Genelleştirilmiş Dörtgenler Üzerine

Süleyman Alper Atkoşar

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Mayıs 2018

On the Generalized Quadrangles

Süleyman Alper Atkoşar

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics-Computer

May 2018

Genelleştirilmiş Dörtgenler Üzerine

Süleyman Alper Atkoşar

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. İbrahim Günaltılı

Mayıs 2018

ONAY

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS öğrencisi Süleyman Alper Atkoşar'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "**Genelleştirilmiş Dörtgenler Üzerine**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. İbrahim Günaltılı

İkinci Danışman : -

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye :

Üye :

Üye :

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. İbrahim Günaltılı danışmanlığında hazırlamış olduğum "**Genelleştirilmiş Dörtgenler Üzerine**" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 04/05/2018

Süleyman Alper Atkoşar

ÖZET

Bu tez çalışması, kaynakçada belirtilen eserlerin incelenmesi ve Lynn Margaret Batten'ın (1986) "Combinatorics of Finite Geometries" adlı kaynağının esas alınmasıyla hazırlanmıştır. Aksiyomlar sistemi yardımıyla oluşturulan bazı sonlu geometrik yapılar verilmiştir. Bu geometrik yapıların aralarındaki ilişkiler ve kombinatöryel özellikleri incelenmiştir. Kaynakta verilen bazı örnekler detaylandırılmış ve ispatları verilmeyen bazı teoremlerin ispatları yapılmıştır.

İkinci bölümde, genelleştirilmiş dörtgenlerin kısa bir tarihçesi verilmiştir.

Üçüncü bölümde, aksiyom, uzay, yaklaşık lineer uzay, kısıtlama, dual uzay, alt uzay, bağlantı sayısı ve lineer fonksiyon kavramları açıklanmış, bazı yaklaşık lineer uzay örnekleri ve bu uzaylara dair özellikler temel kavramlar adı altında incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise tezin ana konusu olan genelleştirilmiş dörtgenler, yaklaşık lineer uzayların üzerine inşa edilmiş, genelleştirilmiş dörtgenlerin bazı özellikler verilmiş ve bu özelliklerin bir kısmı hem doğru hem de noktalar vasıtasıyla ispat edilmiştir. Elde edilen sonuçlar yardımıyla genelleştirilmiş dörtgenlere ait kombinatöryel özellikler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Aksiyom sistemi, Yaklaşık lineer uzay, Dual uzay, Bağlantı sayısı, Genelleştirilmiş dörtgenler.

SUMMARY

This thesis has been prepared based on Lynn Margaret Batten's (1986) source, "Combinatorics of Finite Geometries", and examining the works mentioned in the references. Some finite geometric structures built with the aid of axioms system are given. The relation between these geometric structures and their combinatorial features are examined. Some examples given in the source are elaborated and proofs of some theorems with no proof are given.

In the second chapter, a brief history of generalized quadrangles is given.

In the third chapter, the concepts of axiom, space, near-linear space, restriction, dual space, subspsace, connection number and linear function are explained, some near linear space examples and features of these spaces are studied under the name of basic concepts.

In the fourth chapter, generalized quadrangles which is the main topic of this thesis, are built on the near linear spaces, some features of generalized quadrangles are given and a part of these features are proved by way of points and lines. Combinatorial features of generalized quadrangles are investigated with the help of obtained results.

Keywords: Axiomatic system, Near lineer space, Dual space, Connection number, Generalized quadrangles.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisansa ilk başladığım andan itibaren bütün eğitimim boyunca bilgisini, ilgisini ve hoşgörüsünü esirgemeyen kıymetli danışman hocam

Prof. Dr. İbrahim GÜNALTILI'ya,

yardımlarından ve bilgisinden sıklıkla istifade ettiğim değerli hocam

Prof. Dr. Özcan GELİŞGEN'e,

bugünlere gelmemde en büyük paya sahip olan ve haklarını ödeyemeyeceğim annem ile babama, bana her durumda destek veren ve her zaman yanımda duran sevgili eşime teşekkürü bir borç bilirim.

ESKİŞEHİR, 2018
Süleyman Alper Atkoşar

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET . . . . **vi**

SUMMARY . . . . **vii**

TEŞEKKÜR . . . . **viii**

İÇİNDEKİLER . . . . **ix**

ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . **x**

1. GİRİŞ VE AMAÇ **1**

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI **2**

3. TEMEL KAVRAMLAR **3**

3.1. Aksiyom Sistemleri ve Uzay 3
3.2. Yaklaşık Lineer Uzay 8
3.3. Kısıtlama 13
3.4. Dual Uzay 13
3.5. Alt Uzay 15
3.6. Bağlantı Sayısı 16
3.7. Lineer Fonksiyonlar 16

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ DÖRTGENLER **19**

4.1. Genelleştirilmiş Dörtgenler 19
4.2. Bazı Kombinatöryal Özellikler 42
4.3. s=t=3 parametreli Genelleştirilmiş Dörtgenler 54
4.4. Alt Dörtgenler 58
4.5. Genelleştirilmiş Dörtgenlerin Kolinasyonları 64

5. BULGULAR VE TARTIŞMA **67**

6. SONUÇ VE ÖNERİLER **68**

KAYNAKLAR DİZİNİ **69**

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil		**Sayfa**
3.1	Üç tane 3 noktalı, üç tane 2 noktalı doğru ve altı tane nokta içeren uzay	4
3.2	Üç tane 3 noktalı doğru ve altı tane nokta içeren uzay	5
3.3	Beş tane 2 noktalı doğru ve altı nokta içeren uzay	6
3.4	Üç tane 3 noktalı doğru, üç tane 2 noktalı doğru ve dokuz nokta içeren uzay	6
3.5	Yaklaşık lineer uzayın herhangi bir doğrusu	9
3.6	Farklı iki noktadan geçen düzlemler	10
3.7	Fano düzlemi	11
3.8	Fano düzleminin dual uzayı	15
3.9	Fano düzlemi	18
4.1	En küçük genelleştirilmiş dörtgen	20
4.2	Grid	22
4.3	18 nokta ve 9 doğrudan oluşan bir grid	23
4.4	18 nokta ve 9 doğrudan oluşan bir gridin duali	25
4.5	Yardımcı teorem 4.3 açıklaması	26
4.6	Yardımcı teorem 4.5 açıklaması	28
4.7	Yardımcı teorem 4.5 açıklaması	29
4.8	Yardımcı teorem 4.6 açıklaması	30
4.9	Örnek 4.3 açıklaması	35
4.10	Örnek 4.3 açıklaması	35
4.11	Örnek 4.3 açıklaması	36
4.12	Örnek 4.3 açıklaması	37
4.13	Örnek 4.3 açıklaması	38
4.14	Sylvester’ın duad-sintem geometrisi	39
4.15	Yardımcı teorem 4.28 açıklaması	56
4.16	Yardımcı teorem 4.28 açıklaması	57
4.17	Yardımcı teorem 4.28 açıklaması	57
4.18	(s+1)(s+1) noktalı grid	64
4.19	2(s+1) noktalı grid	65
4.20	Teorem 4.6 açıklaması	66

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Bu tez çalışmasında, Lynn Margaret Batten'ın "Combinatorics of Finite Geometries" (1986) adlı kitabı ve kaynakçada belirtilen diğer çalışmaların göz önüne alınmasıyla, sonlu yaklaşık lineer uzay örnekleri ile genelleştirilmiş dörtgenlerin bazı kombinatöryel özellikleri incelenmiştir.

Sonlu geometrik yapıların belirli koşullar altında ne gibi özelliklere sahip oldukları araştırılmıştır. Önceki yıllarda yapılmış olan çalışmalarda, genelleştirilmiş dörtgenlerin grid, dual grid ve s, t parametreli olmak üzere 3 ana yapıya ayrılabileceği görülmüştür. Bu yapıların her birinin ne gibi kombinatöryal özelliklere sahip olduklarının detaylı şekilde incelenmesi amaçlanmıştır. Ayrıca genelleştirilmiş dörtgenlerin alt dörtgenleri ve kolinasyonları hakkında bazı önemli sonuçlar verilmiştir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Genelleştirilmiş dörtgenler iki ayrı alanda ve iki farklı teorinin özel durumları olarak ortaya çıkmıştır. Genelleştirilmiş dörtgenler ilk olarak "genelleştirilmiş n-genler" olarak adlandırılan yapıların özel bir durumu olarak Tits(1959) tarafından ortaya konmuştur. Genelleştirilmiş n-genlerin tanımı, grup teorisindeki bazı problemler ile bağlantılı olarak ortaya çıkmıştır. (Tits (1959), Dembowski (1968))

Genelleştirilmiş dörtgenler Bose(1963) tarafından yapılan çalışmalar neticesinde tekrar ortaya çıkmıştır. Bose, kısmî geometriler adını verdiği sistemler ile ilgili çalışmalar yapmıştır. Çok genel olarak bahsedilecek olursa, bu teorinin ortaya çıkmasına neden olan ana sebep, istatistiksel problemlerden ortaya çıkan sorunlardır.

Bu yapılar üzerindeki ana çalışmalar 1970'lerden itibaren yerini almıştır ve bu çalışmaların büyük bir kısmına Thas, Payne ve Tallini öncülük etmiştir.

Ahrens ve Szekeres (1969), dörtgenlerin k bir asal kuvvet olmak üzere, $k-1, k+1$ parametreli yeni bir sınıfını keşfetmişlerdir. M.Hall (1971) bunu k sayısının çift olması durumu için bağımsız olarak vermiştir. Payne (1972,1974) bunu genelleştirerek daha fazla örnekler üretmiştir. Örneklerin en yeni sınıfları Kantor'a (1980) aittir. Bu ise 1979 yılında keşfedilmiştir ve $k \equiv 2$ (mod3) olmak üzere parametreleri k^2, k dır.

Ana problemlerden biri genelleştirilmiş dörtgenlerin bir sınıflandırılmasını vermektir. Klasik örneklerin bilinen sınıflandırmalarının çoğu Thas'a (1975, 1977, 1978) aittir. Genelleştirilmiş dörtgenlerin kolinasyon gruplarının sınıflandırılmalarını bulma ve bu sınıflandırmaların üzerinde çalışmalar yapan araştırmacı Payne'dir. Ayrıca Tits(1974), Thas(1979) ve M.Walker(1977) tarafından bir çok çalışma da yapılmıştır.

3. TEMEL KAVRAMLAR

3.1 Aksiyom Sistemleri ve Uzay

Bu kısımda, tezin ana konusu olan genelleştirilmiş dörtgenlerin inşasında kullanılan, geometrinin en temel kavramları arasında yer alan *aksiyom* ve aksiyomlar yardımıyla oluşturulacak olan *uzay* kavramları üzerinde durulacak, bu kavramlara dair bilgiler verilecek ve örnekler üzerinden açıklamalar yapılacaktır.

Matematikte, doğru ya da yanlış olması önemli olmaksızın kesin bir hüküm bildiren ifadelere *önerme* denir. Önermeler ise aksiyomlar ve teoremler olarak iki temel gruba ayrılabilir. Doğruluğu kanıtlanamayan veya kanıtlanmasına gerek duyulmayan fakat doğru olduğu kabul edilen önermelere *aksiyom* denir. Doğruluğu ispatlanabilen önermelere ise *teorem* adı verilir. Açıkca belirtilmiş aksiyomların bir kümesinden oluşan ve bu aksiyomlar yardımıyla teoremlerin türetilebileceği bir yapıya ise *aksiyomatik sistem* denir. (Weisstein, 2018) P noktalar kümesi ve L doğrular kümesi olmak üzere belirli aksiyomları sağlayan $S = (P, L)$ sistemine *uzay* (nokta-doğru geometrisi) denir.

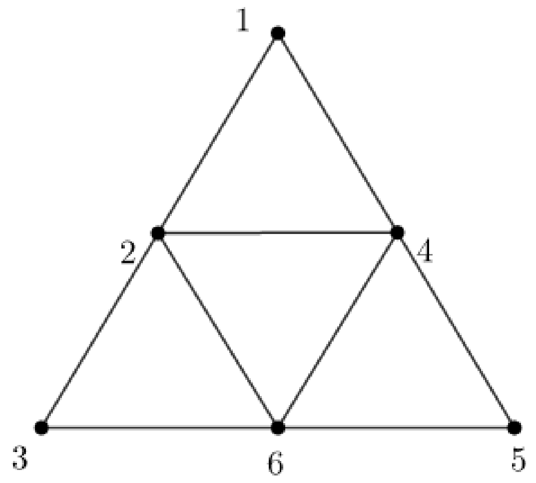
Bu çalışmada, (Batten, 1986) kaynağındaki gösterimlere sadık kalınarak uzayın noktalarını tanımlamak için $1, 2, 3$,... gibi sayılar ile p, q, r,... gibi harfler, uzayın doğrularını tanımlamak için ise l, m ve h harfleri kullanılacaktır. Eğer incelenen aksiyom sistemi çok sayıda nokta ve doğru ihtiva ediyorsa bu nokta ve doğruların gösteriminde indislemeden faydalanılacaktır. (p_1, p_2, l_1, l_2, ... gibi)

Bir aksiyom sisteminde yer alan aksiyomların tamamını sağlayan bir $S = (P, L)$ uzayı bulunabiliyorsa (yani bu aksiyomları sağlayan bir geometrik model oluşturulabiliyorsa) bu aksiyom sistemine *tutarlıdır* ya da *uyumludur* denir. Aksi halde *tutarsızdır* ya da *uyumsuzdur* denir. Ele alınacak bir aksiyom sistemindeki aksiyomlar incelenirken dikkat edilmesi gereken bir husus vardır. Bu husus kabaca bir örnekle açıklanacak olursa, aksiyom sisteminde bulunan bir aksiyomda örneğin: “üç nokta vardır” deniliyorsa üçten daha çok noktalı bir kümenin noktalarından herhangi üçünün varlığı kastedilmez. Bu cümleden anlaşılması gereken şey, bu uzayda tam olarak üç tane noktanın varlığıdır. Aksi durumlarda aksiyomlar belirlenirken cümle içerisinde “en az”, “en fazla” veya “dörtten az” gibi ifadelere yer verilmelidir. Aksiyomatik sistem tanımında da belirtildiği üzere aksiyomlarda ne denmek istendiği açıkca belirtilmelidir. Hem bu hususu hem de verilen bir sistemin tutarlılığını incelemek adına aşağıdaki örnek uygun olacaktır.

Örnek 3.1 Verilen bir aksiyom sistemi;

(a) Altı tane nokta vardır.
(b) Üç tane 3 noktalı doğru vardır.
(c) En az üç tane 2 noktalı doğru vardır.

olsun. Aksiyom sisteminin tutarlı olduğunu göstermek için aksiyomların hepsini sağlayan bir $S = (P, L)$ uzayı bulmak gereklidir. (a) aksiyomunda altı tane noktanın var olduğu belirtildiğinden oluşturulacak olan S uzayının noktalarının kümesi olan P, $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olarak seçilebilir. (b) ve (c) aksiyomlarından dolayı uzayın doğrularının kümesi olan L en az 6 elemanlıdır. O halde L kümesi $L = \{l_1 = \{1, 2, 3\}, l_2 = \{1, 4, 5\}, l_3 = \{3, 5, 6\}, l_4 = \{2, 4\}, l_5 = \{2, 6\}, l_6 = \{4, 6\}\}$ olarak belirlenir ise verilen aksiyom sisteminin tutarlı olduğu görülür. (Şekil 3.1)



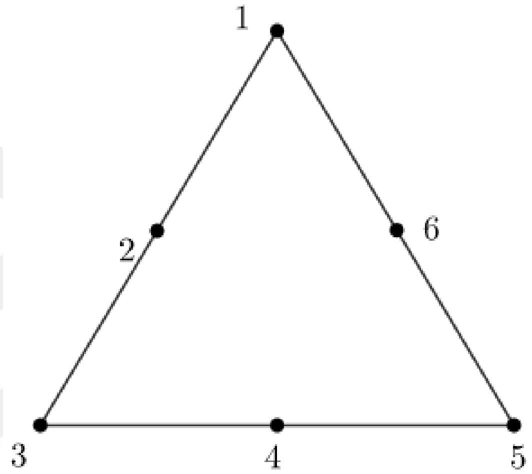
Şekil 3.1 Üç tane 3 noktalı, üç tane 2 noktalı doğru ve altı tane nokta içeren uzay

Bir aksiyom sistemindeki aksiyomlardan bazıları, sistemin içerisinde yer alan diğer aksiyomlardan elde edilebiliyorsa bu aksiyom sistemine *bağımlıdır* denir. Aksi halde *bağımsızdır* denir. Herhangi bir aksiyom sisteminin bağımsız olup olmadığını incelemenin bir yolu aksiyomlardan her birinin diğerlerinden bağımsız olduğunu göstermektir. Bu ise şu şekilde yapılabilir. Verilmiş olan aksiyomların her biri için, aksiyomların kendileri haricindeki diğer tüm aksiyomları sağlayan fakat kendisini sağlamayan bir uzay bulmaya çalışmaktır. Her bir aksiyom için bu şekilde uzaylar bulunabiliyorsa sistemin bağımsız olduğu gösterilmiş olur. Herhangi biri için dahi bu şekilde bir uzay bulunamıyorsa verilen sistem bağımlıdır.

Yukarıda Örnek 3.1’ de verilen aksiyom sisteminin bağımsız olup olmadığı incelenecek olursa;

1-) “(a) ve (b) aksiyomlarını sağlayan fakat (c) yi sağlamayan bir uzay ”

Bulunmaya çalışılacak olan uzay, (a) aksiyomundan dolayı altı tane nokta ve (b) aksiyomundan dolayı üç tane 3 noktalı doğru ihtiva etmelidir. Bu iki şartı sağlayan uzaylar arasından (c) yi sağlamayan yani 2 noktalı en az üç tane doğru içermeyen bir uzay bulunmaya çalışılmalıdır.

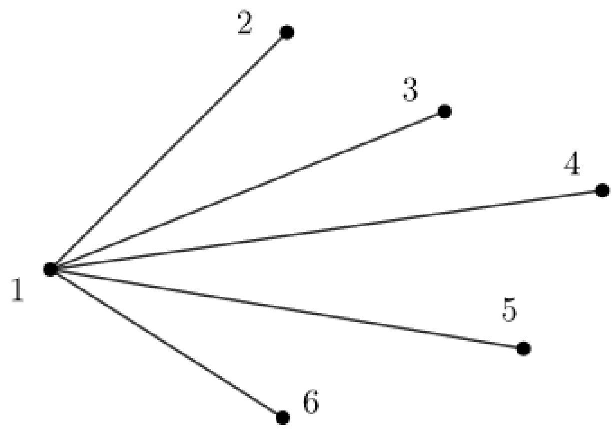


Şekil 3.2 Üç tane 3 noktalı doğru ve altı tane nokta içeren uzay

Şekil 3.2’de görüleceği üzere, (c) aksiyomu diğer aksiyomlardan bağımsızdır.

2-) “(a) ve (c) aksiyomlarını sağlayan fakat (b) yi sağlamayan bir uzay ”

Bulunmaya çalışılacak olan uzay, (a) aksiyomundan dolayı altı tane nokta ve (c) aksiyomundan dolayı en az üç tane 2 noktalı doğru ihtiva etmelidir. Bu iki şartı sağlayan uzaylar arasından (b) yi sağlamayan yani 3 noktalı üç tane doğru içermeyen bir uzay bulunmaya çalışılmalıdır.

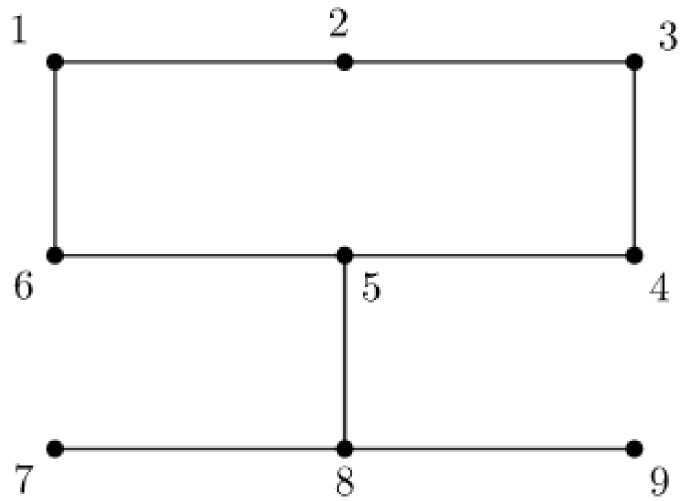


Şekil 3.3 Beş tane 2 noktalı doğru ve altı nokta içeren uzay

Şekil 3.3'de görüleceği üzere, altı tane nokta ve en az üç tane (bulunan uzayda beş tane 2 noktalı var) 2 noktalı doğru bulunduran fakat üç tane 3 noktalı doğru bulundurmayan bir uzay bulunabildiğinden (b) aksiyomu diğerlerinden bağımsızdır.

3-) "(b) ve (c) aksiyomlarını sağlayan fakat (a) yı sağlamayan bir uzay "

Bulunmaya çalışılacak olan uzay, (b) aksiyomundan dolayı üç tane 3 noktalı doğru ve (c) aksiyomundan dolayı en az üç tane 2 noktalı doğru ihtiva etmelidir. Bu iki şartı sağlayan uzaylar arasından (a) yı sağlamayan yani tam olarak altı tane nokta içermeyen bir uzay bulunmaya çalışılmalıdır.



Şekil 3.4 Üç tane 3 noktalı doğru, üç tane 2 noktalı doğru ve dokuz nokta içeren uzay

Şekil 3.4'de görüleceği üzere bulunan uzayda üç tane 3 noktalı doğru, üç tane 2 noktalı doğru ve dokuz tane nokta bulunmaktadır. (b) ve (c) aksiyomları sağlandığı halde (a) aksiyomu sağlanmamıştır. Yani (a) aksiyomu diğerlerinden bağımsızdır.

(a), (b) ve (c) akiyomlarının ayrı ayrı birbirlerinden bağımsız olduğu ispatlandığından, Örnek 3.1'de verilen aksiyom sistemi bağımsızdır.

Bir aksiyom sistemindeki herhangi bir aksiyomun bağımlı olduğunu göstermenin bir yolu, o aksiyomun dışında kalan aksiyomları sağlayan tüm örnek uzayları bulup, bulunan uzayların hepsinin hariç tutulan aksiyomu sağladığını göstermektir. Fakat bağımlılığın incelenmesinde kullanılan bu yöntem bazı aksiyom sistemlerinde, örneğin sonsuz doğru veya nokta ihtiva eden sistemlerde, kullanılabilir değildir. Bağımlılığı göstermenin bir diğer yolu, herhangi bir aksiyomun diğer aksiyomlar kullanılarak sağlandığının gösterilmesidir. Bu durumda o aksiyomun bağımlı olduğu, dolayısıyla aksiyom sisteminin bağımlı olduğu gösterilmiş olur.

Örnek 3.2 Verilen bir aksiyom sistemi;

(a) Altı nokta ve dört doğru vardır.
(b) Her doğru 2 noktalıdır.
(c) Her bir noktadan en fazla dört doğru geçer.

olsun. (a) aksiyomundan anlaşılacağı üzere uzayda dört tane doğru bulunduğundan, uzayın herhangi bir noktasının en fazla dört doğru üzerinde olabileceği aşikardır. Dolayısıyla (c) aksiyomu (a) aksiyomundan elde edilebildiğinden verilen aksiyom sisteminin bağımlı olduğu görülür.

Bu tezin ana konusu olan *genelleştirilmiş dörtgenler*'in, üzerine inşa edileceği ve bir sonraki bölümde incelecenek olan *yaklaşık lineer uzaylar* bölümüne geçmeden evvel, açıklamalarda uzun cümlelerin kısaltılması ve gösterimin kolaylaştırılması adına (Batten, 1986) kaynağındaki gösterimlere sadık kalınarak aşağıda bazı notasyonlar verilecektir.

P noktaların kümesi ve L doğruların kümesi olmak üzere, P ve L kümeleri sonlu ise, $S = (P, L)$ uzayına sonlu uzay denilir. $S = (P, L)$ uzayı sonlu ise:

∘ Bir $S = (P, L)$ uzayının noktalarının sayısı $|P| = v$ ile gösterilir.

∘ Bir $S = (P, L)$ uzayının doğrularının sayısı $|L| = b$ ile gösterilir.

○ Herhangi bir l doğrusu üzerinde bulunan noktaların sayısı $v(l)$ ile gösterilir. $v(l)$ değerine l doğrusunun derecesi denir.

○ Herhangi bir p noktasından geçen doğruların sayısı ise $b(p)$ ile gösterilir. $b(p)$ değerine p noktasının derecesi denir.

○ p noktası l doğrusunun üzerinde ise ya da başka bir deyişle l doğrusu p noktasından geçiyorsa $p \in l$, aksi halde $p \notin l$ şeklinde gösterilir.

○ Bir p noktasından geçen doğrulara *noktadaş* ya da *kesişen* doğrular denir.

○ Aynı doğru üzerinde bulunan noktalara *doğrudaş* veya *komşu(bitişik)* noktalar denir.

