Galois Cismi Üzerinde Projektif 3-uzay ve Projektif Düzlemlerde Ovaller Üzerine

Merve Öztürk

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Haziran 2016

On Projective 3-Space Over Galois Field and Ovals in Projective Planes

Merve Öztürk

MASTER OF SCIENCE THESIS

Mathematics-Computer Science Department

June 2016

Galois Cismi Üzerinde Projektif 3-uzay ve Projektif Düzlemlerde Ovaller Üzerine

Merve Öztürk

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Süheyla EKMEKÇİ

Haziran 2016

ONAY

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS öğrencisi Merve Öztürk'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "**Galois Cismi Üzerinde Projektif 3-uzay ve Projektif Düzlemlerde Ovaller Üzerine**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Süheyla EKMEKÇİ

İkinci Danışman :

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Süheyla EKMEKÇİ

Üye : Prof. Dr. Ziya AKÇA

Üye : Prof. Dr. Ayşe BAYAR

Üye : Doç. Dr. Özcan GELİŞGEN

Üye : Doç. Dr. Mine TURAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Süheyla EKMEKÇİ danışmanlığında hazırlamış olduğum “**Galois Cismi Üzerinde Projektif 3-uzay ve Projektif Düzlemlerde Ovaller Üzerine**” başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 20/06/2016

Merve Öztürk

ÖZET

Bu çalışmada q asal sayı, $K = GF(q)$ Galois cismi üzerinde $PG(3, K)$ projektif uzayı ve $PG(2, K)$ projektif düzleminde ovaller incelenmiştir. İkinci ve üçüncü bölümde projektif düzlem, Galois cismi üzerinde projektif 3-uzay ve projektif düzlemde ovaller hakkında bazı tanımlar, teoremler ve temel kavramlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde öncelikle projektif düzlemin nokta, doğru ve üzerinde bulunma bağıntısı verilmiştir. Daha sonra sonlu mertebeden bazı projektif düzlemler ve elde ediliş yöntemleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde sonlu projektif düzlemlerde ovaller ele alınmıştır. Projektif düzlemde herhangi bir ovalin iç-teğet üçgeni ile dış-teğet üçgeninin perspektif olduğu gösterilmiş ve perspektiflik merkezi bulunmuştur.

Anahtar kelimeler: Projektif Düzlem, Projektif Uzay, Oval.

SUMMARY

In this study, $PG(3, K)$ projective space over $K = GF(q)$ galois field and ovals in the projective plane were examined. In the second and third section; some definitions, theorems and basic concepts related the projective plane, projective 3-space over galois field, ovals in the projective plane are given.

In the fourth section; firstly the point, the line and the incidence relation of the projective plane are given. The construction some projective planes with finite order are studied.

In the fifth section; ovals in a finite projective plane are discussed. It is shown that every inscribed triangle of any oval in projective plane and its circumscribed triangle are perspective and a center of perspective of these triangles is obtained.

Key words: Projective Planes , Projective Space, Oval .

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamın her aşamasında deneyimlerini, bilimsel katkılarını ve desteklerini esirgemeyen değerli danışmanım

Prof. Dr. Süheyla EKMEKÇİ'ye,

her zaman fikirlerine başvurduğum ve desteklerini benden esirgemeyen sayın hocalarım

Prof. Dr. Ziya AKÇA ve Prof. Dr. Ayşe BAYAR'a

tez yazım sürecinde fikirlerine başvurduğum ve desteklerini benden esirgemeyen sayın hocam

Doç. Dr. Özcan GELİŞGEN'e

bu süreçte her zaman yanımda olup maddi, manevi bana destek olan sevgili AİLEME, ayrıca bana karşı gösterdiği tüm samimiyeti ve desteği için değerli arkadaşım Gizem KAHRAMAN'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Eskişehir, 2016
Merve Öztürk

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Bu çalışmada, Galois cismi üzerinde projektif 3-uzay ve projektif düzlemde ovaller incelenmiştir. İlk olarak afin düzlem, projektif düzlem ve Dezargsel düzlem anlatılmıştır. Daha sonra projektif düzlemde arklar ve ovaller incelenmiştir.

İkinci ve üçüncü bölümde projektif düzlem, Galois cismi üzerinde projektif 3-uzay ve projektif düzlemde ovaller hakkında bazı tanımlar teoremler ve temel kavramlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde öncelikle projektif düzlemin nokta ve doğru kümeleri belirlenmiş, üzerinde bulunma bağıntısı verilmiştir. Daha sonra sonlu mertebeden bazı projektif düzlemler ve elde ediliş yöntemleri incelenmiştir. Hangi mertebeden projektif düzlemlerin var olduğu Bruck-Ryser teoremi tarafından incelenmiş ve henüz var olup olmadığı bilinmeyenler belirtilmiştir.

Beşinci bölümde sonlu projektif düzlemlerde ovaller ele alınmıştır. Projektif düzlemin $p = 2$ hariç her ovalinin bir konik olduğu söylenmiş ve bunun kanıtında perspektif üçgenler kullanılmıştır. Projektif düzlemde herhangi bir ovalin iç-teğet üçgeni ile dış-teğet üçgeninin perspektif olduğu gösterilmiş ve perspektiflik merkezi bulunmuştur. Perspektif üçgenler ve bu üçgenlerin perspektiflik merkezi yardımıyla da oval ile konik arasındaki bağıntı kurulmuştur.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tezi anlaşılır kılmak için projektif düzlem ve projektif 3-uzayla ilgili bazı temel kavramlar ve özellikler bu bölümde özetlenmiştir. Bu bilgileri elde etmek için (Kaya, 2005) ve (Al-Mukhtar, 2011a) esas alınarak afin düzlemler, projektif düzlemler, dezargsel düzlemler ve galois cismi üzerinde projektif 3-uzay incelenmiştir.

2.1 Afin Düzlemler

Tanım 1. *$\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ elemanları sırası ile noktalar ve doğrular kümesi olsun.*

(1) *$N_1, N_2, N_3, ... \in \mathcal{N}$ noktaları için $N_i \circ d$ ve $i = 1, 2, 3, ...$ olacak şekilde bir $d \in \mathcal{D}$ var ise bu noktalara **doğrudaş noktalar** denir.*

(2) *$d_1, d_2, d_3, ... \in \mathcal{D}$ doğruları için $N \circ d_i$ ve $i = 1, 2, 3, ...$ olacak şekilde bir $N \in \mathcal{N}$ var ise bu doğrulara **noktadaş doğrular** denir.*

(3) *$d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ ve $d_1 \neq d_2$ olsun. $N \circ d_1$ ve $N \circ d_2$ olacak şekilde hiçbir $N \in \mathcal{N}$ noktası yok ise d_1 ve d_2 doğrularına **paralel doğrular** denir ve $d_1 \parallel d_2$ ile gösterilir.*

Tanım 2. *$\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ elemanları sırası ile noktalar ve doğrular olsun ve $\mathcal{N} \cap \mathcal{D} = \varnothing$ özelliğine sahip iki küme, $\circ$ da $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ kümesinde tanımlanan bir üzerinde bulunma bağıntısı ($\circ \subset \mathcal{N} \times \mathcal{D}$) olmak üzere aşağıda verilen A1, A2 ve A3 aksiyomlarını sağlayan $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ sistemine **afin düzlem** denir.*

(A1) *$\forall\ M, N \in \mathcal{N}$ ve $M \neq N$ noktalarından geçen tek bir $d \in \mathcal{D}$ doğrusu vardır.*

(A2) *$N \not\circ d$ olmak üzere her $N \in \mathcal{N}$ ve $d \in \mathcal{D}$ için $N \circ c$ ve $d \parallel c$ olacak şekilde tek bir $c \in \mathcal{D}$ doğrusu vardır.*

(A3) *Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.*

Tanım 3. *Paralel olmayan farklı c ve d doğrularının her ikisininde üzerinde bulunan noktaya bu doğruların **arakesiti** veya **kesişme noktası** denir, cd veya $c \wedge d$ ile gösterilir.*

Tanım 4. *Her sonlu $\mathcal{A}$ afin düzlemi için $n \geq 2$ olmak şartıyla*

***(1)** Her doğrusu üzerinde tam olarak n tane nokta vardır.*

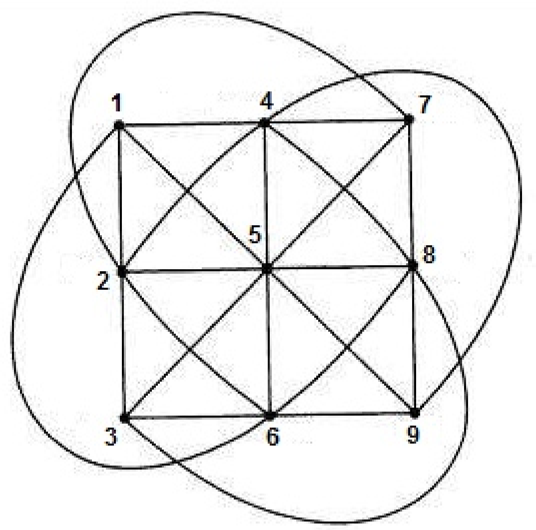
***(2)** Her noktası tam olarak $n+1$ tane doğru üzerindedir.*

***(3)** Toplam nokta sayısı n^2 dir.*

***(4)** Toplam doğruların sayısı n^2+n dir.*
Burada ifade edilen n sayısına afin düzlemin mertebesi adı verilir.

Örnek 1. 3. *mertebeden bir afin düzlemin toplam* 9 *noktası ve* 12 *doğrusu vardır.*

$\mathcal{N} = \{N_1, N_2, N_3, ..., N_9\}$ *ve* $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, d_3, ..., d_{12}\}$ *kümelerinde* $i \neq j$ *için* $N_i \neq N_j$ *ve* $d_i \neq d_j$ *olsun. Aşağıdaki şekil 2.1 de* 3. *mertebeden bir afin düzlem temsil edilmektedir.*



Şekil 2.1 Afin Düzlem

2.2 Projektif Düzlemler

Tanım 5. *$\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ sırası ile noktalar ve doğrular kümesi olan ve $\mathcal{N} \cap \mathcal{D} = \varnothing$ özelliğine sahip iki küme $\circ$ da $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ kümesinde tanımlanan bir üzerinde bulunma bağıntısı ($\circ \subset \mathcal{N} \times \mathcal{D}$) olmak üzere aşağıda verilen P1, P2 ve P3 aksiyomlarını sağlayan $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ sistemine bir **projektif düzlem** denir ve $\mathcal{P}$ ile gösterilir.*

***(P1)** Farklı iki nokta bir tek doğru belirtir.*

(P2) *İki doğrunun en az bir ortak noktası vardır.*

(P3) *Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.*

Tanım 6. *Her sonlu $\mathcal{P}$ projektif düzleminin*

(1) *Her doğrusu üzerinde tam olarak $n+1$ tane nokta vardır.*

(2) *Her noktası tam olarak $n+1$ tane doğru üzerindedir.*

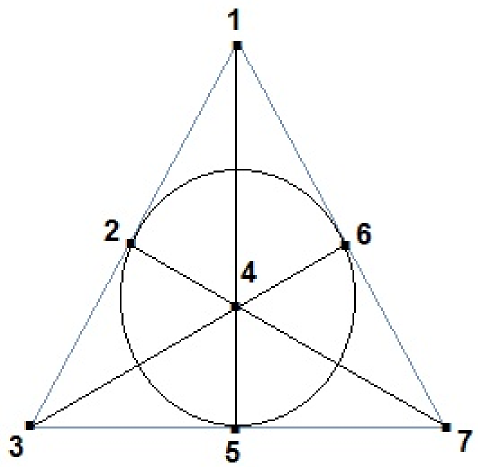
(3) *Toplam nokta sayısı n^2+n+1 dir.*

(4) *Toplam doğruların sayısı n^2+n+1 dir.*
Buradaki n sayısına projektif düzlemin mertebesi denir.

Tanım 7. *$\mathcal{P}$ bir projektif düzlem olsun. $\mathcal{P}$ deki 'nokta' sözcüğü yerine 'doğru' ve 'doğru' sözcüğü yerine 'nokta' koyarak bulunan yeni ifadeye $\mathcal{P}$* ***nin dual ifadesi*** *denir ve $\mathcal{P}^\star$ ile gösterilir.*

$\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ bir projektif düzlem ise $\mathcal{P}^\star = (\mathcal{D}, \mathcal{N}, \circ^{-1})$ de bir projektif düzlemdir. $\mathcal{P}^\star$a $\mathcal{P}$ nin ***dual projektif düzlemi*** *denir.*

Bir projektif düzleme ilişkin her teorem ifadesinin duali de bir başka teoremin ifadesidir.



