T.C.

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

α. DERECEDEN f-LACUNARY İSTATİSTİKSEL SINIRLILIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hüseyin SÖNMEZ

(151121110)

Anabilim Dalı: Matematik
Program: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mikail ET

Ocak-2019

T.C.

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

α. DERECEDEN f-LACUNARY İSTATİSTİKSEL SINIRLILIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hüseyin SÖNMEZ

(151121110)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 24.12.2018

Tezin Savunulduğu Tarih: 18.01.2019

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mikail ET

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Yavuz ALTIN(F.Ü)

Doç. Dr. Muhammed ÇINAR(M.A.Ü)

Ocak-2019

ÖNSÖZ

Bu çalışmamın oluşturulmasında beni yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek ilerlememe katkıda bulunan danışman hocam sayın Prof. Dr. Mikail ET'e, çalışmalarım süresince desteklerini esirgemeyen arkadaşlarım ve aileme en derin duygularımla teşekkür ederim. Bu tez çalışması **Fırat Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi** tarafından **FÜBAB-FF.18.08** numaralı proje ile desteklenmiştir. Desteklerinden dolayı Fırat Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimine teşekkür ederiz.

Hüseyin SÖNMEZ

ELAZIĞ-2018

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

α. DERECEDEN *f*-LACUNARY İSTATİSTİKSEL SINIRLILIK

Bu çalışma giriş ve sonuç bölümü ile birlikte sekiz bölümden oluşmuştur.

Çalışmanın birinci bölümü giriş bölümü olarak düzenlenmiş olup, konunun tarihi gelişimi hakkında kısa bir bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde, bazı temel tanım ve teoremler verilerek, doğal yoğunluk, istatistiksel yakınsaklık, lacunary istatistiksel yakınsaklık, λ -istatistiksel yakınsaklık, genelleştirilmiş de-la Vallée-Poussin ortalaması ve kuvvetli p-lacunary toplanabilirlik kavramları verilmiştir.

Üçüncü bölümde, α. dereceden yoğunluk, α. dereceden istatistiksel yakınsaklık, α. dereceden istatistiksel Cauchy dizisi tanımlanmış ve bu kavramlara ilişkin birkaç bağıntı verilmiştir.

Dördüncü bölümde, istatistiksel sınırlılık kavramı tanımlanmış, istatistiksel sınırlılık ve istatistiksel yakınsaklığa ilişkin birkaç bağıntı verilmiştir.

Beşinci bölümde, lacunary istatistiksel sınırlılık kavramı tanımlanmış ve lacunary istatistiksel sınırlılık ve lacunary istatistiksel yakınsaklığa ilişkin birkaç sonuç verilmiştir.

Altıncı bölümde, α. dereceden lacunary istatistiksel sınırlılık kavramı tanımlanmış ve α. dereceden lacunary istatistiksel sınırlılık ve α. dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklık arasında birkaç sonuç verilmiştir.

Yedinci bölüm çalışmanın orijinal kısmı olup, *f* sınırsız bir modülüs fonksiyonu, $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisi ve $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere lacunary istatistiksel sınırlılık kavramı, α. dereceden *f*-lacunary istatistiksel sınırlılık kavramına genelleştirilmiş, lacunary istatistiksel sınırlılık ile α. dereceden *f*-lacunary istatistiksel sınırlılık kavramı arasında birkaç sonuç ifade edilmiştir.

Son bölüm sonuç bölümü olarak düzenlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel Yakınsaklık, Lacunary Dizisi, Modülüs Fonksiyonu**,** Cesaro Toplanabilme.

SUMMARY

ON *f*-LACUNARY STATİSTİCAL BOUNDEDNESS OF ORDER α

This study is prepared as eight chapters with introduction and conclusion.

In the first chapter which is organized as the entrance section has been given historical background of the subject.

In the second chapter, we give the fundamental definitions and theorems. Additionally we give the concepts of natural density, statistical convergence , lacunary statistical convergence, λ -statistical convergence, generalized De-la Vallée-Poussin mean and strong p-lacunarys summability.

In the third chapter, we define lacunary density of order α. statistical convergence of order α, lacunary statistical Cauchy of order α of sequences and give some relations between of these concepts.

In the fourth chapter, we define the concepts of statistical boundedness and give some relations between statistical convergence and statistical boundedness.

In the fifth chapter, we define the concepts of lacunary statistical boundedness and give some relations between lacunary statistical convergence and lacunary statistical boundedness

In the sixth chapter, we define the concepts of lacunary statistical boundedness of order α and give some relations between statistical boundedness of order α and lacunary statistical boundedness of order α.

In the fifth chapter which is organized original part of this thesis has been generalized the concept of lacunary statistical boundedness to the concepts of f-lacunary statistical boundedness of order α, where $\theta = (k_r)$ is a lacunary sequence, $\alpha \in (0,\ 1]$ and *f* is an unbounded modulus function.

Finally we give a conclusion.

Key Words: Statistical Convergence, Lacunary Sequence, Modulus Function, Cesaro Summabilitiy.

SEMBOLLER

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
l_∞	: Kompleks veya reel terimli sınırlı diziler uzayı
c_0	: Kompleks veya reel terimli sıfıra yakınsayan diziler uzayı
c	: Kompleks veya reel terimli yakınsayan diziler uzayı
BK	: Banach koordinat uzayı
S	: İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
S_θ	: Lacunary istatistiksel yakınsak diziler uzayı.
$N_\theta(p)$	: Kuvvetli p-lacunary yakınsak diziler uzayı
S_θ^α	: α. dereceden lacunary istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$N_\theta^\alpha(p)$	: α. dereceden kuvvetli p-lacunary yakınsak diziler uzayı
$S(b)$	: İstatistiksel sınırlı dizilerin kümesi
$S_\theta(b)$	: Lacunary istatistiksel sınırlı dizilerin kümesi
$S_\theta^{f,\alpha}$	: α. dereceden lacunary istatistiksel yakınsak diziler uzayı

1. GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık 1935 yılında Zygmund [1] un Varşova'da basılan monografisinin ilk baskısında verildi. Daha sonra istatistiksel yakınsaklık Steinhaus [2] ve Fast [3] tarafından aynı yıllarda çalışıldı. Schoenberg [4] istatistiksel yakınsaklığı bir toplanabilme metodu olarak ifade etti ve sınırlı Cesaro toplanabilir dizilerin aynı zamanda istatistiksel yakınsak olduğunu gösterdi. İstatistiksel yakınsaklık Fourier Analiz teorisi, Ergodic teori, Sayılar teorisi, Ölçüm teorisi ve Banach uzayları teorisinde farklı isimler altında çalışıldı. Fridy [5] ninin " İstatistiksel Yakınsaklık Üzerine " başlıklı çalışmasından sonra istatistiksel yakınsaklık ile ilgili çalışmaların hız kazandığını görüyoruz. Sonraki yıllarda istatistiksel yakınsaklık Connor [6], Savaş [7], Mursaleen [8], Fridy ve Orhan ([9],[10]), Moricz [11], Rath ve Tripathy [12], Salat [13], Bhardwaj ve diğerleri ([14],[15],[16],[17],[18]) tarafından çalışıldı. Bir dizinin dereceli istatistiksel yakınsaklığı Gadjiev and Orhan [19] tarafından verildi. Bhunia ve arkadaşları [20] dereceli istatistiksel yakınsaklık ile ilgili birkaç özellik ispatladılar. Dereceli istatistiksel yakınsaklık ile ilgili literatürdeki çalışmaların Çolak ([21],[22]) tarafından verilen " α. dereceden istatistiksel yakınsaklık " ve " λ-istatistiksel yakınsaklık" başlıklı çalışmalardan sonra arttığını görüyoruz. Daha sonra Çolak ve Bektaş [23], Et ve Şengül ([24],[25],[26]) α. dereceden istatistiksel yakınsaklık ile ilgili çalışmalar yaptılar.

Reel veya kompleks terimli dizilerin istatistiksel sınırlılığı Fridy ve Orhan [27] tarafından tanımlandı. Daha sonra Bhardwaj ve arkadaşları ([17],[18]) konu ile ilgili çalışmalar yaptılar, bu kavram Et ve arkadaşları [28] tarafından genelleştirildi. Bu çalışmada reel veya kompleks terimli dizilerin α. dereceden f-lacunary istatistiksel istatistiksel sınırlılığı tanımlanacak ve dizilerin istatistiksel sınırlılığı ile aralarındaki ilişki verilecektir.

2. GENEL KAVRAMLAR

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1. [29] $X \neq \varnothing$ bir cümle ve K reel veya kompleks sayılar cismi olmak üzere

$$+: X \times X \to X,$$
$$.: K \times X \to X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) adı verilir. Her $x, y, z \in X$ ve her $\lambda, \mu \in K$ için

L1) $x + y = y + x$,

L2) $(x + y) + z = x + (y + z)$,

L3) Her $x \in X$ için $x + \theta = x$ olacak şekilde bir θ vardır ,

L4) Her bir $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x)$ vardır ,

L5) $1.x = x$,

L6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,

L7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,

L8) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

Tanım 2.1.2. [30] X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|.\|: X \to \mathbb{R}$$
$$x \to \|x\|$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu dönüşüme bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. $\forall x, y \in X$ için

N1) $\|x\| \geq 0$

N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \ \alpha \in K$

N4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

dir.

Burada $K = \mathbb{R}$ alınırsa $\left(X, \|.\|\right)$ ikilisine reel normlu uzay denir.

Tanım 2.1.3. [30] $\left(X, \|.\|\right)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$ de X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $n > n_0$ iken

$$\|x_n - x\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisi x'e yakınsaktır denir. $x = (x_n)$ dizisi x'e yakınsak ise $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ veya $x_n \to x$ şeklinde yazılır. Bu yakınsaklık kuvvetli yakınsaklık olarak da tanımlanır ve $x_n \xrightarrow{s} x$ şeklinde de gösterilir.

Tanım 2.1.4. [30] $\left(X, \|.\|\right)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$ de X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ iken

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.1.5. [30] $\left(X, \|.\|\right)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu normlu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı adı verilir.

Tanım 2.1.6. [30] Bir X vektör uzayının bir Y alt kümesi verilsin. Eğer $y_1, y_2 \in Y$ olduğunda

$$M = \left\{ y \in Y : y = \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2,\ 0 \leq \lambda \leq 1 \right\} \subset Y$$

oluyorsa Y alt kümesi konvekstir denir.

Tanım 2.1.7. [29] $\left(X, \|.\|\right)$ normlu bir uzay olsun. X üzerinde sınırlı tüm lineer fonksiyonellerin cümlesi

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

normu ile bir normlu uzay oluşturur. Bu uzaya X'in sürekli dual uzayı denir ve X' ile gösterilir.