3.2 Yaklaşık Lineer Uzay

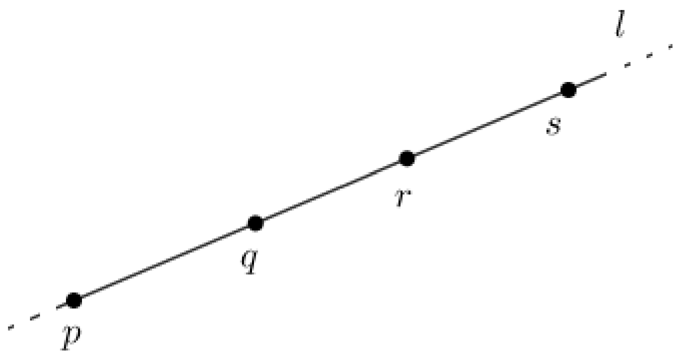
Tanım 3.1 *P noktaların kümesi ve L doğruların kümesi olacak şekilde tanımlanan herhangi bir $S = (P, L)$ uzayı için;*

(YLU-1) Her doğru üzerinde en az iki tane nokta vardır.
(YLU-2) Herhangi farklı iki noktadan en fazla bir doğru geçer.

aksiyomları sağlanıyorsa, $S = (P, L)$ uzayına bir yaklaşık lineer uzay denir.

Bir yaklaşık lineer uzaya ayrıca *kısmî düzlem* de denir. Kısmî Düzlem kavramı ilk olarak Hall, M. (1943) tarafından tanımlanmıştır.

Bir $S = (P, L)$ uzayında r ve s gibi iki farklı noktayı birleştiren bir doğru, üzerinde bulunan noktaların gösterimleri vasıtasıyla rs doğrusu adını alır. Bu doğruya l denir ise $l = rs$ olarak gösterilir. (YLU-1) aksiyomunda "her doğru üzerinde en az iki nokta vardır" denildiğinden, herhangi bir doğru ikiden daha fazla sayıda nokta ihtiva edebilir. l doğrusunun üzerinde r ve s noktaları haricinde p ve q gibi iki farklı noktanın var olduğu kabul edilsin (Şekil 3.5).



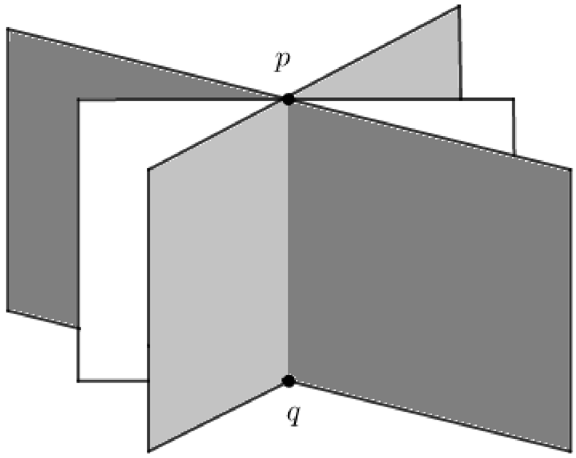
Şekil 3.5 Yaklaşık lineer uzayın herhangi bir doğrusu

(YLU-2) aksiyomu gereği farklı iki noktadan en fazla bir doğru geçeceğinden, r , s , p ve q noktalarından geçen doğru $rs = pq = l$ olur.

Bilindik uzay örneklerinden biri olan Öklid Uzayı'nın yaklaşık lineer uzay olup olmadığı sorusu akla gelebilir. Aşağıdaki örnekte Öklid Uzayı'nın yaklaşık lineer uzay olup olmadığı incelenecektir.

Örnek 3.3 $S = (P, L)$ uzayının noktalarının kümesi olan P, $\mathbb{R}^3$ ün noktaları ve doğrularının kümesi olan L ise $\mathbb{R}^3$ ün doğruları olarak tanımlansın. Bu takdirde $\mathbb{R}^3$ ün doğruları üzerinde sonsuz sayıda nokta bulunduğundan (YLU-1) aksiyomunun sağlandığı aşikardır. Ayrıca Öklid uzayında farklı iki noktadan bir tek doğru geçtiğinden (YLU-2) aksiyomunu da sağlanır. Hem (YLU-1) hem de (YLU-2) sağlandığından, tanımlanan $S = (P, L)$ uzayı bir yaklaşık lineer uzaydır.

Örnek 3.4 P noktalar kümesi az önce tanımlandığı gibi $\mathbb{R}^3$ ün noktaları, L doğrular kümesi ise $\mathbb{R}^3$ ün düzlemlerinin bir kümesi olacak şekilde ele alınsın. Bu durumda oluşturulan $S = (P, L)$ uzayı için (YLU-1) aksiyomu sağlanır. Çünkü L kümesinin her doğrusu (ki bu doğrular aslında birer düzlemdir) sonsuz sayıda nokta bulundurur. Fakat seçilen herhangi farklı iki noktadan sonsuz sayıda doğru(düzlem) geçeceğinden (Şekil 3.6), (YLU-2) şartı sağlanmaz. O halde $S = (P, L)$, bir yaklaşık lineer uzay değildir.



Şekil 3.6 Farklı iki noktadan geçen düzlemler

Şimdi incelenecek örnek uzay, aksiyomatik geometrinin bir konusu olan projektif geometrinin de en temel örneklerinden "Fano düzlemi"dir.

Örnek 3.5 (Fano Düzlemi) Verilen bir aksiyom sistemi;

(a) Yedi tane doğru ve yedi tane nokta vardır.
(b) Her bir doğru 3 noktalıdır.
(c) Her noktadan üç tane doğru geçer.

olsun. Yukarıda aksiyomları tanımlanan $S = (P, L)$ uzayının hem tutarlılığı hem de bir yaklaşık lineer uzay olup olmadığı incelenirse:

Öncelikle uzayı oluşturmak için noktalara ve doğrulara ihtiyaç duyulduğundan P ve L kümeleri oluşturulsun. P ve L kümelerinin eleman sayıları (a) aksiyomunda belirtildiği üzere sırasıyla $|P| = v = 7$ ve $|L| = b = 7$ dir. Yedi tane nokta ve doğru $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ve $L = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7\}$ şeklinde adlandırılsın. Ayrıca L kümesinin elemanları;

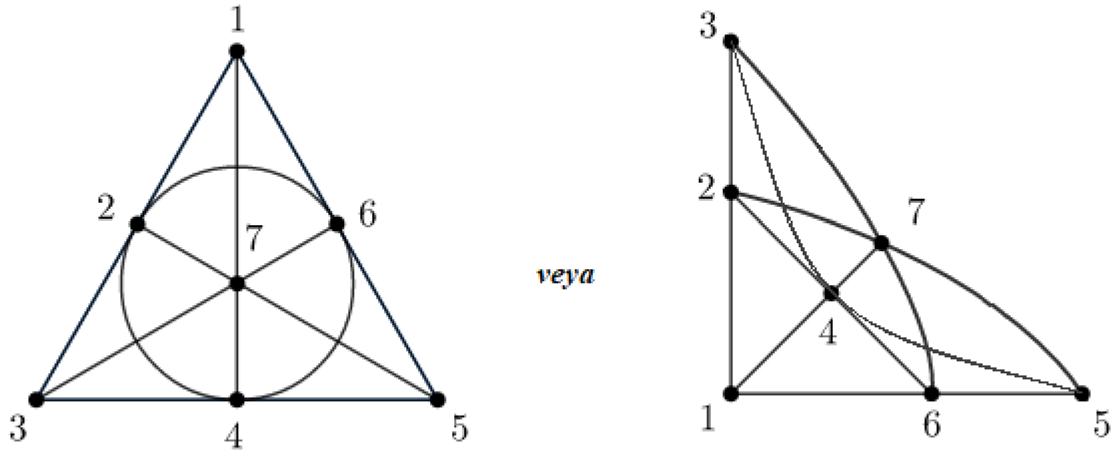
$$l_1 = \{1, 2, 3\}, l_2 = \{1, 6, 5\}, l_3 = \{1, 7, 4\}, l_4 = \{3, 7, 6\},$$
$$l_5 = \{3, 4, 5\}, l_6 = \{5, 7, 2\}, l_7 = \{2, 4, 6\}$$

olacak şekilde tanımlanırsa bu tanımlamalara göre;

$v(l_1) = v(l_2) = v(l_3) = v(l_4) = v(l_5) = v(l_6) = v(l_7) = 3$ olur ki bu, her doğrunun üzerinde üç nokta vardır demektir. Dolayısıyla (b) aksiyomu sağlanır. Üçüncü ve son olarak;

1 noktasından geçen doğrular: l_1, l_2, l_3
2 noktasından geçen doğrular: l_1, l_6, l_7
3 noktasından geçen doğrular: l_1, l_4, l_5
4 noktasından geçen doğrular: l_3, l_5, l_7
5 noktasından geçen doğrular: l_2, l_5, l_6
6 noktasından geçen doğrular: l_2, l_4, l_7
7 noktasından geçen doğrular: l_3, l_4, l_6

olur. Bu durumda $b(1) = b(2) = b(3) = b(4) = b(5) = b(6) = b(7) = 3$ olur ki bu, uzayın noktaları olan 1, 2 ,3, 4, 5, 6 ve 7 noktalarının her birinden 3 doğru geçiyor demektir. Dolayısıyla (c) aksiyomu da sağlanır. Böylece uzayın tutarlılığı gösterilmiş olur (Şekil 3.7).



Şekil 3.7 Fano düzlemi

Burada Şekil 3.7'de görüleceği üzere örnek uzaylar kağıda aktarılmak istendiğinde çizim tek türlü olmak zorunda değildir. Uzayın doğruları düzleme aktarılırken bilinen anlamdaki doğrular gibi düz çizilmek zorunda değildir. Ayrıca uzaylar kağıda aktarıldıktan sonra doğrular kesişiyor gibi gözükse dahi kesişen yerlerde noktaların varlığı belirtilmediği sürece herhangi bir şey ifade etmez. Önemli olan, noktaların belirtilen yerleri ve teoride ifade edilenlerdir. Fano düzleminin yaklaşık lineer uzay olup olmadığı merak edilebilir. Bunu incelemek için (YLU-1) ve (YLU-2) aksiyomlarının sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilmelidir. Bu uzayın her doğrusu 3 noktalı olduğundan (YLU-1) aksiyomunun sağlandığı aşikardır. (YLU-2) için uzayın tüm farklı nokta ikilileri incelenecek olursa;

1 ve 2 noktalarından geçen doğru l_1,
1 ve 3 noktalarından geçen doğru l_1,
1 ve 4 noktalarından geçen doğru l_3,
1 ve 5 noktalarından geçen doğru l_2,
1 ve 6 noktalarından geçen doğru l_2,
1 ve 7 noktalarından geçen doğru l_3,
2 ve 3 noktalarından geçen doğru l_1,
2 ve 4 noktalarından geçen doğru l_7,
2 ve 5 noktalarından geçen doğru l_6,
2 ve 6 noktalarından geçen doğru l_7,
2 ve 7 noktalarından geçen doğru l_6,
3 ve 4 noktalarından geçen doğru l_5,
3 ve 5 noktalarından geçen doğru l_5,
3 ve 6 noktalarından geçen doğru l_4,
3 ve 7 noktalarından geçen doğru l_4,
4 ve 5 noktalarından geçen doğru l_5,
4 ve 6 noktalarından geçen doğru l_7,
4 ve 7 noktalarından geçen doğru l_3,
5 ve 6 noktalarından geçen doğru l_2,
5 ve 7 noktalarından geçen doğru l_6,
6 ve 7 noktalarından geçen doğru l_4

elde edilir. Yani herhangi farklı iki noktadan yalnızca bir doğru geçer. Dolayısıyla (YLU-2) aksiyomu da sağlanır. Dolayısıyla "fano düzlemi" bir yaklaşık lineer uzaydır.

Yardımcı Teorem 3.1 *Bir S=(P,L) yaklaşık lineer uzayındaki herhangi iki doğru en fazla bir noktada kesişir.*

İspat *$S = (P, L)$ uzayının herhangi iki doğrusu l_1 ve l_2 olsun. Yardımcı teoremde ifade edilenin aksine bu doğruların birden fazla noktada kesiştikleri farzedilsin yani $|l_1 \cap l_2| \geq 2$ olsun. Bu ise (YLU-2) aksiyomu ile çelişir. Dolayısıyla bir yaklaşık lineer uzaydaki herhangi iki doğru en fazla bir noktada kesişir.*

3.3 Kısıtlama

Tanım 3.2 *$S = (P, L)$ bir yaklaşık lineer uzay olsun. P', P nin keyfi bir alt kümesi ve P' kümesinde en az iki nokta bulunduran herhangi bir $l \in L$ doğrusu için $l \cap P'$ kesişimlerinin kümesi de L' kümesi olsun. Oluşturulan bu $R = (P', L')$ kümesine S nin bir kısıtlaması denir. R ye S nin P' ne kısıtlaması da denilir.*

3.4 Dual Uzay

Tanım 3.3 *$S = (P, L)$ bir yaklaşık lineer uzay olmak üzere;*

$$P' = L$$

ve

$$L' = \{\{l_1, l_2, ..., l_n\} \, | l_i \in L = P', n \geq 2, ve \, \{l_1, l_2, ..., l_n\} \, noktadas\}$$

olacak şekilde P' ve L' kümeleri tanımlansın. Bu takdirde $S' = (P', L')$ uzayına $S = (P, L)$ uzayının duali(dual uzayı) denir.

Yardımcı Teorem 3.2 *Herhangi bir S=(P,L) yaklaşık lineer uzayının duali yine bir yaklaşık lineer uzaydır.*

İspat *Dual uzayın tanımı gereği, dual uzayda herhangi bir doğru en az iki noktalıdır yani (YLU-1) şartının sağlandığı aşikardır. (YLU-2) nin sağlanıp sağlanmadığını kontrol etmek için dual uzayda herhangi iki noktadan kaç doğru geçtiğinin bulunması gerekmektedir. Dual uzayın herhangi iki noktası, S=(P,L) uzayının doğrularından herhangi ikisine karşılık gelen l_1 ve l_2 olsun. Dual uzayda bu l_1 ve l_2 noktalarını bileştiren her bir doğru, S uzayında l_1 ve l_2 doğrularının kesiştikleri noktalara karşılık gelir. Yardımcı teorem 3.1 gereği bu doğrular en fazla bir noktada kesişir. Dolayısıyla uzayın (varsa) bu noktası dual uzayda l_1 ve l_2 noktalarından geçen doğruya karşılık gelir ki bu, l_1 ve l_2 noktalarından en fazla bir doğrunun geçebileceğini gösterir. Dolayısıyla (YLU-2) sağlanır.*

Herhangi bir $S = (P, L)$ yaklaşık lineer uzayı ile bu uzayın duali olan $S' = (P', L')$ yaklaşık lineer uzayının birbirlerine eşit olabilmesi için, öncelikle uzayın noktalarının ve doğrularının sayıları sırasıyla dual uzayın noktalarının ve doğrularının sayıları ile eşit olması gerektiği aşikardır. Dolayısıyla dual uzay tanımı gereği S nin doğruları S' nün noktaları olduğundan $|L| = |P'|$ dir. İfade edilen ilk cümle tekrar ele alınırsa $|L| = |P'| = |P| = |L'|$ olmalıdır. Dahası uzaylarda hem üzerlerinden belli sayıda doğru geçen noktaların sayıları hem de üzerlerinde belli sayıda nokta bulunduran doğruların sayılarının da eşit olması gerekmektedir. Ayrıca dual uzayın doğruları en az iki noktalı olmak zorunda olduğundan, uzaydaki her bir noktanın üzerinden en az iki doğru geçmelidir. Yani asıl uzayda, üzerinden doğru geçmeyen ve yalnızca bir doğru geçen noktalar bulunmamalıdır. Ancak bu şartlar altında bir $S = (P, L)$ yaklaşık lineer uzayının duali kendisine eşit olabilir. Duali kendisine eşit olan bir yaklaşık lineer uzay örneği, Örnek 3.5'te verilen Fano düzlemidir.

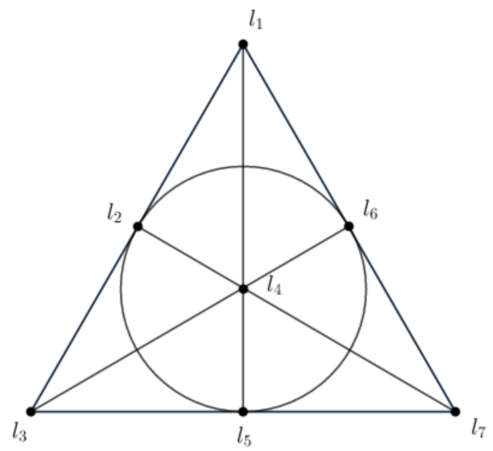
Örnek 3.6 (Fano düzleminin duali) Verilen bir aksiyom sistemi;

(a) Yedi tane doğru ve yedi tane nokta vardır.
(b) Her bir doğru 3 noktalıdır.
(c) Her noktadan üç tane doğru geçer.

olsun. Yukarıda aksiyomları tanımlanan $S = (P, L)$ uzayının hem tutarlı hem de bir yaklaşık lineer uzay olduğu Örnek 3.5'te gösterilmiştir. Bu uzayın noktalarının ve doğrularının kümesi kolaylık adına yine Örnek 3.5'te belirtilen şekilde tanımlansın. $S = (P, L)$ uzayının duali $S' = (P', L')$ olmak üzere, dual uzay tanımı gereği dual uzayın noktalarının kümesi $P' = L = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7\}$ olur. L' kümesi ise S uzayında;

1 noktasından geçen doğruların kümesi olan $\{l_1, l_2, l_3\}$ doğrusu,
2 noktasından geçen doğruların kümesi olan $\{l_1, l_6, l_7\}$ doğrusu,
3 noktasından geçen doğruların kümesi olan $\{l_1, l_4, l_5\}$ doğrusu,
4 noktasından geçen doğruların kümesi olan $\{l_3, l_5, l_7\}$ doğrusu,
5 noktasından geçen doğruların kümesi olan $\{l_2, l_5, l_6\}$ doğrusu,
6 noktasından geçen doğruların kümesi olan $\{l_2, l_4, l_7\}$ doğrusu,
7 noktasından geçen doğruların kümesi olan $\{l_3, l_4, l_6\}$ doğrusu

olmak üzere yedi tane doğrudan oluşur. (Şekil 3.8)



Şekil 3.8 Fano düzleminin dual uzayı

Şekil 3.8'den anlaşılacağı üzere Fano düzleminin duali, kendisine eşittir. Bu durumda iki uzay birbirine izomorfizm farkıyla eşittir denilir. Duali kendisine eşit olan uzaylara dair başka örnekler, ileride izomorfizm konusuna yer verilikten sonra ele alınacaktır.

3.5 Alt Uzay

Tanım 3.4 *$S = (P, L)$ herhangi bir yaklaşık lineer uzay olmak üzere $X \subseteq P$ olsun. X kümesinde seçilen herhangi farklı iki nokta p ve q olsun. Eğer p ile q noktalarını birleştiren bir $pq = l$ doğrusu varsa ve l doğrusu üzerindeki tüm noktalar, yine $X \subseteq P$ kümesinin bir elemanı oluyorsa, X alt kümesine $S = (P, L)$ yaklaşık lineer uzayının bir alt uzayı denir.*

Eğer seçilen bu $X \subseteq P$ kümesi;

○ Boş küme

○ Bir nokta

○ Herhangi ikisi doğrudaş olmayan noktalar kümesi

○ Bir doğru

○ P noktalar kümesinin kendisi

ise X kümesinin $S = (P, L)$ uzayının daima bir alt uzayı olduğu aşikardır.

3.6 Bağlantı Sayısı

Tanım 3.5 *$S = (P, L)$ herhangi bir yaklaşık lineer uzay ve P noktalar kümesi sonlu bir küme olsun. Herhangi bir $p_i \in P$ noktası ve $l_j \in L$ doğrusu için, p_i noktasından geçip l_j doğrusunu kesen doğruların sayısına, p_i noktasının l_j doğrusuna göre bağlantı sayısı denir, $c(p_i, l_j) = c_{ij}$ şeklinde gösterilir.*

Farklı bir açıdan bakılacak olursa, herhangi bir yaklaşık lineer uzayda farklı iki noktadan en fazla bir doğru geçtiğinden, bu c_{ij} sayısı sadece p_i noktasından geçip l_j doğrusunu kesen doğruların sayısı vermez, aynı zamanda l_j doğrusu üzerindeki noktalardan kaç tanesinin p_i noktası ile doğrudaş olduğunun sayısını da verir. Eğer p_i noktası l_j doğrusu üzerinde ise yani $p_i \in l_j$ ise $c(p_i, l_j) = c_{ij} = 1$ dir.

Bağlantısı sayısı, genelleştirilmiş dörtgenlerin inşasında, konuya dair teoremlerin ve sonuçların ispatlarında en çok kullanılan özelliklerden biri olacaktır.

3.7 Lineer Fonksiyonlar

Tanım 3.6 *$S = (P, L)$ ve $S' = (P', L')$ herhangi iki yaklaşık lineer uzay ve $f : P \to P'$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu S uzayının her bir doğrusunu S' uzayının herhangi bir doğrusuna resmediyorsa yani $\forall\ l \in L$ doğrusu için $f(l) \in L'$ oluyorsa, f fonksiyonuna S den S' ne bir lineer fonksiyon denir.*

Dikkat edilirse, f fonksiyonu S nin tüm doğrularını S' nün doğrularına resmediyorsa, S nin herhangi bir l doğrusunun üzerindeki noktaları da S' de bulunan l nin görüntüsünün bir noktasına resmeder. Yani $\forall\ l \in L$ için $f(l) \in L'$ ise $\forall\ p \in l$ için $f(p) \in f(l)$ dir.

$f : S \to S'$ bir lineer fonksiyon ve $l \in L$ sonlu olsun. Eğer f fonksiyonu 1:1 ise $v(l) = v(f(l))$ dir. f fonksiyonu 1:1 değilse $v(l) > v(f(l))$ dir. Böylece her türlü durumda $v(l) \geq v(f(l))$ dir.

Tanım 3.7 *f bir lineer fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu, $1-1$, örten ve f^{-1} de bir lineer fonksiyon ise f ye $S=(P,L)$ uzayından $S'=(P',L')$ uzayına bir izomorfizm denir.*

Yardımcı Teorem 3.3 *f fonksiyonu $S = (P,L)$ uzayından $S' = (P',L')$ uzayına bir izomorfizm ise her $l \in L$ doğrusu ve $p \in P$ noktası için;*

$$v(l) = v(f(l))$$
$$b(p) = b(f(p))$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat *Öncelikle f bir izomorfizm olduğundan lineerdir. Dolayısıyla $\forall\, p \in P$ için $p \in l$ ise $f(p) \in f(l)$ dir. Ayrıca f fonksiyonu 1:1 olduğu için;*

$$v(l) = v(f(l))$$

olduğu görülür.

f fonksiyonu lineer olduğundan dolayı $p \in l$ ise $f(p) \in f(l)$ dir ve f, 1:1 olduğundan p noktasından geçen birbirlerinden farklı doğruların görüntüleride farklıdır. O halde denebilir ki p noktasından kaç tane doğru geçiyorsa f(p) noktasından da en az o kadar doğru geçer yani;

$$b(p) \leq b(f(p)) \tag{3.1}$$

elde dilir. f fonksiyonu bir izomorfizm olduğundan f^{-1} de lineerdir. Dolayısıyla $f(p) \in f(l)$ ise $f^{-1}(f(p)) \in f^{-1}(f(l))$ dir. Böylece $p \in l$ elde edilir. Yani $S' = (P',L')$ uzayında f(p) noktasından geçen her $f(l) \in L'$ için bir $l \in L$ doğrusu vardır. Buradan;

$$b(f(p)) \leq b(p) \tag{3.2}$$

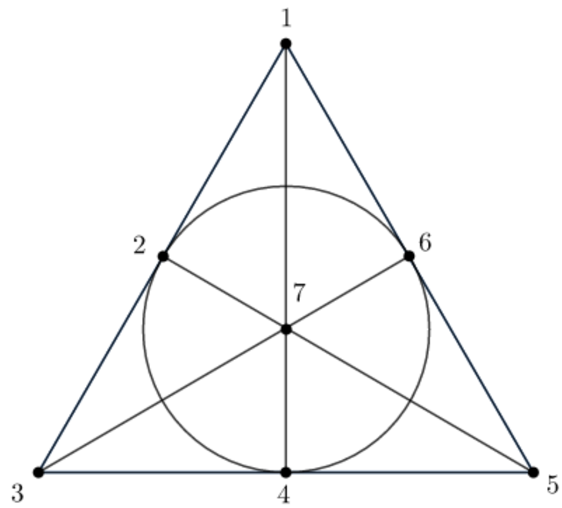
yazılabilir ki (3.1) ve (3.2) eşitsizliklerinden;

$$b(p) = b(f(p))$$

elde edilir.