Şekil 2.2 Fano Düzlemi

Örnek 2. *En küçük projektif düzlem* 7 *noktadan ve* 7 *doğrudan oluşur.* $\mathcal{N} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ *ve* $\mathcal{D} = \{d_1,d_2,d_3,d_4,d_5,d_6,d_7\}$ *olsun.*

$$d_1 = \{1,2,3\}\,,\quad d_2 = \{1,4,5\}\quad d_3 = \{1,6,7\}$$
$$d_4 = \{2,5,6\}\quad d_5 = \{3,4,6\}\quad d_6 = \{3,5,7\}$$
$$d_7 = \{2,4,7\}$$

olmak üzere yedi noktalı böyle bir projektif düzleme ***Fano düzlemi*** *denir. (Bakınız Şekil 2.2)*

Teorem 1. *Her afin düzlemin tamamlanmışı bir projektif düzlemdir.*

İspat. $\mathcal{A} = (\mathcal{N},\mathcal{D},\circ)$ *bir afin düzlem,* $\left(\mathcal{N}',\mathcal{D}',\circ\right)$ *da bu afin düzlemin tamamlanmışı olsun.* $\left(\mathcal{N}',\mathcal{D}',\circ\right)$ *nin projektif düzlem olması için* $P1, P2, P3$ *aksiyomlarını sağlaması gerekir.* $N, M \in \mathcal{N}'$ *alalım.* $P1$ *aksiyomu için üç durum vardır.*

(i) *Eğer* $N, M \in \mathcal{N}$ *ise* $N \notin d_\infty$ *ve* $M \notin d_\infty$ *olduğundan* $A1$ *aksiyomundan dolayı* $P1$ *aksiyomu sağlanır.*

(ii) *Eğer* $N \in \mathcal{N}$ *ve* $M \notin \mathcal{N}$ *ise* $M = M_\infty$ *olur.* M_∞ *noktasını belirleyen demetteki her doğru* N *den geçemeyeceğine göre* $N \not\circ m$ *olacak şekilde bir* m *doğrusu vardır ve* $A2$ *aksiyomundan dolayı da* N *noktasından geçen* m *doğrusuna paralel tek bir* d *doğrusu vardır(*$N \circ d$ *ve* $m \parallel d$*). Dolayısıyla* d *nin genişletilmişi* MN *doğrusudur.*

(iii) *Eğer* $N, M \notin \mathcal{N}$ *ise o halde bu iki nokta ideal noktadır ve iki ideal noktadan sadece ideal doğru geçer.*

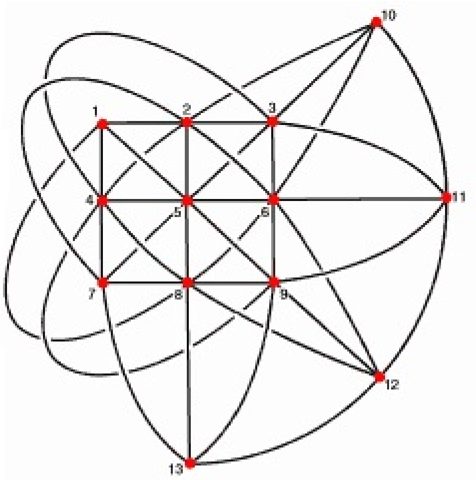
Dolayısıyla üç durumda da $P1$ *aksiyomu sağlanır.* $P2$ *aksiyomu için* $c, d \in \mathcal{D}'$ *olsun. Yine üç durum vardır.*

(i) *Eğer* $c \neq d_\infty$ *,* $d \neq d_\infty$ *ve* $c \not\parallel d$ *ise* $cd \in \mathcal{N}$ *noktası vardır.*

(ii) *Eğer* $c \neq d_\infty$ *,* $d \neq d_\infty$ *ve* $c \parallel d$ *ise* $cd = C_\infty = D_\infty$ *olur.*

(iii) *Eğer* $c \neq d_\infty$ *,* $d = d_\infty$ *ise o halde* $cd = C_\infty$ *olur.*

Dolayısıyla üç durumda da $P2$ *aksiyomu sağlanır.* $P3$ *aksiyomu için de herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta gerekir. Bu noktalardan hiçbiri* d_∞ *üzerinde olmadığından bunlar* $\mathcal{A}$ *nın tamamlanışında da aynı özelliğe sahiptir. Sonuç olarak projektif düzlemin üç aksiyomunu da sağladığı için afin düzlemin tamamlanmışı bir projektif düzlemdir.*

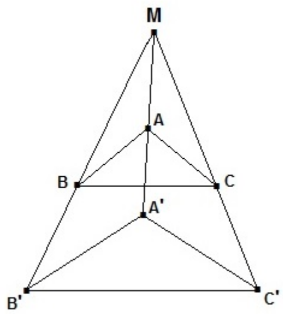


Şekil 2.3 Projektif Düzlem

Örneğin Şekil 2.3 de 3*. mertebeden afin düzlemin tamamlanışı olan* 3*. mertebeden projektif düzlem görülmektedir.*

2.3 Dezarg Düzlemleri

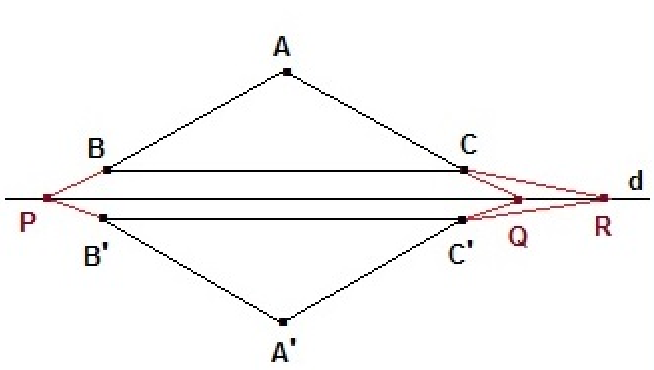
Tanım 8. $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ *bir projektif düzlem olsun.* A, B, C, A', B' *ve* C' *bu geometrik yapının herhangi farklı altı noktası olsun. Eğer* A, B, C *doğrudaş değil ise* $\{A, B, C\}$ *kümesi bir üçgen belirtir.* $\{A, B, C\}$ *ve* $\{A', B', C'\}$ $\mathcal{P}$ *de iki üçgen olsun.* A *ve* A'*,* B *ve* B'*,* C *ve* C' *noktalarına üçgenlerin* ***karşılıklı köşeleri*** *denir. Eğer* AA', BB', CC' *doğruları için* $\exists\, M \in \mathcal{N}$ *vardır öyle ki* $AA' \circ M$ *,* $BB' \circ M$ *ve* $CC' \circ M$ *sağlanıyorsa bu üçgenlere* M ***noktasından perspektiftir*** *denir ve* M *noktasına da* ***perspektiflik merkezi*** *denir.*



Şekil 2.4 Dezargsel Düzlem

AB ve $A'B'$; BC ve $B'C'$; AC ve $A'C'$ doğrularına bu üçgenlerin ***karşılıklı kenarları*** *denir.*

Eğer karşılıklı kenarların kesişme noktaları doğrudaş ise yani $AB \wedge A'B' = P$, $BC \wedge B'C' = R$, $AC \wedge A'C' = Q$ noktaları için $\exists\, d \in \mathcal{D}$ vardır öyle ki $P, Q, R \circ d$ ise d doğrusuna ***perspektiflik ekseni*** *denir. Bu üçgenlere de d* ***ekseninden perspektifler*** *denir.*



Şekil 2.5 Dezargsel Düzlem

Teorem 2. ***(P4 Dezarg Teoremi)*** *Bir noktadan perspektif olan iki üçgen bir doğrudan da perspektiftir. Dezarg teoremini sağlayan projektif düzlemlere* ***dezargsel düzlemler,*** *sağlamayan düzlemlere ise* ***dezargsel olmayan projektif düzlemler*** *denir.*

Teorem 3. *F herhangi bir cisim olmak üzere $\mathcal{P}_2F$ projektif düzlemleri dezargsel düzlemlerdir.*

2.4 Galois Cismi Üzerinde Projektif 3-uzay

V, herhangi bir K cismi üzerinde n+1-boyutlu vektör uzayı olsun. V nin orijini atılmış 1-boyutlu altuzaylarının noktaları üzerinde denklik bağıntısı vardır. Yani X noktası Y noktasına denk olması için $X = tY$ olacak şekilde $K - \{0\}$ da bir t elemanı vardır. Bu denklik sınıflarının kümesine K cismi üzerinde n-boyutlu projektif uzay denir ve $PG(n, K)$ ile gösterilir. Eğer $K = GF(q)$ galois cismi kullanılırsa projektif uzay $PG(n, q)$ ile gösterilir. Her bir denklik sınıfı projektif uzayın noktasıdır. Projektif uzayın m-boyutlu alt uzayı, V vektör uzayının m+1-boyutlu altuzayına karşılık gelir. n-boyutlu projektif uzaylarda 0-boyutlu altuzaya **nokta**, 1-boyutlu alt uzaya **doğru**, 2-boyutlu alt uzaya **düzlem**, n-1-boyutlu altuzaya **hiperdüzlem** denir.

Bir K cismi üzerinde **projektif 3-uzay** $PG(3, K)$ noktaları, doğruları, düzlemleri ve bunlar arasındaki üzerinde bulunma bağıntısıyla birlikte aşağıdaki aksiyomları sağlar.

A) Herhangi iki farklı nokta tek bir doğru belirtir.

B) Doğrudaş olmayan herhangi 3 farklı nokta veya herhangi bir doğru ve bu doğru üzerinde olmayan herhangi bir nokta tek bir düzlem belirtir**.**

C) Herhangi iki farklı düzlemdeş doğru tek bir noktada kesişir.

D) Düzlemde olmayan herhangi bir doğru düzlemi tek bir noktada keser.

E) Herhangi iki farklı düzlem bir doğru boyunca kesişir.

Tanım 9. *p asal r pozitif tamsayı ve $q = p^r$ olmak üzere Galois cismi $GF(q)$ üzerinde bir projektif 3-uzay, 3-boyutlu projektif uzaydır. $PG(3, q)$ uzayının herhangi bir noktası (x_1, x_2, x_3, x_4) formundadır. $x_1, x_2, x_3, x_4 \in GF(q)$ ve $(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq (0, 0, 0, 0)$ dır. $\lambda \in GF(q) \setminus \{0\}$ elemanı vardır öyle ki*

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda(y_1, y_2, y_3, y_4)$$

sağlanıyorsa bu iki dörtlü aynı noktaları belirtir ve

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

ile gösterilir. $\lambda \in GF(q) \setminus \{0\}$ elemanı vardır öyle ki

$$[a_1, a_2, a_3, a_4] = \lambda[b_1, b_2, b_3, b_4]$$

sağlanıyorsa bu iki dörtlü aynı düzlemi temsil eder ve

$$[a_1, a_2, a_3, a_4] \equiv [b_1, b_2, b_3, b_4]$$

ile gösterilir. Ayrıca $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ bir düzlem ve (x_1, x_2, x_3, x_4) bir nokta iken

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa (x_1, x_2, x_3, x_4) noktası $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ düzlemi üzerindedir.

Tanım 10. *$PG(3, q)$ daki bir π düzlemi $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$ eşitliğini sağlayan tüm (x_1, x_2, x_3, x_4) noktalarının kümesidir. $\lambda \in GF(q) \setminus \{0\}$ olmak üzere bu düzlem $\pi[a_1, a_2, a_3, a_4]$ ile gösterilir.*

$$a_1\lambda x_1 + a_2\lambda x_2 + a_3\lambda x_3 + a_4\lambda x_4 = \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4)$$

iken noktaların diğer bir gösterimi de

$$(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)$$

formundadır. Düzlemin tanımı noktaların gösterim seçiminden bağımsızdır.

Tanım 11. *Herhangi bir $S = PG(3, K)$ uzayının* ***duali*** $\mathbf{S}^*$ *olsun. S uzayının noktaları ve hiperdüzlemi* $\mathbf{S}^*$ *uzayının da noktaları ve hiperdüzlemidir. S uzayında geçerli olan bir teoremin dualide* $\mathbf{S}^*$ *uzayında geçerlidir. $PG(3, K)$ uzayında noktaların duali düzlem, doğruların duali doğrulardır.*

Teorem 4. *$PG(3, q)$ uzayının noktaları $x, y, z \in GF(q)$ olmak üzere*

$$(1, 0, 0, 0), \;\; (x, 1, 0, 0), \;\; (x, y, 1, 0) \;\; \textit{ve} \;\; (x, y, z, 1)$$

formuna sahiptir. (Al-mukhtar, 2011)

İspat. *$x_1, x_2, x_3, x_4 \in GF(q)$ için $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ noktası $PG(3, q)$ uzayında herhangi bir nokta olsun. $x_4 \neq 0$ veya $x_4 = 0$ olmalıdır*

(i) *$x_4 \neq 0$ için,*

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv P(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}, 1)$$

$$\frac{x_1}{x_4} = x, \; \frac{x_2}{x_4} = y, \; \frac{x_3}{x_4} = z$$

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv (x, y, z, 1)$$

noktasına denktir.

(ii) *$x_4 = 0$ iken $x_3 = 0$ veya $x_3 \neq 0$ olmalıdır.*

$x_3 \neq 0$ için,

$$P(x_1, x_2, x_3, 0) \equiv P(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1, 0)$$

$$\frac{x_1}{x_3} = x, \; \frac{x_2}{x_3} = y$$

$$P(x_1, x_2, x_3, 0) \equiv (x, y, 1, 0)$$

noktasına denktir.

(iii) *$x_3 = 0$ ve $x_4 = 0$ iken $x_2 = 0$ veya $x_2 \neq 0$ olmalıdır.*

$x_2 \neq 0$ için,

$$P(x_1, x_2, 0, 0) \equiv P(\frac{x_1}{x_2}, 1, 0, 0)$$

$$\frac{x_1}{x_2} = x$$
$$P(x_1, x_2, 0, 0) \equiv P(x, 1, 0, 0)$$

noktasına denktir.