Tanım 2.1.8 [29] $(X, \|.\|)$ normlu bir uzay ve (x_n), X 'de bir dizi olsun. Her $f \in X'$ ve $n \to \infty$ için

$$f(x_n) \to f(x)$$

ise (x_n) dizisi x'e zayıf yakınsaktır denir. (x_n) dizisi x'e zayıf yakınsak ise $x_n \xrightarrow{w} x$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.1.9 [29] Reel terimli tüm dizilerin cümlesini w ile gösterelim. $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere w,

$$x + y = (x_k + y_k)$$
$$\alpha x = (\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır. w'nin her alt lineer uzayına bir dizi uzayı denir. Ayrıca

$$l_\infty = \{x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty\}$$

sınırlı,

$$c = \left\{x = (x_k) : \lim_k x_k \ \text{ mevcut}\right\}$$

yakınsak ve

$$c_0 = \left\{x = (x_k) : \lim_k x_k = 0\right\}$$

sıfır dizileri uzayı

$$\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$$

normu ile birer Banach uzayıdır.

Tanım 2.1.10 [29] X bir dizi uzayı olsun. X bir Banach uzayı ve

$$\tau_k : X \to \mathbb{C},\ \tau_k(x) = x_k,\ (k = 1, 2, ...)$$

dönüşümü sürekli ise X'e bir BK-uzayı denir.

Tanım 2.1.11 [29] (p_k) kesin pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi ve $H = \sup p_k$ olsun. Bu takdirde $D = \max\left(1,\, 2^{H-1}\right)$ ve $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$|a_k + b_k|^{p_k} \le D\left\{|a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k}\right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

2.2. İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 2.2.1 [31] $\mathbb{N}$ doğal sayılar cümlesinin A alt cümlesinin doğal yoğunluğu, $\left|\{k \le n : k \in A\}\right|$ ifadesi n'den büyük olmayan $A \subseteq \mathbb{N}$ cümlesinin elemanlarının sayısını göstermek üzere

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\{k \le n : k \in A\}\right|$$

ile tanımlanır. $\mathbb{N}$ doğal sayılar cümlesinin herhangi bir sonlu alt cümlesinin doğal yoğunluğunun sıfır olduğu açıktır ve $A^C = \mathbb{N} - A$ olmak üzere $\delta\left(A^C\right) = 1 - \delta(A)$ dir.

Bir cümlenin doğal yoğunluğu daha kolay bir yolla şu şekilde bulunabilir. (a_n) pozitif tamsayıların artan bir dizisi olsun. $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $A \subseteq \mathbb{N}$ alt cümlesinin doğal yoğunluğu mevcut ise

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n}$$

dir. Örnek olarak $A = \left\{n^3 : n \in \mathbb{N}\right\}$ cümlesini alırsak, A kümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^3} = 0$$

dır.

Burada özellikle doğal yoğunluğu sıfır olan cümlelerle ilgileneceğiz. Ayrıca, eğer $x = (x_k)$ doğal yoğunluğu sıfır olan bir cümle hariç her k için P özelliğini sağlayacak şekilde olan bir dizi ise x_k "hemen hemen her k" için P özelliğini sağlıyor denir ve kısaca "*h.h.k*" şeklinde yazılır.

Tanım 2.2.2 [5] Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \le n : \left| x_k - L \right| \ge \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, yani *h.h.k* için

$$\left| x_k - L \right| < \varepsilon$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L'ye istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durum da $S - \lim x_k = L$ yazılır. Eğer $L = 0$ ise yani $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \le n : \left| x_k \right| \ge \varepsilon \right\} \right| = 0$ ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel sıfır dizisidir denir. Tüm istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesi S ile ve tüm istatistiksel sıfır dizilerin cümlesi S_0 ile gösterilir.

Bilinen anlamda yakınsak olan diziler istatistiksel yakınsaktır. Fakat istatistiksel yakınsak olan diziler yakınsak olmak zorunda değildir.

Örnek 2.2.3. $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \\ 0, & k \ne m^2 \end{cases} \quad m = 1, 2, \ldots$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\left| \left\{ k \le n : \left| x_k - 0 \right| \ge \varepsilon \right\} \right| \le \left| \left\{ k \le n : x_k \ne 0 \right\} \right| \le \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \le n : x_k \ne 0 \right\} \right| \le \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir, yani $S - \lim x_k = 0$'dır, ancak (x_k) dizisi yakınsak değildir.

Tanım 2.2.4. [5] Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \le n : \left| x_k - x_N \right| \ge \varepsilon \right\} \right| = 0$$

yani *h.h.k* için

$$\left| x_k - x_N \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayı varsa $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir.

2.3. Lacunary Dizileri ve Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 2.3.1 [5] $k_0 = 0,\ r \to \infty$ iken $h_r = k_r - k_{r-1}$ olacak şekilde $\theta = \{k_r\}$ artan tamsayı dizisine lacunary dizisi denir. $q_r = \dfrac{k_r}{k_{r-1}}$ olarak alınacaktır. Uygunluk için $q_1 = k_1$ yazacağız $I_r = (k_{r-1},\ k_r]$ ve θ bir lacunary dizisi olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left| \{ k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon \} \right| = 0$$

ise x sayı dizisi L'ye lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $S_\theta - \lim x = L$ veya $x_k \to L(S_\theta)$ olarak yazılır, yani S_θ kümesi

$$S_\theta = \{ x : \text{en az } L \text{ için, } S_\theta - \lim x = L \}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.3.2. [5] $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. Her $k'(r) \in I_r$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left| x_k - x_{k'(r)} \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olmak üzere $\lim_r x_{k(r)} = L$ olacak şekilde x dizisinin bir $\{x_{k(r)}\}$ alt dizisi varsa x dizisine $S_\theta - Cauchy$ dizisi denir.

Tanım 2.3.3. [32] $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $0 < p < \infty$ olsun. Eğer

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L|^p = 0$$

olacak şeklinde kompleks bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L'ye kuvvetli p-lacunary yakınsaktır denir. Kuvvetli p-lacunary yakınsak dizilerin cümlesi $N_\theta(p)$ ile gösterilir. $p > 0$ için , $N_\theta(p)$ uzayı

$$N_\theta(p) = \left\{ x = (x_k) : \exists L \in C,\ \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L|^p = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır. $N_\theta(p)$ uzayı $\|x\|_\theta = \sup_r \left(\frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |x_k|^p \right)$ normu ile BK-uzayıdır. $\theta = (2^r)$ olması halinde $N_\theta(p) = w_p$ olur.

Tanım 2.3.4. [8] $\lambda_{n+1} = \lambda_n + 1,\ \lambda_1 = 1$ olacak şekilde $\lambda = \{\lambda_n\}$ dizisi pozitif sayıların azalmayan $n \to \infty$ için $\lambda_n \to \infty$ şartını sağlayan bir dizi olsun. Bu şekildeki tüm $\lambda = (\lambda_n)$ dizilerin kümesini $\wedge$ ile gösterelim:

$$I_n = [n - \lambda_n + 1,\ n]$$

olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left| \{ k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon \} \right| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L'ye λ istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $S_\lambda - \lim x = L$ veya $x_k \to L(S_\lambda)$ yazarız. Buna göre

$$S_\lambda = \{ x = (x_k) \in w : \exists L \in \mathbb{C},\ S_\lambda - \lim x = L \}$$

olarak tanımlanır. Genelleştirilmiş de-la Vallée-Poussin ortalaması,

$$I_n = [n - \lambda_n + 1,\ n]$$

olmak üzere;

$$t_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} x_k$$

ile tanımlanır. Eğer $\lim_n t_n(x) \to L$ ise $x = (x_k)$ dizisi L'ye $(V,\ \lambda) -$toplanabilirdir denir. Kuvvetli $(V,\ \lambda) -$toplanabilir dizilerin cümlesi $[V, \lambda]$ şeklinde gösterilir ve

$$[V, \lambda] = \left\{ x = (x_k) \in w : \exists L \in \mathbb{C},\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |x_k - L| = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

3. α. DERECEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde bir cümlenin α-yoğunluğu kavramı açıklanıp, bu kavram yardımı ile α. dereceden istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanacaktır.

Tanım 3.1. [21] $0<\alpha\leq 1$ olacak şekilde herhangi bir reel sayı α olsun. $\left|\{k\leq n : k\in E\}\right|$, E cümlesinin n'den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermek üzere;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\left|\{k\leq n : k\in E\}\right|$$

limiti mevcut ise bu limit değerine E alt cümlesinin α-yoğunluğu denir. E kümesinin α-yoğunluğu $\delta_{\alpha}(E)$ ile gösterilir.

$x=(x_k)$ dizisi, α-yoğunluğu sıfır olan cümle hariç, her k için $P(k)$ özelliğini sağlayacak şekilde bir dizi ise o zaman (x_k) dizisi, α'ya göre hemen hemen her k için $P(k)$ özelliğini sağlar denir. Bunu biz kısaca $h.h.k(\alpha)$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.2. [21] $x=(x_k)\in w$ olsun. $0<\alpha\leq 1$ olarak verilsin. $\forall\varepsilon>0$ için;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\left|\{k\leq n : |x_k-L|\geq\varepsilon\}\right|=0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x=(x_k)$ dizisi L'ye α. dereceden istatistiksel yakınsaktır denir. Bir başka ifadeyle her $\varepsilon>0$ ve $h.h.k(\alpha)$ için $|x_k-L|<\varepsilon$ ise x dizisi L'ye α. dereceden istatistiksel yakınsaktır denir. Bu yakınsaklık $S^{\alpha}-\lim x_k=L$ şeklinde gösterilir. α. dereceden tüm istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesi S^{α} ile gösterilir.

Tanım 3.3. [33] $x=(x_k)\in w$ olsun. $0<\alpha\leq 1$ olarak verilsin. $\forall\varepsilon>0$ için;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\left|\{k\leq n : |x_k-x_N|\geq\varepsilon\}\right|=0$$

olacak şekilde bir $N=N(\varepsilon)$ sayısı varsa $x=(x_k)$ dizisine α. dereceden istatistiksel Cauchy dizisi denir. Bir başka ifadeyle her $\varepsilon>0$ ve $h.h.k(\alpha)$ için $|x_k-x_N|<\varepsilon$ ise x dizisine α. dereceden istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Teorem 3.4. [33] $0<\alpha\leq 1$ için aşağıdaki ifadeler denktir:

i) *x*, α. dereceden istatistiksel yakınsak bir dizidir

ii) *x*, α. dereceden istatistiksel Cauchy dizisidir

iii) $x=(x_k)$ dizisi verilsin, $h.h.k(\alpha)$ için $x_k=y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $y=(y_k)$ dizisi varsa, $x=(x_k)$ dizisi α. dereceden istatistiksel yakınsaktır.