Tanım 3.8 *$f: S \to S$ bir izomorfizm ise f ye bir otomorfizm ya da kolinasyon denir.*

Örnek 3.7 (Fano düzleminin kolinasyonları) $S = (P, L)$ uzayı, Örnek 3.5'te aksiyomları verilmiş olan Fano düzlemi olsun. Uzayın nokta ve doğru kümeleri kolaylık adına aynı şekilde tanımlansın. (Şekil 3.9)



Şekil 3.9 Fano düzlemi

Bu uzayın kolinasyonlarının sayısını hesap edelim. S uzayının noktalarını, yine S uzayının noktalarına resmedecek olan bir $f : S \to S$ otomorfizm olsun. S uzayının tüm noktalarından aynı sayıda doğru geçtiğinden S nin herhangi bir noktasının, bu nokta 1 olsun, resmedilebileceği yedi farklı nokta vardır. f bir otomorfizm olduğundan doğruları doğrulara resmeder. Dolayısıyla da S nin 1 noktasını bulunduran doğruların resmi, 1 noktasının görüntüsünün üzerinden geçen doğrular olmalıdır. O halde $\{1, 2, 3\}$ doğrusu için düşünülürse, bu doğrunun üzerindeki ikinci bir noktanın resmi için, bu nokta 2 olsun, f birebir olduğundan altı farklı seçenek vardır. Doğrunun üzerindeki son nokta olan 3 için ise bir tek ihtimal kalır. Dolayısıyla $\{1, 2, 3\}$ doğrusu $7.6.1 = 42$ farklı şekilde resmedilebilir. 1 den geçen $\{1, 2, 3\}$ doğrusundan farklı bir doğrunun üzerindeki, bu doğru $\{1, 4, 7\}$ olsun, 1 den farklı bir nokta için, f birebir olduğundan benzer şekilde dört farklı seçenek, doğru üzerindeki üçüncü ve son nokta için ise bir tek seçenek kalır. Bu iki doğru $42.4.1 = 168$ farklı biçimde resmedilebilir. Son olarak, S de 3 ve 4 noktalarından geçen doğrunun resmi, 3 ve 4 noktalarının görüntülerinden geçen doğru olmalıdır. Dolayısıyla $\{3, 4, 5\}$ doğrusunun kalan son elemanının yani 5 noktasının resmi için yalnızca bir tek seçenek vardır. Benzer şekilde 6 noktası içinde bir tek seçenek vardır. Böylece Fano düzleminin 168 tane kolinasyonunun olduğu gösterilmiş olur.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ DÖRTGENLER

Bu bölüm, kaynakçada verilen çalışmalar ve Batten (1986) kaynağının esas alınması ile hazırlanmıştır.

4.1 Genelleştirilmiş Dörtgenler

Tanım 4.1 *$S = (P, L)$ uzayı bir yaklaşık lineer uzay olsun. Eğer $S = (P, L)$ uzayı için;*

(GD-1) Herhangi bir doğru için, bu doğrunun dışındaki bir noktadan geçen ve bu doğruyu kesen bir tek doğru vardır.

(GD-2) Kesişmeyen doğrular ve aynı doğru üzerinde bulunmayan noktalar vardır.

(GD-3) P noktalar kümesi sonludur.

aksiyomları sağlanıyorsa, $S = (P, L)$ uzayına genelleştirilmiş dörtgen adı verilir.

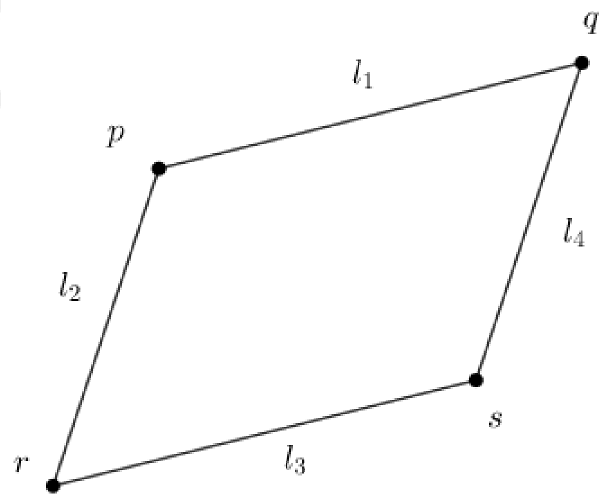
Birinci aksiyom olan (GD-1), matematiksel olarak ifade edilecek olursa $p \notin l$ ise $c(p, l) = 1$ dir. Başka bir deyişle herhangi bir doğrunun üzerinde, bu doğrunun dışındaki bir noktayla doğrudaş olan yalnızca bir nokta vardır.

Yardımcı Teorem 4.1 *Genelleştirilmiş dörtgenler üçgen içermez.*

İspat *S, bir genelleştirilmiş dörtgen ve p,q,r noktaları bir üçgen oluştursun. p noktasından geçen ve qr doğrusunu kesen pr ve pq doğruları vardır. Yani qr doğrusunu, dışındaki bir noktadan(p den) geçip kesen iki tane doğru vardır. $c(p, qr) = 2$ olması (GD-1) ile çelişir. O halde S uzayı üçgen içermez.*

Örnek 4.1 (En küçük genelleştirilmiş dörtgen) : En küçük, yani mümkün olan en az sayıda nokta ve doğru kullanılmak suretiyle (GD-1), (GD-2) ve (GD-3) aksiyomlarını sağlayan bir $S = (P, L)$ yaklaşık lineer uzayı aşağıdaki gibi inşa edilebilir.

$S = (P, L)$ uzayının bir genelleştirilmiş dörtgen olması istendiğinden, öncelikle bu uzayda (GD-2) den dolayı noktadaş olmayan doğrular ve doğrudaş olmayan noktalar vardır, yani S uzayı boş küme olamaz. (YLU-1) den dolayı her doğru en az iki noktalıdır. S uzayının herhangi bir doğrusu l_1 ve bu doğrunun üzerindeki herhangi iki nokta p ve q olsun. (GD-2) aksiyomu doğrudaş olmayan noktaların varlığından bahseder. O halde bu doğrunun dışında bir r noktası vardır. (GD-1) aksiyomundan dolayı bu r noktasından geçen ve l_1 doğrusu kesen bir doğru vardır ve tektir. Bu doğru l_2 ve $l_1 \cap l_2 = p$ olsun. (GD-2) gereği kesişmeyen doğrular vardır. l_1 doğrusunu kesmeyen bir doğru l_3 olsun. Eğer l_3 doğrusu r noktasından geçmezse, l_3 doğrusu ile r noktasını birleştiren bir doğru daha gerekir ki en az sayıda doğru oluşturulması istendiğinden işe yaramaz. Dolayısıyla l_3 doğrusu r noktasından geçsin. Tekrar (YLU-1) gereği l_3 doğrusu da en az iki noktalıdır. Bu doğrunun üzerinde r den başka bir nokta s olsun. (GD-1) gereği $s \notin l_1$ olduğundan bu s noktasından geçen l_1 doğrusunu kesen bir tek doğru vardır. Bu doğru l_4 olsun. Eğer l_4 doğrusu, s noktasını l_1 doğrusunun p noktası ile birleştirir ise, l_3 doğrusunun üzerinde bulunan r ve s noktaları, l_1 doğrusunun üzerindeki p noktasıyla birleşmiş olur ki üçgen oluşur, bu da bir çelişkidir. O halde l_4 doğrusu, s noktasını l_1 doğrusu ile p den başka bir nokta ile yani q noktası ile birleştirsin. Böylelikle başka bir doğru ya da noktaya ihtiyaç kalmadan en küçük genelleştirilmiş dörtgen oluşturulmuş olur. (Şekil 4.1)



Şekil 4.1 En küçük genelleştirilmiş dörtgen

O halde aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.1 *$S = (P, L)$ uzayı bir genelleştirilmiş dörtgen olsun. Bu takdirde S uzayının her bir noktasından en az iki tane doğru geçer.*

Bir uzayın dual uzayı oluşturulurken, uzayın doğruları dual uzayın noktaları olarak seçilip, uzayda üzerlerinden en az iki doğru geçen noktalar da dual uzayın doğruları olarak alınıyordu. O halde Sonuç 4.1'den dualiteyle alakalı aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2 *$S = (P, L)$ uzayı bir genelleştirilmiş dörtgen ve $S' = (P', L')$, S nin dual uzayı olsun. Bu takdirde $S = (P, L)$ uzayının her bir doğrusu $S' = (P', L')$ uzayının birer noktasına, $S = (P, L)$ uzayının her bir noktası ise $S' = (P', L')$ uzayının birer doğrusuna karşılık gelir.*

Genelleştirilmiş dörtgenlerin tanımına dikkat edilecek olursa 3 tane aksiyom ile tanımlanmış gibi gözükse de sistem bir yaklaşık lineer uzay üzerine kurulduğundan sağlanması gereken 5 tane aksiyom vardır. Bunlar (YLU-1), (YLU-2), (GD-1), (GD-2) ve (GD-3) dir.

Yardımcı Teorem 4.2 *$S = (P, L)$ uzayı bir genelleştirilmiş dörtgen ve S uzayının duali $S' = (P', L')$ olsun. Bu durumda $S' = (P', L')$ uzayı da bir genelleştirilmiş dörtgendir.*

İspat *(YLU-1) ve (YLU-2) şartlarını sağlayan bir uzayın yani bir yaklaşık lineer uzayın dualinin de yine bir yaklaşık lineer uzay olduğu yardımcı teorem 3.2 den dolayı bilinmektedir. O halde bir genelleştirilmiş dörtgen aynı zamanda bir yaklaşık lineer uzay olduğundan, bu uzayın duali de bir yaklaşık lineer uzaydır yani (YLU-1) ve (YLU-2) şartlarını sağlar.*

$S = (P, L)$ uzayının duali olan $S' = (P', L')$ uzayının da (GD-1), (GD-2) ve (GD-3) aksiyomlarını sağladığı gösterildiğinde ispat bitmiş olacaktır.

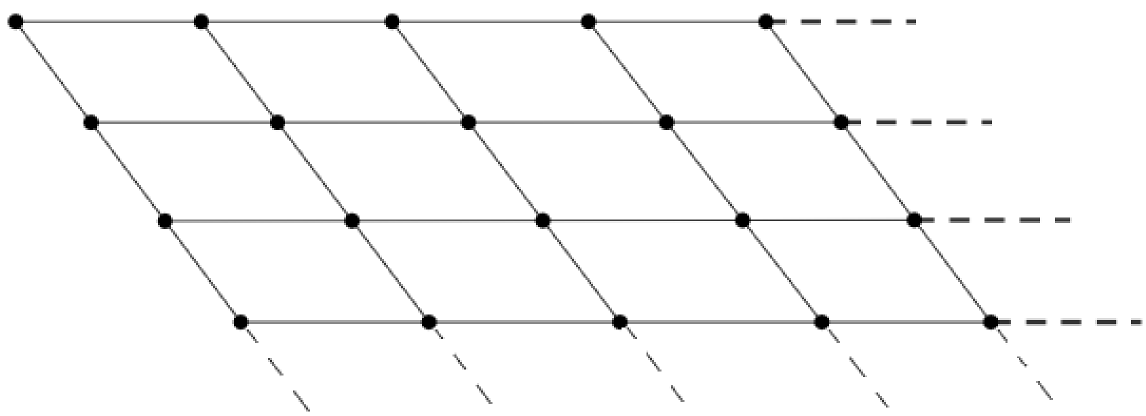
(GD-3) den dolayı $S = (P, L)$ uzayının noktalarının kümesi olan P sonludur. P sonlu bir küme olduğundan, doğruların kümesi olan L sonsuz olamaz. Şayet sonsuz sayıda doğru olsaydı, sonsuz sayıda noktanın var olması gerekirdi çünkü sonsuz sayıda doğrunun üzerinde sonlu sayıda nokta olamaz. Yani uzayın doğrularının kümesi olan L, sonludur. $S = (P, L)$ uzayının doğrularının kümesi, $S' = (P', L')$ dual uzayının noktaları olarak alındığından P' de sonludur. O halde bir genelleştirilmiş dörtgenin duali de (GD-3) şartını sağlar.

(GD-2) den dolayı uzayda kesişmeyen doğrular ile aynı doğru üzerinde olmayan noktalar vardır ve bunlarda dual uzayda sırasıyla birleşmeyen yani aynı doğru üzerinde bulunmayan noktalar ile kesişmeyen doğrulara karşılık gelir. Dolayısıyla bir genelleştirilmiş dörtgenin duali de (GD-2) şartını sağlar.

Dual uzay tanımı gereği $S' = (P', L')$ dual uzayının herhangi bir noktası, S uzayının bir doğrusudur. S uzayının bu doğrusu l_1 olsun. (GD-2) şartından dolayı S uzayında l_1 doğrusunda bulunmayan bir nokta vardır. Bu nokta r olsun. Bir genelleştirilmiş dörtgenin her bir noktasından en az iki doğru geçtiğinden, uzayın bu noktası dual uzayın bir doğrusuna karşılık gelir. Dual uzayda bu doğru r' olarak adlandırılsın. Dual uzayda, bu r' doğrusu l_1 noktasından geçmez. (GD-1) den dolayı S uzayında r noktasını l_1 doğrusu ile herhangi bir $p \in l_1$ noktasında birleştiren yalnızca bir tek doğru vardır. Bu doğru l_2 olsun. Uzayın bu doğrusu da S' dual uzayda bir noktaya karşılık gelir ve $l_2 \in r'$ dir. Ayrıca S uzayında l_1 ile l_2 doğrularının kesiştikleri nokta olan p noktası, S' uzayında bir p' doğrusuna karşılık gelir ki bu doğrunun üzerinde hem l_1 hem de l_2 noktaları mevcuttur. (GD-1) gereği S uzayında r noktasından geçip l_1 doğrusunu kesen l_2 den başka bir doğru yoktur. Başka bir deyişle l_1 doğrusu üzerinde, r ile birleşen p den başka bir nokta yoktur. Bu ise S' dual uzayında l_1 noktasından geçen ve r' doğrusunu kesen p' den başka bir doğrunun olmaması anlamına gelir. O halde bir genelleştirilmiş dörtgenin dualide (GD-1) şartını sağlar.

Tanım 4.2 *Her bir noktasından tam olarak iki tane doğru geçen genelleştirilmiş dörtgene "grid" denir.*

Eğer bir genelleştirilmiş dörtgenin her noktasından yalnızca iki tane doğru geçiyorsa yani bir grid ise, uzay Şekil 4.2'deki gibidir.



Şekil 4.2 Grid

Dikkat edilirse $S = (P, L)$ uzayının yapısı ızgara biçiminde yani grid ise;

○ Her bir noktadan tam olarak iki tane doğru geçer.

○ Doğruların kümesi olan L, L=L_1∪L_2 olacak biçimde öyle iki kümeye ayrılabilir ki her bir kümenin -kendi içlerinde- elemanları(doğruları) aynı sayıda noktaya sahiptir.

○ $L = L_1 \cup L_2$ şeklinde ayrılan L_1 ve L_2 doğru kümelerinin her birinin doğrusu, diğer kümenin bütün doğrularını keser.

○ $L = L_1 \cup L_2$ şeklinde ayrılan L_1 ve L_2 doğru kümelerinin her birinin doğruları, elemanı olduğu kümenin doğruları ile kesişmez.

Örnek 4.2 (Bir grid ve duali) 18 noktadan ve 9 doğrudan oluşan bir gridin noktalarının kümesi;

$$P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$$

ve doğrularının kümesi;

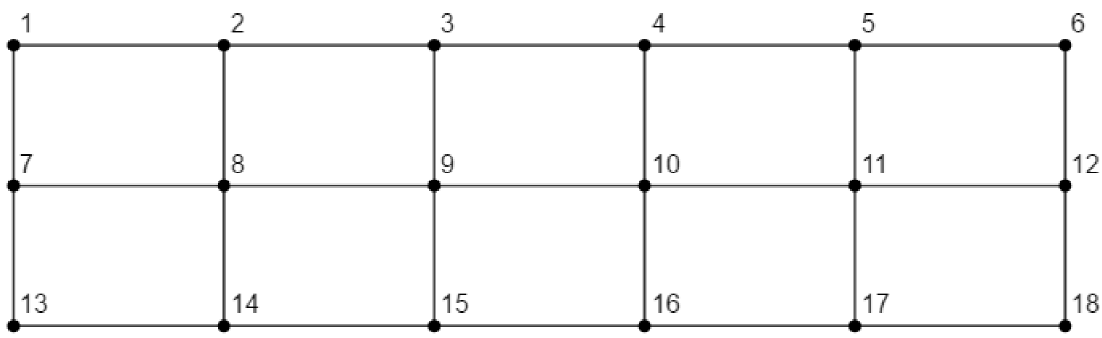
$$L = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7, l_8, l_9\}$$

olsun. $|P| = 18$ ve $|L| = 9$ dir. Uzayın doğruları ise;

$$l_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, l_2 = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}, l_3 = \{13, 14, 15, 16, 17, 18\}, l_4 = \{1, 7, 13\}$$

$$l_5 = \{2, 8, 14\}, l_6 = \{3, 9, 15\}, l_7 = \{4, 10, 16\}, l_8 = \{5, 11, 17\}, l_9 = \{6, 12, 18\}$$

olarak tanımlansın (Şekil 4.3).



Şekil 4.3 18 nokta ve 9 doğrudan oluşan bir grid

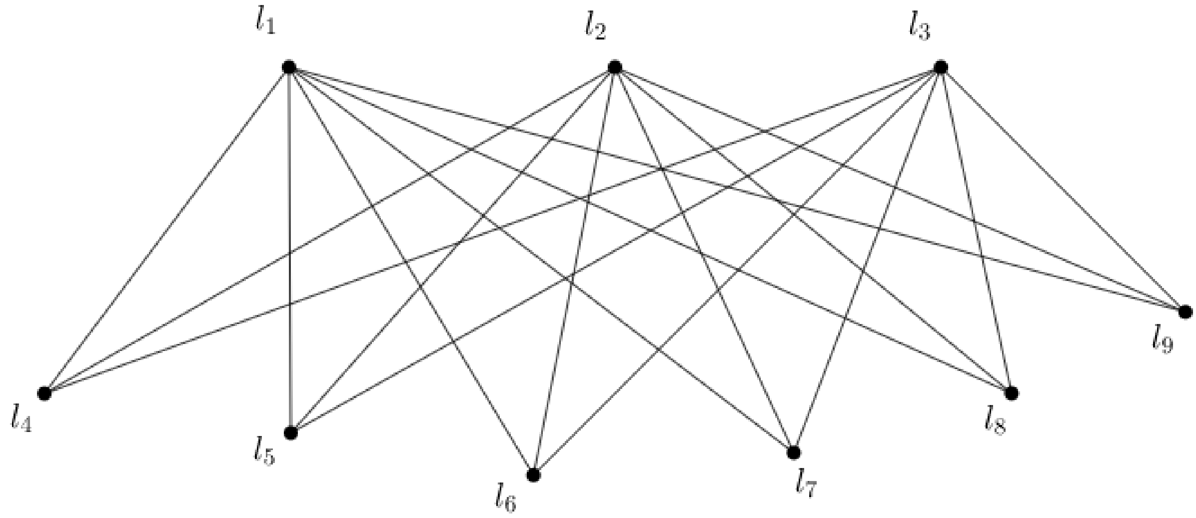
Bu $S = (P, L)$ uzayının duali $S' = (P', L')$ olsun. $S' = (P', L')$ uzayının noktalarının kümesi, dual uzay tanımı gereği, $P' = L$ olduğundan;

$$P' = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7, l_8, l_9\}$$

olur ve $|P'| = 9$ dur. S' uzayının doğruları, S uzayındaki noktaların üzerlerinden geçen doğruların en az iki elemanlı altkümelerinden oluşuyordu.Yani uzaydaki her bir noktadan zaten iki doğru geçtiği için uzayın her bir noktası, dual uzayda bir doğru belirtecektir ki bu doğruların kümesi olan L' ise;

Uzayda 1 noktasından geçen doğruların kümesi olan $\{l_1, l_4\}$ doğrusu,
Uzayda 2 noktasından geçen doğruların kümesi olan $\{l_1, l_5\}$ doğrusu,
Uzayda 3 noktasından geçen doğruların kümesi olan $\{l_1, l_6\}$ doğrusu,
Uzayda 4 noktasından geçen doğruların kümesi olan $\{l_1, l_7\}$ doğrusu,
Uzayda 5 noktasından geçen doğruların kümesi olan $\{l_1, l_8\}$ doğrusu,
Uzayda 6 noktasından geçen doğruların kümesi olan $\{l_1, l_9\}$ doğrusu,
Uzayda 7 noktasından geçen doğruların kümesi olan $\{l_2, l_4\}$ doğrusu,
Uzayda 8 noktasından geçen doğruların kümesi olan $\{l_2, l_5\}$ doğrusu,
Uzayda 9 noktasından geçen doğruların kümesi olan $\{l_2, l_6\}$ doğrusu,
Uzayda 10 noktasından geçen doğruların kümesi olan $\{l_2, l_7\}$ doğrusu,
Uzayda 11 noktasından geçen doğruların kümesi olan $\{l_2, l_8\}$ doğrusu,
Uzayda 12 noktasından geçen doğruların kümesi olan $\{l_2, l_9\}$ doğrusu,
Uzayda 13 noktasından geçen doğruların kümesi olan $\{l_3, l_4\}$ doğrusu,
Uzayda 14 noktasından geçen doğruların kümesi olan $\{l_3, l_5\}$ doğrusu,
Uzayda 15 noktasından geçen doğruların kümesi olan $\{l_3, l_6\}$ doğrusu,
Uzayda 16 noktasından geçen doğruların kümesi olan $\{l_3, l_7\}$ doğrusu,
Uzayda 17 noktasından geçen doğruların kümesi olan $\{l_3, l_8\}$ doğrusu,
Uzayda 18 noktasından geçen doğruların kümesi olan $\{l_3, l_9\}$ doğrusu

olmak üzere toplam 18 tane doğrudan oluşur yani $|L'| = 18$ dir (Şekil 4.4).



Şekil 4.4 18 nokta ve 9 doğrudan oluşan bir gridin duali

Elde edilen bu uzay 9 noktalı ve 18 doğrulu bir genelleştirilmiş dörtgendir. Dikkat edilirse bu uzayın her bir doğrusu 2 noktalıdır.

Tanım 4.3 *Her bir doğrusunun üzerinde tam olarak iki tane nokta bulunan genelleştirilmiş dörtgene "dual grid" denir.*

Eğer bir $S = (P, L)$ uzayı dual grid ise aşağıda verilen özelliklere sahiptir;

○ Her bir doğrusu 2 noktalıdır.

○ P noktalar kümesi, $P{=}P_1{\cup}P_2$ olacak biçimde öyle iki kümeye ayrılabilir ki her bir kümenin -kendi içlerindeki- elemanlarından(noktalarından) aynı sayıda doğru geçer.

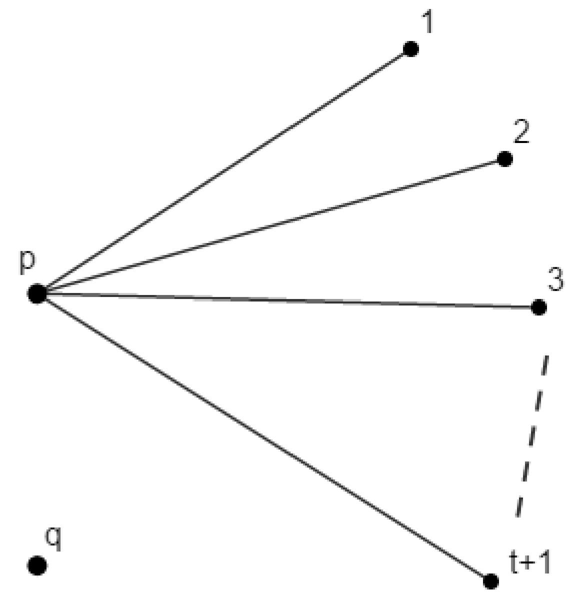
○ $P{=}P_1{\cup}P_2$ şeklinde ayrılan P_1 ve P_2 kümelerinin her birinin noktaları, diğer kümenin noktalarıyla doğrudaştır.

○ $P{=}P_1{\cup}P_2$ şeklinde ayrılan P_1 ve P_2 kümelerinin her birinin noktaları, elemanı olduğu kümenin noktalarıyla birleşmezler.

Aşağıda hemen hemen bütün teorem ve yardımcı teoremlerin ispatlarında kullanılacak olan iki önemli sonuç verilecektir.

Yardımcı Teorem 4.3 *Bir genelleştirilmiş dörtgende doğrudaş olmayan noktaların her birinden geçen doğru sayıları birbirine eşittir.*

İspat $S = (P, L)$ *bir genelleştirilmiş dörtgen ve* p, $S = (P, L)$ *uzayında herhangi bir nokta olsun.* $t \geq 1$ *olmak üzere p noktasından t+1 sayıda doğru geçsin. (GD-2) aksiyomu gereği p ile aynı doğru üzerinde bulunmayan bir q noktası vardır. (GD-1) aksiyomu gereği p noktasından geçen doğruların herbirinin üzerinde q noktası ile doğrudaş olan bir tek nokta vardır. O halde q noktasından da en az t+1 sayıda doğru geçer. (Şekil 4.5)*



Şekil 4.5 Yardımcı teorem 4.3 açıklaması

Eğer q noktasından t+1 den daha fazla sayıda doğru geçseydi, yine (GD-1) şartı gereği p noktasından en az t+2 doğru geçerdi ki bu durum p noktasından t+1 tane doğru geçmesi ile çelişirdi. O halde p noktasından t+1 tane doğru geçiyorsa q noktasından da t+1 tane doğru geçer.