(iv) $x_2 = 0$ *,* $x_3 = 0$ *ve* $x_4 = 0$ *iken* $x_1 \neq 0$ *olmalıdır.*

$$P(x_1, 0, 0, 0) \equiv P(\frac{x_1}{x_1}, 0, 0, 0)$$
$$P(x_1, 0, 0, 0) \equiv P(1, 0, 0, 0)$$

noktasına denktir. $(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq (0, 0, 0, 0)$ *olduğundan başka bir ihtimal yoktur. Yani projektif 3 uzayın noktaları*

$$(1, 0, 0, 0), \ \ (x, 1, 0, 0), \ \ (x, y, 1, 0) \ \ \textit{ve} \ \ (x, y, z, 1)$$

bu dört formdan birine sahiptir.

Teorem 5. $PG(3, q)$ *uzayının düzlemleri* $x, y, z \in GF(q)$ *olmak üzere*

$$[1, 0, 0, 0], \ \ [x, 1, 0, 0], \ \ [x, y, 1, 0] \ \ \textit{ve} \ \ [x, y, z, 1]$$

formuna sahiptir.

Teorem 6. $PG(3, q)$ *projektif uzayının her doğrusu tam olarak* $q + 1$ *nokta içerir.*

İspat. α *bir projektif düzlem olsun. Projektif düzlemde her doğru* $q + 1$ *nokta içerir. Kabul edelim ki projektif 3-uzayın bir* d *doğrusu üzerinde* $q + 1$ *nokta olsun. Projektif 3-uzaydaki her* x *doğrusu üzerinde* $q + 1$ *nokta olduğunu göstermek istiyoruz.*

(i) x *ve* d *doğruları aynı düzlemde ise;*

Bu iki doğru dışında bir M *noktası vardır ve bu* M *noktası yardımıyla* $N_i \in d$ *ve* $N_i^{'} \in x$ *için*

$$\begin{aligned} \varphi \quad &: \quad d \to x \\ N_i \quad &\to \quad MN_i \wedge x = N_i^{'} \end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlanır. Her N_i *noktasına karşılık bir* $N_i^{'}$ *noktası vardır ve* φ *fonksiyonu 1-1 ve örtendir. Buradan* d *doğrusunun* $q + 1$ *noktası var ise* x *doğrusunun da* $q + 1$ *noktası vardır. Yani aynı düzlemdeki her doğru eşit sayıda nokta içerir.*

(ii) x *ve* d *doğruları farklı düzlemde ise;*

Kabul edelimki $d \in \alpha_1$ ve $x \in \alpha_2$ olsun. α_1 ve α_2 projektif düzlemleri bir doğru boyunca kesişir bu doğru l doğrusu olsun.

$$d \in \alpha_1 \text{ ve } l \in \alpha_1$$

*olduğundan **(i)** den dolayı l nin de $q+1$ noktası vardır. Aynı zamanda*

$$x \in \alpha_2 \text{ ve } l \in \alpha_2$$

olduğundan x ve l doğruları aynı sayıda nokta içerirler ve x doğrusununda $q+1$ noktası vardır. Sonuç olarak her doğru üzerinde $q+1$ nokta vardır.

Teorem 7. *$PG(3,q)$ projektif uzayın her noktası tam olarak q^2+q+1 doğru üzerindedir.*

İspat. *α bir projektif düzlem, N noktası da uzayın herhangi bir noktası ve N, α düzleminin dışında bir nokta olsun. Projektif uzayın her düzlemi projektif düzlem olduğundan düzlemin toplam q^2+q+1 tane noktası vardır ve projektif uzay aksiyomlarından dolayı herhangi iki noktadan bir doğru geçer. Buradan N noktası ile α düzlemindeki q^2+q+1 tane noktanın her biri ayrı ayrı bir doğru belirtir ve N noktasından toplam q^2+q+1 tane doğru geçer. Projektif uzayda her doğru düzlemi kesmesi gerektiği için N noktasından geçen ve α düzlemini kesmeyen başka bir doğru yoktur.*

Teorem 8. *$PG(3,q)$ projektif uzayının toplam q^3+q^2+q+1 tane noktası vardır.*

İspat. *N noktası uzayın herhangi bir noktası olsun. N noktasından q^2+q+1 tane doğru geçer ve her doğru üzerinde N noktası hariç q tane nokta vardır. Buradan toplam*

$$\begin{aligned} |\mathcal{N}| &= (q^2+q+1)q+1 \\ |\mathcal{N}| &= q^3+q^2+q+1 \end{aligned}$$

tane nokta vardır.

Teorem 9. *$PG(3,q)$ projektif uzayında her nokta tam olarak q^2+q+1 düzlem üzerindedir.*

İspat. *Projektif uzayın herhangi bir noktası N olsun. N noktasından toplam q^2+q+1 tane doğru geçer. Her doğru ayrı bir düzlem belirttiğinden dolayı N noktası q^2+q+1 düzlem üzerindedir.*

Teorem 10. *$PG(3,q)$ projektif uzayında herhangi bir doğru tam olarak $q+1$ düzlem üzerindedir.*

İspat. *Projektif uzayın herhangi bir düzlemi α ve bu düzlemin bir doğrusu da d doğrusu olsun. d doğrusu üzerinde $q+1$ tane nokta vardır ve doğru üzerinde olmayan ama düzlemin* *noktası olan q^2 tane nokta vardır. Her q^2 tane nokta ile d doğrusu bir düzlem belirtir. Uzayda toplam $q^3 + q^2 + q + 1$ tane nokta olduğundan, her doğru üzerinde*

$$\frac{(q^3 + q^2 + q + 1) - (q + 1)}{q^2} = q + 1$$

tane farklı düzlem vardır.

Teorem 11. *$PG(3, q)$ projektif uzayının toplam $q^3 + q^2 + q + 1$ tane düzlem vardır.*

İspat. *α herhangi bir projektif düzlem olsun. Projektif düzlem üzerinde $q^2 + q + 1$ tane doğru vardır ve uzayın her doğrusu üzerinde $q + 1$ tane düzlem vardır. α düzlemi hariç düzlemin her doğrusu q tane düzlem üzerindedir. Buradan toplam düzlem sayısı*

$$\begin{gathered}(q^2 + q + 1)q + 1 \\ q^3 + q^2 + q + 1\end{gathered}$$

olarak bulunur.

Teorem 12. *$PG(3, q)$ projektif uzayında herhangi iki düzlem tam olarak $q+1$ noktada kesişir.*

İspat. *Projektif uzayda herhangi iki düzlem bir doğru boyunca kesişmek zorundadır ve bir doğru üzerinde de $q+1$ nokta olduğundan buradan herhangi iki düzlem $q+1$ nokta boyunca kesişir denir.*

Teorem 13. *$PG(3, q)$ projektif uzayında toplam $(q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$ tane doğru vardır.*

İspat. *α projektif düzlem olsun. α üzerinde $q^2 + q + 1$ nokta ve doğru vardır. α düzleminden herhangi bir N noktası alalım. N noktasından toplam $q^2 + q + 1$ tane doğru geçer fakat projektif düzlemde bir noktadan $q + 1$ tane doğru geçer. O halde bu doğrulardan q^2 tanesi düzlemi bir noktada kesen doğrulardır. Düzlemde toplam $q^2 + q + 1$ nokta olduğundan $(q^2 + q + 1)q^2$ tane doğru eder. Bunun dışında birde düzlemde $q^2 + q + 1$ tane doğru olduğundan uzayda toplam*

$$\begin{gathered}(q^2 + q + 1)q^2 + (q^2 + q + 1) \\ (q^2 + 1)(q^2 + q + 1)\end{gathered}$$

tane doğru vardır.

Teorem 14. *$PG(3, q)$ uzayında düzlemdeş herhangi dört farklı*

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4), \;\; B(y_1, y_2, y_3, y_4), \;\; C(z_1, z_2, z_3, z_4) \;\; \textit{ve} \;\; D(w_1, w_2, w_3, w_4)$$

noktaları için

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix} = 0$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $\pi[u_1, u_2, u_3, u_4]$ *düzlemi* A, B, C *ve* D *noktalarının üzerinde bulunduğu düzlem olsun.* $A \circ \pi$, $B \circ \pi$, $C \circ \pi$ *ve* $D \circ \pi$ *bağıntısından*

$$\begin{cases} x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4 = 0 \\ y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3 + y_4u_4 = 0 \\ z_1u_1 + z_2u_2 + z_3u_3 + z_4u_4 = 0 \\ w_1u_1 + w_2u_2 + w_3u_3 + w_4u_4 = 0 \end{cases}$$

homojen denklem sistemi elde edilir ve bu denklem sisteminin katsayılar matrisi

$$\Delta = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{pmatrix}$$

olur. $\det(\Delta) \neq 0$ *iken bu denklem sisteminin tek çözümü vardır, o da aşikar çözümdür. Buradan* $[u_1, u_2, u_3, u_4] = [0, 0, 0, 0]$ *olur. Fakat bu* $[u_1, u_2, u_3, u_4] \neq [0, 0, 0, 0]$ *olması ile çelişir, o halde* $\det(\Delta) \neq 0$ *olamaz. Bu matrisin sıfırdan farklı çözümünün olması için*

$$\det(\Delta) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix} = 0$$

yani $\det(\Delta) = 0$ *olmalıdır.*

Tanım 12. $PG(3, K)$ *uzayının herhangi bir noktası* (a_1, a_2, a_3, a_4) *ve bu noktadan geçen vektör de* v *ise bu koordinatlara sahip nokta* $P(v)$ *sembolü ile gösterilir.*

Tanım 13. $PG(3, K)$ *uzayında* $(i = 1,2, \ldots, m)$ *için* $P_i(v_i)$ *noktaları lineer bağımlı ise* v_i *vektörü lineer bağımlı,* $P_i(v_i)$ *noktaları lineer bağımsız ise* v_i *vektörü lineer bağımsızdır.*

Tanım 14. P_1, P_2, ... , P_m *noktaları lineer bağımlı ise*

$$\sum_{i=1}^{m} c_i P_i(v_i) = 0$$

eşitliğindeki c_i *lerden en az bir tanesi sıfırdan farklı olmalıdır, bu* c_1 *ise*

$$P_1 = \frac{-1}{c_1}(c_2P_2 + c_3P_3 + \ \ldots \ + c_mP_m)$$

eşitliği elde edilir, yani P_1 *noktası* P_2, P_3, ... , P_m *noktalarının lineer bileşimi olarak yazılır.*

Teorem 15. *Projektif 3- uzayda aynı düzlemde olan herhangi iki nokta lineer bağımlı ise çakışıktır.*

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \lambda(y_1, y_2, y_3, y_4) \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\equiv (y_1, y_2, y_3, y_4)\end{aligned}$$

İspat. *P ve Q uzayın herhangi iki noktası olsun. P ve Q lineer bağımlı ise c_1 ve c_2 vardır öyle ki $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ olur.*

$$c_1P + c_2Q = 0$$

(i) *$c_1 = 0$ ise*

$$\begin{aligned}c_1P + c_2Q &= 0 \\ c_2Q &= 0\end{aligned}$$

olur ve $c_2 \neq 0$ olması gerektiğinden buradan $Q = (0, 0, 0)$ olur. Fakat bu bir çelişki oluşturur çünkü $Q \neq (0, 0, 0)$ olmalıdır.

(ii) *$c_2 = 0$ ise*

$$\begin{aligned}c_1P + c_2Q &= 0 \\ c_1P &= 0\end{aligned}$$

olur ve $c_1 \neq 0$ olması gerektiğinden buradan $P = (0, 0, 0)$ olur. Fakat bu bir çelişki oluşturur çünkü $P \neq (0, 0, 0)$ olmalıdır.

(iii) *O halde $c_1 \neq 0$ ve $c_2 \neq 0$ olmalıdır.*

$$c_1P + c_2Q = 0$$

$$P = -\frac{c_2}{c_1}Q$$

olur. Bu da P ve Q noktalarının çakıştığı anlamına gelir.

$$c_1 \neq 0 \;\; \textit{ve} \;\; c_2 \neq 0$$

$$c_1P = c_2Q$$

eşitliği sağlanır ve P, Q noktaları lineer bağımlıdır.

Teorem 16. *Projektif 3- uzayda dört nokta lineer bağımlı ise bu noktalar düzlemdeştir.*

İspat. *Uzayın herhangi dört noktası*

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4), \;\; B(y_1, y_2, y_3, y_4), \;\; C(z_1, z_2, z_3, z_4) \;\; \textit{ve} \;\; D(w_1, w_2, w_3, w_4)$$

olsun. Bu noktalar lineer bağımlı ise $(c_1, c_2, c_3, c_4) \neq (0, 0, 0, 0)$ olmak üzere c_1, c_2, c_3, c_4 vardır öyle ki

$$c_1A + c_2B + c_3C + c_4D = 0$$

eşitliği sağlanır.

$$c_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + c_2(y_1, y_2, y_3, y_4) + c_3(z_1, z_2, z_3, z_4)\ + c_4(w_1, w_2, w_3, w_4) = 0$$

ve

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2y_1 + c_3z_1 + c_4w_1 = 0 \\ c_1x_2 + c_2y_2 + c_3z_2 + c_4w_2 = 0 \\ c_1x_3 + c_2y_3 + c_3z_3 + c_4w_3 = 0 \\ c_1x_4 + c_2y_4 + c_3z_4 + c_4w_4 = 0 \end{cases}$$

homojen denklem sisteminde $(c_1, c_2, c_3, c_4) \neq (0, 0, 0, 0)$ *olduğundan sıfırdan farklı bir çözümünün olması için katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması gerekir. Yani*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & w_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & w_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & w_4 \end{vmatrix} = 0$$

olmalıdır. Determinant özelliklerinden bir matrisin determinantı ile transpozunun determinantı birbirine eşittir. Buna göre

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & w_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & w_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & w_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix} = 0$$

eşitliği bulunur.

Sonuç olarak $(c_1, c_2, c_3, c_4) \neq (0, 0, 0, 0)$ *olduğundan sistemin çözümü sıfırdan farklı olmalıdır ve buradan* $\det(\Delta) = 0$ *olur.* A, B, C, D *noktaları lineer bağımlı olduğundan dolayı bu noktalar düzlemdeştir.*

Teorem 17. *Projektif 3- uzayda aynı düzlemde olmak şartıyla herhangi beş nokta lineer bağımlıdır.*

İspat. *Uzayın herhangi beş noktası*

$$A(a_1, a_2, a_3, a_4),\ \ B(b_1, b_2, b_3, b_4),\ \ C(c_1, c_2, c_3, c_4),\ \ D(d_1, d_2, d_3, d_4) \text{ ve } E(e_1, e_2, e_3, e_4)$$

olsun. Bu beş nokta lineer bağımlı olduğundan

$$aA + bB + cC + dD + eE = 0$$

$$a(a_1, a_2, a_3, a_4) + b(b_1, b_2, b_3, b_4) + c(c_1, c_2, c_3, c_4) + d(d_1, d_2, d_3, d_4) + e(e_1, e_2, e_3, e_4) = 0$$

ve

$$\begin{cases} aa_1 + bb_1 + cc_1 + dd_1 + ee_1 = 0 \\ aa_2 + bb_2 + cc_2 + dd_2 + ee_2 = 0 \\ aa_3 + bb_3 + cc_3 + dd_3 + ee_3 = 0 \\ aa_4 + bb_4 + cc_4 + dd_4 + ee_4 = 0 \end{cases}$$

homojen denklem sisteminde 5 bilinmeyenli 4 denklem ($5 > 4$) olduğundan A, B, C, D, E noktaları lineer bağımlıdır.

Teorem 18. *Projektif 3- uzayda P_1, P_2, ... , P_m, P_{m+1} lineer bağımlı iken P_1, P_2, ... , P_m lineer bağımsız ise noktaların koordinatları*

$$P_1 + P_2 + ... + P_m = P_{m+1}$$

olarak seçilebilir.

İspat. *P_1, P_2, ... , P_m, P_{m+1} lineer bağımlı ise $(c_1, c_2, ... , c_m, c_{m+1}) \neq (0, 0, ..., 0, 0)$ olmalıdır.*

$$c_1P_1(v_1) + c_2P_2(v_2) + ... + c_mP_m(v_m) + c_{m+1}P_{m+1}(v_{m+1}) = 0$$

ifadesinin lineer bağımlı olması için $\exists\ c_i \neq 0$ olması gerekir. Fakat P_1, P_2, ... , P_m lineer bağımsız olduğundan $c_{m+1} \neq 0$ olmalıdır. Aksi halde P_1, P_2, ... , P_m lineer bağımlı olur ve bu da hipotezle çelişir. Buradan

$$P_{m+1} = \frac{-1}{c_{m+1}}[c_1P_1(v_1) + c_2P_2(v_2) + ... + c_mP_m(v_m)] \qquad \textit{ve} \qquad k_i = \frac{-c_i}{c_{m+1}}$$

$$\begin{aligned} P_{m+1} &= k_1P_1(v_1) + k_2P_2(v_2) + ... + k_mP_m(v_m) \\ P_{m+1} &= P_1(k_1v_1) + P_2(k_2v_2) + ... + P_m(k_mv_m) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $P_{m+1} = P_1 + P_2 + ... + P_m$ lineer bileşimi şeklinde yazılabilir.

Teorem 19. *Projektif 3 uzayda herhangi farklı üç A, B, C noktası tarafından oluşturulan düzlem üzerinden herhangi bir D noktası alalım. Bu D noktası A, B, C noktalarının lineer bileşimidir.*

İspat. *A, B, C, D noktaları düzlemdeş olduklarından teorem gereği lineer bağımlıdırlar ve $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$ olmak şartıyla*

$$aA + bB + cC + dD = 0$$

denklemi yazılır.

(i) $d = 0$ *ise*

$$aA + bB + cC = 0$$

olur ve $a = b = c = 0$ *iken* A, B, C *lineer bağımsız olup lineer bağımlı olmaları ile çelişir. O halde* $d \neq 0$ *olmalıdır.*

(ii) $d \neq 0$ *ise*

$$aA + bB + cC + dD = 0$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{-1}{d}[aA + bB + cC] \\ D &= (\frac{-a}{d})A + (\frac{-b}{d})B + (\frac{-c}{d})C \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir, yani D *noktası* A, B, C *noktalarının lineer bileşimidir.*

3. K-ARK VE OVALLER

Bu bölümde (DiLesio, 2009), (Al-Mukhtar, 2011b) ve (Hirschfeld, 1979) esas alınarak k-ark ve ovaller incelenmiştir.

Tanım 15. *Herhangi bir projektif düzlemde en çok* n *nokta bulunduran, herhangi üçü doğrudaş olmayan* k *elemanlı noktalar kümesine* $(k, n) - ark$ *denir.* $n \geq 3$ *olmak şartıyla* $(k, n) - ark$*ın derecesi* n *dir. (Al-Mukhtar,2011)*

Tanım 16. $PG(2, q)$ *projektif düzlemde*

(i) *Herhangi üç noktası doğrudaş olmayan* $q + 1$ *noktalar kümesine* $oval$ *denir.*

(ii) *Herhangi üç noktası doğrudaş olmayan* $q + 2$ *noktalar kümesine* $hiperoval$ *denir.*

Tanım 17. $PG(2, q)$ *projektif düzleminde*

(i) *Herhangi bir doğru* $k - ark$ *ı hiç bir noktada kesmiyorsa buna* ***0 - kesen, kesmeyen*** *veya* ***passant doğrusu*** *denir.*

(ii) *Herhangi bir doğru* $k - ark$ *ı tam olarak bir noktada kesiyorsa bu doğruya* ***teğet*** *denir.*

(iii) *Herhangi bir doğru* $k - ark$ *ı tam olarak iki noktada kesiyorsa bu doğruya* ***kesen*** *adı verilir.*

Teorem 20. P *noktası* $k - ark$ *üzerinde herhangi bir nokta olsun.* P *noktasından geçen teğetlerin sayısı* $\tau(P)$ *ile gösterilir ve*

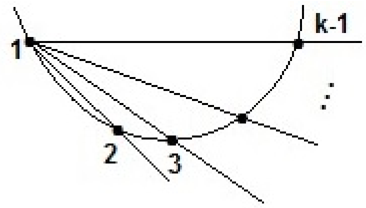
$$\tau(P) = q + 2 - k = t$$

eşitliğinde $k - ark$ ***oval*** *ise* $k = q + 1$*,* ***hiperoval*** *ise* $k = q + 2$ *yazılarak bulunur.*

İspat. P *noktası* $k - ark$ *üzerinde olsun.* P *noktasından geçen* $k - 1$ *kesen vardır ve* P *noktası* $q + 1$ *doğru üzerindedir. Buradan* P *noktasından geçen teğet sayısı*

$$\begin{aligned} \tau(P) &= (q + 1) - (k - 1) \\ \tau(P) &= q + 2 - k = t \end{aligned}$$

olarak bulunur.



Şekil 3.1 k-Ark Üzerindeki Noktalar

Örnek 3. *5. mertebeden projektif düzlemin ovalinin herhangi bir noktası P olsun. Bu noktadan geçen teğet sayısını bulalım.*

Tanımdan projektif düzlemin ovalinin herhangi üçü doğrudaş olmayan $q+1$ noktası olduğu için 5. mertededen ovalin 6 noktası vardır ve $k=6$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} \tau(P) &= q+2-k \\ \tau(P) &= 5+2-6 \\ \tau(P) &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece 5. mertebeden ovalin herhangi bir noktasından geçen teğet sayısı bir olarak bulunur.

Tanım 18. *$k-ark$ üzerinde olmayan herhangi bir Q noktası alalım. Bu noktadan geçen teğet sayısı $\sigma_1(Q)$ ve kesen sayısıda $\sigma_2(Q)$ ile gösterilir. (Hirschfeld,1979)*

Teorem 21. *$k-ark$ üzerinde olmayan herhangi bir Q noktası için*

$$\sigma_1(Q)+2\sigma_2(Q)=k$$

eşitliği geçerlidir. (Hirschfeld,1979)

Teorem 22. *$PG(2,q)$ uzayında O bir oval ve q tek olsun. Bu durumda*

$$\sigma_1(Q)+2\sigma_2(Q)=k$$

eşitliğinden dolayı ovalin her noktasından ya hiç teğet geçmez ya da 2 teğet geçer.

İspat. *Ovalin üzerinde $q+1$ nokta vardır ve q tek sayı olduğundan $q+1$ çifttir. l ovalin bir teğeti, P noktası bu teğetin üzerinde ve Q da P den farklı bir nokta olsun.*

$$\begin{aligned} \sigma_1(Q)+2\sigma_2(Q) &= k \\ \sigma_1(Q)+2\sigma_2(Q) &= q+1 \end{aligned}$$

denkleminde $2\sigma_2(Q)$ ve $q+1$ çift olduğundan $\sigma_1(Q)$ de çift olur. l teğeti Q noktasından geçtiğine göre $\sigma_1(Q)\geq 2$ dir. Q noktası l üzerinde q farklı şekilde seçilebilir ve O ovalinin *tam olarak $q+1$ teğeti vardır. Buradan her Q noktası için $\sigma_1(Q) = 2$ olur. Sonuç olarak ovalin üzerindeki noktaların her birinden ya teğet geçmez ya da iki teğet geçer.*

Teorem 23. *$PG(2,q)$ uzayında $k-ark$ ın teğet sayısı τ_1, kesen sayısı τ_2 ve uzayın passant doğru sayısı τ_0 ile gösterilmek üzere*

***1)** Toplam teğet sayısı $\tau_1 = kt$,*

***2)**Toplam kesen sayısı $\tau_2 = \frac{k(k-1)}{2}$,*

***3)**Passant doğru sayısı $\tau_0 = \frac{q(q-1)}{2} + \frac{t(t-1)}{2}$*
eşitlikleri geçerlidir. (t = bir noktadan geçen teğet sayısı)

Örnek 4. *5. mertebeden projektif düzlemin toplam teğet, kesen ve passant doğru sayısını bulunuz.*

Ovalin toplam 6 noktası vardır ve $k = 6$ olur.

$$\tau_1 = kt$$
$$\tau_1 = 6.1 \text{ ve } \tau_1 = 6$$

olup toplam teğet sayısı 6 olarak bulunur.

$$\tau_2 = \frac{k(k-1)}{2}$$

$$\tau_2 = \frac{6.5}{2} \quad \text{ve} \quad \tau_2 = 15$$

olup toplam kesen sayısı 15 olarak bulunur.

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{q(q-1)}{2} + \frac{t(t-1)}{2} \\ &= \frac{5.4}{2} + \frac{1.0}{2} \\ &= 10 \end{aligned}$$

olup toplam passant doğrusu 10 olarak bulunur.

4. SONLU MERTEBEDEN BAZI PROJEKTİF DÜZLEMLER

Bu bölümde (Akpınar, 2005) esas alınarak n. mertebeden sonlu projektif düzlemler incelenmiştir.

4.1 Giriş

Tanım 19. *$\mathcal{N}$ noktalar kümesi, $\mathcal{D}$ doğrular kümesi ve $\circ$ da üzerinde bulunma bağıntısı olmak üzere $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ üçlüsü bir geometrik yapıdır. Bu geometrik yapı*

***(P1)** Herhangi farklı iki noktadan bir doğru geçer.*

***(P2)** Herhangi iki doğrunun en az bir ortak noktası vardır.*

***(P3)** Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.*
*aksiyomlarını sağlıyorsa $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ geometrik yapısına bir **projektif düzlem** denir ve $\mathcal{P}$ ile gösterilir. $\mathcal{N}$ sonlu ise $\mathcal{P}$ sonlu projektif düzlemdir.*

$\mathcal{P}$ projektif düzlemin bir doğrusu üzerindeki nokta sayısının bir eksiğine $\mathcal{P}$ nin **mertebesi** denir. Projektif düzlemin en küçük mertebesi 2 dir ve bu projektif düzleme **Fano düzlemi** denir. $n \geq 2$ olan her tamsayı için mertebesi n olan bir projektif düzlemin varlığı açık değildir. **Tarry** mertebesi 6 olan 43 noktalı bir projektif düzlemin var olmadığını göstermiştir. Bilinen sonlu projektif düzlemlerin mertebeleri p^r şeklindedir, p asal ve r pozitif tamsayıdır. Mertebelerin sadece p^r şeklinde olup olmadığı henüz bilinmemektedir. Hangi mertebeden projektif düzlemlerin var olduğu varsa bunların geometrik yapısının nasıl olacağı henüz cevaplandırılmamış önemli bir problemdir.

Bruck-Ryser bu probleme kısmen cevap vermiştir.

$$n \ , \ n \equiv 1 \ (mod4) \text{ ya da } n \equiv 2 \ (mod4)$$

olmak şartıyla n pozitif iki tamsayının kareleri toplamı

$$n^2 = p^2 + r^2$$

olarak yazılamıyorsa mertebesi n olan bir projektif düzlem yoktur. Bruck-Ryser teoremine göre

$$6, 14, 21, 30, 33, 38, 42, 46, 54, 57, ...$$

gibi sonsuz çokluktaki sayıların hiçbiri bir projektif düzlemin mertebesi olamaz.

$$10, 12, 15, 18, 20, 24, 26, 28, 34, 35, 36, 40, ...$$

gibi sayılar için olup olmadığı bilinmemektedir. Bu sayılar için Bruck-Ryser teoremi yetersiz kalmaktadır.