İspat: $(i)\Rightarrow(ii): S^{\alpha}-\lim x_k=L$ olduğunu kabul edelim. $\varepsilon>0$ olsun. $h.h.k(\alpha)$ için

$$|x_k-L|<\frac{\varepsilon}{2}$$

ve seçilen bir *N* için

$$|x_N-L|<\frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Buna göre $h.h.k(\alpha)$ için

$$|x_k-x_N|<|x_k-L|+|x_N-L|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Böylece *x*, α. dereceden istatistiksel Cauchy dizisidir.

$(ii)\Rightarrow(iii):(ii)$ sağlansın, yani $x=(x_k)$, α. dereceden istatistiksel Cauchy dizisi olsun. *N* doğal sayısını $I=(x_N-1,\ x_N+1)$ aralığı $h.h.k(\alpha)$ için x_k 'yı içerecek şekilde seçelim. Aynı şekilde *M* doğal sayısını öyle seçelim ki $I'=\left(x_M-\frac{1}{2},\ x_M+\frac{1}{2}\right)$ aralığı $h.h.k(\alpha)$ için x_k 'yı içersin. İddia ediyoruz ki

$$I_1=I\cap I'$$

$h.h.k(\alpha)$ için x_k 'yı içerir. Çünkü

$$\{k\leq n: x_k\notin I\cap I'\}=\{k\leq n: x_k\notin I\}\cup\{k\leq n: x_k\notin I'\}$$

ve dolayısıyla $0<\alpha\leq 1$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\left|\{k\leq n: x_k\notin I\cap I'\}\right|\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\left|\{k\leq n: x_k\notin I\}\right|+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\left|\{k\leq n: x_k\notin I'\}\right|=0$$

olur.

Bu nedenle I_1 aralığının uzunluğu 1 den küçük veya 1' e eşit olan ve $h.h.k(\alpha)$ için x_k 'yı içeren kapalı bir aralıktır. Şimdi $I'' = \left(x_{N(2)} - \frac{1}{4},\ X_{N(2)} + \frac{1}{4} \right)$ aralığı $h.h.k(\alpha)$ için x_k 'yı içerecek şeklinde N(2)'yi seçelim. Yukarıdaki düşünceyle $I_2 = I_1 \cap I''$ aralığının $h.h.k(\alpha)$ için x_k yı içerdiğini ve I_2 aralığının uzunluğunun $\frac{1}{2}$ 'den küçük veya eşit olduğunu verir. Bu yolla devam ederek her *m* için, $I_m \supseteq I_{m+1}$ 'nin uzunluğu 2^{1-m} 'den daha büyük olmayacak ve $h.h.k(\alpha)$ için $x_k \in I_m$ olacak şekilde kapalı aralıkların bir $\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisini seçebiliriz. Şimdi $x = (x_k)$ dizisinin, $k > T_1$ ve

$$T_m < k \le T_{m+1} \text{ ise } x_k \notin I_m$$

olacak şekildeki bütün x_k terimlerinden oluşan bir $z = (z_k)$ alt dizisini tanımlayalım. Şimdi $y = (y_k)$ dizisini;

$$y_k = \begin{cases} \lambda, & \text{eğer } x_k,\ z = (z_k)\text{'nın bir terimi ise,} \\ x_k, & \text{diğer hallerde,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman $\lim y_k = \lambda$ 'dır. Çünkü eğer $\varepsilon > \frac{1}{m} > 0$ ve $k > T_m$ ise ya x_k, $y_k = \lambda$ olacak şekilde *z*'nin bir terimidir ya da $y_k = x_k \in I_m$ ve $|y_k - \lambda| \le I_m$ 'nin uzunluğu $\le 2^{1-m}$ 'dir. Ayrıca $h.h.k(\alpha)$ için $x_k = y_k$ olduğunu iddia ediyoruz. Bunu göstermek için $T_m < n < T_{m+1}$ olarak alırsak $\{k \le n : y_k \ne x_k\} \subset \{k \le n : x_k \notin I_m\}$ dolayısıyla

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \left| \{k \le n : y_k \ne x_k\} \right| \le \frac{1}{n^{\alpha}} \left| \{k \le n : x_k \notin I_m\} \right| < \frac{1}{m}$$

dir. Böylece $n \to \infty$ için limit 0'dr ve $h.h.k(\alpha)$ için $x_k = y_k$ 'dır. Bu nedenle (ii), (iii) gerektirir.

$(iii) \Rightarrow (i) : (iii)$ 'ün sağlandığını, $h.h.k(\alpha)$ için $x_k = y_k$ ve $\lim y_k = L$ olduğunu kabul edelim. $\varepsilon > 0$ olsun. $\lim y_k = L$ olduğundan;

$$\{k \le n : |x_k - L| \ge \varepsilon\} \subseteq \{k \le n : x_k \ne y_k\} \cup \{k \le n : |y_k - L| > \varepsilon\}$$

dır. Son cümle sabit sayıda doğal sayı içerir. Bunu $l = l(\varepsilon)$ ile gösterelim. $h.h.k(\alpha)$ için $x_k = y_k$ olduğundan $0 < \alpha \leq 1$ için;

$$\lim_n \frac{1}{n^\alpha}\left|\left\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\right\}\right| \leq \lim_n \frac{1}{n^\alpha}\left|\left\{k \leq n : x_k \neq y_k\right\}\right| + \lim \frac{l}{n^\alpha} = 0$$

yazabiliriz. Böylece $h.h.k(\alpha)$ için $|x_k - L| < \varepsilon$ elde edilir.

Sonuç 3.5. [33] x dizisi için $S^\alpha - \lim x_k = L$ ise x dizisi, $\lim y_k = L$ olacak şekilde bir y alt dizisine sahiptir.

4. İSTATİSTİKSEL SINIRLILIK

Bu bölümde istatistiksel sınırlılık kavramı tanımlanacak ve istatistiksel sınırlı diziler ile istatistiksel yakınsak diziler arasındaki ilişki incelenecektir.

Tanım 4.1. [27] $x=(x_k)$ ve $L>0$ sayısı verilsin.

$$\delta\left(\left\{k:|x_k|>L\right\}\right)=0,$$

yani, h.h.k. için

$$|x_k|\leq L$$

ise $x=(x_k)$ dizisi istatistiksel sınırlıdır denir. İstatistiksel sınırlı dizilerin kümesi $S(b)$ ile gösterilir. Sınırlı bir dizi aşikâr olarak istatistiksel sınırlıdır ancak tersi doğru değildir. Bunun için $x=(x_k)$ dizisi,

$$x_k=\begin{cases} k, & k=m^2 \text{ ise } m \text{ tamsayı} \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases} \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlansın. Açıkça bu dizi sınırlı değildir. Ancak $\delta\left(\left\{k:|x_k|>L\right\}\right)=0$ olduğundan x istatistiksel sınırlıdır.

Önerme 4.2 [17] Her yakınsak dizi istatistiksel sınırlıdır, fakat tersi doğru değildir.

İspat: Her yakınsak dizi sınırlıdır. Her sınırlı dizi de istatistiksel sınırlıdır. Dolayısıyla yakınsak bir dizi istatistiksel sınırlıdır. Tersi için (4.1) de verilen diziyi göz önüne alalım. Bu dizi yakınsak değil ancak istatistiksel sınırlıdır.

Önerme 4.3. [17] Her istatistiksel yakınsak dizi istatistiksel sınırlıdır.

İspat: $x=(x_k)$ dizisi istatistiksel sınırlı olsun. Bu takdirde verilen $\delta>0$ için,

$$\delta\left(\left\{k:|x_k-L|>\varepsilon\right\}\right)=0$$

dolayısıyla

$$\left\{k:|x_k|>|L|+\varepsilon\right\}\subset\left\{k:|x_k-L|>\varepsilon\right\}$$

yazılabilir. Böylece h.h.k. için,

$$|x_k| \leq |L| + \varepsilon$$

olur.

Aşağıdaki örnekten anlaşılacağı üzere her dizi istatistiksel sınırlı olmak zorunda değildir.

Örnek 4.4. $x = (x_k) = (1,\ 2,\ 3, ...)$ şeklinde tanımlansın ve $L > 0$ olsun. Bu takdirde $\mathbb{N}$ 'nin sonlu bir S alt kümesi için

$$\{k : |x_k| > L\} = \mathbb{N} - S$$

dir. Böylece

$$\delta(\{k : |x_k| > L\}) = 1$$

olup *x* istatistiksel sınırlı değildir.

İyi bilinir ki sınırlı bir dizinin her alt dizisi sınırlıdır. Bu durum istatistiksel sınırlı diziler için geçerli değildir, yani istatistiksel sınırlı bir dizinin her alt dizisinin istatistiksel sınırlı olması gerekmez.

Önerme 4.5 [17] Eğer (x_k) dizisi sıfıra istatistiksel yakınsak ve (y_k) da istatistiksel sınırlı ise $(x_k).(y_k)$ istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 4.6 [17] $x = (x_k)$ istatistiksel sınırlı olması için gerek ve yeter şart h.h.k için $x_k = y_k$ olacak şekilde sınırlı bir $y = (y_k)$ dizisinin olmasıdır.

İspat: $x = (x_k)$ dizisinin istatistiksel sınırlı olduğunu kabul edelim. Bu takdirde,

$$A = \{k \in \mathbb{N} : |x_k| > L\}$$

olmak üzere, $\delta(A) = 0$ olacak şekilde bir $L > 0$ sayısı vardır. $y = (y_k)$ dizisini

$$y_k = \begin{cases} x_k, & k \neq A \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde $y = (y_k) \in \ell_\infty$ ve h.h.k. $x_k = y_k$ dır.

Tersine $y=(y_k)\in \ell_\infty$ olsun. Bu takdirde her $k\in\mathbb{N}$ için $|y_k|\le L$ olacak şekilde bir $L>0$ sayısı vardır.

$D=\{k\in\mathbb{N}: x_k\ne y_k\}$ olsun. Açıkça $\delta(D)=0$ dır. $\{k\in\mathbb{N}:|x_k|>L\}\subset D$ olduğundan h.h.k $|x_k|<L$ elde ederiz. Buradan *x* in istatistiksel sınırlı olduğu çıkar.

Teorem 4.7 [17] Her istatistiksel Cauchy dizisi istatistiksel sınırlıdır fakat tersi doğru değildir.