Yardımcı Teorem 4.4 *Bir genelleştirilmiş dörtgende kesişmeyen doğruların üzerlerindeki nokta sayıları birbirine eşittir.*

İspat $S = (P, L)$*, bir genelleştirilmiş dörtgen ve l,* S *uzayında herhangi bir doğru olsun.* $s \geq 1$ *olmak üzere l doğrusunun üzerinde s+1 sayıda nokta bulunsun. (GD-2) gereği l doğrusunu kesmeyen en az bir tane doğru vardır. Bu doğru h olarak adlandırılsın. (GD-1) gereği l üzerindeki her bir nokta için, bu noktalardan geçen ve h doğrusunu kesen birer doğru olduğundan, l doğrusunun her bir noktasına karşılık h doğrusu üzerinde bir tek nokta vardır. O halde h doğrusunda en az s+1 tane nokta vardır. Eğer h doğrusu üzerinde s+1 tane noktadan daha fazla nokta bulunsaydı, bu noktaları l doğrusu ile birleştiren başka doğrular da var olurdu ki bu durumda l doğrusu üzerinde en az s+2 tane nokta bulunması gerekirdi. Bu ise l doğrusunun s+1 noktalı olması ile çelişir. O halde l doğrusunun üzerinde s+1 tane nokta varsa, bu doğruyu kesmeyen herhangi bir h doğrusu üzerinde de s+1 tane nokta mevcuttur.*

Şimdi ise ardı ardına verilecek olan iki yardımcı teoremin bulguları vasıtasıyla, genelleştirilmiş dörtgenlerin oluşturabilecekleri yapıların sınıflandırılmasına yarayan bir sonuç elde edilecek ve genelleştirilmiş dörtgenlerin 3 yapı altında sınıflandırılabileceği ispatlanacaktır.

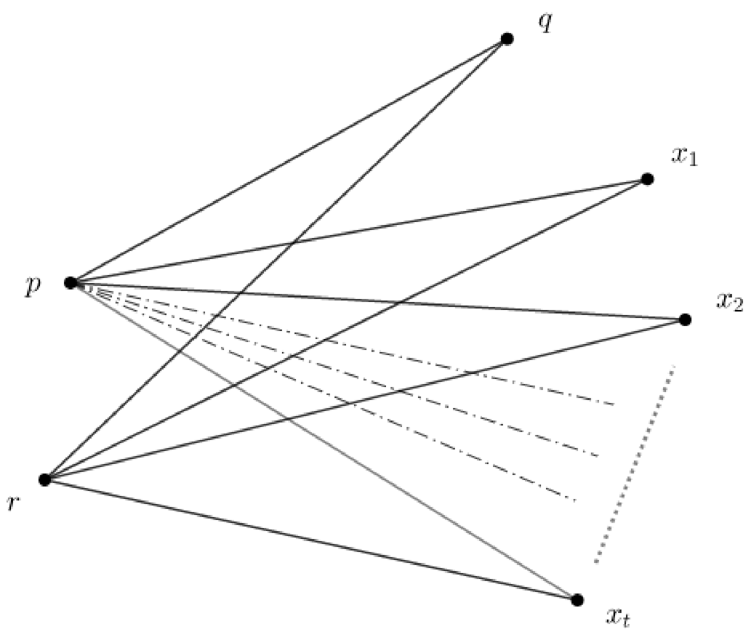
Yardımcı Teorem 4.5 $S = (P, L)$*, bir genelleştirilmiş dörtgen olsun. Bu takdirde;*

(i) Doğrudaş olmayan iki noktadan biriyle doğrudaş olan tüm noktalar diğeriyle de doğrudaş ise $S = (P, L)$ *uzayı bir dual griddir.*

(ii) Doğrudaş olmayan iki noktadan biriyle doğrudaş olup diğeriyle doğrudaş olmayan en az bir nokta varsa $S = (P, L)$ *uzayının,* $t \geq 1$ *olmak üzere, her noktasından t+1 tane doğru geçer.*

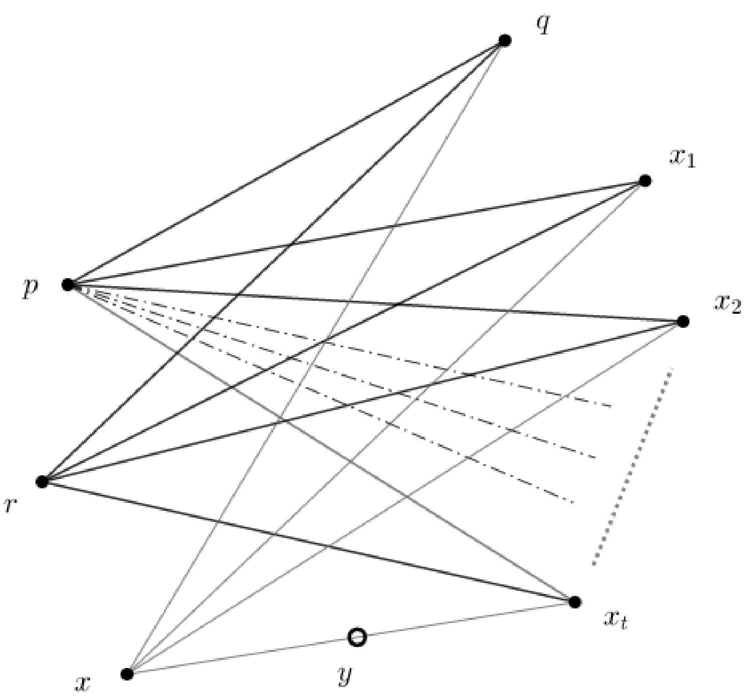
İspat $S = (P, L)$ *uzayının herhangi bir noktası* p *ve* p *noktasıyla doğrudaş olan bir nokta* q *olsun. (GD-2) aksiyomundan dolayı* p *noktası ile doğrudaş olmayan en az bir nokta vardır. Bu özellikteki bir nokta* r *olsun. Yardımcı teorem 4.3 gereği* p *noktasından t+1 tane doğru geçiyorsa,* r *noktasından da t+1 tane doğru geçer. Şimdi,* r *noktasının doğrudaş olduğu noktalar ile* p *noktasının birbirine göre muhtemel durumları gözönüne alınsın. Ya* r *ile doğrudaş tüm noktalar* p *ile de doğrudaştır ya da* r *ile doğrudaş olan noktaların bazıları* p *ile doğrudaş değildir.*

(i) r noktası ile doğrudaş olan bütün noktaların aynı zamanda p noktasıyla da doğrudaş olduğu varsayılsın. Bu durumda r noktasından geçen tüm doğrular 2 noktalıdır. r noktası ile doğrudaş olan noktalar -q noktası hariç- x_1,x_2,x_3 , . . . , x_t olarak adlandırılsın. (Şekil 4.6)



Şekil 4.6 Yardımcı teorem 4.5 açıklaması

Eğer r noktası ile doğrudaş olmayan p den başka herhangi bir x noktası var ise bu x noktası (GD-1) şartı gereği $\forall\ 1 \leq i \leq t$ için x_i noktası ve q noktası ile de doğrudaştır. Varsayılsın ki böyle bir x noktası, üzerinde 2 den daha fazla sayıda nokta bulunduran bir doğru üzerinde olsun. Bu takdirde, xx_i doğrusu üzerinde, x ve x_i noktalarının haricinde bir nokta daha vardır. $y \in xx_i - \{x, x_i\}$ olsun. (Şekil 4.7)



Şekil 4.7 Yardımcı teorem 4.5 açıklaması

(GD-1) aksiyomundan dolayı rx_i *doğruları ile* y *noktasını birleştiren doğrular vardır. r den geçen doğruların tümü 2 noktalı olduğundan* y *noktası ya* r *noktası ile ya da* x_i *noktaları ile doğrudaştır. Bu durum ise bir çelikşi meydana getirir çünkü her iki ihtimalde de bir "üçgen"oluşur. Dolayısıyla bu şekildeki bir* x *noktası, 2 den daha fazla nokta ihtiva eden bir doğru üzerinde olamaz. O halde tüm doğrular iki noktalıdır. Bu ise uzayın bir "dual grid"olduğunu gösterir.*

(ii) Şimdi ise r *noktası ile doğrudaş olan noktalardan bazılarının* p *ile doğrudaş olmadığı varsayılsın ve bu noktalardan biri* x *olsun.* p *noktasından t+1 tane doğru geçtiğinden yardımcı teorem 4.3 den dolayı* $b(p) = b(x) = t + 1$ *dir.* pq *doğrusu ile* x *noktasının konumları düşünüldüğünde* x *noktasının* q *noktası ile doğrudaş olmadığı görülür. Şayet* x *ile* q *doğrudaş olsaydı,* r *ile* q *noktaları zaten doğrudaş olduğundan* x *,* r *ve* q *noktaları bir üçgen oluştururdu. O halde* x *ile* q *noktası doğrudaş olmadığından ve* x *noktasından t+1 tane doğru geçtiğinden,* q *noktasından da t+1 tane doğru geçer. Böylece seçilen herhangi bir* p *noktasıyla doğrudaş olan ve olmayan noktalardan t+1 doğru geçtiği gösterilmiş olur. Dolayısıyla bu durumda bütün noktalardan t+1 tane doğru geçer.*

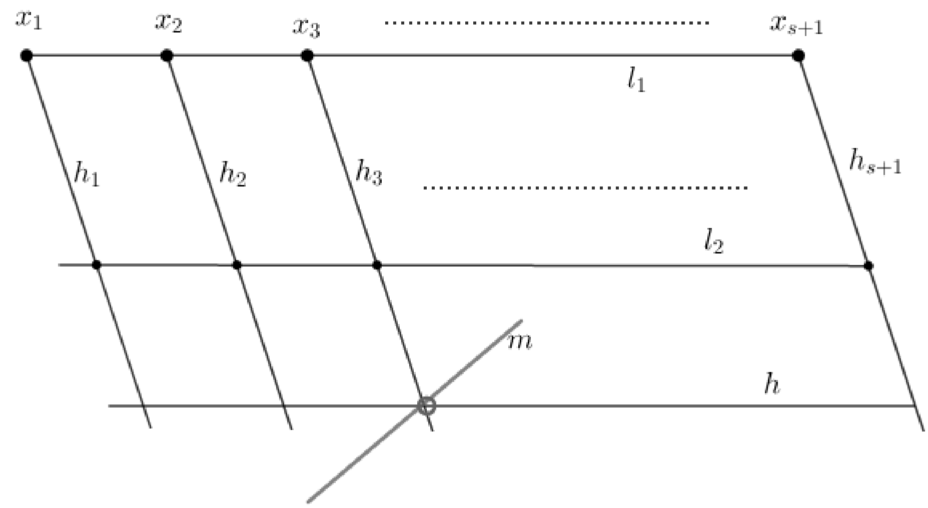
Yardımcı Teorem 4.6 *$S = (P, L)$, bir genelleştirilmiş dörtgen olsun. Bu takdirde;*

(i) Paralel iki doğrudan birini kesen tüm doğrular diğerini de kesiyorsa $S = (P, L)$ uzayı bir griddir.

(ii) Paralel iki doğrudan birini kesip diğerini kesmeyen en az bir doğru varsa $S = (P, L)$ uzayının, $s \geq 1$ olmak üzere, her doğrusunda s+1 tane nokta vardır.

İspat *$S = (P, L)$ uzayının herhangi bir doğrusu l_1 ve l_1 doğrusu ile kesişen herhangi bir doğru h_1 olsun. (GD-2) aksiyomu gereği l_1 doğrusunu kesmeyen en az bir tane doğru vardır. Bu doğru l_2 olsun. l_1 doğrusu s+1 noktalı ise yardımcı teorem 4.4 gereği l_2 doğrusuda s+1 noktalıdır.*

(i) l_2 yi kesen bütün doğruların l_1 doğrusunu da kestiği varsayılsın. Bu durumda l_2 doğrusu üzerindeki her noktadan 2 doğru geçer. l_2 doğrusunu kesen doğrular h_1,h_2,h_3 , . . . , h_{s+1} olarak adlandırılsın. Eğer l_2 doğrusunu kesmeyen, l_1 den başka bir h doğrusu var ise bu h doğrusu, $\forall\ 1 \leq i \leq s+1$ için h_i doğruları ile kesişir. Böyle bir h doğrusu üzerindeki herhangi bir noktadan 2 den daha fazla sayıda doğru geçiyorsa ve o noktadan geçen h ve h_i haricindeki bir doğru m olarak adlandırılsa (Şekil 4.8);



Şekil 4.8 Yardımcı teorem 4.6 açıklaması

(GD-1) aksiyomu gereği l_2 doğrusu ile h_i doğrularının kesiştikleri noktaları, m doğrusu üzerindeki noktalarla birleştiren doğrular vardır. Bu durum ise l_2 doğrusunun tüm noktalarından 2 tane doğru geçmesi ile çelişir. O halde h doğrusunun üzerindeki noktalardan 2 den daha fazla sayıda doğru geçemez. Yani $S = (P, L)$ uzayı bu durumda bir griddir.

(ii) Şimdi ise l_2 doğrusunu kesen bazı doğruların l_1 doğrusunu kesmediği varsayılsın ve bu doğrulardan biri h olsun. l_1 doğrusunun üzerinde s+1 tane nokta olduğundan yardımcı teorem 4.4 gereği hem l_2 doğrusunun hem de h doğrusunun üzerinde de s+1 tane nokta vardır. h doğrusu h_1 doğrusu ile de kesişmez. Şayet kesişselerdi, kabullerimizden dolayı l_2 doğrusu ile h_1 doğrusu zaten kesiştiğinden ve h doğrusuda l_2 doğrusu ile kesiştiğinden, bu l_2, h_1 ve h doğruları bir üçgen oluştururdu. Bundan dolayı h doğrusunun üzerinde s+1 tane nokta olduğundan yine yardımcı teorem 4.4 gereği h_1 doğrusu üzerinde de s+1 tane nokta vardır. O halde bütün doğruların üzerinde s+1 tane nokta vardır.

Yardımcı teorem 4.5 ve yardımcı teorem 4.6 bir araya getirildiğinde, genelleştirilmiş dörtgenlerin 3 ana yapıya ayrıldığını belirten aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.1 *$S = (P, L)$ bir genelleştirilmiş dörtgen olsun. Bu takdirde $S = (P, L)$ uzayı aşağıdaki durumlardan birini sağlar;*

(i) $S = (P, L)$ uzayı bir griddir.
(ii) $S = (P, L)$ uzayı bir dual griddir.
(iii) $S = (P, L)$ uzayının, $s, t \geq 1$ olmak üzere, her noktasından t+1 tane doğru geçer ve her doğrusunun üzerinde s+1 tane nokta vardır.

Eğer $S = (P, L)$ uzayı (iii) deki şartları sağlayan bir uzay ise bu durumda S ye s, t parametreli bir genelleştirilmiş dörtgen denir. Özel olarak;

$s = 1$ ise S uzayının her doğrusu 2 noktalı olur ki bu durumda S bir dual griddir.

$t = 1$ ise S uzayının her noktasından iki tane doğru geçiyor demektir ki bu durumda S bir griddir.

$S = (P, L)$ uzayı doğrularının kümesi $L = L_1 \cup L_2$, L_1 kümesinin doğruları $s_1 + 1$ noktalı, L_2 kümesinin doğruları $s_2 + 1$ noktalı olacak şeklinde ayrılmış bir grid olsun. L_1 ve

L_2 kümelerinin doğrularının dereceleri birbirine eşit ise;

$$s_1 + 1 = s_2 + 1$$

$$s_1 = s_2$$

elde edilir ki S uzayı (i) durumuna düştüğü gibi aynı zamanda tüm doğruları eşit sayıda nokta ihtiva ettiğinden (iii) durumuna da düşer. Bu durumda S uzayı aynı zamanda s, t parametreli bir genelleştirilmiş dörtgendir.

$S = (P, L)$ uzayı noktalarının kümesi $P = P_1 \cup P_2$, P_1 kümesinin noktalarından $t_1 + 1$ doğru, P_2 kümesinin noktalarından $t_2 + 1$ tane doğru geçecek şeklinde ayrılmış bir dual grid olsun. Eğer P_1 ve P_2 kümelerinin noktalarının dereceleri birbirine eşit ise;

$$t_1 + 1 = t_2 + 1$$

$$t_1 = t_2$$

elde edilir ki S uzayı (ii) durumuna düştüğü gibi, aynı zamanda tüm noktalardan eşit sayıda doğru geçtiğinden (iii) durumuna da düşer. Bu durumda S uzayı aynı zamanda s, t parametreli bir genelleştirilmiş dörtgendir.

En küçük genelleştirilmiş dörtgen hem bir grid, hem dual grid hem de s, t parametreli bir genelleştirilmiş dörtgen örneğidir. Burada $s = t = 1$ dir.

Yardımcı Teorem 4.7 *S=(P,L) uzayı bir genelleştirilmiş dörtgen olsun. S uzayında p ile q noktaları doğrudaş olmayan herhangi iki nokta ve $b(p) = t + 1$, $t \geq 1$ olsun. Bu takdirde hem p noktasına hem de q noktasına aynı anda doğrudaş olan t+1 tane nokta vardır.*

İspat *p noktasından t+1 tane doğru geçsin. p ile q noktaları doğrudaş olmayan iki nokta olduğundan (GD-1) den dolayı q noktası, p noktasından geçen t+1 tane doğrunun yalnızca birer noktasıyla doğrudaştır. Dolayısıyla bu noktaların her biri hem p noktasıyla hem de q noktasıyla doğrudaştır. O halde hem p hem de q ile aynı anda doğrudaş olan tam olarak t+1 tane nokta mevcuttur.*

Yardımcı Teorem 4.8 *s ve t parametreli herhangi bir genelleştirilmiş dörtgende:*

$$v = (s + 1).(ts + 1)$$

$$b = (t + 1).(ts + 1)$$

dir.

İspat *S uzayının herhangi bir doğrusu l olsun. Uzayın her bir doğrusu üzerinde $s+1$ tane nokta olduğundan, l doğrusunun üzerinde olmayan noktaların sayısı $v-(s+1)$ tanedir. Bu $v-(s+1)$ tane noktanın her biri (GD-1) den dolayı l yi kesen bir tek doğru üzerindedir. O halde l doğrusu üzerinde olmayan noktaların sayısını hesaplamanın bir başka yolu, l doğrusunu kesen doğruların üzerlerindeki noktaları saymaktır.*

l doğrusu üzerinde $s+1$ tane nokta vardır. Bu noktaların her birinden l doğrusu hariç t tane doğru geçer ve bu t tane doğrunun her birinde, l doğrusunda bulunmayan s tane nokta vardır. O halde l nin herhangi bir noktasından geçen doğruların üzerinde l de olmayan $t.s$ tane nokta vardır. l nin üzerinde $s+1$ tane nokta olduğundan l de bulunmayan $t.s.(s+1)$ tane nokta vardır. Böylece;

$$v-(s+1)=t.s.(s+1)$$
$$v=t.s.(s+1)+(s+1)$$
$$v=(s+1).(ts+1)$$

elde edilir.

Şimdi ise uzayın herhangi bir noktası p olsun. Uzayın her bir noktasından $t+1$ tane doğru geçtiğinden, p noktasından geçmeyen $b-(t+1)$ tane doğru vardır. Bu $b-(t+1)$ doğrunun her biri (GD-1) den dolayı p noktası ile doğrudaş olan bir tek nokta bulundurur. O halde p noktasından geçmeyen doğruların sayısını hesaplamak için bir başka yol, p ile doğrudaş olan noktalardan geçen doğruları saymaktır.

p noktasından geçen $t+1$ tane doğrunun her birinde p hariç s tane nokta vardır ve bu noktaların her birinden de p den geçmeyen t tane doğru geçer. O halde p den geçen herhangi bir doğruyu kesen $t.s$ tane doğru vardır. p den geçen doğru sayısı $t+1$ tane olduğundan, p den geçen doğrular ile kesişen toplam $t.s.(t+1)$ tane doğru vardır. Böylece;

$$b-(t+1)=t.s.(t+1)$$
$$b=t.s.(t+1)+(t+1)$$
$$b=(t+1).(ts+1)$$

elde edilir.

Yukarıdaki yardımcı teoremde verilen eşitliklerden faydalanılarak aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.2 *15 noktalı ve 15 doğrulu bir tek genelleştirilmiş dörtgen vardır.*

İspat $S = (P, L)$*, 15 noktalı ve 15 doğrulu bir genelleştirilmiş dörtgen olsun.* S *bir grid olsun. 15 noktalı bir gridin 8 tane doğru ihtiva ettiği açıkca görülür. Bu ise uzayın 15 doğrulu olması ile çelişir. O halde* S*, grid olamaz.* S *bir dual grid olsun. 15 noktalı bir dual gridin en az 26 doğrulu olduğu açıktır. Bu ise uzayın 15 doğrulu olması ile çelişir. O halde* S*, dual grid olamaz.* S *bir grid ve dual grid olmadığından, teorem 4.1 gereği s ve t parametreli bir genelleştirilmiş dörtgendir. Dolayısıyla yardımcı teorem 4.8 gereği* $b = (t+1)(ts+1)$ *ve* $v = (s+1)(ts+1)$ *,*$t, s \geq 1$ *eşitliklerini sağlar.* $v = b = 15$ *olduğundan;*

$$b = (t+1)(ts+1) = (s+1)(ts+1) = v$$

$$(t+1) = (s+1)$$

$$t = s$$

elde edilir. Yardımcı teorem 4.8 de verilen eşitliklerden birinde yerine yazılırsa;

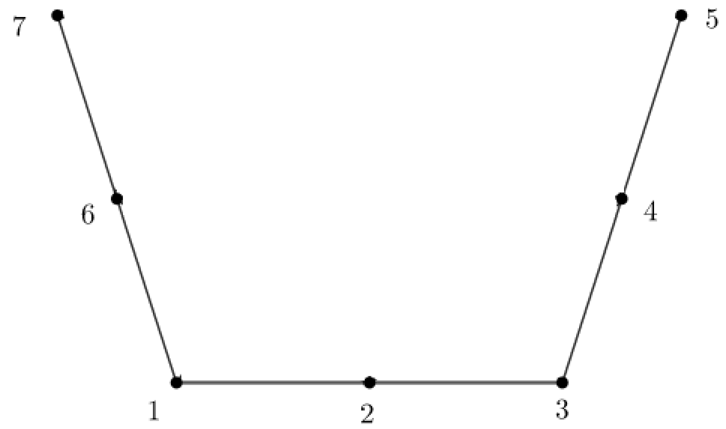
$$15 = (t+1)(t^2+1)$$

bulunur ki $t \geq 1$ *ve* t *bir tamsayı olduğundan bu eşitliği ancak* $t = 2$ *değeri sağlar. Dolayısıyla* $t = s = 2$ *dir. Böylece 15 noktalı ve 15 doğrulu bir genelleştirilmiş dörtgenin tek olduğu ispatlanmış olur.*

Örnek 4.3 (15 noktalı ve 15 doğrulu G.D. inşası) Uzayın inşasına başlanmadan evvel uzayın noktaları;

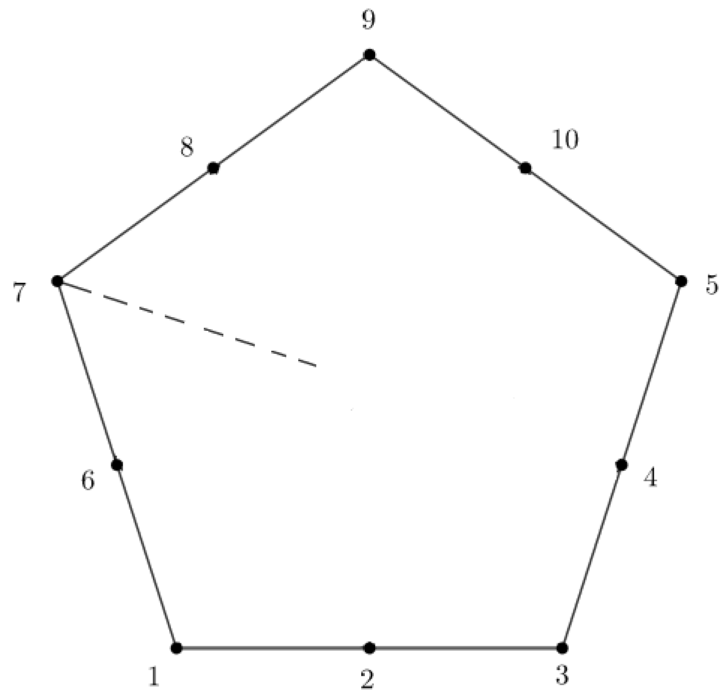
$$P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

