosh^2\theta d\theta) \\
&\quad + b_q(\sinh\theta\cosh\theta d\theta + \tau\sinh\theta\cosh\theta - \tau\sinh\theta\cosh\theta - \sinh\theta\cosh\theta d\theta) \\
&= t(\kappa\cosh\theta) + n_q(-d\theta - \tau)
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan da k_1, k_2 ve k_3 eğrilikleri

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \langle t', n_q \rangle \\
&= -\kappa\sinh\theta \langle n_q, n_q \rangle \\
&= \kappa\sinh\theta
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
k_2 &= \langle t', b_q \rangle \\
&= -\kappa\cosh\theta \langle b_q, b_q \rangle \\
&= -\kappa\cosh\theta
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
k_3 &= \langle n_q', b_q \rangle \\
&= -d\theta - \tau \langle b_q, b_q \rangle \\
&= -d\theta - \tau
\end{aligned}
$$

şeklinde hesaplanır. Tüm bu hesaplar matris formunda

$$
\begin{bmatrix} t' \\ n_q' \\ b_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & k_3 \\ -k_2 & k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix} \tag{4.21}
$$

şeklinde yazılır.

4.2 Minkowski Uzayında Timelike Eğriler İçin q-Çatısı

Bu kısımda k izdüşüm vektörünün spacelike olması durumuna göre timelike eğrilerin q-çatısı oluşturulmuştur. k izdüşüm vektörü timelike seçildiğinde de aynı sonuçlar elde edildiğinden bu durumu ayrıca açıklamayıp sadece izdüşüm vektör spacelike olduğunda elde edilen hesaplar yer almaktadır. Ayrıca q-eğrilikleri arasındaki bağıntıların yanısıra q-çatısı ile Frenet çatısı arasındaki denklemler bulunmuştur.

Teorem 4.2.1 Minkowski uzayında birim teğet vektör t (timelike), izdüşüm vektör $k = (0,1,0)$ (spacelike), quasi-normal vektör n_q (spacelike) ve quasi-binormal vektör b_q (spacelike) olduğunda timelike eğri boyunca q-çatının Frenet formülleri benzeri varyasyon denklemi

$$\begin{bmatrix} t' \\ n_q' \\ b_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ k_1 & 0 & k_3 \\ k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix}$$

şeklindedir. q-eğrilikleri ise

$$k_1 = \kappa\cos\theta, k_2 = -\kappa\sin\theta, k_3 = d\theta + \tau$$

şeklinde ifade edilebilir.

İspat. İlk olarak $\{t,n,b\}$ Frenet üçlüsünün t (timelike), n (spacelike) ve b (spacelike) olduğunda Frenet formüllerini hesaplayalım.

$$t' = a_{11}t + a_{12}n + a_{13}b$$
$$n' = a_{21}t + a_{22}n + a_{23}b$$
$$b' = a_{31}t + a_{32}n + a_{33}b$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi a_{11}, a_{12}, a_{13} değerlerini hesaplayalım. Bunun için (4.1) denklemindeki t' ifadesi t ile skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle t',t\rangle &= a_{11}\langle t,t\rangle + a_{12}\langle n,t\rangle + a_{13}\langle b,t\rangle \\ &= -a_{11} \end{aligned}$$

olup $\langle t,t\rangle' = 0$ olduğundan

$$a_{11} = 0$$

olur. t' ifadesi n ile skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle t',n\rangle &= a_{11}\langle t,n\rangle + a_{12}\langle n,n\rangle + a_{13}\langle b,n\rangle \\ &= a_{12} \end{aligned}$$

elde edilir. t' ifadesi b ile skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle t', b \rangle &= a_{11} \langle t, b \rangle + a_{12} \langle n, b \rangle + a_{13} \langle b, b \rangle \\ &= a_{13} \end{aligned}$$

olur. a_{21}, a_{22}, a_{23} değerlerini hesaplamak için benzer şekilde (4.1) denklemindeki n' ifadesi sırasıyla t, n, b vektörleriyle skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle n', t \rangle &= -a_{21} \\ \langle n', n \rangle &= a_{22} \\ \langle n', b \rangle &= a_{23} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $\langle n, n \rangle' = 0$ olduğundan

$$a_{22} = 0$$

elde edilir. Son olarak a_{31}, a_{32}, a_{33} değerlerini hesaplamak için benzer şekilde (4.1) denklemindeki b' ifadesi sırasıyla t, n, b vektörleriyle skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle b', t \rangle &= -a_{31} \\ \langle b', n \rangle &= a_{32} \\ \langle b', b \rangle &= a_{33} \end{aligned}$$

olur. Burada $\langle b, b \rangle' = 0$ olduğundan

$$a_{33} = 0$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$$\langle t, n \rangle = 0$$

olup eşitliğin her iki tarafının türevi alınarak $\langle t', n \rangle$ ve $\langle t, n' \rangle$ değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \langle t', n \rangle + \langle t, n' \rangle &= 0 \\ a_{12} - a_{21} &= 0 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Buradan

$$a_{12} = a_{21} = \kappa$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\langle n, b \rangle = 0$$

olup eşitliğin her iki tarafının türevi alınarak $\langle n', b \rangle$ ve $\langle n, b' \rangle$ değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \langle n', b \rangle + \langle n, b' \rangle &= 0 \\ a_{23} + a_{32} &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$a_{23} = -a_{32} \quad = \quad \tau$$

elde edilir. Ayrıca $\langle t, b \rangle = 0$ olup eşitliğin her iki tarafının türevi alınarak $\langle t', b \rangle$ ve $\langle t, b' \rangle$ elde edilir. Eğrilik tanımı ile uygun olmadığından $\langle t', b \rangle = a_{13} = 0$ ve $\langle t, b' \rangle = -a_{31} = 0$ dır. Sonuç olarak

$$t' = 0t + \kappa n + 0b$$
$$n' = \kappa t + 0n + \tau b$$
$$b' = 0t - \tau n + 0b$$

olur. Bulduğumuz formüller matris formunda yazılarak

$$\begin{bmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

bulunur. n ve n_q arasındaki açı θ alınırsa

$$n_q = \lambda n + \mu b \tag{4.23}$$

olur. Burada (4.23) ifadesi n ile skaler olarak çarpılırsa

$$\langle n, n_q \rangle = \lambda \langle n, n \rangle + \mu \langle n, b \rangle$$

elde edilir. $\langle n, n \rangle = 1$, $\langle n, b \rangle = 0$ ve $\langle n, n_q \rangle = \cos\theta$ olup

$$\lambda = \cos\theta$$

olarak bulunur. Benzer şekilde μ katsayısını hesaplayalım. (4.23) eşitliğindeki n_q kendisi ile skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle n_q, n_q \rangle = 1 \quad &= \quad \langle \lambda n + \mu b, \lambda n + \mu b \rangle \\ &= \quad \lambda^2 \langle n, n \rangle + \lambda\mu \langle n, b \rangle + \lambda\mu \langle b, n \rangle + \mu^2 \langle b, b \rangle \\ &= \quad \lambda^2 + \mu^2 \end{aligned}$$

olur. Uygun hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned} \mu^2 &= 1 - \cos^2\theta \\ \mu^2 &= \sin^2\theta \\ \mu &= \sin\theta \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre

$$n_q = \cos\theta n + \sin\theta b$$

olarak yazılır. Şimdi b_q yu hesaplayalım.

$$t \wedge n_q = -b_q$$

olduğundan

$$n_q \wedge t = b_q$$

olur. Bu durumda

$$b_q = \cos\theta n \wedge t + \sin\theta b \wedge t$$

elde edilir. O halde b_q

$$b_q = -\sin\theta n + \cos\theta b$$

olarak bulunur. Şimdi n_q ve b_q kullanılarak n ve b hesaplanabilir. Bunun için

$$\begin{aligned} \cos\theta n_q &= \cos^2\theta n + \sin\theta\cos\theta b \\ -\sin\theta b_q &= \sin^2\theta n - \sin\theta\cos\theta b \end{aligned}$$

ifadeleri taraf tarafa toplanırsa

$$n = \cos\theta n_q - \sin\theta b_q$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \sin\theta n_q &= \sin\theta\cos\theta n + \sin^2\theta b \\ \cos\theta b_q &= -\sin\theta\cos\theta n + \cos^2\theta b \end{aligned}$$

ifadeleri taraf tarafa toplanırsa

$$b = \sin\theta n_q + \cos\theta b_q$$

bulunur. Yapılan hesaplar matris formunda yazılarak

$$\begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

ve

$$\begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

elde edilir. (4.22) ve (4.25) kullanılırsa

$$\begin{aligned} t' &= \kappa n \\ &= \kappa(\cos\theta n_q - \sin\theta b_q) \\ &= \kappa\cos\theta n_q - \kappa\sin\theta b_q \end{aligned}$$

olur. (4.22), (4.24) ile (4.25) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
n_q' &= -\sin\theta d\theta n + \cos\theta n' + \cos\theta d\theta b + \sin\theta b' \\
&= -\sin\theta d\theta n + \cos\theta(\kappa t + \tau b) + \cos\theta d\theta b + \sin\theta\,(-\tau n) \\
&= t\,(\kappa\cos\theta) + n\,(-\sin\theta d\theta - \tau\sin\theta) + b\,(\tau\cos\theta + \cos\theta d\theta) \\
&= t\,(\kappa\cos\theta) + \left(\cos\theta n_q - \sin\theta b_q\right)(-\sin\theta d\theta - \tau\sin\theta) \\
&\quad + \left(\sin\theta n_q + \cos\theta b_q\right)(\tau\cos\theta + \cos\theta d\theta) \\
&= n_q(-\sin\theta\cos\theta d\theta - \tau\sin\theta\cos\theta + \tau\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta d\theta) \\
&\quad + t\,(\kappa\cos\theta) + b_q\left(\sin^2\theta d\theta + \tau\sin^2\theta + \tau\cos^2\theta + \cos^2\theta d\theta\right) \\
&= t\,(\kappa\cos\theta) + b_q\,(d\theta + \tau)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
b_q' &= -\cos\theta d\theta n - \sin\theta n' - \sin\theta d\theta b + \cos\theta b' \\
&= -\cos\theta d\theta n - \sin\theta(\kappa t + \tau b) - \sin\theta d\theta b + \cos\theta\,(-\tau n) \\
&= t\,(-\kappa\sin\theta) + n\,(-\cos\theta d\theta - \tau\cos\theta) + b\,(-\tau\sin\theta - \sin\theta d\theta) \\
&= t\,(-\kappa\sin\theta) + \left(\cos\theta n_q - \sin\theta b_q\right)(-\cos\theta d\theta - \tau\cos\theta) \\
&\quad + \left(\sin\theta n_q + \cos\theta b_q\right)(-\tau\sin\theta - \sin\theta d\theta) \\
&= t\,(-\kappa\sin\theta) + n_q(-\cos^2\theta d\theta - \tau\cos^2\theta - \tau\sin^2\theta - \sin^2\theta d\theta) \\
&\quad + b_q\,(\sin\theta\cos\theta d\theta + \tau\sin\theta\cos\theta - \tau\sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta d\theta) \\
&= t\,(-\kappa\sin\theta) + n_q\,(-d\theta - \tau)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da k_1, k_2 ve k_3 eğrilikleri

$$\begin{aligned}
k_1 &= \left\langle t', n_q \right\rangle \\
&= \kappa\cos\theta \left\langle n_q, n_q \right\rangle \\
&= \kappa\cos\theta
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
k_2 &= \left\langle t', b_q \right\rangle \\
&= -\kappa\sin\theta \left\langle b_q, b_q \right\rangle \\
&= -\kappa\sin\theta
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
k_3 &= \left\langle n_q', b_q \right\rangle \\
&= d\theta + \tau \left\langle b_q, b_q \right\rangle \\
&= d\theta + \tau
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Tüm bu hesaplar matris formunda

$$\begin{bmatrix} t' \\ n_q' \\ b_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ k_1 & 0 & k_3 \\ k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

şeklinde yazılır.

Sonuç 4.2.1 Minkowski uzayında timelike eğriler için q-çatısının türev denklemleri k nın timelike ya da spacelike olmasından bağımsızdır.

Teorem 4.2.2 Minkowski uzayında $\alpha(t)$ düzgün bir eğri olsun. Birim teğet vektör t (timelike) ve izdüşüm vektör $k=(0,1,0)$ spacelike olsun. Bu durumda n_q spacelike, b_q spacelike olarak alınır. q-eğrilikleri $\alpha(t)$ eğrisinin türevleri cinsinden

$$k_1 = -\frac{\det[\alpha'', \alpha', k]}{\|\alpha' \wedge k\| \, \|\alpha'\|^2}$$

$$k_2 = \frac{-\langle \alpha', k\rangle \langle \alpha'', \alpha'\rangle + \|\alpha'\|^2 \langle \alpha'', k\rangle}{\|\alpha'\|^3 \, \|\alpha' \wedge k\|}$$

ve

$$k_3 = \frac{\langle \alpha', k\rangle \det[\alpha', \alpha'', k]}{\|\alpha' \wedge k\|^2 \, \|\alpha'\|^2}$$

şeklinde verilmektedir.

İspat. İlk olarak k_1 eğriliğini hesaplayalım. (3.1) denklemi yardımıyla

$$\alpha' = \|\alpha'\| \, t$$

olur. Yukarıdaki ifadenin türevi alınarak

$$\alpha'' = \|\alpha'\|' \, t + \|\alpha'\| \, t' \tag{4.27}$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca

$$\begin{bmatrix} t' \\ n_q' \\ b_q' \end{bmatrix} = \|\alpha'\| \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ k_1 & 0 & k_3 \\ k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix}$$

yardımıyla

$$t' = \|\alpha'\| \, k_1 n_q + \|\alpha'\| \, k_2 b_q \tag{4.28}$$

olur. Burada (4.28) eşitliği (4.27) denkleminde yerine yazılırsa

$$\alpha'' = \|\alpha'\|' \, t + \|\alpha'\| \left(\|\alpha'\| \, k_1 n_q + \|\alpha'\| \, k_2 b_q\right)$$

elde edilir, yani

$$\alpha'' = \|\alpha'\|' \, t + \|\alpha'\|^2 k_1 n_q + \|\alpha'\|^2 k_2 b_q \tag{4.29}$$

olarak bulunur. (4.29) denkleminin her iki tarafı n_q ile skaler olarak çarpılırsa

$$\langle \alpha'', n_q\rangle = \|\alpha'\|' \langle t, n_q\rangle + \|\alpha'\|^2 k_1 \langle n_q, n_q\rangle + \|\alpha'\|^2 k_2 \langle b_q, n_q\rangle$$

olup $\langle t, n_q \rangle = 0$ ve $\langle b_q, n_q \rangle = 0$ olduğundan

$$\langle \alpha'', n_q \rangle = \|\alpha'\|^2 k_1$$

bulunur. (3.1) denklemi yardımıyla n_q yerine yazılarak

$$\left\langle \alpha'', \frac{t \wedge k}{\|t \wedge k\|} \right\rangle = \|\alpha'\|^2 k_1$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde t yerine yazılarak

$$\frac{\left\langle \alpha'', \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \wedge k \right\rangle}{\left\| \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \wedge k \right\|} = \|\alpha'\|^2 k_1$$

olup

$$\frac{\frac{1}{\|\alpha'\|}}{\frac{1}{\|\alpha'\|}} \frac{\langle \alpha'', \alpha' \wedge k \rangle}{\|\alpha' \wedge k\|} = \|\alpha'\|^2 k_1$$

gerekli işlemler yapılırsa

$$\frac{\langle \alpha'', \alpha' \wedge k \rangle}{\|\alpha' \wedge k\|} = \|\alpha'\|^2 k_1$$

bulunur. O halde

$$k_1 = -\frac{\det[\alpha'', \alpha', k]}{\|\alpha' \wedge k\| \, \|\alpha'\|^2}$$

olur. Şimdi k_2 eğriliğini bulalım. (3.1) ve (3.2) denklemleri yardımıyla

$$k_2 = \frac{\langle t', t \wedge n_q \rangle}{\|\alpha'\|} \tag{4.30}$$

bulunur. Diğer taraftan (3.1) denklemindeki t teğet vektörünün türevi alınır ve (4.30) denkleminde yerine yazılırsa

$$k_2 = \frac{1}{\|\alpha'\|} \left\langle \frac{\alpha'' \|\alpha'\| - \|\alpha'\|' \alpha'}{\|\alpha'\|^2}, \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \wedge \frac{t \wedge k}{\|t \wedge k\|} \right\rangle$$

elde edilir. (3.1) denklemi kullanılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$k_2 = \frac{1}{\|\alpha'\|} \left\langle \frac{\alpha''}{\|\alpha'\|}, \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \wedge \frac{\alpha' \wedge k}{\|\alpha' \wedge k\|} \right\rangle - \frac{1}{\|\alpha'\|} \left\langle \frac{\|\alpha'\|' \alpha'}{\|\alpha'\|^2}, \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \wedge \frac{\alpha' \wedge k}{\|\alpha' \wedge k\|} \right\rangle$$

elde edilir. Karma çarpımdan

$$\left\langle \frac{\|\alpha'\|' \alpha'}{\|\alpha'\|^2}, \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \wedge \frac{\alpha' \wedge k}{\|\alpha' \wedge k\|} \right\rangle = 0$$