İspat: $x=(x_k)$ istatistiksel Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde h.h.k. için $|x_k-x_N|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $N=N(\varepsilon)$ sayısı vardır. Buradan $L=\varepsilon+|x_N|$ olmak üzere h.h.k. için $|x_k|<L$ yazabiliriz. Bu *x*'in istatistiksel sınırlı olması demektir.

Tersi için $x=(x_k)=(-1, 1, -1, 1,...)$ dizisini göz önüne alalım. Bu dizi istatistiksel sınırlı bir dizidir. Ancak istatistiksel Cauchy dizisi değildir.

Teorem 4.8 [17]

(a) $S(b)$ simetrik değildir ,

(b) $S(b)$ normal ve buradan monotondur ,

(c) $S(b)$ dizi cebiridir.

İspat: (a) $x=(1, 0, 0, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 9,...)$ olsun. $x\in S(b)$ dir. $y=(y_k)=(0,1,4,0,9,16,25,36,0,...)$ dizisi *x*'in yeni bir düzenlemesi olsun. Bu takdirde herhangi bir $L>0$ için $\delta(\{k:|y_k|>L\})\ne 0$'dır. Bu $S(b)$'nin simetrik olmadığı anlamına gelir.

(b) $x=(x_k)\in S(b)$ ve $y=(y_k)$ her $k\in\mathbb{N}$ için $|y_k|\le|x_k|$ olacak şekilde bir dizi olsun. $(x_k)\in S(b)$ olduğundan $\delta(\{k:|x_k|>L\})=0$ olacak şekilde bir $L>0$ sayısı vardır.

$\{k:|y_k|>L\}\subset\{k:|x_k|>L\}$ sağlandığından $y=(y_k)\in S(b)$'dir. Böylece *x* normaldir. Her normal dizi monoton olduğundan *x* monotondur.

(c) $(x_k), (y_k) \in S(b)$ olsun. Bu takdirde $\delta\left(\left\{k : |x_k| > L\right\}\right) = 0$ ve $\delta\left(\left\{k : |y_k| > M\right\}\right) = 0$ olacak şekilde $L, M > 0$ sayıları vardır. Diğer taraftan her $k \in \mathbb{N}$ için $\left\{k : |x_k \; y_k| \geq L.M\right\} \subset \left\{k : |x_k| > L\right\} \cup \left\{k : |y_k| > M\right\}$ bağıntısı sağlanır. Bu $S(b)$'nin dizi cebiri olması demektir.

5. LACUNARY İSTATİSTİKSEL SINIRLILIK

Bu bölümde lacunary istatistiksel sınırlılık kavramı tanımlanacak ve lacunary istatistiksel sınırlı diziler ile lacunary istatistiksel yakınsak diziler arasındaki ilişki incelenecektir.

5.1. Lacunary İstatistiksel Sınırlılık

Bu bölümde lacunary istatistiksel sınırlılık kavramını tanımlayacak ve bu kavrama ilişkin birkaç bağıntı vereceğiz.

Tanım 5.1.1. [34] $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun.

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : |x_k| > M \right\} \right| = 0 ,$$

yani

$$\delta^{\theta}\left(\left\{ k \in N : |x_k| > M \right\} \right) = 0 ,$$

yani, h.h. k_θ için

$$|x_k| \le M$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine lacunary istatistiksel sınırlıdır denir.

Lacunary istatistiksel sınırlı dizilerin kümesi $S_\theta(b)$ ile gösterilir.

Teorem 5.1.2. [34] Her sınırlı dizi lacunary istatistiksel sınırlıdır fakat tersi doğru değildir.

İspat: Her lacunary dizisi için boş kümenin lacunary yoğunluğu sıfır olduğundan sınırlı her dizi lacunary istatistiksel sınırlıdır. Tersi için $x = (x_k)$ dizisini $\theta = \{k_r\}$ herhangi bir lacunary dizisi olmak üzere

$$x_i = \begin{cases} k_{r-1} + 1, & i = k_{r-1} + 1;\ r = 1, 2, 3, \ldots \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Açıkça *x* sınırlı değildir fakat,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_k} \left| \left\{ k \in I_r : |x_k| > \frac{1}{2} \right\} \right| = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} = 0$$

olduğundan x lacunary istatistiksel sınırlıdır.

Teorem 5.1.3. [34] Her lacunary istatistiksel yakınsak dizi lacunary istatistiksel sınırlıdır. Fakat tersi doğru değildir.

İspat: $x=(x_k)$ lacunary istatistiksel yakınsak olsun. Bu takdirde

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r:|x_k-L|\geq\varepsilon\right\}\right|=0$$

olup her $\varepsilon>0$ için $\left\{|x_k|\geq|L|+\varepsilon\right\}\subset\left\{k\in I_r:|x_k-L|\geq\varepsilon\right\}$ yazabiliriz. O halde $x=(x_k)$ lacunary istatistiksel sınırlıdır.

$\left((-1)^k\right)$ dizisi lacunary istatistiksel yakınsak değil fakat lacunary istatistiksel sınırlıdır.

Teorem 5.1.4. [34] $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. $x=(x_k)$ dizisinin lacunary istatistiksel sınırlı olması için gerek ve yeter şart $h.h.k_\theta$ için $x_k=y_k$ olacak şekilde sınırlı bir $y=(y_k)$ dizisi olmasıdır.

İspat: $x=(x_k)$ dizisinin lacunary istatistiksel sınırlı olduğunu kabul edelim. Bu takdirde,

$$K=\left\{k\in\mathbb{N}:|x_k|>M\right\}$$

olmak üzere $\delta^{(\theta)}(K)=0$ olacak şekilde bir $M>0$ sayısı vardır. $y=(y_k)$ dizisini

$$y_k=\begin{cases}x_k, & k\notin K;\\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu takdirde $y=(y_k)$ sınırlı ve h.h.k için $x_k=y_k$ dır.

Tersine $y=\{y_k\}$ sınırlı olsun. Bu takdirde $\forall k\in\mathbb{N}$ için $|y_k|\leq L$ olacak şekilde bir $L>0$ sayısı vardır. $D=\left\{k\in\mathbb{N}:x_k\neq y_k\right\}$ olsun. $\delta^{(\theta)}(D)=0$ olduğundan $h.h.k_\theta$ için $|x_k|\leq L$ dir.

Teorem 5.1.5 (Ayrışma Teoremi) [34] $x=\{x_k\}$ lacunary istatistiksel sınırlı bir dizi ise $x=y+z$ eşitliği sağlanacak şekilde $z=\{z_k\}$ lacunary istatistiksel sıfır dizisi olmak üzere sınırlı bir $y=\{y_k\}$ dizisi vardır.

İspat: $x=\{x_k\}$ lacunary istatistiksel sınırlı bir dizi ise;

$$A=\{k\in\mathbb{N}:|x_k|>M\}$$

olmak üzere $\delta^{(\theta)}(A)=0$ olacak şekilde bir $M>0$ sayısı vardır. $z=(z_k)$ ve $y=(y_k)$ dizilerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$y_k=\begin{cases}x_k, & k\in\mathbb{N}-A;\\ 0, & k\in A,\end{cases}$$

$$z_k=\begin{cases}0, & k\in\mathbb{N}-A;\\ x_k, & k\in A\end{cases}$$

Açıkça y sınırlı bir dizi , z de lacunary istatistiksel sıfır dizisi olmak üzere $x=y+z$ yani $S_\theta(b)\subset\ell_\infty+C_\theta^0$ dır, burada C_θ^0 tüm lacunary istatistiksel sıfır dizilerinin kümesini göstermektedir. ℓ_∞, $C_\theta^0\subset S_\theta(b)$ iken $\ell_\infty+C_\theta^0\subset S_\theta(b)$ dir. Sonuçta $S_\theta(b)=\ell_\infty+C_\theta^0$ dır. $\varnothing\subset\ell_\infty\cap C_\theta^0$ olduğundan (burada $\varnothing$ sonlu sayıda elemanları sıfırdan farklı olan skaler dizilerin uzayıdır) $S_\theta(b)\neq\ell_\infty+C_\theta^0$ dır.

Teorem 5.1.6. [34]

(a) $S_\theta(b)$ normal böylece monotondur,

(b) $S_\theta(b)$ dizi cebiridir.

Sonuç 5.1.7. [34] $S_\theta(b)$ perfect değildir.

İspat: $\left[S_\theta(b)\right]^{\alpha\alpha}=\varnothing^\alpha$ olduğundan $S_\theta(b)$ perfect değildir

5.2. Lacunary İstatistiksel Sınırlılık ve İstatistiksel Sınırlılık Arasındaki İlişki

Lemma 5.2.1. [34] $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisi olsun. $\liminf_r q_r > 1$ olması için gerek ve yeter şart $S(b) \subset S_\theta(b)$ olmasıdır.

İspat (Yeterlilik): $\liminf_r q_r > 1$ ise yeterince büyük r ler için $q_r \geq 1+\delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

$$h_r = k_r - k_{r-1}$$

olduğundan

$$\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\delta}{1+\delta} \leq \frac{1}{\delta}$$

dir. $\{x_t\} \in S_\theta(b)$ ise

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : |x_k| > M\right\}\right| = 0$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır. Yeterince büyük r ler için

$$\begin{aligned}\frac{1}{k_r}\left|\left\{k \leq k_r : |x_k| > M\right\}\right| &\geq \frac{h_r}{k_r}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : |x_k| > M\right\}\right| \\ &\geq \frac{\delta}{1+\delta}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : |x_k| > M\right\}\right|\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece $\{x_k\} \in S_\theta(b)$ dir.

Şimdi $S(b) \subset S_\theta(b)$ ve $\liminf_r q_r = 1$ olsun. Freedman ve diğerleri [32] tarafından verilen Lemma 2.1 deki yol takip edilerek $\theta = \{k_r\}$ dizisinin,

$$\frac{k_{r(j)}}{k_{r(j)-1}} < 1 + \frac{1}{j} \quad \text{ve} \quad \frac{k_{r(j)-1}}{k_{r(j-1)}} > j, \quad r(j) \geq r(j) + 2$$

şartlarını sağlayan bir $k_{r(j)}$ alt dizisini seçelim ve $x = \{x_k\}$ dizisini

$$x_i = \begin{cases} i, & i \in I_{r(j)}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots; \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.