şeklinde adlandırılsın. S uzayının her bir doğrusu 3 noktalı olduğundan, genelliği bozmadan, uzayın herhangi bir doğrusu $\{1, 2, 3\}$ olarak alınabilir. (GD-1) den, 1 noktasından geçen diğer doğrular ile 3 noktasından geçen diğer doğrular birbirleriyle kesişmemelidir. O halde 3 noktasından geçen bir doğru $\{3, 4, 5\}$ ve 1 noktasından geçen bir doğru $\{1, 6, 7\}$ olarak seçilebilir. (Şekil 4.9)



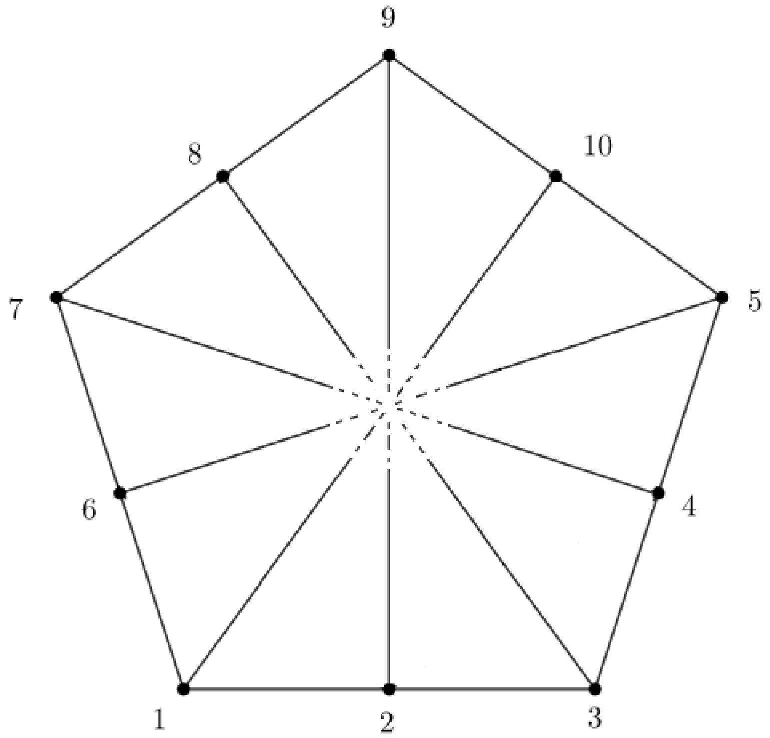
Şekil 4.9 Örnek 4.3 açıklaması

Yine (GD-1) den, 7 noktası, $\{3,4,5\}$ doğrusunu kesen bir tek doğru üzerinde olmalıdır ki bu, 7 den şimdiye dek geçen ikinci doğru olacak. Ayrıca 7 noktasından geçecek olan bir diğer üçüncü doğru vardır ki şu ana kadar verilen doğruları kesmemelidir. 7 noktasından geçecek olan bu üçüncü doğru $\{7,8,9\}$ olsun. 5 noktası da $\{7,8,9\}$ doğrusu ile bir tek noktada birleşmelidir. Bu doğru $\{5,9,10\}$ olsun.(Şekil 4.10)



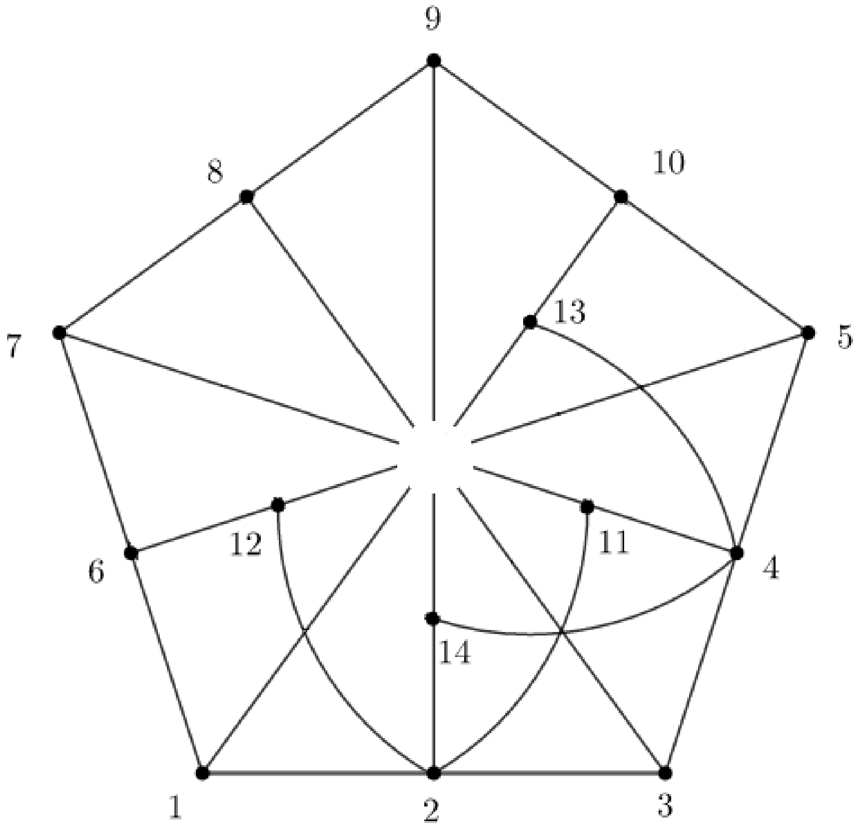
Şekil 4.10 Örnek 4.3 açıklaması

(GD-1) den dolayı 1 noktasından geçen ve $\{5, 9, 10\}$ doğrusunu kesen bir doğru vardır. Bu doğru 5 ya da 9 noktalarından geçerse üçgen oluşturacağından 10 noktasından geçmelidir. Böylelikle oluşturulacak olan doğrulardan biri 1 ve 10 noktalarından geçmelidir. Benzer şekilde; 3 noktası ile 8, 5 noktası ile 6, 9 noktası ile 2, 7 noktası ile 4 noktası da doğrudaştır. Böylelikle $1, 3, 5, 7$ ve 9 noktalarından 3 doğru geçmiş oldu. Hala üzerlerinden 3 tane doğru geçmemiş noktalar var ki bunlar $2, 4, 6, 8, 10$ noktalarıdır.(Şekil 4.11)



Şekil 4.11 Örnek 4.3 açıklaması

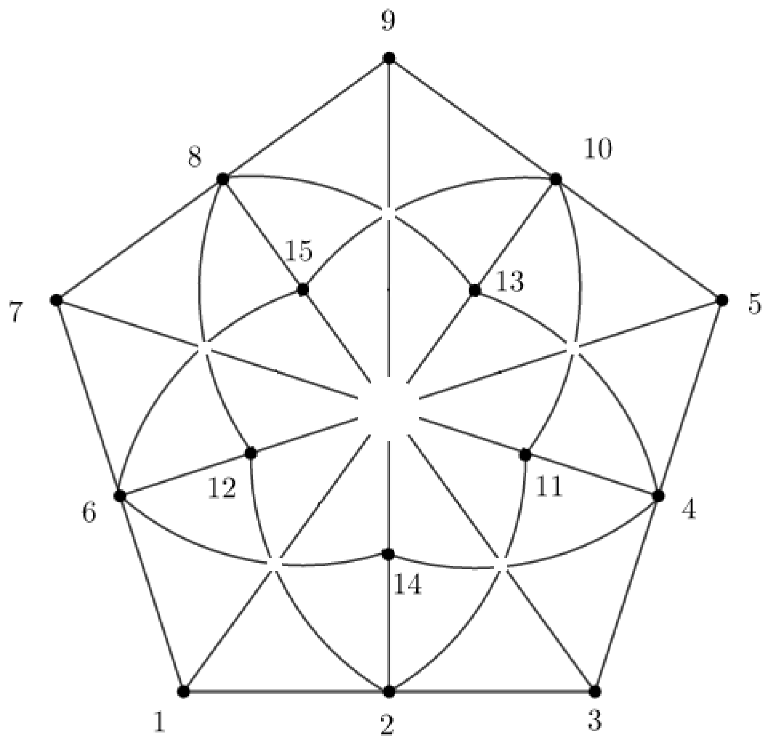
2 noktası, (GD-1) gereği 5 ile 6 dan geçen doğru ve 7 ile 4 den geçen doğrularla birleşmelidir. 2 noktasından tam olarak 3 tane doğru geçmesi gerektiğinden, 2 den geçecek olan üçüncü ve son doğru $\{4, 7\}$ ve $\{5, 6\}$ doğrularını $4, 5, 6, 7$ noktalarından farklı noktalarda kesmelidir. O halde bu iki doğrunun da üçüncü noktaları oluşturulmuş olur. Bunlar sırasıyla 11 ve 12 olsun. Böylelikle $\{4, 7, 11\}$, $\{5, 6, 12\}$ ve $\{2, 11, 12\}$ doğruları elde edilir. Benzer şekilde 4 noktasından geçen üçüncü ve son doğru da (GD-1) gereği $\{1, 10\}$ ve $\{2, 9\}$ doğruları ile $1, 2, 9, 10$ noktalarından farklı noktalarda kesişmelidir. O halde bu doğrularında üçüncü noktaları oluşturulmuş olur. Bunlar sırasıyla 13 ve 14 olsun. Böylelikle $\{1, 10, 13\}$, $\{2, 9, 14\}$ ve $\{4, 13, 14\}$ doğruları elde edilir.(Şekil 4.12)



Şekil 4.12 Örnek 4.3 açıklaması

Yine (GD-1) gereği 10 noktasından geçen bir doğru $\{4, 7, 11\}$ doğrusu ile kesişmelidir. $\{4, 7, 11\}$ doğrusu zaten 3 noktalı olduğundan 10, bu üç noktadan biriyle birleşmelidir. 4 veya 7 ile aynı doğru üzerinde bulunamaz çünkü üçgen oluşturur. Dolayısıyla 11 noktası ile doğrudaş olmalıdır. Ayrıca 10 noktasından geçecek olan doğru $\{3, 8\}$ doğrusuylada kesişmelidir. $\{3, 8\}$ doğrusu şuanda 2 noktalı olduğundan 10, bu doğrunun oluşturulacak olan yeni noktasıyla birleşsin. O halde $\{3, 8\}$ üzerinde yeni bir 15 noktası tanımlanırsa $\{3, 8, 15\}$ ve $\{10, 11, 15\}$ doğruları elde edilir.

Son olarak, şuana kadar 8 noktasından geçen 2 doğru tanımlandı ki üçüncü bir doğruya daha ihtiyaç vardır. Ayrıca üzerinden 2 tane doğru geçen iki nokta daha var ki bunlar 12 ve 13 noktalarıdır. Bu noktaları birleştiren $\{8, 12, 13\}$ doğrusu tanımlanırsa, 15 noktalı, 15 doğrulu ve genelleştirilmiş dörtgen aksiyomlarını sağlayan (iii) tipinde bir uzay elde edilmiş olur.(Şekil 4.13)



Şekil 4.13 Örnek 4.3 açıklaması

Bu model, genelleştirilmiş dörtgenlerin iyi bilinen bir modelidir. Payne, bu özel çizimi, küçük dantel örgü anlamına gelen "doily" olarak adlandırmıştır. (Polster, B., 1998, 41p.)

Şimdi ise Sylvester (1861, 1884) tarafından inşa edilen bir geometrik yapı verilecektir.

Örnek 4.4 (Sylvester'ın duad-sintem geometrisi) 6 elemanlı bir A kümesi $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olarak tanımlansın. A kümesinin 2 elemanlı altkümelerinin her birine *duad* denir. Ayrık duadların üçlülerinin oluşturduğu bir kümeye ise *sintem(syntheme)* denir. Burada duad'ların sayısı $\binom{6}{2} = 15$ tanedir. Hepsi ayrı ayrı yazılacak olursa;

$$\{1,2\}, \{1,3\},\ \{1,4\},\ \{1,5\},\ \{1,6\}$$

$$\{2,3\},\ \{2,4\},\ \{2,5\},\ \{2,6\},\ \{3,4\}$$

$$\{3,5\},\ \{3,6\},\ \{4,5\},\ \{4,6\},\ \{5,6\}$$

Şimdi ise sintemler oluşturulsun;

$\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\}$, $\{\{1,2\},\{3,5\},\{4,6\}\}$, $\{\{1,2\},\{3,6\},\{4,5\}\}$

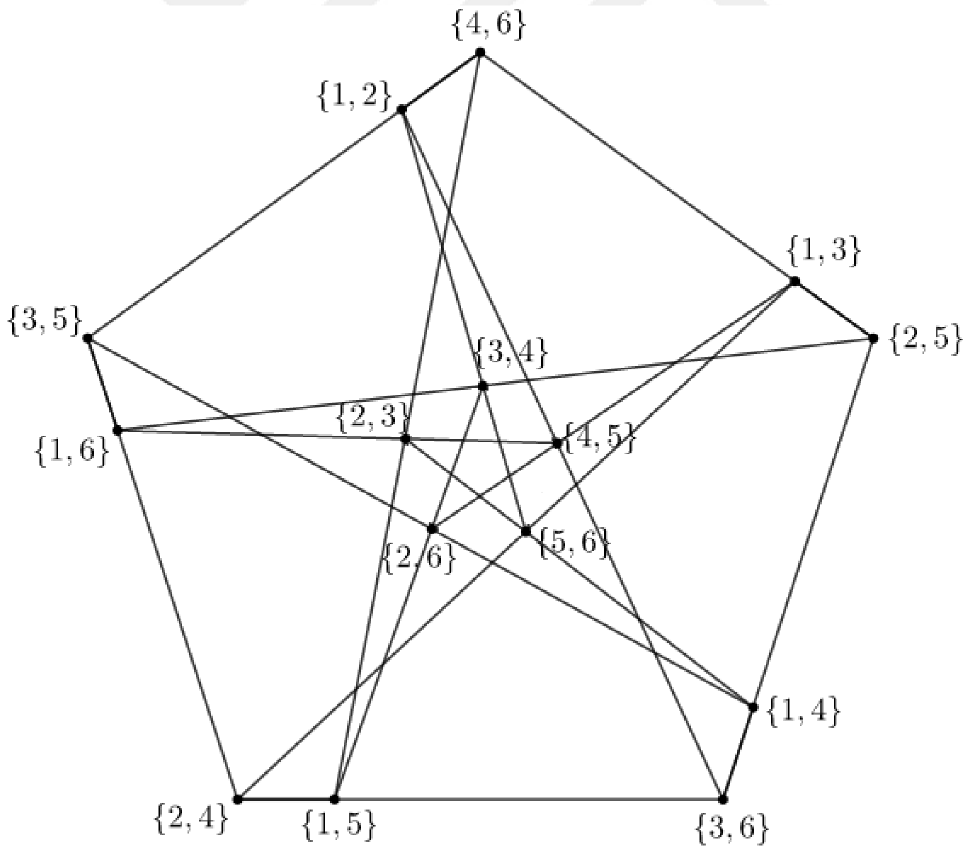
$\{\{1,3\},\{2,4\},\{5,6\}\}$, $\{\{1,3\},\{2,5\},\{4,6\}\}$, $\{\{1,3\},\{2,6\},\{4,5\}\}$

$\{\{1,4\},\{2,3\},\{5,6\}\}$, $\{\{1,4\},\{2,5\},\{3,6\}\}$, $\{\{1,4\},\{2,6\},\{4,5\}\}$

$\{\{1,5\},\{2,3\},\{4,6\}\}$, $\{\{1,5\},\{2,4\},\{3,6\}\}$, $\{\{1,5\},\{2,6\},\{3,4\}\}$

$\{\{1,6\},\{2,3\},\{4,5\}\}$, $\{\{1,6\},\{2,4\},\{3,5\}\}$, $\{\{1,6\},\{2,5\},\{3,4\}\}$

Yukarıda elde edilen bu duadlar ile sintemler sırası ile bir $S = (P, L)$ uzayının noktalarının kümesi ile doğrularının kümesini oluşturan elemanlar olarak alınırsa, 15 doğrudan ve 15 noktadan oluşan bir uzay elde edilir. (Şekil 4.14)



Şekil 4.14 Sylvester'ın duad-sintem geometrisi

Oluşturulan bu özel geometrik yapıda kullanılan *duad* ve *sintem(syntheme)* kavramları ilk kez Sylvester (1861, 1884) tarafından kullanılmıştır. (Payne ve Thas, 1984, 79p.) Bundan dolayı çalışmada bu yapı *Sylvester'ın duad-sintem(duad-syntheme) geometrisi* olarak adlandırılacaktır.

Bu tanımlanan $S = (P, L)$ uzayı;

○ Her doğrusu 3 noktalı olduğundan (YLU-1) aksiyomunu,

○ Farklı herhangi iki noktasından en fazla bir doğru geçtiğinden dolayı (YLU-2) aksiyomunu,

○ Herhangi bir doğrusuna, doğrunun dışındaki bir noktadan yalnızca bir doğru çizildiğinden (GD-1) aksiyomunu,

○ Doğrudaş olmayan noktalar ve kesişmeyen doğrular ihtiva ettiğinden (GD-2) aksiyomunu,

○ P kümesi 15 elemanlı yani sonlu olduğundan (GD-3) aksiyomunu sağlar. Dolayısıyla Sylvester'ın duad-sintem geometrisi bir genelleştirilmiş dörtgendir.

Örnek 4.5 $S = (P, L)$ uzayı, Örnek 4.4'te tanımlanan Sylvester'ın duad-sintem geometrisi, $S' = (P', L')$ uzayı da Örnek 4.3'te tanımlanan 15 doğrulu ve 15 noktalı genelleştirilmiş dörtgen olsun. Kolaylık adına her iki örnekte tanımlanan nokta ve doğruların adlandırılması aynı kalsın. $f : P \to P'$ bir fonksiyon olsun. Eğer f;

$$f(\{1,2\}) \to 1\,,\ f(\{3,4\}) \to 2\,,\ f(\{5,6\}) \to 3$$

$$f(\{1,3\}) \to 4\,,\ f(\{2,4\}) \to 5\,,\ f(\{3,5\}) \to 6$$

$$f(\{4,6\}) \to 7\,,\ f(\{2,3\}) \to 8\,,\ f(\{1,5\}) \to 9$$

$$f(\{3,6\}) \to 10\,,\ f(\{2,5\}) \to 11\,,\ f(\{1,6\}) \to 12$$

$$f(\{4,5\}) \to 13\,,\ f(\{2,6\}) \to 14\,,\ f(\{1,4\}) \to 15$$

olacak şekilde tanımlanırsa, P ve P' kümeleri arasında birebir ve örten bir fonksiyon olur. S uzayının doğrularının(sintemlerin) görüntüleri ise;

$$f(\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\}) = \{1,2,3\}$$

$$f(\{\{1,2\},\{3,5\},\{4,6\}\}) = \{1,6,7\}$$

$$f(\{\{1,2\},\{3,6\},\{4,5\}\}) = \{1,10,13\}$$

$$f(\{\{1,3\},\{2,4\},\{5,6\}\}) = \{4,5,3\}$$

$$f(\{\{1,3\},\{2,5\},\{4,6\}\}) = \{4,11,7\}$$

$$f(\{\{1,3\},\{2,6\},\{4,5\}\}) = \{4,14,13\}$$

$$f(\{\{1,4\},\{2,3\},\{5,6\}\}) = \{15,8,3\}$$

$$f(\{\{1,4\},\{2,5\},\{3,6\}\}) = \{15,11,10\}$$

$$f(\{\{1,4\},\{2,6\},\{3,5\}\}) = \{15,14,6\}$$

$$f(\{\{1,5\},\{2,3\},\{4,6\}\}) = \{9,8,7\}$$

$$f(\{\{1,5\},\{2,4\},\{3,6\}\}) = \{9,5,10\}$$

$$f(\{\{1,5\},\{2,6\},\{3,4\}\}) = \{9,14,2\}$$

$$f(\{\{1,6\},\{2,3\},\{4,5\}\}) = \{12,8,13\}$$

$$f(\{\{1,6\},\{2,4\},\{3,5\}\}) = \{12,5,6\}$$

$$f(\{\{1,6\},\{2,5\},\{3,4\}\}) = \{12,11,2\}$$

olur ki bunların her biri L' nün birer doğrusudur. $\forall l \in L$ doğrusu için $f(l) \in L'$ olduğundan, f, bir lineer fonksiyondur. f^{-1} fonksiyonunun da lineer olduğu, f nin lineer olmasına benzer şekilde kolaylıkla gösterilebilir. Dolayısıyla S ve S' uzayları birbirlerine izomorftur. 3. bölümde iki yaklaşık lineer uzayın birbirleriyle aynı olması için gerekli asgari koşullar belirtilmişti. S ve S' uzaylarının nokta ve doğru sayıları eşit, her iki uzayın da tüm doğruları 3 noktalı ve tüm noktalarından 3 doğru geçtiğinden S ve S' uzayları birbirlerine izomorfizm farkıyla eşittir.

4.2 Bazı Kombinatöryal Özellikler

$S = (P, L)$ uzayının bir $p \in P$ noktası, q noktası ile doğrudaş veya $p = q$ ise $p \sim q$ şeklinde gösterilir. Çalışmanın bu bölümünden itibaren doğrudaş olan noktaların gösterimi için " $\sim$ " notasyonu, doğrudaş olmayan noktaların gösterimi için ise " $\nsim$ " notasyonu kullanılacaktır.

S, bir genelleştirilmiş dörtgen ve $S = (P, L)$ uzayının herhangi bir noktası $p \in P$ olsun. p ile doğrudaş olan noktaların kümesi $p^{\perp} = \{x \in P | x \sim p\}$ şeklinde tanımlanır. p noktasının kendisi de $p^{\perp}$ nin bir elemanıdır yani $p \in p^{\perp}$ dir.

q , p noktası ile doğrudaş olan herhangi bir nokta olsun. Bu noktalar genelleştirilmiş dörtgenin dual uzayında l ve h gibi iki farklı doğruya karşılık gelir ki dual uzayda bu doğrular kesişirler. Yukarıda p noktası ile doğrudaş olan noktaların kümesi için verilen tanımlama, dualiteyi korumak adına doğrular içinde verilecek olursa:

l doğrusunu kesen doğruların kümesi $l^{\perp} = \{h \in L | h \sim l\}$ şeklinde tanımlanır. $h \sim l$ gösterimi h doğrusu ile l doğrusu kesişir anlamı taşır. l doğrusunun kendiside $l^{\perp}$ nin bir elemanıdır yani $l \in l^{\perp}$ dir.

Tanım 4.4 *$S = (P, L)$ uzayının herhangi farklı iki noktası p ve q olsun. Hem p hem de q noktasıyla doğrudaş olan noktaların oluşturduğu kümeye (p, q) ikilisinin "izi"(trace) denir. $tr(p, q) = \{p, q\}^{\perp} = \{x \in P | x \sim p, x \sim q\}$ şeklinde gösterilir.*

Eğer p ve q doğrudaş noktalar ise $tr(p, q)$, p ve q noktalarından geçen doğrunun üzerinde bulunan noktaların kümesi olur. Bu doğrunun üzerindeki noktalar dışında p ve q noktalarına aynı anda doğrudaş olan başka bir nokta yoktur çünkü olsaydı üçgen oluşurdu ki bu bir çelişkidir.

Yukarıda yapılan tanımlamalar daha çok eleman için genişletecek olursa, P kümesinin herhangi bir X altkümesi için:

$$X^{\perp} = \{x \in P | p \sim x, \forall p \in X\}$$

şeklinde verilebilir. Benzer şekilde L kümesinin herhangi bir Y altkümesi için:

$$Y^{\perp} = \{h \in L | l \sim h, \forall l \in Y\}$$

şeklinde verilebilir.

Dikkat edilirse herhangi bir l doğrusuna iki farklı anlam yüklenebilir:

1-) l doğrusu, L nin bir doğrusu olarak görülebilir.

2-) l doğrusu, üzerinde bulunan noktaların bir kümesi olarak görülebilir.

Bu durumda $l^{\perp}$ için iki ayrı düşünce yürütülebilir. Birincisi l doğrusunu kesen doğruların bir kümesi, ikincisi l doğrusu üzerindeki noktalara aynı anda doğrudaş olan noktaların kümesidir. Hangi durumun göz önüne alındığı hususunda dikkatli olunmalıdır. Bir şey belirtilmediği sürece $l^{\perp}$, l yi kesen doğruların kümesi olarak kabul edilecektir.

Tanım 4.5 *$S = (P, L)$ uzayının herhangi farklı iki noktası p ve q olmak üzere;*

$$sp(p,q) = \left\{\{p,q\}^{\perp}\right\}^{\perp} = \{tr(p,q)\}^{\perp} = \{x \in P | x \sim y, \forall y \in tr(p,q)\}$$

kümesine p ve q noktalarının gereni(span) denir.

$sp(p, q)$, p ve q noktalarına aynı anda doğrudaş olan tüm noktalara doğrudaş olan noktaların kümesi olduğundan $p, q \in sp(p, q)$ olduğu aşikardır. Eğer p ve q noktaları doğrudaş noktalar ise $sp(p, q) = pq$ doğrusu olur.

$S(P, L)$ uzayının bir grid olması durumda ne gibi kombinatöryel özelliklere sahip olduğu, aşağıda verilecek olan (4.9), (4.10) ve (4.11) yardımcı teoremlerinde incelenmiştir.

Yardımcı Teorem 4.9 *$S = (P, L)$ bir grid, $L = L_1 \cup L_2$, L_1 kümesinin doğruları $s_1 + 1$ noktalı, L_2 kümesinin doğruları $s_2 + 1$ noktalı olsun. Bu takdirde;*

(a) Bir $p \in P$ için $\left|p^{\perp}\right| = s_1 + s_2 + 1$,
(b) Bir $l \in L$ için $\left|l^{\perp}\right| = s_i + 2$, $1 \leq i \leq 2$

dir.

İspat *(a) S bir grid olduğundan herhangi bir p noktasından 2 tane doğru geçer. $p^{\perp}$, p noktası ile doğrudaş olan noktaların kümesi olduğundan, p den geçen bu iki doğru üzerindeki noktalardan oluşur. Bu doğrulardan birinde p hariç s_1 nokta, diğerinde ise p hariç s_2 nokta vardır. Dolayısıyla $s_1 + s_2$ tane nokta p ile doğrudaştır. Ayrıca $p \in p^{\perp}$ olduğundan $\left|p^{\perp}\right| = s_1 + s_2 + 1$ dir.*

(b) Herhangi bir l doğrusu için, $l^\perp$ kümesi l yi kesen doğrulardan oluştuğundan ve l nin her noktasından iki doğru geçtiğinden (biri l doğrusu), $l^\perp$ nin eleman sayısı, l nin üzerindeki nokta sayısı ile eşit olur. Ayrıca $l \in l^\perp$ olduğundan ya $\left|l^\perp\right| = s_1 + 2$ ya da $\left|l^\perp\right| = s_2 + 2$ dir.

Yardımcı Teorem 4.10 *$S = (P, L)$ bir grid, $L = L_1 \cup L_2$, L_1 kümesinin doğruları $s_1 + 1$ noktalı, L_2 kümesinin doğruları $s_2 + 1$ noktalı olsun. S de doğrudaş herhangi iki nokta p ve q olsun. Bu takdirde;*

(a) $|tr(p, q)| = s_i + 1$, $1 \leq i \leq 2$,
(b) $sp(p, q) = pq$

dir.

İspat *(a) p ve q noktalarının üzerinde bulundukları pq doğrusu ya L_1 kümesinin ya da L_2 kümesinin bir elemanıdır. $tr(p, q)$, hem p ye hem de q ya doğrudaş olan noktaların kümesi olduğundan $tr(p, q) = pq$ dur. Dolayısıyla pq doğrusu L_1 kümesinin bir elemanı ise $|tr(p, q)| = s_1 + 1$, L_2 kümesinin bir elemanı ise $|tr(p, q)| = s_2 + 1$ dir.*

(b) $sp(p, q) = \left\{\{p, q\}^\perp\right\}^\perp = \{tr(p, q)\}^\perp$ ve p ile q doğrudaş olduğundan, $\{tr(p, q)\}^\perp = \{pq\}^\perp = pq$ olur.

Yardımcı Teorem 4.11 *$S = (P, L)$ bir grid, $L = L_1 \cup L_2$, L_1 kümesinin doğruları $s_1 + 1$ noktalı, L_2 kümesinin doğruları $s_2 + 1$ noktalı olsun. S nin doğrudaş olmayan herhangi iki noktası p ve q olsun. Bu takdirde;*

(a) $|tr(p, q)| = 2$,
(b) $sp(p, q) = \{p, q\}$

dir.

İspat *(a) S bir grid olduğundan doğrudaş olmayan p ve q noktalarının her ikisine birden doğrudaş olan yalnızca iki nokta vardır. Dolayısıyla $|tr(p, q)| = 2$ dir.*

(b) Bir önceki şık gereği hem p hem de q ile doğrudaş olan yalnızca 2 tane nokta vardır. Bunlar r ve s olsun. $sp(p, q) = \{tr(p, q)\}^\perp = \{r, s\}^\perp$ olduğundan r ve s noktalarıyla doğrudaş olan noktalar p ve q noktalarının kendileridir. Dolayısıyla $sp(p, q) = \{p, q\}$ dur.

$S(P, L)$ uzayının bir dual grid olması durumda ne gibi kombinatöryel özelliklere sahip olduğu, aşağıda verilecek olan (4.12), (4.13) ve (4.14) yardımcı teoremlerinde incelenmiştir.

Yardımcı Teorem 4.12 *$S = (P, L)$ bir dual grid, $P = P_1 \cup P_2$, P_1 kümesinin noktalarından $t_1 + 1$ doğru, P_2 kümesinin noktalarından $t_2 + 1$ doğru geçsin. Bu takdirde;*

(a) Bir $p \in P$ için $\left|p^{\perp}\right| = t_i + 2$, $1 \leq i \leq 2$,
(b) Bir $l \in L$ için $\left|l^{\perp}\right| = t_1 + t_2 + 1$

dir.

İspat *(a) S bir dual grid olduğundan, uzayın herhangi bir p noktasından geçen her doğru 2 noktalıdır (biri p noktası). Bundan dolayı p noktası ile doğrudaş olan noktaların sayısı, p den geçen doğru sayısına eşittir. Ayrıca $p \in p^{\perp}$ olduğundan $p \in P_1$ ise $\left|p^{\perp}\right| = t_1 + 2$, $p \in P_2$ ise $\left|p^{\perp}\right| = t_2 + 2$ dir.*

(b) S bir dual grid olduğundan her doğru iki noktalıdır. Dolayısıyla herhangi bir l doğrusu 2 noktalıdır. Bu noktalardan geçen doğrular, l yi kesen doğruların kümesini yani $l^{\perp}$ kümesini oluşturur. Bu noktalarından birinden l hariç t_1, diğerinden ise yine l hariç t_2 tane doğru geçer. Dolayısıyla l yi kesen $t_1 + t_2$ tane doğru vardır. Ayrıca $l \in l^{\perp}$ olduğundan $\left|l^{\perp}\right| = t_1 + t_2 + 1$ dir.

Yardımcı Teorem 4.13 *$S = (P, L)$ bir dual grid, $P = P_1 \cup P_2$, P_1 kümesinin noktalarından $t_1 + 1$ doğru, P_2 kümesinin noktalarından $t_2 + 1$ doğru geçsin. S de doğrudaş herhangi iki nokta p ve q olsun. Bu takdirde;*

(a) $|tr(p, q)| = 2$,
(b) $sp(p, q) = \{p, q\}$

dir.

İspat *(a) $p \sim q$ olduğundan hem p noktası hem de q noktası ile doğrudaş olan noktalar pq doğrusunun üzerindeki noktalardır. S bir dual grid olduğundan her doğrusu 2 noktalıdır. Dolayısıyla $|tr(p, q)| = 2$ dir.*

(b) $sp(p, q) = \{tr(p, q)\}^{\perp} = \{pq\}^{\perp} = pq = \{p, q\}$ olduğu aşikardır.

Yardımcı Teorem 4.14 *$S = (P, L)$ bir dual grid, $P = P_1 \cup P_2$, P_1 kümesinin noktalarından $t_1 + 1$ doğru, P_2 kümesinin noktalarından $t_2 + 1$ doğru geçsin. S de doğrudaş olmayan herhangi iki nokta p ve q olsun. Bu takdirde;*

(a) $|tr(p,q)| = t_i + 1$, $1 \leq i \leq 2$,
(b) $sp(p,q) = P_i$, $1 \leq i \leq 2$

dir.

İspat *(a) S bir dual grid ve $p \nsim q$ olduğundan, p ve q noktaları aynı P_i kümesindedirler. $p, q \in P_1$ ise p ve q noktaları ile doğrudaş olan noktalar P_2 kümesindeki tüm noktalardır. Benzer şekilde $p, q \in P_2$ ise p ve q noktaları ile doğrudaş olan noktalar P_1 kümesindeki tüm noktalardır. Dolayısıyla $|tr(p,q)|$ değeri , ya $t_1 + 1$ ya da $t_2 + 1$ dir.*

(b) $sp(p,q) = \{tr(p,q)\}^{\perp}$ olduğundan ve (a) ispatına benzer şekilde, $p, q \in P_1$ ise $sp(p,q) = \left\{\{p,q\}^{\perp}\right\}^{\perp} = \{P_2\}^{\perp} = P_1$ ve $p, q \in P_2$ ise $sp(p,q) = \left\{\{p,q\}^{\perp}\right\}^{\perp} = P_2$ dir.

$S(P, L)$ uzayının s ve t parametreli bir genelleştirilmiş dörtgen olması durumda ne gibi kombinatöryel özelliklere sahip olduğu, aşağıda verilecek olan teoremlerde incelenmiştir.

Yardımcı Teorem 4.15 *$S = (P, L)$, s ve t parametreli bir genelleştirilmiş dörtgen olsun. Bu takdirde;*

(a) Bir $p \in P$ için $\left|p^{\perp}\right| = st + s + 1$,
(b) Bir $l \in L$ için $\left|l^{\perp}\right| = st + t + 1$

dir.

İspat *(a) p noktasından t+1 tane doğru geçer. Dolayısıyla p noktası bu doğruların üzerindeki tüm noktalarla doğrudaştır. Bu doğruların her birinin üzerinde p hariç s tane nokta vardır. Dolayısıyla p ile doğrudaş $s.(t + 1) = st + s$ tane nokta vardır. Ayrıca $p \in p^{\perp}$ olduğundan $\left|p^{\perp}\right| = st + s + 1$ dir.*

(b) l doğrusu üzerinde s+1 tane nokta vardır. Bu noktalardan geçen her doğru l doğrusu keser. Her bir noktadan l hariç t tane doğru geçtiğinden l yi kesen $(s + 1).t = st + t$ tane doğru vardır. Ayrıca $l \in l^{\perp}$ olduğundan $\left|l^{\perp}\right| = st + t + 1$ dir.

Yardımcı Teorem 4.16 $S = (P, L)$ *, s ve t parametreli bir genelleştirilmiş dörtgen olsun. S de doğrudaş olmayan herhangi p ve q noktaları için;*

(a) $|tr(p,q)| = t + 1$*,*
(b) $|sp(p,q)| \leq t + 1$

dir.

İspat *(a) p noktasından t+1 tane doğru geçer.* $p \nsim q$ *olduğundan (GD-1) gereği p den geçen t+1 tane doğrunun her birinin üzerinde q noktası ile doğrudaş olan birer nokta vardır. Bu noktaların herbiri hem p hem de q ile doğrudaştır. Dolayısıyla* $|tr(p,q)| = t + 1$ *dir.*

(b) $p \nsim q$ *olduğundan yardımcı teorem 4.7 gereği hem p noktası hem de q noktası ile doğrudaş olan t+1 tane nokta vardır. Bu t+1 tane nokta birbirleriyle doğrudaş değildir. Çünkü bu noktaların herhangi ikisi doğrudaş olsaydı, p (veya q) ile birlikte bir üçgen oluştururlardı ki bu bir çelişki olurdu. Bu ayrık noktalardan herhangi ikisi ile doğrudaş olan nokta sayısı yine yardımcı teorem 4.7 gereği t+1 tanedir. Dolayısıyla bu ayrık noktaların tamamıyla doğrudaş olan nokta sayısı en fazla t+1 tanedir. Dolayısıyla* $|sp(p,q)| \leq t + 1$ *dir.*

Yardımcı Teorem 4.17 $S = (P, L)$ *, s ve t parametreli bir genelleştirilmiş dörtgen olsun. S de doğrudaş olan herhangi p ve q noktaları için*

$$|sp(p,q)| = s + 1$$

dir.

İspat $p \sim q$ *olduğundan p ve q noktaları ile doğrudaş olan noktaların kümesi* $tr(p,q)$*, pq doğrusuna eşittir. Bu eşitlik kullanılarak* $sp(p,q) = \left\{\{p,q\}^{\perp}\right\}^{\perp} = \{tr(p,q)\}^{\perp} = \{pq\}^{\perp} = pq$ *elde edilir. Her doğru s+1 noktalı olduğundan* $|sp(p,q)| = |pq| = s + 1$ *dir.*

Yardımcı Teorem 4.18 $S = (P, L)$ *, s ve t parametreli bir genelleştirilmiş dörtgen olsun. S de kesişmeyen herhangi iki l ve h doğrusu için*

$$\left|\{l,h\}^{\perp}\right| = s + 1$$

dir.

İspat *l doğrusu üzerinde s+1 tane nokta vardır. l ve h doğruları kesişmediğinden l nin üzerindeki her bir noktadan geçen ve h yi kesen bir tek doğru olduğundan bu doğruların sayısı da s+1 tanedir. Bu s+1 tane doğru hem l yi hem de h yi keser. Dolayısıyla* $\left|\{l,h\}^{\perp}\right| = s+1$ *dir.*

Tanım 4.6 $S = (P, L)$ *bir genelleştirilmiş dörtgen ve S nin herhangi iki noktası p ve q olsun. Eğer* $|sp(p,q)| = t+1$ *ise (p,q) ikilisine regülerdir denir. Eğer p den farklı tüm q noktaları için (p,q) ikilisi regüler ise p noktasına regülerdir denir.*

Eğer S uzayı $s = t$ parametreli ve p ile q doğrudaş iki nokta ise yardımcı teorem 4.17 gereği $|sp(p,q)| = s+1 = t+1$ olacağından (p,q) ikilisi regülerdir.

Tanım 4.7 $S = (P, L)$ *bir genelleştirilmiş dörtgen ve S nin herhangi iki noktası p ve q olsun. Eğer* $\forall x \in P - \{p,q\}$ *için* $\left|x^{\perp} \cap tr(p,q)\right| \leq 2$ *ise (p,q) ikilisine antiregülerdir denir. Eğer p den farklı tüm q noktaları için (p,q) ikilisi antiregüler ise p noktasına antiregülerdir denir.*

Tanım 4.8 *İkişer ikişer doğrudaş olmayan noktaların 3 elemanlı bir kümesine üçlü(triad) denir. Belli bir* $T = (p,q,r)$ *üçlüsü için* $T^{\perp} = \{p,q,r\}^{\perp} = \{x \in P | x \sim p, x \sim q, x \sim r\}$ *kümesinin bir elemanına T nin bir merkezi(centre) denir.*

$T = (p,q,r)$ bir üçlü olmak üzere eğer;

∘ $\left|T^{\perp}\right| = 0$ ise T ye *merkezsiz*(acentric),

∘ $\left|T^{\perp}\right| = 1$ ise T ye *tek merkezli*(unicentric),

∘ $\left|T^{\perp}\right| \geq 1$ ise T ye *merkezli*(centric) denir.

Yardımcı Teorem 4.19 $S = (P, L)$ *,*$s = t$ *parametreli bir genelleştirilmiş dörtgen ve* (p,q) *ikilisi regüler ise* $\forall x, y \in tr(p,q)$ *için* (x,y) *ikilileri de regülerdir.*

İspat $S = (P, L)$ *,*$s = t$ *parametreli bir genelleştirilmiş dörtgen ve* (p,q) *ikilisi regüler olsun.* $\forall x, y \in tr(p,q)$ *olmak üzere* (x,y) *ikililerinin regüler olduğunu göstermek için* $|sp(x,y)| = t+1$ *olduğu gösterilmelidir.*

$p \sim q$ olsun. Bu takdirde tr(p,q) kümesi pq doğrusudur. Bu doğru üzerinde alınan herhangi iki nokta x ve y olsun.

$$sp(p,q) = \left\{\{x,y\}^{\perp}\right\}^{\perp} = \{tr(x,y)\}^{\perp} = \{pq\}^{\perp} = pq$$

olur ve s=t olduğundan;

$$|sp(x,y)| = |pq| = s+1 = t+1$$

dir. O halde (x,y) ikilisi regülerdir.

$p \nsim q$ olsun. Hem p noktası hem de q noktası ile doğrudaş olan bir $u \in tr(p,q)$ noktası, sp(p,q) nun tüm elemanlarıyla doğrudaştır. $|sp(p,q)| = |tr(x,y)|$ olduğundan sp(x,y)=tr(p,q) elde edilir. Yardımcı teorem 4.16(a) gereği $|tr(p,q)| = t+1$ olduğundan $|sp(x,y)| = |tr(p,q)| = t+1$ dir. Dolayısıyla (x,y) ikilisi regülerdir.

Yardımcı Teorem 4.20 *$S = (P,L)$, s ve t parametreli bir genelleştirilmiş dörtgen olsun. Eğer $p \nsim q$ ise (p,q) ikilisini bulunduran $s^2t - st - s + t$ tane üçlü vardır.*

İspat *Yardımcı teorem 4.15 gereği S nin herhangi bir noktası st+s+1 tane nokta ile doğrudaştır. Dolayısıyla p ve q noktalarının her biri st+s+1 tane nokta ile doğrudaştır. Yardımcı teorem 4.7 gereği bu noktalardan t+1 tanesi hem p hem de q ile doğrudaştır. Dolayısıyla p veya q noktası ile doğrudaş olmayan noktaların sayısı;*

$$v - (st+s+1) - (st+s+1) + t + 1$$

tanedir. Ayrıca uzayın tüm noktalarının sayısının yardımcı teorem 4.8 den;

$$v = (s+1)(st+1)$$

olduğu bilinmektedir. v değeri ilk ifadede yerine yazılırsa;

$$(s+1)(st+1) - (st+s+1) - (st+s+1) + t + 1$$

$$= s^2t + s + st + 1 - st - s - 1 - st - s - 1 + t + 1$$

$$= s^2t - st - s + t$$

elde edilir ki bu p veya q noktası ile doğrudaş olmayan noktaların sayıdır. Dolayısıyla (p,q) ikilisini ihtiva eden $s^2t - st - s + t$ tane üçlü vardır.

Yardımcı Teorem 4.21 *$S = (P, L)$, s = t parametreli bir genelleştirilmiş dörtgen olsun. $p, q \in P$, $p \nsim q$ ve $tr(p, q) = \{x_0, x_1, ..., x_s\}$ olsun. $I \subseteq \{0, 1, ..., s\}$ için n(I), p veya q ile doğrudaş olmayan fakat x_i lerin tamamıyla doğrudaş olan noktaların sayısı olsun. O halde;*

$$\sum_I (|I| - 1)(|I| - (s + 1))n(I) = 0$$

dır.

İspat *p ile q, doğrudaş olmayan herhangi iki nokta olsun. Yardımcı teorem 4.20 gereği p veya q ile doğrudaş olmayan $s^2t - st - s + t$ tane nokta vardır. s=t olduğundan $s^2t - st - s + t = s^3 - s^2$ dir. O halde;*

$$\sum_I n(I) = s^3 - s^2 \tag{4.1}$$

dir. Belli bir x_i noktasından geçen t+1=s+1 tane doğrunun biri p noktasından, bir diğeri ise q noktasından geçsin. Bu durumda p veya q dan geçmeyen s-1 tane doğru vardır ve her doğrunun üzerinde x_i noktası hariç s tane nokta olduğundan x_i ile doğrudaş fakat p veya q ile doğrudaş olmayan s.(s-1) tane nokta vardır. Yani;

$$\sum_{i \in I} n(I) = s^2 - s$$

dir. Tüm i ler için hesap edilirse;

$$\sum_I |I|\, n(I) = \sum_{i=0}^{s} \left(\sum_{i \in I} n(I) \right) = (s + 1)(s^2 - s) = s^3 - s \tag{4.2}$$

elde edilir. Son olarak, $i \neq j$ olmak üzere x_i ve x_j noktalarının ikisiyle birden doğrudaş olan t+1=s+1 tane nokta vardır. Bunlardan ikisi p ve q noktaları olduğundan x_i ve x_j ile doğrudaş olan p ve q hariç s-1 tane nokta vardır. Yani belli bir i, j ikilisini ihtiva eden I üzerinden toplama yapılırsa;

$$\sum_{\substack{i \neq j \\ i,j \in I}} n(I) = s - 1$$

dir. Tüm i, j ,$i \neq j$ ikilileri üzerinden hesap edilirse;

$$\sum_I \binom{|I|}{2} n(I) = \sum_{\substack{i \neq j \\ i,j \in I}} \left(\sum_{\substack{i \neq j \\ i,j \in I}} n(I) \right) = \binom{s+1}{2} (s - 1)$$

$$\sum_I \frac{|I|\,(|I| - 1)}{2} n(I) = \frac{(s + 1)s(s - 1)}{2} = \frac{s^3 - s}{2}$$

$$\sum_I |I|\,(|I| - 1)\, n(I) = s^3 - s \tag{4.3}$$

dir. böylece yardımcı teoremde belirtilen ifade açılırsa;

$$\sum_I (|I|-1)(|I|-(s+1))n(I)=0$$

$$\Rightarrow \sum_I \left[(|I|-1)\,|I| - |I|\,(s+1)+(s+1)\right] n(I)=0$$

$$\Rightarrow \sum_I (|I|-1)\,|I|\,n(I) - \sum_I |I|\,n(I)(s+1)+\sum_I n(I)(s+1)=0$$

elde edilir. (4.1), (4.2) ve (4.3) eşitlikleri yerlerine yazılırsa;

$$s^3-s-(s^3-s)(s+1)+(s^3-s^2)(s+1)=0$$

$$\Rightarrow s^3-s-(s^4+s^3-s^2-s)+(s^4+s^3-s^3-s^2)=0$$

$$\Rightarrow s^3-s-s^4-s^3+s^2+s+s^4+s^3-s^3-s^2=0$$

Yardımcı Teorem 4.22 *$S=(P,L)$, s = t parametreli bir genelleştirilmiş dörtgen olsun. S uzayında antiregüler bir (p,q) ikilisi varsa, her bir (p,q,r) üçlüsünün 2 veya 0 merkezi vardır.*

İspat *(p,q) ikilisi antiregüler olduğundan $p \nsim q$ dur. Dolayısıyla yardımcı teorem 4.20 gereği (p,q) ikilisini bulunduran $s^2t-st-s+t$ tane üçlü vardır. s=t olduğundan bu sayı s^3-s^2 ye eşittir. Yardımcı teorem 4.21 de verilen n(I) tanımlaması aynı şekilde, yani p veya q ile doğrudaş olmayıp tr(p,q) kümesinin elemanlarıyla doğrudaş olan noktaların sayısı olsun. $|I|>2$ olması yani $|tr(p,q)|>2$ olması, (p,q) ikilisi antiregüler olduğundan n(I)=0 olmasını gerektirir. Çünkü n(I)>0 olsaydı $\left|x^{\perp}\cap tr(p,q)\right| > 2$ olurdu ki bu durum (p,q) ikilisinin antiregüler olmasıyla çelişirdi. Yardımcı teorem 4.21 den;*

$$\sum_I (|I|-1)(|I|-(s+1))n(I)=0$$

$$\sum_{|I|\le 2} (|I|-1)(|I|-(s+1))n(I)=0$$

$$\sum_{|I|=0}(|I|-1)(|I|-(s+1))n(I)+\sum_{|I|=1}(|I|-1)(|I|-(s+1))n(I)+\sum_{|I|=2}(|I|-1)(|I|-(s+1))n(I)=0$$

$$(-1)(-s-1)n(\varnothing)+0.(1-s-1)n(1)+\sum_{|I|=2}1(2-s-1)n(I)=0$$

$$(s+1)n(\varnothing)+\sum_{|I|=2}(-s+1)n(I)=0$$

$$(s+1)n(\varnothing)=\sum_{|I|=2}(s-1)n(I)$$

$$(s+1)n(\varnothing) = (s-1)\sum_{|I|=2} n(I)$$

$$(s+1)n(\varnothing) = (s-1)\begin{pmatrix} s+1 \\ 2 \end{pmatrix}(s-1)$$

dir. Burada $\begin{pmatrix} s+1 \\ 2 \end{pmatrix}$*, I nın seçimlerinin sayısıdır ve her bir seçim için n(I) değeri yardımcı teorem 4.7 den p ve q noktaları hariç tutulduğundan s-1 dir. Böylece;*

$$(s+1)n(\varnothing) = (s-1)\frac{(s+1)s}{2}(s-1)$$

$$n(\varnothing) = \frac{(s-1)^2 s}{2}$$

elde edilir ve bu, (p,q,r) merkezsiz olacak şekilde seçilebilecek r noktalarının sayısına karşılık gelir. Dahası;

$$(s-1)\sum_{|I|=2} n(I) = (s-1)\begin{pmatrix} s+1 \\ 2 \end{pmatrix}(s-1)$$

$$\sum_{|I|=2} n(I) = (s-1)\begin{pmatrix} s+1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{|I|=2} n(I) = \frac{s^3-s}{2}$$

olduğundan (p,q,r) üçlüsü 2 merkezli olacak şekilde seçilebilecek r noktalarının sayısı $\frac{s^3-s}{2}$ *tanedir.Yukarıdaki son eşitlikte verilen* $\begin{pmatrix} s+1 \\ 2 \end{pmatrix}$*, I nın seçimlerinin sayısıdır. (s-1) de seçilen I nın iki noktası ile doğrudaş olacak şekilde seçilebilecek r noktalarının sayısıdır. Böylece;*

(p,q,r) üçlüsü merkezsiz olacak şekilde seçilebilecek r lerin sayısı $\frac{s(s-1)^2}{2}$
(p,q,r) üçlüsü iki merkezli olacak şekilde seçilebilecek r lerin sayısı $\frac{s^3-s}{2}$
dir. O halde (p,q,r) bir üçlü olacak şekilde seçilebilecek r noktalarının sayısı;

$$\frac{s(s-1)^2}{2}+\frac{s^3-s}{2} = \frac{s(s^2-2s+1)+s^3-s}{2} = \frac{s^3-2s^2+s+s^3-s}{2} = \frac{2s^3-2s^2}{2} = s^3-s^2$$

dir ki bu aynı zamanda r noktasının mümkün olan tüm seçimlerinin sayısıdır.