Nokta ve doğruları bir F cisminin elemanları ile homojen olarak koordinatlanan projektif düzlemler bilinen en iyi projektif düzlem örnekleridir ve bu düzlemler $\mathcal{P}_2F$ cisim düzlemleri olarak adlandırılır. F cisminin ve $\mathcal{P}_2F$ projektif düzleminin mertebeleri eşittir. p^r mertebeli $GF(p^r)$ galois cisimlerinin varlığı p^r mertebeli cisim düzlemlerinin varlığını garanti etmektedir. Böylece

$$2, 3, 2^2 = 4, 5, 7, 2^3 = 8, 3^2 = 9$$

mertebeli projektif düzlemlerin var olduğunu göstermek mümkündür.

2, 3, 4, 5, 7 ve 8. mertebeden tek projektif düzlem, 9. mertebeden dört farklı projektif düzlemin olduğu bulunmuştur. 2, 3, 4, 5, 7, 8. mertebeden projektif düzlemler ve 9. mertebeden projektif düzlemlerden bir tanesi cisim düzlemidir.

4.2 İkinci ve Üçüncü Mertebeden Projektif Düzlemler

2. ve 3. mertebeden projektif düzlemlerin kuruluşları diğer mertebeler arasında en kolay olanlarıdır. Bu iki projektif düzlemin tekliğinin ispatı düzlemin elde ediliş yöntemine dayanır. 2. mertebeden projektif düzlemin tekliğini inceleyelim. Mertebesi 2 olduğundan $n^2 + n + 1$ formülünden dolayı 7 noktalı ve 7 doğrulu bir yapı olması gerekir.

Örnek 5. *Noktalar kümesini* $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ *olarak alalım.*

Projektif düzlemin aksiyomlarını sağlayacak şekilde doğrularını belirleyelim. Öncelikle (1) *noktasından geçen doğrularını*

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 6, 7\}$$

olarak alalım. (2) *noktasından geçen doğrular*

$$\{2, 4, 7\}, \{2, 5, 6\}$$

olarak seçelim. Bu iki doğruyu (1) *den geçen diğer üç doğru ile kesişmesine dikkat ederek seçtik.* (3) *ile* (5) *noktalarını birleştiren doğruya bakalım, aynı şekilde bu doğru da diğer doğrularla kesişmesi gerekir ve* $(P1)$ *aksiyomu gereği* (1) *ile* (6) *noktalarından geçemez. Bunu dikkate aldığımızda doğruyu*

$$\{3, 5, 7\}$$

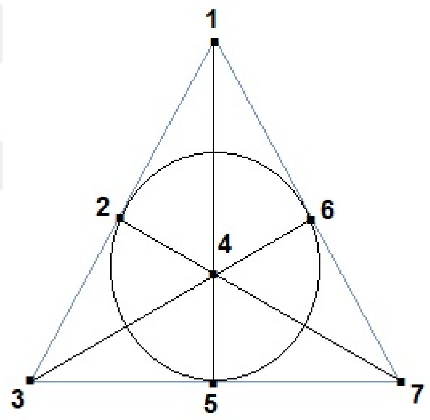
olarak buluruz. Aynı yöntemle (3) *ve* (4) *noktalarını birleştiren doğru da* (1) *ve* (7) *noktalarından geçemeyeceği için*

$$\{3, 4, 6\}$$

olmak zorundadır. Böylece doğrular kümesi

$$D = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 6, 7\}, \{2, 4, 7\}, \{2, 5, 6\}, \{3, 5, 7\}, \{3, 4, 6\}\}$$

olarak bulunur. Elde ediliş yönteminden dolayı bu projektif düzlem tektir.



Şekil 4.1 Fano Düzlemi

Benzer yolla 3. mertebeden projektif düzlemin de tek olduğu gösterilir.

4.3 Dördüncü ve Beşinci Mertebeden Projektif Düzlemler

Mertebe büyüdükçe projektif düzlemi kurmak ve tekliğini göstermek zorlaşmaktadır. Bu yüzden farklı yöntem ve kavramların kullanılmasına ihtiyaç duyulmuştur. Bu kavramlardan bazıları dördüncü ve beşinci mertebeden projektif düzlemlerin tekliğinin ispatında kullanılan projektif düzlemlerin **oval** ve **hiperovalleridir.**

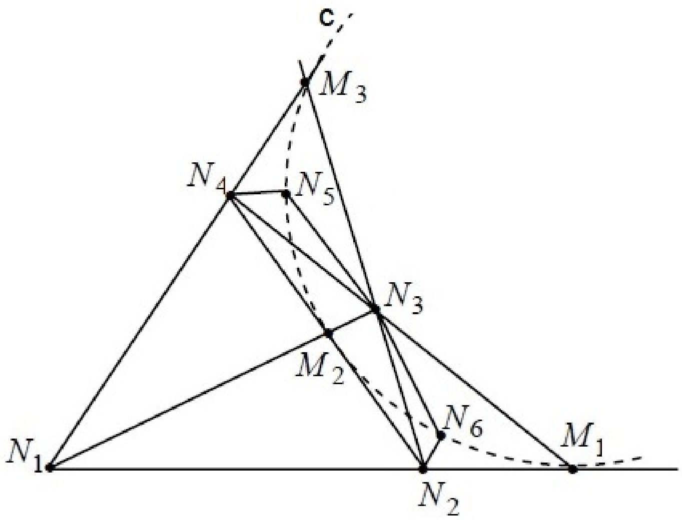
n. mertebeden projektif düzlemde herhangi üçü doğrudaş olmayan $(n+1)$ nokta kümesine **oval**, $(n+2)$ nokta kümesine **hiperoval** denir. 4. mertebeden projektif düzlemlerin tekliğini göstermek için hiperovallerden, 5. mertebeden projektif düzlemlerin tekliğini göstermek için ovallerden yararlanılmıştır.

4.3.1 Dördüncü Mertebeden Projektif Düzlemler

π, 4. mertebeden bir projektif düzlem olsun. π düzleminin her doğrusunun 5 noktası vardır. Hiperovalin noktalar kümesi herhangi üçü doğrudaş olmayan toplam 6 noktadan oluşur. π düzleminde P3 aksiyomu gereği bu özellikte dört nokta vardır. Bu dört nokta N_1, N_2, N_3, N_4 olsun. $i \neq j$ ve $i, j \in \{1,2,3,4\}$ olmak üzere N_i ve N_j noktalarından geçen tek doğru $d_{i,j}$ olsun.

$$\begin{aligned} d_{1,2} \cap d_{3,4} &= M_1 \\ d_{1,3} \cap d_{2,4} &= M_2 \\ d_{1,4} \cap d_{2,3} &= M_3 \end{aligned}$$

olarak isimlendirelim. Başlangıçta π düzleminin 6 doğrusu ve 4 tane N, 3 tane M tipinde olmak üzere 7 noktası vardır. Bu konumda 6 doğrunun her birinin üzerinde 3 nokta bulunduğundan bu doğruların her biri üzerinde 2 farklı nokta daha alınarak $6.2 = 12$ nokta daha ilave edilir. Böylece düzlemin 19 noktası elde edilmiş olur. Düzlemin toplam nokta sayısı $4^2 + 4 + 1 = 21$ olduğundan iki nokta daha elde etmemiz gerekir.



Şekil 4.2 4. mertebeden projektif düzlem için bir baz

Bu durumda M_1, M_2, M_3 noktalarının doğrudaş olması gerekir. Aksi halde $i \neq j$ ve $i, j \in \{1, 2, 3\}$ olmak üzere M_iM_j doğrularının her biri π projektif düzleminin 6 doğru üzerinde olmayan birer noktasını kapsar. Bu durumda 3 yeni nokta elde etmiş oluruz ve düzlemin toplam nokta sayısı 22 olur. Bu da bir çelişki olduğundan M_1, M_2, M_3 noktalarının doğrudaş olması gerekir. Ayrıca bir uzayı üreten bağımsız herhangi bir alt kümesi olan bazdan yararlanılmıştır.

M_1, M_2, M_3 noktalarından geçen doğru c doğrusu olsun. c doğrusu, N_1N_2 ve N_3N_4 doğrularını M_1 noktasında, N_1N_3 ve N_2N_4 doğrularını M_2 noktasında, N_1N_4 ve N_2N_3 doğrularını M_3 noktasında kestiğine göre c doğrusunun iki noktası daha vardır ve bu noktalar N_5 ve N_6 noktaları olsun. Diğer doğruların nokta sayısı tam olduğundan bu noktalar diğer doğrular üzerinde olamaz. Böylece π düzleminin $19 + 2 = 21$ noktası bulunmuş olur.

Problemimizi sonlandırmak için geriye kalan doğruları belirlemek gerekir.

$$H = \{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6\}$$

kümesindeki herhangi üç nokta doğrudaş olmadığından H kümesi π projektif düzleminin bir hiperovali olur. π nin her doğrusu H hiperovalini ya iki noktada keser ya da hiç kesmez. Çünkü N_5 veya N_6 noktalarından geçen N_5N_6 doğrusundan farklı bir doğru geri kalan 6 doğruyu N_1, N_2, N_3, N_4 noktalarından başka bir noktada keserse bu doğru 7 noktalı bir doğru olur ki bu da π düzleminin her doğrusunun 5 noktalı olması ile çelişir. H hiperovalinin geri kalan N_1, N_2, N_3, N_4 noktalarının herhangi birinden geçen bir doğru c doğrusunu bir noktada keser. Bu nokta; M_1, M_2, M_3 noktalarından biri olamayacağına göre N_5 ya da N_6 olmak zorundadır. Dolayısıyla H hiperovalini bir noktada kesen doğru yoktur. Hiperoval tanımı gereği H yi iki noktadan fazla noktada kesen bir doğru olamaz. Sonuç olarak π projektif düzleminin her doğrusu H hiperovalini ya iki noktada keser ya da hiç kesmez.

Bu durumda H hiperovali yardımıyla π düzleminin noktaları ve doğruları belirlenir. R, π düzleminin H hiperovalinde olmayan bir noktası olsun. R üzerinde H ile kesişen üç doğru vardır. Bu doğrular üç ikiliyle H nin parçalanışını belirtir (Parçalanış, 6 elemanlı bir kümenin üç ikiliye ayrılmasıdır). Bu üç ikiliyle H hiperovalinin 6 noktasının 15 parçalanışlı $15R$ noktası tanımlanabilir. Böylece düzlemin $6 + 15 = 21$ noktası bulunmuş olur ki bu da toplam nokta sayısıdır. Dolayısıyla noktalar kümesi tanımlanmış olur.

Düzlemin geri kalan doğruları için π düzleminin H yi iki noktada kesen

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{4!2!} = 15$$

tane doğrusu H nin içerdiği nokta çiftleri ile de belirtilebilir. Geriye H yi hiçbir noktada kesmeyen 6 doğru kalıyor. H hiperovalinin üç ikili şeklindeki her bir parçalanışı bir R noktası belirtir ve bu şekilde bulunan 5 nokta düzlemin yeni bir doğrusunu verir. Bu tür toplam 6 doğru vardır öyle ki her bir doğru H hiperovalinin bir faktorizasyonu olarak adlandırılan 5 parçalanışın bir kümesi olarak da ifade edilebilir.

H hiperovalinin tam olarak 6 faktorizasyonu vardır. Bu aynı zamanda H yi hiçbir noktada kesmeyen 6 doğruyu ve bu doğrular üzerindeki noktaları verir. H yi 2 noktada kesen 15 doğru ve üzerindeki noktalarda kolayca belirlenir. Sonuç olarak π projektif düzleminin toplam 21 noktası ve 21 doğrusu belirlenirken her bir aşama tek türlü belirlenebilir, yani π düzlemi tektir.

4.3.2 Beşinci Mertebeden Projektif Düzlemler

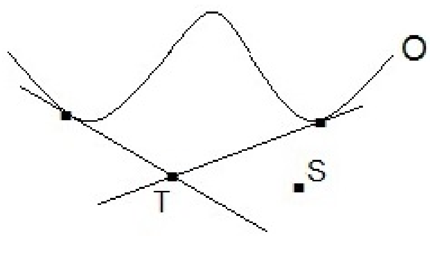
5. mertebeden projektif düzlemin tekliğini göstermek için projektif düzlemin herhangi bir ovalinden yararlanılır. Her oval üzerinde toplam 6 nokta vardır. Projektif düzlem $\mathcal{P}$ ve ovallerinden herhangi biri de O ile temsil edilsin. $\mathcal{P}$ düzleminin toplam 31 doğrusu vardır. Bu doğruların 6 tanesi ovali bir noktada kesen **teğet** doğruları, 15 tanesi oval ile iki ortak noktaya sahip **kesen** doğruları ve 10 tanesi de ovali hiç bir noktada kesmeyen **passant** doğrularıdır. i çift olmak şartıyla $\mathcal{P}$ düzleminin O da kapsanmayan 25 noktasının i teğet üzerinde olanlarının sayısı $n(i)$ olsun. O halde

$$\sum n(i)i = n(n+1)$$

formülünden

$$n(i)i = 6.5 = 30$$

olarak bulunur. Buradan $n(2) = 15$ olur ve her teğet doğru çifti farklı noktalarda kesişir, bu noktalara **teğetsi nokta** denir. Bu tip noktalar T ile gösterilsin. $\mathcal{P}$ nin geriye kalan 10 noktası hiçbir teğet üzerinde değildir. Dolayısıyla bu 10 nokta O ovalinin 3 keseninin arakesitidir ve bir parçalanış tanımlar. Böyle noktaları belirlemek için de S harfi kullanılsın. **SYN:** S tipli noktalarla belirlenen 10 parçalanışın bir kümesi olsun. Herhangi bir kesen O üzerinde 2 teğeti



Şekil 4.3 Teğetsi Noktalar

keser ve geriye kalan 4 teğeti de 2 tane T tipli noktada keser. Böylece kesenler üzerinde geriye kalan 2 nokta S tipli noktadır. Buradan her çiftin SYN de iki kez ortaya çıktığı görülür. Her bir T tipli noktadan geçen 6 doğrunun 2 tanesi teğet, 2 tanesi kesen ve kalan 2 tanesi passant doğrudur.

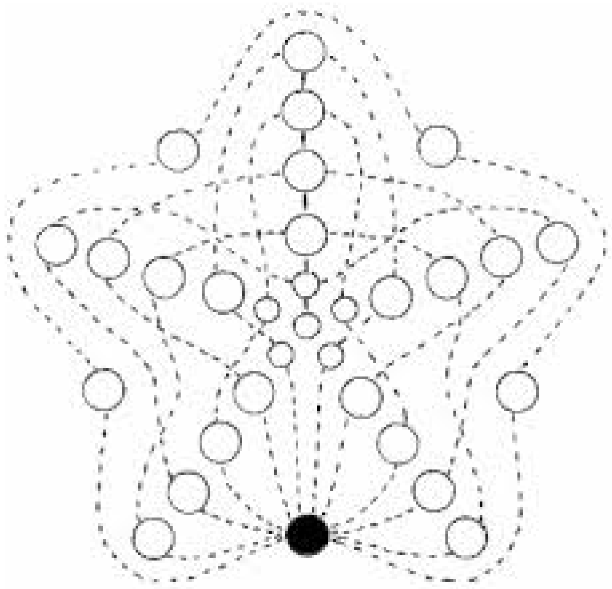
3 taneden fazla T tipli nokta kapsayan bir passant doğrusu bir teğet doğrusu ile çakışacağından hiçbir passant doğrusu 3 taneden fazla T tipli nokta kapsamaz. Böylece 10 passant doğrusunun her biri tam olarak 3 tane T tipli nokta kapsar ve bu yüzden geriye kalan 3 tanesi S tipinde noktalardır. T tipli noktalar O ovalindeki çiftlere karşılık geldiğinden her bir passant doğrusu kendisinin 3 ayrık çifti olan T tipli noktalar ile belirlenir.

Burada 15 parçalanmış ve her birine karşılık gelen 3 farklı T tipli nokta vardır. Böyle elde edilen 10 parçalanışın kümesi SYN^I olsun ve $SYN = SYN^I$ olur. Gerçekten de $(AB)(CD)(EF)$ parçalanışı SYN de olmayan bir parçalanış ise A ve B noktalarından geçen teğetlerin arakesitindeki T tipli nokta, CD ve EF kesenleri üzerinde bulunur. Hesaplamalar yardımıyla bu durumun C ve D içinde geçerli olduğu görülebilir. Böylece A ve B noktalarından geçen teğetlerin arakesitindeki T tipli nokta ile C ve D noktalarından geçen teğetlerin arakesitindeki T tipli noktayı birleştiren doğru E ve F noktalarından geçen teğetlerin arakesitindeki T tipli noktayı kapsamayan EF kesenidir. Bu yüzden $(AB)(CD)(EF)$ parçalanışı SYN^I da değildir. Dolayısıyla SYN kümesi SYN^I kümesini kapsar ve aynı sayıda elemana sahip olduklarından $SYN^I = SYN$ olur. Bu durum bize "AB, CD, EF kesenlerinin bir noktada kesişmesi için gerek ve yeter şart bunlara karşılık gelen T tipli 3 noktanın doğrudaş olmasıdır." sonucunu verir.

$\mathcal{P}$ düzleminin yapısını belirlemeyi tamamlamak için passant doğruları üzerindeki noktaları hesaplamak gereklidir. Bir l passant doğrusu üzerindeki T tipli nokta iki kesenin arakesiti olduğundan böyle üç nokta $3.2 = 6$ kesen ile l doğrusunun arakesitidir. Passant doğrusu, geriye kalan 9 keseni S tipli 3 noktada keser.

Sonuç olarak $\mathcal{P}$ düzlemi 6 elemanlı bir O kümesi üzerinde bir totalin seçimiyle tek şekilde bellidir. 6 elemanlı bir küme üzerinde var olan toplam 6 total de birbirine denk olduğundan $\mathcal{P}$ projektif düzlemi tektir.

Daha önce belirtildiği gibi 6. mertebeden bir projektif düzlemin olmadığını **G.Tarry** 1991 yılında göstermiştir. Ayrıca **Bruck-Ryser** teoreminin sonuçları da 6. mertebeden projektif düzlemin olmadığını söylemektedir.



Şekil 4.4 5. mertebeden projektif düzlem

4.4 Yedinci Mertebeden Projektif Düzlem

W.A.Pierce, 57 noktalı bir projektif düzlemde herhangi bir **Fano** yapısının bulunamayacağını gösterdi. **Marshall Hall, JR** bu sonuçtan hareketle 57 noktalı herhangi bir projektif düzlemin **Dezargsel** olduğunu ve dolayısıyla tek olduğunu gösterdi. Bu düzlemin tekliğinin gösterilmesi de, 2. ve 3. mertebeden projektif düzlemlerde olduğu gibi düzlemin elde ediliş yöntemine göre tektir. Her biri 4 noktadan oluşan 9 doğrulu bir yapı baz alınarak 7. mertebeden projektif düzlemin mümkün doğru tipleri belirlenmiştir. Bu doğru tiplerinin sayısı ve belli bir noktadan geçen doğru tiplerinin sayısı ile ilgili bulunan bağıntılardan projektif düzleme genişletilebilecek iki durum tespit edilmiştir. Bu durumlardan bir tanesi Fano yapısını kapsadığı için diğer durum göz önüne alınarak gösterilmiştir ve bu düzlem Dezargseldir.

4.5 Sekizinci Mertebeden Projektif Düzlemler

Teorik araştırmalarda sekiz ve daha büyük mertebeden var olan projektif düzlemleri kurmak ve tekliklerini göstermek zordur. Bu yüzden araştırmalar bilgisayar destekli ya da tamamen bilgisayara dayalı olarak yapılmıştır. Ancak bilgisayarlarda bir noktaya kadar cevap verebilmektedir.

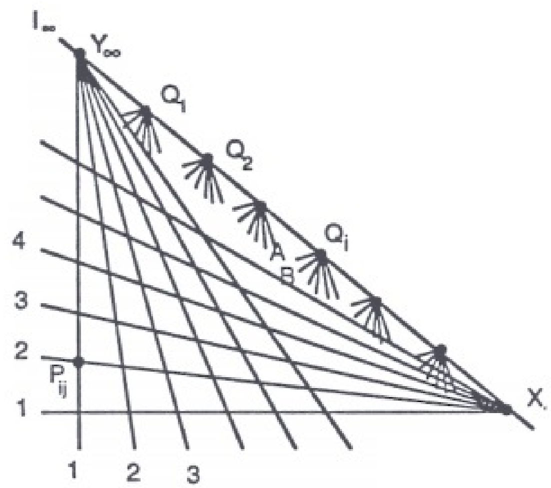
Tanım 20. *$n \geq 1$ olmak üzere $S = \{1, 2, 3, ..., n\}$ kümesi olsun. S kümesinin elemanları her satır ve sütunda bir kere yazılmak şartıyla oluşturulan $n \times n$ tipindeki matrislere **latin kare** denir.*

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & 3 & ... & n \\
2 & 3 & 4 & ... & 1 \\
3 & 4 & 5 & ... & 2 \\
\vdots & & & ... & \vdots \\
n & 1 & 2 & ... & n-1
\end{array}$$

$L = (a_{ij})$ ve $L^{'} = (a^{'}_{ij})$ iki latin kare olsun. L latin karesinin bir satırı sabit diğer her satırının yeri değiştirilerek oluşturulan $L^{'}$ matrisi elde edilir. Bu durumda L ve $L^{'}$ latin kareleri aralarında ortogonaldir.

Teorem 24. *n. mertebeden sonlu projektif düzlemin var olması için gerek ve yeter koşul $n \times n$ tipinde $n-1$ tane ortogonal latin karenin varolmasıdır.*

İspat. *Projektif düzlemde herhangi farklı iki nokta X_∞ ve Y_∞ olsun. Bu iki noktanın üzerinde olduğu doğru l_∞ olsun. Projektif düzlemde her doğru üzerinde $n+1$ nokta vardır. l_∞ doğrusu üzerindeki diğer noktalar Q_1, Q_2, Q_3...Q_{n-1} ve i. latin karenin karşılığı Q_i olsun. X_∞ ve X_∞ noktasından geçen doğrular ile Y_∞ ve Y_∞ noktasından geçen doğrular latin karenin satır ve sütunlarını oluştursun. X_∞ noktasından geçen doğrular i, Y_∞ noktasından geçen doğrular j ile gösterilirse P_{ij} bir latin kare olur. Bu yöntemle l_∞ üzerindeki her Q_i nokta ile $n-1$ tane latin kare elde edilir. Her Q_i noktası farklı olduğundan latin karelerin satır ve sütunlarındaki elemanlar yer değiştirir, yani ortogonaldir.*



Şekil 4.5 Projektif Düzlemde Latin Kareler

8. mertebeden projektif düzlemin tekliği, 7. mertebeden latin karelere dayanır. Hesapların teorik kaynaği ise ’n. mertebeden bir afin düzlemin var olması için gerek ve

yeter koşul n. mertebeden birbiriyle ortogonal olan $n-1$ elemanlı bir latin kare kümesinin var olmasıdır.' teoremine dayanır. **Norton**, 7. mertebeden 146 tane latin karelerin bir listesini yapmıştır. **Sade** bu listede bir eksik olduğunu bulmuş ve 147 latin karenin tam olduğunu göstermiştir. Toplam sayısı 147 olan bu 7. mertebeden latin kareler 8. mertebeden düzlem araştırmasının başlangıç noktasıdır. 8. mertebeden bir projektif düzlemin üçgen ve dörtgen sayıları üzerinden yapılan bir inceleme ile 147 latin kareden sadece 100 tanesinin kullanılmasının yeterli olacağı görülmüştür.

Bundan sonra yapılan iş latin karelerin tam düzleme genişletilmesidir. $[\infty]$ doğrusunun ve sonsuz noktalarının eklenmesiyle bir projektif düzleme genişletme basit olduğundan işlemlerin kolaylığı için 8. mertebeden bir afin düzlem incelenebilir. Teorik birkaç işlemden sonra bilgisayar yardımıyla yapılan düzleme genişletme de bilgisayara girdi olarak alınan 7. mertebeden 100 latin kareden sadece bir tanesi tam düzleme genişletilmiştir. Ancak bu kareyi düzleme genişleten dört farklı yoldan ikisi latin kareyi bir afin düzleme tamamlayamaz, diğer ikisi de izomorftur. Bu yüzden genişleme tektir ve 8. mertebeden tek bir afin düzlem elde edilir. Dolayısıyla bu afin düzlemden 8. mertebeden tek bir projektif düzlem elde edilir.

4.6 Dokuzuncu Mertebeden Dört Farklı Projektif Düzlem

Dokuzuncu mertebeden dört farklı projektif düzlemin cebirsel yapıları, Dezarg düzlem, sol yaklaşık cisim düzlem, sağ yaklaşık cisim düzlem ve Hughes düzlemidir.

Noktalar kümesi

$$S = \{0, 1, 2, a, b, c, d, e, f\}$$

olsun ve S üzerindeki $\oplus$ işlemi $F = GF(9)$ cisminin toplama işlemi olsun.

$$b = a+1\ ,\ c = a+2\ ,\ d = a+a\ ,\ e = d+1\ ,\ f = d+2\ ,\ 1+2 = a+d = 0$$

$\otimes$	0	1	2	a	b	c	d	e	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	a	b	c	d	e	f
2	0	2	1	d	f	e	a	c	b
a	0	a	d	2	e	b	1	f	c
b	0	b	f	c	2	d	e	a	1
c	0	c	e	f	a	2	b	1	d
d	0	d	a	1	c	f	2	b	e
e	0	e	c	b	d	1	f	2	a
f	0	f	b	e	1	a	c	d	2

S üzerindeki $\otimes$ işlemi yukarıdaki gibi tanımlansın.

$(S, \oplus, \otimes)$ bir sağ yaklaşık cisimdir ve $S(9)$ ile gösterilir. Cebirsel yapısı 9. mertebeden bir sağ yaklaşık cisim olan projektif düzlem aşağıdaki gibi inşa edilir. $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ elemanları sırası ile noktalar ve doğrular kümesi, $\circ$ üzerinde bulunma bağıntısı olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \{[x,y,1] : x,y \in S\} \cup \{[1,x,0] : x \in S\} \cup \{[0,1,0]\} \\ \mathcal{D} &= \{\langle m,1,k\rangle : m,k \in S\} \cup \{\langle 1,0,k\rangle : k \in S\} \cup \{\langle 0,0,1\rangle\} \\ \circ &= [x,y,z] \circ \langle m,n,k\rangle \iff mx + yn + zk = 0 \end{aligned}$$

biçiminde belirtilen $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ bir projektif düzlemdir. $S(9)$ yardımıyla kurulan 9. mertebeden projektif düzlem $\mathcal{P} = \pi_s(9)$ ile gösterilir.

Her $x, y \in S(9)$ için $\star$ işlemi $x \star y$ yerine $y \star x$ olarak tanımlanırsa $(S, \oplus, \star)$ bir sol yaklaşık cisimdir. Bu sol yaklaşık cisim üzerine kurulan $\pi_s(9)$ un duali olup, farklı bir projektif düzlemdir. Bu projektif düzlem $\pi_s^d(9)$ ile gösterilir.

9. mertebeden diğer bir projektif düzlem ise düzlemsel halkası lineer olmayan, bu yüzden

$$\pi_s(9) \quad \text{ve} \quad \pi_s^d(9)$$

projektif düzlemlerinden farklı olan

$$\pi_H(9)$$

ile gösterilen Hughes düzlemidir.

p tek asal sayı ve r pozitif tamsayı olmak üzere $q = p^r$ olsun. Bu şekilde kurulan $F = GF(3^2)$ galois cismi olmak üzere $\mathcal{P}_2F$ cisim düzlemi, $\pi_s(9)$, $\pi_s^d(9)$ ve $\pi_H(9)$ düzlemleri 9. mertebeden bilinen projektif düzlemlerin tamamını oluşturmaktadır.

9. mertebeden projektif düzlemler üzerine **Lam** tarafından 8. mertebeden 243.657 izomorf olmayan Latin kare üzerinde çalışarak 9. mertebeden genel bir projektif düzlemin yapısını incelemiştir. Bilgisayarda meydana gelebilecek bir hatanın veya bilinmeyen bir donanım hatasının araştırmanın bir dalının kaybedilmesine yol açabileceğine ve bunun yeni bir düzlem oluşturabilecek tek yol olabilmesi olasılığına dikkat çekmiştir. Bu da bilgisayar programıyla elde edilen kesin kararları engellemektedir. Teorik araştırmalarla sonuçlar uyuştuğu için doğru olduğu ve 9. mertebeden başka düzlem olmadığı iddia edilmiştir.

Burada belirtelimki 10. mertebeden projektif düzlemin olup olmadığı sonucu henüz bulunamamıştır. Bu konuda Bruck-Ryser teoremi de yetersiz kalmaktadır. **Lam** büyük ölçüde ispatlamış ve böyle bir düzlemin olmadığını söylemiştir, ama tam bir sonuca ulaşılmamıştır.

Sonuç olarak mertebe büyüdükçe bilgisayarlara duyulan ihtiyaç artmıştır ve büyük mertebelerin tekliklerinin gösterilmesinde latin karelerden yararlanılmıştır.

5. SONLU PROJEKTİF DÜZLEMDE OVALLER

Bu bölümde (Segre, 1954) esas alınarak sonlu projektif düzlemde ovaller incelenmiştir.

β sonlu bir projektif düzlem olsun. Yani β, γ Galois cismi üzerinde iki boyutlu projektif uzaydır. p tek asal sayı , r pozitif tamsayı ve $q = p^r$ olmak üzere γ nın karakteristiği $p \neq 2$ olsun. β düzleminin her non-singuler koniği ve her doğrusu $q+1$ nokta içerir. Ayrıca β düzleminin herhangi bir ovali, herhangi üçü doğrudaş olmayan $q+1$ nokta içeren noktalar kümesidir.

β düzleminin herhangi bir ovali $\mathcal{C}$ ve B, $\mathcal{C}$ ovalinin keyfi bir noktası olsun. $\mathcal{C}$ ovali B noktasında bir teğet doğrusuna sahiptir. β nın doğrularının tekliği tanımından B noktasını içeren doğru $\mathcal{C}$ nin başka bir noktasını içermez. Bunun yanında $\mathcal{C}$ ovalini bir noktada kesen üçden fazla teğet yoktur.

Teorem 25. *$\mathcal{C}$ ovalinin her iç-teğet üçgeni ile dış-teğet üçgeni perspektiftir.*

Homojen koordinatlarda $A_1 = (1,0,0)$, $A_2 = (0,1,0)$, $A_3 = (0,0,1)$ referans üçgenini $\mathcal{C}$ nin içteğet üçgeni olarak almak genelliği bozmaz. Dışteğet üçgeninin kenarları a_1, a_2, a_3 olmak üzere

$$(x_1, x_2, x_3) \equiv \lambda(x_1, x_2, x_3)$$

$$a_1 : x_2 = k_1 x_3,\ a_2 : x_3 = k_2 x_1,\ a_3 : x_1 = k_3 x_2$$

biçiminde belirtilebilir. a_1, a_2, a_3 sırasıyla C nin teğetleridir ve $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$, $k_3 \neq 0$ ve $k_1, k_2, k_3 \in \gamma$ olmak üzere

$$a_1 = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 \\ x_1 & k_1 x_3 & x_3 \end{vmatrix} = [0, -x_3, k_1 x_3] \equiv [0, -1, k_1]$$

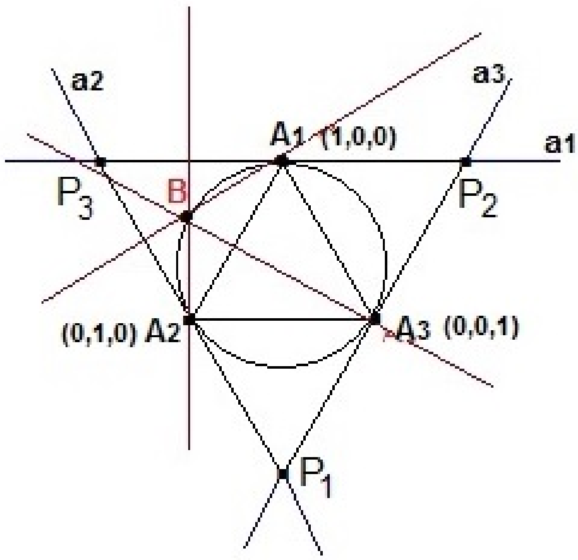
$$a_2 = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & k_2 x_1 \end{vmatrix} = [k_2 x_1, 0, -x_1] \equiv [k_2, 0, -1]$$

$$a_3 = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 \\ k_3 x_2 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = [-x_2, k_3 x_2, 0] \equiv [-1, k_3, 0]$$

elde edilir. $B = (c_1, c_2, c_3)$ noktası A_1, A_2, A_3 den farklı C nin $q-2$ noktasından herhangi biri ise $c_1c_2c_3 \neq 0$ olur. A_1B, A_2B, A_3B doğruları

$$\begin{aligned}
A_1B &= \begin{vmatrix} . & . & . \\ 1 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = [0, -c_3, c_2] \equiv [0, -1, \lambda_1]\,, \lambda_1 = c_2c_3^{-1} \neq 0 \\
A_2B &= \begin{vmatrix} . & . & . \\ 0 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = [c_3, 0, -c_1] \equiv [\lambda_2, 0, -1]\,, \lambda_2 = c_1c_3^{-1} \neq 0 \\
A_3B &= \begin{vmatrix} . & . & . \\ 0 & 0 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = [-c_2, c_1, 0] \equiv [-1, \lambda_3, 0]\,, \lambda_3 = c_2c_1^{-1} \neq 0
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Üzerinde bulunma bağıntısından bu doğruların noktalarının birbiri ile ilişkisini bulalım.



Şekil 5.1 iç teğet ve dış teğet üçgen

(x_1, x_2, x_3) noktası A_1B doğrusu üzerinde ise üzerinde bulunma bağıntısından $x_2 = \lambda_1 x_3$ eşitliği elde edilir. Benzer şekilde A_2B ve A_3B doğruları için $x_3 = \lambda_2 x_1$ ve $x_1 = \lambda_3 x_2$ eşitlikleri elde edilir.

B noktası A_1B, A_2B, A_3B doğruları üzerinde olduğundan yukarıdaki eşitliklerden

$$\begin{aligned} c_2 &= \lambda_1 c_3, \;\; c_3 = \lambda_2 c_1 \;\text{ ve }\; c_1 = \lambda_3 c_2 \\ \lambda_1 &= c_2 c_3^{-1}, \;\; \lambda_2 = c_3 c_1^{-1} \text{ ve } \;\lambda_3 = c_1 c_2^{-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1 \tag{5.1}$$

olarak bulunur ve $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sıfırdan farklı katsayılardır. Sonuç olarak $\lambda_1 \in \gamma$, $k_1 \neq \lambda_1$ ve sıfırdan farklı $q-2$ elemanından herhangi biri ise $A_1B : x_2 = \lambda_1 x_3$ doğrusu $\mathcal{C}$ yi A_1 ve B noktalarında keser. Aynı şekilde $\lambda_2, \lambda_3 \in \gamma$ ve $\lambda_2 \neq k_2$, $\lambda_3 \neq k_3$için de A_2B ve A_3B doğruları $\mathcal{C}$ yi sırasıyla A_2 ve B; A_3 ve B noktalarında keser. $a_2 \cap a_3 = P_1$, $a_1 \cap a_3 = P_2$ ve $a_1 \cap a_2 = P_3$ noktası olsun.

$$\begin{aligned} P_1 &= a_2 \cap a_3 = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ k_2 & 0 & -1 \\ -1 & k_3 & 0 \end{vmatrix} = (k_3, 1, k_2k_3) \\ P_2 &= a_1 \cap a_3 = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -1 & k_1 \\ -1 & k_3 & 0 \end{vmatrix} = (k_3k_1, k_1, 1) \\ P_3 &= a_1 \cap a_2 = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -1 & k_1 \\ k_2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1, k_1k_2, k_2) \end{aligned}$$

noktaları elde edilir. Daha sonra A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3 doğrularını ve bu doğruların kesişim noktasını bulalım.

$$\begin{aligned} A_1P_1 &= \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 \\ k_3 & 1 & k_2k_3 \end{vmatrix} = [0, -k_2k_3, 1] \\ A_2P_2 &= \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 \\ k_3k_1 & k_1 & 1 \end{vmatrix} = [1, 0, -k_3k_1] \\ A_3P_3 &= \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & k_1k_2 & k_2 \end{vmatrix} = [-k_1k_2, 1, 0] \end{aligned}$$

doğruları elde edilir. Bu üç doğrunun kesişim noktası olan merkez noktasına K noktası diyelim. Bu üç doğrunun noktadaş olması için

$$\begin{vmatrix} 0 & -k_2k_3 & 1 \\ 1 & 0 & -k_3k_1 \\ -k_1k_2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ve

$$k_1 k_2 k_3 = -1 \tag{5.2}$$

dır.

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -k_2k_3 & 1 \\ 1 & 0 & -k_1k_3 \end{vmatrix} = K$$

ve

$$K = (-k_3, 1, k_2k_3)$$

dır. Böylece iç-teğet üçgen $A_1A_2A_3$ ve dış-teğet üçgen $a_1a_2a_3$, $K = (-k_3, 1, k_2k_3)$ noktasından perspektiftir.

Teorem 26. *$p \neq 2$ ise β düzleminin her ovali bir koniktir.*

Bu teoremin ispatı için bir önceki teoremin notasyonlarından yararlanıcağız. $K = (1,1,1)$ olarak seçelim. O zaman $(1,1,1) = (-k_3, 1, k_2k_3)$ ve $k_1k_2k_3 = -1$ eşitliklerinden

$$k_1 = k_2 = k_3 = -1$$

olur. A_1, A_2, A_3 noktalarından farklı C ovalinin $q - 2$ noktasından herhangi biri $B = (c_1, c_2, c_3)$ ve bu noktadan geçen C ye teğet olan doğru $b = [b_1, b_2, b_3]$ olsun. Bu durumda

$$b : b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$$

dır. Bu doğru B noktasını içerir ama A_1, A_2, A_3 noktalarını ve P_1, P_2, P_3 noktalarını içermez. P_1, P_2, P_3 noktaları için

$$P_1 \not\circ b \iff (k_3, 1, k_2k_3) \not\circ [b_1, b_2, b_3]$$

$$k_3b_1 + b_2 + k_2k_3b_3 \neq 0$$

ve $k_1 = k_2 = k_3 = -1$ olduğundan

$$b_1 - b_2 - b_3 \neq 0$$

dır ve $\beta_1 = b_1 - b_2 - b_3$ olsun. Aynı şekilde

$$P_2 \not\circ b \iff (k_3k_1, k_1, 1) \not\circ [b_1, b_2, b_3]$$

$$k_3k_1b_1 + k_1b_2 + b_3 \neq 0$$

ve $k_1 = k_2 = k_3 = -1$ olduğundan

$$-b_1 + b_2 - b_3 \neq 0$$

dır ve $\beta_2 = -b_1 + b_2 - b_3$ olsun.

$$P_3 \not\!\!\!\:\:\!/ \!b \iff (1, k_1k_2, k_2) \not\! \circ [b_1, b_2, b_3]$$

$$b_1 + k_1k_2b_2 + k_2b_3 \neq 0$$

ve $k_1 = k_2 = k_3 = -1$ olduğundan

$$-b_1 - b_2 + b_3 \neq 0$$

dır ve $\beta_3 = -b_1 - b_2 + b_3$ olsun.

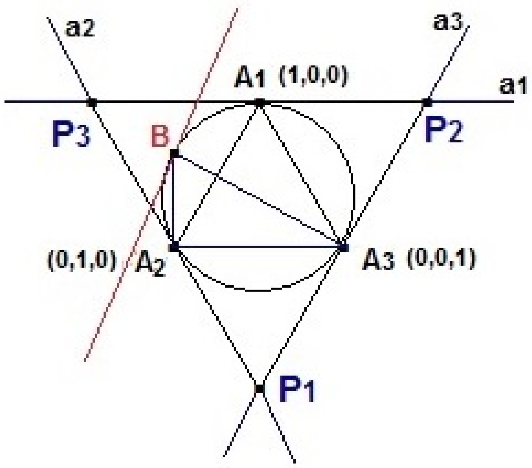
$$\beta_1 = b_1 - b_2 - b_3\ ,\ \ \beta_2 = -b_1 + b_2 - b_3\ ,\ \ \beta_3 = -b_1 - b_2 + b_3$$

olarak sıfırdan farklı β_i ler belirlenir. Aynı şekilde A_1, A_2, A_3 noktaları için $A_1 \not\circ b$, $A_2 \not\circ b$, $A_3 \not\circ b$ olduğundan sırasıyla $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ ve $b_3 \neq 0$ bulunur. B noktası b doğrusu üzerinde olduğundan

$$b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 \quad = \quad 0 \tag{5.3}$$

$$b_1b_2b_3\beta_1\beta_2\beta_3 \quad \neq \quad 0 \tag{5.4}$$

ifadeleri bulunur. Teorem (23) den dolayı BA_2A_3 ve ba_2a_3, BA_1A_2 ve ba_1a_2, BA_3A_1 ve ba_3a_1 üçgenleri perspektiftir. Elde ettiğimiz ifadeler yardımıyla perspektif olan üçgenleri inceleyelim.



Şekil 5.2 iç teğet ve dış teğet üçgen

BA_3A_1ve ba_3a_1 üçgenlerinin perspektifliğinden $B \cup (a_3a_1)$, $A_1 \cup (ba_3)$ ve $A_3 \cup (ba_1)$ doğruları noktadaş olmalıdırlar. Buradan

$$a_3a_1 = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, 1)$$

ve

$$B \cup (a_3a_1) = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = [c_2 + c_3, -c_1 + c_3, -c_1 - c_2]$$

olarak bulunur.

$$ba_3 = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-b_3, b_3, b_1 - b_2)$$

ve

$$A_1 \cup (ba_3) = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 \\ -b_3 & b_3 & b_1 - b_2 \end{vmatrix} = [0, b_1 - b_2, -b_3]$$

dır.

$$ba_1 = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (b_2 - b_3, -b_1, b_1)$$

ve

$$A_3 \cup (ba_1) = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 \\ b_2 - b_3 & -b_1 & b_1 \end{vmatrix} = [b_1, b_2 - b_3, 0]$$

olduğundan

$$\begin{vmatrix} c_2 + c_3 & -c_1 + c_3 & -c_1 - c_2 \\ 0 & b_1 - b_2 & -b_3 \\ b_1 & b_2 - b_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

elde edilir. Bu determinantta $\beta_2 \neq 0$ elde etmek için 3. sütunun (-1) katını 2. sütuna eklediğimizde

$$\begin{vmatrix} c_2 + c_3 & c_2 + c_3 & -c_1 - c_2 \\ 0 & b_1 - b_2 + b_3 & -b_3 \\ b_1 & b_2 - b_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

elde edilir. $\beta_2 = -b_1 + b_2 - b_3 \neq 0$ olduğuna göre

$$\begin{vmatrix} c_2+c_3 & c_2+c_3 & -c_1-c_2 \\ 0 & -\beta_2 & -b_3 \\ b_1 & b_2-b_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

dır. Determinant açıldığında

$$(c_2+c_3)[(b_2-b_3).b_3] - (c_2+c_3)(b_1b_3) - (c_1+c_2)(\beta_2 b_1) = 0$$

$$\begin{aligned} (c_2+c_3)[b_3(b_2-b_3-b_1)] &= \beta_2 b_1(c_1+c_2) \\ (c_2+c_3)b_3\beta_2 &= \beta_2 b_1(c_1+c_2) \\ (c_2+c_3)b_3 &= b_1(c_1+c_2) \end{aligned} \tag{5.5}$$

eşitliği elde edilir.

BA_2A_3 ve ba_2a_3 üçgenlerinin perspektifliğinden $B\cup(a_2a_3)$, $A_2\cup(ba_3)$ ve $A_3\cup(ba_2)$ doğruları noktadaştır.

$$a_2a_3 = \begin{vmatrix} . & . & . \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,1,1)$$

olup

$$B\cup(a_2a_3) = \begin{vmatrix} . & . & . \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = [c_2-c_3, -c_1-c_3, c_1+c_2]$$

dır.

$$ba_3 = \begin{vmatrix} . & . & . \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-b_3, b_3, b_1-b_2)$$

olup

$$A_2\cup(ba_3) = \begin{vmatrix} . & . & . \\ 0 & 1 & 0 \\ -b_3 & b_3 & b_1-b_2 \end{vmatrix} = [b_1-b_2, 0, b_3]$$

dır.

$$ba_2 = \begin{vmatrix} . & . & . \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (b_2, b_3-b_1, -b_2)$$

olup

$$A_3 \cup (ba_2) = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 \\ b_2 & -b_1+b_3 & -b_2 \end{vmatrix} = [b_1 - b_3, b_2, 0]$$

dır. $B \cup (a_2a_3)$, $A_2 \cup (ba_3)$ ve $A_3 \cup (ba_2)$ doğruları noktadaş olduğundan

$$\begin{vmatrix} c_2 - c_3 & -c_1 - c_3 & c_1 + c_2 \\ b_1 - b_2 & 0 & b_3 \\ b_1 - b_3 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

dır. $\beta_1 \neq 0$ ve bu determinantta 2. sütunun (-1) katı 1. sütuna eklendiğinde

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 & -c_1 - c_3 & c_1 + c_2 \\ b_1 - b_2 & 0 & b_3 \\ b_1 - b_2 - b_3 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

dır. $\beta_1 = b_1 - b_2 - b_3$ olduğuna göre

$$\begin{vmatrix} c_2 + c_1 & -c_1 - c_3 & c_1 + c_2 \\ b_1 - b_2 & 0 & b_3 \\ \beta_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

dır. Determinant açılırsa

$$(c_1 + c_2)(-b_2b_3) - (c_1 + c_3)(\beta_1 b_3) + (c_1 + c_2)[b_2(b_1 - b_2)] = 0$$

$$\begin{aligned} (c_1 + c_2)[b_2(b_1 - b_2 - b_3)] &= \beta_1 b_3 (c_1 + c_3) \\ b_2(c_1 + c_2)\beta_1 &= \beta_1 b_3 (c_1 + c_3) \\ b_2(c_1 + c_2) &= b_3(c_1 + c_3) \end{aligned} \tag{5.6}$$

eşitliği elde edilir.

BA_1A_2 ve ba_1a_2 üçgenlerinin perspektifliğinden $B \cup (a_1a_2)$, $A_1 \cup (ba_2)$ ve $A_2 \cup (ba_1)$ doğruları noktadaştır.

$$a_1a_2 = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 1, -1)$$

olup

$$a_1a_2 = (1, 1, -1)$$

ve

$$B \cup (a_2 a_3) = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = [-c_2 - c_3, c_1 + c_3, c_1 - c_2]$$

dır.

$$ba_2 = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (b_2, b_3 - b_1, -b_2)$$

olup

$$ba_2 = (b_2, b_3 - b_1, -b_2)$$

ve

$$A_1 \cup (ba_2) = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 \\ b_2 & b_3 - b_1 & -b_2 \end{vmatrix} = [0, b_2, b_3 - b_1]$$

dır.

$$ba_1 = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (b_2 - b_3, -b_1, b_1)$$

olup

$$ba_1 = (b_2 - b_3, -b_1, b_1)$$

ve

$$A_2 \cup (ba_1) = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 \\ b_2 - b_3 & -b_1 & b_1 \end{vmatrix} = [b_1, 0, b_3 - b_2]$$

dır. Elde ettiğimiz bu üç doğru noktadaş olduğundan

$$\begin{vmatrix} -c_2 - c_3 & c_1 + c_3 & c_1 - c_2 \\ 0 & b_2 & b_3 - b_1 \\ b_1 & 0 & b_3 - b_2 \end{vmatrix} = 0$$

determinantında 3. sütundan 2. sütunu çıkartıp tekrar 3. sütuna yazalım. Buradan $\beta_3 = -b_1 - b_2 + b_3$ ve $\beta_3 \neq 0$ için

$$\begin{vmatrix} -c_2 - c_3 & c_1 + c_3 & -c_2 - c_3 \\ 0 & b_2 & b_3 - b_2 - b_1 \\ b_1 & 0 & b_3 - b_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -c_2 - c_3 & c_1 + c_3 & -c_2 - c_3 \\ 0 & b_2 & \beta_3 \\ b_1 & 0 & b_3 - b_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-c_2 - c_3)[b_2(b_3 - b_2)] + (c_1 + c_3)(\beta_3 b_1) + (c_2 + c_3)(b_2 b_1) = 0$$

$$\begin{aligned} (c_2 + c_3)[b_2(-b_1 - b_2 + b_3)] &= \beta_3 b_1(c_1 + c_3) \\ b_2(c_2 + c_3)\beta_1 &= \beta_3 b_1(c_1 + c_3) \\ b_2(c_2 + c_3) &= b_1(c_1 + c_3) \end{aligned} \tag{5.7}$$

eşitliği elde edilir. (5.5), (5.6) ve (5.7) den

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{(c_2 + c_3)}{(c_1 + c_3)}$$

$$\frac{b_2}{b_3} = \frac{(c_1 + c_3)}{(c_1 + c_2)}$$

$$\frac{b_1}{b_3} = \frac{(c_2 + c_3)}{(c_1 + c_2)}$$

olup

$$b_1 : b_2 : b_3 = (c_2 + c_3) : (c_1 + c_3) : (c_1 + c_2)$$

dır. Elde ettiğimiz bu eşitliği (5.3) ve (5.4) yardımıyla denklemde yerine yazalım.

$$\begin{aligned} b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 &= 0 \\ (c_2 + c_3)c_1 + (c_1 + c_3)c_2 + (c_1 + c_2)c_3 &= 0 \\ c_1c_2 + c_1c_3 + c_1c_2 + c_2c_3 + c_1c_3 + c_2c_3 &= 0 \\ 2(c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3) &= 0 \\ c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Bu eşitlik $\mathcal{C}$ nin her $q - 2$ noktası ile B noktasının bir konik oluşturduğunu gösterir.

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0$$

Buradan görülüyorki A_1, A_2, A_3 noktalarına üç nokta daha ilave edildiğinde konik elde edilir ve nokta sayısı $q + 1$ olur. Bu da $\mathcal{C}$ ovaline denk gelmektedir. Sonuç olarak $p \neq 2$ olmak şartıyla koniğin noktaları olan $q + 1$ noktanın oluşturduğu yapı bir ovaldir.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmanın ilk kısmında sonlu mertebeden projektif düzlemler incelendi. q asal sayı olmak üzere q ve q^r mertebeli projektif düzlemler vardır. Bunların dışında mertebeye sahip projektif düzlemlerin olup olmadığı sorusu henüz yanıt bulamamıştır. Mertebeleri arttıkça projektif düzlemleri göstermek zorlaşır. Mertebesi arttıkça projektif düzlemlerin kanıtında öncelikle latin karelerden yararlanılır, daha sonra bilgisayarlar yardımıyla $n.$ mertebeden projektif düzlemler oluşturulur. Bilgisayar da çok küçük bir hata da bile düzlemler tamamen farklı olacağından bu çalışmaların devam etmesi için güvenilir bir program geliştirilmelidir.

Daha sonra Galois cismi üzerinde projektif 3-uzay incelendi. Projektif düzlemde ovaller üzerinde duruldu ve sonlu projektif düzlemde oval ile konik arasında bağıntı kuruldu. Bu bağıntı için projektif düzlemlerin herhangi iki üçgeninin perspektifliğinden yararlanıldı ve sonuç olarak $p \neq 2$ için her koniğin bir oval olduğu elde edildi.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Akpınar, Atilla (2005) (). “On Some Projective Planes of Finite Order”. **in**: *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi* 18 (2), **pages** 315–325.

Al-Mukhtar, A.SH. (2011) (a). “On projective 3-Space Over Galois Field”. **in**: *Department of Mathematics, College of Education Ibn-Al-Haitham University of Baghdad* 24 (3).

Al-Mukhtar, A.SH (2011) (b). “Some Result on The Complete Arc in Three Dimentional Projective Space Over Galois Field”. **in**: *Department of Mathematics, College of Education Ibn-Al-Haitham University of Baghdad* 25 (1).

DiLesio, Steven (2009) (). “Arc and Ovals in Projective Geometry”. **in**: *University of Colorado Denver Math 4220*.

Hirschfeld, W.P. James (1979) (). *Projective Geometry over Finite Fields*. Oxford University Press, **pages** 164–170.

Kaya, Rüstem (2005) (). *Projektif Geometri*. **volume** 392. 3. Baskı. Osmangazi Üniversitesi Yayınları.

Segre, Beniamino (1954) (). “Ovals in a Finite Projective Plane”. **in**: *Canadian Journal of Mathematics 1955* VII.3. **byeditor**H.S.M Coxeter. **byeditor**A. Gauthier, **pages** 414–416.