

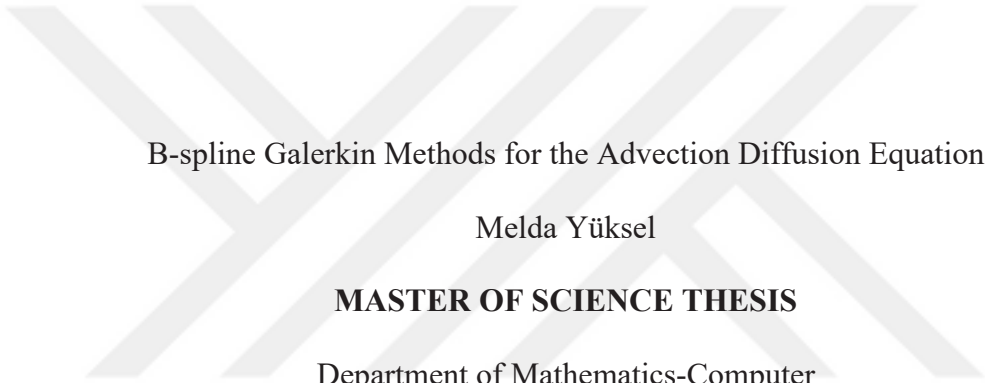
Adveksiyon Difüzyon Denklemi İçin B-spline Galerkin Metotları

Melda Yüksel

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Eylül 2020



B-spline Galerkin Methods for the Advection Diffusion Equation

Melda Yüksel

**MASTER OF SCIENCE THESIS**

Department of Mathematics-Computer

September 2020

Adveksiyon Difüzyon Denklemi İçin B-spline Galerkin Metotları

Melda Yüksel

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Dursun İrk

Eylül 2020

## ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Dursun İrk danışmanlığında hazırlamış olduğum “Adveksiyon Difüzyon Denklemi İçin B-spline Galerkin Metotları” başlıklı YÜKSEK LİSANS tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. .../.../20...

Melda Yüksel

İmza

## ÖZET

Bu Yüksek Lisans tezi dokuz bölümden oluşmaktadır. Bu tezde, Adveksiyon Difüzyon (AD) denkleminin sayısal çözümleri, zaman parçalanması için doğruluğu ikinci, dördüncü ve altıncı mertebeden yöntemle birlikte kuartik, kuintik, sektik ve septik B-spline fonksiyonların konum parçalanması için kullanıldığı Galerkin sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilmiştir.

Birinci bölümde teze ilgili genel bilgiler verilmiş ve tezin amacı açıklanmıştır. Sonraki bölümde, AD denkleminin sayısal çözümü için daha önce yapılan çalışmalar incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, bazı temel terimler ve önerilen zaman parçalanma yöntemlerinden bahsedilmiştir. Daha sonra AD denklemi ve test problemi, başlangıç ve sınır koşullarıyla birlikte incelenmiştir.

Dördüncü bölümde AD denklemi, sırasıyla ikinci, dördüncü ve altıncı mertebeden doğruluğa sahip üç zaman parçalanması kullanılarak kuartik B-spline Galerkin yöntemiyle sayısal olarak çözülmüştür. Beşinci, altıncı ve yedinci bölümlerde sırasıyla kuintik, sektik ve septik B-spline fonksiyonlar kullanılarak aynı zaman parçalanmaları için işlemler tekrarlanmıştır. Her bölümde, mevcut yöntemin doğruluğu test problemi kullanılarak incelenmiştir.

Son iki bölümde, sunulan yöntemlerin sonuçları tartışılmış ve ileride yapılacak çalışmalar için bazı öneriler verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler :** Adveksiyon Difüzyon denklemi, Galerkin yöntemi, B-Spline fonksiyonlar

## SUMMARY

This Master of Science thesis consists of nine chapters. In this thesis, numerical solutions of Advection Diffusion (AD) equation are obtained using Galerkin finite element method, based on second, fourth and sixth order method for time discretization and quartic, quintic, sextic and septic B-spline functions for the space discretization.

In the first chapter, general information of the thesis is given, and the purpose of the thesis is also explained. In the next chapter, some earlier studies for numerical solution of the AD equation are investigated.

In the third chapter, some basis terms and the proposed time discretization methods are mentioned. Then AD equation and the test problem together with initial and boundary conditions are investigated.

In the fourth chapter, AD equation is solved numerically by using quartic B-spline Galerkin method by using three-time discretization method which are of 2th, 4th and 6th order in time, respectively. Same methods implemented in fifth, sixth and seventh chapters by using quintic, sextic and septic B-spline functions, respectively. In each chapter, the accuracy of the present method is investigated by using the test problem.

In the last two chapters, the results of the presented methods are discussed, and some suggestions are given for future studies.

**Keywords :** Advection Diffusion equation, Galerkin method, B-Spline functions

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarım boyunca gerek derslerimde ve gerekse tez çalışmamda, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan, yardımlarını esirgemeyen değerli hocam ve tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Dursun İrk 'a bana ayırdığı zaman ve sağladığı destek için teőkekkürü borç bilirim. Son olarak manevi destekleriyle yanımda olan aileme de sonsuz teőkükürlerimi sunarım.

Melda Yüksel



**İÇİNDEKİLER****Sayfa**

<b>ÖZET</b> .....	vi
<b>SUMMARY</b> .....	vii
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	viii
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	ix
<b>ŞEKİLLER DİZİNİ</b> .....	xi
<b>ÇİZELGELER DİZİNİ</b> .....	xii
<b>SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ</b> .....	xiii
<b>1. GİRİŞ VE AMAÇ</b> .....	1
<b>2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI</b> .....	3
<b>3. TEMEL KAVRAMLAR</b> .....	5
3.1 Adveksiyon Difüzyon Denklemi.....	5
3.2 Test Problemi.....	5
3.3 Zaman Parçalanmaları .....	7
3.3.1 Zaman parçalanması için 1. yöntem .....	8
3.3.2 Zaman parçalanması için 2. yöntem .....	9
3.3.3 Zaman parçalanması için 3. yöntem .....	10
3.4 Zaman Parçalanmalarının Uygulanması.....	11
<b>4. KUARTİK B-SPLINE GALERKİN METODU</b> .....	13
4.1 Test Problemi.....	19
<b>5. KUİNTİK B-SPLINE GALERKİN METODU</b> .....	22
5.1 Test Problemi.....	29
<b>6. SEKTİK B-SPLINE GALERKİN METODU</b> .....	31
6.1 Test Problemi.....	38
<b>7. SEPTİK B-SPLINE GALERKİN METODU</b> .....	40
7.1 Test Problemi.....	47



**İÇİNDEKİLER (devam)****Sayfa**

<b>8. BULGULAR VE TARTIŞMA .....</b>	<b>49</b>
<b>9. SONUÇ VE ÖNERİLER .....</b>	<b>51</b>
<b>KAYNAKLAR DİZİNİ.....</b>	<b>52</b>



**ŞEKİLLER DİZİNİ**

<b><u>Şekil</u></b>	<b><u>Sayfa</u></b>
3.1 $t = 0,1,2,3,4,5$ zamanlarında dalgaların durumu.....	6
4.1 Mutlak hata grafikleri.....	21
5.1 Mutlak hata grafikleri.....	30
6.1 Mutlak hata grafikleri.....	39
7.1 Mutlak hata grafikleri.....	48



**ÇİZELGELER DİZİNİ**

<b><u>Çizelge</u></b>	<b><u>Sayfa</u></b>
4.1 Bölünme noktalarındaki kuartik B-spline değerleri .....	14
4.2 $h = 0.01$ için hata normları ve yakınsaklık oranları .....	20
5.1 Bölünme noktalarındaki kuintik B-spline değerleri .....	24
5.2 $h = 0.01$ için hata normları ve yakınsaklık oranları .....	29
6.1 Bölünme noktalarındaki sektik B-spline değerleri .....	33
6.2 $h = 0.01$ için hata normları ve yakınsaklık oranları .....	38
7.1 Bölünme noktalarındaki septik B-spline değerleri .....	42
7.2 $h = 0.01$ için hata normları ve yakınsaklık oranları .....	47
8.1 $h = k = 0.01$ için hata normları .....	50

**SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ****Simgeler** $k$ **Açıklama**

Zaman adım uzunluğu

 $h$ 

Konum adım uzunluğu

 $u_m^n$  $x = x_m$  noktasında ve  $t = t_n$  zamanındaki tam çözüm $U_m^n$  $x = x_m$  noktasında ve  $t = t_n$  zamanındaki yaklaşık çözüm**Kısaltmalar**

AD

**Açıklama**

Adveksiyon Difüzyon

# 1. GİRİŞ VE AMAÇ

Doğada gerçekleşen ve bir süreç belirten olayların neredeyse tamamı belirli kurallar çerçevesinde matematik diliyle ifade edilmeye çalışılır. Bu durumda ise genellikle değişken sayısının durumuna bağlı olarak adi veya kısmi diferensiyel denklemler elde edilir. Ayrıca doğada gerçekleşen ve bir süreç belirten olaylar, başlangıç veya sınır şartları içeriyorsa bu durumda problem, başlangıç değer veya sınır değer problemi olarak adlandırılır. Bazen konveksiyon-difüzyon denklemi olarak adlandırılan adveksiyon difüzyon (AD) denklemi de birçok fiziksel ve kimyasal olayları modellemek için kullanılan temel bir kısmi diferensiyel denklemdir (Karur ve Ramachandran, 1995). Adveksiyon, fizik, mühendislik gibi bilim dallarında bir maddenin hareketle taşınması olayıdır. Adveksiyona örnek olarak bir nehirdeki kirlenmenin suyun akışı sebebiyle taşınması olarak verilebilir. Difüzyon kavramı ise sayısal bilimler (fizik, kimya, biyoloji vb) ve sözel bilimler (sosyoloji, ekonomi, finans vb) dahil olmak üzere birçok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır. Genel olarak difüzyon etkisinde kalan bir nesne daha yüksek bir konsantrasyonun olduğu bir konumdan daha düşük konsantrasyonun olduğu konuma doğru yayılır.

Kısmi diferensiyel denklemlerin verilen şartları sağlayan çözümlerini bulmak bazen imkansız bazende oldukça zor olmaktadır. Bu durumda sayısal yöntemler kullanılarak problemin yaklaşık çözümleri bulunmaya çalışılmaktadır. Hem adveksiyon hem de difüzyon terimleri içermesi ve sayısal çözüm yöntemlerinin geliştirilmesi için kullanılabilecek basit bir denklem olmasından dolayı AD denkleminde yoğun olarak çalışılmaktadır.

Bu çalışmada AD denkleminin yaklaşık çözümü araştırılırken zaman parçalanması için doğruluğu 2., 4., ve 6. mertebeden olan üç farklı yöntem kullanılacaktır. 2. mertebeden zaman parçalanması literatürde yoğun olarak kullanılan Crank Nicolson zaman parçalanmasına karşılık gelmektedir. Bu tezin amacı, Crank Nicolson yönteminden daha yüksek doğruluklu bir zaman parçalanması kullanıldığında elde edilen hataların dahada azalıp azalmadığının tespit edilmesi olacaktır. Zaman parçalanması için önerilen yöntemlerden sonra

konum parçalanması için ise kuartik, kuintik, sektik ve septik B-spline Galerkin yöntemi kullanılacaktır. B-spline fonksiyonlar, sonlu elemanlar metotlarında kullanıldığında elde edilen sonuç matrisleri bant matrisler olarak geldiğinden hesaplama yönünden avantajlıdır. Her bir spline için üç farklı zaman parçalanması kullanılacağından bu çalışmada toplam 12 farklı yöntem AD denkleminin yaklaşık çözümü için kullanılacaktır. Önerilen yöntemlerin bir kısmı daha önce çalışılmıştır. Bu çalışmada orjinal olan kısım ise zaman parçalanması için altıncı mertebeden bir yöntem kullanılmasıdır. Elde edilen sonuçlar birbirleri ile kıyaslanacak ve sonuçlar tartışılacaktır.

Önerilen yöntemlerin doğruluğunun kontrolü, adveksiyon ve difüzyon olayının gerçekleştiği bir dalganın yayılımını modelleyen test problemi kullanılarak yapılacaktır.

## 2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Güntümüzde birçok olayın modellenmesinde kullanılan AD denkleminin yaklaşık çözümleri üzerinde birçok çalışma yapılmıştır. Funaro ve Pontrelli (1999), lineer AD denkleminin yaklaşık çözümleri için spline kolokasyon yöntemi önermişlerdir. Dehghan (2004), AD denkleminin yaklaşık çözümü için sonlu fark yöntemleri önermiştir. Dehghan bu çalışmasında özellikle konuma göre parçalanma yaparken doğruluğu yükseltmeye çalışmıştır. Hem lineer hem de kuadratik B-spline fonksiyonların kullanıldığı en küçük kareler yöntemiyle AD denkleminin sayısal çözümleri Dağ ve arkadaşları tarafından araştırılmıştır (Dağ vd., 2006). Thongmoon ve McKibbin (2006), AD denkleminin yaklaşık çözümü için hem doğal kübik B-spline interpolasyon yöntemini hem de aynı problemin yaklaşık çözümü için sonlu fark yaklaşımı yöntemlerini kullanmışlar ve önerdikleri yöntemleri karşılaştırmışlardır. Dhawan ve Kumar (2009), AD denkleminin özel bir durumu olan ısı denkleminin yaklaşık çözümü için kuadratik B-spline Galerkin sonlu elemanlar yöntemini kullanmışlardır. Tek boyutlu ısı ve AD denkleminin yaklaşık çözümleri için dördüncü mertebeden sonlu farklar yöntemi Mohebbi ve Dehghan (2010), tarafından uygulanmıştır. Sarı ve arkadaşları (2010) hazırladıkları çalışmalarında AD denkleminin yaklaşık çözümü için konuma göre parçalanma yaparken 10. mertebeden doğruluğa kadar çıkabilen sonlu farklar yöntemini, zamana göre parçalanma yaparken ise dördüncü mertebeden Runge Kutta yöntemini önermişlerdir. Canıvar (2011), Taylor Galerkin kuadratik B-spline, Taylor Kolokasyon kübik B-spline ve kuadratik, kübik ve Taylor Kolokasyon kuintik B-spline sonlu elemalar yöntemlerini kullanarak AD denkleminin yaklaşık çözümünü araştırmıştır. Dağ ve arkadaşları (2011), AD denkleminin yaklaşık çözümü için kuadratik ve kübik B-spline Taylor Galerkin yöntemini önermişlerdir. Hem lineer hem de kuadratik B-spline fonksiyonların kullanıldığı sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak AD denkleminin yaklaşık çözümü, Dhawan ve arkadaşları (2012) tarafından araştırılmıştır. Kübik B-spline fonksiyon tabanlı kolokasyon yönteminin kullanıldığı çalışmada Mittal ve Jain (2012), konveksiyon-difüzyon denkleminin yaklaşık çözümünü araştırmışlardır. Appadu (2013), sabit katsayılı tek boyutlu AD denkleminin sayısal çözümünü elde etmek

için üç farklı sonlu farklar yöntemi uygulamıştır. Doğan (2013), genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlar ile birlikte Galerkin ve kololasyon metotlarını kullanarak AD denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmeye çalışmıştır. Irk ve arkadaşları (2015), genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlar tabanlı sonlu elemanlar yöntemini kullanarak AD denkleminin sayısal çözümünü araştırmışlardır. Bilgin (2015), AD denkleminin sayısal çözümleri için açık ve kapalı sonlu fark yöntemlerini uygulamış, bazı fiziksel problemler üzerinde hata analizlerini ve kararlılık koşullarını incelemiştir. Dhawan ve arkadaşları (2015), AD denkleminin sayısal çözümü için kübik B-spline fonksiyonlarını kullanarak en küçük kareler yöntemini önermişlerdir. Nazir ve arkadaşları (2016), AD denkleminin sayısal çözümü için kübik trigonometrik B-spline kolokasyon yaklaşımı geliştirmişlerdir. Dağ ve Korkmaz (2016), AD denklemini sayısal çözmek için kuartik ve kuintik B-spline fonksiyonlar ile birlikte kuadratur yöntemini kullanmışlardır. Görgülü ve Irk (2016), AD denkleminin zaman parçalanması için ikinci ve dördüncü mertebeden yöntem ile birlikte kuintik B-spline Galerkin sonlu elemanlar yöntemini kullanmışlardır. Bu çalışmanın sonucunda özellikle dördüncü mertebeden tek adımlı yöntemin AD denkleminin çözümünde daha iyi bir sonuç verdiği gözlemlenmiştir. Almashhadani (2016), AD denkleminin yaklaşık çözümü için hem yüksek hem de düşük mertebeden sonlu farklar metotlarını kullanmıştır. Bahar ve Gürarlan (2017), çalışmalarında Lie-Trotter ve Strang operatör bölme yöntemlerini AD denklemine uygulayarak sayısal çözümü araştırmışlardır. Görgülü ve arkadaşları (2018), AD denkleminin sayısal çözümü için konum parçalanmasında genişletilmiş kübik B-spline galerkin, zaman ayrışmasında ise Crank Nicolson yöntemini kullanmışlardır. Topcu ve Irk (2018), AD denkleminin zaman ayrıştırması için ikinci ve dördüncü mertebeden yöntem ile birlikte sektik B-spline Galerkin sonlu elemanlar yöntemini kullanmışlardır. Bu çalışmanın sonucunda özellikle dördüncü mertebeden tek adımlı yöntemin AD denkleminin çözümünde daha iyi bir sonuç verdiği gözlemlenmiştir. Görgülü ve Irk (2019), AD denkleminin zaman ayrıştırması için ikinci ve dördüncü mertebeden yöntem ile birlikte kübik B-spline Galerkin sonlu elemanlar yöntemini kullanmışlardır. Bu çalışmanın sonucunda özellikle dördüncü mertebeden tek adımlı yöntemin AD denkleminin çözümünde oldukça iyi sonuç verdiği gözlemlenmiştir.



### 3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde sayısal çözümü araştırılacak olan AD denklemi ve test problemi ile sayısal yöntemde kullanılacak olan zaman parçalanmasından bahsedilecektir.

#### 3.1. Adveksiyon Difüzyon Denklemi

AD denklemi  $[a, b] \times [0, T]$  konum-zaman bölgesinde

$$u_t + \alpha u_x - \mu u_{xx} = 0, \quad (3.1)$$

formunda olup

$$u(a, t) = u(b, t) = 0 \quad (3.2)$$

sınır ve

$$u(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (3.3)$$

başlangıç şartlarına sahiptir

Tek boyutlu lineer AD denkleminde

- $t$  ve  $x$  alt indisleri sırasıyla zamana ve konuma göre türevleri,
- $\mu > 0$  difüzyon katsayısını,
- $\alpha > 0$  su akış hızını,
- $u$  ise  $t$  ve  $x$  değişkenlerine bağlı konsantrasyonu (yoğunluk veya bir çözücüdeki çözünen madde miktarını)

göstermektedir.

#### 3.2. Test Problemi

Test problemi olarak, AD denkleminin hem adveksiyon hem de difüzyon içeren

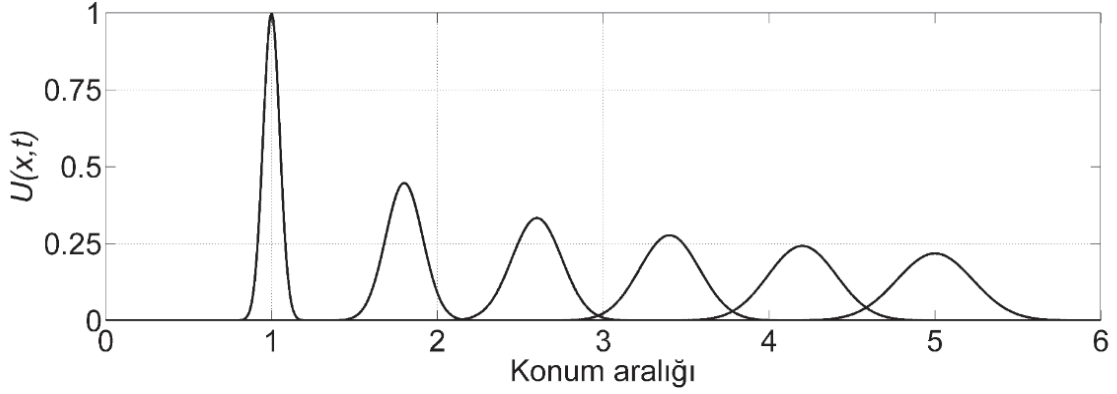
$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp\left(-\frac{(x - \tilde{x}_0 - \alpha t)^2}{\mu(4t+1)}\right) \quad (3.4)$$

analitik çözümü kullanılacaktır. Analitik çözüm başlangıç anında genliği  $\frac{1}{\sqrt{4t+1}}$  olan bir Gauss sinyalinin zaman içindeki sönümünü modellemektedir.

Şekil 3.1 de  $0 \leq x \leq 6$  konum aralığı üzerinde

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp\left(-\frac{(x - \tilde{x}_0 - \alpha t)^2}{\mu(4t+1)}\right)$$

analitik çözümünün  $\alpha = 0.8m/s$ ,  $\mu = 0.005m^2/s$ ,  $\tilde{x}_0 = 1m$  parametreleri için  $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  zamanlarındaki aldığı değerlerin grafiği çizilmiştir.