Sonuç 4.3 *Eğer (p,q,r) tek merkezli bir üçlü ise, o halde p,q ve r noktalarının herhangi ikisi antiregüler olmayan bir ikilidir.*

Yardımcı Teorem 4.23 $S = (P, L)$, *s ve t parametreli bir genelleştirilmiş dörtgen olsun.* $1 < s < t$ *ise hiç bir (p,q) ikilisi regüler değildir.(dolayısıyla hiç bir nokta regüler değildir)*

İspat *(p,q) ikilisinin regüler olduğu varsayılsın. Dolayısıyla* $|sp(p, q)| = t + 1$ *dir. sp(p,q) kümesinin noktalarını tr(p,q) nun noktalarıyla birleştiren doğruların üzerindeki noktaların sayısı hesap edilirse: uzayın her bir noktasından t+1 tane doğru geçtiğinden sp(p,q) nun noktalarından toplam (t+1)(t+1) tane doğru geçer. Her bir doğru (s+1) noktalı olduğundan bu doğruları üzerinde;*

$$(t + 1)(t + 1)(s + 1) - (t + 1)(t + 1) = (t + 1)(t + 1)s$$

tane nokta vardır. Ayrıca;

$$v = (s + 1)(st + 1) \geq (t + 1)(t + 1)s$$

olduğu aşikardır.

$$(s + 1)st + s + 1 \geq (t + 1)(st + s)$$
$$(st + 1)st + s + 1 \geq t(st + s) + st + s$$
$$(s + 1)st + 1 \geq st(t + 1) + st$$
$$s + 1 + \frac{1}{st} \geq t + 1 + 1$$
$$s + \frac{1}{st} \geq t + 1$$

bulunur ve bu eşitsizlik ancak $s = t = 1$ *ya da* $s > t$*,* $s > 1$ *iken sağlanır ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla* $1 < s < t$ *iken (p,q) ikilisi regüler olamaz.*

Yardımcı Teorem 4.24 $S = (P, L)$, *s ve t parametreli bir genelleştirilmiş dörtgen olsun.* $s = 1$ *veya* $s \geq t$ *iken (p,q) regülerdir* $\Leftrightarrow$ *her bir (p,q,r) üçlüsü ya 1 ya da t+1 merkezlidir.*

İspat $(\Rightarrow)$: *(p,q) regüler olsun. Ayrıca (p,q,r) üçlüsünün x ve y gibi en az iki tane merkezi olsun. (p,q) regüler olduğundan* $|sp(p, q)| = t + 1 = \left|\{tr(p, q)\}^{\perp}\right|$ *dir.* $x, y \in tr(p, q)$ *olduğundan* $|tr(x, y)| = t + 1$ *olur ki benzer şekilde bu t+1 noktaya doğrudaş olan yine t+1 nokta vardır. Yani* $|sp(x, y)| = t + 1$ *dir. Dolayısıyla (p,q,r) üçlüsü t+1 merkezlidir.*

$(\Leftarrow)$: *Her bir (p,q,r) üçlüsü 1 ya da t+1 merkezli olsun. Eğer* $t > 1$ *ise, tr(p,q) nun herhangi üç noktası x,y ve z olsun, (x,y,z) üçlüsü t+1 merkeze sahiptir.* $|sp(p, q)| = t + 1$ *olur. Dolayısıyla* $t > 1$ *iken (p,q) regülerdir. Eğer* $t = 1$ *ise, her noktadan 2 doğru geçtiğinden S bir griddir ve (p,q) ikilisinin regüler olduğu aşikardır. Her iki durumda da (p,q) ikilisi regüler olduğundan Yardımcı teorem 4.23 gereği* $s = 1$ *veya* $s \geq t$ *olması gerektiği aşikardır.*

4.3 s=t=3 parametreli Genelleştirilmiş Dörtgenler

Bu bölümün tamamında $S = (P, L)$ uzayının $s = t = 3$ parametreli, yani her noktasından 4 doğru geçen ve her doğrusu 4 noktalı olan bir genelleştirilmiş dörtgen olduğu varsayılacaktır. $s = t = 3$ parametreli bir genelleştirilmiş dörtgen, yardımcı teorem 4.8 gereği 40 doğrulu ve 40 noktalıdır. Bu bölümde verilecek olan bütün sonuçlar Payne'den (1975) alınmıştır.

Yardımcı Teorem 4.25 *Her bir nokta ikilisi ya regülerdir ya da antiregülerdir.*

İspat *Regüler ve antiregüler olmayan bir (p,q) ikilisi var olsun. (p,q) antiregüler olmadığından, tr(p,q) kümesinin en az 3 noktasıyla doğrudaş olan bir x noktası vardır. Yani (p,q,x) üçlüsü merkezlidir. Yardımcı teorem 4.24 gereği, (p,q) regüler olmadığından bu üçlü t+1=4 merkezli olamaz. Dolayısıyla x noktası tr(p,q) kümesinin tam olarak 3 noktası ile doğrudaştır.* $tr(p, q) = x_0, x_1, x_2, x_3$ *ve* $x \sim x_0$,x_1,x_2 *olsun.* xx_0, xx_1 *ve* xx_2 *doğruları x noktasından geçen 3 farklı doğrudur. x den geçen bu doğrular* px_3 *ve* qx_3 *doğruları ile kesişmediğinden x den geçen 4. doğru ile* px_3 *ve* qx_3 *doğruları birer noktada kesişmelidir. Ve bu nokta (GD-1)* x_3 *noktası olmalıdır. Bu durumda (p,q,x) üçlüsü 4 merkezli olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla regüler ve antiregüler olmayan bir (p,q) ikilisi yoktur.*

Yardımcı Teorem 4.26 *(p,q,r) herhangi bir üçlü ise bu takdirde;*

(i) Eğer (p,q,r) 1 veya 4 merkezli ise p,q,r noktalarının herhangi ikisi regülerdir.
(ii) Eğer (p,q,r) 0 veya 2 merkezli ise p,q,r nin herhangi ikisi antiregülerdir.
(iii) 3 merkezli bir üçlü yoktur.
(iv) (p,q,r) nin tüm ikilileri ya regülerdir ya da antiregülerdir.

İspat *(iii) Yardımcı teorem 4.25'in ispatından aşikardır.*

(i) Eğer (p,q,r) 1 merkeze sahipse p,q,r nin herhangi ikisi regülerdir.(Sonuç 4.3 ve yardımcı teorem 4.25). Eğer (p,q,r) 4 merkeze sahipse antiregüler ikili yoktur. Dolayısıyla ikililerin tamamı yardımcı teorem 4.25'ten dolayı regülerdir.

(ii) Eğer (p,q,r) 0 veya 2 merkeze sahipse yardımcı teorem 4.24 gereği her bir ikili antiregülerdir.

(iv) i, ii ve iii den aşikardır.

Yardımcı Teorem 4.27 *Tüm nokta ikilileri regülerdir ya da tüm doğrudaş olmayan noktaların oluşturduğu ikililer antiregülerdir.*

İspat *Doğrudaş olmayan nokta ikililerinden bazıları antiregüler olmasın. Yardımcı teorem 4.25 gereği herhangi bir ikili antiregüler değilse regülerdir. Yani* $p \nsim q$ *olacak şekilde bazı (p,q) regüler ikilileri vardır. x ve y,* $\{x, y\} \neq \{p, q\}$ *olacak şekilde herhangi farklı iki nokta olsun.* $x \sim y$ *ise (x,y) ikilisinin regüler olduğu açıktır. Eğer (p,q,x) bir üçlü ise yardımcı teorem 4.26-(iv) gereği (p,q) regüler olduğundan (x,p) regülerdir. Eğer (x,p,y) bir üçlü ise yine yardımcı teorem 4.26-(iv) gereği (x,y) regülerdir. Yardımcı teorem 4.19 gereği* (p, q) *regüler olduğundan* $x, y \in tr(p, q)$ *ise (x,y) ikilileri regülerdir.* $\{x, y\} \nsubseteq tr(p, q)$ *olduğunu varsayabiliriz.*

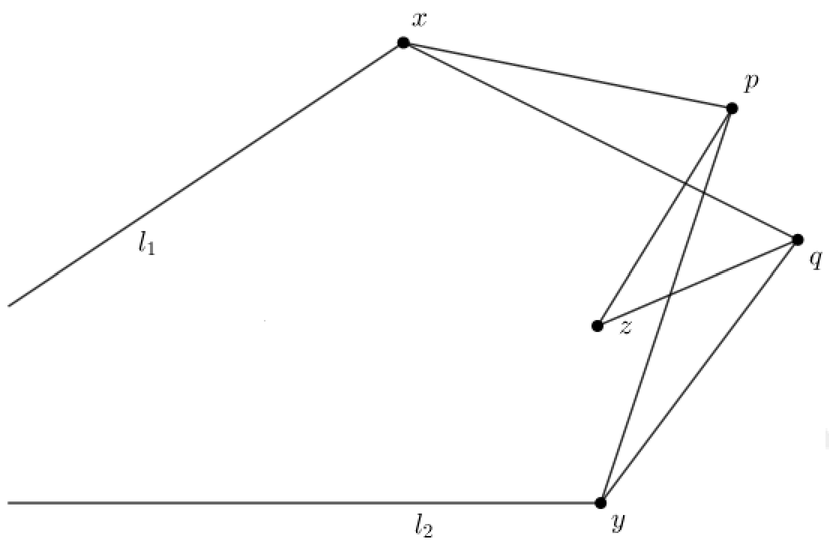
$x \nsim y$ *olsun. x ve y noktalarından birinin, x i ele alalım, p ve q nun her ikisiyle doğrudaş olduğunu ya da* $x \sim p$ *ve* $y \sim q$ *olduğunu varsayalım. Her iki durumda da p,q,x,y noktalarıyla doğrudaş olmayan bir w noktası vardır. Bu w noktasının varlığı p,q,x ve y noktalarından geçen doğruların üzerindeki noktaları sayarak kanıtlanabilir öyle ki:*

Toplamda 40 tane noktanın var olduğu bilinmektedir. p ile doğrudaş olan 13 tane nokta(p dahil) vardır. Bu 13 noktanın 4 tanesi (GD-1) gereği q ile zaten doğrudaştır. Yani q noktası ile doğrudaş olan 9 tane nokta daha vardır. Eğer x noktası hem p hem de q ile doğrudaş ise, x den geçen xp ve xq doğrularından başka 2 doğru daha vardır. Bu doğruların üzerinde 6 yeni nokta daha tanımlanır. Son olarak y noktası, p ve q dan geçen her bir doğrunun bir noktasıyla doğrudaştır, en fazla 10 yeni nokta daha eklenebilir. Bu durumda 40 noktanın en fazla 38 tanesi bulunmuş olur. Eğer x noktası p ile, y noktası da q ile doğrudaş ise, x üzerindeki her bir doğru, y den geçen her bir doğruyla bir noktada kesişir ve en fazla 14 nokta daha tanımlayabiliriz. Bu durumda da 40 noktanın en fazla 36 tanesi bulunmuş olur. Her iki durumda da p, q, x ve y noktalarıyla doğrudaş olmayan bir w noktasının varlığı kanıtlanmış olur.

Şimdi (p,q,w) bir üçlü ve (p,q) regüler olduğundan yardımcı teorem 4.26(iv) gereği (q,w) regülerdir. (q,w,x) bir üçlü ve (q,w) regüler olduğundan (w,x) ikilisi de regülerdir. (w,x,y) bir üçlü ve (w,x) regüler olduğundan benzer şekilde (x,y) ikilisi de regülerdir. Böylece doğrudaş olmayan nokta ikililerinden bazıları antiregüler değilse, tüm nokta ikililerinin regüler olduğu gösterilmiş olur.

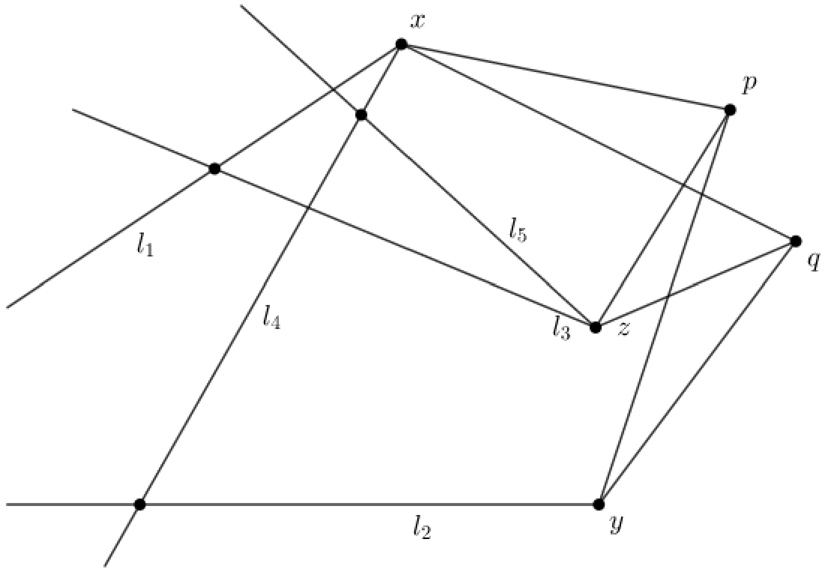
Yardımcı Teorem 4.28 *s=t=3 parametreli bir genelleştirilmiş dörtgende doğrudaş olmayan noktaların ikililerinin tamamı antiregüler ve doğru ikililerinin tamamı regülerdir veya bunun gibi bir dörtgenin dualidir.*

İspat *Yardımcı teorem 4.27 gereği doğrudaş olmayan nokta ikililerinin tamamının antiregüler olduğu kabul edilebilir. Tüm doğru ikililerinin regüler olduğu gösterilmedilir.* l_1 *ve* l_2 *herhangi iki doğru olsun.* $l_1 \cap l_2 \neq \varnothing$ *ise* $|sp(l_1, l_2)| = t + 1$ *olduğu aşikardır. Yani* (l_1, l_2) *ikilisi regülerdir.* $l_1 \cap l_2 = \varnothing$ *ve* $x \in l_1$ *,* $y \in l_2$ *olsun.* $x \nsim y$ *olduğundan yardımcı teorem 4.16(a) gereği* $|tr(x, y)| = t + 1 = 4$ *dir. Dolayısıyla* $tr(x, y) - (l_1 \cup l_2)$ *nin p ve q gibi iki farklı noktasını seçebiliriz. Şimdi* $z \in tr(p, q)$*,* $z \neq x$*,* y *noktasını ele alalım.* $z \notin l_1, l_2$ *olduğu açıktır. O halde (x,y,z) üçlüsü merkezli üçlüdür ve doğrudaş olmayan nokta ikililerinin tümü antiregüler olduğundan yardımcı teorem 4.26 gereği (x,y,z) üçlüsü tam olarak 2 merkeze sahiptir. Bunlar p ve q dur. (Şekil 4.15)*



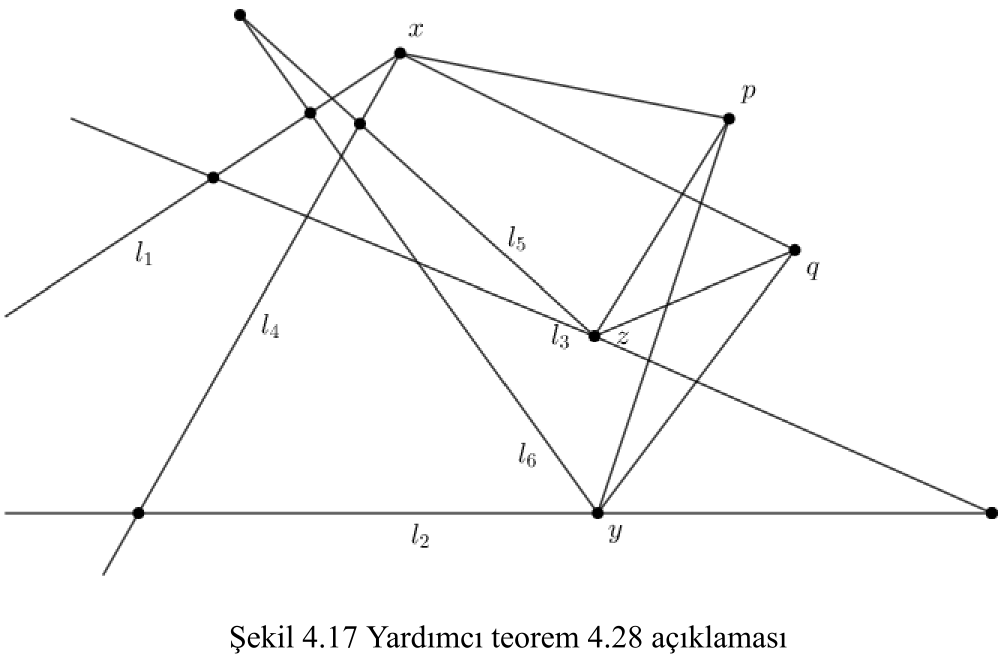
Şekil 4.15 Yardımcı teorem 4.28 açıklaması

z noktasından geçen, l_1 *doğrusu kesen doğru* l_3 *olsun.* l_4 *ise x den geçen ve* l_2 *yi kesen doğru olsun.* l_5 *ise z den geçip* l_4 *ü kesen doğru olsun.* $l_5 \neq l_3$*,* zp*,* zq *olduğu açıktır çünkü eğer* l_5 *doğrusu bunlardan biri olsaydı, üçgen oluşurdu. Ayrıca (x,y,z) üçlüsü tam olarak 2 merkezli olduğundan,* l_5 *doğrusu ile* l_4 *doğrusunun kesiştikleri noktanın* $l_2 \cap l_4$ *noktası olmadığı açıktır.(Şekil 4.16)*



Şekil 4.16 Yardımcı teorem 4.28 açıklaması

Son olarak y den geçip l_5 i kesen doğru l_6 olsun. Bu l_6 doğrusu l_2, yp ve yq dan farklıdır şayet bunlardan biri ile aynı olsaydı yine benzer şekilde üçgen oluşurdu. l_6 doğrusu ayrıca y den geçip l_1 i kesen doğrudur. Dahası z noktasını l_2 doğrusu ile birleştiren doğru l_5, zp, zq doğruları olamaz çünkü üçgen oluşur. O halde z noktasını l_2 doğrusu ile birleştiren doğru l_3 doğrusudur.(Şekil 4.17)



Şekil 4.17 Yardımcı teorem 4.28 açıklaması

Yani (l_1, l_2, l_5) üçlüsü, merkezi l_3, l_4 ve l_6 olan doğruların bir üçlüsüdür. Bu durumda yardımcı teorem 4.27, üçlünün 4 merkezli olmasını gerektirir ve (l_1, l_2) ikilisi regülerdir.

4.4 Alt Dörtgenler

Tanım 4.9 *$S' = (P', L')$ bir yaklaşık lineer uzay ve $S = (P, L)$ bir genelleştirilmiş dörtgen olsun. Eğer $S' = (P', L')$ uzayı, S nin bir kısıtlaması ve kendisi de bir genelleştirilmiş dörtgen ise S' uzayına S nin bir "alt dörtgeni" denir.*

Eğer $S' \neq S$ ise S' uzayına S nin öz alt dörtgeni denir. S ve S', sırasıyla s, t ve s', t' parametreli genelleştirilmiş dörtgen olsunlar. $s = s'$ ise $L' \subseteq L$ dir.

Örnek 4.6 $S = (P, L)$, doğruları $s_1 + 1$ ve $s_2 + 1$ noktalı bir grid olsun. O halde S, doğruları $s'_1 + 1$ ve $s'_2 + 1$ noktalı, $1 \leq s'_1 \leq s_1$, $1 \leq s'_2 \leq s_2$ olan ve kendisi de grid olan bir alt dörtgen ihtiva eder.

Dual olarak; bir gridin duali olan genelleştirilmiş dörtgenin, ki bu dual griddir, daima $s = s' = 1$ ve $1 \leq t'_1 \leq t_1$, $1 \leq t'_2 \leq t_2$ parametreli bir alt dörtgeni vardır.

Şimdi, bu bölümdeki teorem ve yardımcı teoremlerin ispatında kullanılacak olan bir eşitsizlik verilecektir.

Yardımcı Teorem 4.29 *t_1, t_2, ... , t_d reel sayılar ve d, pozitif bir tam sayı olsun. Bu takdirde;*

$$d \sum_i^d t_i^2 \geq \left(\sum_i^d t_i \right)^2$$

dir.

İspat $\bar{t} = \dfrac{\sum_i^d t_i}{d}$ *olsun. O halde;*

$$0 \leq \sum_i^d \left(\bar{t} - t_i \right)^2 = \sum_i^d \left(\bar{t}^2 - 2 \bar{t} \, t_i + t_i^2 \right)$$

$$0 \leq d \, \bar{t}^2 - 2 \bar{t} \sum_i^d t_i + \sum_i^d t_i^2$$

$$0 \leq \frac{\left(\sum_i^d t_i\right)^2}{d} - 2\frac{\left(\sum_i^d t_i\right)^2}{d} + \sum_i^d t_i^2$$

olur ki buradan,

$$d\sum_i^d t_i^2 \geq \left(\sum_i^d t_i\right)^2$$

elde edilir.

Sıradaki teoremin sonucunu ilk olarak Higman(1971), bunun ispatını ise P.Cameron(1974) vermiştir.

Teorem 4.3 *$S = (P, L)$, s ve t parametreli bir genelleştirilmiş dörtgen olsun. Eğer s>1 ise $t \leq s^2$ dir. Dual olarak eğer t>1 ise $s \leq t^2$ dir.*

İspat *p ve q doğrudaş olmayan iki nokta olsun. p veya q ile doğrudaş olmayan noktaların kümesi ise X olsun. p noktası ile doğrudaş olan p hariç (t+1)s tane nokta, q ile doğrudaş olan q hariç (t+1)s nokta vardır. Bunlardan (t+1) tanesi her ikisi ile de doğrudaştır(yardımcı teorem 4.7). O halde $X = \{x|p \nsim x, q \nsim x\}$ kümesinin eleman sayısı;*

$$|X| = v - 2 - 2(t+1)s + (t+1) = (s+1)(st+1) - 2 - (2s-1)(t+1)$$

dir. Her bir x_i için $t_i = |\{y|y \sim p, q, x_i\}|$, $1 \leq i \leq |X| = d$ olsun.

Şimdi (x_i, y), $x_i \in X$, $y \sim$ p, q, x_i, ikililerinin sayısını bulalım. p veya q dan geçen doğruların üzerinde bulunmayan fakat $tr(p, q)$ elemanlarıyla doğrudaş noktaların sayısı;

$$\sum_i t_i = (t+1)(t-1)s \tag{4.4}$$

dir. Burada $(t-1)$, y den geçen fakat p veya q dan geçmeyen doğruların sayısı, s, bu doğruların her birinde bulunan y haricindeki noktaların sayısı ve $(t+1)$, y noktasının farklı seçimlerinin sayısıdır.