olup

$$k_2 = \frac{1}{\|\alpha'\|^3 \, \|\alpha' \wedge k\|} \langle \alpha'', \alpha' \wedge (\alpha' \wedge k) \rangle$$

olarak bulunur. Vektörel çarpımın özellikleri kullanılarak

$$k_2 = \frac{1}{\|\alpha'\|^3 \|\alpha' \wedge k\|} \left\langle \alpha'', -\left\langle \alpha', k \right\rangle \alpha' + \|\alpha'\|^2 k \right\rangle$$

bulunur, yani

$$k_2 = \frac{-\langle \alpha', k \rangle \langle \alpha'', \alpha' \rangle + \|\alpha'\|^2 \langle \alpha'', k \rangle}{\|\alpha'\|^3 \|\alpha' \wedge k\|}$$

elde edilir. Şimdi k_3 eğriliğini bulalım. (3.1) ve (3.2) denklemlerinden

$$k_3 = -\frac{1}{\|\alpha'\|} \left\langle n_q, (t \wedge n_q)' \right\rangle$$

olur. Parantez içerisindeki vektörel çarpımın türevi alınarak

$$k_3 = -\frac{1}{\|\alpha'\|} \left\langle n_q, t' \wedge n_q + t \wedge n_q' \right\rangle$$

bulunur. Ayrıca $n_q \perp (t' \wedge n_q)$ olduğundan

$$\left\langle n_q, t' \wedge n_q \right\rangle = 0$$

olur. O halde

$$\begin{aligned} k_3 &= -\frac{1}{\|\alpha'\|} \left[0 + \left\langle n_q, t \wedge n_q' \right\rangle\right] \\ &= -\frac{1}{\|\alpha'\|} \left\langle n_q, t \wedge n_q' \right\rangle \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. (3.1) yardımıyla n_q yerine yazılarak

$$k_3 = -\frac{1}{\|\alpha'\|} \left\langle \frac{t \wedge k}{\|t \wedge k\|}, t \wedge \left(\frac{t \wedge k}{\|t \wedge k\|} \right)' \right\rangle$$

elde edilir. Benzer şekilde t yerine yazılarak

$$k_3 = -\frac{1}{\|\alpha'\|} \left\langle \frac{\alpha' \wedge k}{\|\alpha' \wedge k\|}, \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \wedge \left(\frac{\alpha' \wedge k}{\|\alpha' \wedge k\|} \right)' \right\rangle$$

bulunur. Burada parantez içindeki ifadenin türevi alınarak

$$k_3 = -\frac{1}{\|\alpha'\|^2 \|\alpha' \wedge k\|} \left\langle \alpha' \wedge k, \alpha' \wedge \left(\frac{(\alpha' \wedge k)' \|\alpha' \wedge k\| - (\alpha' \wedge k) \|\alpha' \wedge k\|'}{\|\alpha' \wedge k\|^2} \right) \right\rangle$$

olur ve gerekli işlemler yapılırsa

$$k_3 = -\frac{1}{\|\alpha'\|^2 \|\alpha' \wedge k\|^2} \left\langle \alpha' \wedge k, \alpha' \wedge (\alpha' \wedge k)' \right\rangle + \frac{1}{\|\alpha'\|^2 \|\alpha' \wedge k\|^3} \left\langle \alpha' \wedge k, \alpha' \wedge (\alpha' \wedge k) \|\alpha' \wedge k\|' \right\rangle$$

bulunur. Burada

$$\left\langle \alpha' \wedge k, \alpha' \wedge (\alpha' \wedge k) \|\alpha' \wedge k\|' \right\rangle = \left(-\left\langle \alpha', \alpha' \right\rangle \left\langle k, \alpha' \wedge k \right\rangle + \left\langle \alpha', \alpha' \wedge k \right\rangle \left\langle k, \alpha' \right\rangle\right) \|\alpha' \wedge k\|'$$

olup $\langle k, \alpha' \wedge k \rangle = 0$ ve $\langle \alpha', \alpha' \wedge k \rangle = 0$ olduğundan

$$\left\langle \alpha' \wedge k, \alpha' \wedge \left(\alpha' \wedge k\right) \left\|\alpha' \wedge k\right\|' \right\rangle = 0$$

elde edilir. O halde

$$k_3 = -\frac{1}{\|\alpha'\|^2 \|\alpha' \wedge k\|^2} \langle \alpha' \wedge k, \alpha' \wedge (\alpha' \wedge k)' \rangle$$

olur. Burada Lagrange özdeşliği kullanılarak

$$\langle \alpha' \wedge k, \alpha' \wedge (\alpha' \wedge k)' \rangle = -\langle \alpha', \alpha' \rangle \left\langle k, (\alpha' \wedge k)' \right\rangle + \left\langle \alpha', (\alpha' \wedge k)' \right\rangle \langle k, \alpha' \rangle \tag{4.31}$$

elde edilir. $(\alpha' \wedge k)$ ifadesinin türevi alınarak (4.31) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$-\langle \alpha', \alpha' \rangle \langle k, (\alpha'' \wedge k + \alpha' \wedge k') \rangle + \langle \alpha', (\alpha'' \wedge k + \alpha' \wedge k') \rangle \langle k, \alpha' \rangle$$

elde edilir. Burada gerekli işlemler yapılarak

$$-\langle \alpha', \alpha' \rangle \left[\langle k, \alpha'' \wedge k \rangle + \langle k, \alpha' \wedge k' \rangle \right] + \left[\langle \alpha', \alpha'' \wedge k \rangle + \langle \alpha', \alpha' \wedge k' \rangle \right] \langle k, \alpha' \rangle$$

ifadesi elde edilir. Son denklemde $\langle k, \alpha'' \wedge k \rangle = 0$ ve $\langle \alpha', \alpha' \wedge k' \rangle = 0$ olup

$$-\langle \alpha', \alpha' \rangle \langle k, \alpha' \wedge k' \rangle + \langle \alpha', \alpha'' \wedge k \rangle \langle k, \alpha' \rangle$$

sonucuna ulaşılır. Burada $k = \mathit{sabit}$ olduğundan $k' = 0$ olur. Bu durumda

$$\langle \alpha' \wedge k, \alpha' \wedge (\alpha' \wedge k)' \rangle = \langle \alpha', \alpha'' \wedge k \rangle \langle k, \alpha' \rangle$$

elde edilir. O halde

$$k_3 = -\frac{1}{\|\alpha'\|^2 \|\alpha' \wedge k\|^2} \langle \alpha', \alpha'' \wedge k \rangle \langle k, \alpha' \rangle \tag{4.32}$$

olarak bulunur. (4.32) denklemi düzenlenirse

$$k_3 = \frac{\langle \alpha', k \rangle \det[\alpha', \alpha'', k]}{\|\alpha' \wedge k\|^2 \|\alpha'\|^2}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.3 Minkowski uzayında $\alpha(t)$ düzgün bir eğri olsun. Birim teğet vektör t (spacelike) ve izdüşüm vektör k olsun. Bu durumda quasi-normal vektör n_q ve quasi-binormal vektör b_q olmak üzere q-eğrilikleri $\alpha(t)$ eğrisinin türevleri cinsinden

$$k_1 = -\frac{\det[\alpha'', \alpha', k]}{\|\alpha' \wedge k\| \|\alpha'\|^2}$$

$$k_2 = \frac{-\langle \alpha', k \rangle \langle \alpha'', \alpha' \rangle + \|\alpha'\|^2 \langle \alpha'', k \rangle}{\|\alpha'\|^3 \|\alpha' \wedge k\|}$$

ve

$$k_3 = \frac{\langle \alpha', k \rangle \det[\alpha', \alpha'', k]}{\|\alpha' \wedge k\|^2 \|\alpha'\|^2}$$

şeklinde verilmektedir.

İspat. Teorem 4.2.2 nin ispatındaki işlem adımları kullanıldığında istenilen sonuçlar elde edilir.

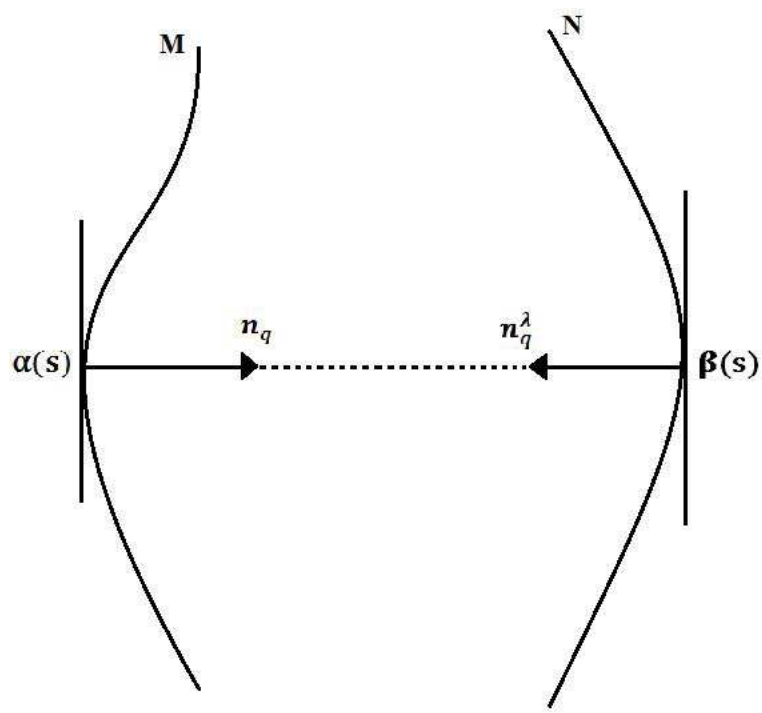
5. MİNKOWSKİ UZAYINDA YÖNLÜ EĞRİ ÇİFTLERİ

Bu bölümde 3-boyutlu Minkowski uzayında bir uzay eğrisinin quasi-normal vektörü kullanılarak yönlü eğriler tanımlanmıştır. Burada k izdüşüm vektörü timelike olan spacelike eğriler için, k izdüşüm vektörü spacelike olan spacelike eğriler için ve yine k izdüşüm vektörü spacelike olan timelike eğriler için Bertrand, Mannheim ve involüt-evolüt eğri çiftleriyle ilgili bazı teoremler verilmiştir.

5.1 Minkowski Uzayında Yönlü Bertrand Eğri Çiftleri

Bu kısımda, 3-boyutlu Minkowski uzayında timelike veya spacelike bir uzay eğrisinin quasi-normal vektörü kullanılarak yönlü Bertrand eğrileri tanımlanmıştır. Ayrıca k izdüşüm vektörü verilen yönlü Bertrand eğrilerinin eğrilikleri arasındaki ilişki elde edilmiştir.

Tanım 5.1.1 $M,N \subset \mathbb{R}_1^3$ iki uzay eğrisi (I,α) ve (I,β) koordinat komşulukları ile verilsin. M eğrisinin q-çatısı $\{t,n_q,b_q\}$ ve N eğrisinin q-çatısı $\{t^\lambda,n_q^\lambda,b_q^\lambda\}$ olmak üzere, eğer n_q ve n_q^λ quasi-normal vektörleri lineer bağımlı ise M ve N eğrilerine yönlü Bertrand eğri çifti denir.



Şekil 5.1: Yönlü Bertrand eğrileri

5.1.1 Minkowski uzayında yönlü spacelike Bertrand eğri çiftleri

i) *k* izdüşüm vektörü timelike olan yönlü spacelike Bertrand eğri çiftleri

Bu altkısımda 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike bir uzay eğrisinin quasi-normal vektörü kullanılarak yönlü Bertrand eğrileri tanımlanacaktır. Burada birim teğet vektör t (spacelike) ve izdüşüm vektör k (timelike) olup buna bağlı olarak quasi-normal vektör n_q (spacelike) ve quasi-binormal vektör b_q (timelike) olarak alınmıştır. Ayrıca k izdüşüm vektörü timelike olan yönlü spacelike Bertrand eğrilerinin eğrilikleri arasındaki ilişki elde edilecektir.

Teorem 5.1.1 $\alpha(s)$ birim hızlı yönlü spacelike bir uzay eğrisi ve yay parametresi s_1 olan $\beta(s)$ eğrisi, $\alpha(s)$ nin yönlü spacelike Bertrand eğri çifti olsun. Burada izdüşüm vektörü k (timelike) olup bu durumda

(a) Yönlü spacelike Bertrand eğrileri olan $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ eğrileri arasındaki uzaklık sabittir.

(b) $k_3 = 0$ ise yönlü spacelike Bertrand eğrilerinin karşılık gelen noktalarındaki teğet vektörler arasındaki açı sabittir.

İspat. (a) $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ Bertrand eğri çiftlerinin q-çatılarını sırasıyla $\{t, n_q, b_q\}$ ve $\{t^\lambda, n_q^\lambda, b_q^\lambda\}$ ile gösterelim. Şekil 5.1 den

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda n_q \tag{5.1}$$

şeklinde yazılabilir. s parametresine göre (5.1) in türevini alarak

$$\frac{d\beta(s)}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = \frac{d\alpha(s)}{ds} + \lambda n_q'(s) + \lambda' n_q(s)$$

elde edilir. Buradan da (4.6) denklemi yardımıyla

$$t^\lambda \frac{ds_1}{ds} = t + \lambda\left(-k_1 t - k_3 b_q\right) + \lambda' n_q$$

olup gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$t^\lambda \frac{ds_1}{ds} = (1 - \lambda k_1)t + \lambda' n_q - \lambda k_3 b_q \tag{5.2}$$

olur. (5.2) denkleminin her iki tarafı n_q ile skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned} \left\langle t^\lambda, n_q \right\rangle \tfrac{ds_1}{ds} &= (1 - \lambda k_1)\left\langle t, n_q \right\rangle + \lambda' \left\langle n_q, n_q \right\rangle - \lambda k_3 \left\langle b_q, n_q \right\rangle \\ &= \lambda' \end{aligned}$$

elde edilir. n_q ve n_q^λ lineer bağımlı olup $\left\langle t^\lambda, n_q^\lambda \right\rangle = 0$ olduğundan $\left\langle t^\lambda, n_q \right\rangle = 0$ olur. O halde

$$\lambda' = 0$$

bulunur. Bu durumda $\lambda = sabit$ olduğu açıktır. Böylece

$$\begin{aligned} d(\alpha(s), \beta(s)) &= \|\beta(s) - \alpha(s)\| \\ &= \|\lambda n_q(s)\| \\ &= |\lambda| \|n_q(s)\| \\ &= |\lambda| \end{aligned}$$

olup

$$\|\beta(s) - \alpha(s)\| = |\lambda| = sabit$$

olur. Yani bu iki eğri arasındaki uzaklık sabittir.

(b) (5.2) denkleminde $\lambda' = 0$ değeri yerine yazılır ve denklemin her iki tarafının normu alınırsa

$$\sqrt{\left| \left\langle t^\lambda, t^\lambda \right\rangle \left(\frac{ds_1}{ds} \right)^2 \right|} = \sqrt{\left| (1 - \lambda k_1)^2 \langle t, t \rangle + \lambda^2 k_3^2 \left\langle b_q, b_q \right\rangle \right|}$$

olur ve buradan

$$\frac{ds_1}{ds} = \pm \sqrt{\left| (1 - \lambda k_1)^2 - \lambda^2 k_3^2 \right|} \tag{5.3}$$

bulunur. O halde (5.3) denklemi

$$t^\lambda \frac{ds_1}{ds} = (1 - \lambda k_1) t - \lambda k_3 b_q$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$t^\lambda = \pm \frac{(1 - \lambda k_1) t - \lambda k_3 b_q}{\sqrt{\left| (1 - \lambda k_1)^2 - \lambda^2 k_3^2 \right|}} \tag{5.4}$$

elde edilir. Ayrıca t ve t^λ spacelike vektörleri arasındaki açı φ alınırsa

$$\left\langle t, t^\lambda \right\rangle = \cos\varphi$$

olur. (5.4) denklemi t ile skaler olarak çarpılırsa

$$\cos\varphi = \pm \frac{1 - \lambda k_1}{\sqrt{\left| (1 - \lambda k_1)^2 - \lambda^2 k_3^2 \right|}} \langle t, t \rangle$$

bulunur. O halde

$$\cos\varphi = \pm \frac{1 - \lambda k_1}{\sqrt{\left| (1 - \lambda k_1)^2 - \lambda^2 k_3^2 \right|}}$$

olur. Burada $k_3 = 0$ olduğunda $\cos\varphi = +1$ olarak bulunur. Yani $\varphi = 0$ dır. O halde teğet vektörler arasındaki açı sabittir.

Teorem 5.1.2 $\alpha(s)$ birim hızlı yönlü spacelike bir uzay eğrisi ve yay parametresi s_1 olan $\beta(s)$ eğrisi, $\alpha(s)$ nin yönlü spacelike Bertrand eğri çifti olsun. Burada izdüşüm vektörü k (timelike) tır. Bu iki eğrinin q-çatıları arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} t^{\lambda} \\ n_q^{\lambda} \\ b_q^{\lambda} \end{bmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{\left|(1-\lambda k_1)^2-\lambda^2 k_3^2\right|}}\begin{bmatrix} 1-\lambda k_1 & 0 & -\lambda k_3 \\ 0 & \sqrt{\left|(1-\lambda k_1)^2-\lambda^2 k_3^2\right|} & 0 \\ \mp\lambda k_3 & 0 & \pm(1-\lambda k_1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir.