Bu durumda herhangi $M>0$ sayısı için $k_{r(j_0)-1}>M$ olacak şekilde bir $j_0\in\mathbb{N}$ vardır. Böylece,

$$\frac{1}{h_{r(j_0)}}\left|\left\{k\in I_{r(j_0)}:\left|x_k\right|>M\right\}\right|\geq\frac{1}{h_{r(j_0)}}\left|\left\{k\in I_{r(j_0)}:\left|x_k\right|>k_{r(j_0)-1}\right\}\right|=1,$$

yani her $j\geq j_0$ için

$$\frac{1}{h_{r(j)}}\left|\left\{k\in I_{r(j)}:\left|x_k\right|>M\right\}\right|=1$$

ve $r\neq r(j)$ için

$$\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r:\left|x_k\right|>M\right\}\right|=0$$

olup

$$x=\{x_k\}\notin S_\theta(b)$$

dir. Diğer taraftan yeterince büyük t ler için $k_{r(j)-1}<t\leq k_{r(j-1)-1}$ sağlanacak şekilde bir tek j bulabiliriz ve böylece

$$\frac{1}{t}\left|\left\{k\leq t:\left|x_k\right|>\frac{1}{2}\right\}\right|\leq\frac{k_{r(j-1)}+h_{r(j)}}{k_{r(j)-1}}<\frac{1}{j}+\frac{1}{j}=\frac{2}{j}$$

$t\to\infty$ yapılırsa $j\to\infty$ olacağından $\{x_k\}\in S(b)$ dir.

Lemma 5.2.2. [34] Herhangi bir lacunary dizisi için $S_\theta(b)\subset S(b)$ olması için gerek ve yeter şart $\limsup_r q_r<\infty$ olmasıdır.

İspat (Yeterlilik): Fridy ve Orhan'ın [9] Lemma 3 te takip ettiği yol takip edilerek yeterlilik ispatlanabilir. $S_\theta(b)\subset S(b)$ ve $\limsup_r q_r=\infty$ olduğunu kabul edelim. Fredman ve diğerleri [32] tarafından verilen Lemma 2.2'deki yol takip edilerek $q_{r(j)}>j$ olacak şekilde $\theta=\{k_r\}$nin bir alt dizisi seçilebilir. $x=\{x_k\}$ dizisini

$$x_i = \begin{cases} i, & k_{r(j)-1} < i \leq 2k_{r(j)-1}, \quad j = 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece

$$\tau_{r(j)} = \frac{1}{h_{r(j)}} \left| \left\{ i \in J_{r(j)} : |x_i| > \frac{1}{2} \right\} \right| = \frac{k_{r(j)-1}}{k_{r(j)} - k_{r(j)-1}}$$

ve $r \neq r_j$ ise $\tau_r = 0$ dır. Buradan $\{x_k\} \in S_\theta(b)$'dir. Diğer taraftan herhangi bir $M > 0$ reel sayısı için $j > j_0$ olduğunda $k_{r(j)-1} > M$ olacak şekilde bir j_0 sayısı vardır. Böylece $j \geq j_0$ için,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2k_{r(j)-1}} \left| \left\{ i \leq 2k_{r(j)-1} : |x_i| > M \right\} \right| &\geq \frac{1}{2k_{r(j)-1}} \left| \left\{ i \leq 2k_{r(j)-1} : |x_i| > k_{r(j)-1} \right\} \right| \\ &\geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

olup $\{x_k\} \notin S(b)$ dir.

Lemma 5.2.1 ve Lemma 5.2.2 den aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 5.2.3. [34] θ herhangi bir lacunary dizisi olsun. $S_\theta(b) = S(b)$ olması için gerek ve yeter şart $1 < \liminf_r q_r \leq \limsup_r q_r < \infty$ olmasıdır.

6. α. DERECEDEN LACUNARY İSTATİSTİKSEL SINIRLILIK

Bu bölümde $\alpha \in (0,\ 1]$ olmak üzere lacunary istatistiksel sınırlılık kavramı α. dereceden lacunary istatistiksel sınırlılık kavramına genelleştirilecektir.

Tanım 6.1. [28] $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisi ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Doğal sayıların bir E alt kümesinin lacunary α yoğunluğu

$$\delta_\theta^\alpha(E) = \lim_r \frac{1}{h_r^\alpha}\left|\{k_{r-1} < k \leq k_r : k \in E\}\right|$$

şeklinde tanımlanır. $\theta = (2^r)$ alınırsa Çolak [21] tarafından verilen α yoğunluğu, $\alpha = 1$ ve $\theta = (2^r)$ alınırsa doğal yoğunluk kavramları elde edilir.

Eğer bir özellik lacunary α sıfır yoğunluklu bir küme dışında sağlanıyorsa bu özellik lacunary hemen hemen α ya göre tüm k lar için sağlanır denir ve "$h.h.k_r(\alpha)$" şeklinde gösterilir.

Tanım 6.2. [28] $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisi ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun.

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r^\alpha}\left|\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine α. dereceden istatistiksel yakınsaktır denir.

Tüm α. dereceden istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S_θ^α ile gösterilecektir.

Önerme 6.3. [28] $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi ve $\alpha, \beta \in (0,1]$ sayıları $\alpha \leq \beta$ olacak şekilde iki reel sayı olsun. Bu takdirde

$$\delta_\theta^\beta(E) \leq \delta_\theta^\alpha(E)$$

dir.

İspat:

$$\frac{1}{h_r^\beta}\left|\{k_{r-1} < k \leq k_r : k \in E\}\right| \leq \frac{1}{h_r^\alpha}\left|\{k_{r-1} < k \leq k_r : k \in E\}\right|$$

olduğundan $\delta_\theta^\beta(E) \le \delta_\theta^\alpha(E)$ elde edilir.

Tanım 6.4. [28] $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi ve $0 < \alpha \le 1$ olsun.

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r^\alpha} \left| \left\{ k \in I_r : |x_k| > M \right\} \right| = 0$$

yani $h.h.k_r(\alpha)$ için $|x_k| \le M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi α. dereceden lacunary istatistiksel sınırlıdır denir. α. dereceden lacunary istatistiksel sınırlı tüm dizilerin kümesi $S_\theta^\alpha(b)$ ile gösterilir. $\theta = (2^r)$ ise Bhardwaj ve diğerleri [17] tarafından çalışılan α. dereceden istatistiksel sınırlı dizilerin kümesi elde edilir. Eğer $\alpha = 1$ ise Bhardwaj ve diğerleri [34] tarafından çalışılan lacunary istatistiksel sınırlı dizilerin kümesi elde edilir. Eğer $\alpha = 1$ ve $\theta = (2^r)$ ise Fridy ve Orhan [27] tarafından çalışılan istatistiksel sınırlı dizilerin uzayı elde edilir.

Aşağıdaki sonuçları ispatsız vereceğiz.

Önerme 6.5. [28] Her yakınsak dizi lacunary istatistiksel sınırlıdır, fakat tersi doğru değildir.

Önerme 6.6. [28] Her lacunary istatistiksel yakınsak dizi lacunary istatistiksel sınırlıdır fakat tersi doğru değildir.

Önerme 6.7. [28] Her sınırlı dizi lacunary istatistiksel sınırlıdır fakat tersi doğru değildir.

Önerme 6.8. [28] Her sınırlı dizi α. dereceden lacunary istatistiksel sınırlıdır fakat tersi doğru değildir.

Önerme 6.9. [28] α. dereceden lacunary istatistiksel yakınsak her dizi α. dereceden lacunary istatistiksel sınırlıdır fakat tersi doğru değildir.

İspat: $x = \{x_k\}$ dizisi α. dereceden istatistiksel yakınsak olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu takdirde,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r^\alpha} \left| \left\{ k \in I_r : |x_k - L| \ge \varepsilon \right\} \right| = 0$$

sağlanacak şekilde bir L sayısı vardır. Diğer taraftan;

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r^{\alpha}}\left|\left\{k\in I_r : |x_k| \geq |L| + \varepsilon\right\}\right|$$
$$\leq \lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r^{\alpha}}\left|\left\{k\in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

yazabiliriz. Buradan $x=(x_k)$ dizisinin α. dereceden istatistiksel sınırlı olduğu görülür. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için $\theta=(2^r)$ seçelim ve $x=(x_k)$ dizisini de

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = 2n \\ -1, & k \neq 2n \end{cases} \qquad k,\ n \in N$$

olarak tanımlayalım. Bu takdirde $x = S_{\theta}^{\alpha}(b)$ fakat $x \notin S_{\theta}^{\alpha}$ dır.

Teorem 6.10. [28] $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizisi ve $0<\alpha\leq 1$ olsun. Bu takdirde;

i) $S_{\theta}^{\alpha}(b)$ simetrik değildir,

ii) $S_{\theta}^{\alpha}(b)$ normal böylece monotondur,

iii) $S_{\theta}^{\alpha}(b)$ dizi cebiridir.

İspat:

i) $x=(x_k)=(1, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 4,...)\in S_{\theta}^{\alpha}(b)$ olup x in yeni bir düzenlemesi olan $y=(y_k)$ dizisini

$$\begin{aligned}(y_k) &= (x_1,\ x_2,\ x_4,\ x_3,\ x_9,\ x_5,\ x_{16},\ x_6,\ x_{25},\ x_7,\ x_{36},\ x_8,\ x_{45},\ x_{10},...)\\ &= (1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 3,\ 0,\ 4,\ 0,\ 5,\ 0,\ 6,\ 0,\ 7,\ 0,...)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. $\alpha=1$ ve $\theta=(2^r)$ seçelim. Bu takdirde her $M>0$ için;

$$S_{\theta}^{\alpha}\left(\left\{k : |y_k| > M\right\}\right) \neq 0$$

dır.

ii) $x=(x_k)\in S_\theta^\alpha(b)$ ve her $k\in\mathbb{N}$ için $|y_k|\le|x_k|$ olsun. $x\in S_\theta^\alpha(b)$ olduğundan $\delta_\alpha^\alpha\left(\{k:|x_k|>M\}\right)=0$ olacak şekilde bir $M>0$ sayısı vardır. $\{k:|y_k|>M\}\subset\{k:|x_k|>M\}$ olduğundan $y\in S_\theta^\alpha(b)$ dir. Bundan dolayı $S_\theta^\alpha(b)$ normaldir. Her normal dizi uzayı monoton olduğundan $S_\theta^\alpha(b)$ monotondur.

iii) $x,\ y\in S_\theta^\alpha(b)$ olsun. Bu takdirde,

$$S_\theta^\alpha\left(\{k:|x_k|\ge K\}\right)=0 \text{ ve } S_\theta^\alpha\left(\{k:|y_k|\ge M\}\right)=0$$

olacak şekilde $K,\ M>0$ sayıları vardır. Diğer taraftan,

$$\{k:|x_k y_k|\ge K\ M\}\subset\{k:(x_k)>K\}\cup\{k:|y_k|>M\}$$

yazılabileceğinden $S_\theta^\alpha(b)$ nin dizi cebiri olduğunu söyleyebiliriz.