Şimdi de, y', y için az önce tanımlanan koşulları sağlayan $y \neq y'$ şeklinde bir nokta olmak üzere (x_i, y, y') üçlülerinin sayısını iki farklı yoldan hesaplayalım. İlk yol, $y \neq y'$ olduğundan $\sum_i t_i(t_i - 1)$ tanedir. İkinci yoldan, y ve y' noktalarının farklı seçimlerinin sayısı (t+1)t tanedir. y den geçen t+1 tane doğru olduğundan ve bunlardan ikisi yp ile yq doğrusu olduğundan, y' noktası, bu t-1 tane doğrunun birer noktası ile doğrudaştır. Yani;

$$\sum_i t_i(t_i - 1) = (t+1)t(t-1) \tag{4.5}$$

elde edilir. (4.4) ve (4.5) eşitlikleri bir araya getirilirse;

$$\sum_i t_i^2 = (t+1)(t-1)(s+t)$$

bulunur. Yardımcı teorem 4.29 gereği $d\sum_i^d t_i^2 \geq \left(\sum_i^d t_i\right)^2$ *olduğundan;*

$$d\sum_i t_i^2 = d(t+1)(t-1)(s+t) \geq \left(\sum_i t_i\right)^2 = (t+1)^2(t-1)^2 s^s$$

$$d(s+t) \geq (t+1)(t-1)s^2$$

veya

$$d(s+t) \geq (t^2-1)s^2$$

dir. Sonuç olarak $t(s-1)(s^2-t) \geq 0$ *veya* $s^2 \geq t$ *dir.*

Teorem 4.4 $S = (P, L)$ *ve* $S' = (P', L')$*, sırasıyla* s, t *ve* s', t' *parametreli birer genelleştirilmiş dörtgen ve* S'*, S nin bir alt dörtgeni olsun.* $s = s'$ *veya* $s \geq s't'$ *dür. Dual olarak* $t = t'$ *veya* $t \geq s't'$ *dür.*

İspat $X = \{x \in P - P' | x \notin l', l' \in L'\}$ *olsun.* $d = |X|$ *değerini hesaplayalım.* $P - P'$ *kümesinin noktalarının sayısı;*

$$v - v' = (s+1)(st+1) - (s'+1)(s't'+1)$$

dir. Bu noktalardan L' *nün doğruları üzerinde olanların sayısı;*

$$b'(s+1-(s'+1)) = (t'+1)(s't'+1)(s-s')$$

bulunur. Yani;

$$d = (s+1)(st+1) - (s'+1)(s't'+1) - (t'+1)(s't'+1)(s-s') \geq 0$$

dır. Eğer $t = t'$ *ise;*

$$s^2t + s + st + 1 - (s'^2t + s' + s't' + 1) - (ss't^2 + st + ss't + s - s'^2t^2 - s't - s'^2t - s') \geq 0$$

$$s^2t - ss't^2 - ss't + s'^2t^2 \geq 0$$

$$t(s - s't)(s - s') \geq 0$$

bulunur ki $s \geq s't'$ *veya* $s = s'$ *dir.*

$t > t'$ olsun. $x_i \in X$, $z \in P'$ ve $x_i \sim z$ olacak şekilde x_i, z nokta ikililerini sayalım. z, $v' = (s'+1)(s't'+1)$ farklı şekilde seçilebilir. z ile doğrudaş olacak şekilde seçilebilecek x_i noktaları için $(t-t')s$ farklı seçim vardır. t_i, x_i ile doğrudaş olan P' kümesinin noktalarının sayısı olsun;

$$\sum_i t_i = (s'+1)(s't'+1)(t-t')s \tag{4.6}$$

Şimdi $x_i \in X$, $z,z' \in P'$, $x \sim z,z'$ ve $z \nsim z'$ olacak şekilde (x_i, z, z') üçlülerini sayalım. z için $(s'+1)(s't'+1)$ seçenek var. z' için ise $(s'+1)(s't'+1) - (s't'+s'+1) = s'^2t'$ seçenek var. x_i için ise $(t-t')$ seçenek var. Yani;

$$\sum_i t_i(t_i - 1) = (s'+1)(s't'+1)s'^2t'(t-t') \tag{4.7}$$

(4.6) ve (4.7) eşitlikleri toplanırsa;

$$\sum_i t_i^2 = (s'+1)(s't'+1)(t-t')(s'^2t'+s)$$

Yardımcı teorem 4.29 gereği $d\sum_i^d t_i^2 \geq \left(\sum_i^d t_i\right)^2$ idi. Yukarıda bulunan d yerine yazılırsa;

$$(s'+1)(s't'+1)(t-t')(s-s')(s-s't')(st+s'^2t'^2) \geq 0$$

elde edilir ki $t > t'$ olduğundan $s = s'$ veya $s - s't' \geq 0$ bulunur.

Bundan sonra verilecek yardımcı teoremlerde $S = (P, L)$ uzayı s ve t parametreli, $S' = (P', L')$ uzayı ise s ve t' parametreli olarak alınacaktır.

Yardımcı Teorem 4.30 *S', S nin bir öz alt dörtgeni olsun. O halde $t \geq s$ dir. $s = t$ ise $t' = 1$ dir.*

İspat *$t' < t$ olduğu varsayılsın.*

Eğer $t < s$ ise teorem 4.4 gereği $tt' < st' \leq t$ dir. Buradan $t' < 1$ olur ki bu bir çelişkidir.

Eğer $t = s$ ise yine teorem 4.4 gereği $t \geq st'$ dir ki $1 \geq t'$ olur. Yani $1 = t'$ dir.

Yardımcı Teorem 4.31 *S', S nin bir özalt dörtgeni olsun. Eğer $s > 1$ ise $t' \leq s$ dir. $t' = s$ ise $t = s^2$ dir.*

İspat *Eğer $t = 1$ ise $t' \leq t$ olması $t' = 1 \leq s$ olmasını gerektirir.*

Eğer $t > 1$ ise teorem 4.4 ve teorem 4.3 den $st' \leq t \leq s^2$ yani $t' \leq s$ dir.

$s > 1$ ve $t' = s$ olduğu varsayılsın. Yani $1 < t' \leq t$ ve teorem 4.3 den $t \leq s^2$ dir. Fakat teorem 4.4 gereği $t' < t$ olduğundan $t \geq s^2$ dir. O halde $t = s^2$ elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.32 *S', S nin bir özalt dörtgeni olsun. O halde $s > 1$ ve $t' > 1$ ise $s^{\frac{1}{2}} \leq t' \leq s$ ve $s^{\frac{3}{2}} \leq t \leq s^2$ dir.*

İspat *S' ne teorem 4.3 uygulanırsa $s \leq t'^2$ yani $s^{\frac{1}{2}} \leq t'$ elde edilir. Yardımcı teorem 4.31 $t' \leq s$ olduğunu söyler. O halde teorem 4.4 den $s^{\frac{1}{2}} \leq t'$ olması $s^{\frac{3}{2}} \leq st' \leq t$ olmasını gerektirir. Son olarak teorem 4.3 den $t \leq s^2$ bulunur.*

Yardımcı Teorem 4.33 *S', S nin bir öz alt dörtgeni, S'' de S' nün s ve t'' parametreli bir öz alt dörtgeni olsun. O halde $t'' = 1$, $t' = s$ ve $t = s^2$ dir.*

İspat *Eğer $t'' > 1$ ise yardımcı teorem 4.32 yi iki kere uygularsak $s^{\frac{3}{2}} \leq t' \leq s^2$ ve $s^{\frac{1}{2}} \leq t' \leq s$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $t'' = 1$ dir. O halde $t > 1$ olduğu varsayılabilir.*

Teorem 4.4 gereği $t' \geq s$ dir. Yardımcı teorem 4.31 gereği $t' \leq s$ dir. Yani $t' = s$ dir. Tekrar yardımcı teorem 4.31 gereği $t = s^2$ dir.

Bu son yardımcı teorem, her doğrusundaki nokta sayısı aynı kalan ve $s > 1$ olan $S \supsetneq S' \supsetneq S''$... şeklindeki herhangi bir öz alt dörtgenlerin zincirin en fazla 3 elemana sahip olduğunu söyler. Bu durum $s = 1$ iken doğru değildir. Örneğin $s = 1$ ve her noktasından $t+1$ doğru geçen bir uzay(dual grid) ele alınırsa, bu uzayın, parametreleri $s = 1$, $t = 1$ oluncaya kadar küçültülebilen $S \supsetneq S' \supsetneq S''$... şeklinde $t - 1$ tane elemana sahip bir zinciri üretilebilir.

Sıradaki teorem, s ve t parametreli bir $S = (P, L)$ genelleştirilmiş dörtgeninin alt kümesinin ne zaman s parametreli bir alt dörtgen belirttiğine karar vermek için bize bir metot gösterir.

Teorem 4.5 *$S = (P, L)$, s ve t parametreli bir genelleştirilmiş dörtgen olsun. $P' \subseteq P$ ve $L' \subseteq L$ olacak şekilde bir $S' = (P', L')$ olsun. Ayrıca;*

(i) $p, q \in P'$, $p \neq q$ ve $p, q \in l \in L$ ise $l \in L'$,

(ii) $\forall l' \in L'$ için l', P' nün $s+1$ elemanını ihtiva eder.

koşulları sağlansın. O halde aşağıdakilerden biri sağlanır;

(a) P', p ile doğrudaş olan P nin noktalarının bir kümesi iken L' nün tüm doğruları p den geçer.

(b) $L' = \varnothing$

(c) S', S nin s ve t' parametreli bir alt dörtgenidir.

İspat *(a), (b) ve (c) nin, (i) ve (ii) şartlarını sağladığı kolayca görülür. $S = (P, L)$ uzayının (i) ve (ii) şartlarını sağlarken (a) ve (b) tipinde değil ise (c) tipinde olduğunu göstermeliyiz. Yani $P' \neq \varnothing \neq L'$ olsun.*

S' için (GD-3) sağlanır. $p' \in P'$ noktası $l' \in L'$ doğrusun üzerinde olmasın. S de $l \in L' \subseteq L$ olduğundan ve (GD-1) gereği p' noktasını l' doğrusunun bir $p \in P$ noktasında birleştiren bir tek $l \in L$ vardır. (ii) şartı, her $l' \in L'$ doğrusu üzerinde P' nün $s+1$ noktasını bulundurduğunu söylediğinden $p \in P'$ dür. (i) den dolayı $l \in L'$ dür. Yani S' uzayında (GD-1) sağlanır.

Teorem 4.1 ve (ii). koşuldan dolayı, S' nün s ve t' parametreli bir genelleştirilmiş dörtgen olduğunu göstermek için belli bir $t' \geq 1$ için S' nün her bir noktasından $t' + 1$ tane doğru geçtiğini göstermek yeterli olacaktır.

$p' \in P'$ noktası, üzerinden L' nün en az bir doğrusunun geçtiği bir nokta olsun. (b) tipinde olmadığını kabul ettiğimizden p' vardır. (a) tipinde de olmadığı kabul edildiğinden p' noktası ile doğrudaş olmayan bir q' noktası vardır. l', p' noktasından geçen herhangi bir doğru olsun. S' de (GD-1) gereği L' nün, q' den geçen ve l' nü kesen bir tek doğrusu vardır. Buna l'' densin. p' noktasından geçen doğrular ile q' noktasından geçen doğrular arasında bu şekilde birebir eşleme kurulabilir. Böylece p' ve q' noktalarından S' nün eşit sayıda doğrusu geçer. $t' + 1$ tane doğru geçtiği farzedilsin, $t' \geq 0$.

Eğer x', P' nün $x' \sim p'$ fakat $x' \nsim q'$ olan herhangi bir noktası ise yukarıdaki gibi x' ve q', dolayısıyla x' ve p', $t' + 1$ doğru üzerindedir. Son olarak $x' \sim p', q'$ olacak şekilde bir x' noktasını ele alalım. Eğer $t' = 0$ ise L' nün her doğrusun x' noktasından geçtiğini iddaa edebiliriz. Yani S', (a) tipinde olur ki bu bir çelişkidir. Bunun neden olduğunu görmek kolaydır çünkü, L'nün herhangi $l' \neq p'x'$, $q'x'$ doğrusu için (GD-1) gereği p'(veya q'), l yi kesen bir doğru üzerindedir. Ama $t' = 0$ olması, tek seçenek olan $x' \in l'$ olmasını gerektirir.

$t' \geq 1$ olsun. Ve yine $x' \sim p', q'$ olsun. l', p' den geçen $x'p'$ den farklı bir doğru olsun. (GD-1) den, q' noktası l' doğrusunun bir tek noktasıyla doğrudaştır. Ama $s > 1$ olması, $y' \nsim q'$ olacak şekilde bir $y' \in l'$ noktasının varlığını gerektirir. (GD-1) ayrıca $y' \nsim x'$ olmasını gerektirir. Şimdi, az önce p' ve q' için yapılan gibi q' ve y' nü ele alalım. q' ve y' den aynı sayıda doğru geçer. Benzer olarak y' ve x' nü ele alırsak yine y' ve x' den de aynı sayıda doğru geçer. Böylece p' ve x' den de aynı sayıda doğru geçer.

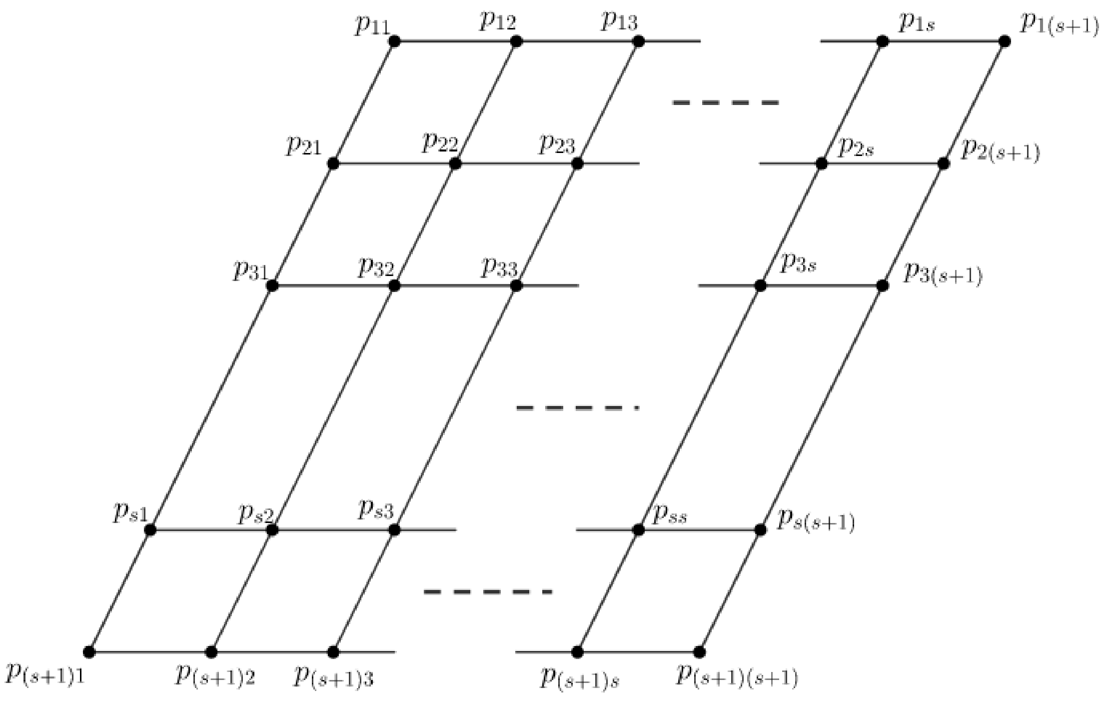
4.5 Genelleştirilmiş Dörtgenlerin Kolinasyonları

f, $S = (P, L)$ genelleştirilmiş dörtgeninin bir kolinasyonu olsun.

$$P_f = \{p \in P | f(p) = p\}$$

kümesi tanımlansın. S uzayının P_f kümesine kısıtlaması $S_f = (P_f, L_f)$ uzayı olsun. Bu bölüm, S_f yapısının mümkün olan durumlarının araştırılması ile ilgilidir ve Batten (1986) kaynağından özetlenerek hazırlanmıştır.

Örnek 4.7 $S = (P, L)$, $s \geq 3$ ve $t = 1$ parametreli bir grid olsun. $1 \leq i, j \leq s + 1$ olmak üzere p_{ij} noktaları, her bir i için $\{p_{ij} | 1 \leq j \leq s + 1\}$ ve her bir j için $\{p_{ij} | 1 \leq i \leq s + 1\}$ bir doğru olacak şekilde tanımlansın.(Şekil 4.18)



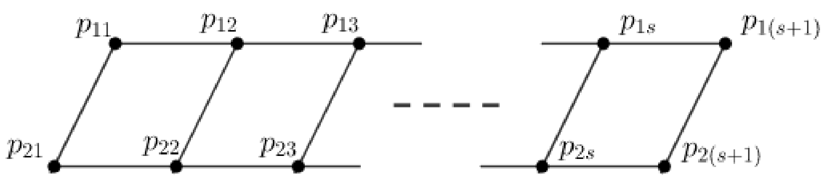
Şekil 4.18 (s+1)(s+1) noktalı grid

f kolinasyonu;

$1 \leq j \leq s+1$ için $f(p_{1j}) = p_{1j}$, $f(p_{2j}) = p_{2j}$ ve $f(p_{(s+1)j}) = p_{3j}$,

$3 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq s+1$ için $f(p_{ij}) = p_{(i+1)j}$ olarak tanımlansın.

$\{p_{ij} | 1 \leq j \leq s+1\}$ doğruları $i = 1$ ve $i = 2$ için her bir noktasıyla beraber sabit kalmıştır. Şekle göre yatay konumda olan diğer doğrular ise yer değiştirmişlerdir. Şekle göre dikey konumda olan doğrular ise sabit kalmışlardır fakat doğruların iki noktaları hariç diğer noktaları yer değiştirmiştir. Böylece S_f kısıtlaması, ilk iki yatay doğru ile verilen 2 x $(s+1)$ griddir. (Şekil 4.19)

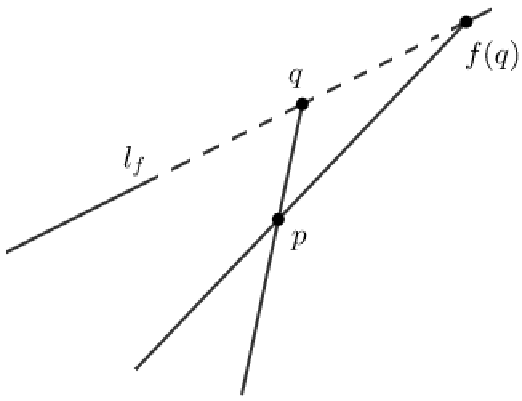


Şekil 4.19 2(s+1) noktalı grid

Teorem 4.6 *f, $S = (P, L)$ genelleştirilmiş dörtgeninin bir kolinasyonu olsun. S_f, S nin f kolinasyonunun sabit noktalarına kısıtlaması olsun. Bu durumda aşağıdakilerden biri sağlanır;*

(i) S_f bir genelleştirilmiş dörtgendir.
(ii) S_f herhangi ikisi doğrudaş olmayan noktaların bir kümesidir.
(iii) S_f herhangi ikisi kesişmeyen doğruların bir kümesidir.
(iv) S_f ortak bir noktada kesişen doğruların bir kümesidir.

İspat *l_f, l doğrusunun f ye kısıtlaması olsun. S_f nin bir doğrusu l_f ve l_f doğrusu üzerinde olmayan bir noktası p olsun. p noktası l_f doğrusu üzerinde olmadığından l doğrusu üzerinde de değildir. (GD-1) gereği S uzayında p den geçen ve l yi bir $q \in l$ noktasında kesen bir doğru vardır. Eğer $f(q) \neq q$ ise, $f(q) \in l$ ve $f(p) = p$ olduğundan p noktasından geçen ve l yi kesen ikinci bir doğru vardır ki bu bir çelişkidir. (Şekil 4.20)*



Şekil 4.20 Teorem 4.6 açıklaması

Yani $f(q) = q$ olmalıdır. Dolayısıyla $q \in l_f$ dir ve bundan dolayı $(pq)_f$ noktalarının kümesi, S_f de bir doğru belirtir. Yani S_f, (GD-1) şartını sağlar.

5. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölüme kadar sırasıyla, çalışmada kullanılan ve bilinmesi gerekli olan bazı temel kavramlar ve bunların tanımları verilmiştir. Sonrasında, daha önce yapılan çalışmalarda ortaya konan ve aksiyomatik yapılardan biri olan yaklaşık lineer uzayların tanımlaması verilmiş, bu uzaylar ile aralarında sıkı ilişkiler bulunan dual uzay, alt uzay, bağlantı sayısı ve lineer fonksiyonlar gibi bazı tanımlamalara yer verilmiştir. Yaklaşık lineer uzayların bu kavramlar ile ilişkilerini açıklamaya yönelik verilmiş olan örnekler detaylandırılmıştır.

Temel kavramlar başlığı altında, yaklaşık lineer uzay ve özelliklerinden bahsedildikten sonra, yaklaşık lineer uzayların üzerine kurulan genelleştirilmiş dörtgenlerin tanımlaması verilmiştir. J.J. Sylvester tarafından ortaya konan "Duad-Sintem geometrisi" ile Payne tarafından "Doily" olarak adlandırılan modelin, birbirlerine izomorfizm farkıyla eşit oldukları gösterilmiştir. $S = (P, L)$ *genelleştirilmiş dörtgeninin kombinatöryel özellikleri,* S *uzayının bir grid, dual grid ve* s, t *parametreli bir genelleştirilmiş dörtgen olması durumları için ayrı ayrı detaylı bir şekilde incelenmiştir. Son olarak genelleştirilmiş dörtgenlerin alt dörtgenleri ile genelleştirilmiş dörtgenlerin kolinasyonları konuları ele alınmıştır.*

3 ya da daha yüksek boyutlu sonlu geometriler üzerinde genelleştirilmiş dörtgenlerin nasıl tanımlanabileceği ve ne gibi özelliklere sahip oldukları, incelenmesi gereken önemli bir konudur. Ayrıca graflar ile genelleştirilmiş dörtgenler kullanılarak genelleştirilmiş dörtgensel graflar incelenebilir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Sonuç olarak bu tez çalışmasında, yaklaşık lineer uzayın üzerine kurulan genelleştirilmiş dörtgenler, aksiyomatik sistemde belirtilen şartlar ile irdelenmiştir. Bazı sonlu geometrik yapılardan bahsedilerek, bu yapılardan biri olan genelleştirilmiş dörtgenlerin nasıl ortaya çıktıklarına, diğer yapılar ile aralarındaki ilişkilere ve ne gibi kombinatöryel özelliklere sahip olduklarına dair bilgilere yer verilmiştir. Genelleştirilmiş dörtgenlerin alt dörtgenleri ve kolinasyonları üzerine bazı önemli sonuçlar verilmiştir. Genelleştirilmiş dörtgenler ile graf teorisi arasındaki ilişkiler, detaylı bir şekilde incelenmesi ve geliştirilmesi gereken bir alandır. Bu konuda çalışmalarımız devam etmektedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Ahrens, R. and Szekeres, G., 1969, On a combinatorial generalization of 27 lines associated with a cubic surface, J. Austral. Math. Soc. 10, 485-92.

Batten, L.M., 1986, Combinatorics of finite geometries, Cambridge University Press.

Bose, R. C., 1963, Strongly regular graphs, partial geometries, and partially balanced desings, Pacif. J. Math. 13, 389-419.

Buekenhout, F., Doignon, J.-P. ,1978, Géométrie projective. Université Libre de Bruxelles, Unpublished lecture notes.

Cameron, P., 1974, Partial quadrangles, Q. J. Math. Oxford (3) 25, 1-13.

Dembowski, P., 1968, Finite geometries, Springer-Verlag, New York.

Hall, M., 1943, Projective Planes, Trans. Am. Math. Soc. 54, 297-77; and correction, 1949, 65, 473-4.

Hall, M., 1971, Affine generalized quadrilaterals, Studies in Pure Mathematics.(ed. L. Mirsky), Academic Press, pp.113-16

Higman, D., 1971, Partial geometries, generalized quadrangles and strongly reguler graphs, Atti del Convegno di Geometria Combinatoria e sua Applicazioni, Perugia, pp. 265-93.

Kantor, W. M., 1980, Generalized quadrangles associated with $G_2(q)$, *J. Comb. Theory(A) 29, 212-19.*

Payne, S. E., 1972, Quadrangles of order (s-1,s+1), J. Algebra 22,97-119.

Payne, S. E., 1974, Generalized quadrangles of even order, J. Algebra 31, 367-91.

Payne, S. E., 1975, All generalized quadrangles of order 3 are known, J. Comb Theory (A) 18, 203-6.

Payne, S. E., Thas, J.A., 1984, Finite Generalized Quadrangles, Pitman Press, Boston, 79p.

Peil, T., 2006, Survey of Geometry, http://web.mnstate.edu/peil/geometry/

Polster, B., 1998, A geometrical picture book, Springer-Verlag, p.41.

Sylvester, J. J., 1861, 1884, Collected Papers I and II, Cambridge University Press.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Tallini, G., 1971, Ruled graphic systems, Atti del Convegno di Geometria Combinatoria e sue Applicazioni, Perugia, pp.403-11.

Thas, J. A., 1975, 4-gonal configurations with parameters $r = q^2 + 1$ ve $k = q + 1$, Geom. Ded. 4, 51-9.

Thas, J. A., 1977, Combinatorial characterizations of the classical generalized quadrangles. Geom. Ded. 6, 339-51.

Thas, J. A., 1978, Combinatorial characterizations of generalized quadrangles with parameters $s = q$ ve $t = q^2$, Geom. Ded. 7, 223-32.

Thas, J. A., 1979, Generalized quadrangles satisfying at least one of the Moufang conditions, Simon Stevin. 53, 151-62.

Tits, J. (1959) Sur la trialité et certain groups qui s'en déduisent. Publ. Math. IHES Paris 2, 16-60.

Tits, J. (1974) Buildings of Spherical Type and Finite BN-pairs, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.

Walker, M., 1977, On the structure of finite collineation groups containing symmetries of generalized quadrangles, Invent. Math. 40, 245-65.

Weisstein, E. W., 2018, Axiomatic System From MathWorld, mathworld.wolfram.com/AxiomaticSystem.html