Şekil 3.1:  $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  zamanlarında dalgaların durumu

Şekil 3.1 incelendiğinde,  $t = 0$  başlangıç zamanında genliği 1 ve tepe noktası  $\tilde{x}_0 = 1$  noktasına karşılık gelen dalga konum aralığının baş tarafında bulunmaktadır. Zaman ilerledikçe dalganın genliği

$$\frac{1}{\sqrt{4t+1}}$$

olduğundan  $t$  değeri arttığından dalga küçülmektedir. Analitik çözümdeki

$$(x - \tilde{x}_0 - \alpha t)$$

teriminde  $t$  nin önündeki katsayı olan  $\alpha = 0.8 m/s$  dalganın hızına karşılık gelmektedir.  $\alpha$  teriminin önündeki işaret  $-$  (eksi) olduğundan 5 saniye içinde dalga sağa doğru  $5\alpha$  diğer bir ifade ile  $5\alpha = 5(0.8) = 4$  metre yol alacaktır. Dolayısıyla başlangıç anında tepe noktası  $\tilde{x}_0 = 1m$  noktasına karşılık gelen dalga, 5 saniye sonra tepe noktası  $x = 5$  noktasına karşılık gelecek şekilde hareket edecektir.

### 3.3. Zaman Parçalanmaları

AD denkleminin sayısal çözümü araştırılırken öncelikle zaman ve konum aralıkları parçalanmalıdır.  $k$  zaman parçalanmasındaki adım uzunluğu,  $h$  konum parçalanmasındaki adım uzunluğu

$$t_n = nk, (n = 0, \dots, T)$$

ve

$$x_m = a + mh, (m = 0, 1, \dots, N)$$

olmak üzere zaman ile konum aralığının düzgün parçalanmaları sırasıyla

$$0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_M = T$$

ve

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

olarak verilsin.  $u(x_m, t_n) = u_m^n$  ile  $(x_m, t_n)$  noktasındaki tam çözüm,  $U_m^n$  ile de  $(x_m, t_n)$  noktasındaki yaklaşık çözüm gösterilsin.

Bu gösterimler kullanılarak öncelikle

$$u_t = \mu u_{xx} - \alpha u_x \quad (3.5)$$

formundaki AD denkleminin zamana göre parçalanmasının

$$u^{n+1} = u^n + \theta_1 u_t^{n+1} + \theta_2 u_t^n + \theta_3 u_{tt}^{n+1} + \theta_4 u_{tt}^n + \theta_5 u_{ttt}^{n+1} + \theta_6 u_{ttt}^n \quad (3.6)$$

olduğu kabul edilerek, zaman parçalanması için doğruluğu en yüksek yapacak şekilde katsayılar belirlenmeye çalışılacaktır. (3.6) eşitliğindeki  $(n + 1)$ . zaman adımındaki terimler Taylor serisine açılırsa

$$u^{n+1} = u^n + k u_t^n + \frac{k^2 u_{2t}^n}{2!} + \frac{k^3 u_{3t}^n}{3!} + \frac{k^4 u_{4t}^n}{4!} + \frac{k^5 u_{5t}^n}{5!} + \frac{k^6 u_{6t}^n}{6!} + \dots \quad (3.7)$$

$$u_t^{n+1} = u_t^n + k u_{2t}^n + \frac{k^2 u_{3t}^n}{2!} + \frac{k^3 u_{4t}^n}{3!} + \frac{k^4 u_{5t}^n}{4!} + \frac{k^5 u_{6t}^n}{5!} + \frac{k^6 u_{7t}^n}{6!} + \dots \quad (3.8)$$

$$u_{2t}^{n+1} = u_{2t}^n + k u_{3t}^n + \frac{k^2 u_{4t}^n}{2!} + \frac{k^3 u_{5t}^n}{3!} + \frac{k^4 u_{6t}^n}{4!} + \frac{k^5 u_{7t}^n}{5!} + \frac{k^6 u_{8t}^n}{6!} + \dots \quad (3.9)$$

$$u_{3t}^{n+1} = u_{3t}^n + k u_{4t}^n + \frac{k^2 u_{5t}^n}{2!} + \frac{k^3 u_{6t}^n}{3!} + \frac{k^4 u_{7t}^n}{4!} + \frac{k^5 u_{8t}^n}{5!} + \frac{k^6 u_{9t}^n}{6!} + \dots \quad (3.10)$$

elde edilir. Üstteki seri açılımlarında kolaylık açısından

$$u_{tt} = u_{2t}, u_{ttt} = u_{3t}, \dots$$

kısaltmaları yapılmıştır. (3.7-3.10) seri açılımları (3.6) olarak önerilen zaman parçalanmasında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & u^n + ku_t^n + \frac{k^2 u_{2t}^n}{2!} + \frac{k^3 u_{3t}^n}{3!} + \frac{k^4 u_{4t}^n}{4!} + \frac{k^5 u_{5t}^n}{5!} + \frac{k^6 u_{6t}^n}{6!} + \frac{k^7 u_{7t}^n}{7!} + \dots = u^n + \\ & \theta_1 \left( u_t^n + ku_{2t}^n + \frac{k^2 u_{3t}^n}{2!} + \frac{k^3 u_{4t}^n}{3!} + \frac{k^4 u_{5t}^n}{4!} + \frac{k^5 u_{6t}^n}{5!} + \frac{k^6 u_{7t}^n}{6!} + \frac{k^7 u_{8t}^n}{7!} + \dots \right) + \theta_2 u_t^n + \\ & \theta_3 \left( u_{2t}^n + ku_{3t}^n + \frac{k^2 u_{4t}^n}{2!} + \frac{k^3 u_{5t}^n}{3!} + \frac{k^4 u_{6t}^n}{4!} + \frac{k^5 u_{7t}^n}{5!} + \frac{k^6 u_{8t}^n}{6!} + \frac{k^7 u_{9t}^n}{7!} + \dots \right) + \theta_4 u_{2t}^n + \\ & \theta_5 \left( u_{3t}^n + ku_{4t}^n + \frac{k^2 u_{5t}^n}{2!} + \frac{k^3 u_{6t}^n}{3!} + \frac{k^4 u_{7t}^n}{4!} + \frac{k^5 u_{8t}^n}{5!} + \frac{k^6 u_{9t}^n}{6!} + \frac{k^7 u_{10t}^n}{7!} + \dots \right) + \theta_6 u_{3t}^n \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitlik düzenlenirse

$$\begin{aligned} & (k - \theta_1 - \theta_2) u_t^n + \\ & \left( \frac{k^2}{2!} - \theta_1 k + \theta_3 - \theta_4 \right) u_{2t}^n + \\ & \left( -\theta_3 k + \frac{k^3}{6} - \theta_6 - \theta_5 - \theta_1 \frac{k^2}{2} \right) u_{3t}^n + \\ & \left( -\theta_3 \frac{k^2}{2} + \frac{k^4}{24} - \theta_5 k - \theta_1 \frac{k^3}{6} \right) u_{4t}^n + \\ & \left( -\theta_3 \frac{k^3}{6} - \theta_5 \frac{k^2}{2} - \theta_1 \frac{k^4}{24} + \frac{k^5}{120} \right) u_{5t}^n + \\ & \left( -\theta_5 \frac{k^3}{6} - \theta_3 \frac{k^4}{24} + \frac{k^6}{720} - \theta_1 \frac{k^5}{120} \right) u_{6t}^n + \\ & \left( \frac{k^7}{540} - \theta_5 \frac{k^4}{24} - \theta_3 \frac{k^5}{120} - \theta_1 \frac{k^6}{720} \right) u_{7t}^n + \dots = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

bulunur.

### 3.3.1. Zaman parçalanması için 1. yöntem

Zaman parçalanması için önerilen ilk yöntem daha önce bir çok çalışmacı tarafından da sıklıkla kullanılan Crank-Nicolson zaman parçalanması olacaktır. Yöntem için (3.11) sisteminde

$$\theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 0$$

seçimi yapılarak doğruluğu en yüksek yapacak şekilde  $\theta_1$  ve  $\theta_2$  bilinmeyenleri bulunmalıdır. Bu durumda gereken 2 denklem

$$k - \theta_1 - \theta_2 = 0, \quad (3.12)$$

$$\frac{k^2}{2!} - \theta_1 k = 0 \quad (3.13)$$

olacaktır. (3.12-3.13) denklemleri çözülrse

$$\theta_1 = \frac{k}{2}, \theta_2 = \frac{k}{2} \quad (3.14)$$

bilinmeyenleri elde edilir. Bulunan bilinmeyenler (3.11) eştiliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{k^3 u_{3t}^n}{12} + \frac{k^4 u_{4t}^n}{24} + \dots \quad (3.15)$$

bulunacağından önerilen zaman parçalanması için doğruluk 2 olacaktır.

### 3.3.2. Zaman parçalanması için 2. yöntem

Zaman parçalanması için önerilen ikinci yöntemin doğruluğu Crank-Nicolson zaman parçalanmasına göre daha yüksek olacaktır. Yöntem için (3.11) sisteminde

$$\theta_5 = \theta_6 = 0$$

alınarak doğruluğu en yüksek yapacak şekilde  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  ve  $\theta_4$  bilinmeyenleri bulunmalıdır. Bu durumda gereken 4 denklem

$$-\theta_2 - \theta_1 + k = 0, \quad (3.16)$$

$$\frac{k^2}{2} - \theta_1 k - \theta_4 - \theta_3 = 0, \quad (3.17)$$

$$-\theta_3 k + \frac{k^3}{6} - \theta_1 \frac{k^2}{2} = 0, \quad (3.18)$$

$$-\theta_1 \frac{k^3}{6} + \frac{k^3}{24} - \theta_3 \frac{k^2}{2} = 0 \quad (3.19)$$

olarak bulunur. (3.16-3.19) denklemleri çözülrse

$$\theta_1 = \frac{k}{2}, \theta_2 = \frac{k}{2}, \theta_3 = -\frac{k^2}{12}, \theta_4 = \frac{k^2}{12} \quad (3.20)$$

bilinmeyenleri elde edilir. Bulunan bilinmeyenler (3.11) eştiliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{k^5 u_{5t}^n}{120} + \frac{k^6 u_{6t}^n}{1440} + \dots \quad (3.21)$$

bulunacağından önerilen zaman parçalanması için doğruluk 4 olacaktır. Dolayısıyla Crank-Nicolson zaman parçalanmasının doğruluğuna göre daha yüksek bir doğruluk elde edilmiş olur.

### 3.3.3. Zaman parçalanması için 3. yöntem

Zaman parçalanmasının doğruluğunu ilk iki yönteme göre daha yüksek yapmak için belirlenmesi gereken

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$$

olmak üzere toplam 6 bilinmeyen vardır. Bu durumda gereken 6 denklem (3.11) eşitliğinden

$$k - \theta_1 - \theta_2 = 0, \quad (3.22)$$

$$\frac{k^2}{2!} - \theta_1 k + \theta_3 - \theta_4 = 0, \quad (3.23)$$

$$-\theta_3 k + \frac{k^3}{6} - \theta_6 - \theta_5 - 1/2\theta_1 k^2 = 0, \quad (3.24)$$

$$-\theta_3 \frac{k^2}{2} + \frac{k^4}{24} - \theta_5 k - \theta_1 \frac{k^3}{6} = 0, \quad (3.25)$$

$$-\theta_3 \frac{k^3}{6} - \theta_5 \frac{k^2}{2} - \theta_1 \frac{k^4}{24} + \frac{k^5}{120} = 0, \quad (3.26)$$

$$-\theta_5 \frac{k^3}{6} - \theta_3 \frac{k^4}{24} + \frac{k^6}{720} - \theta_1 \frac{k^5}{120} = 0 \quad (3.27)$$

olarak bulunabilir. (3.22-3.27) denklemleri çözümlerse

$$\theta_1 = \frac{k}{2}, \theta_2 = \frac{k}{2}, \theta_3 = -\frac{k^2}{10}, \theta_4 = \frac{k^2}{10}, \theta_5 = \frac{k^3}{120}, \theta_6 = \frac{k^3}{120} \quad (3.28)$$

bilinmeyenleri elde edilir. Hesaplanan altı bilinmeyen (3.11) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{k^7 u_{7t}^n}{100800} + \frac{k^8 u_{8t}^n}{201600} + \dots \quad (3.29)$$

bulunacağından önerilen zaman parçalanması için doğruluk 6 olacaktır.

Sonuç olarak zaman parçalanması için bu tezde önerilecek 3 metot

$$\text{Metot 1 : } \theta_1 = \theta_2 = \frac{k}{2}, \theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 0 \quad (\text{doğruluk 2})$$

$$\text{Metot 2 : } \theta_1 = \theta_2 = \frac{k}{2}, \theta_3 = -\frac{k^2}{12}, \theta_4 = \frac{k^2}{12}, \theta_5 = \theta_6 = 0 \quad (\text{doğruluk 4})$$

$$\text{Metot 3 : } \theta_1 = \theta_2 = \frac{k}{2}, \theta_3 = -\frac{k^2}{10}, \theta_4 = \frac{k^2}{10}, \theta_5 = \frac{k^3}{120}, \theta_6 = \frac{k^3}{120} \quad (\text{doğruluk 6})$$

olarak elde edilir.

### 3.4. Zaman Parçalanmalarının Uygulanması

AD denklemine

$$u^{n+1} - \theta_1 u_t^{n+1} - \theta_3 u_{tt}^{n+1} - \theta_5 u_{ttt}^{n+1} = u^n + \theta_2 u_t^n + \theta_4 u_{tt}^n + \theta_6 u_{ttt}^n$$

önerilen zaman parçalanmasını uygulayabilmek için öncelikle denklem

$$u_t = \mu u_{2x} - \alpha u_x \quad (3.30)$$

olarak yazılmalıdır. Eşitliğin her iki tarafının zamana göre türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} u_{2t} &= (\mu u_{2x} - \alpha u_x)_t \\ &= \mu (u_t)_{2x} - \alpha (u_t)_x \\ &= \mu (\mu u_{2x} - \alpha u_x)_{2x} - \alpha (\mu u_{2x} - \alpha u_x)_x \\ u_{2t} &= \mu^2 u_{4x} - 2\mu\alpha u_{3x} + \alpha^2 u_{2x} \end{aligned} \quad (3.31)$$

ve

$$\begin{aligned} u_{3t} &= (\mu^2 u_{4x} - 2\mu\alpha u_{3x} + \alpha^2 u_{2x})_t \\ &= \mu^2 (u_t)_{4x} - 2\mu\alpha (u_t)_{3x} + \alpha^2 (u_t)_{2x} \\ &= \mu^2 (\mu u_{2x} - \alpha u_x)_{4x} - 2\mu\alpha (\mu u_{2x} - \alpha u_x)_{3x} \\ &\quad + \alpha^2 (\mu u_{2x} - \alpha u_x)_{2x} \\ u_{3t} &= \mu^3 u_{6x} - 3\mu^2 \alpha u_{5x} + 3\mu\alpha^2 u_{4x} - \alpha^3 u_{3x} \end{aligned} \quad (3.32)$$

bulunur. Böylece AD denklemi için önerilen

$$u^{n+1} - \theta_1 u_t^{n+1} - \theta_3 u_{tt}^{n+1} - \theta_5 u_{ttt}^{n+1} = u^n + \theta_2 u_t^n + \theta_4 u_{tt}^n + \theta_6 u_{ttt}^n$$

zaman parçalanmasında elde edilen (3.30-3.31-3.32) eşitlikleri kullanıldığında

$$\begin{aligned} &u^{n+1} - \theta_1 (\mu u_{2x} - \alpha u_x)^{n+1} - \theta_3 (\mu^2 u_{4x} - 2\mu\alpha u_{3x} + \alpha^2 u_{2x})^{n+1} \\ &- \theta_5 (\mu^3 u_{6x} - 3\mu^2 \alpha u_{5x} + 3\mu\alpha^2 u_{4x} - \alpha^3 u_{3x})^{n+1} = u^n + \theta_2 (\mu u_{2x} - \alpha u_x)^n \\ &+ \theta_4 (\mu^2 u_{4x} - 2\mu\alpha u_{3x} + \alpha^2 u_{2x})^n + \theta_6 (\mu^3 u_{6x} - 3\mu^2 \alpha u_{5x} + 3\mu\alpha^2 u_{4x} - \alpha^3 u_{3x})^n \end{aligned}$$

elde edilir. Düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} &u^{n+1} + \alpha\theta_1 u_x^{n+1} - (\mu\theta_1 + \alpha^2\theta_3) u_{2x}^{n+1} + (2\mu\alpha\theta_3 + \alpha^3\theta_5) u_{3x}^{n+1} \\ &- (\mu^2\theta_3 + 3\mu\alpha^2\theta_5) u_{4x}^{n+1} + 3\mu^2\alpha\theta_5 u_{5x}^{n+1} - \mu^3\theta_5 u_{6x}^{n+1} = u^n - \alpha\theta_2 u_x^n \\ &- (\mu\theta_2 + \alpha^2\theta_4) u_{2x}^n - (2\mu\alpha\theta_4 + \alpha^3\theta_6) u_{3x}^n + (\mu^2\theta_4 + 3\mu\alpha^2\theta_6) u_{4x}^n \\ &- 3\mu^2\alpha\theta_6 u_{5x}^n + \mu^3\theta_6 u_{6x}^n \end{aligned} \quad (3.33)$$

olarak AD denkleminin zaman parçalanması yapılmış formuna ulaşılır. Elde edilen denklem bundan sonraki bölümlerde yapılacak konum parçalanmaları için ortak olacaktır. Tekrarlamak gerekirse (3.33) denkleminde

$$1. \theta_1 = \theta_2 = \frac{k}{2}, \theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 0,$$

$$2. \theta_1 = \theta_2 = \frac{k}{2}, \theta_3 = -\frac{k^2}{12}, \theta_4 = \frac{k^2}{12}, \theta_5 = \theta_6 = 0,$$

$$3. \theta_1 = \theta_2 = \frac{k}{2}, \theta_3 = -\frac{k^2}{10}, \theta_4 = \frac{k^2}{10}, \theta_5 = \frac{k^3}{120}, \theta_6 = \frac{k^3}{120},$$

alındığında sırasıyla doğruluğu 2., 4. ve 6. mertebeden olan zaman parçalanmaları elde edilecektir.



## 4. KUARTİK B-SPLINE GALERKİN METODU

Bu bölümde AD denkleminin yaklaşık çözümü için kuartik B-spline Galerkin yöntemi kullanılacaktır.

$[a, b]$  aralığının eşit aralıklı bir parçalanması üzerinde tanımlanan  $\phi_m$  fonksiyonları  $x_m$  noktasındaki kuartik B-spline fonksiyonları gösterebiliriz.  $\phi_m$  kuartik B-spline fonksiyonları

olmak üzere

$$g_m(x) = x - x_m$$

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^4} \begin{cases} g_{m-2}^4(x), & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}) \\ g_{m-2}^4(x) - 5g_{m-1}^4(x), & x \in [x_{m-1}, x_m) \\ g_{m-2}^4(x) - 5g_{m-1}^4(x) + 10g_m^4(x), & x \in [x_m, x_{m+1}) \\ g_{m+3}^4(x) - 5g_{m+2}^4(x), & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}) \\ g_{m+3}^4(x), & x \in [x_{m+2}, x_{m+3}) \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (4.1)$$

formunda verilen parçalı polinom fonksiyonlardır. Bu durumda

$$\phi_{-2}, \phi_{-1}, \dots, \phi_{N+1}, \phi_{N+1}$$

kuartik B-spline fonksiyonları  $[a, b]$  üzerinde tanımlanmış fonksiyonlar için bir tabandır.

$$\phi_{-2}, \phi_{-1}, \dots, \phi_{N+1}, \phi_{N+1}$$

kuartik B-spline fonksiyonları taban fonksiyonlar olarak alındığında  $u(x, t)$  çözümü için yaklaşık çözüm

$$u(x, t) \simeq U(x, t) = \sum_{m=-2}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (4.2)$$

olarak araştırılır.  $U(x, t)$  fonksiyonuna test veya deneme fonksiyonu denir.  $\phi_m(x)$  kuartik B-spline fonksiyonları  $[x_{m-2}, x_{m+3}]$  aralığını örtmektedir ve  $\phi_m(x)$  kuartik B-spline fonksiyonlarının ilk üç türevi,  $[x_{m-2}, x_{m+3}]$  aralığının dışında sıfır olacaktır. Dolayısıyla  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı

$$\phi_{m-2}(x), \phi_{m-1}(x), \phi_m(x), \phi_{m+1}(x), \phi_{m+2}(x)$$

olmak üzere toplam 5 ardışık kuartik B-spline fonksiyonları tarafından örtülecektir. Bu durumda  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı üzerindeki  $u$  bilinmeyen fonksiyonu için yaklaşım fonksiyonu

$$U(x, t) = \sum_{j=m-2}^{m+2} \phi_j(x) \delta_j(t) \quad (4.3)$$

eşitliği ile hesaplanabilir.

(4.1) parçalı polinom fonksiyonlarından

$$\begin{aligned} \phi_m(x_{m+2}) &= \frac{g_{m+3}^4(x_{m+2})}{h^4} = \frac{(x_{m+2} - x_{m+3})^4}{h^4} = \frac{(-h)^4}{h^4} = 1 \\ \phi_m(x_{m+1}) &= \frac{g_{m+3}^4(x_{m+1}) - 5g_{m+2}^4(x_{m+1})}{h^4} \\ &= \frac{(x_{m+1} - x_{m+3})^4 - 5(x_{m+1} - x_{m+2})^4}{h^4} = \frac{(-2h)^4 - 5(-h)^4}{h^4} = 11 \\ \phi_m(x_m) &= \frac{g_{m-2}^4(x_m) - 5g_{m-1}^4(x_m) + 10g_m^4(x_m)}{h^4} \\ &= \frac{(x_m - x_{m-2})^4 - 5(x_m - x_{m-1})^4 + 10(x_m - x_m)^4}{h^4} = \frac{(2h)^4 - 5(h)^4}{h^4} = 11 \\ \phi_m(x_{m-1}) &= \frac{g_{m-2}^4(x) - 5g_{m-1}^4(x)}{h^4} \\ &= \frac{(x_{m-1} - x_{m-2})^4 - 5(x_{m-1} - x_{m-1})^4}{h^4} = \frac{(-h)^4}{h^4} = 1 \\ \phi_m(x_{m-2}) &= \frac{g_{m-2}^4(x_{m-2})}{h^4} = \frac{(x_{m-2} - x_{m-2})^4}{h^4} = 0 \end{aligned}$$

bulunabilir. Benzer şekilde işlemlerin yapılmasıyla ', '' ve ''' sırasıyla  $x$ 'e göre birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden türevleri göstermek üzere,  $[x_{m-2}, x_{m+3}]$  aralığındaki

$$\phi_m(x), \phi_m'(x), \phi_m''(x) \text{ ve } \phi_m'''(x)$$

kuartik B-spline fonksiyonlarının bölünme noktalarındaki değerleri Çizelge 4.1 de bulunabilir.

Çizelge 4.1: Bölünme noktalarındaki kuartik B-spline değerleri

$x$	$x_{m-2}$	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$	$x_{m+3}$
$\phi_m$	0	1	11	11	1	0
$\frac{4}{h}\phi_m'$	0	1	3	-3	-1	0
$\frac{12}{h^2}\phi_m''$	0	1	-1	-1	1	0
$\frac{24}{h^3}\phi_m'''$	0	1	-3	3	-1	0

Çizelge 4.1 ile (4.3) eşitliğinin kullanılmasıyla  $U_m$

$$\begin{aligned}
U_m &= U(x_m) = \sum_{j=m-2}^{m+2} \phi_j(x_m) \delta_j(t) \\
&= \phi_{m-2}(x_m) \delta_{m-2} + \phi_{m-1}(x_m) \delta_{m-1} + \phi_m(x_m) \delta_m + \phi_{m+1}(x_m) \delta_{m+1} + \phi_{m+2}(x_m) \delta_{m+2} \\
&= \delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu durumda  $U_m$  ve onun ilk üç türevi

$$U_m = U(x_m) = \sum_{j=m-2}^{m+2} \phi_j(x) \delta_j(t) = \delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1}, \quad (4.4)$$

$$U'_m = U'(x_m) = \frac{4}{h} (-\delta_{m-2} - 3\delta_{m-1} + 3\delta_m + \delta_{m+1}), \quad (4.5)$$

$$U''_m = U''(x_m) = \frac{12}{h^2} (\delta_{m-2} - \delta_{m-1} - \delta_m + \delta_{m+1}), \quad (4.6)$$

$$U'''_m = U'''(x_m) = \frac{24}{h^3} (-\delta_{m-2} + 3\delta_{m-1} - 3\delta_m + \delta_{m+1}) \quad (4.7)$$

olarak elde edilir.  $\xi = x - x_m$  dönüşümü yapılırsa  $x \in [x_m, x_{m+1}]$  sonlu elemanı  $\xi \in [0, h]$  aralığına dönüşecektir. Bu durumda  $[0, h]$  aralığı üzerindeki şekil fonksiyonları

$$\phi_{m-2}(\xi) = 1 - 4\frac{\xi}{h} + 6\left(\frac{\xi}{h}\right)^2 - 4\left(\frac{\xi}{h}\right)^3 + \left(\frac{\xi}{h}\right)^4, \quad (4.8)$$

$$\phi_{m-1}(\xi) = 11 - 12\frac{\xi}{h} - 6\left(\frac{\xi}{h}\right)^2 + 12\left(\frac{\xi}{h}\right)^3 - 4\left(\frac{\xi}{h}\right)^4, \quad (4.9)$$

$$\phi_m(\xi) = 11 + 12\frac{\xi}{h} - 6\left(\frac{\xi}{h}\right)^2 - 12\left(\frac{\xi}{h}\right)^3 + 6\left(\frac{\xi}{h}\right)^4, \quad (4.10)$$

$$\phi_{m+1}(\xi) = 1 + 4\frac{\xi}{h} + 6\left(\frac{\xi}{h}\right)^2 + 4\left(\frac{\xi}{h}\right)^3 - 4\left(\frac{\xi}{h}\right)^4, \quad (4.11)$$

$$\phi_{m+2}(\xi) = \left(\frac{\xi}{h}\right)^4 \quad (4.12)$$

olarak elde edilebilir. AD denklemi için zaman ayrıştırması sonucu elde edilen

$$\begin{aligned}
&u^{n+1} + \alpha\theta_1 u_x^{n+1} - (\mu\theta_1 + \alpha^2\theta_3) u_{2x}^{n+1} + (2\mu\alpha\theta_3 + \alpha^3\theta_5 u_{3x}) u_{3x}^{n+1} - \\
&(\mu^2\theta_3 + 3\mu\alpha^2\theta_5) u_{4x}^{n+1} + 3\mu^2\alpha\theta_5 u_{5x}^{n+1} - \mu^3\theta_5 u_{6x}^{n+1} = \\
&u^n - \alpha\theta_2 u_x^n - (\mu\theta_2 + \alpha^2\theta_4) u_{2x}^n - (2\mu\alpha\theta_4 + \alpha^3\theta_6 u_{3x}) u_{3x}^n \\
&+ (\mu^2\theta_4 + 3\mu\alpha^2\theta_6) u_{4x}^n - 3\mu^2\alpha\theta_6 u_{5x}^n + \mu^3\theta_6 u_{6x}^n
\end{aligned}$$

eşitliği  $W(x)$  ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak konum aralığı üzerinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
& \int_a^b W(x) (u^{n+1} + \alpha\theta_1 u_x^{n+1} - (\mu\theta_1 + \alpha^2\theta_3) u_{2x}^{n+1} + (2\mu\alpha\theta_3 + \alpha^3\theta_5) u_{3x}^{n+1} - \\
& (\mu^2\theta_3 + 3\mu\alpha^2\theta_5) u_{4x}^{n+1} + 3\mu^2\alpha\theta_5 u_{5x}^{n+1} - \mu^3\theta_5 u_{6x}^{n+1}) dx = \\
& \int_a^b W(x) (u^n - \alpha\theta_2 u_x^n - (\mu\theta_2 + \alpha^2\theta_4) u_{2x}^n - (2\mu\alpha\theta_4 + \alpha^3\theta_6) u_{3x}^n + \\
& (\mu^2\theta_4 + 3\mu\alpha^2\theta_6) u_{4x}^n - 3\mu^2\alpha\theta_6 u_{5x}^n + \mu^3\theta_6 u_{6x}^n) dx
\end{aligned} \tag{4.13}$$

eşitliğine ulaşılır. Kısmi integrasyondan

$$\begin{aligned}
\int_a^b W(x) u_{4x} dx &= W(x) u_{3x} \Big|_a^b - \int_a^b W_x(x) u_{3x} dx, \\
\int_a^b W(x) u_{4x} dx &= - \int_a^b W_x(x) u_{3x} dx, \\
\int_a^b W(x) u_{5x} dx &= W(x) u_{4x} \Big|_a^b - \int_a^b W_x(x) u_{4x} dx \\
&= W(x) u_{4x} \Big|_a^b - W_x(x) u_{3x} \Big|_a^b + \int_a^b W_{2x}(x) u_{3x} dx \\
\int_a^b W(x) u_{5x} dx &= \int_a^b W_{2x}(x) u_{3x} dx
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\int_a^b W(x) u_{6x} dx &= W(x) u_{5x} \Big|_a^b - \int_a^b W_x(x) u_{5x} dx \\
&= W(x) u_{5x} \Big|_a^b - W_x(x) u_{4x} \Big|_a^b + \int_a^b W_{2x}(x) u_{4x} dx \\
&= W(x) u_{5x} \Big|_a^b - W_x(x) u_{4x} \Big|_a^b - W_{2x}(x) u_{3x} \Big|_a^b - \int_a^b W_{3x}(x) u_{3x} dx \\
\int_a^b W(x) u_{6x} dx &= - \int_a^b W_{3x}(x) u_{3x} dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece kısmi integrasyon uygulandıktan sonra (4.13) denklemi

$$\begin{aligned}
& \int_a^b W(x) (u^{n+1} + \alpha\theta_1 u_x^{n+1} - (\mu\theta_1 + \alpha^2\theta_3) u_{2x}^{n+1} + (2\mu\alpha\theta_3 + \alpha^3\theta_5) u_{3x}^{n+1}) dx + \\
& (\mu^2\theta_3 + 3\mu\alpha^2\theta_5) \int_a^b W_x(x) u_{3x}^{n+1} dx + 3\mu^2\alpha\theta_5 \int_a^b W_{2x}(x) u_{3x}^{n+1} dx + \\
& \mu^3\theta_5 \int_a^b W_{3x}(x) u_{3x}^{n+1} dx = \\
& \int_a^b W(x) (u^n - \alpha\theta_2 u_x^n - (\mu\theta_2 + \alpha^2\theta_4) u_{2x}^n - (2\mu\alpha\theta_4 + \alpha^3\theta_6) u_{3x}^n) dx - \\
& (\mu^2\theta_4 + 3\mu\alpha^2\theta_6) \int_a^b W_x(x) u_{3x}^n dx - 3\mu^2\alpha\theta_6 \int_a^b W_{2x}(x) u_{3x}^n dx \\
& - \mu^3\theta_6 \int_a^b W_{3x}(x) u_{3x}^n dx
\end{aligned} \tag{4.14}$$

olarak yazılabilir. Ağırlıklı rezidü metotlarından olan Galerkin metodunda ağırlık fonksiyonu içinde taban fonksiyonları seçilir. Dolayısıyla  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı üzerinde  $W(x)$  ağırlık fonksiyonu yerine taban fonksiyonu ve  $u$ ,  $u_x, u_{2x}$  ile  $u_{3x}$  yerine (4.3) kuartik B-Spline fonksiyon yaklaşımı kullanılacaktır.  $\xi = x - x_m$  dönüşümü yapılırsa  $x \in [x_m, x_{m+1}]$  sonlu elemanı  $\xi \in [0, h]$  aralığına dönüşecektir. Bu durumda  $[0, h]$  aralığı üzerindeki yaklaşım  $i = m - 2, \dots, m + 2$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-2}^{m+2} \left[ \int_0^h \phi_i (\phi_j + \alpha\theta_1 \phi_j' - (\mu\theta_1 + \alpha^2\theta_3) \phi_j'' + (2\mu\alpha\theta_3 + \alpha^3\theta_5) \phi_j''') d\xi + \right. \\
& \left. \int_0^h \phi_i' (\mu^2\theta_3 + 3\mu\alpha^2\theta_5) \phi_j''' d\xi + 3\mu^2\alpha\theta_5 \int_0^h \phi_i'' \phi_j'''' d\xi + \mu^3\theta_5 \int_0^h \phi_i''' \phi_j'''' d\xi \right] \delta_j^{n+1} - \\
& \sum_{j=m-2}^{m+2} \left[ \int_0^h \phi_i (\phi_j - \alpha\theta_2 \phi_j' - (\mu\theta_2 + \alpha^2\theta_4) \phi_j'' - (2\mu\alpha\theta_4 + \alpha^3\theta_6) \phi_j''') d\xi - \right. \\
& \left. \int_0^h \phi_i' (\mu^2\theta_4 + 3\mu\alpha^2\theta_6) \phi_j'''' d\xi - 3\mu^2\alpha\theta_6 \int_0^h \phi_i'' \phi_j'''' d\xi - \mu^3\theta_6 \int_0^h \phi_i''' \phi_j'''' d\xi \right] \delta_j^n
\end{aligned} \tag{4.15}$$

olarak bulunur.

$$A_{i,j}^e = \int_0^h \phi_i \phi_j d\xi, \quad B_{i,j}^e = \int_0^h \phi_i \phi_j' d\xi, \quad C_{i,j}^e = \int_0^h \phi_i \phi_j'' d\xi,$$

$$D_{i,j}^e = \int_0^h \phi_i \phi_j''' d\xi, \quad E_{i,j}^e = \int_0^h \phi_i' \phi_j'''' d\xi, \quad F_{i,j}^e = \int_0^h \phi_i'' \phi_j'''' d\xi$$

$$G_{i,j}^e = \int_0^h \phi_i''' \phi_j'''' d\xi$$

ve  $m = 0, 1, \dots, N - 1$  için

$$\boldsymbol{\delta}^e = (\delta_{m-2}, \dots, \delta_{m+2})^T$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{A}^e + \alpha\theta_1\mathbf{B}^e - (\mu\theta_1 + \alpha^2\theta_3)\mathbf{C}^e + (2\mu\alpha\theta_3 + \alpha^3\theta_5)\mathbf{D}^e + \\
& (\mu^2\theta_3 + 3\mu\alpha^2\theta_5)\mathbf{E}^e + 3\mu^2\alpha\theta_5\mathbf{F}^e + \mu^3\theta_5\mathbf{G}^e] (\boldsymbol{\delta}^e)^{n+1} - \\
& [\mathbf{A}^e - \alpha\theta_2\mathbf{B}^e - (\mu\theta_2 + \alpha^2\theta_4)\mathbf{C}^e - (2\mu\alpha\theta_4 + \alpha\theta_6)\mathbf{D}^e - \\
& (\mu^2\theta_4 + 3\mu\alpha^2\theta_6)\mathbf{E}^e + 3\mu^2\alpha\theta_6\mathbf{F}^e - \mu^3\theta_6\mathbf{G}^e] (\boldsymbol{\delta}^e)^n
\end{aligned} \tag{4.16}$$

olarak tanım aralığı üzerindeki her bir alt aralıktaki yaklaşım, eleman matrisleri kullanılarak elde edilir.  $\mathbf{A}^e$ ,  $\mathbf{B}^e$ ,  $\mathbf{C}^e$ ,  $\mathbf{D}^e$ ,  $\mathbf{E}^e$ ,  $\mathbf{F}^e$  ve  $\mathbf{G}^e$  eleman matrislerinin birbirlerine eklenmesi sonucunda

$$\boldsymbol{\delta} = (\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1})^T$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{A} + \alpha\theta_1\mathbf{B} - (\mu\theta_1 + \alpha^2\theta_3)\mathbf{C} + (2\mu\alpha\theta_3 + \alpha^3\theta_5)\mathbf{D} + \\
& (\mu^2\theta_3 + 3\mu\alpha^2\theta_5)\mathbf{E} + 3\mu^2\alpha\theta_5\mathbf{F} + \mu^3\theta_5\mathbf{G}] \boldsymbol{\delta}^{n+1} = \\
& [\mathbf{A} - \alpha\theta_2\mathbf{B} - (\mu\theta_2 + \alpha^2\theta_4)\mathbf{C} - (2\mu\alpha\theta_4 + \alpha^3\theta_6)\mathbf{D} - \\
& (\mu^2\theta_4 + 3\mu\alpha^2\theta_6)\mathbf{E} + 3\mu^2\alpha\theta_6\mathbf{F} - \mu^3\theta_6\mathbf{G}] \boldsymbol{\delta}^n
\end{aligned} \tag{4.17}$$

sistemi elde edilir. Elde edilen sistem  $N + 4$  bilinmeyen  $N + 4$  denklemden oluşan lineer bir sistemdir ve bir satırında en fazla 9 tane sıfır olmayan eleman içermektedir. İlk ve son denklemler (4.17) sisteminden silinerek

$$u(a, t) = u(b, t) = 0$$

sınır şartları sisteme eklenebilir. Böylece denklem sistemi  $N + 4$  bilinmeyen  $N + 4$  denklemden oluşan bir sisteme dönecektir. Denklem sistemindeki bilinmeyenlerin yani

$$\delta_{-2}^{n+1}, \delta_{-1}^{n+1}, \dots, \delta_N^{n+1}, \delta_{N+1}^{n+1}$$

değerlerinin bulunabilmesi için öncelikle

$$\delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0, \dots, \delta_N^0, \delta_{N+1}^0$$

bilinmeyenleri bulunmalıdır. Bunun için  $m = 0, \dots, N$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
u'(x_0, 0) &= f'(x_0) \\
u''(x_0, 0) &= f''(x_0) \\
u(x_m, 0) &= \delta_{m-2}^0 + 11\delta_{m-1}^0 + 11\delta_m^0 + \delta_{m+1}^0 = f(x_m), \\
u'(x_N, 0) &= f'(x_N)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

olarak verilen sınır şartları ve başlangıç şartı kullanılabilir. Böylece  $N + 4$  bilinmeyen  $N + 4$  denklemden oluşan bir sistem elde edilir. Denklem sistemi çözüldüğünde

$$\delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0, \dots, \delta_N^0, \delta_{N+1}^0$$

başlangıç bilinmeyenleri elde edilir. İteratif olarak  $n = 0, 1, 2, \dots$  için (4.17) denklem sistemi çözülrse

$$\delta_{-2}^{n+1}, \delta_{-1}^{n+1}, \dots, \delta_N^{n+1}, \delta_{N+1}^{n+1}$$

elde edilir. Böylece  $x_m, m = 0, \dots, N$  noktasındaki  $U_m^{n+1}$  değerleri

$$U_m^{n+1} = \delta_{m-2}^{n+1} + 11\delta_{m-1}^{n+1} + 11\delta_m^{n+1} + \delta_{m+1}^{n+1}$$

kuartik B-spline eşitliği kullanılarak her bir zaman adımında hesaplanabilir.

#### 4.1. Test Problemi

Test probleminde adveksiyon ve difüzyon etkisi birlikte incelenecektir. Bu problem için

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4t + 1}} \exp\left(-\frac{(x - \tilde{x}_0 - \alpha t)^2}{\mu(4t + 1)}\right)$$

analitik çözümü kullanılacaktır.  $t = 0$  için analitik çözümden başlangıç şartıda elde edilebilir.  $t = 0$  için başlangıç anında dalganın genliği 1br olup zaman geçtikçe dalganın genliği sönmektedir. Bu bölümde  $\alpha = 0.8 \text{ m/s}$ ,  $\mu = 0.005 \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\tilde{x}_0 = 1m$  seçimleri yapılarak  $t = 5$  zamanına kadar  $0 \leq x \leq 8m$  konum aralığında kuartik B-spline Galerkin metodu kullanılarak AD denklemi yaklaşık olarak çözülmüştür. Zamana göre doğrulukları sırasıyla 2., 4. ve 6. mertebeden olan üç farklı metot için konum artım uzunluğu  $h = 0.01$  olarak yeterince küçük alınmış ve farklı zaman artım uzunlukları için maksimum hata normları ile yakınsaklık oranları hesaplanarak Çizelge 4.2 de verilmiştir.