İspat. (5.4) denklemi k ile vektörel olarak çarpılırsa

$$t^{\lambda}\wedge k = \pm\frac{(1-\lambda k_1)(t\wedge k)-\lambda k_3(b_q\wedge k)}{\sqrt{\left|(1-\lambda k_1)^2-\lambda^2 k_3^2\right|}} \tag{5.5}$$

bulunur. Ayrıca (3.1) denkleminden dolayı

$$t\wedge k = \|t\wedge k\|\, n_q \tag{5.6}$$

olup Lagrange özdeşliği ve $k=(0,0,1)$ timelike izdüşüm vektörü kullanılarak

$$\begin{aligned} \|t\wedge k\| &= \sqrt{\left|\langle t\wedge k, t\wedge k\rangle\right|} \\ &= \sqrt{\left|-\langle t,t\rangle\langle k,k\rangle+\langle t,k\rangle^2\right|} \\ &= \sqrt{1+\langle t,k\rangle^2} \\ &= \sqrt{1+\mu^2} \end{aligned} \tag{5.7}$$

elde edilir. Burada μ, $\alpha(s)$ eğrisinin teğet vektörünün üçüncü bileşenidir. Benzer şekilde hesaplamalar yaparak

$$b_q\wedge k = \left(t\wedge n_q\right)\wedge k = -\langle t,k\rangle n_q + \left\langle n_q,k\right\rangle t = \mu n_q \tag{5.8}$$

bulunur. (5.6), (5.7) ve (5.8) denklemleri (5.5) te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} t^{\lambda}\wedge k &= \pm\frac{\sqrt{1+\mu^2}(1-\lambda k_1)n_q-\lambda k_3\mu n_q}{\sqrt{\left|(1-\lambda k_1)^2-\lambda^2 k_3^2\right|}} \\ &= \pm\frac{(\sqrt{1+\mu^2}(1-\lambda k_1)-\lambda k_3\mu)n_q}{\sqrt{\left|(1-\lambda k_1)^2-\lambda^2 k_3^2\right|}} \end{aligned} \tag{5.9}$$

elde edilir. n_q^{λ} yı bulmak için $\left\|t^{\lambda}\wedge k\right\|$ ifadesi hesaplanarak

$$\begin{aligned} \left\|t^{\lambda}\wedge k\right\| &= \sqrt{\frac{\left|(\sqrt{1+\mu^2}(1-\lambda k_1)-\lambda k_3\mu)^2\left\langle n_q,n_q\right\rangle\right|}{\left|(1-\lambda k_1)^2-\lambda^2 k_3^2\right|}} \\ &= \frac{\sqrt{1+\mu^2}(1-\lambda k_1)-\lambda k_3\mu}{\sqrt{\left|(1-\lambda k_1)^2-\lambda^2 k_3^2\right|}} \end{aligned}$$

bulunur. (3.1) denklemi kullanılarak (5.9) denkleminde gerekli işlemler yapılırsa

$$\left\|t^{\lambda}\wedge k\right\| n_q^{\lambda} = \pm\frac{(\sqrt{1+\mu^2}(1-\lambda k_1)-\lambda k_3\mu)n_q}{\sqrt{\left|(1-\lambda k_1)^2-\lambda^2 k_3^2\right|}} \tag{5.10}$$

olup $\left\|t^{\lambda}\wedge k\right\|$ ifadesi (5.10) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{(\sqrt{1+\mu^2}(1-\lambda k_1)-\lambda k_3\mu)n_q^{\lambda}}{\sqrt{\left|(1-\lambda k_1)^2-\lambda^2 k_3^2\right|}} = \pm\frac{(\sqrt{1+\mu^2}(1-\lambda k_1)-\lambda k_3\mu)n_q}{\sqrt{\left|(1-\lambda k_1)^2-\lambda^2 k_3^2\right|}}$$

bulunur. O halde

$$n_q^{\lambda} = \frac{t^{\lambda}\wedge k}{\left\|t^{\lambda}\wedge k\right\|} = \pm n_q \tag{5.11}$$

olur. Böylece bu çalışmanın en önemli sonuçlarından biri elde edilir:

k izdüşüm vektörü timelike olan yönlü spacelike Bertrand eğri çiftlerinde her zaman quasi-normal vektörleri lineer bağımlıdır.

Son olarak b_q^{λ} quasi-binormal vektörünü hesaplayalım.

$$b_q^{\lambda} = t^{\lambda}\wedge n_q^{\lambda}$$

olduğundan (5.4) ve (5.11) denklemleri yardımıyla

$$t^{\lambda}\wedge n_q^{\lambda} = \frac{(1-\lambda k_1)\left(t\wedge n_q\right)-\lambda k_3\left(b_q\wedge n_q\right)}{\sqrt{\left|(1-\lambda k_1)^2-\lambda^2 k_3^2\right|}}$$

elde edilir. Buradan da

$$b_q^{\lambda} = \frac{-\lambda k_3 t+(1-\lambda k_1)\,b_q}{\sqrt{\left|(1-\lambda k_1)^2-\lambda^2 k_3^2\right|}} \tag{5.12}$$

olur. O halde

$$\begin{bmatrix} t^{\lambda} \\ n_q^{\lambda} \\ b_q^{\lambda} \end{bmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{\left|(1-\lambda k_1)^2-\lambda^2 k_3^2\right|}}\begin{bmatrix} 1-\lambda k_1 & 0 & -\lambda k_3 \\ 0 & \sqrt{\left|(1-\lambda k_1)^2-\lambda^2 k_3^2\right|} & 0 \\ \mp\lambda k_3 & 0 & \pm(1-\lambda k_1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix}$$

bulunur.

Teorem 5.1.3 $\alpha(s)$ birim hızlı yönlü spacelike bir uzay eğrisi ve yay parametresi s_1 olan $\beta(s)$ eğrisi, $\alpha(s)$ nin yönlü spacelike Bertrand eğri çifti olsun. Burada izdüşüm vektörü k timelike olup q-eğrilikleri arasındaki ilişki

$$
\begin{aligned}
k_1^{\lambda} &= \frac{(1-\lambda k_1)\,k_1+\lambda k_3^2}{\sqrt{\left|(1-\lambda k_1)^2-\lambda^2 k_3^2\right|}} \\
k_2^{\lambda} &= \pm\frac{\lambda k_3'\,(1-\lambda k_1)+\lambda^2 k_3 k_1'+\left((1-\lambda k_1)^2-\lambda^2 k_3^2\right)k_2}{\left|(1-\lambda k_1)^2-\lambda^2 k_3^2\right|} \\
k_3^{\lambda} &= \pm\frac{k_3}{\sqrt{\left|(1-\lambda k_1)^2-\lambda^2 k_3^2\right|}}
\end{aligned}
$$

şeklinde verilir. Burada $\beta(s)$ eğrisinin q-eğrilikleri $k_1^{\lambda}, k_2^{\lambda}$ ve k_3^{λ} dır.

İspat. İlk olarak k_1^{λ} eğriliğini hesaplayalım.

$$
k_1^{\lambda}=\left\langle t^{\lambda'},n_q^{\lambda}\right\rangle=-\left\langle t^{\lambda},n_q^{\lambda'}\right\rangle \tag{5.13}
$$

olup (5.4) ve (4.6) denklemleri yardımıyla t^{λ} nın türevini hesaplayalım.

Burada $(1-\lambda k_1)^2\neq\lambda^2k_3^2$ şeklindedir. Ayrıca $(1-\lambda k_1)^2-\lambda^2k_3^2>0$ olarak alınırsa,

$$
\begin{aligned}
t^{\lambda'} = {} & \pm[\left(-\lambda^3k_1k_3k_3'+\lambda^2k_3k_3'+\lambda^3k_3^2k_1'-2\lambda^2k_1k_2k_3+\lambda^3k_1^2k_2k_3+\lambda k_2k_3-\lambda^3k_2k_3^3\right)t \\
& +\left(-3\lambda k_1^2+\lambda k_3^2+k_1+3\lambda^2k_1^3-\lambda^3k_1^4-\lambda^3k_3^4+2\lambda^3k_1^2k_3^2-3\lambda^2k_1k_3^2\right)n_q+(\lambda^3k_1k_3k_1' \\
& -\lambda k_3'-\lambda^2k_3k_1'+2\lambda^2k_1k_3'-\lambda^3k_1^2k_3'-\lambda^3k_1k_2k_3^2-k_2+3\lambda k_1k_2+\lambda^2k_2k_3^2-3\lambda^2k_1^2k_2 \\
& +\lambda^3k_1^3k_2)b_q]\big/\left((1-\lambda k_1)^2-\lambda^2k_3^2\right)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned} \tag{5.14}
$$

elde edilir. $(1-\lambda k_1)^2-\lambda^2k_3^2<0$ olarak alınırsa,

$$
\begin{aligned}
t^{\lambda'} = {} & \pm[\left(\lambda^3k_1k_3k_3'-\lambda^2k_3k_3'-\lambda^3k_3^2k_1'+2\lambda^2k_1k_2k_3-\lambda^3k_1^2k_2k_3-\lambda k_2k_3+\lambda^3k_2k_3^3\right)t \\
& +\left(3\lambda k_1^2-\lambda k_3^2-k_1-3\lambda^2k_1^3+\lambda^3k_1^4+\lambda^3k_3^4-2\lambda^3k_1^2k_3^2+3\lambda^2k_1k_3^2\right)n_q+(-\lambda^3k_1k_3k_1' \\
& +\lambda k_3'+\lambda^2k_3k_1'-2\lambda^2k_1k_3'+\lambda^3k_1^2k_3'+\lambda^3k_1k_2k_3^2+k_2-3\lambda k_1k_2-\lambda^2k_2k_3^2+3\lambda^2k_1^2k_2 \\
& -\lambda^3k_1^3k_2)b_q]\big/\left(\lambda^2k_3^2-(1-\lambda k_1)^2\right)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned} \tag{5.15}
$$

olur. O halde (5.13) ile (5.14) veya (5.15) denklemleri kullanılırsa

$$
k_1^{\lambda}=\frac{(1-\lambda k_1)\,k_1+\lambda k_3^2}{\sqrt{\left|(1-\lambda k_1)^2-\lambda^2k_3^2\right|}}
$$

elde edilir. Şimdi k_2^{λ} eğriliğini hesaplayalım.

$$
k_2^{\lambda}=\left\langle t^{\lambda'},b_q^{\lambda}\right\rangle=-\left\langle t^{\lambda},b_q^{\lambda'}\right\rangle \tag{5.16}
$$

olduğundan (5.12), (5.14) ve (5.15) denklemleri (5.16) denkleminde yerine yazılarak

$$k_2^\lambda = \pm\frac{\lambda k_3'(1-\lambda k_1)+\lambda^2 k_3 k_1' + \left((1-\lambda k_1)^2-\lambda^2 k_3^2\right)k_2}{\left|(1-\lambda k_1)^2-\lambda^2 k_3^2\right|}$$

bulunur. Son olarak k_3^λ eğriliğini hesaplayalım.

$$k_3^\lambda = \left\langle n_q^{\lambda'}, b_q^\lambda \right\rangle \tag{5.17}$$

olduğundan (4.6), (5.12) ve (5.17) denklemleri yardımıyla

$$k_3^\lambda = \pm\frac{k_3}{\sqrt{\left|(1-\lambda k_1)^2-\lambda^2 k_3^2\right|}}$$

elde edilir.

ii) k izdüşüm vektörü spacelike olan yönlü spacelike Bertrand eğri çiftleri

Bu altkısımda 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike bir uzay eğrisinin quasi-normal vektörü kullanılarak yönlü Bertrand eğrileri tanımlanacaktır. Burada birim teğet vektör t (spacelike) ve izdüşüm vektör k (spacelike) olup buna bağlı olarak quasi-normal vektör n_q (timelike) ve quasi-binormal vektör b_q (spacelike) olarak alınmıştır. Ayrıca k izdüşüm vektörü spacelike olan yönlü spacelike Bertrand eğrilerinin eğrilikleri arasındaki ilişki elde edilecektir.

Teorem 5.1.4 $\alpha(s)$ birim hızlı yönlü spacelike bir uzay eğrisi ve yay parametresi s_1 olan $\beta(s)$ eğrisi, $\alpha(s)$ nin yönlü spacelike Bertrand eğri çifti olsun. Burada izdüşüm vektörü k (spacelike) olup bu durumda

(a) Yönlü spacelike Bertrand eğrileri olan $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ eğrileri arasındaki uzaklık sabittir.

(b) $k_3 = 0$ ise yönlü spacelike Bertrand eğrilerinin karşılık gelen noktalarındaki teğet vektörler arasındaki açı sabittir.

İspat. (a) $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ Bertrand eğri çiftlerinin q-çatılarını sırasıyla $\{t, n_q, b_q\}$ ve $\left\{t^\lambda, n_q^\lambda, b_q^\lambda\right\}$ ile gösterelim. Şekil 5.1 den

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda n_q \tag{5.18}$$

şeklinde yazılabilir. s parametresine göre (5.18) nın türevini alarak

$$\frac{d\beta(s)}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = \frac{d\alpha(s)}{ds} + \lambda n_q'(s) + \lambda' n_q(s)$$

elde edilir. Buradan da (4.16) denklemi yardımıyla

$$t^{\lambda}\frac{ds_1}{ds}=t+\lambda\left(-k_1t+k_3b_q\right)+\lambda' n_q$$

olup gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$t^{\lambda}\frac{ds_1}{ds}=(1-\lambda k_1)t+\lambda' n_q+\lambda k_3b_q \tag{5.19}$$

olur. (5.19) denkleminin her iki tarafı n_q ile skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned}\left\langle t^{\lambda},n_q\right\rangle\tfrac{ds_1}{ds} &= (1-\lambda k_1)\left\langle t,n_q\right\rangle+\lambda'\left\langle n_q,n_q\right\rangle+\lambda k_3\left\langle b_q,n_q\right\rangle\\ &= -\lambda'\end{aligned}$$

elde edilir. n_q ve n_q^{λ} lineer bağımlı olup $\left\langle t^{\lambda},n_q^{\lambda}\right\rangle=0$ olduğundan $\left\langle t^{\lambda},n_q\right\rangle=0$ olur. O halde

$$\lambda'=0$$

bulunur. Bu durumda $\lambda=sabit$ olduğu açıktır. Böylece

$$\begin{aligned}d\left(\alpha(s),\beta(s)\right) &= \|\beta(s)-\alpha(s)\|\\ &= \left\|\lambda n_q(s)\right\|\\ &= |\lambda|\left\|n_q(s)\right\|\\ &= |\lambda|\end{aligned}$$

olup

$$\|\beta(s)-\alpha(s)\|=|\lambda|=sabit$$

olur. Yani bu iki eğri arasındaki uzaklık sabittir.

(b) (5.19) denkleminde $\lambda'=0$ değeri yerine yazılır ve denklemin her iki tarafının normu alınırsa

$$\sqrt{\left|\left\langle t^{\lambda},t^{\lambda}\right\rangle\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2\right|}=\sqrt{\left|(1-\lambda k_1)^2\left\langle t,t\right\rangle+\lambda^2k_3^2\left\langle b_q,b_q\right\rangle\right|}$$

olur ve buradan

$$\frac{ds_1}{ds}=\pm\sqrt{(1-\lambda k_1)^2+\lambda^2k_3^2} \tag{5.20}$$

bulunur. O halde (5.20) denklemi

$$t^{\lambda}\frac{ds_1}{ds}=(1-\lambda k_1)t+\lambda k_3b_q$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$t^{\lambda}=\pm\frac{(1-\lambda k_1)t+\lambda k_3b_q}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2+\lambda^2k_3^2}} \tag{5.21}$$

elde edilir. Ayrıca t ve t^{λ} spacelike vektörleri arasındaki açı φ alınırsa

$$\left\langle t,t^{\lambda}\right\rangle = \cos\varphi$$

olur. (5.21) denklemi t ile skaler olarak çarpılırsa

$$\cos\varphi = \pm\frac{1-\lambda k_1}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2+\lambda^2 k_3^2}}\left\langle t,t\right\rangle$$

bulunur. O halde

$$\cos\varphi = \pm\frac{1-\lambda k_1}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2+\lambda^2 k_3^2}}$$

olur. Burada $k_3 = 0$ olduğunda $\cos\varphi = +1$ olarak bulunur. Yani $\varphi = 0$ dır. O halde teğet vektörler arasındaki açı sabittir.

Teorem 5.1.5 $\alpha(s)$ birim hızlı yönlü spacelike bir uzay eğrisi ve yay parametresi s_1 olan $\beta(s)$ eğrisi, $\alpha(s)$ nin yönlü spacelike Bertrand eğri çifti olsun. Burada izdüşüm vektörü k (spacelike) tır. Bu iki eğrinin q-çatıları arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} t^{\lambda} \\ n_q^{\lambda} \\ b_q^{\lambda} \end{bmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2+\lambda^2 k_3^2}}\begin{bmatrix} 1-\lambda k_1 & 0 & \lambda k_3 \\ 0 & \sqrt{(1-\lambda k_1)^2+\lambda^2 k_3^2} & 0 \\ \mp\lambda k_3 & 0 & \pm(1-\lambda k_1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir.