Teorem 6.11. [28] $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizisi ve $\alpha,\ \beta$ sayıları $0<\alpha<\beta\le1$ olacak şekilde iki reel sayı olsun. Bu takdirde $S_\theta^\alpha(b)\subseteq S_\theta^\beta(b)$ dir ve bu kapsama kesindir.

İspat: Kapsama kısmı kolayca gösterilebilir. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için $x=(x_k)$ dizisini,

$$x_k=\begin{cases}\left[\sqrt{h_r}\right], & k=1,2,3,...,\left[\sqrt{h_r}\right]\\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu takdirde $\frac{1}{2}<\beta\le1$ için $x\in S_\theta^\beta(b)$, fakat $0<\alpha\le\frac{1}{2}$ için $x\notin S_\theta^\alpha(b)$dir.

Teorem 6.11'den aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 6.12. [28] Eğer bir dizi α. dereceden lacunary istatistiksel sınırlı ise bu dizi istatistiksel sınırlıdır.

Teorem 6.13. [28] $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizisi ve $0<\alpha\le1$ olsun. $\liminf_r q_r>1$ ise $S^\alpha(b)\subset S_\theta^\alpha(b)$ dir.

İspat: $\liminf_r q_r > 1$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $q_r \geq 1+\delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Bu durum yeterince büyük *r* ler için

$$\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\delta}{1+\delta} \Rightarrow \left(\frac{h_r}{k_r}\right)^{\alpha} \geq \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^{\alpha} \Rightarrow \frac{1}{k_r^{\alpha}} \geq \frac{\delta^{\alpha}}{\left(1+\delta\right)^{\alpha}} \frac{1}{h_r^{\alpha}}$$

yazabiliriz. $(x_k) \in S^{\alpha}(b)$ ise yeterince büyük *r* ler ve $M > 0$ sayısı için

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_r^{\alpha}} \left| \left\{ k \leq k_r : |x_k| > M \right\} \right| &\geq \frac{1}{k_r^{\alpha}} \left| \left\{ k \in I_r : |x_k| > M \right\} \right| \\ &\geq \frac{\delta^{\alpha}}{\left(1+\delta\right)^{\alpha}} \frac{1}{h_r^{\alpha}} \left| \left\{ k \in I_r : |x_k| > M \right\} \right| \end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu ispatı tamamlar.

Teorem 6.14. [28] $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi ve $\alpha \in (0, 1]$ olsun. $\limsup_r q_r < \infty$ ise $S_{\theta}^{\alpha}(b) \subset S(b)$ dir.

İspat: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. $\limsup_r q_r < \infty$ ise $\forall r \in \mathbb{N}$ için $q_r < H$ olacak şekilde $H > 0$ sayısı vardır. $x \in S_{\theta}^{\alpha}(b)$ olsun ve $N_r = \left| \left\{ k \in I_r : |x_k| > M \right\} \right|$ diyelim. Bu takdirde $0 < \alpha \leq 1$ için

$$\lim_r \frac{1}{h_r^{\alpha}} \left| \left\{ k \in I_r : |x_k| > M \right\} \right| = 0$$

olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için bir $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $r > r_0$ için

$$\frac{N_r}{h_r^{\alpha}} < \varepsilon$$

yazabiliriz. Diğer taraftan $h_r^{\alpha} \leq h_r$ olduğundan,

$$\frac{N_r}{h_r} \leq \frac{N_r}{h_r^{\alpha}}$$

olup

$$\frac{N_r}{h_r} < \varepsilon$$

dir.

$M = \max\left\{N_r : 1 \le r \le r_0\right\}$ ve n de $k_{r-1} < n \le k_r$ şartını sağlayan bir tamsayı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \le n : |x_k| > M\right\}\right| &\le \frac{1}{k_{r-1}}\left|\left\{k \le k_r : |x_k| > M\right\}\right| \\
&= \frac{1}{k_{r-1}}\left\{N_1 + N_2 + N_3 + \cdots + N_{r_0} + N_{r_0+1} + \cdots + N_r\right\} \\
&\le \frac{M}{k_{r-1}} r_0 + \frac{1}{k_{r-1}}\left\{h_{r_0+1}\frac{N_{r_0+1}}{h_{r_0+1}} + \cdots + h_r \frac{N_r}{h_r}\right\} \\
&\le \frac{r_0 M}{k_{r-1}} + \frac{1}{k_{r-1}}\left(\sup_{r \to r_0} \frac{N_r}{h_r}\right)\left\{h_{r_0+1} + \cdots + h_r\right\} \\
&\le \frac{r_0 M}{k_{r-1}} + \frac{k_r - k_{r_0}}{k_{r-1}}
\end{aligned}$$

Teorem 6.15. [28] $\liminf\limits_{r\to\infty} \frac{h_r^\alpha}{k_r} > 0$ ise

$$S(b) \subset S_\theta^\alpha(b)$$

dir.

İspat: $M > 0$ için

$$\left\{k \le k_r : |x_k| > M\right\} \supset \left\{k \in I_r : |x_k| > M\right\}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k_r}\left|\left\{k \le k_r : |x_k| > M\right\}\right| &\ge \frac{1}{k_r}\left|\left\{k \in I_r : |x_k| > M\right\}\right| \\
&= \frac{h_r^\alpha}{k_r}\frac{1}{h_r^\alpha}\left|\left\{k \in I_r : |x_k| > M\right\}\right|
\end{aligned}$$

yazılabilir. Son ifadede $r \to \infty$ için limit alınırsa

$$x \in S_\theta^\alpha(b)$$

olduğu görülür.

Teorem 6.16. [28] $I_r = (k_{r-1},\ k_r]$, $J_r = (s_{r-1} - s_r]$, $h_r = k_1 - k_{r-1}$ ve $\ell_r = s_r - s_{r-1}$ olmak üzere, $\theta = \{k_r\}$ ve $\theta' = (s_r)$ iki lacunary dizi ve $\forall r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subset J_r$ olsun. α ve β sayılarını da $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olacak şekilde seçelim.

(i) Eğer

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{h_r^{\alpha}}{\ell_r^{\beta}} > 0 \qquad (6.1)$$

ise

$$S_{\theta}^{\beta}(b) \subseteq S_{\theta}^{\alpha}(b)$$

(ii) Eğer

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ell_r}{h_r^{\beta}} = 1 \qquad (6.2)$$

ise

$$S_{\theta}^{\alpha}(b) \subseteq S_{\theta}^{\beta}(b)$$

dir.

İspat:

(i) $\forall r \in \mathbb{N}$, $I_r \subset J_r$ ve $\forall M > 0$ için

$$\{k \in J_r : |x_k| > M\} \supseteq \{k \in I_r : |x_k| > M\}$$

olduğundan

$$\frac{1}{\ell_r^{\beta}} \left|\{k \in J_r : |x_k| > M\}\right| \geq \frac{h_r^{\alpha}}{\ell_r^{\beta}} \frac{1}{h_r^{\alpha}} \left|\{k \in I_r : |x_k| > M\}\right|$$

yazabiliriz. $r \to \infty$ için limit alınır ve (6.1) kullanılırsa

$$S_{\theta'}^{\beta}(b) \subset S_{\theta}^{\alpha}(b)$$

elde edilir.

(ii) $x \in S_{\theta}^{\alpha}(b)$ olsun ve (6.2) sağlansın.

$I_r \subset J_r$ olduğundan $\forall M > 0$ ve $r \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ell_r^{\beta}}\left|\left\{k \in J_r : |x_k| > M\right\}\right| &= \frac{1}{\ell_r^{\beta}}\left|\left\{s_{r-1} < k \le k_{r-1} : |x_k| > M\right\}\right| \\
&+ \frac{1}{\ell_r^{\beta}}\left|\left\{k_{r-1} < k \le k_r : |x_k| > M\right\}\right| \\
&+ \frac{1}{\ell_r^{\beta}}\left|\left\{k_r < k < s_r : |x_k| > M\right\}\right| \\
&\le \frac{k_{r-1} - s_{r-1}}{\ell_r^{\beta}} + \frac{s_r - k_r}{\ell_r^{\beta}} + \frac{1}{\ell_r^{\beta}}\left|\left\{x \in I_r : |x_k| > M\right\}\right| \\
&= \frac{\ell_r - h_r}{\ell_r^{\beta}} + \frac{1}{\ell_r^{\beta}}\left|\left\{k \in I_r : |x_k| > M\right\}\right| \\
&\le \frac{\ell_r - h_r^{\beta}}{h_r^{\beta}} + \frac{1}{h_r^{\beta}}\left|\left\{k \in I_r : |x_k| > M\right\}\right| \\
&\le \left(\frac{\ell_r}{h_r^{\beta}} - 1\right) + \frac{1}{h_r^{\alpha}}\left|\left\{k \in I_r : |x_k| > M\right\}\right|
\end{aligned}$$

(6.2) kullanılırsa $x \in S_{\theta'}^{\beta}(b)$ elde edilir.

$\theta = \{k_r\}$ ve $\theta' = \{s_r\}$ dizileri ve α sayısı özel olarak seçilirse aşağıdaki sonuçlar elde edilir

(i) $S_{\theta'}^{\alpha}(b) \subseteq S_{\theta}^{\alpha}(b),\ \alpha \in (0,\ 1]$

(ii) $S_{\theta'}(b) \subseteq S_{\theta}^{\alpha}(b),\ \alpha \in (0,\ 1]$

(iii) $S_{\theta'}(b) \subseteq S_{\theta}(b)$

(iv) $S_{\theta}^{\alpha}(b) \subseteq S_{\theta'}^{\alpha}(b),\ \alpha \in (0,\ 1]$

(v) $S_{\theta}(b) \subseteq S_{\theta'}(b),\ \alpha \in (0,\ 1]$

(vi) $S_{\theta}(b) \subseteq S_{\theta'}(b)$.

7. α. DERECEDEN f-LACUNARY İSTATİSTİKSEL SINIRLILIK

Bu bölümde f sınırsız bir modülüs fonksiyonu, $\theta=\{k_r\}$ lacunary dizisi ve $\alpha\in(0,\ 1]$ olmak üzere lacunary istatistiksel sınırlılık kavramı, α. dereceden *f*-lacunary istatistiksel sınırlılık kavramına genelleştirilecektir. Bu kısım tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır.