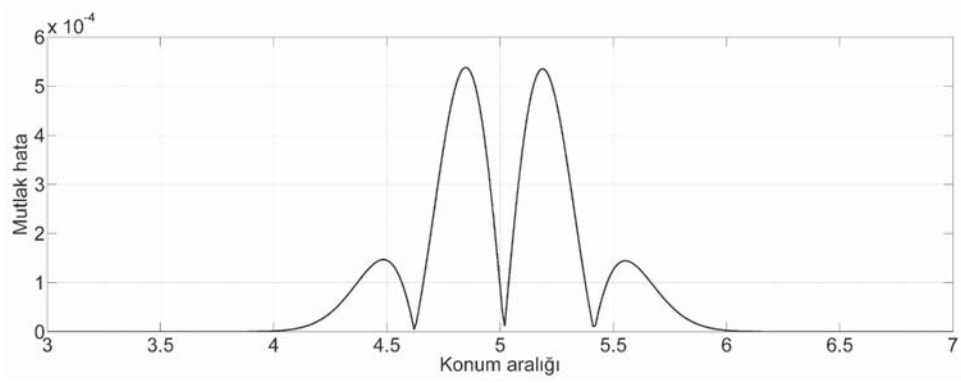
Çizelge 4.2:  $h = 0.01$  için hata normları ve yakınsaklık oranları

$k$	Metot 1		Metot 2		Metot 3	
	$L_\infty$	YO	$L_\infty$	YO	$L_\infty$	YO
1	0.55	1.28	0.26	1.94	0.13	3.06
0.5	0.23	0.78	$6.91 \times 10^{-2}$	2.50	$1.51 \times 10^{-2}$	5.11
0.2	0.11	1.06	$6.97 \times 10^{-3}$	3.96	$1.40 \times 10^{-4}$	5.86
0.1	$5.36 \times 10^{-2}$	1.90	$4.48 \times 10^{-4}$	3.98	$2.40 \times 10^{-6}$	5.96
0.05	$1.43 \times 10^{-2}$	2.06	$2.85 \times 10^{-5}$	3.99	$3.85 \times 10^{-8}$	5.99
0.02	$2.17 \times 10^{-3}$	2.01	$7.35 \times 10^{-7}$	4.00	$1.59 \times 10^{-10}$	6.00
0.01	$5.38 \times 10^{-4}$		$4.60 \times 10^{-8}$		$2.49 \times 10^{-12}$	

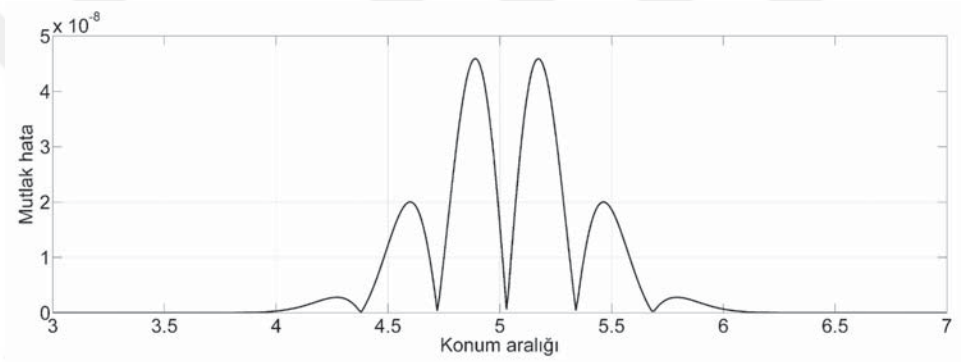
Çizelge incelendiğinde en düşük hataların zamana göre doğruluğu en yüksek olan Metot 3 de elde edildiği ve ayrıca zaman artım uzunluğu azalırken önerilen metotların zaman parçalanması doğruluklarında yakınsama oranları ile uyumlu oldukları görülebilir.

Şekil 4.1 de her bir metot için  $h = 0.01$  konum ve  $k = 0.01$  zaman artım değerleri kullanılarak çizdirilen mutlak hata grafikleri verilmiştir. Tüm hata grafiklerinde maksimum hataların sınırlarda gelmediği görülebilir.

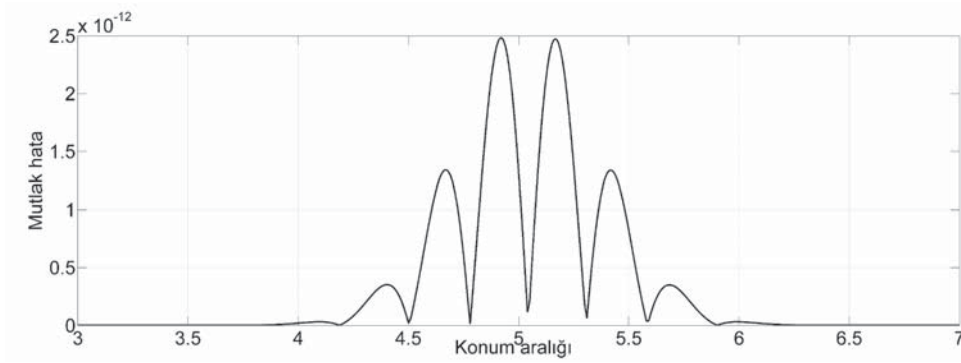




Metot 1



Metot 2



Metot3

Şekil 4.1: Mutlak hata grafikleri

## 5. KUİNTİK B-SPLINE GALERKİN METODU

Bu bölümde AD denkleminin yaklaşık çözümü için kuintik B-spline Galerkin yöntemi kullanılacaktır. Bu bölümde önerilen yaklaşık yöntemlerin 2. ve 4. mertebeden doğruluğa sahip olan kısmı aynı zamanda Görgülü ve Irk (2016) tarafından da yapılmıştır. Bu bölümde, Görgülü ve Irk (2016) tarafından yapılan çalışmadan farklı olarak ayrıca 6. mertebeden doğruluğa sahip bir zaman parçalanması kullanılarak AD denkleminin yaklaşık çözümü araştırılacaktır.

$[a, b]$  aralığının eşit aralıklı bir parçalanması üzerinde tanımlanan  $\phi_m$  fonksiyonları  $x_m$  noktasındaki kuintik B-spline fonksiyonları gösterebilir.  $\phi_m$  kuintik B-spline fonksiyonları

$$g_m(x) = x - x_m$$

olmak üzere

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} g_{m-3}^5(x), & x \in [x_{m-3}, x_{m-2}) \\ g_{m-3}^5(x) - 6g_{m-2}^5(x), & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}) \\ g_{m-3}^5(x) - 6g_{m-2}^5(x) + 15g_{m-1}^5(x), & x \in [x_{m-1}, x_m) \\ g_{m-3}^5(x) - 6g_{m-2}^5(x) + 15g_{m-1}^5(x) \\ -20g_m^5(x), & x \in [x_m, x_{m+1}) \\ g_{m-3}^5(x) - 6g_{m-2}^5(x) + 15g_{m-1}^5(x) \\ -20g_m^5(x) + 15g_{m+1}^5(x), & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}) \\ g_{m-3}^5(x) - 6g_{m-2}^5(x) + 15g_{m-1}^5(x) \\ -20g_m^5(x) + 15g_{m+1}^5(x) - 6g_{m+2}^5(x), & x \in [x_{m+2}, x_{m+3}) \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (5.1)$$

formunda verilen parçalı polinom fonksiyonlardır. Bu durum da

$$\phi_{-2}, \phi_{-1}, \dots, \phi_{N+1}, \phi_{N+2}$$

kuintik B-spline fonksiyonları  $[a, b]$  üzerinde tanımlanmış fonksiyonlar için bir tabandır.

$$\phi_{-2}, \phi_{-1}, \dots, \phi_{N+1}, \phi_{N+2}$$

kuintik B-spline fonksiyonları taban fonksiyonlar olarak alındığında  $u(x, t)$  çözümünü için yaklaşık çözüm

$$u(x, t) \simeq U(x, t) = \sum_{m=-2}^{N+2} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (5.2)$$

olarak araştırılır.  $U(x, t)$  fonksiyonu bir önveki bölümde de söylendiği gibi test veya deneme fonksiyonu olarak adlandırılır.  $\phi_m(x)$  kuintik B-spline fonksiyonları  $[x_{m-3}, x_{m+3}]$  aralığını örtmektedir ve  $\phi_m(x)$  kuintik B-spline fonksiyonlarının ilk dört türevi,  $[x_{m-3}, x_{m+3}]$  aralığının dışında sıfır olacaktır. Dolayısıyla  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı

$$\phi_{m-2}(x), \phi_{m-1}(x), \phi_m(x), \phi_{m+1}(x), \phi_{m+2}(x), \phi_{m+3}(x)$$

olmak üzere toplam 6 ardışık kuintik B-spline fonksiyonları tarafından örtülecektir. Bu durumda  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı üzerindeki  $u$  değeri için yaklaşım fonksiyonu

$$U(x, t) = \sum_{j=m-2}^{m+3} \phi_j(x) \delta_j(t) \quad (5.3)$$

eşitliği ile hesaplanabilir.

(5.1) parçalı polinom fonksiyonlarından

$$\begin{aligned} \phi_m(x_{m+2}) &= \frac{1}{h^5} \begin{pmatrix} g_{m-3}^5(x_{m+2}) - 6g_{m-2}^5(x_{m+2}) + 15g_{m-1}^5(x_{m+2}) \\ -20g_m^5(x_{m+2}) + 15g_{m+1}^5(x_{m+2}) - 6g_{m+2}^5(x_{m+2}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{h^5} \begin{pmatrix} (x_{m+2} - x_{m-3})^5 - 6(x_{m+2} - x_{m-2})^5 + 15(x_{m+2} - x_{m-1})^5 \\ -20(x_{m+2} - x_m)^5 + 15(x_{m+2} - x_{m+1})^5 - 6(x_{m+2} - x_{m+2})^5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{h^5} ((5h)^5 - 6(4h)^5 + 15(3h)^5 - 20(2h)^5 + 15(h)^5 - 6(0)^5) = \frac{h^5}{h^5} = 1 \\ \phi_m(x_{m+1}) &= \frac{1}{h^5} \begin{pmatrix} g_{m-3}^5(x_{m+1}) - 6g_{m-2}^5(x_{m+1}) + 15g_{m-1}^5(x_{m+1}) \\ -20g_m^5(x_{m+1}) + 15g_{m+1}^5(x_{m+1}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{h^5} \begin{pmatrix} (x_{m+1} - x_{m-3})^5 - 6(x_{m+1} - x_{m-2})^5 + 15(x_{m+1} - x_{m-1})^5 \\ -20(x_{m+1} - x_m)^5 + 15(x_{m+1} - x_{m+1})^5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{h^5} ((4h)^5 - 6(3h)^5 + 15(2h)^5 - 20(h)^5 + 15(0)^5) = \frac{26h^5}{h^5} = 26 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_m(x_m) &= \frac{1}{h^5} (g_{m-3}^5(x_m) - 6g_{m-2}^5(x_m) + 15g_{m-1}^5(x_m) - 20g_m^5(x_m)) \\
&= \frac{1}{h^5} ((x_m - x_{m-3})^5 - 6(x_m - x_{m-2})^5 + 15(x_m - x_{m-1})^5 - 20(x_m - x_m)^5) \\
&= \frac{1}{h^5} ((3h)^5 - 6(2h)^5 + 15(h)^5 - 20(0)^5) = \frac{66h^5}{h^5} = 66 \\
\phi_m(x_{m-1}) &= \frac{1}{h^5} (g_{m-3}^5(x_{m-1}) - 6g_{m-2}^5(x_{m-1}) + 15g_{m-1}^5(x_{m-1})) \\
&= \frac{1}{h^5} ((x_{m-1} - x_{m-3})^5 - 6(x_{m-1} - x_{m-2})^5 + 15(x_{m-1} - x_{m-1})^5) \\
&= \frac{1}{h^5} ((2h)^5 - 6(h)^5 + 15(0)^5) = \frac{26h^5}{h^5} = 26 \\
\phi_m(x_{m-2}) &= \frac{1}{h^5} (g_{m-3}^5(x_{m-2}) - 6g_{m-2}^5(x_{m-2})) \\
&= \frac{1}{h^5} ((x_{m-2} - x_{m-3})^5 - 6(x_{m-2} - x_{m-2})^5) = \frac{1}{h^5} ((h)^5 - 6(0)^5) = 1 \\
\phi_m(x_{m-3}) &= \frac{1}{h^5} (g_{m-3}^5(x_{m-3})) = \frac{(x_{m-3} - x_{m-3})^4}{h^4} = 0
\end{aligned}$$

bulunabilir. Benzer şekilde işlemlerin yapılmasıyla ', ', '' ve <sup>(4)</sup> sırasıyla  $x$ 'e göre birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden türevleri göstermek üzere,  $[x_{m-3}, x_{m+3}]$  aralığındaki

$$\phi_m(x), \phi_m'(x), \phi_m''(x), \phi_m'''(x), \phi_m^{(4)}(x)$$

kuintik B-spline fonksiyonlarının bölünme noktalarındaki değerleri Çizelge 5.1 de verilmiştir.

Çizelge 5.1: Bölünme noktalarındaki kuintik B-spline değerleri

$x$	$x_{m-3}$	$x_{m-2}$	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$	$x_{m+3}$
$\phi_m$	0	1	26	66	26	1	0
$\frac{5}{h}\phi_m'$	0	1	10	0	-10	-1	0
$\frac{20}{h^2}\phi_m''$	0	1	2	-6	2	1	0
$\frac{60}{h^3}\phi_m'''$	0	1	-2	0	2	-1	0
$\frac{120}{h^4}\phi_m^{(4)}$	0	1	-4	6	-4	1	0

Çizelge 5.1 ile (5.3) eşitliğinin kullanılmasıyla  $U_m$

$$\begin{aligned}
U_m &= U(x_m) = \sum_{j=m-2}^{m+3} \phi_j(x_m) \delta_j(t) \\
&= \phi_{m-2}(x_m) \delta_{m-2} + \phi_{m-1}(x_m) \delta_{m-1} + \phi_m(x_m) \delta_m \\
&\quad + \phi_{m+1}(x_m) \delta_{m+1} + \phi_{m+2}(x_m) \delta_{m+2} + \phi_{m+3}(x_m) \delta_{m+3} \\
&= \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu durumda  $U_m$  ve onun ilk dört türevi

$$U_m = U(x_m) = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \quad (5.4)$$

$$U'_m = U'(x_m) = \frac{5}{h} (-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \quad (5.5)$$

$$U''_m = U''(x_m) = \frac{20}{h^2} (\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \quad (5.6)$$

$$U'''_m = U'''(x_m) = \frac{60}{h^3} (-\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \quad (5.7)$$

$$U^{(4)}_m = U^{(4)}(x_m) = \frac{120}{h^4} (\delta_{m-2} - 4\delta_{m-1} + 6\delta_m - 4\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \quad (5.8)$$

olarak bulunur.  $\xi = x - x_m$  dönüşümü yapılırsa  $x \in [x_m, x_{m+1}]$  sonlu elemanı  $\xi \in [0, h]$  aralığına dönüştürecektir. Bu durumda  $[0, h]$  aralığı üzerindeki şekil fonksiyonları

$$\phi_{m-2}(\xi) = 1 - 5\frac{\xi}{h} + 10\left(\frac{\xi}{h}\right)^2 - 10\left(\frac{\xi}{h}\right)^3 + 5\left(\frac{\xi}{h}\right)^4 - \left(\frac{\xi}{h}\right)^5, \quad (5.9)$$

$$\phi_{m-1}(\xi) = 26 - 50\frac{\xi}{h} + 20\left(\frac{\xi}{h}\right)^2 + 20\left(\frac{\xi}{h}\right)^3 - 20\left(\frac{\xi}{h}\right)^4 + 5\left(\frac{\xi}{h}\right)^5, \quad (5.10)$$

$$\phi_m(\xi) = 66 - 60\left(\frac{\xi}{h}\right)^2 + 30\left(\frac{\xi}{h}\right)^4 - 10\left(\frac{\xi}{h}\right)^5, \quad (5.11)$$

$$\phi_{m+1}(\xi) = 26 + 50\frac{\xi}{h} + 20\left(\frac{\xi}{h}\right)^2 - 20\left(\frac{\xi}{h}\right)^3 - 20\left(\frac{\xi}{h}\right)^4 + 10\left(\frac{\xi}{h}\right)^5, \quad (5.12)$$

$$\phi_{m+2}(\xi) = 1 + 5\frac{\xi}{h} + 10\left(\frac{\xi}{h}\right)^2 + 10\left(\frac{\xi}{h}\right)^3 + 5\left(\frac{\xi}{h}\right)^4 - 5\left(\frac{\xi}{h}\right)^5, \quad (5.13)$$

$$\phi_{m+3}(\xi) = \left(\frac{\xi}{h}\right)^5 \quad (5.14)$$

olarak elde edilebilir. AD denklemi için zaman parçalanması sonucu elde edilen

$$\begin{aligned}
&u^{n+1} + \alpha\theta_1 u_x^{n+1} - (\mu\theta_1 + \alpha^2\theta_3) u_{2x}^{n+1} + (2\mu\alpha\theta_3 + \alpha^3\theta_5 u_{3x}) u_{3x}^{n+1} - \\
&(\mu^2\theta_3 + 3\mu\alpha^2\theta_5) u_{4x}^{n+1} + 3\mu^2\alpha\theta_5 u_{5x}^{n+1} - \mu^3\theta_5 u_{6x}^{n+1} = \\
&u^n - \alpha\theta_2 u_x^n - (\mu\theta_2 + \alpha^2\theta_4) u_{2x}^n - (2\mu\alpha\theta_4 + \alpha^3\theta_6 u_{3x}) u_{3x}^n \\
&+ (\mu^2\theta_4 + 3\mu\alpha^2\theta_6) u_{4x}^n - 3\mu^2\alpha\theta_6 u_{5x}^n + \mu^3\theta_6 u_{6x}^n
\end{aligned}$$

eşitliği  $W(x)$  ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak konum aralığı üzerinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
& \int_a^b W(x) (u^{n+1} + \alpha\theta_1 u_x^{n+1} - (\mu\theta_1 + \alpha^2\theta_3) u_{2x}^{n+1} + (2\mu\alpha\theta_3 + \alpha^3\theta_5) u_{3x}^{n+1} - \\
& (\mu^2\theta_3 + 3\mu\alpha^2\theta_5) u_{4x}^{n+1} + 3\mu^2\alpha\theta_5 u_{5x}^{n+1} - \mu^3\theta_5 u_{6x}^{n+1}) dx = \\
& \int_a^b W(x) (u^n - \alpha\theta_2 u_x^n - (\mu\theta_2 + \alpha^2\theta_4) u_{2x}^n - (2\mu\alpha\theta_4 + \alpha^3\theta_6) u_{3x}^n + \\
& (\mu^2\theta_4 + 3\mu\alpha^2\theta_6) u_{4x}^n - 3\mu^2\alpha\theta_6 u_{5x}^n + \mu^3\theta_6 u_{6x}^n) dx
\end{aligned} \tag{5.15}$$

eşitliğine ulaşılır. Kısmi integrasyondan

$$\begin{aligned}
\int_a^b W(x) u_{5x} dx &= W(x) u_{4x} \Big|_a^b - \int_a^b W_x(x) u_{4x} dx \\
\int_a^b W(x) u_{5x} dx &= - \int_a^b W_x(x) u_{4x} dx
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\int_a^b W(x) u_{6x} dx &= W(x) u_{5x} \Big|_a^b - \int_a^b W_x(x) u_{5x} dx \\
&= W(x) u_{5x} \Big|_a^b - W_x(x) u_{4x} \Big|_a^b + \int_a^b W_{2x}(x) u_{4x} dx \\
\int_a^b W(x) u_{6x} dx &= \int_a^b W_{2x}(x) u_{4x} dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece kısmi integrasyon uygulandıktan sonra (5.15) denklemi

$$\begin{aligned}
& \int_a^b W(x) (u^{n+1} + \alpha\theta_1 u_x^{n+1} - (\mu\theta_1 + \alpha^2\theta_3) u_{2x}^{n+1} + (2\mu\alpha\theta_3 + \alpha^3\theta_5) u_{3x}^{n+1} - \\
& (\mu^2\theta_3 + 3\mu\alpha^2\theta_5) u_{4x}^{n+1}) dx - 3\mu^2\alpha\theta_5 \int_a^b W_x(x) u_{4x}^{n+1} dx - \mu^3\theta_5 \int_a^b W_{2x}(x) u_{4x}^{n+1} dx = \\
& \int_a^b W(x) (u^n - \alpha\theta_2 u_x^n - (\mu\theta_2 + \alpha^2\theta_4) u_{2x}^n - (2\mu\alpha\theta_4 + \alpha^3\theta_6) u_{3x}^n + \\
& (\mu^2\theta_4 + 3\mu\alpha^2\theta_6) u_{4x}^n) dx + 3\mu^2\alpha\theta_6 \int_a^b W_x(x) u_{4x}^n dx + \mu^3\theta_6 \int_a^b W_{2x}(x) u_{4x}^n dx
\end{aligned} \tag{5.16}$$

olarak yazılır. Ağırlıklı rezidü metotlarından olan Galerkin metodunda ağırlık fonksiyonu içinde taban fonksiyonları seçilir. Dolayısıyla  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı üzerinde  $W(x)$  ağırlık fonksiyonu yerine taban fonksiyonu ve  $u, u_x, u_{2x}, u_{3x}$  ile  $u_{4x}$  yerine (5.3) kuintik B-Spline fonksiyon yaklaşımı kullanılacaktır.  $\xi = x - x_m$  dönüşümü yapılırsa

$x \in [x_m, x_{m+1}]$  sonlu elemanı  $\xi \in [0, h]$  aralığına dönüşecektir. Bu durumda  $[0, h]$  aralığı üzerindeki yaklaşım  $i = m - 2, \dots, m + 3$  olmak üzere

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-2}^{m+3} \left[ \int_0^h \phi_i (\phi_j + \alpha\theta_1\phi_j' - (\mu\theta_1 + \alpha^2\theta_3)\phi_j'' + (2\mu\alpha\theta_3 + \alpha^3\theta_5)\phi_j''' - \right. \\ & \left. (\mu^2\theta_3 + 3\mu\alpha^2\theta_5)\phi_j^{(4)} \right) d\xi - 3\mu^2\alpha\theta_5 \int_0^h \phi_i'\phi_j^{(4)} d\xi - \mu^3\theta_5 \int_0^h \phi_i''\phi_j^{(4)} d\xi \Big] \delta_j^{n+1} - \\ & \sum_{j=m-2}^{m+3} \left[ \int_0^h \phi_i (\phi_j - \alpha\theta_2\phi_j' - (\mu\theta_2 + \alpha^2\theta_4)\phi_j'' - (2\mu\alpha\theta_4 + \alpha^3\theta_6)\phi_j''' + \right. \\ & \left. (\mu^2\theta_4 + 3\mu\alpha^2\theta_6)\phi_j^{(4)} \right) d\xi + 3\mu^2\alpha\theta_6 \int_0^h \phi_i'\phi_j^{(4)} d\xi + \mu^3\theta_6 \int_0^h \phi_i''\phi_j^{(4)} d\xi \Big] \delta_j^n \end{aligned} \quad (5.17)$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned} A_{i,j}^e &= \int_0^h \phi_i\phi_j d\xi, & B_{i,j}^e &= \int_0^h \phi_i\phi_j' d\xi, & C_{i,j}^e &= \int_0^h \phi_i\phi_j'' d\xi, \\ D_{i,j}^e &= \int_0^h \phi_i\phi_j''' d\xi, & E_{i,j}^e &= \int_0^h \phi_i\phi_j^{(4)} d\xi & F_{i,j}^e &= \int_0^h \phi_i'\phi_j^{(4)} d\xi \\ G_{i,j}^e &= \int_0^h \phi_i''\phi_j^{(4)} d\xi \end{aligned}$$

ve  $m = 0, 1, \dots, N - 1$  için

$$\boldsymbol{\delta}^e = (\delta_{m-2}, \dots, \delta_{m+3})^T$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} & [\mathbf{A}^e + \alpha\theta_1\mathbf{B}^e - (\mu\theta_1 + \alpha^2\theta_3)\mathbf{C}^e + (2\mu\alpha\theta_3 + \alpha^3\theta_5)\mathbf{D}^e - \\ & (\mu^2\theta_3 + 3\mu\alpha^2\theta_5)\mathbf{E}^e - 3\mu^2\alpha\theta_5\mathbf{F}^e - \mu^3\theta_5\mathbf{G}^e] (\boldsymbol{\delta}^e)^{n+1} - \\ & [\mathbf{A}^e - \alpha\theta_2\mathbf{B}^e - (\mu\theta_2 + \alpha^2\theta_4)\mathbf{C}^e - (2\mu\alpha\theta_4 + \alpha\theta_6)\mathbf{D}^e + \\ & (\mu^2\theta_4 + 3\mu\alpha^2\theta_6)\mathbf{E}^e + 3\mu^2\alpha\theta_6\mathbf{F}^e + \mu^3\theta_6\mathbf{G}^e] (\boldsymbol{\delta}^e)^n \end{aligned} \quad (5.18)$$

olarak tanım aralığı üzerindeki her bir alt aralıktaki yaklaşım, eleman matrisleri kullanılarak elde edilir.  $\mathbf{A}^e$ ,  $\mathbf{B}^e$ ,  $\mathbf{C}^e$ ,  $\mathbf{D}^e$ ,  $\mathbf{E}^e$ ,  $\mathbf{F}^e$  ve  $\mathbf{G}^e$  eleman matrislerinin birbirlerine eklenmesi sonucunda

$$\boldsymbol{\delta} = (\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2})^T$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{A} + \alpha\theta_1\mathbf{B} - (\mu\theta_1 + \alpha^2\theta_3)\mathbf{C} + (2\mu\alpha\theta_3 + \alpha^3\theta_5)\mathbf{D} - \\
& (\mu^2\theta_3 + 3\mu\alpha^2\theta_5)\mathbf{E} - 3\mu^2\alpha\theta_5\mathbf{F} - \mu^3\theta_5\mathbf{G}] \boldsymbol{\delta}^{n+1} = \\
& [\mathbf{A} - \alpha\theta_2\mathbf{B} - (\mu\theta_2 + \alpha^2\theta_4)\mathbf{C} - (2\mu\alpha\theta_4 + \alpha^3\theta_6)\mathbf{D} + \\
& (\mu^2\theta_4 + 3\mu\alpha^2\theta_6)\mathbf{E} + 3\mu^2\alpha\theta_6\mathbf{F} + \mu^3\theta_6\mathbf{G}] \boldsymbol{\delta}^n
\end{aligned} \tag{5.19}$$

sistemi elde edilir. Elde edilen sistem  $N + 5$  bilinmeyen  $N + 5$  denklemden oluşan lineer bir sistemdir ve bir satırında en fazla 11 tane sıfır olmayan eleman içermektedir. İlk ve son denklemler (5.19) sisteminden silinerek

$$u(a, t) = u(b, t) = 0$$

sınır şartları sisteme eklenebilir. Böylece denklem sistemi tekrar  $N + 5$  bilinmeyen  $N + 5$  denklemden oluşan bir sisteme dönecektir. Denklem sistemindeki bilinmeyenlerin yani

$$\delta_{-2}^{n+1}, \delta_{-1}^{n+1}, \dots, \delta_{N+1}^{n+1}, \delta_{N+2}^{n+1}$$

değerlerinin bulunabilmesi için öncelikle

$$\delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0, \dots, \delta_{N+1}^0, \delta_{N+2}^0$$

bilinmeyenleri bulunmalıdır. Bunun için  $m = 0, \dots, N$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
u'(x_0, 0) &= f'(x_0) \\
u''(x_0, 0) &= f''(x_0) \\
u(x_m, 0) &= \delta_{m-2}^0 + 26\delta_{m-1}^0 + 66\delta_m^0 + 26\delta_{m+1}^0 + \delta_{m+2}^0 = f(x_m), \\
u'(x_N, 0) &= f'(x_N), \\
u''(x_N, 0) &= f''(x_N)
\end{aligned} \tag{5.20}$$

olarak verilen sınır şartları ve başlangıç şartı kullanılabilir. Böylece  $N + 5$  bilinmeyen  $N + 5$  denklemden oluşan bir sistem elde edilir. Denklem sisteminin çözülmesi ile

$$\delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0, \dots, \delta_{N+1}^0, \delta_{N+2}^0$$

başlangıç bilinmeyenleri elde edilir. İteratif olarak  $n = 0, 1, 2, \dots$  için (5.19) denklem sistemi çözümlerse

$$\delta_{-2}^{n+1}, \delta_{-1}^{n+1}, \dots, \delta_{N+1}^{n+1}, \delta_{N+2}^{n+1}$$



elde edilir. Böylece  $x_m$ ,  $m = 0, \dots, N$  noktasındaki  $U_m^{n+1}$  değerleri

$$U_m^{n+1} = +\delta_{m-2}^{n+1} + 26\delta_{m-1}^{n+1} + 66\delta_m^{n+1} + 26\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+2}^{n+1}$$

kuintik B-spline eşitliği kullanılarak her bir zaman adımında hesaplanabilir.

## 5.1. Test Problemi

AD denkleminin sayısal çözümünün kuartik B-spline Galerkin yöntemiyle araştırıldığı bir önceki bölümde olduğu gibi bu bölümde de test probleminde adveksiyon ve difüzyon etkisi birlikte incelenecektir. Bu problem için

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp\left(-\frac{(x - \tilde{x}_0 - \alpha t)^2}{\mu(4t+1)}\right)$$

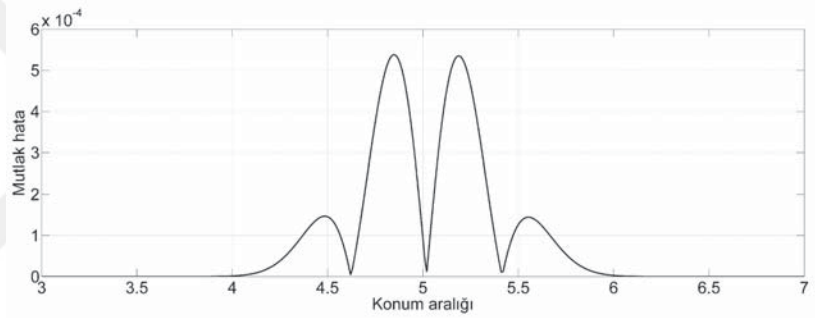
analitik çözümü kullanılacaktır.  $t = 0$  için analitik çözümden başlangıç şartıda elde edilebilir.  $t = 0$  için başlangıç anında dalganın genliği 1br olup zaman geçtikçe dalganın genliği sönmektedir. Bu bölümde  $\alpha = 0.8 \text{ m/s}$ ,  $\mu = 0.005 \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\tilde{x}_0 = 1m$  seçimleri yapılarak  $t = 5$  zamanına kadar  $0 \leq x \leq 8m$  konum aralığında kuintik B-spline Galerkin metodu kullanılarak AD denklemi yaklaşık olarak çözülmüştür. Zamana göre doğrulukları sırasıyla 2., 4. ve 6. mertebeden olan üç farklı metot için konum artım uzunluğu  $h = 0.01$  olarak yeterince küçük alınmış ve farklı zaman artım uzunlukları için maksimum hata normları ile yakınsaklık oranları hesaplanarak Çizelge 5.2 de verilmiştir.

Çizelge 5.2:  $h = 0.01$  için hata normları ve yakınsaklık oranları

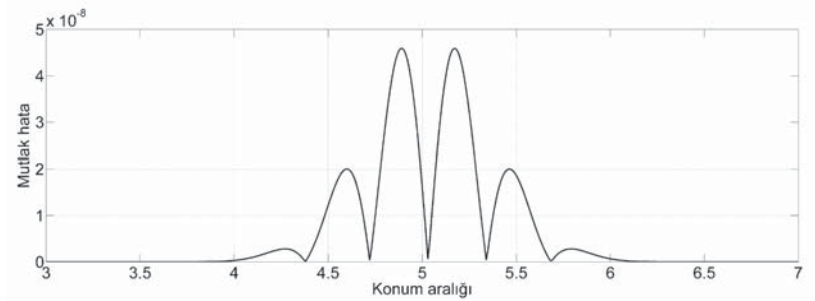
$k$	Metot 1		Metot 2		Metot 3	
	$L_\infty$	YO	$L_\infty$	YO	$L_\infty$	YO
1	0.55	1.28	0.26	1.94	0.13	3.06
0.5	0.23	0.78	$6.91 \times 10^{-2}$	2.50	$1.51 \times 10^{-2}$	5.11
0.2	0.11	1.06	$6.97 \times 10^{-3}$	3.96	$1.40 \times 10^{-4}$	5.86
0.1	$5.36 \times 10^{-2}$	1.90	$4.48 \times 10^{-4}$	3.98	$2.40 \times 10^{-6}$	5.96
0.05	$1.43 \times 10^{-2}$	2.06	$2.85 \times 10^{-5}$	3.99	$3.85 \times 10^{-8}$	5.99
0.02	$2.17 \times 10^{-3}$	2.01	$7.35 \times 10^{-7}$	4.00	$1.59 \times 10^{-10}$	5.99
0.01	$5.38 \times 10^{-4}$		$4.60 \times 10^{-8}$		$2.49 \times 10^{-12}$	

Çizelge incelendiğinde en düşük hataların bir önceki bölümde de olduğu gibi zamana göre doğruluğu en yüksek olan Metot 3 de elde edildiği görülebilir. Ayrıca zaman artım uzunluğu azalırken önerilen metotların zaman parçalanması doğruluklarında yine bir önceki bölümde olduğu gibi yakınsama oranları ile uyumlu oldukları görülebilir.

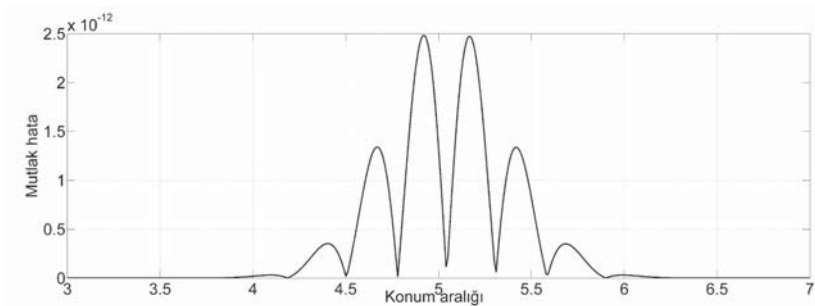
Şekil 5.1 de her bir metot için  $h = 0.01$  konum artımı ve  $k = 0.01$  zaman artım değerleri kullanılarak çizdirilen mutlak hata grafikleri verilmiştir. Tüm hata grafiklerinde maksimum hataların sınırlarda gelmediği görülebilir.



Metot 1



Metot 2



Metot3

Şekil 5.1: Mutlak hata grafikleri

## 6. SEKTİK B-SPLINE GALERKİN METODU

Bu bölümde AD denkleminin yaklaşık çözümü için sektik B-spline Galerkin yöntemi kullanılacaktır. Bu bölümde önerilen yaklaşık yöntemlerin 2. ve 4. mertebeden doğruluğa sahip olan kısmı aynı zamanda Topcu ve Irk (2018) tarafından da yapılmıştır. Bu bölümde ilgili çalışmadan farklı olarak 6. mertebeden doğruluğa sahip bir zaman parçalanmasında önerilmektedir.

$[a, b]$  aralığının eşit aralıklı bir parçalanması üzerinde tanımlanan  $\phi_m$  fonksiyonları  $x_m$  noktasındaki sektik B-spline fonksiyonları gösterebilir.  $\phi_m$  sektik B-spline fonksiyonları

$$g_m(x) = x - x_m$$

olmak üzere

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^6} \begin{cases} g_{m-3}^6(x), & x \in [x_{m-3}, x_{m-2}) \\ g_{m-3}^6(x) - 7g_{m-2}^6(x), & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}) \\ g_{m-3}^6(x) - 7g_{m-2}^6(x) + 21g_{m-1}^6(x), & x \in [x_{m-1}, x_m) \\ g_{m-3}^6(x) - 7g_{m-2}^6(x) + 21g_{m-1}^6(x) \\ -35g_m^6(x), & x \in [x_m, x_{m+1}) \\ g_{m+4}^6(x) - 7g_{m+3}^6(x) + 21g_{m+2}^6(x) & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}) \\ g_{m+4}^6(x) - 7g_{m+3}^6(x), & x \in [x_{m+2}, x_{m+3}) \\ g_{m+4}^6(x), & x \in [x_{m+3}, x_{m+4}) \\ 0, & \text{diğer durumlar.} \end{cases} \quad (6.1)$$

formunda verilen parçalı polinom fonksiyonlardır. Bu durum da

$$\phi_{-3}, \phi_{-2}, \dots, \phi_{N+1}, \phi_{N+2}$$

fonksiyonları  $[a, b]$  üzerinde tanımlanmış fonksiyonlar için bir tabandır ve

$$\phi_{-3}, \phi_{-2}, \dots, \phi_{N+1}, \phi_{N+2}$$

sektik B-spline fonksiyonları taban fonksiyonlar olarak alındığında  $u(x, t)$  çözümü için yaklaşık çözüm

$$u(x, t) \simeq U(x, t) = \sum_{m=-3}^{N+2} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (6.2)$$

olarak araştırılır.  $U(x, t)$  fonksiyonu önceki bölümlerde de söylendiği gibi test veya deneme fonksiyonu olarak adlandırılır.  $\phi_m(x)$  sektik B-spline fonksiyonları  $[x_{m-3}, x_{m+4}]$  aralığını örtmektedir ve  $\phi_m(x)$  sektik B-spline fonksiyonlarının ilk beş türevi,  $[x_{m-3}, x_{m+4}]$  aralığının dışında sıfır olacaktır. Dolayısıyla  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı

$$\phi_{m-3}(x), \phi_{m-2}(x), \phi_{m-1}(x), \phi_m(x), \phi_{m+1}(x), \phi_{m+2}(x), \phi_{m+3}(x)$$

olmak üzere toplam yedi ardışık sektik B-spline fonksiyonları tarafından örtülecektir. Bu durumda  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı üzerindeki  $u$  değeri için yaklaşım fonksiyonu

$$U(x, t) = \sum_{j=m-3}^{m+3} \phi_j(x) \delta_j(t) \quad (6.3)$$

eşitliği ile hesaplanabilir.

(6.1) parçalı polinom fonksiyonlarından

$$\begin{aligned} \phi_m(x_{m+3}) &= \frac{1}{h^6} (g_{m+4}^6(x_{m+3})) = \frac{1}{h^6} (x_{m+3} - x_{m+4})^6 = \frac{1}{h^6} (-h)^6 = 1 \\ \phi_m(x_{m+2}) &= \frac{1}{h^6} [g_{m+4}^6(x_{m+2}) - 7g_{m+3}^6(x_{m+2})] \\ &= \frac{1}{h^6} [(x_{m+2} - x_{m+4})^6 - 7(x_{m+2} - x_{m+3})^6] \\ &= \frac{1}{h^6} [(-2h)^6 - 7(-h)^6] = 57 \\ \phi_m(x_{m+1}) &= \frac{1}{h^6} [g_{m+4}^6(x_{m+1}) - 7g_{m+3}^6(x_{m+1}) + 21g_{m+2}^6(x_{m+1})] \\ &= \frac{1}{h^6} [(x_{m+1} - x_{m+4})^6 - 7(x_{m+1} - x_{m+3})^6 + 21(x_{m+1} - x_{m+2})^6] \\ &= \frac{1}{h^6} [(-3h)^6 - 7(-2h)^6 + 21(-h)^6] = \frac{1}{h^6} (302) h^6 = 302 \\ \phi_m(x_m) &= \frac{1}{h^6} [g_{m-3}^6(x_m) - 7g_{m-2}^6(x_m) + 21g_{m-1}^6(x_m) - 35g_m^6(x_m)] \\ &= \frac{1}{h^6} \left[ \begin{array}{l} (x_m - x_{m-3})^6 - 7(x_m - x_{m-2})^6 \\ + 21(x_m - x_{m-1})^6 - 35(x_m - x_m)^6 \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{h^6} [(3h)^6 - 7(2h)^6 + 21(h)^6] = \frac{1}{h^6} (302) h^6 = 302 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_m(x_{m-1}) &= \frac{1}{h^6} [g_{m-3}^6(x_{m-1}) - 7g_{m-2}^6(x_{m-1}) + 21g_{m-1}^6(x_{m-1})] \\
&= \frac{1}{h^6} [(x_{m-1} - x_{m-3})^6 - 7(x_{m-1} - x_{m-2})^6 + 21(x_{m-1} - x_{m-1})^6] \\
&= \frac{1}{h^6} [(2h)^6 - 7(h)^6] = \frac{1}{h^6} (57) h^6 = 57 \\
\phi_m(x_{m-2}) &= \frac{1}{h^6} [g_{m-3}^6(x_{m-2}) - 7g_{m-2}^6(x_{m-2})] \\
&= \frac{1}{h^6} [(x_{m-2} - x_{m-3})^6 - 7(x_{m-2} - x_{m-2})^6] = \frac{1}{h^6} h^6 = 1 \\
\phi_m(x_{m-3}) &= \frac{1}{h^6} [g_{m-3}^6(x_{m-3})] = \frac{1}{h^6} [(x_{m-3} - x_{m-3})^6] = 0
\end{aligned}$$

bulunabilir. Benzer şekilde işlemlerin yapılmasıyla ', ', ', ', (4) ve (5) sırasıyla  $x$ 'e göre birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü ve beşinci mertebeden türevleri göstermek üzere,  $[x_{m-3}, x_{m+4}]$  aralığındaki

$$\phi_m(x), \phi'_m(x), \phi''_m(x), \phi'''_m(x), \phi_m^{(4)}(x), \phi_m^{(5)}(x)$$

sektik B-spline fonksiyonlarının bölünme noktalarındaki değerleri Çizelge 6.1 de verilmiştir.

Çizelge 6.1: Bölünme noktalarındaki sektik B-spline değerleri

$x$	$x_{m-3}$	$x_{m-2}$	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$	$x_{m+3}$	$x_{m+4}$
$\phi_m$	0	1	57	302	302	57	1	0
$\frac{6}{h}\phi'_m$	0	1	25	40	-40	-25	-1	0
$\frac{30}{h^2}\phi''_m$	0	1	9	-10	-10	9	1	0
$\frac{120}{h^3}\phi'''_m$	0	1	1	-8	8	-1	-1	0
$\frac{360}{h^4}\phi_m^{(4)}$	0	1	-3	2	2	-3	1	0
$\frac{720}{h^5}\phi_m^{(5)}$	0	-1	5	-10	10	-5	1	0

Çizelge 6.1 ile (6.3) eşitliğinin kullanılmasıyla  $U_m$

$$\begin{aligned}
U_m &= U(x_m) = \sum_{j=m-3}^{m+3} \phi_j(x_m)\delta_j(t) \\
&= \phi_{m-3}(x_m)\delta_{m-3} + \phi_{m-2}(x_m)\delta_{m-2} + \phi_{m-1}(x_m)\delta_{m-1} + \phi_m(x_m)\delta_m \\
&\quad + \phi_{m+1}(x_m)\delta_{m+1} + \phi_{m+2}(x_m)\delta_{m+2} + \phi_{m+3}(x_m)\delta_{m+3} \\
&= \delta_{m-3} + 57\delta_{m-2} + 302\delta_{m-1} + 302\delta_m + 57\delta_{m+1} + \delta_{m+2}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu durumda  $U_m$  ve onun ilk beş türevi

$$U_m = U(x_m) = \delta_{m-3} + 57\delta_{m-2} + 302\delta_{m-1} + 302\delta_m + 57\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \quad (6.4)$$

$$U'_m = U'(x_m) = \frac{6}{h} (-\delta_{m-3} - 25\delta_{m-2} - 40\delta_{m-1} + 40\delta_m + 25\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \quad (6.5)$$

$$U''_m = U''(x_m) = \frac{30}{h^2} (\delta_{m-3} + 9\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} - 10\delta_m + 9\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \quad (6.6)$$

$$U'''_m = U'''(x_m) = \frac{120}{h^3} (-\delta_{m-3} - \delta_{m-2} + 8\delta_{m-1} - 8\delta_m + \delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \quad (6.7)$$

$$U^{(4)}_m = U^{(4)}(x_m) = \frac{360}{h^4} (\delta_{m-3} - 3\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} + 2\delta_m - 3\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \quad (6.8)$$

$$U^{(5)}_m = U^{(5)}(x_m) = \frac{720}{h^5} (\delta_{m-3} - 5\delta_{m-2} + 10\delta_{m-1} - 10\delta_m + 5\delta_{m+1} - \delta_{m+2}) \quad (6.9)$$

olarak bulunur.  $\xi = x - x_m$  dönüşümü yapılırsa  $x \in [x_m, x_{m+1}]$  sonlu elemanı  $\xi \in [0, h]$  aralığına dönüşecektir. Bu durumda  $[0, h]$  aralığı üzerindeki şekil fonksiyonları

$$\phi_{m-3}(\xi) = 1 - 6\frac{\xi}{h} + 15\left(\frac{\xi}{h}\right)^2 - 20\left(\frac{\xi}{h}\right)^3 + 15\left(\frac{\xi}{h}\right)^4 - 6\left(\frac{\xi}{h}\right)^5 + \left(\frac{\xi}{h}\right)^6 \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} \phi_{m-2}(\xi) &= 57 - 150\frac{\xi}{h} + 135\left(\frac{\xi}{h}\right)^2 - 20\left(\frac{\xi}{h}\right)^3 - 45\left(\frac{\xi}{h}\right)^4 \\ &\quad + 30\left(\frac{\xi}{h}\right)^5 - 6\left(\frac{\xi}{h}\right)^6, \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} \phi_{m-1}(\xi) &= 302 - 240\frac{\xi}{h} - 150\left(\frac{\xi}{h}\right)^2 + 160\left(\frac{\xi}{h}\right)^3 + 30\left(\frac{\xi}{h}\right)^4 \\ &\quad - 60\left(\frac{\xi}{h}\right)^5 + 15\left(\frac{\xi}{h}\right)^6, \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} \phi_m(\xi) &= 302 + 240\frac{\xi}{h} - 150\left(\frac{\xi}{h}\right)^2 - 160\left(\frac{\xi}{h}\right)^3 + 30\left(\frac{\xi}{h}\right)^4 \\ &\quad + 60\left(\frac{\xi}{h}\right)^5 - 20\left(\frac{\xi}{h}\right)^6, \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} \phi_{m+1}(\xi) &= 57 + 150\frac{\xi}{h} + 135\left(\frac{\xi}{h}\right)^2 + 20\left(\frac{\xi}{h}\right)^3 - 45\left(\frac{\xi}{h}\right)^4 \\ &\quad - 30\left(\frac{\xi}{h}\right)^5 + 15\left(\frac{\xi}{h}\right)^6, \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} \phi_{m+2}(\xi) &= 1 + 6\frac{\xi}{h} + 15\left(\frac{\xi}{h}\right)^2 + 20\left(\frac{\xi}{h}\right)^3 + 15\left(\frac{\xi}{h}\right)^4 \\ &\quad + 6\left(\frac{\xi}{h}\right)^5 - 6\left(\frac{\xi}{h}\right)^6, \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\phi_{m+3}(\xi) = \left(\frac{\xi}{h}\right)^6 \quad (6.16)$$

olarak elde edilebilir. AD denklemi için zaman ayrıştırılması sonucu elde edilen

$$\begin{aligned}
& u^{n+1} + \alpha\theta_1 u_x^{n+1} - (\mu\theta_1 + \alpha^2\theta_3) u_{2x}^{n+1} + (2\mu\alpha\theta_3 + \alpha^3\theta_5 u_{3x}) u_{3x}^{n+1} - \\
& (\mu^2\theta_3 + 3\mu\alpha^2\theta_5) u_{4x}^{n+1} + 3\mu^2\alpha\theta_5 u_{5x}^{n+1} - \mu^3\theta_5 u_{6x}^{n+1} = \\
& u^n - \alpha\theta_2 u_x^n - (\mu\theta_2 + \alpha^2\theta_4) u_{2x}^n - (2\mu\alpha\theta_4 + \alpha^3\theta_6 u_{3x}) u_{3x}^n \\
& + (\mu^2\theta_4 + 3\mu\alpha^2\theta_6) u_{4x}^n - 3\mu^2\alpha\theta_6 u_{5x}^n + \mu^3\theta_6 u_{6x}^n
\end{aligned}$$

eşitliği  $W(x)$  ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak konum aralığı üzerinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
& \int_a^b W(x) (u^{n+1} + \alpha\theta_1 u_x^{n+1} - (\mu\theta_1 + \alpha^2\theta_3) u_{2x}^{n+1} + (2\mu\alpha\theta_3 + \alpha^3\theta_5) u_{3x}^{n+1} - \\
& (\mu^2\theta_3 + 3\mu\alpha^2\theta_5) u_{4x}^{n+1} + 3\mu^2\alpha\theta_5 u_{5x}^{n+1} - \mu^3\theta_5 u_{6x}^{n+1}) dx = \\
& \int_a^b W(x) (u^n - \alpha\theta_2 u_x^n - (\mu\theta_2 + \alpha^2\theta_4) u_{2x}^n - (2\mu\alpha\theta_4 + \alpha^3\theta_6) u_{3x}^n + \\
& (\mu^2\theta_4 + 3\mu\alpha^2\theta_6) u_{4x}^n - 3\mu^2\alpha\theta_6 u_{5x}^n + \mu^3\theta_6 u_{6x}^n) dx
\end{aligned} \tag{6.17}$$

eşitliğine ulaşılır. Kısmi integrasyondan

$$\begin{aligned}
\int_a^b W(x) u_{6x} dx &= W(x) u_{5x} \Big|_a^b - \int_a^b W_x(x) u_{5x} dx \\
&= - \int_a^b W_x(x) u_{5x} dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece kısmi integrasyon uygulandıktan sonra (6.17) denklemi

$$\begin{aligned}
& \int_a^b W(x) (u^{n+1} + \alpha\theta_1 u_x^{n+1} - (\mu\theta_1 + \alpha^2\theta_3) u_{2x}^{n+1} + (2\mu\alpha\theta_3 + \alpha^3\theta_5) u_{3x}^{n+1} - \\
& (\mu^2\theta_3 + 3\mu\alpha^2\theta_5) u_{4x}^{n+1} + 3\mu^2\alpha\theta_5 u_{5x}^{n+1}) dx + \mu^3\theta_5 \int_a^b W_x(x) u_{5x}^{n+1} dx = \\
& \int_a^b W(x) (u^n - \alpha\theta_2 u_x^n - (\mu\theta_2 + \alpha^2\theta_4) u_{2x}^n - (2\mu\alpha\theta_4 + \alpha^3\theta_6) u_{3x}^n + \\
& (\mu^2\theta_4 + 3\mu\alpha^2\theta_6) u_{4x}^n - 3\mu^2\alpha\theta_6 u_{5x}^n) dx - \mu^3\theta_6 \int_a^b W_x(x) u_{5x}^n dx
\end{aligned} \tag{6.18}$$

olarak yazılabilir. Ağırlıklı rezidü metotlarından olan Galerkin metodunda ağırlık fonksiyonu içinde taban fonksiyonları seçilir. Dolayısıyla  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı üzerinde  $W(x)$  ağırlık fonksiyonu yerine taban fonksiyonu ve  $u, u_x, u_{2x}, u_{3x}, u_{4x}$  ve  $u_{5x}$  yerine (6.3) sektik B-Spline fonksiyon yaklaşımı kullanılacaktır. Bu durumda  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı üzerinde  $\xi = x - x_m, 0 \leq \xi \leq h$  lokal koordinat dönüşümü yapılırsa  $i = m - 3,$

...,  $m + 3$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-3}^{m+3} \left[ \int_0^h \phi_i (\phi_j + \alpha\theta_1\phi'_j - (\mu\theta_1 + \alpha^2\theta_3)\phi''_j + (2\mu\alpha\theta_3 + \alpha^3\theta_5)\phi'''_j - \right. \\
& \quad \left. (\mu^2\theta_3 + 3\mu\alpha^2\theta_5)\phi_j^{(4)} + 3\mu^2\alpha\theta_5\phi_j^{(5)}) d\xi + \mu^3\theta_5 \int_0^h \phi'_i\phi_j^{(5)} d\xi \right] \delta_j^{n+1} - \\
& \sum_{j=m-3}^{m+3} \left[ \int_0^h \phi_i (\phi_j - \alpha\theta_2\phi'_j - (\mu\theta_2 + \alpha^2\theta_4)\phi''_j - (2\mu\alpha\theta_4 + \alpha^3\theta_6)\phi'''_j + \right. \\
& \quad \left. (\mu^2\theta_4 + 3\mu\alpha^2\theta_6)\phi_j^{(4)} - 3\mu^2\alpha\theta_6\phi_j^{(5)}) dx - \mu^3\theta_6 \int_0^h \phi'_i\phi_j^{(5)} d\xi \right] \delta_j^n
\end{aligned} \tag{6.19}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
A_{i,j}^e &= \int_0^h \phi_i\phi_j d\xi, & B_{i,j}^e &= \int_0^h \phi_i\phi'_j d\xi, & C_{i,j}^e &= \int_0^h \phi_i\phi''_j d\xi, \\
D_{i,j}^e &= \int_0^h \phi_i\phi_j''' d\xi, & E_{i,j}^e &= \int_0^h \phi_i\phi_j^{(4)} d\xi & F_{i,j}^e &= \int_0^h \phi_i\phi_j^{(5)} d\xi \\
G_{i,j}^e &= \int_0^h \phi'_i\phi_j^{(5)} d\xi
\end{aligned}$$

ve  $m = 0, 1, \dots, N - 1$  için

$$\boldsymbol{\delta}^e = (\delta_{m-3}^n, \dots, \delta_{m+3}^n)^T$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
& [A_{i,j}^e + \alpha\theta_1 B_{i,j}^e - (\mu\theta_1 + \alpha^2\theta_3) C_{i,j}^e + (2\mu\alpha\theta_3 + \alpha^3\theta_5) D_{i,j}^e - \\
& \quad (\mu^2\theta_3 + 3\mu\alpha^2\theta_5) E_{i,j}^e + 3\mu^2\alpha\theta_5 F_{i,j}^e + \mu^3\theta_5 G_{i,j}^e] \delta_j^{n+1} - \\
& [A_{i,j}^e - \alpha\theta_2 B_{i,j}^e - (\mu\theta_2 + \alpha^2\theta_4) C_{i,j}^e - (2\mu\alpha\theta_4 + \alpha^3\theta_6) D_{i,j}^e + \\
& \quad (\mu^2\theta_4 + 3\mu\alpha^2\theta_6) E_{i,j}^e - 3\mu^2\alpha\theta_6 F_{i,j}^e - \mu^3\theta_6 G_{i,j}^e] \delta_j^n
\end{aligned} \tag{6.20}$$

olarak tanım aralığı üzerindeki her bir alt aralıktaki yaklaşım bulunur.  $\mathbf{A}^e$ ,  $\mathbf{B}^e$ ,  $\mathbf{C}^e$ ,  $\mathbf{D}^e$ ,  $\mathbf{E}^e$ ,  $\mathbf{F}^e$  ve  $\mathbf{G}^e$  eleman matrislerinin birbirlerine eklenmesi sonucunda,

$$\boldsymbol{\delta} = (\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+3})^T$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{A} + \alpha\theta_1\mathbf{B} - (\mu\theta_1 + \alpha^2\theta_3)\mathbf{C} + (2\mu\alpha\theta_3 + \alpha^3\theta_5)\mathbf{D} - \\
& \quad (\mu^2\theta_3 + 3\mu\alpha^2\theta_5)\mathbf{E} + 3\mu^2\alpha\theta_5\mathbf{F} + \mu^3\theta_5\mathbf{G}] \boldsymbol{\delta}^{n+1} = \\
& [\mathbf{A} - \alpha\theta_2\mathbf{B} - (\mu\theta_2 + \alpha^2\theta_4)\mathbf{C} - (2\mu\alpha\theta_4 + \alpha^3\theta_6)\mathbf{D} + \\
& \quad (\mu^2\theta_4 + 3\mu\alpha^2\theta_6)\mathbf{E} - 3\mu^2\alpha\theta_6\mathbf{F} - \mu^3\theta_6\mathbf{G}] \boldsymbol{\delta}^n
\end{aligned} \tag{6.21}$$



sistemi elde edilir. Elde edilen sistem  $N + 6$  bilinmeyen  $N + 6$  denklemden oluşan lineer bir sistemdir ve bir satırında en fazla 13 tane sıfır olmayan eleman içermektedir. İlk ve son denklemler (6.21) sisteminden silinerek

$$u(a, t) = u(b, t) = 0$$

sınır şartları sisteme eklenebilir. Böylece denklem sistemi tekrar  $N + 6$  bilinmeyen  $N + 6$  denklemden oluşan bir sisteme dönecektir. Denklem sistemindeki bilinmeyenlerin yanı

$$\delta_{-2}^{n+1}, \delta_{-1}^{n+1}, \dots, \delta_{N+1}^{n+1}, \delta_{N+2}^{n+1}, \delta_{N+3}^{n+1}$$

değerlerinin bulunabilmesi için öncelikle

$$\delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0, \dots, \delta_{N+1}^0, \delta_{N+2}^0, \delta_{N+3}^0$$

bilinmeyenleri bulunmalıdır. Bunun için  $m = 0, \dots, N$  olmak üzere

$$\begin{aligned} u'(x_0, 0) &= f'(x_0) \\ u''(x_0, 0) &= f''(x_0) \\ u'''(x_0, 0) &= f'''(x_0) \\ u(x_m, 0) &= \delta_{m-3}^0 + 57\delta_{m-2}^0 + 302\delta_{m-1}^0 + 302\delta_m^0 + 57\delta_{m+1}^0 + \delta_{m+2}^0 = f(x_m), \\ u'(x_N, 0) &= f'(x_N), \\ u''(x_N, 0) &= f''(x_N) \end{aligned} \tag{6.22}$$

olarak verilen sınır şartları ve başlangıç şartı kullanılabilir. Böylece  $N + 6$  bilinmeyen  $N + 6$  denklemden oluşan bir sistem elde edilir. Denklem sisteminin çözülmesi sonucunda

$$\delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0, \dots, \delta_{N+1}^0, \delta_{N+2}^0, \delta_{N+3}^0$$

başlangıç bilinmeyenleri elde edilir. İteratif olarak  $n = 0, 1, 2, \dots$  için (6.21) denklem sistemi çözümlerse

$$\delta_{-2}^{n+1}, \delta_{-1}^{n+1}, \dots, \delta_{N+1}^{n+1}, \delta_{N+2}^{n+1}, \delta_{N+3}^{n+1}$$

elde edilir. Böylece  $x_m$ ,  $m = 0, \dots, N$  noktasındaki  $U_m^{n+1}$  değerleri

$$U_m^{n+1} = \delta_{m-3}^{n+1} + 57\delta_{m-2}^{n+1} + 302\delta_{m-1}^{n+1} + 302\delta_m^{n+1} + 57\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+2}^{n+1}$$

sektik B-spline eşitliği kullanılarak her bir zaman adımında hesaplanabilir.

## 6.1. Test Problemi

AD denkleminin sayısal çözümünün doğruluğunun kontrol edilirken daha önceki iki bölümde olduğu gibi test probleminde adveksiyon ve difüzyon etkisi birlikte incelenecektir. Bu problem için

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp\left(-\frac{(x - \tilde{x}_0 - \alpha t)^2}{\mu(4t+1)}\right)$$

analitik çözümü kullanılacaktır.  $t = 0$  için analitik çözümden başlangıç şartıda elde edilebilir.  $t = 0$  için başlangıç anında dalganın genliği 1br olup zaman geçtikçe dalganın genliği sönmektedir. Bu bölümde  $\alpha = 0.8 \text{ m/s}$ ,  $\mu = 0.005 \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\tilde{x}_0 = 1\text{m}$  seçimleri yapılarak  $t = 5$  zamanına kadar  $0 \leq x \leq 8\text{m}$  konum aralığında sektik B-spline Galerkin metodu kullanılarak AD denklemi yaklaşık olarak çözülmüştür. Zamana göre doğrulukları sırasıyla 2., 4. ve 6. mertebeden olan üç farklı metot için konum artım uzunluğu  $h = 0.01$  olarak yeterince küçük alınmış ve farklı zaman artım uzunlukları için maksimum hata normları ile yakınsaklık oranları hesaplanarak Çizelge 6.2 de verilmiştir.

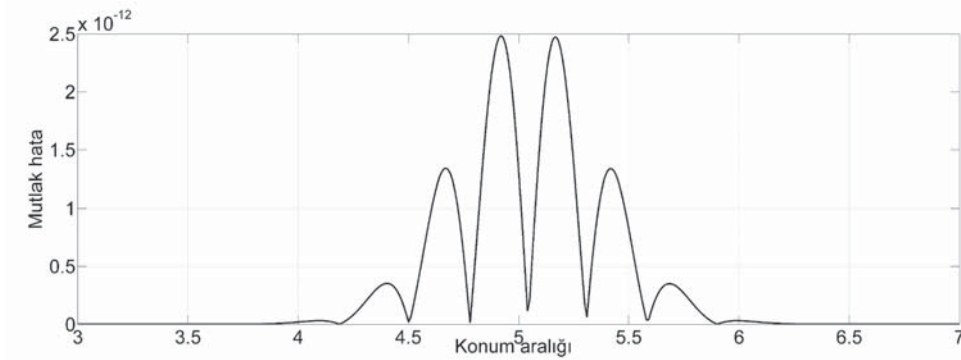
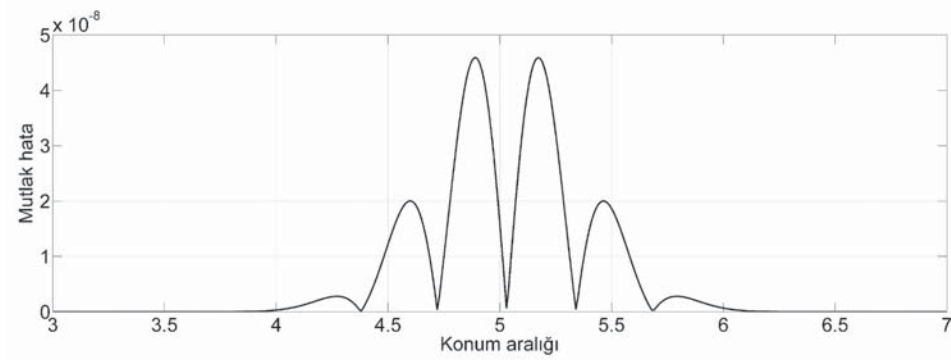
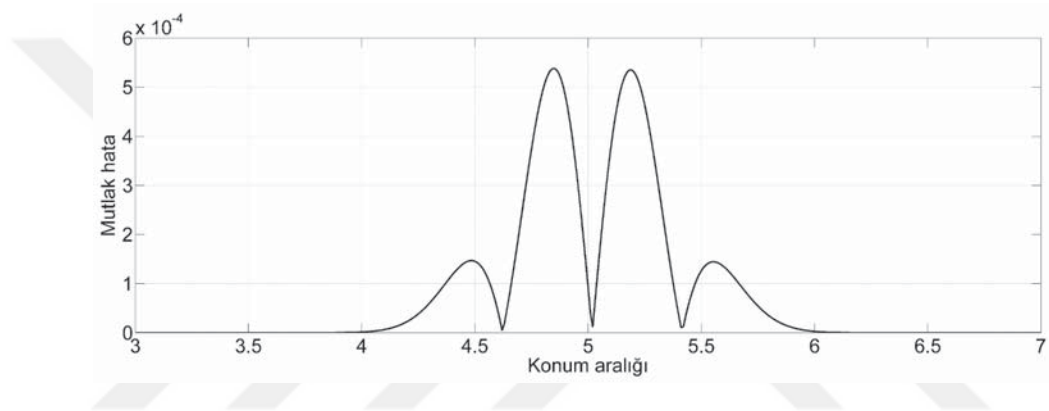
Çizelge 6.2:  $h = 0.01$  için hata normları ve yakınsaklık oranları

$k$	Metot 1		Metot 2		Metot 3	
	$L_\infty$	YO	$L_\infty$	YO	$L_\infty$	YO
1	0.55	1.28	0.26	1.94	0.13	3.06
0.5	0.23	0.78	$6.91 \times 10^{-2}$	2.50	$1.51 \times 10^{-2}$	5.11
0.2	0.11	1.06	$6.97 \times 10^{-3}$	3.96	$1.40 \times 10^{-4}$	5.86
0.1	$5.36 \times 10^{-2}$	1.90	$4.48 \times 10^{-4}$	3.98	$2.40 \times 10^{-6}$	5.96
0.05	$1.43 \times 10^{-2}$	2.06	$2.85 \times 10^{-5}$	3.99	$3.85 \times 10^{-8}$	5.99
0.02	$2.17 \times 10^{-3}$	2.01	$7.35 \times 10^{-7}$	4.00	$1.59 \times 10^{-10}$	5.99
0.01	$5.38 \times 10^{-4}$		$4.60 \times 10^{-8}$		$2.49 \times 10^{-12}$	

Çizelge incelendiğinde en düşük hataların bir önceki iki bölümde de olduğu gibi zamana göre doğruluğu en yüksek olan Metot 3 de elde edildiği görülebilir. Ayrıca zaman artım uzunluğu azalırken önerilen metotların zaman parçalanması

doğruluklarında yine önceki iki bölümde olduğu gibi yakınsama oranları ile uyumlu oldukları görülebilir.

Şekil 6.1 de her bir metot için  $h = 0.01$  konum artımı ve  $k = 0.01$  zaman artım değerleri kullanılarak çizdirilen mutlak hata grafikleri verilmiştir. Önceki iki bölümde olduğu gibi tüm hata grafiklerinde maksimum hataların sınırlarda gelmediği görülebilir.



Şekil 6.1: Mutlak hata grafikleri

## 7. SEPTİK B-SPLINE GALERKİN METODU

Bu bölümde AD denkleminin yaklaşık çözümü için septik B-spline Galerkin yöntemi kullanılacaktır.

$[a, b]$  aralığının eşit aralıklı bir parçalanması üzerinde tanımlanan  $\phi_m$  fonksiyonları  $x_m$  noktasındaki septik B-spline fonksiyonları gösterebilir.  $\phi_m$  septik B-spline fonksiyonları

$$g_m(x) = x - x_m$$

olmak üzere

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^7} \begin{cases} g_{m-4}^7(x), & x \in [x_{m-4}, x_{m-3}) \\ g_{m-4}^7(x) - 8g_{m-3}^7(x), & x \in [x_{m-3}, x_{m-2}) \\ g_{m-4}^7(x) - 8g_{m-3}^7(x) + 28g_{m-2}^7(x), & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}) \\ g_{m-4}^7(x) - 8g_{m-3}^7(x) + 28g_{m-2}^7(x) \\ -56g_{m-1}^7(x), & x \in [x_{m-1}, x_m) \\ -g_{m+4}^7(x) + 8g_{m+3}^7(x) - 28g_{m+2}^7(x) \\ +56g_{m+1}^7(x), & x \in [x_m, x_{m+1}) \\ -g_{m+4}^7(x) + 8g_{m+3}^7(x) - 28g_{m+2}^7(x), & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}) \\ -g_{m+4}^7(x) + 8g_{m+3}^7(x), & x \in [x_{m+2}, x_{m+3}) \\ -g_{m+4}^7(x), & x \in [x_{m+3}, x_{m+4}) \\ 0 & \text{diğer durumlar.} \end{cases} \quad (7.1)$$

formunda verilen parçalı polinom fonksiyonlardır. Bu durum da

$$\phi_{-3}, \phi_{-2}, \dots, \phi_{N+1}, \phi_{N+2}, \phi_{N+3}$$

fonksiyonları  $[a, b]$  üzerinde tanımlanmış fonksiyonlar için bir tabandır ve

$$\phi_{-3}, \phi_{-2}, \dots, \phi_{N+1}, \phi_{N+2}, \phi_{N+3}$$

septik B-spline fonksiyonları taban fonksiyonlar olarak alındığında  $u(x, t)$  çözümü için yaklaşık çözüm

$$u(x, t) \simeq U(x, t) = \sum_{m=-3}^{N+3} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (7.2)$$

olarak araştırılır.  $U(x, t)$  fonksiyonu önceki bölümlerde de söylendiği gibi test veya deneme fonksiyonu olarak adlandırılır.  $\phi_m(x)$  septik B-spline fonksiyonları  $[x_{m-4}, x_{m+4}]$  aralığını örtmektedir ve  $\phi_m(x)$  septik B-spline fonksiyonlarının ilk beş türevi,  $[x_{m-4}, x_{m+4}]$  aralığının dışında sıfır olacaktır. Dolayısıyla  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı

$$\phi_{m-3}(x), \phi_{m-2}(x), \phi_{m-1}(x), \phi_m(x), \phi_{m+1}(x), \phi_{m+2}(x), \phi_{m+3}(x), \phi_{m+4}(x)$$

olmak üzere toplam sekiz ardışık septik B-spline fonksiyonları tarafından örtülecektir. Bu durumda  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı üzerindeki  $u$  değeri için yaklaşım fonksiyonu

$$U(x, t) = \sum_{j=m-3}^{m+4} \phi_j(x) \delta_j(t) \quad (7.3)$$

eşitliği ile hesaplanabilir.

(7.1) parçalı polinom fonksiyonlarından

$$\begin{aligned} \phi_m(x_{m+3}) &= \frac{1}{h^7} [-g_{m+4}^7(x_{m+3})] = -\frac{1}{h^6} (x_{m+3} - x_{m+4})^7 = -\frac{1}{h^6} (-h)^6 = 1 \\ \phi_m(x_{m+2}) &= \frac{1}{h^7} [-g_{m+4}^7(x_{m+2}) + 8g_{m+3}^7(x_{m+2})] \\ &= \frac{1}{h^7} [-(x_{m+2} - x_{m+4})^7 + 8(x_{m+2} - x_{m+3})^7] \\ &= \frac{1}{h^7} [ -(-2h)^7 + 8(-h)^7 ] = 120 \\ \phi_m(x_{m+1}) &= \frac{1}{h^7} [-g_{m+4}^7(x_{m+1}) + 8g_{m+3}^7(x_{m+1}) - 28g_{m+2}^7(x_{m+1})] \\ &= \frac{1}{h^7} [-(x_{m+1} - x_{m+4})^7 + 8(x_{m+1} - x_{m+3})^7 - 28(x_{m+1} - x_{m+2})^7] \\ &= \frac{1}{h^7} [ -(-3h)^7 + 8(-2h)^7 - 28(-h)^7 ] = 1191 \\ \phi_m(x_m) &= \frac{1}{h^7} [-g_{m+4}^7(x_m) + 8g_{m+3}^7(x_m) - 28g_{m+2}^7(x_m) + 56g_{m+1}^7(x_m)] \\ &= \frac{1}{h^7} \left[ \begin{array}{l} -(x_m - x_{m+4})^7 + 8(x_m - x_{m+3})^7 \\ -28(x_m - x_{m+2})^7 + 56(x_m - x_{m+1})^7 \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{h^7} [ -(-4h)^7 + 8(-3h)^7 - 28(-2h)^7 + 56(-h)^7 ] = 2416 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_m(x_{m-1}) &= \frac{1}{h^7} [g_{m-4}^7(x_{m-1}) - 8g_{m-3}^7(x_{m-1}) + 28g_{m-2}^7(x_{m-1}) - 56g_{m-1}^7(x_{m-1})] \\
&= \frac{1}{h^7} \left[ (x_{m-1} - x_{m-4})^7 - 8(x_{m-1} - x_{m-3})^7 \right. \\
&\quad \left. + 28(x_{m-1} - x_{m-2})^7 - 56(x_{m-1} - x_{m-1})^7 \right] \\
&= \frac{1}{h^7} [(3h)^7 - 8(2h)^7 + 28(h)^7] = 1191 \\
\phi_m(x_{m-2}) &= \frac{1}{h^7} [g_{m-4}^7(x_{m-2}) - 8g_{m-3}^7(x_{m-2}) + 28g_{m-2}^7(x_{m-2})] \\
&= \frac{1}{h^7} [(x_{m-2} - x_{m-4})^7 - 8(x_{m-2} - x_{m-3})^7 + 28(x_{m-2} - x_{m-2})^7] \\
&= \frac{1}{h^7} [(2h)^7 - 8(h)^7] = 120 \\
\phi_m(x_{m-3}) &= \frac{1}{h^7} [g_{m-4}^7(x_{m-3}) - 8g_{m-3}^7(x_{m-3})] \\
&= \frac{1}{h^7} [(x_{m-3} - x_{m-4})^7 - 8(x_{m-3} - x_{m-3})^7] \\
&= \frac{1}{h^7} [(h)^7] = 1 \\
\phi_m(x_{m-4}) &= \frac{1}{h^7} [g_{m-4}^7(x_{m-4})] = \frac{1}{h^7} [(x_{m-4} - x_{m-4})^7] = 0
\end{aligned}$$

bulunabilir. Benzer şekilde işlemlerin yapılmasıyla  $'$ ,  $''$ ,  $'''$ ,  $^{(4)}$ ,  $^{(5)}$  ve  $^{(6)}$  sırasıyla  $x$ 'e göre birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü, beşinci ve altıncı mertebeden türevleri göstermek üzere,  $[x_{m-4}, x_{m+4}]$  aralığındaki

$$\phi_m(x), \phi_m'(x), \phi_m''(x), \phi_m'''(x), \phi_m^{(4)}(x), \phi_m^{(5)}(x) \text{ ve } \phi_m^{(6)}(x)$$

septik B-spline fonksiyonlarının bölünme noktalarındaki değerleri Çizelge 7.1 de verilmiştir.

Çizelge 7.1: Bölünme noktalarındaki septik B-spline değerleri

$x$	$x_{m-4}$	$x_{m-3}$	$x_{m-2}$	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$	$x_{m+3}$	$x_{m+4}$
$\phi_m$	0	1	120	1191	2416	1191	120	1	0
$\frac{7}{h}\phi_m'$	0	-1	-56	-245	0	245	56	1	0
$\frac{42}{h^2}\phi_m''$	0	1	24	15	-80	15	24	1	0
$\frac{210}{h^3}\phi_m'''$	0	-1	-8	19	0	-19	8	1	0
$\frac{840}{h^4}\phi_m^{(4)}$	0	1	0	-9	16	-9	0	1	0
$\frac{2520}{h^5}\phi_m^{(5)}$	0	-1	4	-5	0	5	-4	1	0
$\frac{5040}{h^6}\phi_m^{(6)}$	0	1	-6	15	-20	15	-6	1	0

Çizelge 7.1 ile (7.3) eşitliğinin kullanılmasıyla  $U_m$

$$\begin{aligned}
U_m &= U(x_m) = \sum_{j=m-3}^{m+4} \phi_j(x_m) \delta_j(t) \\
&= \phi_{m-3}(x_m) \delta_{m-3} + \phi_{m-2}(x_m) \delta_{m-2} + \phi_{m-1}(x_m) \delta_{m-1} + \phi_m(x_m) \delta_m \\
&\quad + \phi_{m+1}(x_m) \delta_{m+1} + \phi_{m+2}(x_m) \delta_{m+2} + \phi_{m+3}(x_m) \delta_{m+3} + \phi_{m+4}(x_m) \delta_{m+4} \\
&= \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} \\
&\quad + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu durumda  $U_m$  ve onun ilk altı türevi

$$\begin{aligned}
U_m &= U(x_m) = \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} \\
&\quad + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}, \tag{7.4}
\end{aligned}$$

$$U'_m = U'(x_m) = \frac{7}{h} (\delta_{m-3} + 56\delta_{m-2} + 245\delta_{m-1} - 245\delta_{m+1} - 56\delta_{m+2} - \delta_{m+3}), \tag{7.5}$$

$$\begin{aligned}
U''_m &= U''(x_m) = \frac{42}{h^2} (\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} \\
&\quad + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \tag{7.6}
\end{aligned}$$

$$U'''_m = U'''(x_m) = \frac{210}{h^3} (\delta_{m-3} + 8\delta_{m-2} - 19\delta_{m-1} + 19\delta_{m+1} - 8\delta_{m+2} - \delta_{m+3}) \tag{7.7}$$

$$U_m^{(4)} = U^{(4)}(x_m) = \frac{840}{h^4} (\delta_{m-3} - 9\delta_{m-1} + 16\delta_m - 9\delta_{m+1} + \delta_{m+3}), \tag{7.8}$$

$$U_m^{(5)} = U^{(5)}(x_m) = \frac{2520}{h^5} (\delta_{m-3} - 4\delta_{m-2} + 5\delta_{m-1} - 5\delta_{m+1} + 4\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \tag{7.9}$$

$$U_m^{(6)} = U^{(6)}(x_m) = \frac{5040}{h^6} (\delta_{m-3} - 6\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 20\delta_m + 15\delta_{m+1} \tag{7.10}$$

$$-6\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \tag{7.11}$$

olarak bulunur.  $\xi = x - x_m$  dönüşümü yapılırsa  $x \in [x_m, x_{m+1}]$  sonlu elemanı  $\xi \in [0, h]$  aralığına dönüşecektir. Bu durumda  $[0, h]$  aralığı üzerindeki şekil fonksiyonları

$$\phi_{m-3}(\xi) = \frac{(h - \xi)^7}{h^7}, \tag{7.12}$$

$$\phi_{m-2}(\xi) = \frac{(2h - \xi)^7 - 8(h - \xi)^7}{h^7}, \tag{7.13}$$

$$\phi_{m-1}(\xi) = \frac{(3h - \xi)^7 - 8(2h - \xi)^7 + 28(h - \xi)^7}{h^7}, \tag{7.14}$$

$$\phi_m(\xi) = \frac{(4h - \xi)^7 - 8(3h - \xi)^7 + 28(2h - \xi)^7 - 56(h - \xi)^7}{h^7}, \tag{7.15}$$

$$\phi_{m+1}(\xi) = \frac{(\xi + 3h)^7 - 8(\xi + 2h)^7 + 28(\xi + h)^7 - 56\xi^7}{h^7}, \tag{7.16}$$

$$\phi_{m+2}(\xi) = \frac{(\xi + 2h)^7 - 8(\xi + h)^7 + 28\xi^7}{h^7}, \quad (7.17)$$

$$\phi_{m+3}(\xi) = \frac{(\xi + h)^7 - 8\xi^7}{h^7} \quad (7.18)$$

$$\phi_{m+4}(\xi) = \left(\frac{\xi}{h}\right)^7 \quad (7.19)$$

olarak elde edilebilir. AD denklemleri için zaman ayrıştırılması sonucu elde edilen

$$\begin{aligned} & u^{n+1} + \alpha\theta_1 u_x^{n+1} - (\mu\theta_1 + \alpha^2\theta_3) u_{2x}^{n+1} + (2\mu\alpha\theta_3 + \alpha^3\theta_5 u_{3x}) u_{3x}^{n+1} - \\ & (\mu^2\theta_3 + 3\mu\alpha^2\theta_5) u_{4x}^{n+1} + 3\mu^2\alpha\theta_5 u_{5x}^{n+1} - \mu^3\theta_5 u_{6x}^{n+1} = \\ & u^n - \alpha\theta_2 u_x^n - (\mu\theta_2 + \alpha^2\theta_4) u_{2x}^n - (2\mu\alpha\theta_4 + \alpha^3\theta_6 u_{3x}) u_{3x}^n \\ & + (\mu^2\theta_4 + 3\mu\alpha^2\theta_6) u_{4x}^n - 3\mu^2\alpha\theta_6 u_{5x}^n + \mu^3\theta_6 u_{6x}^n \end{aligned}$$

eşitliği  $W(x)$  ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak konum aralığı üzerinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_a^b W(x) (u^{n+1} + \alpha\theta_1 u_x^{n+1} - (\mu\theta_1 + \alpha^2\theta_3) u_{2x}^{n+1} + (2\mu\alpha\theta_3 + \alpha^3\theta_5) u_{3x}^{n+1} - \\ & (\mu^2\theta_3 + 3\mu\alpha^2\theta_5) u_{4x}^{n+1} + 3\mu^2\alpha\theta_5 u_{5x}^{n+1} - \mu^3\theta_5 u_{6x}^{n+1}) dx = \\ & \int_a^b W(x) (u^n - \alpha\theta_2 u_x^n - (\mu\theta_2 + \alpha^2\theta_4) u_{2x}^n - (2\mu\alpha\theta_4 + \alpha^3\theta_6) u_{3x}^n + \\ & (\mu^2\theta_4 + 3\mu\alpha^2\theta_6) u_{4x}^n - 3\mu^2\alpha\theta_6 u_{5x}^n + \mu^3\theta_6 u_{6x}^n) dx \end{aligned} \quad (7.20)$$

eşitliğine ulaşılır. Septik B-spline fonksiyonlar ve ilk 6 türevi bölünme noktalarında sürekli olduğundan bu bölümde kısmi integrasyon yapılarak mertebe düşürülmesine gerek yoktur. Ağırlıklı rezidü metotlarından olan Galerkin metodunda ağırlık fonksiyonu içinde taban fonksiyonları seçilir. Dolayısıyla  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı üzerinde  $W(x)$  ağırlık fonksiyonu yerine taban fonksiyonu ve  $u, u_x, u_{2x}, u_{3x}, u_{4x}, u_{5x}$  ve  $u_{6x}$  yerine (7.3) septik B-Spline fonksiyon yaklaşımı kullanılacaktır. Bu durumda  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı üzerinde  $\xi = x - x_m, 0 \leq \xi \leq h$  lokal koordinat dönüşümü yapılsa  $i = m - 3, \dots, m + 4$  olmak üzere

$$\begin{aligned} & \sum_{j=m-3}^{m+4} \left[ \int_0^h \phi_i (\phi_j + \alpha\theta_1 \phi_j' - (\mu\theta_1 + \alpha^2\theta_3) \phi_j'' + (2\mu\alpha\theta_3 + \alpha^3\theta_5) \phi_j''' - \right. \\ & \left. (\mu^2\theta_3 + 3\mu\alpha^2\theta_5) \phi_j^{(4)} + 3\mu^2\alpha\theta_5 \phi_j^{(5)} - \mu^3\theta_5 \phi_j^{(6)}) d\xi \right] \delta_j^{n+1} - \\ & \sum_{j=m-3}^{m+4} \left[ \int_0^h \phi_i (\phi_j - \alpha\theta_2 \phi_j' - (\mu\theta_2 + \alpha^2\theta_4) \phi_j'' - (2\mu\alpha\theta_4 + \alpha^3\theta_6) \phi_j''' + \right. \\ & \left. (\mu^2\theta_4 + 3\mu\alpha^2\theta_6) \phi_j^{(4)} - 3\mu^2\alpha\theta_6 \phi_j^{(5)} + \mu^3\theta_6 \phi_j^{(6)}) dx \right] \delta_j^n \end{aligned} \quad (7.21)$$



bulunur.

$$\begin{aligned}
A_{i,j}^e &= \int_0^h \phi_i \phi_j d\xi, & B_{i,j}^e &= \int_0^h \phi_i \phi_j' d\xi, & C_{i,j}^e &= \int_0^h \phi_i \phi_j'' d\xi, \\
D_{i,j}^e &= \int_0^h \phi_i \phi_j''' d\xi, & E_{i,j}^e &= \int_0^h \phi_i \phi_j^{(4)} d\xi & F_{i,j}^e &= \int_0^h \phi_i \phi_j^{(5)} d\xi \\
G_{i,j}^e &= \int_0^h \phi_i \phi_j^{(6)} d\xi
\end{aligned}$$

ve  $m = 0, 1, \dots, N - 1$  için

$$\boldsymbol{\delta}^e = (\delta_{m-3}, \dots, \delta_{m+4})^T$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
& [A_{i,j}^e + \alpha\theta_1 B_{i,j}^e - (\mu\theta_1 + \alpha^2\theta_3) C_{i,j}^e + (2\mu\alpha\theta_3 + \alpha^3\theta_5) D_{i,j}^e - \\
& (\mu^2\theta_3 + 3\mu\alpha^2\theta_5) E_{i,j}^e + 3\mu^2\alpha\theta_5 F_{i,j}^e - \mu^3\theta_5 G_{i,j}^e] \delta_j^{n+1} - \\
& [A_{i,j}^e - \alpha\theta_2 B_{i,j}^e - (\mu\theta_2 + \alpha^2\theta_4) C_{i,j}^e - (2\mu\alpha\theta_4 + \alpha^3\theta_6) D_{i,j}^e + \\
& (\mu^2\theta_4 + 3\mu\alpha^2\theta_6) E_{i,j}^e - 3\mu^2\alpha\theta_6 F_{i,j}^e + \mu^3\theta_6 G_{i,j}^e] \delta_j^n
\end{aligned} \tag{7.22}$$

olarak tanım aralığı üzerindeki her bir alt aralıktaki yaklaşım bulunur.  $\mathbf{A}^e$ ,  $\mathbf{B}^e$ ,  $\mathbf{C}^e$ ,  $\mathbf{D}^e$ ,  $\mathbf{E}^e$ ,  $\mathbf{F}^e$  ve  $\mathbf{G}^e$  eleman matrislerinin birbirlerine eklenmesi sonucunda,

$$\boldsymbol{\delta} = (\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+2}, \delta_{N+3})^T$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{A} + \alpha\theta_1 \mathbf{B} - (\mu\theta_1 + \alpha^2\theta_3) \mathbf{C} + (2\mu\alpha\theta_3 + \alpha^3\theta_5) \mathbf{D} - \\
& (\mu^2\theta_3 + 3\mu\alpha^2\theta_5) \mathbf{E} + 3\mu^2\alpha\theta_5 \mathbf{F} - \mu^3\theta_5 \mathbf{G}] \boldsymbol{\delta}^{n+1} = \\
& [\mathbf{A} - \alpha\theta_2 \mathbf{B} - (\mu\theta_2 + \alpha^2\theta_4) \mathbf{C} - (2\mu\alpha\theta_4 + \alpha^3\theta_6) \mathbf{D} + \\
& (\mu^2\theta_4 + 3\mu\alpha^2\theta_6) \mathbf{E} - 3\mu^2\alpha\theta_6 \mathbf{F} + \mu^3\theta_6 \mathbf{G}] \boldsymbol{\delta}^n
\end{aligned} \tag{7.23}$$

sistemi elde edilir. Elde edilen sistem  $N + 7$  bilinmeyen  $N + 7$  denklemden oluşan lineer bir sistemdir ve bir satırında en fazla 15 tane sıfır olmayan eleman içermektedir. Sınır şartlarını uygulayabilmek (7.23) sisteminden ilk ve son denklemler silinerek

$$u(a, t) = u(b, t) = 0$$

sınır şartları sisteme eklenebilir. Böylece denklem sistemi tekrar  $N + 7$  bilinmeyen  $N + 7$  denklemden oluşan bir sisteme dönecektir. Denklem sistemindeki bilinmeyenlerin yani

$$\delta_{-3}^{n+1}, \delta_{-2}^{n+1}, \dots, \delta_{N+1}^{n+1}, \delta_{N+2}^{n+1}, \delta_{N+3}^{n+1}$$

değerlerinin bulunabilmesi için öncelikle

$$\delta_{-3}^0, \delta_{-2}^0, \dots, \delta_{N+2}^0, \delta_{N+3}^0, \delta_{N+3}^0$$

bilinmeyenleri bulunmalıdır. Bunun için  $m = 0, \dots, N$  olmak üzere

$$\begin{aligned} u'(x_0, 0) &= f'(x_0) \\ u''(x_0, 0) &= f''(x_0) \\ u'''(x_0, 0) &= f'''(x_0) \\ u(x_m, 0) &= \delta_{m-3}^0 + 120\delta_{m-2}^0 + 1191\delta_{m-1}^0 + 2416\delta_m^0 + 1191\delta_{m+1}^0 \\ &\quad + 120\delta_{m+2}^0 + \delta_{m+3}^0 = f(x_m), \\ u'(x_N, 0) &= f'(x_N), \\ u''(x_N, 0) &= f''(x_N) \\ u'''(x_N, 0) &= f'''(x_N) \end{aligned} \tag{7.24}$$

olarak verilen sınır şartları ve başlangıç şartı kullanılabilir. Böylece  $N + 7$  bilinmeyen  $N + 7$  denklemden oluşan bir sistem elde edilir. Denklem sisteminin çözülmesi ile

$$\delta_{-3}^0, \delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0, \dots, \delta_{N+1}^0, \delta_{N+2}^0, \delta_{N+3}^0$$

başlangıç bilinmeyenleri elde edilir. İteratif olarak  $n = 0, 1, 2, \dots$  için (7.23) denklem sistemi çözülrse

$$\delta_{-3}^{n+1}, \delta_{-2}^{n+1}, \delta_{-1}^{n+1}, \dots, \delta_{N+1}^{n+1}, \delta_{N+2}^{n+1}, \delta_{N+3}^{n+1}$$

elde edilir. Böylece  $x_m$ ,  $m = 0, \dots, N$  noktasındaki  $U_m^{n+1}$  değerleri

$$U_m^{n+1} = \delta_{m-3}^{n+1} + 120\delta_{m-2}^{n+1} + 1191\delta_{m-1}^{n+1} + 2416\delta_m^{n+1} + 1191\delta_{m+1}^{n+1} + 120\delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+3}^{n+1}$$

septik B-spline eşitliği kullanılarak her bir zaman adımında hesaplanabilir.

## 7.1. Test Problemi

Test probleminde, diğer bölümlerde olduğu gibi adveksiyon ve difüzyon etkisi birlikte incelenecektir. Bu problem için

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp\left(-\frac{(x - \tilde{x}_0 - \alpha t)^2}{\mu(4t+1)}\right)$$

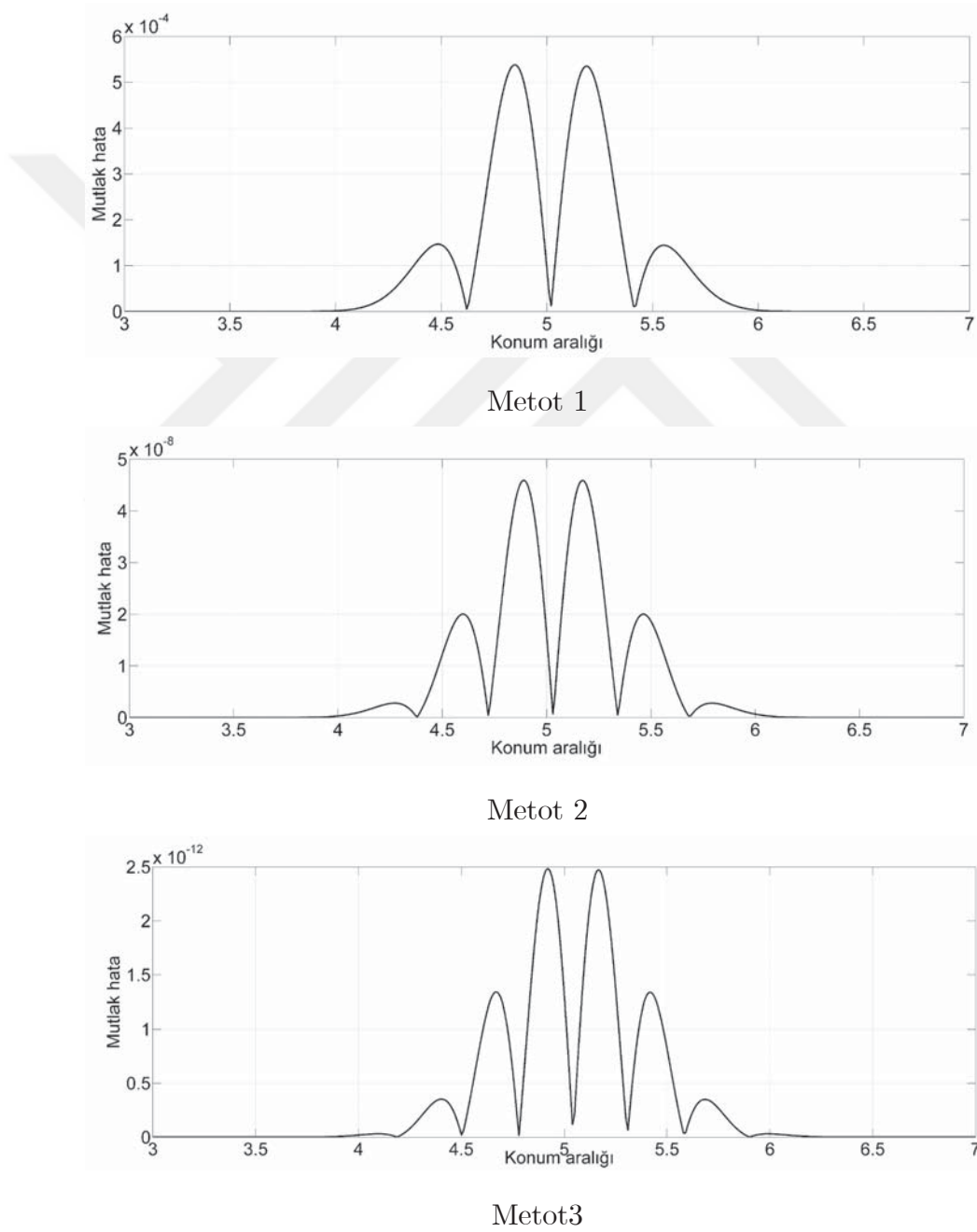
analitik çözümü kullanılacaktır.  $t = 0$  için analitik çözümden başlangıç şartıda elde edilebilir.  $t = 0$  için başlangıç anında dalganın genliği 1br olup zaman geçtikçe dalganın genliği sönmektedir. Bu bölümde  $\alpha = 0.8 \text{ m/s}$ ,  $\mu = 0.005 \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\tilde{x}_0 = 1\text{m}$  seçimleri yapılarak  $t = 5$  zamanına kadar  $0 \leq x \leq 8\text{m}$  konum aralığında septik B-spline Galerkin metodu kullanılarak AD denklemi yaklaşık olarak çözülmüştür. Zamana göre doğrulukları sırasıyla 2., 4. ve 6. mertebeden olan üç farklı metot için konum artım uzunluğu  $h = 0.01$  olarak yeterince küçük alınmış ve farklı zaman artım uzunlukları için maksimum hata normları ile yakınsaklık oranları hesaplanarak Çizelge 7.2 de verilmiştir.

Çizelge 7.2:  $h = 0.01$  için hata normları ve yakınsaklık oranları

$k$	Metot 1		Metot 2		Metot 3	
	$L_\infty$	YO	$L_\infty$	YO	$L_\infty$	YO
1	0.55	1.28	0.26	1.94	0.13	3.06
0.5	0.23	0.78	$6.91 \times 10^{-2}$	2.50	$1.51 \times 10^{-2}$	5.11
0.2	0.11	1.06	$6.97 \times 10^{-3}$	3.96	$1.40 \times 10^{-4}$	5.86
0.1	$5.36 \times 10^{-2}$	1.90	$4.48 \times 10^{-4}$	3.98	$2.40 \times 10^{-6}$	5.96
0.05	$1.43 \times 10^{-2}$	2.06	$2.85 \times 10^{-5}$	3.99	$3.85 \times 10^{-8}$	5.99
0.02	$2.17 \times 10^{-3}$	2.01	$7.35 \times 10^{-7}$	4.00	$1.59 \times 10^{-10}$	5.99
0.01	$5.38 \times 10^{-4}$		$4.60 \times 10^{-8}$		$2.50 \times 10^{-12}$	

Çizelge incelendiğinde en düşük hataların bir önceki üç bölümde de olduğu gibi zamana göre doğruluğu en yüksek olan Metot 3 de elde edildiği görülebilir. Ayrıca zaman artım uzunluğu azalırken önerilen metotların zaman parçalanması doğruluklarında yine önceki üç bölümde olduğu gibi yakınsama oranları ile uyumlu oldukları görülebilir.

Şekil 7.1 de her bir metot için  $h = 0.01$  konum artımı ve  $k = 0.01$  zaman artım değerleri kullanılarak çizdirilen mutlak hata grafikleri verilmiştir. Önceki üç bölümde olduğu gibi tüm hata grafiklerinde maksimum hataların sınırlarda gelmediği görülebilir.



Şekil 7.1: Mutlak hata grafikleri

## 8. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada adveksiyon difüzyon (AD) denkleminin sayısal çözümünü araştırmak için zaman parçalanması olarak doğruluğu 2. 4. ve 6. mertebeden olan yöntemler kullanılmıştır. Doğruluğu 2 olan yöntem literatürde de sıklıkla kullanılan Crank Nicolson zaman ayrıştırmasına karşılık gelmektedir. Sayısal çözüm araştırılırken konum parçalanması yapılırken ise kuartik, kuintik, sektik ve septik B-spline Galerkin yöntemleri kullanılmıştır.

4 farklı konum parçalanması ve her bir konum parçalanması yapılırken kullanılan 3 farklı zaman parçalanması için önerilen 12 farklı metodun doğruluğunun kontrolü için hem adveksiyon hem de difüzyon etkinin incelenebileceği test problemi kullanılmıştır. Konum parçalanması yapılırken kullanılan kuartik, kuintik, sektik ve septik B-spline fonksiyonlar sebebiyle sonuç olarak elde edilen lineer denklem sistemleri sırasıyla 9, 11, 13 ve 15'li bant matrislerden oluşmaktadır. Bu sebeple elde edilen denklem sistemleri çözülürken maliyeti en düşük olan yöntem kuartik B-spline fonksiyonlarının kullanıldığı yöntemler iken maliyeti en yüksek olan yöntemler ise derecesi en yüksek olan septik B-spline fonksiyonlarının kullanıldığı yöntemlerdir.

Adveksiyon ve difüzyon etkinin görüldüğü test probleminde konum artım uzunluğu sabit tutulup zaman artım uzunluğu küçültülerek sonuçlar bulunmuştur. 4., 5., 6. ve 7. bölümlerde bulunan sonuçlar incelendiğinde aynı sonuçlar ile karşılaşılmıştır. En iyi sonuçlar konum parçalanması ne olursa olsun her zaman doğruluğu 6 olan metotlar için elde edilmiştir. Konum parçalanması için kullanılan B-spline fonksiyonların etkisini görmek için öncelikle önceki bölümlerde elde edilen sonuçların daha iyi gözlenebilmesi adına sadece  $h = k = 0.01$  için elde edilen maksimum hata normları Çizelge 8.1'de tekrar verilmiştir.

Çizelge 8.1:  $h = k = 0.01$  için hata normları

Metotlar	$L_\infty$ (Kuartik )	$L_\infty$ (Kuintik)	$L_\infty$ (Sektik)	$L_\infty$ (Septik)
Metot 1	$5.38 \times 10^{-4}$	$5.38 \times 10^{-4}$	$5.38 \times 10^{-4}$	$5.38 \times 10^{-4}$
Metot 2	$4.60 \times 10^{-8}$	$4.60 \times 10^{-8}$	$4.60 \times 10^{-8}$	$4.60 \times 10^{-8}$
Metot 3	$2.49 \times 10^{-12}$	$2.49 \times 10^{-12}$	$2.49 \times 10^{-12}$	$2.50 \times 10^{-12}$

Çizelge 8.1 incelendiğinde sonuçların hemen hemen aynı olduğu görülmektedir. Dolayısıyla konum parçalanması için kuartik B-spline Galerkin yöntemini kullanmak maliyet açısından uygun olacaktır. Çünkü maliyet açısından en uygun olan konum parçalanması olmasının yanında diğer yöntemler kadarda iyi sonuç vermektedir.

## 9. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada AD denkleminin sayısal çözümü araştırılmaktadır. Sayısal çözüm araştırılırken mümkün olduğunca yüksek doğrulukta bir zaman parçalanması yapılmaya çalışılmıştır. Bunun için literatürde yoğun olarak kullanılan Crank Nicolson yönteminden esinlenerek zaman parçalanma doğruluğu 4 ve 6 olan yöntemler AD denklemini yaklaşık olarak çözmek için kullanılmıştır. Zaman parçalanması yapıldıktan sonra konum parçalanması için ise kuartik, kuintik, sektik ve septik B-spline Galerkin yöntemleri kullanılmıştır. Önerilen yöntemlerin doğruluğu ise adveksiyon ve difüzyon içeren bir test problemi kullanılarak incelenmiştir. Yapılan hesaplamalar sonucunda aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

- Crank Nicolson zaman ayrıştırmasına göre 4. mertebeden doğruluğa sahip yöntem ile daha iyi sonuçlar elde edilmiştir. 4. mertebeden doğruluğa sahip yöntemlere göre ise 6. mertebeden doğruluğa sahip zaman parçalanması ile daha iyi sonuçlar elde edilmiştir.
- Yakınsaklık oranı hesaplandığında bulunan değerlerin zaman parçalanması mertebeleri ile uyumlu olduğu görülmüştür.
- 4. ve 6. mertebeden önerilen yöntemler, Crank Nicolson yöntemine göre daha yüksek mertebeden türevler içerdiğinden uygulama açısından daha zor olmaktadır.
- En yüksek maliyet 6. mertebeden zaman parçalanmasının yapıldığı, konum parçalanması için ise en yüksek dereceden spline olan septik B-spline fonksiyonun kullanıldığı yöntem olmuştur.

Sonuç olarak, zaman parçalanmasının doğruluğu arttıkça sonuçların iyileştiği, bununla birlikte konum parçalanması için kullanılan spline fonksiyonların derecelerinin artırılmasının sonuçlarda bir değişiklik getirmediği görülmüştür.

## KAYNAKLAR DİZİNİ

- Almashhadani, L., 2016, Numerical Behavior of Advection- Diffusion Equation, Msc. Thesis, Yıldız Teknik University, Department of Mathematics, 63 p.
- Appadu, A.R., 2013, Numerical Solution of 1D Advection -Diffusion Equation Using Standard and Nonstandard Finite Difference Schemes, Journal of Applied Mathematics, 14 p.
- Bahar, E. and Gürarşlan, G., 2017, Numerical Solution of Advection -Diffusion Equation Using Operator Splitting Method, International Journal of Engineering & Applied Sciences, Vol.9, Issue.4, p.76-88.
- Bilgin, A. M., 2015, Adveksiyon -Difüzyon Denklemlerinin Sonlu Farklar ile Çözümü, Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü 116 s.
- Canıvar, A., 2011, Lineer Olmayan kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Taylor - Kolokasyon ve Taylor - Galerkin Yöntemleri ile Sayısal Çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Matematik Bölümü 120 s.
- Dağ, İ., Canıvar, A. and Şahin, A., 2011, Taylor - Galerkin Method for Advection - Diffusion Equation, Kybemetes, Vol.40, No.5/6, pp.762-777.
- Dağ, I., Irk, D. and Tombul, M., 2006, Least-Squares Finite Element Method for the Advection- Diffusion Equation, Applied Mathematics and Computation, 173, p.554-565.
- Dağ, I. and Korkmaz, A., 2016, Quartic and Quintic B-spline Methods for Advection- Diffusion Equation, Applied Mathematics and Computation, 274, p.208-219.



**KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)**

- Dehghan, M., 2004, Weighted Finite Difference Techniques for The One-Dimensional Advection-Diffusion Equation, Applied Mathematics and Computation, 147, p.307-319.
- Dhawan, S., Bhowmik, S.K. and Kumar, S., 2015, Galerkin -Least Square B-spline Approach Toward Advection -Diffusion Equation, Applied Mathematics and Computation, 261, p.128-140.
- Dhawan, S., Kapoor, S. and Kumar, S., 2012, Numerical Method for Advection Difusion Equation Using FEM and B-splines, Journal of Computational Science, 3, p.429-437.
- Dhawan, S. and Kumar, S., 2009, A Galerkin B-Spline Approach To One Dimensional Heat Equation, International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences, 1(1), p.47-56.
- Doğan, S., 2013, Advection Diffusion Denkleminin Genişletilmiş kübik B-spline Sonlu Elemanlar Çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Matematik Bölümü 76 s.
- Görgülü, M., Dağ, I., Doğan, S. and Irk, D., 2018, A Numerical Solution of The Advection -Diffusion Equation by Using Extended Cubic B-spline Functions, Anadolu University Journal of Science and Technology A- Applied Science and Engineering, No.2, Vol.19, p.347-355.
- Görgülü, M. and Irk, D., 2016, Higher Order Acurate Numerical Solution of Advection Diffusion Equation, Konuralp Journal of Mathematics, 6(2), p.253-258.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)**

- Görgülü, M. and Irk, D., 2019, The Galerkin Finite Element Method for Advection Diffusion Equation, Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 37(1), p.119-128.
- Funaro, D. and Pontrelli, G., 1999, Spline Approximation of Advection-Diffusion Problems Using Upwing Type Collocation Nodes, Journal of Computational and Applied Mathematics, 110, p.141-153.
- Irk, D., Dağ, I. and Tombul, M., 2015, Extended Cubic B-spline Solution of The Advection- Diffusion Equation, KSCE Journal of Civil Engineering, 19(4), p.929-934.
- Karur, S.R. and Ramachandran, P.A., 1995, Augmented Thin Plate Spline Approximation in DRM , Boundary Elements Communications, 6, 55-58.
- Mittal, R.C. and Jain, R.K., 2012, Redefined Cubic B-splines Collacation Method for Solving Convection- Diffusion Equations, Applied Mathematical Modeling, 36, p.5555-5573.
- Mohebbi, A. and Dehghan, M., 2010, High-Order Compact Solution of The One-Dimensional Heat and Advection-Diffusion Equations, Applied Mathematical Modelling, 34, p.3071-3084.
- Nazir, T., Abbas, M., Ismail, A.I.M, Majid, A.A. and Rashid, A., 2016, The Numerical Solution of Advection -Diffusion Problems Using New Cubic Trigonometric B-spline Approach, Applied Mathematical Modelling, 40, p.4586-4611.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)**

Sarı, M., Gürarlan, G. and Zeytinöđlu, A., 2010, High-Order Finite Difference Schemes for Solving the Advection-Diffusion Equation, *Mathematical and Computational Applications*, Vol.15, No.3, p.449-460.

Thongmoon, M. and McKibbin, R., 2006, A Comparison of Some Numerical Methods for The Advection-Diffusion Equation, *Research Letters in the Information and Mathematical Science*, 10, p.49-62.

Topçu, E. and Irk, D., 2018, Adveksiyon Difüzyon Denklemi için Sektik B-spline Galerkin Metodu, *BAUN Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 20(3), p.105-116.