İspat. (5.21) denklemi k ile vektörel olarak çarpılırsa

$$t^{\lambda}\wedge k = \pm\frac{(1-\lambda k_1)(t\wedge k)+\lambda k_3(b_q\wedge k)}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2+\lambda^2 k_3^2}} \tag{5.22}$$

bulunur. Ayrıca (3.1) denkleminden dolayı

$$t\wedge k = \|t\wedge k\|\, n_q \tag{5.23}$$

olup Lagrange özdeşliği ve $k=(0,1,0)$ spacelike izdüşüm vektörü kullanılarak

$$\begin{aligned} \|t\wedge k\| &= \sqrt{|\langle t\wedge k, t\wedge k\rangle|} \\ &= \sqrt{\left|-\langle t,t\rangle\langle k,k\rangle+\langle t,k\rangle^2\right|} \\ &= \sqrt{\left|\langle t,k\rangle^2-1\right|} \\ &= \sqrt{|\mu^2-1|} \end{aligned} \tag{5.24}$$

elde edilir. Burada μ, $\alpha(s)$ eğrisinin teğet vektörünün ikinci bileşenidir. Benzer şekilde hesaplamalar yaparak

$$b_q \wedge k = \left(n_q \wedge t\right) \wedge k = -\left\langle n_q, k\right\rangle t + \langle t, k\rangle n_q = \mu n_q \tag{5.25}$$

bulunur. (5.23), (5.24) ve (5.25) denklemleri (5.22) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} t^{\lambda} \wedge k &= \pm \frac{\sqrt{|\mu^2-1|}(1-\lambda k_1)n_q + \lambda k_3 \mu n_q}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2+\lambda^2 k_3^2}} \\ &= \pm \frac{(\sqrt{|\mu^2-1|}(1-\lambda k_1) + \lambda k_3 \mu) n_q}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2+\lambda^2 k_3^2}} \end{aligned} \tag{5.26}$$

elde edilir. n_q^{λ} yı bulmak için $\left\|t^{\lambda} \wedge k\right\|$ ifadesi hesaplanarak

$$\begin{aligned} \left\|t^{\lambda} \wedge k\right\| &= \sqrt{\frac{\left|(\sqrt{|\mu^2-1|}(1-\lambda k_1) + \lambda k_3 \mu)^2 \left\langle n_q, n_q\right\rangle\right|}{\left|(1-\lambda k_1)^2+\lambda^2 k_3^2\right|}} \\ &= \frac{\sqrt{|\mu^2-1|}(1-\lambda k_1) + \lambda k_3 \mu}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2+\lambda^2 k_3^2}} \end{aligned}$$

bulunur. (3.1) denklemi kullanılarak (5.26) denkleminde gerekli işlemler yapılırsa

$$\left\|t^{\lambda} \wedge k\right\| n_q^{\lambda} = \pm \frac{(\sqrt{|\mu^2-1|}(1-\lambda k_1) + \lambda k_3 \mu) n_q}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2+\lambda^2 k_3^2}} \tag{5.27}$$

olup $\left\|t^{\lambda} \wedge k\right\|$ ifadesi (5.27) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{(\sqrt{|\mu^2-1|}(1-\lambda k_1) + \lambda k_3 \mu) n_q^{\lambda}}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2+\lambda^2 k_3^2}} = \pm \frac{(\sqrt{|\mu^2-1|}(1-\lambda k_1) + \lambda k_3 \mu) n_q}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2+\lambda^2 k_3^2}}$$

bulunur. O halde

$$n_q^{\lambda} = \frac{t^{\lambda} \wedge k}{\left\|t^{\lambda} \wedge k\right\|} = \pm n_q \tag{5.28}$$

olur. Böylece bu çalışmanın en önemli sonuçlarından biri elde edilir:

k izdüşüm vektörü spacelike olan yönlü spacelike Bertrand eğri çiftlerinde her zaman quasi-normal vektörleri lineer bağımlıdır.

Son olarak b_q^{λ} quasi-binormal vektörünü hesaplayalım.

$$b_q^{\lambda} = n_q^{\lambda} \wedge t^{\lambda}$$

olduğundan (5.21) ve (5.28) denklemleri yardımıyla

$$n_q^\lambda \wedge t^\lambda = \frac{(1-\lambda k_1)\left(n_q \wedge t\right) + \lambda k_3 \left(n_q \wedge b_q\right)}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}}$$

elde edilir. Buradan da

$$b_q^\lambda = \frac{-\lambda k_3 t + (1-\lambda k_1)\, b_q}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} \tag{5.29}$$

olur. O halde

$$\begin{bmatrix} t^\lambda \\ n_q^\lambda \\ b_q^\lambda \end{bmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} \begin{bmatrix} 1-\lambda k_1 & 0 & \lambda k_3 \\ 0 & \sqrt{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2} & 0 \\ \mp \lambda k_3 & 0 & \pm(1-\lambda k_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix}$$

bulunur.

Teorem 5.1.6 $\alpha(s)$ birim hızlı yönlü spacelike bir uzay eğrisi ve yay parametresi s_1 olan $\beta(s)$ eğrisi, $\alpha(s)$ nin yönlü spacelike Bertrand eğri çifti olsun. Burada izdüşüm vektörü k spacelike olup q-eğrilikleri arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} k_1^\lambda &= \frac{(1-\lambda k_1)\, k_1 - \lambda k_3^2}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} \\ k_2^\lambda &= \pm \frac{\lambda k_3' (1-\lambda k_1) + \lambda^2 k_3 k_1' + \left((1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2\right) k_2}{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2} \\ k_3^\lambda &= \pm \frac{k_3}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} \end{aligned}$$

şeklinde verilir. Burada $\beta(s)$ eğrisinin q-eğrilikleri k_1^λ, k_2^λ ve k_3^λ dır.

İspat. İlk olarak k_1^λ eğriliğini hesaplayalım.

$$k_1^\lambda = \left\langle t^{\lambda'}, n_q^\lambda \right\rangle = -\left\langle t^\lambda, n_q^{\lambda'} \right\rangle \tag{5.30}$$

olup (5.21) ve (4.16) denklemleri yardımıyla t^λ nın türevi

$$\begin{aligned} t^{\lambda'} = \; & \pm[\left(\lambda^3 k_1 k_3 k_3' - \lambda^2 k_3 k_3' - \lambda^3 k_3^2 k_1' + 2\lambda^2 k_1 k_2 k_3 - \lambda^3 k_1^2 k_2 k_3 - \lambda k_2 k_3 - \lambda^3 k_2 k_3^3\right) t \\ & + \left(3\lambda k_1^2 + \lambda k_3^2 - k_1 - 3\lambda^2 k_1^3 + \lambda^3 k_1^4 + \lambda^3 k_3^4 + 2\lambda^3 k_1^2 k_3^2 - 3\lambda^2 k_1 k_3^2\right) n_q + (-\lambda^3 k_1 k_3 k_1' \\ & + \lambda k_3' + \lambda^2 k_3 k_1' - 2\lambda^2 k_1 k_3' + \lambda^3 k_1^2 k_3' - \lambda^3 k_1 k_2 k_3^2 + k_2 - 3\lambda k_1 k_2 + \lambda^2 k_2 k_3^2 + 3\lambda^2 k_1^2 k_2 \\ & - \lambda^3 k_1^3 k_2) b_q] \big/ \left((1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \tag{5.31}$$

olarak bulunur. O halde (5.30) ve (5.31) denklemleri kullanılarak

$$k_1^{\lambda} = \frac{(1-\lambda k_1)\,k_1 - \lambda k_3^2}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}}$$

elde edilir. Şimdi k_2^{λ} eğriliğini hesaplayalım.

$$k_2^{\lambda} = \left\langle t^{\lambda'}, b_q^{\lambda} \right\rangle = -\left\langle t^{\lambda}, b_q^{\lambda'} \right\rangle \tag{5.32}$$

olduğundan (5.29) ve (5.31) denklemleri (5.32) denkleminde yerine yazılarak

$$k_2^{\lambda} = \pm \frac{\lambda k_3'\,(1-\lambda k_1) + \lambda^2 k_3 k_1' + \left((1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2\right) k_2}{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}$$

bulunur. Son olarak k_3^{λ} eğriliğini hesaplayalım.

$$k_3^{\lambda} = \left\langle n_q^{\lambda'}, b_q^{\lambda} \right\rangle \tag{5.33}$$

olduğundan (4.16), (5.29) ve (5.33) denklemleri yardımıyla

$$k_3^{\lambda} = \pm \frac{k_3}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}}$$

elde edilir.

5.1.2 Minkowski uzayında yönlü timelike Bertrand eğri çiftleri

Bu altkısımda 3-boyutlu Minkowski uzayında timelike bir uzay eğrisinin quasi-normal vektörü kullanılarak yönlü Bertrand eğrileri tanımlanacaktır. Burada birim teğet vektör t (timelike) ve izdüşüm vektör k (spacelike) olup buna bağlı olarak quasi-normal vektör n_q (spacelike) ve quasi-binormal vektör b_q (spacelike) olarak alınmıştır. Ayrıca yönlü timelike Bertrand eğrilerinin eğrilikleri arasındaki ilişki elde edilecektir.

Teorem 5.1.7 $\alpha(s)$ birim hızlı yönlü timelike bir uzay eğrisi ve yay parametresi s_1 olan $\beta(s)$ eğrisi, $\alpha(s)$ nin yönlü timelike Bertrand eğri çifti olsun. Burada izdüşüm vektörü k (spacelike) olup bu durumda

(a) Yönlü timelike Bertrand eğrileri olan $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ eğrileri arasındaki uzaklık sabittir.

(b) $k_3 = 0$ ise yönlü timelike Bertrand eğrilerinin karşılık gelen noktalarındaki teğet vektörler arasındaki açı sabittir.

İspat. (a) $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ Bertrand eğri çiftlerinin q-çatılarını sırasıyla $\{t, n_q, b_q\}$ ve $\{t^\lambda, n_q^\lambda, b_q^\lambda\}$ ile gösterelim. Şekil 5.1 den

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda n_q \tag{5.34}$$

şeklinde yazılabilir. s parametresine göre (5.34) un türevini alarak

$$\frac{d\beta(s)}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = \frac{d\alpha(s)}{ds} + \lambda n_q'(s) + \lambda' n_q(s)$$

elde edilir. Buradan da (4.26) denklemi yardımıyla

$$t^\lambda \frac{ds_1}{ds} = t + \lambda\left(k_1 t + k_3 b_q\right) + \lambda' n_q$$

olup gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$t^\lambda \frac{ds_1}{ds} = (1+\lambda k_1)t + \lambda' n_q + \lambda k_3 b_q \tag{5.35}$$

olur. (5.2) denkleminin her iki tarafı n_q ile skaler olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned} \left\langle t^\lambda, n_q \right\rangle \tfrac{ds_1}{ds} &= (1+\lambda k_1)\left\langle t, n_q\right\rangle + \lambda'\left\langle n_q, n_q\right\rangle + \lambda k_3\left\langle b_q, n_q\right\rangle \\ &= \lambda' \end{aligned}$$

elde edilir. n_q ve n_q^λ lineer bağımlı olup $\left\langle t^\lambda, n_q^\lambda\right\rangle = 0$ olduğundan $\left\langle t^\lambda, n_q\right\rangle = 0$ olur. O halde

$$\lambda' = 0$$

bulunur. Bu durumda $\lambda = sabit$ olduğu açıktır. Böylece

$$\begin{aligned} d\left(\alpha(s), \beta(s)\right) &= \|\beta(s) - \alpha(s)\| \\ &= \left\|\lambda n_q(s)\right\| \\ &= |\lambda|\left\|n_q(s)\right\| \\ &= |\lambda| \end{aligned}$$

olup

$$\|\beta(s) - \alpha(s)\| = |\lambda| = sabit$$

olur. Yani bu iki eğri arasındaki uzaklık sabittir.

(b) (5.2) denkleminde $\lambda' = 0$ değeri yerine yazılır ve denklemin her iki tarafının normu alınırsa

$$\sqrt{\left|\left\langle t^\lambda, t^\lambda\right\rangle\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2\right|} = \sqrt{\left|(1+\lambda k_1)^2\left\langle t, t\right\rangle + \lambda^2 k_3^2\left\langle b_q, b_q\right\rangle\right|}$$

olur ve buradan

$$\frac{ds_1}{ds} = \pm\sqrt{\left|\lambda^2 k_3^2 - (1+\lambda k_1)^2\right|} \tag{5.36}$$

bulunur. O halde (5.3) denklemi

$$t^{\lambda}\frac{ds_1}{ds} = (1+\lambda k_1)t + \lambda k_3 b_q$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$t^{\lambda} = \pm\frac{(1+\lambda k_1)t + \lambda k_3 b_q}{\sqrt{\left|\lambda^2 k_3^2 - (1+\lambda k_1)^2\right|}} \tag{5.37}$$

elde edilir. Ayrıca t ve t^{λ} timelike vektörleri arasındaki hiperbolik açı φ alınırsa

$$\left\langle t, t^{\lambda}\right\rangle = -\cosh\varphi$$

olur. (5.37) denklemi t ile skaler olarak çarpılırsa

$$-\cosh\varphi = \pm\frac{1+\lambda k_1}{\sqrt{\left|\lambda^2 k_3^2 - (1+\lambda k_1)^2\right|}}\langle t, t\rangle$$

bulunur. O halde

$$\cosh\varphi = \pm\frac{1+\lambda k_1}{\sqrt{\left|\lambda^2 k_3^2 - (1+\lambda k_1)^2\right|}}$$

olur. Burada $k_3 = 0$ olduğunda $\cosh\varphi = +1$ olarak bulunur. Yani $\varphi = 0$ dır. O halde teğet vektörler arasındaki açı sabittir.

Teorem 5.1.8 $\alpha(s)$ birim hızlı yönlü timelike bir uzay eğrisi ve yay parametresi s_1 olan $\beta(s)$ eğrisi, $\alpha(s)$ nin yönlü timelike Bertrand eğri çifti olsun. Burada izdüşüm vektörü k (spacelike) tır. Bu iki eğrinin q-çatıları arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} t^{\lambda} \\ n_q^{\lambda} \\ b_q^{\lambda} \end{bmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{\left|\lambda^2 k_3^2 - (1+\lambda k_1)^2\right|}}\begin{bmatrix} 1+\lambda k_1 & 0 & \lambda k_3 \\ 0 & \sqrt{\left|\lambda^2 k_3^2 - (1+\lambda k_1)^2\right|} & 0 \\ \pm\lambda k_3 & 0 & \pm(1+\lambda k_1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir.

İspat. (5.37) denklemi k ile vektörel olarak çarpılırsa

$$t^{\lambda}\wedge k = \pm\frac{(1+\lambda k_1)(t\wedge k) + \lambda k_3 (b_q \wedge k)}{\sqrt{\left|\lambda^2 k_3^2 - (1+\lambda k_1)^2\right|}} \tag{5.38}$$

bulunur. Ayrıca (3.1) denkleminden dolayı

$$t\wedge k = \|t\wedge k\|\, n_q \tag{5.39}$$

olup Lagrange özdeşliği ve $k=(0,1,0)$ spacelike izdüşüm vektörü kullanılarak

$$\begin{aligned}\|t\wedge k\| &= \sqrt{|\langle t\wedge k, t\wedge k\rangle|}\\ &= \sqrt{\left|-\langle t,t\rangle\langle k,k\rangle+\langle t,k\rangle^2\right|}\\ &= \sqrt{1+\langle t,k\rangle^2}\\ &= \sqrt{1+\mu^2}\end{aligned} \tag{5.40}$$

elde edilir. Burada μ, $\alpha(s)$ eğrisinin teğet vektörünün ikinci bileşenidir. Benzer şekilde hesaplamalar yaparak

$$b_q\wedge k=\left(n_q\wedge t\right)\wedge k=-\left\langle n_q,k\right\rangle t+\langle t,k\rangle n_q=\mu n_q \tag{5.41}$$

bulunur. (5.39), (5.40) ve (5.41) denklemleri (5.38) te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}t^\lambda\wedge k &= \pm\frac{\sqrt{1+\mu^2}(1+\lambda k_1)n_q+\lambda k_3\mu n_q}{\sqrt{\left|\lambda^2k_3^2-(1+\lambda k_1)^2\right|}}\\ &= \pm\frac{(\sqrt{1+\mu^2}(1+\lambda k_1)+\lambda k_3\mu)n_q}{\sqrt{\left|\lambda^2k_3^2-(1+\lambda k_1)^2\right|}}\end{aligned} \tag{5.42}$$

elde edilir. n_q^λ yı bulmak için $\left\|t^\lambda\wedge k\right\|$ ifadesi hesaplanarak

$$\begin{aligned}\left\|t^\lambda\wedge k\right\| &= \sqrt{\frac{\left|(\sqrt{1+\mu^2}(1+\lambda k_1)+\lambda k_3\mu)^2\left\langle n_q,n_q\right\rangle\right|}{\left|\lambda^2k_3^2-(1+\lambda k_1)^2\right|}}\\ &= \frac{\sqrt{1+\mu^2}(1+\lambda k_1)+\lambda k_3\mu}{\sqrt{\left|\lambda^2k_3^2-(1+\lambda k_1)^2\right|}}\end{aligned}$$

bulunur. (3.1) denklemi kullanılarak (5.42) denkleminde gerekli işlemler yapılırsa

$$\left\|t^\lambda\wedge k\right\|n_q^\lambda=\pm\frac{(\sqrt{1+\mu^2}(1+\lambda k_1)+\lambda k_3\mu)n_q}{\sqrt{\left|\lambda^2k_3^2-(1+\lambda k_1)^2\right|}} \tag{5.43}$$

olup $\left\|t^\lambda\wedge k\right\|$ ifadesi (5.43) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{(\sqrt{1+\mu^2}(1+\lambda k_1)+\lambda k_3\mu)n_q^\lambda}{\sqrt{\left|\lambda^2k_3^2-(1+\lambda k_1)^2\right|}}=\pm\frac{(\sqrt{1+\mu^2}(1+\lambda k_1)+\lambda k_3\mu)n_q}{\sqrt{\left|\lambda^2k_3^2-(1+\lambda k_1)^2\right|}}$$

bulunur. O halde

$$n_q^\lambda=\frac{t^\lambda\wedge k}{\left\|t^\lambda\wedge k\right\|}=\pm n_q \tag{5.44}$$

olur. Böylece bu çalışmanın en önemli sonuçlarından biri elde edilir:

Yönlü timelike Bertrand eğri çiftlerinde her zaman quasi-normal vektörleri lineer bağımlıdır.

Son olarak b_q^λ quasi-binormal vektörünü hesaplayalım.

$$b_q^\lambda = n_q^\lambda \wedge t^\lambda$$

olduğundan (5.37) ve (5.44) denklemleri yardımıyla

$$n_q^\lambda \wedge t^\lambda = \frac{(1+\lambda k_1)\left(n_q \wedge t\right) + \lambda k_3 \left(n_q \wedge b_q\right)}{\sqrt{\left|\lambda^2 k_3^2 - (1+\lambda k_1)^2\right|}}$$

elde edilir. Buradan da

$$b_q^\lambda = \frac{\lambda k_3 t + (1+\lambda k_1)\, b_q}{\sqrt{\left|\lambda^2 k_3^2 - (1+\lambda k_1)^2\right|}} \tag{5.45}$$

olur. O halde

$$\begin{bmatrix} t^\lambda \\ n_q^\lambda \\ b_q^\lambda \end{bmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{\left|\lambda^2 k_3^2 - (1+\lambda k_1)^2\right|}} \begin{bmatrix} 1+\lambda k_1 & 0 & \lambda k_3 \\ 0 & \sqrt{\left|\lambda^2 k_3^2 - (1+\lambda k_1)^2\right|} & 0 \\ \pm\lambda k_3 & 0 & \pm(1+\lambda k_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix}$$

bulunur.

Teorem 5.1.9 $\alpha(s)$ birim hızlı yönlü timelike bir uzay eğrisi ve yay parametresi s_1 olan $\beta(s)$ eğrisi, $\alpha(s)$ nin yönlü timelike Bertrand eğri çifti olsun. Burada izdüşüm vektörü k spacelike olup q-eğrilikleri arasındaki ilişki

$$\begin{aligned}
k_1^\lambda &= \frac{(1+\lambda k_1)\, k_1 - \lambda k_3^2}{\sqrt{\left|\lambda^2 k_3^2 - (1+\lambda k_1)^2\right|}} \\
k_2^\lambda &= \pm \frac{\lambda k_3' (1+\lambda k_1) - \lambda^2 k_3 k_1' + \left((1+\lambda k_1)^2 - \lambda^2 k_3^2\right) k_2}{\left|\lambda^2 k_3^2 - (1+\lambda k_1)^2\right|} \\
k_3^\lambda &= \pm \frac{k_3}{\sqrt{\left|\lambda^2 k_3^2 - (1+\lambda k_1)^2\right|}}
\end{aligned}$$

şeklinde verilir. Burada $\beta(s)$ eğrisinin q-eğrilikleri k_1^λ, k_2^λ ve k_3^λ dır.

İspat. İlk olarak k_1^λ eğriliğini hesaplayalım.

$$k_1^\lambda = \left\langle t^{\lambda'}, n_q^\lambda \right\rangle = -\left\langle t^\lambda, n_q^{\lambda'} \right\rangle \tag{5.46}$$

olup (5.37) ve (4.26) denklemleri yardımıyla t^{λ} nın türevini hesaplayalım. Burada $\lambda^2 k_3^2 \neq (1+\lambda k_1)^2$ şeklindedir. Ayrıca $\lambda^2 k_3^2 - (1+\lambda k_1)^2 > 0$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned} t^{\lambda'} = \; & \pm[\left(-\lambda^3 k_1 k_3 k_3' - \lambda^2 k_3 k_3' + \lambda^3 k_3^2 k_1' - 2\lambda^2 k_1 k_2 k_3 - \lambda^3 k_1^2 k_2 k_3 - \lambda k_2 k_3 + \lambda^3 k_2 k_3^3\right) t \\ & + \left(-3\lambda k_1^2 + \lambda k_3^2 - k_1 - 3\lambda^2 k_1^3 - \lambda^3 k_1^4 - \lambda^3 k_3^4 + 2\lambda^3 k_1^2 k_3^2 + 3\lambda^2 k_1 k_3^2\right) n_q + (\lambda^3 k_1 k_3 k_1' \\ & - \lambda k_3' + \lambda^2 k_3 k_1' - 2\lambda^2 k_1 k_3' - \lambda^3 k_1^2 k_3' + \lambda^3 k_1 k_2 k_3^2 - k_2 - 3\lambda k_1 k_2 + \lambda^2 k_2 k_3^2 - 3\lambda^2 k_1^2 k_2 \\ & - \lambda^3 k_1^3 k_2) b_q] \diagup \left(\lambda^2 k_3^2 - (1+\lambda k_1)^2\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \tag{5.47}$$

elde edilir. $\lambda^2 k_3^2 - (1+\lambda k_1)^2 < 0$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned} t^{\lambda'} = \; & \pm[\left(\lambda^3 k_1 k_3 k_3' + \lambda^2 k_3 k_3' - \lambda^3 k_3^2 k_1' + 2\lambda^2 k_1 k_2 k_3 + \lambda^3 k_1^2 k_2 k_3 + \lambda k_2 k_3 - \lambda^3 k_2 k_3^3\right) t \\ & + \left(3\lambda k_1^2 - \lambda k_3^2 + k_1 + 3\lambda^2 k_1^3 + \lambda^3 k_1^4 + \lambda^3 k_3^4 - 2\lambda^3 k_1^2 k_3^2 - 3\lambda^2 k_1 k_3^2\right) n_q + (-\lambda^3 k_1 k_3 k_1' \\ & + \lambda k_3' - \lambda^2 k_3 k_1' + 2\lambda^2 k_1 k_3' + \lambda^3 k_1^2 k_3' - \lambda^3 k_1 k_2 k_3^2 + k_2 + 3\lambda k_1 k_2 - \lambda^2 k_2 k_3^2 + 3\lambda^2 k_1^2 k_2 \\ & + \lambda^3 k_1^3 k_2) b_q] \diagup \left((1+\lambda k_1)^2 - \lambda^2 k_3^2\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \tag{5.48}$$

olur. O halde (5.46) ile (5.47) veya (5.48) denklemleri kullanılırsa

$$k_1^{\lambda} = \frac{(1+\lambda k_1)\, k_1 - \lambda k_3^2}{\sqrt{\left|\lambda^2 k_3^2 - (1+\lambda k_1)^2\right|}}$$

elde edilir. Şimdi k_2^{λ} eğriliğini hesaplayalım.

$$k_2^{\lambda} = \left\langle t^{\lambda'}, b_q^{\lambda} \right\rangle = -\left\langle t^{\lambda}, b_q^{\lambda'} \right\rangle \tag{5.49}$$

olduğundan (5.45), (5.47) ve (5.48) denklemleri (5.49) denkleminde yerine yazılarak

$$k_2^{\lambda} = \pm \frac{\lambda k_3' (1+\lambda k_1) - \lambda^2 k_3 k_1' + \left((1+\lambda k_1)^2 - \lambda^2 k_3^2\right) k_2}{\left|\lambda^2 k_3^2 - (1+\lambda k_1)^2\right|}$$

bulunur. Son olarak k_3^{λ} eğriliğini hesaplayalım.

$$k_3^{\lambda} = \left\langle n_q^{\lambda'}, b_q^{\lambda} \right\rangle \tag{5.50}$$

olduğundan (4.26), (5.45) ve (5.50) denklemleri yardımıyla

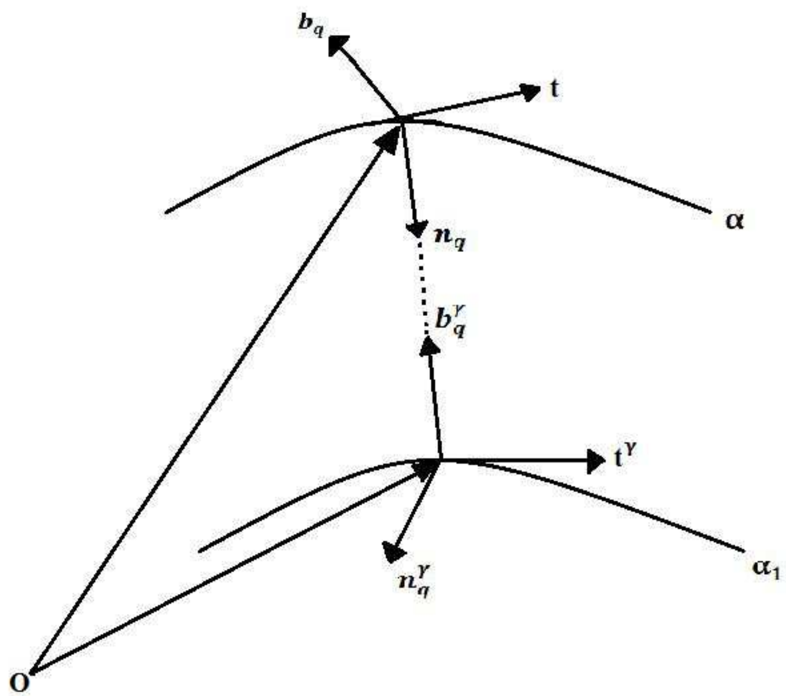
$$k_3^{\lambda} = \pm \frac{k_3}{\sqrt{\left|\lambda^2 k_3^2 - (1+\lambda k_1)^2\right|}}$$

elde edilir.

5.2 Minkowski Uzayında Yönlü Mannheim Eğri Çiftleri

Bu kısımda, 3-boyutlu Minkowski uzayında timelike veya spacelike bir uzay eğrisinin quasi-normal vektörü kullanılarak yönlü Mannheim eğrileri tanımlanmıştır. Ayrıca yönlü Mannheim eğrilerinin bazı özellikleri incelenmiştir.

Tanım 5.2.1 α ve α_1, 3-boyutlu Minkowski uzayında birim hızlı eğriler olsun. α eğrisinin q-çatısı $\{t, n_q, b_q\}$ ve α_1 eğrisinin q-çatısı $\{t^\gamma, n_q^\gamma, b_q^\gamma\}$ olmak üzere, α eğrisinin quasi-normali ile α_1 eğrisinin quasi-binormali lineer bağımlı ise, α eğrisine yönlü Mannheim eğrisi, α_1 eğrisine de yönlü Mannheim eğri ortağı denir.



Şekil 5.2: Yönlü Mannheim eğrileri

5.2.1 Minkowski uzayında yönlü spacelike Mannheim eğri çiftleri

i) k izdüşüm vektörü timelike olan yönlü spacelike Mannheim eğri çiftleri

Bu altkısımda 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike bir uzay eğrisinin quasi-normal vektörü kullanılarak yönlü Mannheim eğrileri tanımlanacaktır. Burada birim teğet vektör t (spacelike) ve izdüşüm vektör k (timelike) olup buna bağlı olarak quasi-normal vektör n_q (spacelike) ve quasi-binormal vektör b_q (timelike) olarak alınmıştır.

Teorem 5.2.1 α ve α_1, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında birim hızlı yönlü spacelike eğriler olsun. Burada izdüşüm vektörü k timelike olup $\{\alpha, \alpha_1\}$ yönlü Mannheim eğri çiftinin ilgili noktaları arasındaki uzaklık sabittir.

İspat. Şekil 5.2 den

$$\alpha = \alpha_1 + \lambda b_q^\gamma \tag{5.51}$$

yazılabilir. (5.51) denkleminin s_1 e göre türevi alınır ve (4.6) türev denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{ds_1} = \frac{d\alpha_1}{ds_1} + \frac{d\lambda}{ds_1}b_q^\gamma + \lambda\frac{db_q^\gamma}{ds_1} \quad &\Rightarrow \quad t\frac{ds}{ds_1} = t^\gamma + \lambda' b_q^\gamma + \lambda b_q^\gamma \\ &\Rightarrow \quad t\frac{ds}{ds_1} = t^\gamma + \lambda' b_q^\gamma + \lambda\left(-k_2^\gamma t^\gamma - k_3^\gamma n_q^\gamma\right) \end{aligned}$$

olur veya

$$t\frac{ds}{ds_1} = (1-\lambda k_2^\gamma)t^\gamma - \lambda k_3^\gamma n_q^\gamma + \lambda' b_q^\gamma \tag{5.52}$$

elde edilir. n_q ve b_q^γ lineer bağımlı olduğundan $\langle t, b_q^\gamma\rangle = 0$ dır. (5.52) denkleminin her iki tarafı b_q^γ ile skaler olarak çarpılırsa

$$\left\langle t\frac{ds}{ds_1}, b_q^\gamma\right\rangle = \langle (1-\lambda k_2^\gamma)t^\gamma - \lambda k_3^\gamma n_q^\gamma + \lambda' b_q^\gamma, b_q^\gamma\rangle$$

bulunur. Buradan b_q^γ timelike vektör olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda' \langle b_q^\gamma, b_q^\gamma\rangle \\ -\lambda' &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani λ sıfırdan farklı bir sabittir. Diğer taraftan iki nokta arasındaki uzaklık fonksiyonundan

$$\begin{aligned} d(\alpha_1, \alpha) &= \|\alpha - \alpha_1\| \\ &= \|\lambda b_q^\gamma\| \\ &= |\lambda|\,\|b_q^\gamma\| \\ &= |\lambda| = sabit \neq 0 \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 5.2.2 α ve α_1, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında birim hızlı yönlü spacelike eğriler olsun. α ile yay parametresi s_1 olan α_1 eğrisinin yönlü spacelike Mannheim eğri çifti olması için gerek ve yeter koşul λ sıfırdan farklı bir sabit ve izdüşüm vektör k timelike olmak üzere

$$k_2^\gamma = \mp \frac{k_1 - \lambda k_1^2 + \lambda k_3^2}{\left|(1-\lambda k_1)^2 - \lambda^2 k_3^2\right|}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada k_1, k_2 ve k_3, α eğrisinin, k_1^γ, k_2^γ ve k_3^γ, α_1 eğrisinin q-eğrilikleridir.

İspat. $(\Rightarrow)$ α ve α_1 Mannheim eğri çiftlerinin q-çatılarını sırasıyla $\{t, n_q, b_q\}$ ve $\{t^\gamma, n_q^\gamma, b_q^\gamma\}$ ile gösterelim. Şekil 5.2 den

$$\alpha_1(s) = \alpha(s) + \lambda n_q(s) \tag{5.53}$$

yazılabilir. (5.53) denkleminin s ye göre türevi alınarak (4.6) türev formülleri uygulanırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = \alpha' + \lambda' n_q + \lambda n_q' \quad &\Rightarrow \quad t^{\gamma}\frac{ds_1}{ds} = t + \lambda(-k_1 t - k_3 b_q) \\ &\Rightarrow \quad t^{\gamma}\frac{ds_1}{ds} = (1-\lambda k_1)t - \lambda k_3 b_q \end{aligned} \tag{5.54}$$

elde edilir. (5.54) eşitliğinin s ye göre türevi alınır ve (4.6) türev formülleri uygulanırsa

$$\frac{dt^{\gamma}}{ds_1}\frac{ds_1}{ds}\frac{ds_1}{ds} + t^{\gamma}\left(\frac{d^2s_1}{ds^2}\right) = t' - \lambda k_1' t - \lambda k_1 t' - \lambda k_3' b_q - \lambda k_3 b_q'$$

olur ve buradan

$$t^{\gamma'}\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 + t^{\gamma}\left(\frac{d^2s_1}{ds^2}\right) = k_1 n_q - k_2 b_q - \lambda k_1' t - \lambda k_1(k_1 n_q - k_2 b_q) - \lambda k_3' b_q - \lambda k_3(-k_2 t - k_3 n_q) \tag{5.55}$$

elde edilir. (5.55) denkleminde gerekli işlemler yapılarak

$$\begin{aligned} \left(k_1^{\gamma} n_q^{\gamma} - k_2^{\gamma} b_q^{\gamma}\right)\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 + t^{\gamma}\left(\frac{d^2s_1}{ds^2}\right) \quad = \quad & \left(\lambda k_2 k_3 - \lambda k_1'\right)t + \left(k_1 - \lambda k_1^2 + \lambda k_3^2\right)n_q \\ & + \left(-k_2 + \lambda k_1 k_2 - \lambda k_3'\right)b_q \end{aligned} \tag{5.56}$$

bulunur. (5.56) denkleminin her iki tarafı n_q ile skaler olarak çarpılırsa

$$\left\langle \left(k_1^{\gamma} n_q^{\gamma} - k_2^{\gamma} b_q^{\gamma}\right)\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 + t^{\gamma}\left(\frac{d^2s_1}{ds^2}\right), n_q \right\rangle = \left(k_1 - \lambda k_1^2 + \lambda k_3^2\right)\langle n_q, n_q\rangle$$

olur ve gerekli işlemler yapılarak

$$k_1^{\gamma}\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 \langle n_q^{\gamma}, n_q\rangle - k_2^{\gamma}\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 \langle b_q^{\gamma}, n_q\rangle + \left(\frac{d^2s_1}{ds^2}\right)\langle t^{\gamma}, n_q\rangle = k_1 - \lambda k_1^2 + \lambda k_3^2 \tag{5.57}$$

elde edilir. n_q ile b_q^{γ} lineer bağımlı olduğundan $n_q \perp n_q^{\gamma}$ ve $t^{\gamma} \perp n_q$ dur. Ayrıca $b_q^{\gamma} = \pm n_q$ yazılabilir. O halde (5.57) denkleminde gerekli işlemler yapılarak

$$-k_2^{\gamma}\langle \pm n_q, n_q\rangle \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = k_1 - \lambda k_1^2 + \lambda k_3^2$$

olur ve buradan da

$$\mp k_2^{\gamma}\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = k_1 - \lambda k_1^2 + \lambda k_3^2 \tag{5.58}$$

eşitliği bulunur. (5.54) denkleminde eşitliğin her iki tarafının normu alınırsa

$$\sqrt{\left|\langle t^{\gamma}, t^{\gamma}\rangle \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2\right|} = \sqrt{\left|(1-\lambda k_1)^2\langle t, t\rangle + \lambda^2 k_3^2 \langle b_q, b_q\rangle\right|}$$

olup

$$\frac{ds_1}{ds} = \pm\sqrt{\left|(1-\lambda k_1)^2 - \lambda^2 k_3^2\right|} \tag{5.59}$$

elde edilir. (5.59) denklemi (5.58) denkleminde yerine yazılırsa

$$k_2^{\gamma} = \mp \frac{k_1 - \lambda k_1^2 + \lambda k_3^2}{\left|(1-\lambda k_1)^2 - \lambda^2 k_3^2\right|}$$

olur.

$(\Leftarrow)$ $k_2^{\gamma} = \mp \dfrac{k_1 - \lambda k_1^2 + \lambda k_3^2}{\left|(1-\lambda k_1)^2 - \lambda^2 k_3^2\right|}$ eşitliğinin sağlandığını kabul edelim.

$$\alpha_1(s) = \alpha(s) + \lambda n_q(s) \tag{5.60}$$

denklemini göz önüne alalım. (5.60) denkleminin s ye göre türevi alınarak (4.6) türev formülleri uygulanırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} &= \alpha' + \lambda' n_q + \lambda n_q' \\ t^{\gamma}\frac{ds_1}{ds} &= t + \lambda(-k_1 t - k_3 b_q) \\ &= (1-\lambda k_1)t - \lambda k_3 b_q \end{aligned} \tag{5.61}$$

bulunur. (5.61) eşitliğinin s ye göre türevi alınarak (4.6) türev formülleri uygulanırsa

$$\frac{dt^{\gamma}}{ds_1}\frac{ds_1}{ds}\frac{ds_1}{ds} + t^{\gamma}\left(\frac{d^2 s_1}{ds^2}\right) = t' - \lambda k_1' t - \lambda k_1 t' - \lambda k_3' b_q - \lambda k_3 b_q'$$

olur ve buradan

$$t^{\gamma'}\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 + t^{\gamma}\left(\frac{d^2 s_1}{ds^2}\right) = k_1 n_q - k_2 b_q - \lambda k_1' t - \lambda k_1(k_1 n_q - k_2 b_q) - \lambda k_3' b_q - \lambda k_3(-k_2 t - k_3 n_q)$$

elde edilir. Son denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \left(k_1^{\gamma} n_q^{\gamma} - k_2^{\gamma} b_q^{\gamma}\right)\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 + t^{\gamma}\left(\frac{d^2 s_1}{ds^2}\right) &= \left(\lambda k_2 k_3 - \lambda k_1'\right)t + \left(k_1 - \lambda k_1^2 + \lambda k_3^2\right)n_q \\ &\quad + \left(-k_2 + \lambda k_1 k_2 - \lambda k_3'\right)b_q \end{aligned} \tag{5.62}$$

olarak bulunur. (5.62) denkleminin her iki tarafı n_q ile skaler olarak çarpılırsa

$$\left\langle \left(k_1^{\gamma} n_q^{\gamma} - k_2^{\gamma} b_q^{\gamma}\right)\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 + t^{\gamma}\left(\frac{d^2 s_1}{ds^2}\right), n_q \right\rangle = \left(k_1 - \lambda k_1^2 + \lambda k_3^2\right)\langle n_q, n_q\rangle$$

olur ve gerekli işlemler yapılırsa

$$k_1^{\gamma}\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 \langle n_q^{\gamma}, n_q\rangle - k_2^{\gamma}\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 \langle b_q^{\gamma}, n_q\rangle + \left(\frac{d^2 s_1}{ds^2}\right)\langle t^{\gamma}, n_q\rangle = k_1 - \lambda k_1^2 + \lambda k_3^2 \tag{5.63}$$

elde edilir. (5.63) denkleminin her iki tarafı $\left(\dfrac{ds_1}{ds}\right)^2$ ifadesine bölünürse

$$k_1^{\gamma}\langle n_q^{\gamma}, n_q\rangle - k_2^{\gamma}\langle b_q^{\gamma}, n_q\rangle + \frac{\left(\frac{d^2 s_1}{ds^2}\right)}{\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2}\langle t^{\gamma}, n_q\rangle = \frac{k_1 - \lambda k_1^2 + \lambda k_3^2}{\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2} \tag{5.64}$$

eşitliği bulunur. (5.64) denklemi ve kabulümüz göz önüne alınırsa b_q^γ ile n_q lineer bağımlı olmalıdır. Bu durumda $n_q^\gamma \perp n_q$ ve $t^\gamma \perp n_q$ olur. Böylece α ve α_1 Mannheim eğri çiftidir.

ii) k izdüşüm vektörü spacelike olan yönlü spacelike Mannheim eğri çiftleri

Bu altkısımda 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike bir uzay eğrisinin quasi-normal vektörü kullanılarak yönlü Mannheim eğrileri tanımlanacaktır. Burada birim teğet vektör t (spacelike) ve izdüşüm vektör k (spacelike) olup buna bağlı olarak quasi-normal vektör n_q (timelike) ve quasi-binormal vektör b_q (spacelike) olarak alınmıştır.

Teorem 5.2.3 α ve α_1, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında birim hızlı yönlü spacelike eğriler olsun. Burada izdüşüm vektörü k spacelike olup $\{\alpha, \alpha_1\}$ yönlü Mannheim eğri çiftinin ilgili noktaları arasındaki uzaklık sabittir.

İspat. Şekil 5.2 den

$$\alpha = \alpha_1 + \lambda b_q^\gamma \tag{5.65}$$

yazılabilir. (5.65) denkleminin s_1 e göre türevini alıp (4.16) türev denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{ds_1} = \frac{d\alpha_1}{ds_1} + \frac{d\lambda}{ds_1}b_q^\gamma + \lambda\frac{db_q^\gamma}{ds_1} \quad &\Rightarrow \quad t\frac{ds}{ds_1} = t^\gamma + \lambda' b_q^\gamma + \lambda b_q^{\gamma'} \\ &\Rightarrow \quad t\frac{ds}{ds_1} = t^\gamma + \lambda' b_q^\gamma + \lambda\left(-k_2^\gamma t^\gamma + k_3^\gamma n_q^\gamma\right) \end{aligned}$$

olur veya

$$t\frac{ds}{ds_1} = (1-\lambda k_2^\gamma)t^\gamma + \lambda k_3^\gamma n_q^\gamma + \lambda' b_q^\gamma \tag{5.66}$$

elde edilir. n_q ve b_q^γ lineer bağımlı olduğundan $\langle t, b_q^\gamma \rangle = 0$ dır. (5.66) denkleminin her iki tarafı b_q^γ ile skaler olarak çarpılırsa

$$\left\langle t\frac{ds}{ds_1}, b_q^\gamma \right\rangle = \langle (1-\lambda k_2^\gamma)t^\gamma + \lambda k_3^\gamma n_q^\gamma + \lambda' b_q^\gamma, b_q^\gamma \rangle$$

bulunur. Buradan b_q^γ spacelike vektör olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda' \langle b_q^\gamma, b_q^\gamma \rangle \\ \lambda' &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani λ sıfırdan farklı bir sabittir. Diğer taraftan iki nokta arasındaki uzaklık fonksiyonundan

$$\begin{aligned} d(\alpha_1, \alpha) &= \|\alpha - \alpha_1\| \\ &= \|\lambda b_q^\gamma\| \\ &= |\lambda| \, \|b_q^\gamma\| \\ &= |\lambda| = sabit \neq 0 \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 5.2.4 α ve α_1, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında birim hızlı yönlü spacelike eğriler olsun. α ile yay parametresi s_1 olan α_1 eğrisinin yönlü spacelike Mannheim eğri çifti olması için gerek ve yeter koşul λ sıfırdan farklı bir sabit ve izdüşüm vektör k spacelike olmak üzere

$$k_2^\gamma = \mp \frac{k_1 - \lambda k_1^2 - \lambda k_3^2}{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada k_1, k_2 ve k_3, α eğrisinin, k_1^γ, k_2^γ ve k_3^γ, α_1 eğrisinin q-eğrilikleridir.

İspat. $(\Rightarrow)$ α ve α_1 Mannheim eğri çiftlerinin q-çatılarını sırasıyla $\{t, n_q, b_q\}$ ve $\{t^\gamma, n_q^\gamma, b_q^\gamma\}$ ile gösterelim.Şekil 5.2 den

$$\alpha_1(s) = \alpha(s) + \lambda n_q(s) \tag{5.67}$$

yazılabilir. (5.67) denkleminin s ye göre türevi alınarak (4.16) türev formülleri uygulanırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = \alpha' + \lambda' n_q + \lambda n_q' \quad &\Rightarrow \quad t^\gamma \frac{ds_1}{ds} = t + \lambda(-k_1 t + k_3 b_q) \\ &\Rightarrow \quad t^\gamma \frac{ds_1}{ds} = (1-\lambda k_1)t + \lambda k_3 b_q \end{aligned} \tag{5.68}$$

elde edilir. (5.68) eşitliğinin s ye göre türevi alınır ve (4.16) türev formülleri uygulanırsa

$$\frac{dt^\gamma}{ds_1}\frac{ds_1}{ds}\frac{ds_1}{ds} + t^\gamma \left(\frac{d^2 s_1}{ds^2}\right) = t' - \lambda k_1' t - \lambda k_1 t' + \lambda k_3' b_q + \lambda k_3 b_q'$$

olur ve buradan

$$t^\gamma \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 + t^\gamma \left(\frac{d^2 s_1}{ds^2}\right) = -k_1 n_q + k_2 b_q - \lambda k_1' t - \lambda k_1(-k_1 n_q + k_2 b_q) + \lambda k_3' b_q + \lambda k_3(-k_2 t + k_3 n_q) \tag{5.69}$$

elde edilir. (5.69) denkleminde gerekli işlemler yapılarak

$$\begin{aligned} (-k_1^\gamma n_q^\gamma + k_2^\gamma b_q^\gamma)\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 + t^\gamma \left(\frac{d^2 s_1}{ds^2}\right) &= \left(-\lambda k_1' - \lambda k_2 k_3\right)t + \left(\lambda k_1^2 - k_1 + \lambda k_3^2\right) n_q \\ &\quad + \left(k_2 - \lambda k_1 k_2 + \lambda k_3'\right) b_q \end{aligned} \tag{5.70}$$

bulunur. (5.70) denkleminin her iki tarafı n_q ile skaler olarak çarpılırsa

$$\left\langle (-k_1^\gamma n_q^\gamma + k_2^\gamma b_q^\gamma)\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 + t^\gamma \left(\frac{d^2 s_1}{ds^2}\right), n_q \right\rangle = \left(-k_1 + \lambda k_1^2 + \lambda k_3^2\right)\langle n_q, n_q\rangle$$

olur ve gerekli işlemler yapılarak

$$-k_1^\gamma \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 \langle n_q^\gamma, n_q \rangle + k_2^\gamma \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 \langle b_q^\gamma, n_q \rangle + \left(\frac{d^2 s_1}{ds^2}\right) \langle t^\gamma, n_q \rangle = k_1 - \lambda k_1^2 - \lambda k_3^2 \tag{5.71}$$

elde edilir. n_q ile b_q^γ lineer bağımlı olduğundan $n_q \perp n_q^\gamma$ ve $t^\gamma \perp n_q$ dur. Ayrıca $b_q^\gamma = \pm n_q$ yazılabilir. O halde (5.71) denkleminde gerekli işlemler yapılarak

$$k_2^\gamma \langle \pm n_q, n_q \rangle \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = k_1 - \lambda k_1^2 - \lambda k_3^2$$

olur ve buradan da

$$\mp k_2^\gamma \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = k_1 - \lambda k_1^2 - \lambda k_3^2 \tag{5.72}$$

eşitliği bulunur. (5.68) denkleminde eşitliğin her iki tarafının normu alınırsa

$$\sqrt{\left| \langle t^\gamma, t^\gamma \rangle \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 \right|} = \sqrt{\left| (1-\lambda k_1)^2 \langle t, t \rangle + \lambda^2 k_3^2 \langle b_q, b_q \rangle \right|}$$

olup

$$\frac{ds_1}{ds} = \pm \sqrt{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2} \tag{5.73}$$

elde edilir. (5.73) denklemi (5.72) denkleminde yerine yazılırsa

$$k_2^\gamma = \mp \frac{k_1 - \lambda k_1^2 - \lambda k_3^2}{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}$$

olur.

$(\Leftarrow)$ $k_2^\gamma = \mp \dfrac{k_1 - \lambda k_1^2 - \lambda k_3^2}{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}$ eşitliğinin sağlandığını kabul edelim.

$$\alpha_1(s) = \alpha(s) + \lambda n_q(s) \tag{5.74}$$

denklemini göz önüne alalım. (5.74) denkleminin s ye göre türevi alınarak (4.16) türev formülleri uygulanırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} &= \alpha' + \lambda' n_q + \lambda n_q' \\ t^\gamma \frac{ds_1}{ds} &= t + \lambda(-k_1 t + k_3 b_q) \\ &= (1-\lambda k_1) t + \lambda k_3 b_q \end{aligned} \tag{5.75}$$

bulunur. (5.75) eşitliğinin s ye göre türevi alınarak (4.16) türev formülleri uygulanırsa

$$\frac{dt^\gamma}{ds_1}\frac{ds_1}{ds}\frac{ds_1}{ds} + t^\gamma \left(\frac{d^2 s_1}{ds^2}\right) = t' - \lambda k_1' t - \lambda k_1 t' + \lambda k_3' b_q + \lambda k_3 b_q'$$

olur ve buradan

$$t^{\gamma'} \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 + t^\gamma \left(\frac{d^2 s_1}{ds^2}\right) = -k_1 n_q + k_2 b_q - \lambda k_1' t - \lambda k_1(-k_1 n_q + k_2 b_q) + \lambda k_3' b_q + \lambda k_3(-k_2 t + k_3 n_q)$$

elde edilir. Son denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\left(-k_1^{\gamma}n_q^{\gamma}+k_2^{\gamma}b_q^{\gamma}\right)\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2+t^{\gamma}\left(\frac{d^2s_1}{ds^2}\right) &= \left(-\lambda k_1'-\lambda k_2k_3\right)t+\left(\lambda k_1^2-k_1+\lambda k_3^2\right)n_q \\ &\quad +\left(k_2-\lambda k_1k_2+\lambda k_3'\right)b_q \end{aligned} \tag{5.76}$$

olarak bulunur. (5.76) denkleminin her iki tarafı n_q ile skaler olarak çarpılırsa

$$\left\langle \left(-k_1^{\gamma}n_q^{\gamma}+k_2^{\gamma}b_q^{\gamma}\right)\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2+t^{\gamma}\left(\frac{d^2s_1}{ds^2}\right), n_q\right\rangle=\left(-k_1+\lambda k_1^2+\lambda k_3^2\right)\langle n_q,n_q\rangle$$

olur ve gerekli işlemler yapılırsa

$$-k_1^{\gamma}\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2\langle n_q^{\gamma},n_q\rangle+k_2^{\gamma}\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2\langle b_q^{\gamma},n_q\rangle+\left(\frac{d^2s_1}{ds^2}\right)\langle t^{\gamma},n_q\rangle=k_1-\lambda k_1^2-\lambda k_3^2 \tag{5.77}$$

elde edilir. (5.77) denkleminin her iki tarafı $\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2$ ifadesine bölünürse

$$-k_1^{\gamma}\langle n_q^{\gamma},n_q\rangle+k_2^{\gamma}\langle b_q^{\gamma},n_q\rangle+\frac{\left(\frac{d^2s_1}{ds^2}\right)}{\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2}\langle t^{\gamma},n_q\rangle=\frac{k_1-\lambda k_1^2-\lambda k_3^2}{\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2} \tag{5.78}$$

eşitliği bulunur. (5.78) denklemi ve kabulümüz göz önüne alınırsa b_q^{γ} ile n_q lineer bağımlı olmalıdır. Bu durumda $n_q^{\gamma}\perp n_q$ ve $t^{\gamma}\perp n_q$ olur. Böylece α ve α_1 Mannheim eğri çiftidir.

5.2.2 Minkowski uzayında yönlü timelike Mannheim eğri çiftleri

Bu altkısımda 3-boyutlu Minkowski uzayında timelike bir uzay eğrisinin quasi-normal vektörü kullanılarak yönlü Mannheim eğrileri tanımlanmıştır. Burada birim teğet vektör t (timelike) ve izdüşüm vektör k (spacelike) olup buna bağlı olarak quasi-normal vektör n_q (spacelike) ve quasi-binormal vektör b_q (spacelike) olarak alınmıştır.

Teorem 5.2.5 α ve α_1, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında birim hızlı yönlü timelike eğriler olsun. Burada izdüşüm vektörü k spacelike olup $\{\alpha,\alpha_1\}$ yönlü Mannheim eğri çiftinin ilgili noktaları arasındaki uzaklık sabittir.

İspat. Şekil 5.2 den

$$\alpha=\alpha_1+\lambda b_q^{\gamma} \tag{5.79}$$

yazılabilir. (5.79) denkleminin s_1 e göre türevini alıp (4.26) türev denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{ds_1}=\frac{d\alpha_1}{ds_1}+\frac{d\lambda}{ds_1}b_q^{\gamma}+\lambda\frac{db_q^{\gamma}}{ds_1} &\Rightarrow t\frac{ds}{ds_1}=t^{\gamma}+\lambda' b_q^{\gamma}+\lambda b_q^{\gamma\prime} \\ &\Rightarrow t\frac{ds}{ds_1}=t^{\gamma}+\lambda' b_q^{\gamma}+\lambda\left(k_2^{\gamma}t^{\gamma}-k_3^{\gamma}n_q^{\gamma}\right)\end{aligned}$$

olur veya

$$t\frac{ds}{ds_1} = (1+\lambda k_2^\gamma)t^\gamma - \lambda k_3^\gamma n_q^\gamma + \lambda' b_q^\gamma \tag{5.80}$$

elde edilir. n_q ve b_q^γ lineer bağımlı olduğundan $\langle t, b_q^\gamma \rangle = 0$ dır. (5.80) denkleminin her iki tarafı b_q^γ ile skaler olarak çarpılırsa

$$\left\langle t\frac{ds}{ds_1}, b_q^\gamma \right\rangle = \left\langle (1+\lambda k_2^\gamma)t^\gamma - \lambda k_3^\gamma n_q^\gamma + \lambda' b_q^\gamma, b_q^\gamma \right\rangle$$

olur. Buradan b_q^γ spacelike vektör olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda' \left\langle b_q^\gamma, b_q^\gamma \right\rangle \\ \lambda' &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani λ sıfırdan farklı bir sabittir. Diğer taraftan iki nokta arasındaki uzaklık fonksiyonundan

$$\begin{aligned} d(\alpha_1, \alpha) &= \|\alpha - \alpha_1\| \\ &= \|\lambda b_q^\gamma\| \\ &= |\lambda| \, \|b_q^\gamma\| \\ &= |\lambda| = sabit \neq 0 \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 5.2.6 α ve α_1, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında birim hızlı yönlü timelike eğriler olsun. α ile yay parametresi s_1 olan α_1 eğrisinin yönlü timelike Mannheim eğri çifti olması için gerek ve yeter koşul λ sıfırdan farklı bir sabit ve izdüşüm vektör k spacelike olmak üzere

$$k_2^\gamma = \pm \frac{k_1 + \lambda k_1^2 - \lambda k_3^2}{\left|\lambda^2 k_3^2 - (1+\lambda k_1)^2\right|}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada k_1, k_2 ve k_3, α eğrisinin, k_1^γ, k_2^γ ve k_3^γ, α_1 eğrisinin q-eğrilikleridir.

İspat. $(\Rightarrow)$ α ve α_1 Mannheim eğri çiftlerinin q-çatılarını sırasıyla $\{t, n_q, b_q\}$ ve $\{t^\gamma, n_q^\gamma, b_q^\gamma\}$ ile gösterelim. Şekil 5.2 den

$$\alpha_1(s) = \alpha(s) + \lambda n_q(s) \tag{5.81}$$

yazılabilir. (5.81) denkleminin s ye göre türevi alınarak (4.26) türev formülleri uygulanırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = \alpha' + \lambda' n_q + \lambda n_q' \quad &\Rightarrow \quad t^\gamma \frac{ds_1}{ds} = t + \lambda(k_1 t + k_3 b_q) \\ &\Rightarrow \quad t^\gamma \frac{ds_1}{ds} = (1+\lambda k_1)t + \lambda k_3 b_q \end{aligned} \tag{5.82}$$

elde edilir. (5.82) eşitliğinin s ye göre türevi alınır ve (4.26) türev formülleri uygulanırsa

$$\frac{dt^{\gamma}}{ds_1}\frac{ds_1}{ds}\frac{ds_1}{ds}+t^{\gamma}\left(\frac{d^2s_1}{ds^2}\right)=t'+\lambda k_1't+\lambda k_1t'+\lambda k_3'b_q+\lambda k_3b_q'$$

olur ve buradan

$$t^{\gamma}\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2+t^{\gamma}\left(\frac{d^2s_1}{ds^2}\right)=k_1n_q+k_2b_q+\lambda k_1't+\lambda k_1(k_1n_q+k_2b_q)+\lambda k_3'b_q+\lambda k_3(k_2t-k_3n_q) \tag{5.83}$$

elde edilir. (5.83) denkleminde gerekli işlemler yapılarak

$$\begin{aligned}\left(k_1^{\gamma}n_q^{\gamma}+k_2^{\gamma}b_q^{\gamma}\right)\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2+t^{\gamma}\left(\frac{d^2s_1}{ds^2}\right) &= \left(\lambda k_1'+\lambda k_2k_3\right)t+\left(k_1+\lambda k_1^2-\lambda k_3^2\right)n_q \\ &\quad +\left(k_2+\lambda k_1k_2+\lambda k_3'\right)b_q\end{aligned} \tag{5.84}$$

bulunur. (5.84) denkleminin her iki tarafı n_q ile skaler olarak çarpılırsa

$$\left\langle \left(k_1^{\gamma}n_q^{\gamma}+k_2^{\gamma}b_q^{\gamma}\right)\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2+t^{\gamma}\left(\frac{d^2s_1}{ds^2}\right),n_q\right\rangle=\left(k_1+\lambda k_1^2-\lambda k_3^2\right)\langle n_q,n_q\rangle$$

olur ve gerekli işlemler yapılarak

$$k_1^{\gamma}\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2\langle n_q^{\gamma},n_q\rangle+k_2^{\gamma}\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2\langle b_q^{\gamma},n_q\rangle+\left(\frac{d^2s_1}{ds^2}\right)\langle t^{\gamma},n_q\rangle=k_1+\lambda k_1^2-\lambda k_3^2 \tag{5.85}$$

elde edilir. n_q ile b_q^{γ} lineer bağımlı olduğundan $n_q\perp n_q^{\gamma}$ ve $t^{\gamma}\perp n_q$ dur. Ayrıca $b_q^{\gamma}=\pm n_q$ yazılabilir. O halde (5.85) denkleminde gerekli işlemler yapılarak

$$k_2^{\gamma}\langle \pm n_q,n_q\rangle\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2=k_1+\lambda k_1^2-\lambda k_3^2$$

olur ve buradan da

$$\pm k_2^{\gamma}\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2=k_1+\lambda k_1^2-\lambda k_3^2 \tag{5.86}$$

eşitliği bulunur. (5.82) denkleminde eşitliğin her iki tarafının normu alınırsa

$$\sqrt{\left|\langle t^{\gamma},t^{\gamma}\rangle\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2\right|}=\sqrt{\left|(1+\lambda k_1)^2\langle t,t\rangle+\lambda^2k_3^2\langle b_q,b_q\rangle\right|}$$

olup

$$\frac{ds_1}{ds}=\pm\sqrt{\left|\lambda^2k_3^2-(1+\lambda k_1)^2\right|} \tag{5.87}$$

elde edilir. (5.87) denklemi (5.86) denkleminde yerine yazılırsa

$$k_2^{\gamma}=\pm\frac{k_1+\lambda k_1^2-\lambda k_3^2}{\left|\lambda^2k_3^2-(1+\lambda k_1)^2\right|}$$

olur.

$(\Leftarrow)$ $k_2^{\gamma} = \pm \dfrac{k_1 + \lambda k_1^2 - \lambda k_3^2}{\left|\lambda^2 k_3^2 - (1+\lambda k_1)^2\right|}$ eşitliğinin sağlandığını kabul edelim.

$$\alpha_1(s) = \alpha(s) + \lambda n_q(s) \tag{5.88}$$

denklemini göz önüne alalım. (5.88) denkleminin s ye göre türevi alınarak (4.26) türev formülleri uygulanırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} &= \alpha' + \lambda' n_q + \lambda n_q' \\ t^{\gamma}\frac{ds_1}{ds} &= t + \lambda(k_1 t + k_3 b_q) \\ &= (1+\lambda k_1)\, t + \lambda k_3 b_q \end{aligned} \tag{5.89}$$

bulunur. (5.89) eşitliğinin s ye göre türevi alınarak (4.26) türev formülleri uygulanırsa

$$\frac{dt^{\gamma}}{ds_1}\frac{ds_1}{ds}\frac{ds_1}{ds} + t^{\gamma}\left(\frac{d^2 s_1}{ds^2}\right) = t' + \lambda k_1' t + \lambda k_1 t' + \lambda k_3' b_q + \lambda k_3 b_q'$$

olur ve buradan

$$t^{\gamma'}\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 + t^{\gamma}\left(\frac{d^2 s_1}{ds^2}\right) = k_1 n_q + k_2 b_q + \lambda k_1' t + \lambda k_1(k_1 n_q + k_2 b_q) + \lambda k_3' b_q + \lambda k_3(k_2 t - k_3 n_q)$$

elde edilir. Son denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \left(k_1^{\gamma} n_q^{\gamma} + k_2^{\gamma} b_q^{\gamma}\right)\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 + t^{\gamma}\left(\frac{d^2 s_1}{ds^2}\right) &= \left(\lambda k_1' + \lambda k_2 k_3\right) t + \left(k_1 + \lambda k_1^2 - \lambda k_3^2\right) n_q \\ &\quad + \left(k_2 + \lambda k_1 k_2 + \lambda k_3'\right) b_q \end{aligned} \tag{5.90}$$

olarak bulunur. (5.90) denkleminin her iki tarafı n_q ile skaler olarak çarpılırsa

$$\left\langle \left(k_1^{\gamma} n_q^{\gamma} + k_2^{\gamma} b_q^{\gamma}\right)\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 + t^{\gamma}\left(\frac{d^2 s_1}{ds^2}\right), n_q \right\rangle = \left(k_1 + \lambda k_1^2 - \lambda k_3^2\right)\left\langle n_q, n_q \right\rangle$$

olur ve gerekli işlemler yapılırsa

$$k_1^{\gamma}\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 \left\langle n_q^{\gamma}, n_q \right\rangle + k_2^{\gamma}\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 \left\langle b_q^{\gamma}, n_q \right\rangle + \left(\frac{d^2 s_1}{ds^2}\right)\left\langle t^{\gamma}, n_q \right\rangle = k_1 + \lambda k_1^2 - \lambda k_3^2 \tag{5.91}$$

elde edilir. (5.91) denkleminin her iki tarafı $\left(\dfrac{ds_1}{ds}\right)^2$ ifadesine bölünürse

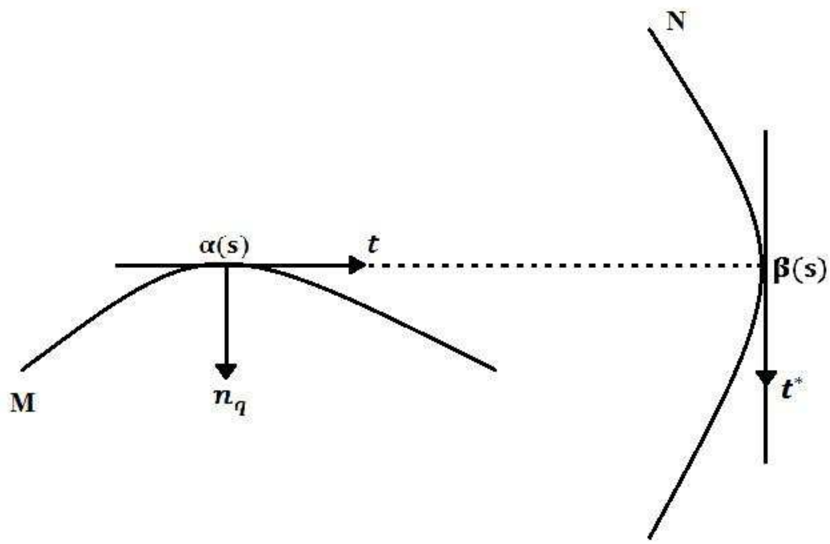
$$k_1^{\gamma}\left\langle n_q^{\gamma}, n_q \right\rangle + k_2^{\gamma}\left\langle b_q^{\gamma}, n_q \right\rangle + \frac{\left(\frac{d^2 s_1}{ds^2}\right)}{\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2}\left\langle t^{\gamma}, n_q \right\rangle = \frac{k_1 + \lambda k_1^2 - \lambda k_3^2}{\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2} \tag{5.92}$$

eşitliği bulunur. (5.92) denklemi ve kabulümüz göz önüne alınırsa b_q^{γ} ile n_q lineer bağımlı olmalıdır. Bu durumda $n_q^{\gamma} \perp n_q$ ve $t^{\gamma} \perp n_q$ olur. Böylece α ve α_1 Mannheim eğri çiftidir.

5.3 Minkowski Uzayında Yönlü İnvolüt-Evolüt Eğri Çiftleri

Bu kısımda, 3-boyutlu Minkowski uzayında timelike veya spacelike bir uzay eğrisinin quasi-normal vektörü kullanılarak yönlü involüt-evolüt eğrileri tanımlanmıştır. Ayrıca yönlü involüt-evolüt eğrilerinin bazı özellikleri incelenmiştir.

Tanım 5.3.1 $M,N \subset \mathbb{R}^3_1$ iki uzay eğrisi M ve N sırasıyla (I,α) ve (I,β) koordinat komşulukları ile verilsin. $\alpha(s)$ve $\beta(s)$ noktalarında M ve N nin q-çatısı sırasıyla $\{t,n_q,b_q\}$ ve $\{t^*,n^*_q,b^*_q\}$ olmak üzere, eğer $\langle t,t^*\rangle = 0$ ise N ye M nin yönlü involütü, M ye de N nin evolütü denir.



Şekil 5.3: Yönlü involüt-evolüt eğrileri

5.3.1 Minkowski uzayında yönlü spacelike involüt-evolüt eğri çiftleri

i) k izdüşüm vektörü timelike olan yönlü spacelike involüt-evolüt eğri çiftleri

Bu altkısımda 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike bir uzay eğrisinin quasi-normal vektörü kullanılarak yönlü involüt-evolüt eğrileri tanımlanacaktır. Burada birim teğet vektör t (spacelike) ve izdüşüm vektör k (timelike) olup buna bağlı olarak quasi-normal vektör n_q (spacelike) ve quasi-binormal vektör b_q (timelike) olarak alınmıştır.

Teorem 5.3.1 $\alpha(s)$ birim hızlı yönlü spacelike bir uzay eğrisi ve yay parametresi s_1 olan

$\beta(s)$ eğrisi, $\alpha(s)$ nin yönlü spacelike involüt-evolüt eğri çifti olsun. Burada izdüşüm vektörü k timelike olup

$$d(\alpha(s),\beta(s)) = |c-s|\,,\ c = sabit$$

tir.

İspat. $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ involüt-evolüt eğri çiftlerinin q-çatılarını sırasıyla $\{t,n_q,b_q\}$ ve $\{t^*,n_q^*,b_q^*\}$ ile gösterelim. Şekil 5.3 den

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda t(s) \tag{5.93}$$

yazılabilir. Böylece, s nin α için yay parametresi olduğu kabul edilip (5.93) denkleminin türevi alınırsa

$$\frac{d\beta(s)}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = \frac{d\alpha(s)}{ds} + \lambda' t(s) + \lambda t'(s) \tag{5.94}$$

elde edilir. (4.6) yardımıyla (5.94) denklemi

$$\begin{aligned} t^*\frac{ds_1}{ds} &= t + \lambda' t + \lambda(k_1 n_q - k_2 b_q) \\ &= (1+\lambda')t + \lambda k_1 n_q - \lambda k_2 b_q \end{aligned} \tag{5.95}$$

olarak yazılabilir. (5.95) denkleminin her iki tarafı t ile skaler olarak çarpılırsa

$$\langle t^*,t\rangle \frac{ds_1}{ds} = \left(1+\lambda'\right)\langle t,t\rangle + \lambda k_1 \left\langle n_q,t\right\rangle - \lambda k_2 \left\langle b_q,t\right\rangle \tag{5.96}$$

elde edilir. Burada $\langle t^*,t\rangle = 0$ ve $\langle t,t\rangle = 1$ olup (5.96) denklemi

$$0 = 1 + \lambda' \tag{5.97}$$

olur. (5.97) denklemi düzenlenip gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \lambda'(s) &= -1 \\ \int \lambda' ds &= \int (-1) ds \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\lambda(s) = -s + c;\ c = sabit \tag{5.98}$$

ifadesi elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} d(\alpha(s),\beta(s)) &= \|\beta(s) - \alpha(s)\| \\ &= \|\lambda(s)t(s)\| \end{aligned}$$

olup (5.98) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned} d(\alpha(s),\beta(s)) &= \|(-s+c)t(s)\| \\ &= \sqrt{|\langle(-s+c)t(s),(-s+c)t(s)\rangle|} \\ &= \sqrt{|(-s+c)^2\langle t(s),t(s)\rangle|} \\ &= |c-s| \end{aligned}$$

olarak bulunur.

ii) k izdüşüm vektörü spacelike olan yönlü spacelike involüt-evolüt eğri çiftleri

Bu altkısımda 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike bir uzay eğrisinin quasi-normal vektörü kullanılarak yönlü involüt-evolüt eğrileri tanımlanacaktır. Burada birim teğet vektör t (spacelike) ve izdüşüm vektör k (spacelike) olup buna bağlı olarak quasi-normal vektör n_q (timelike) ve quasi-binormal vektör b_q (spacelike) olarak alınmıştır.

Teorem 5.3.2 $\alpha(s)$ birim hızlı yönlü spacelike bir uzay eğrisi ve yay parametresi s_1 olan $\beta(s)$ eğrisi, $\alpha(s)$ nin yönlü spacelike involüt-evolüt eğri çifti olsun. Burada izdüşüm vektörü k spacelike olup

$$d(\alpha(s),\beta(s)) = |c-s|\,,\; c = sabit$$

tir.

İspat. $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ involüt-evolüt eğri çiftlerinin q-çatılarını sırasıyla $\{t,n_q,b_q\}$ ve $\{t^*,n_q^*,b_q^*\}$ ile gösterelim. Tanım 5.3.1 ve Şekil 5.3 gereğince

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda t(s) \tag{5.99}$$

yazılabilir. Böylece, s nin α için yay parametresi olduğu kabul edilip (5.99) denkleminin türevi alınırsa

$$\frac{d\beta(s)}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = \frac{d\alpha(s)}{ds} + \lambda' t(s) + \lambda t'(s) \tag{5.100}$$

elde edilir. (4.16) yardımıyla (5.100) denklemi

$$\begin{aligned} t^*\frac{ds_1}{ds} &= t + \lambda' t + \lambda(-k_1 n_q + k_2 b_q) \\ &= (1+\lambda')t - \lambda k_1 n_q + \lambda k_2 b_q \end{aligned} \tag{5.101}$$

olarak yazılabilir. (5.101) denkleminin her iki tarafı t ile skaler olarak çarpılırsa

$$\langle t^*,t\rangle \frac{ds_1}{ds} = \left(1+\lambda'\right)\langle t,t\rangle - \lambda k_1 \left\langle n_q,t\right\rangle + \lambda k_2 \left\langle b_q,t\right\rangle \tag{5.102}$$

elde edilir. Burada $\langle t^*,t\rangle = 0$ ve $\langle t,t\rangle = 1$ olup (5.102) denklemi

$$0 = 1+\lambda' \tag{5.103}$$

olur. (5.103) denklemi düzenlenip gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \lambda'(s) &= -1 \\ \int \lambda' ds &= \int (-1) ds \end{aligned}$$

bulunur Buradan da

$$\lambda(s) = -s+c;\ c = sabit \tag{5.104}$$

ifadesi elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} d(\alpha(s),\beta(s)) &= \|\beta(s)-\alpha(s)\| \\ &= \|\lambda(s)t(s)\| \end{aligned}$$

olup (5.104) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned} d(\alpha(s),\beta(s)) &= \|(-s+c)t(s)\| \\ &= \sqrt{|\langle(-s+c)t(s),(-s+c)t(s)\rangle|} \\ &= \sqrt{|(-s+c)^2\langle t(s),t(s)\rangle|} \\ &= |c-s| \end{aligned}$$

olarak bulunur.

5.3.2 Minkowski uzayında yönlü timelike involüt-evolüt eğri çiftleri

Bu altkısımda 3-boyutlu Minkowski uzayında timelike bir uzay eğrisinin quasi-normal vektörü kullanılarak yönlü involüt-evolüt eğrileri tanımlanmıştır. Burada birim teğet vektör t (timelike) ve izdüşüm vektör k (spacelike) olup buna bağlı olarak quasi-normal vektör n_q (spacelike) ve quasi-binormal vektör b_q (spacelike) olarak alınmıştır.

Teorem 5.3.3 $\alpha(s)$ birim hızlı yönlü timelike bir uzay eğrisi ve yay parametresi s_1 olan $\beta(s)$ eğrisi, $\alpha(s)$ nin yönlü timelike involüt-evolüt eğri çifti olsun. Burada izdüşüm vektörü k spacelike olup

$$d(\alpha(s),\beta(s)) = |c-s|,\ c = sabit$$

tir.

İspat. $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ involüt-evolüt eğri çiftlerinin q-çatılarını sırasıyla $\{t,n_q,b_q\}$ ve $\{t^*,n_q^*,b_q^*\}$ ile gösterelim. Tanım 5.3.1 ve Şekil 5.3 gereğince

$$\beta(s) = \alpha(s)+\lambda t(s) \tag{5.105}$$

yazılabilir. Böylece, s nin α için yay parametresi olduğu kabul edilip (5.105) denkleminin türevi alınırsa

$$\frac{d\beta(s)}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = \frac{d\alpha(s)}{ds}+\lambda' t(s)+\lambda t'(s) \tag{5.106}$$

elde edilir. (4.26) yardımıyla (5.106) denklemi

$$\begin{aligned} t^* \frac{ds_1}{ds} &= t + \lambda' t + \lambda(k_1 n_q + k_2 b_q) \\ &= (1+\lambda')t + \lambda k_1 n_q + \lambda k_2 b_q \end{aligned} \tag{5.107}$$

olarak yazılabilir. (5.107) denkleminin her iki tarafı t ile skaler olarak çarpılırsa

$$\langle t^*, t \rangle \frac{ds_1}{ds} = \left(1+\lambda'\right) \langle t,t \rangle + \lambda k_1 \left\langle n_q, t \right\rangle + \lambda k_2 \left\langle b_q, t \right\rangle \tag{5.108}$$

elde edilir. Burada $\langle t^*, t \rangle = 0$ ve $\langle t, t \rangle = -1$ olup (5.108) denklemi

$$0 = -1 - \lambda' \tag{5.109}$$

olur. (5.109) denklemi düzenlenip gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \lambda'(s) &= -1 \\ \int \lambda' ds &= -\int ds \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\lambda(s) = -s + c; \; c = sabit \tag{5.110}$$

ifadesi elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} d(\alpha(s), \beta(s)) &= \|\beta(s) - \alpha(s)\| \\ &= \|\lambda(s) t(s)\| \end{aligned}$$

olup (5.110) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned} d(\alpha(s), \beta(s)) &= \|(-s+c)t(s)\| \\ &= \sqrt{|\langle(-s+c)t(s), (-s+c)t(s)\rangle|} \\ &= \sqrt{|(-s+c)^2 \langle t(s), t(s)\rangle|} \\ &= |c - s| \end{aligned}$$

olarak bulunur.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Öklidyen ve Minkowski uzaylarında diferensiyel geometrik kavramların incelenmesi, temel kavramların açıklanması ve yapılan çalışmaya yardımcı olacağı düşünülen teoremler, önermeler ve ispatlar açıklanmıştır. Öncelikle temel geometrik kavramlar ifade edilmiş, sonra bu kavramlar yardımı ile çalışmanın dördüncü bölümünde; Minkowski 3-uzayında bir uzay eğrisinin ve alınan izdüşüm vektörünün timelike veya spacelike olması durumunda oluşan quasi-normal vektörü de kullanılarak beş farklı durum elde edilmiştir. Bu durumlardan dördü spacelike eğriler için k izdüşüm vektörünün timelike veya spacelike olmasına bağlı olarak oluşturulmuştur. İzdüşüm vektörü timelike olan spacelike eğriler için iki farklı durum incelenmiş ve yapılan hesaplarda iki durum içinde türev denklemleri aynı bulunmuştur. Benzer şekilde izdüşüm vektörü spacelike olan spacelike eğriler için iki farklı durumda da türev denklemleri aynı olarak elde edilmiştir. Timelike eğriler için k izdüşüm vektörünün timelike veya spacelike olması yapılan hesapları değiştirmediğinden bir tek durum için türev denklemleri hesaplanmıştır. Ayrıca her bir durum için q-eğrilikleri elde edilmiştir. Çalışmanın beşinci bölümünde, Minkowski 3-uzayında Bertrand, Mannheim ve involüt-evolüt eğri çiftleri q-çatısı ile tanımlanmıştır. Bu yönlü eğri çiftleri ile ilgili bazı özellikler incelenmiştir. Ayrıca Minkowski 3-uzayında yönlü Bertrand eğri çifti ve yönlü Mannheim eğri çiftinin eğrilikleri arasındaki ilişki elde edilmiştir.

Benzer hesaplar Minkowski 3-uzayında null eğri çiftleri için yapılabilir. Öklidyen uzayında Mannheim ve involüt-evolüt eğri çifti için q-çatısı kullanılarak bazı teoremler elde edilebilir. Minkowski space-time ile Öklidyen 4-uzayında q-çatısı tanımlanıp, yönlü Bertrand, Mannheim ve involüt-evolüt eğri çifti için bazı özellikler verilebilir. Dual uzayda quasi-normal vektörü yardımıyla q-çatısı tanımlanarak yönlü Bertrand eğri çifti için çeşitli teoremler elde edilebilir. Minkowski uzay-zamanda genelleştirilmiş yönlü Bertrand ve Mannheim eğrileri çalışılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Akutagawa, K., Nishikawa, S., 1990, The Gauss map and spacelike surfaces with prescribed mean curvature in Minkowski 3-space, Tohoku Mathematical Journal, 42, 67-82.

As, E., Sarıoğlugil, A., 2014, On the Bishop curvatures of involute-evolute curve couple in E^3, International Journal of Physical Sciences, 9, 7, 140-145.

Azak, A., 2009, Üç boyutlu Lorentz uzayı L^3 de timelike Mannheim eğri çifti üzerine, II, 35-45.

Balgetir, H., Bektaş, M., Inoguchi, J., 2004, Null Bertrand curves in Minkowski 3-space and their characterizations, Note di Metamatica, 23, 1, 7-13.

Bertrand, J.M., 1850, Memoire sur la theorie des courbes a double courbure, Journal de Mathematiques Pures Et Appliquees, 15, 332-350.

Bilici, M., Çalışkan, M., 2009, On the involutes of the spacelike curve with a timelike binormal in Minkowski 3-space, International Mathematical Forum, 4, 31, 1497-1509.

Bilici, M., Çalışkan, M., 2011, Some new notes on the involutes of the timelike curves in Minkowski 3-space, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 6, 41, 2019-2030.

Bishop, R. L., 1975, There is more than one way to frame a curve, The American Mathematical Monthly, 82, 246-251.

Blum, R., 1966, A remarkable class of Mannheim-curves, Canadian Mathematical Bulletin, 9, 2, 223-228.

Boyer, C., 1968, A History of Mathematics, New York:Wiley, p. 334.

Bükcü, B., Karacan, M.K., 2007, On the involute and evolute curves of the spacelike curve with a spacelike binormal in Minkowski 3-space, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 2, 5, 221-232.

Bükcü, B., Karacan, M.K., 2008, Bishop frame of the spacelike curve with a spacelike principal normal in Minkowski 3-space, Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1, 57, 1, 13-22.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Bükcü, B., Karacan, M.K., 2009, On involute and evolute curves of spacelike curve with a spacelike principal normal in Minkowski 3-space, International Journal of Mathematical Combinatorics, 1, 27-37.

Carmo, do M.P., 2012, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, p. 503.

Choi, J., Kang, T., Kim, Y., 2012, Bertrand curves in 3-dimensional space forms, Applied Mathematics and Computation, 219, 3, 1040-1046.

Coquillart, S., 1987, Computing offsets of B-spline curves, Computer-Aided Design, 19, 6, 305-309.

Çetin, M., Tunçer, Y., Karacan, M.K., 2014, Smarandache curves according to Bishop frame in Euclidean 3-space, General Mathematics Notes, 20, 2, 50-66.

Dede, M., Ekici, C., Görgülü, A., 2015, Directional q-frame along a space curve, International Journal of Advanced Research in Computer Science and Software Engineering, 5, 12, 775-780.

Dede, M., Ekici, C., Tozak, H., 2015, Directional tubular surfaces, International Journal of Algebra, 9, 12, 527-535.

Dede, M., Ekici, C., 2016, Directional Bertrand curves, (incelemede).

Farouki, R.T., 2008, Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and Geometry Inseparable, Springer, Berlin, p. 728.

Guggenheimer, H., 1989, Computing frames along a trajectory, Computational Aided Geometry Design, 6, 77-78.

Güner, G., Ekmekçi, N., 2012, On the spherical curves and Bertrand curves in Minkowski 3-space, Journal of Mathematics and Computer Science, 2, 4, 898-906.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Hacısalihoğlu, H.H., 1998, Diferensiyel geometri, Ankara Üniversitesi, s.269.

Karacan, M.K., Bükcü, B., 2008, Bishop frame of the timelike curve in Minkowski 3-space, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi, 3, 1, 80-90.

Kazaz, M., Uğurlu, H.H., Önder, M., Oral, S., 2014, Bertrand partner D-curves in the Minkowski 3-space E_1^3, Mathematical Sciences and Applications E-Notes, 2, 1, 68-82.

Klok, F., 1986, Two moving coordinate frames for sweeping along a 3D trajectory, Computational Aided Geometry Design, 3, 217-229.

Kobayashi, S., Nomizu, K., 1983, Foundations of Differential Geometry, A Wiley-Interscience Publication, New York, p. 329.

Kuhnel, W., 2006, Differential geometry curves-surfaces-manifolds, American Mathematical Society, Second Edition, p.54.

Lai H., 1967, Weakened Bertrand curves, Tôhoku Mathematical Journal, 19,2, 141-155.

Liu, H., Wang, F., 2008, Mannheim partner curves in 3-space, Journal of Geometry, 88, 120-126.

Matsuda, H., Yorozu, S., 2003, Notes on Bertrand curves, Yokohama Mathematical Journal, 50, 41-58.

Maurer, C., Jüttler, B., 1999, Rational approximation of rotation minimizing frames using Pythagorean-Hodograph cubics, Journal for Geometry and Graphics, 3, 2, 141-159.

O'Neill, B., 1983, Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, p. 468.

Orbay, K., Kasap, E., 2009, On Mannheim partner curves in E^3, International Journal of Physical Sciences, 4, 5, 261-264.

Öztekin, H., Bektaş, M., 2010, Representation formulae for Bertrand curves in the Minkowski 3-space, Scientia Magna, 6, 1, 89-96.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Öztekin, H., Ergüt, M., 2011, Null Mannheim curves in the Minkowski 3-space E_1^3, Turkish Journal of Mathematics, 35, 107-114.

Öztürk, U., Koç Öztürk, E., B., İlarslan, K., 2013, On the involute-evolute of the pseudonull curve in Minkowski 3-space, Journal of Applied Mathematics, 2013, 1-6.

Ravani, R., Meghdari, A., 2004, Rational Frenet-Serret curves and rotation minimizing frames in spatial motion design, IEEE international conference on Intelligent engineering systems, 186-192.

Tunçer, Y., Ünal, S., 2012, New representations of Bertrand pairs in Euclidean 3-space, Applied Mathematics and Computation, 2019, 1833-1842.

Turgut, A., 1995, 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike ve timelike regle yüzeyler, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, s. 96.

Uğurlu, H.H., Çalışkan, A., 2012, Darboux Ani Dönme Vektörleri ile Spacelike ve Timelike Yüzeyler Geometrisi, Celal Bayar Üniversitesi Yayınları, 0006, s. 170.

Venant, B.S., 1845, Memoire sur les lignes courbes non planes, Journal de I'Ecole Polytechnique, 18, 1-76.

Wang, F., Liu, H.L., 2007, Mannheim partner curves in 3-Euclidean space, Mathematics in Practice and Theory, 37, 1, 141-43.

Wang, W., Joe, B., 1997, Robust computation of the rotation minimizing frame for sweep surface modelling, Computational Aided Geometry Design, 29, 379-391.

Wang, W., Jüttler, B., Zheng, D., Liu, Y., 2008, Computation of rotation minimizing frames, ACM Transactions on Graphics, 27, 1, 1-18.

Yılmaz, S., Turgut, M., 2010, A new version of Bishop frame and an application to spherical images, Journal of Mathematical Analysis Applications, 371, 764-776.