Tanım 7.1. $f:[0,\ \infty)\to[0,\ \infty)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa f ye bir modülüs fonksiyonu denir.

i) $f(x)=0 \ \Leftrightarrow\ x=0,$

ii) *Her* $x,\ y\geq 0$ $f(x+y)\leq f(x)+f(y),$

iii) *f* artan,

iv) *f* fonksiyonu 0 da sağdan süreklidir.

Yukarıdaki özelliklerden f fonksiyonun $[0,\ \infty)$ aralığında her yerde sürekli olduğu sonucu çıkar. Bir modülüs fonksiyonu sınırlı veya sınırsız olabilir. Örneğin, $f(x)=x^p\ (0<p\leq 1)$ fonksiyonu sınırsız, ancak $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ fonksiyonu sınırlıdır.

$E\subset\mathbb{N}$ cümlesinin *f*-yoğunluğu ve *f*-istatistiksel yakınsaklığı Aizpuru ve arkadaşları [35] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlandı.

f sınırsız bir modülüs fonksiyonu ve $E\subset\mathbb{N}$ olsun, eğer

$$d^f(E)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\left|\{k\leq n:k\in E\}\right|\right)}{f(n)}$$

limiti mevcut ise *E* cümlesi *f*-yoğunluğa sahiptir denir, yine sınırsız bir *f* modülüs fonksiyonu için

$$d^f\left(\{k\in N:|x_k-L|\geq\varepsilon\}\right)=0,$$

yani

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{f(n)}f\left(\left|\{k\leq n:|x_k-L|\geq\varepsilon\}\right|\right)=0,$$

ise $x=(x_k)$ dizisi L sayısına *f*-istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $S^f-\lim x_k=L$ *veya* $x_k\to L(S^f)$ yazarız. Her *f*-istatistiksel yakınsak dizi istatistiksel yakınsaktır, ancak tersi doğru değildir. Doğal sayıların bir alt kümesinin α.dereceden lacunary *f*-yoğunluğu ve bir $x=(x_k)$ dizisinin α. dereceden lacunary *f*-istatistiksel yakınsaklığı kavramı Şengül ve Et [36] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlandı.

Tanım 7.2. $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizisi, $\alpha\in(0,1]$ ve f bir sınırsız modülüs fonksiyonu olsun,

$$\delta_\theta^{f,\alpha}(E)=\lim_r\frac{1}{f(h_r)^\alpha}f\left(\left|\{k_{r-1}<k\le k_r:k\in E\}\right|\right),$$

limiti mevcut ise doğal sayıların bir E altkümesi α.dereceden lacunary *f*-yoğunluğa sahiptir denir. $\alpha=1$, $f(x)=x$ ve $\theta=(2^r)$ seçilirse α.dereceden lacunary *f*-yoğunluk doğal yoğunluğa indirgenir.

$x=(x_k)$ α.dereceden lacunary *f*-yoğunluğu sıfır olan bir cümle hariç her k için P özelliğini sağlayacak şekilde bir dizi ise x_k " α ve *f* ye göre hemen hemen her *k*" için P özelliğini sağlar deriz ve bunu kısaca $"a.a.k_r(f\alpha)"$ şeklinde yazarız.

Önerme 7.3. $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizisi ve $\alpha,\beta\in(0,1]$ sayıları $\alpha\le\beta$ olacak şekilde iki sayı olsun. Bu takdirde

$$\delta_\theta^{f,\beta}(E)\le\delta_\theta^{f,\alpha}(E)$$

dir.

İspat: İspat aşağıdaki eşitlikten elde edilir.

$$\frac{1}{f(h_r)^\beta}f\left(\left|\{k_{r-1}<k\le k_r:k\in E\}\right|\right)\le\frac{1}{f(h_r)^\alpha}f\left(\left|\{k_{r-1}<k\le k_r:k\in E\}\right|\right)$$

Tanım 7.4. [36] $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizisi, $\alpha\in(0,1]$ ve f bir sınırsız modülüs fonksiyonu olsun.

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{f(h_r)^\alpha}f\left(\left|\{k\in I_r:|x_k-L|\ge\varepsilon\}\right|\right)=0,$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x=(x_k)$ dizisine α.dereceden lacunary *f*-istatistiksel yakınsaktır denir. Tüm α. dereceden lacunary f-istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $S_\theta^{f,\alpha}$ ile gösterilecektir. $f(h_r)^\alpha$ ile $f(h_r)$ nin α. kuvvetini göstereceğiz, yani $f(h_r)^\alpha$ $\left(f(h_r)^\alpha\right)=\left(f(h_1)^\alpha, f(h_2)^\alpha, ..., f(h_r)^\alpha, ...\right)$ olarak tanımlanacaktır.

Tanım 7.5. $\theta=\{k_r\}$ bir lacunary dizisi, $\alpha\in(0,1]$ ve f bir sınırsız modülüs fonksiyonu olsun.

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{f(h_r)^\alpha} f\left(\left|\{k\in I_r : |x_k|>M\}\right|\right)=0, \ \ yani \ \ |x_k|\le M \ \ a.a.k_r\,(f\alpha)$$

olacak şekilde bir M sayısı varsa $x=(x_k)$ dizisine α.dereceden lacunary *f*-istatistiksel sınırlıdır denir. Tüm α. dereceden lacunary f-istatistiksel sınırlı dizilerin kümesi $S_\theta^{f,\alpha}(b)$ ile gösterilecektir. Bu tanımda f fonksiyonun, θ lacunary dizisinin ve α sayısının özel seçilişlerine göre bazı dizi uzayları elde edilir. Örneğin,

i) $f(x)=x$ ise $S_\theta^{\alpha}(b)$,

ii) $\theta=(2^r)$ ise $S^{f,\alpha}(b)$,

iii) $\alpha=1$ ise $S_\theta^{f}(b)$,

iv) $\theta=(2^r)$ ve $\alpha=1$ *ise* $S^f(b)$.

v) $f(x)=x$, $\theta=(2^r)$ ve $\alpha=1$ *ise* $S\ (b)$

uzayları elde edilir.

Teorem 7.6. Her α.dereceden lacunary *f*-istatistiksel yakınsak dizi α. dereceden lacunary *f*-istatistiksel sınırlıdır, fakat tersi doğru değildir.

İspat. $x=(x_k)$ dizisi α.dereceden lacunary *f*-istatistiksel yakınsak ve $\varepsilon>0$ olsun. Bu takdirde,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{f(h_r)^\alpha} f\left(\left|\{k\in I_r : |x_k-L|\ge\varepsilon\}\right|\right)=0$$

olacak şekilde bir L sayısı vardır.

$$\{k \in I_r : |x_k| > |L| + \varepsilon\} \subset \{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$$

olduğundan

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{f(h_r)^{\alpha}} f\left(\left|\{k \in I_r : |x_k| > |L| + \varepsilon\}\right|\right) \leq \lim_{r\to\infty} \frac{1}{f(h_r)^{\alpha}} f\left(\left|\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right|\right)$$

yazabiliriz. Bu $x = (x_k)$ dizisinin α. dereceden f -istatistiksel sınırlı olması demektir.

Tersi için $\theta = (2^r)$, $f(x) = x$ alalım ve $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = 2n \\ -1, & k \neq 2n \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{N}$$

olarak tanımlayalım. Bu takdirde $x \in S_\theta^{f,\alpha}(b)$, *fakat* $x \notin S_\theta^{f,\alpha}$ dır.

Teorem 7.7. Her sınırlı dizi α. dereceden lacunary *f*-istatistiksel sınırlıdır, fakat tersi doğru değildir.

İspat. $x = (x_k)$ dizisi sınırlı bir dizi ise $\delta_\theta^{f,\alpha}(E) = 0$ olacağından dizi α. dereceden lacunary *f*-istatistiksel sınırlıdır.

Tersi için $f(x) = x^p \, (0 < p \leq 1)$, $\theta(2^r)$, $\alpha = 1$ alalım ve $x = (x_k)$ dizisini $x = (1, 0, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 9, \ldots)$ olarak tanımlayalım. Bu takdirde $A = \{1, 4, 9, \ldots\}$ olmak üzere

$$\delta_\theta^{f,\alpha}\left(\{k \in \mathbb{N} : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}\right) = \delta_\theta^{f,\alpha}(A)$$

dir. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left|\{k \leq n : k \in A\}\right| \leq \sqrt{n}$$

olup $n \to \infty$ için

$$\frac{f\left(\left|\{k \leq n : k \in A\}\right|\right)}{f(n)} \leq \frac{\left(\sqrt{n}\right)^p}{n^p} \to 0$$

dir. O halde $x=(1,\ 0,\ 0,\ 4,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 9,...)$ dizisi α. dereceden lacunary *f*-istatistiksel sınırlı, fakat sınırlı değildir.

Teorem 7.8. Her yakınsak dizi α. dereceden lacunary *f*-istatistiksel sınırlıdır, fakat tersi doğru değildir.

İspat. $x=(x_k)$ dizisi yakınsak bir dizi ise $\delta_\theta^{f,\alpha}(E)=0$ olacağından dizi α. dereceden lacunary *f*-istatistiksel sınırlıdır. $x=(1,\ 0,\ 0,\ 4,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 9,...)$ dizisi α. dereceden lacunary *f*-istatistiksel sınırlı, fakat yakınsak değildir.

Teorem 7.9. Her α. dereceden lacunary *f*-istatistiksel sınırlı dizi lacunary istatistiksel sınırlıdır, fakat tersi doğru değildir.

İspat. $E\subset\mathbb{N}$ için $\delta_\theta^{f,a}(E)=0$ ise $\delta_\theta^{\alpha}(E)=0$ dır, bu yüzden her α. dereceden lacunary *f*-istatistiksel sınırlı her dizi lacunary istatistiksel sınırlıdır.

Tersi için $f(x)=\log(x+1),\ \theta=(2^r),\ \alpha=1$ alalım ve $x=(x_k)$ dizisini $x=(1,\ 0,\ 0,\ 4,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 9,...)$ olarak tanımlayalım. Bu takdirde $A=\{1,\ 4,\ 9,...\}$ olmak üzere herhangi bir $M>0$ için $\{k\in N:|x_k|\geq M\}=A-\mathbb{N}$nin sonlu bir alt kümesi olup $\delta_\theta^{f,\alpha}(A)=\dfrac{1}{2}\neq 0$ ve $\delta_\theta^{\alpha}(A)=0$ olduğundan $x=(1,\ 0,\ 0,\ 4,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 9,...)$ dizisi lacunary istatistiksel sınırlıdır fakat α. dereceden lacunary *f*-istatistiksel sınırlı değildir.

Teorem 7.10. $\alpha,\ \beta\in(0,\ 1]$ olmak üzere $\alpha\leq\beta$ için, α. dereceden lacunary *f*-istatistiksel sınırlı her dizi β. dereceden lacunary *f*-istatistiksel sınırlı, fakat tersi doğru değildir.

İspat. Önerme 7.3 den $\alpha,\ \beta\in(0,\ 1]$ olmak üzere $\alpha\leq\beta$ için $\delta_\theta^{f,\beta}(E)\leq\delta_\theta^{f,\alpha}(E)$ olduğundan her α. dereceden lacunary *f*-istatistiksel sınırlı dizi β. dereceden lacunary *f*-istatistiksel sınırlıdır.

Tersi için $x=(x_k)$ dizisini

$$x_k=\begin{cases}\left[\sqrt{h_r}\right], & k=1,\ 2,\ 3,...,\left[\sqrt{h_r}\right]\\ 0, & diğer\ durumlarda\end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım, bu takdirde $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ için $x \in S_\theta^{\beta, f}(b)$, fakat $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ için $x \notin S_\theta^{\alpha, f}(b)$ dir.

Teorem 7.10 dan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 7.11. Her α. dereceden lacunary *f*-istatistiksel sınırlı dizi lacunary *f*-istatistiksel sınırlı, fakat tersi doğru değildir.

Teorem 7.12. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi, $\alpha \in (0, 1]$ ve f bir sınırsız modülüs fonksiyonu olsun. Bu takdirde

i) $S_\theta^{\alpha, f}(b)$ simetrik değildir,

ii) $S_\theta^{\alpha, f}(b)$ normal böylece monotondur,

iii) $S_\theta^{\alpha, f}(b)$ dizi cebiridir.

İspat. i) $x = (x_k) = (1, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 4, ...) \in S_\theta^{\alpha, f}(b)$ olup bu dizinin yeniden düzenlenmesi ile elde edilen

$$\begin{aligned}(y_k) &= (x_1, x_2, x_4, x_3, x_9, x_5, x_{16}, x_6, x_{25}, x_7, x_{36}, x_8, x_{49}, x_{10}, ...) \\ &= (1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, 6, 0, 7, 0, ...)\end{aligned}$$

dizisini göz önüne alalım. Açıkça $M > 0$ için $\delta_\theta^{f, \alpha}(\{k : |y_k| > M\}) \neq 0$ olup $y \notin S_\theta^{\alpha, f}(b)$ dir.

ii) $x = (x_k) \in \delta_\theta^{f, \alpha}(b)$ olsun. $y = (y_k)$ dizisini $k \in \mathbb{N}$ için $|y_k| \leq |x_k|$ eşitsizliği sağlanacak şekilde seçelim. $x \in \delta_\theta^{f, \alpha}(b)$ olduğundan $S_\theta^{\alpha, f}(\{k : |x_k| > M\}) = 0$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Buradan $\{k : |y_k| > M\} \subset \{k : |x_k| > M\}$ olup $y \in S_\theta^{f, \alpha}(b)$ dır. Böylece $S_\theta^{\alpha, f}(b)$ normaldir. Her normal dizi uzayı monoton olduğundan $S_\theta^{\alpha, f}(b)$ monotondur.

iii) $x, y \in S_\theta^{\alpha, f}(b)$ olsun. Bu takdirde $S_\theta^{\alpha, f}(\{k : |x_k| \geq K\}) = 0$ ve $S_\theta^{\alpha, f}(\{k : |y_k| \geq M\}) = 0$ olacak şekilde $K, M > 0$ sayıları vardır. Diğer taraftan

$$\{k : |x_k y_k| \geq K.M\} \subset \{k : |x_k| > K\} \cup \{k : |y_k| > M\}$$

olup, $S_{\theta}^{\alpha,f}(b)$ uzayı dizi cebiridir.

8. SONUÇ

Reel veya kompleks terimli dizilerin istatistiksel sınırlılığı Fridy ve Orhan [27] tarafından tanımlandı. Daha sonra Bhardwaj ve arkadaşları ([17],[18]) konu ile ilgili çalışmalar yaptılar, bu kavram Et ve arkadaşları [28] tarafından genelleştirildi. Bu çalışmada reel veya kompleks terimli dizilerin α. dereceden f-lacunary istatistiksel istatistiksel sınırlılığı tanımlandı ve dizilerin istatistiksel sınırlılığı ile aralarındaki ilişki verildi.

KAYNAKLAR

[1] **Zygmund, A.** 1979 Trigonometric Series, Cambridge University Press, Cambridge, UK,

[2] **Steinhaus, H.**, 1951. Sur La Convergence Ordinaire Et La Convergence Asymptotique, *Colloquium Mathematicum*, **2,** 73-74.

[3] **Fast, H.**, 1951. Sur La Convergence Statistique, *Colloq. Math.*, **2,** 241-244.

[4] **Schoenberg, I. J.**, 1959. The Integrability of Certain Functions and Related Summability Methods, *Amer. Math. Monthly*, **66**, 361-375.

[5] **Fridy, J.** 1985. On Statistical Convergence, *Analysis* **5**, 301-313.

[6] **Connor, J. S.**, 1988. The Statistical and Strong p-Cesaro Convergence of Sequences, *Analysis* **8**, 47-63.

[7] **Savaş, E.**, 2000. Strong Almost Convergence and Almost λ-Statistically Convergence, *Hokkaido Math. J.* **29,** 531-536.

[8] **Mursaleen, M.,** 2000. $\lambda -$Statistical Convergence, *Math. Slovaca,* **50(1),** 111-115.

[9] **Fridy, J. A. ve Orhan, C.,** 1993. Lacunary Statistical Convergence, *Pacific J. Math*. **160** (1) 43-51.

[10] **Fridy, J. A. ve Orhan, C.,** 1993. Lacunary Statistical Summability, *J. Math. Anal. Appl.* **173** (2) 497-504.

[11] **Moricz, F.**, 2003. Statistical Convergence of Multiple Sequences, *Arch. Math.*, **81,** 82-89.

[12] **Rath, D. ve Tripathy, B. C.**, 1994. On Statistically Convergent and Statistically Cauchy Sequences, *Indian J. Pure. Appl. Math.*, **25(4),** 381-386.

[13] **Salat, T.**, 1980. On Statistically Convergent Sequences of Real Numbers, *Math. Slovaca,* **30,** 139-150.

[14] **Bhardwaj, V. K. ve Bala, I.**, 2007. On Weak Statistically Convergence, *Int. J. Math. and Math. Sci. Vol. Article* ID 38530.

[15] **Bhardwaj, V. K. ve Dhawan, S**. 2017 Density by Moduli and Wijsman Lacunary Statistical Convergence of Sequences of Sets. *J. Inequal. Appl.* Paper No. **25**, 20 pp

[16] **Bhardwaj, V. K. ve Dhawan, S**. 2016 Density by Moduli and Lacunary Statistical Convergence. *Abstr. Appl. Anal.* ,4 Art. ID 9365037, 11 pp.

[17] **V. K Bhardwaj, V.K. ve Gupta**, **S.** On Some Generalizations of Statistical Boundedness, J. Inequal. Appl. 2014, 2014:12.

[18] **Bhardwaj, V. K. ve Dhawan, S.** *f*-Istatistical Convergence of Order α and Strong Cesàro Summability of Order α with Respect to a Modulus. *J. Inequal. Appl*. 2015, 2015:332, 14.

[19] **Gadjiev, A. D. ve Orhan, C.** 2002 Some Approximation Theorems via Statistical Convergence, Rocky Mountain J. Math. **32(1)**, 129-138.

[20] **Bhunia, S. ; Das, P. ve Pal, S. K.** 2012, Restricting Statistical Convergence. *Acta Math. Hungar*. **134(1-2)**, 153--161.

[21] **Çolak, R.** , 2010, Statistical Convergence of Order α, Modern Methods in Analysis and Its Applications, New Delhi, India: Anamaya Pub, 121--129.

[22] **Çolak, R.**, 2011. On $\lambda -$Statistical Convergence, *Conference on Summability and Aplications,* Commerce University, May 12-13, Istanbul, Turkey.

[23] **Çolak, R. ve Bektaş, Ç. A.,** 2011. On $\lambda -$Statistical Convergence of Order α, *Acta Math. Sci.*, **31(3)**, 953-959.

[24] **Et, M. ve Şengül, H.** 2014. SomeCesàro-type Summability Spaces of Order α and Lacunary Statistical Convergence of Order α, *Filomat* **28(8)**, 1593--1602.

[25] **Şengül, H. ve Et, M.** 2014. On Lacunary Statistical Convergence of Order α, Acta *Math. Sci. Ser. B* Engl. Ed. **34(2),** 473--482.

[26] **Şengül, H. ve Et, M**. 2017. On I-Lacunary Statistical Convergence of Order α of Sequences of sets. *Filomat* 31(**8)**, 2403--2412.

[27] **Fridy, J. A. Orhan**, 1997 C. Statistical Limit Superior and Limit Inferior, Proc. Amer. Math. Soc. **125(12)** , 3625–3631.

[28] **Et, M, Mohiuddine, S. A. ve Şengül, H.** 2016 On lacunary Statistical Boundedness of Order α, Facta Univ. Ser. Math. Inform. **31(3)**, 707–716.

[29] **Maddox, I. J.** 1970. Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, Second Edition.

[30] **Kreyszıg, E.** 1978. Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York

[31] **Niven, I., Zucherman, H. S. ve Montgomery, H. L.** 1991. An Introduction to The Theory of Numbers. *Fifth Ed.*, John Wiley, New York.

[32] **Freedman, A. R., Sember, J. J. ve Raphael, M.,** 1978. Some Cesaro-type Summability Spaces, *Proc. Lond. Math*. Soc. (3) 37, 508-520.

[33] **Şengül, H.** 2013. α. Derceden Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık ve α. dereceden I-Yakınsaklık, Doktor Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

[34] **Bhardwaj, Vinod K.**; **Gupta, S. Mohiuddine, S.A. Kılıçman, A**. 2014 On Lacunary Statistical Boundedness. *J. Inequal. Appl.* 2014:311, 11 pp

[35 **]** **Aizpuru, M. C., Listán-García ve F. Rambla-Barreno**, 2014 Density by Moduli and Statistical Convergence, *Quaest. Math*. **37(4)** 525–530.

[36] **Şengül, H. ve Et**, **M.** *f*-Lacunary Statistical Convergence and Strong *f*-Lacunary Summability of Order α, Filomat **32(13)** (2018), 4513–4521

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Elazığ'ın Palu ilçesinde doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2007 yılında Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2012 yılında Uludağ Üniversitesinden mezun oldum. 2015 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim dalında yüksek lisansa başladım. Bingöl Atatürk Anadolu Lisesi'nde Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktayım