Sonlu Doymuş Graflar Üzerine

Gizem Kımıli

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı

Mayıs 2018

On Finite Saturated Graphs

Gizem Kımıli

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics - Computer

May 2018

Sonlu Doymuş Graflar Üzerine

Gizem Kımılı

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. İbrahim Günaltılı

Mayıs 2018

ONAY

Matematik – Bilgisayar Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS öğrencisi Gizem Kımılı' nin YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı **" Sonlu Doymuş Graflar Üzerine ''** başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oy birliği ile kabul edilmiştir.

Danışman **:** Prof. Dr. İbrahim Günaltılı

İkinci Danışman : -

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi :

Üye : Prof. Dr. İbrahim Günaltılı

Üye : Prof. Dr. Özcan Gelişgen

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Mustafa Saltan

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu' nun ……………… tarih ve ……………………… sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet ERŞAHAN

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof.Dr.İbrahim GÜNALTILI' nın danışmanlığında hazırlamış olduğum "Sonlu Doymuş Graflar Üzerine" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 11/05/2018

Gizem Kımıli

ÖZET

Bu tez çalışmasında Sharon G. Boswell, James A. Macdougall ve Roger B. Eggleton,“Minimally Path-Saturated Graphs” (1999) adlı makalesinin ilk sekiz bölümü incelenmiştir. Özel olarak seçilen şekiller tamamen bu makaleden alınmıştır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmış, ikinci bölümde literatür taraması yapılmıştır. Üçüncü bölümde graflara ilişkin temel kavramlara yer verilmiştir. Dördüncü bölümde ağaçlar incelenmiştir. Beşinci bölümde yol graflarının hangilerinin doymuş hangilerinin minimal doymuş olduğu incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler : Graf, Ağaçlar, Euler – Hamilton Graflar, Yol, Çevre, Doymuş Graflar

SUMMARY

In this thesis study, the first eight chapter of the article, Sharon G. Boswell,James A. Macdougall and Roger B. Eggleton "Minimally Path-Saturated Graphs" (1999) is observed. Specially selected shapes have been completely taken from this article. The first chapter is devoted to introduction. In the second part, a literature search is conducted. In the third chapter definitions of basic concepts are given, with associated graphs. Then, in fourth chapters trees and their applications are examined. In the fifth chapter, it will be examined which of the path graphs are saturated and minimally saturated.

Keywords : Graph, Trees, Path, Cycle, Digraph, Eulerian Graph, Hamiltonian Graph, Saturated Graph

TEŞEKKÜR

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca yardımlarını esirgemeyen aynı zamanda bu tez konusunun verilmesinde ve çalışmaların yönlendirilmesinde yapmış olduğu katkılarından dolayı danışmanım sayın Prof.Dr. İbrahim GÜNALTILI `ya çok teşekkür ederim.

Ve aynı zamanda maddi ve manevi olarak yardımlarını esirgemeyen çok değerli aileme özellikle ANNEM ‘e teşekkür eder saygılarımı sunmayı borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil **Sayfa**

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

Şekil **Sayfa**

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

Şekil **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
C_n	n Düğümlü Çevre Grafı
$d(x)$	x Düğümünün Derecesi
$E\ (G)$	Ayrıtlar Kümesi
$G \times H$	G ve H graflarının Kartezyen Çarpımı
$G \cong H$	İzomorf G ve H grafı
$Girt\ (G)$	G Grafının Girti
$G = (V, E)$	V Düğümlü, E Ayrıtlı Graf
$K_{m,n}$	İki Kümeli Graf
K_n	n Düğümlü Tam Graf
$N(x)$	x Düğümünün Komşuluğu
P_m	m Düğümlü Yol Grafı
T_n	n Düğümlü Ağaç
$V(G)$	Düğümler Kümesi
X	Bağımsız Küme
$\lfloor x \rfloor$	x in Tam Değeri

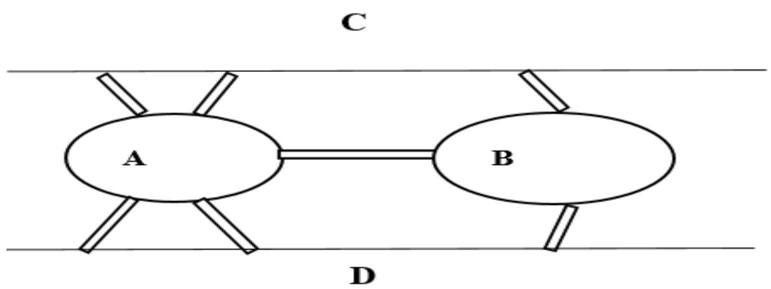
1. GİRİŞ VE AMAÇ

Graflarda yollar temel yapısal özelliklerin (bağlılık, çap, en kısa uzunluk vb.) belirlenmesindeki rolü nedeniyle çok çalışılmıştır. Bu tezde sabit uzunluklu yolların varlığı incelenecek ve bu yolların varlığına göre kritik olan graf sınıfı belirlenmeye çalışılacaktır. Bu tezde çalışılan graflar; basit (ilmik ya da katlı ayrıt içermez) ve sonlu graflardır. Grafların standart gösterimi ve terminolojisi için "J.A. Bondy, U.S.R. Murty' nin "Graph Theory With Applications'' (1985) adlı kitabı ve "R.B. Eggleton , J.A. MacDougall' ın Triangle free and triangle saturated graphs''(1997) adlı makalesi takip edilmiştir.

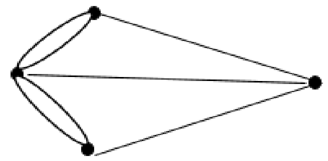
Bu tez çalışmasında Sharon G. Boswell, James A. Macdougall ve Roger B. Eggleton'ın "Minimally Path-Saturated Graphs" (1999) adlı makalesinin ilk sekiz bölümü incelenmiştir. Kaynakçada belirtilmiş olan diğer çalışmaların da göz önüne alınmasıyla sonlu yolların doymuşluğunun belirlenmesi amaçlanmıştır.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Prusya'daki Königsberg kasabası, içinden Pregel nehri geçen ve bu nehrin ortasında şehrin kıyılarına ve birbirine toplam yedi köprü ile bağlı olan iki adadan oluşan bir kasabadır. 18. yüzyılda bu kasabanın sakinleri şu sorunun yanıtını aramışlardır: Herhangi bir noktadan harekete başlayıp, yedi köprünün hepsinden bir ve yalnız bir kez geçip, şehrin bütün bölümlerini dolaştıktan sonra başlangıç noktasına varılabilir mi? Bu dönemin ünlü matematikçilerinden biri olan Leonhard Euler (1707,1783), bu problemin çözümünün olmadığını 1736 yılında yazmış olduğu bir makalesinde göstererek graf teorisinin temellerini atmış bulunmaktadır. Euler, bu problemin çözümünde öncelikle Königsberg coğrafyasını; şehrin kara parçalarını birer nokta, kara parçalarını bağlayan köprüleri de birer çizgi ile gösteren bir şekil ile ifade etmiştir (Şekil 2.2). Şehrin kara parçalarının temsili olan noktalara düğüm, köprülerin temsili olan çizgilere ayrıt ismi verildiğinde graf teorisi için bu problem:" Herhangi bir düğümden başlayarak bütün ayrıtlardan bir defa geçmek şartı ile bütün düğümleri ziyaret edip başlangıç düğümüne geri dönmek mümkün müdür? " halini alır. Daha özet bir ifade ile; grafın tüm ayrıtlarını içeren kapalı bir gezi var mıdır? Graf teori kullanarak bu problemin çözümünün olmadığı Euler tarafından gösterilmiştir.



Şekil 2.1 Könisgberg Köprüsü Temsili

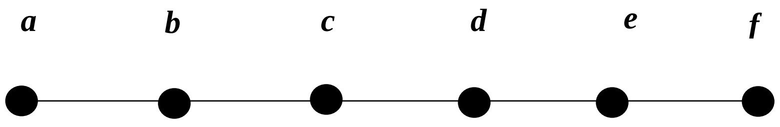


Şekil 2.2 Könisgberg Köprüsünün Graf Temsili

1852 yılında bir başka matematikçi olan Augusto De Morgan, Sir William Rowan Hamilton a yazdığı bir mektupta öğrencisinin, İngiltere haritasındaki şehirleri, birbirine komşu olanları farklı renklerle boyamanın mümkün olduğunu fakat bunu matematiksel bir şekilde ispat edemediğini ifade etmiştir. Sonrasında dört renk problemi olarak adlandırılacak olan bu problem, 1976 yılında Kenneth İra Appel ve Wolfgang Hakken tarafından bilgisayar yardımı ile çözülebilmiştir. Böylece Könisgberg ve Dört Renk Problemlerinin çözümleri ile matematiğin yeni bir uygulama alanı olan graf teorisi doğmuştur. (Doğanaksoy Ali, Graf Teorisi, 1993, Matematik Dünyası)

Graf teori, problemleri tanımlama ve yapısal ilişkilendirmede kullanılır. Pek çok problemin çözümünde graf teori kullanılmaktadır. Bu nedenle graf teori ile ilgili çalışmalar zamanla çoğalmıştır. J.A. Bondy ve U.S.R Murty, 1985, D.B. West (1996) yaptıkları çalışmalarında graf ile ilgili bilgiler vermiş ve örnekler yardımıyla grafın daha anlaşılır olmasını sağlamışlardır.

Bu çalışmalar sonucunda bir graf basitçe düğümler arasındaki ilişkileri belirleyen ayrıt parçalarından oluşan sistem olarak tanımlanabilir. Örneğin, Şekil 2.3 de verilen model bir graf temsilidir.



Şekil 2.3 a-f yolu

Bir grafta düğüm sayısı sonsuz olabilir. Düğümlerin konumları, ayrıt uzunlukları, ayrıt ve düğüm şekilleri önemli değilken ayrıtların varlıkları önemlidir. Bu tezde incelenen yollar da grafların özel bir halidir. S.G Boswell, R.B Eggleton ve J.A MacDougall' ın 1999 yılında yaptıkları çalışmalarında bu graf sınıfının doymuşluğu ile ilgili önemli bilgiler vermiştir.

Ayrıca K_3 - serbest ve K_3 - doymuş graflarla ilgili çalışmalar, R.B Eggleton, J.A. MacDougall (1996, 1997, 1998) tarafından yapılmıştır.

Bu tezde $m \geq 3$ için P_m , $m -$ uzunluklu yol olmak üzere, P_m – doymuş ve minimal P_m – doymuş graflar incelenecektir.

(P_m ; m düğümlü ve $m - 1$ uzunluklu yolu belirtmek için kullanılacaktır.)

3. TEMEL KAVRAMLAR

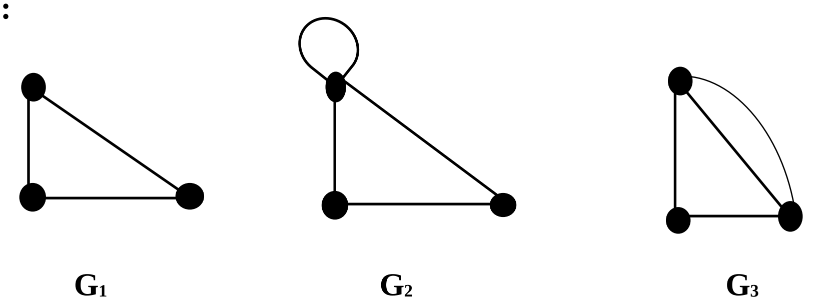
Tanım 3.1 : V$\neq \emptyset$, k $\in Z^+$ olsun. V kümesinin k elemanlı alt kümelerinin ailesi $[V]^k$ ile gösterilsin. $1\leq k \leq 2$ olsun. V düğümlerinin kümesi, E ayrıtlarının kümesi, ϕ üzerinde bulunma bağıntısı ve $V \cap E = \emptyset$ olmak üzere, $\phi\colon E \rightarrow [V]^2 \cup [V]^1$ bağıntısı bir fonksiyonsa $G = (V, E, \phi)$ üçlüsüne bir "**graf** " denir. $e = \{ x, y \} \in E$ ayrıtı bazen $e = xy$ ile gösterilecektir. Buradaki x ve y düğümlerine e ayrıtının uçları denir.

Eğer $\phi : E \rightarrow [V]^2$ fonksiyonu birebir fonksiyonsa G ye **basit graf (simple graph)** denir. Basit graflar için $G = (V, E, \phi)$ ifadesi yerine $G = (V, E)$ gösterimi kullanılır. Basit graf tanımı, "V elemanları düğümler olarak adlandırılan boştan farklı bir küme, E de elemanları ayrıtlar olarak adlandırılan ve V nin ikili alt kümelerinin bir ailesi olmak üzere, $G = (V, E)$ ye **basit graf** denir " şeklinde de ifade edilebilir.

Eğer $\exists\, e \in E$ için $\phi(e) \in [V]^1$ ise G ye **sözde graf (pseudo-graph)** denir.

Eğer $\exists \{ x, y \} \in [V]^2$ için $\phi(a) = \phi(b) = \{x, y\}$ olacak şekilde en az iki farklı $a, b \in E$ varsa G ye **çoklu graf (multigraph)** denir.

Örnek 3.1 :



Şekil 3.1 Ayrıtlarına Göre Graf Modelleri

Şekil 3.1 deki G_1 basit graf, G_2 pseudo-graf, G_3 çoklu graf modelidir.

Tanım 3.2 : $G = (V, E)$ grafında, bir tek ortak düğüme sahip ayrıtlara **bitişik ayrıtlar** denir. İki ortak düğüme sahip ayrıtlara da **katlı ayrıtlar** denir.

Tanım 3.3 : $G = (V, E)$ grafında V ve E kümeleri sonlu kümelerse G grafına **sonlu graf** denir. Bu tezde üzerinde çalışılan bütün graflar sonlu graflardır.

Tanım 3.4 : $G = (V, E)$ bir graf ve $X \subseteq V$ olsun. Her $x, y \in X$ için x ve y düğüm çiftini birleştiren bir ayrıt yoksa, X kümesine **bağımsız küme** denir.

Sonlu basit bir grafta maksimum ayrıt sayısı, düğüm kümesinin eleman sayısı ile ilişkilidir. Bu ilişkiyi aşağıdaki teorem açıklamaktadır:

Teorem 3.1 : Herhangi bir $G = (V, E)$ basit grafında $|V| = n$ ve $|E| = m$ olmak üzere

$$n \geq 1 \;\; ve \;\; 0 \; \leq m \leq \binom{n}{2}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat : Graf tanımından dolayı, bir grafın düğüm kümesi boştan farklıdır. Bu nedenle; n ≥ 1 dir. Bir graftaki, ayrıt sayısının en az sıfır olduğu aşikardır. Basit grafta ilmik bulunmadığından, ayrıt kümesi düğüm kümesinin iki elemanlı alt kümelerinden oluşur. Aynı zamanda, G grafında katlı ayrıt bulunmadığından bu sayı en fazla $\binom{n}{2}$ kadardır.

Dolayısıyla, $0 \leq m \leq \binom{n}{2}$ dir.

Tanım 3.5 : $G = (V, E)$ basit bir graf olsun. $x, y \in V$ için x ve y düğüm çiftini birleştiren bir ayrıt varsa, x ve y düğümlerine **komşu düğümler** denir.

Bir $x \in V$ için

$$N(x) = \{ y \in V \mid \{x, y\} \in E \}$$

kümesine x **düğümünün komşuluğu** denir.

Tanım 3.6 : $G = (V, E)$ basit bir graf ve $x, y \in V$ olsun. Hem x hem y ile komşu olan düğümlerin kümesine x ve y düğümlerinin **ortak komşuluğu** denir. Bu küme ise $N(x) \cap N(y) = N(x, y)$ ile gösterilir

Tanım 3.7 : $G = (V, E)$ basit bir graf ve $x \in V$ olsun. x düğümünden geçen ayrıtların sayısına x **düğümünün derecesi** denir . $d(x) = d_G(x) = |N(x)|$ ile gösterilir.

Tanım 3.8 : $G = (V, E)$ bir graf , $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ve $\forall\, 1 \leq i \leq n$ için $d(x_i) = b_i$ olsun. $S = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ dizisine, G nin **derece dizisi** denir.
Eğer $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 0$ ise S ye **monoton azalan**, $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ ise S ye **monoton artan dizi** denir.

Tek bir ayrıt bitişik olduğu düğüme bir derece kazandırırken, bir ilmik bitişik olduğu düğüme iki derece kazandırır. Derecesi tek sayı olan düğüme **tek düğüm** derecesi çift sayı olan düğüme **çift düğüm** denir. Sıfır dereceli düğüm **izole düğüm**, bir dereceli düğüm ise **uç düğüm** olarak adlandırılır.

Bir G grafının en az dereceli düğümüne **minimum dereceli düğüm** denir. G nin düğüm derecelerinin minimumu $\delta(G)$ ile gösterilir. En çok dereceli düğüme de **maksimum dereceli düğüm** denir. G nin düğüm derecelerinin maksimumu $\Delta(G)$ ile gösterilir.

Teorem 3.2 : Herhangi bir $G = (V, E)$ basit grafında $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $|E| = m$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

dir.

İspat : G grafında her ayrıt iki düğüme bitişiktir. Bu nedenle düğümlerin dereceleri toplanırken her bir ayrıt iki kez sayılır. Dolayısıyla ile bu toplam, $2m$ ye eşittir.

Teorem 3.2 nin bazı önemli sonuçları vardır :

Sonuç 3.1 : Herhangi $G = (V, E)$ grafında bütün düğümlerin dereceleri toplamı çift sayıdır.

Sonuç 3.2 : Herhangi bir $G = (V, E)$ basit grafında $V = \{ v_1, v_2, . . , v_n \}$, $|E| = m$ olmak üzere, derecesi tek sayı olan düğümlerin sayısı çifttir.

İspat : G grafının tek dereceli düğümlerinin kümesini U ile, çift dereceli düğümlerinin kümesini W ile gösterelim. Bu durumda,

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in U} d(v) + \sum_{v \in W} d(v)$$

dir.

Teorem 3.2. den dolayı,

$$2m = \sum_{v \in U} d(v) + \sum_{v \in W} d(v)$$

dir.

O halde,

$$2m - \sum_{v \in W} d(v) = \sum_{v \in U} d(v)$$

bulunur. $\sum_{v \in W} d(v)$ toplamındaki terimler çift olduğundan bu toplam da çifttir. Buna göre, $2m - \sum_{v \in W} d(v)$ de çift olmalıdır. O halde, $\sum_{v \in U} d(v)$ toplamı çifttir. Bu toplamdaki terimlerin her biri tek sayı olduğundan toplamın çift olabilmesi için çift sayıda terimin toplanması gerekir. Bu nedenle $|U|$ çifttir.

Tanım 3.9 : Bir G grafı verilsin. G nin her bir düğümü r – dereceli ise G ye ***r* – regüler** denir.

G grafı r – regüler bir grafsa, aşağıda verilen Sonuç 3.3 , Teorem 3.2. nin bir sonucudur:

Sonuç 3.3 : $G = (V, E)$ basit grafında $|V| = n$ ve $|E| = m$ olmak üzere, G grafı r – regüler grafsa

$$m = \frac{1}{2} nr$$

dir.

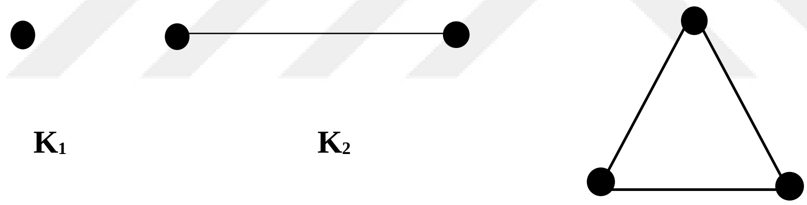
İspat : G nin bütün düğümlerinin dereceleri toplamı nr dir. Böylece

$$\sum_{i=1}^{n} d\,(\mathrm{v}_i) = nr$$

dir. O halde Teorem 3.3. den dolayı $nr = 2m$ ve $m = \frac{1}{2} nr$ dir.

Tanım 3.10 : Birbirinden farklı her düğüm çifti arasında bir ayrıt bulunan grafa **tam graf** denir. n düğümlü bir tam graf K_n ile gösterilir.

Örnek 3.2 :



$\mathbf{K_1}$ $\mathbf{K_2}$ $\mathbf{K_3}$

Şekil 3.2 Tam Graf Örnekleri

Bir tam graf, düğüm kümesi üzerinde tanımlanabilecek bütün ayrıtları bulundurur.

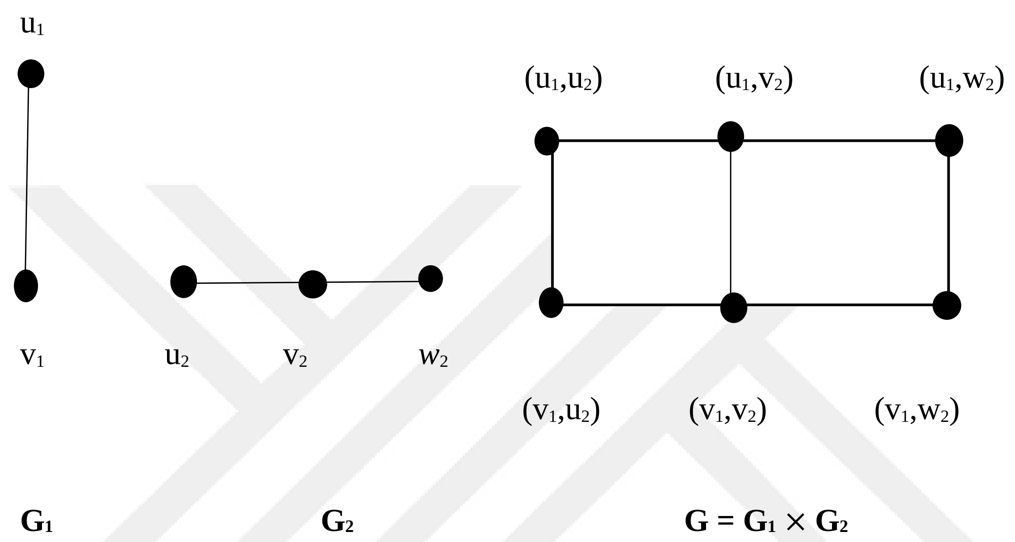
Bu nedenle, düğüm sayısı n, ayrıt sayısı m olan bir tam graf için

$$\mathrm{m} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

eşitliği bulunur. Bir tam grafın her bir düğümü $n-1$ derecelidir; bu nedenle, her tam graf $(n - 1)$ - regüler bir graftır.

Tanım 3.11 : $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ olmak üzere $G_1 \times G_2$ kartezyen çarpımı, $V_1 \times V_2$ düğüm kümeli bir graftır ve kartezyen çarpımda $u = (u_1, u_2)$ ve $v = (v_1, v_2)$ düğümlerinin bitişik olması için gerek ve yeter koşul [$u_1 = v_1$ ise $u_2v_2 \in V_2$] veya [$u_2 = v_2$ ise $u_1v_1 \in V_1$] olmasıdır.

Örnek 3.3 :



Şekil 3. 3 İki Grafın Kartezyen Çarpımı

Tanım 3.12 : G ve H graflarının düğüm kümeleri sırasıyla $V(G)$ ve $V(H)$, ayrıt kümeleri sırasıyla $E(G)$ ve $E(H)$ olan iki graf olsun. $V(G) \subseteq V(H)$ ve $E(G) \subseteq E(H)$ ise G grafına H grafının **altgrafı** denir. Bu durumda, G grafı H grafının altgrafı ise $G \subseteq H$ ile gösterilir.

Örnek 3.4 :

Şekil 3.4 H Grafının G Alt Grafı

Farklı şekillerdeki iki graf modeli aynı grafı temsil edebilirler. Benzer şekilde aynı graf modeline sahip olabilirler fakat farklı grafı temsil edebilirler. Grafların aynı grafları temsil edip etmediğini bulabilmek için izomorfizm tanımına ihtiyaç vardır.

Tanım 3.13 : $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ grafları verilsin. Eğer V_1 ve V_2 ye

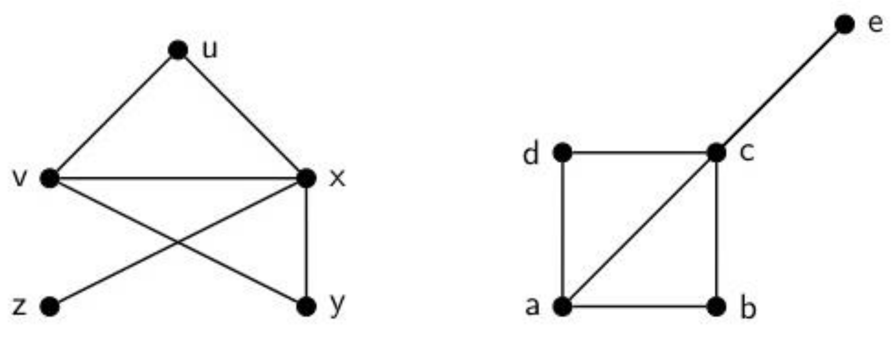
i. Birebir ve örten

ii. Her $a, b \in V_1$ için $\{a, b\} \in E_1$ olması için gerek ve yeter koşul $\{f(a), f(b)\} \in E_2$ olmasıdır

koşullarını sağlayan bir f dönüşümü varsa G_1 grafı G_2 ye izomorftur ve $G_1 \cong G_2$ ile gösterilir. *f* dönüşümü ise **izomorfizm** adını alır.

İki grafın izomorf olabilmesi için, her iki grafın düğüm ve ayrıt sayılarının, derece dizilerinin ve içerdikleri çevrelerin aynı olması gereklidir. İzomorf iki grafta, aynı dereceli düğümlerin sayıları eşittir.

Örnek 3.5 :



G_1 **G_2**

Şekil 3.5 İzomorf Graflar

f izomorf dönüşümü olsun.

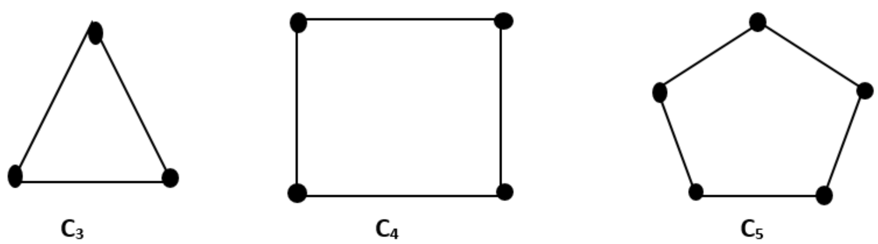
f: $G_1 \to G_2$, $f(u) = b, f(v) = a, f(x) = c, f(y) = d, f(z) = e$ için $G_1 \cong G_2$ olduğu görülür.

Tanım 3.14 : $G = (V, E)$ bir graf, $d_i \in V$ ve $a_i = d_{i-1}d_i \in E$ olmak üzere $(x=d_0, a_1, d_1, a_2, \ldots, d_{i-1}, a_i, d_i, \ldots, d_{k-1}, a_k, d_k = y)$ sonlu dizisine bir $\boldsymbol{x - y}$ **dolaşısı** denir. Bir $x - y$ dolaşısı $x = y$ veya $x \neq y$ olmasına göre kapalı yada açık adını alır. Bir $x - y$ dolaşısında ki ayrıtların sayısına dolaşının uzunluğu denir. Bir dolaşıda düğümler ve kenarlar tekrar edebilir.

Tanım 3.15 : Bir dolaşıda hiç ayrıt tekrar etmiyorsa bu dolaşıya **gezi**, hiç düğüm tekrar etmiyorsa bu dolaşıya **yol** denir. Bir $P_{x,y}$ yolunun uzunluğu $|P_{x,y}|$ ile gösterilir. n uzunluklu bir yol $n + 1$ düğüme sahiptir.

Tanım 3.16 : Bir G grafının bir kapalı yoluna ***G* nin bir çevresi** denir. Bir çevre n tane ayrıt kapsadığından uzunluğu n dir. C_n ile gösterilir. Buradaki n sayısına C_n çevresinin uzunluğu denir.

Örnek 3.6 :



Şekil 3.6 Çevre Grafı Örnekleri

Tanım 3.17 : Bir G grafının çevrelerinin uzunluklarının minimumuna ***G* grafının girti** denir ve $girt(G)$ ile gösterilir.

Tanım 3.18 : x ve y bir G grafının herhangi iki düğümü olsunlar. Eğer G grafında bir $x-y$ yolu varsa, x düğümü ile y düğümü bağlantılıdır denir. Her düğüm çifti bağlantılı olan grafa **bağlantılı (bağlı) graf** denir.

Tanım 3.19 : Bağlantılı $G=(V,E)$ grafı için, G nin $x-y$ yollarının uzunluklarının minimumuna x ve y düğümleri arasındaki **uzaklık** denir ve $d(x,y)$ ile gösterilir. O halde

$$d\,(x,y) = \min \{\, |P_{x,y}| \mid P_{x,y}\,,\ x \text{ den } y \text{ ye bir yol } \}$$

dır.

G grafında x, y ve z herhangi üç düğüm olmak üzere,

i. $d\,(x,y) \geq 0 \ \ ve \ \ d\,(x,y) = \ 0 \ ise \ x = \ y$

ii. $d\,(x,y) = d\,(y,x\,)$

iii. $d\,(x,y) \leq d\,(x,z) + d\,(z,y)$

özellikleri sağlandığından d fonksiyonu V üzerinde bir metriktir.

Ayrıca $G \ = \ (V,E\,)$ grafında $x \in V$ için $N_i\,(x)$ kümesi x den i uzaklıktaki düğümlerin kümesini ifade eder. Yani

$$N_i\,(x) \ = \{\, y \in V \mid d\,(x,y) = i,\ i \in \ Z^+ \}$$

dir.

Tanım 3.20 : Bağlantılı bir $G \ = \ (\,V,E\,)$ grafının bir x düğümü ile x düğümüne en uzaktaki düğüm arasındaki uzaklığa x **düğümünün açıklığı** denir ve $e\,(x)$ ile gösterilir. Buna göre

$$e\,(x) = \max \{\, d(x,y) \mid \ y \ \in V \ \}$$

dir.

Tanım 3.21 : $G = (V, E\ )$ grafının düğümleri arasındaki açıklığın minimumuna **G nin yarıçapı** denir ve $rad\ (G)$ ile gösterilir. Maksimum açıklığa da **G nin çapı** denir ve $çap\ (G)$ ile gösterilir.

Yani,

$$rad\ (G\ ) = \min\ \{\ e(x) \mid\ e\ \in V\ \}$$
$$\text{çap}\ \ (G\ ) = \max\ \{\ e(x) \mid\ e\ \in V\ \}$$

dir.

Örnek 3.7 : Şekil 3.7 da verilen G grafının çapını bulunuz.

Şekil 3.7 G Grafı

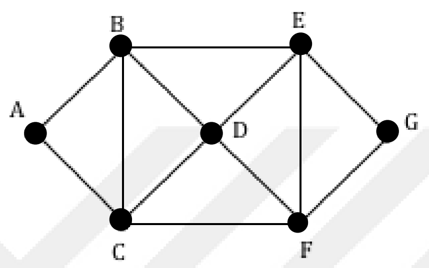
d (a, a) = 0, d (a, b) = 1, d (a, c) = 1, d (a, d) = 2, d (a, e) = 3, d (a, f) = 4, d (a, g) =4, d (b, b) = 0, d (b, a) = 1, d (b, c) = 1, d (b, d) = 2, d (b, e) = 3, d (b, f) = 4, d (b, g) =4, d (c, c) = 0, d (c, a) = 1, d (c, b) = 1, d (c, d) = 1, d (c, e) = 2, d (c, f) = 3, d (c, g) =3, d (d, d) = 0, d (d, a) = 2, d (d, b) = 2, d (d, c) = 1, d (d, e) = 1, d (d, f) = 2, d (d, g) =2, d (e, e) = 0, d (e, a) = 3, d (e, b) = 3, d (e, c) = 2, d (e, d) = 1, d (e, f) = 1, d (a, g) =1, d (f, f) = 0, d (f, a) = 4, d (f, b) =4, d (f, c) = 3, d (f, d) = 2, d (f, e) = 1, d (f, g) =1, d (g, g) = 0, d (g, a) = 4, d (g, b) = 4, d (g, c) = 3, d (g, d) = 2, d (g, e) = 1, d (g, f) =1 olduğundan *;*

$e(a) = 4, e(b) = 4, e(c) = 3, e(d) = 2, e(e) = 3, e(f) = 4, e(g) = 4$ tür.

Dolayısıyla $çap(G)$ = 4 ve $rad\ (G)$ = 2 dir.

Tanım 3.22 : Bağlantılı bir G grafının her ayrıtını içeren bir kapalı gezi varsa G grafına **Euler graf** denir. Bu gezi, Euler gezisi olarak adlandırılır.
Bağlantılı bir G grafının her düğümünü içeren bir çevre varsa G grafı Hamiltondur. Buradaki çevre, Hamilton çevre olarak adlandırılır.

Örnek 3.8 : Şekilde verilen graf modelinin Euler graf olup olmadığını belirleyiniz.



Şekil 3.8 Euler Graf Modeli

Çözüm : Şekildeki graf modeli için bir kapalı gezi;

$$A - B - C - D - B - E - G - F - E - D - F - C - A$$

bulunduğundan Euler graftır.

Yardımcı Teorem 3.1 : G bir bağlantılı graf olsun. G grafı Euler graftır $\Leftrightarrow$ G grafında ki her düğümün derecesi çifttir.
(Bu yardımcı teoremin ispatı Chartrand G., Lesniak L. (1979) da ayrıntılı olarak yapılmıştır.)

Tanım 3.23 : $G = (V, E)$ bağlantılı bir graf olsun. G nin her ayrıtını içeren bir açık gezi varsa G ye **ayrıt izlenebilir graf** denir.

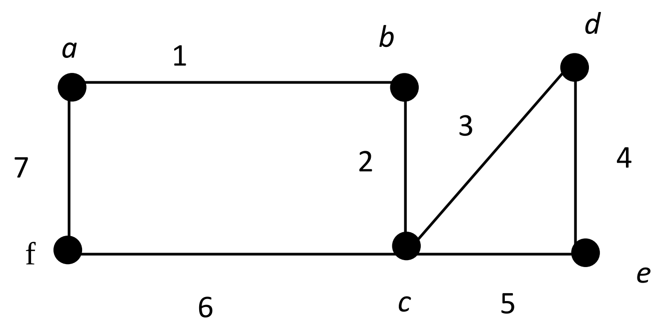
Teorem 3.2 : $G = (V, E)$ bağlantılı bir graf olsun. G nin ayrıt izlenebilirdir $\Leftrightarrow$ G grafı iki tane tek dereceli düğüme sahiptir.

İspat : $\Rightarrow G$ bir ayrıt izlenebilir graf olsun. $v, w \in V$ olmak üzere ; v ve w düğümleri açık gezinin başlangıç ve bitiş düğümleri olsun.
v ve w düğümlerini birleştiren bir e ayrıtı eklenirse Euler grafı elde edilir. Yardımcı Teorem 3.1 den dolayı bu grafın derecesi çift olmalıdır. e ayrıtı kaldırılarak G yeniden elde edilirse v ve w tek dereceli düğümlerdir.

$\Leftarrow$ G nin herhangi iki tane düğümü olan v ve w tek dereceli olsun. Eğer v ve w düğümlerini birleştirecek bir e ayrıtı eklenirse her düğümü çift dereceli olan bir bağlantılı graf elde edilir.
Yardımcı Teorem 3.1 den bu graf Euler graf olmalıdır ve bir Euler gezisi içermelidir. Bu geziden e ayrıtının atılmasıyla G nin her ayrıtını içeren bir açık gezi elde edilir. Böylece tanımdan G ayrıt izlenebilirdir. Dolayısıyla tek dereceli iki düğüm G nin her ayrıtını içeren bir açık gezinin başlangıç ve bitiş düğümleridir.

Tanım 3.24 : $G = (V, E)$ grafı verilsin. Her ayrıtı pozitif bir sayı ile etiketlenen G grafına **ağırlıklı graf** denir.

Örnek 3.9 : Şekil 3.9 da verilen graf modeli için $a - e$ arasındaki mininum ve maksimumum ağırlıklı yolları bulunuz.



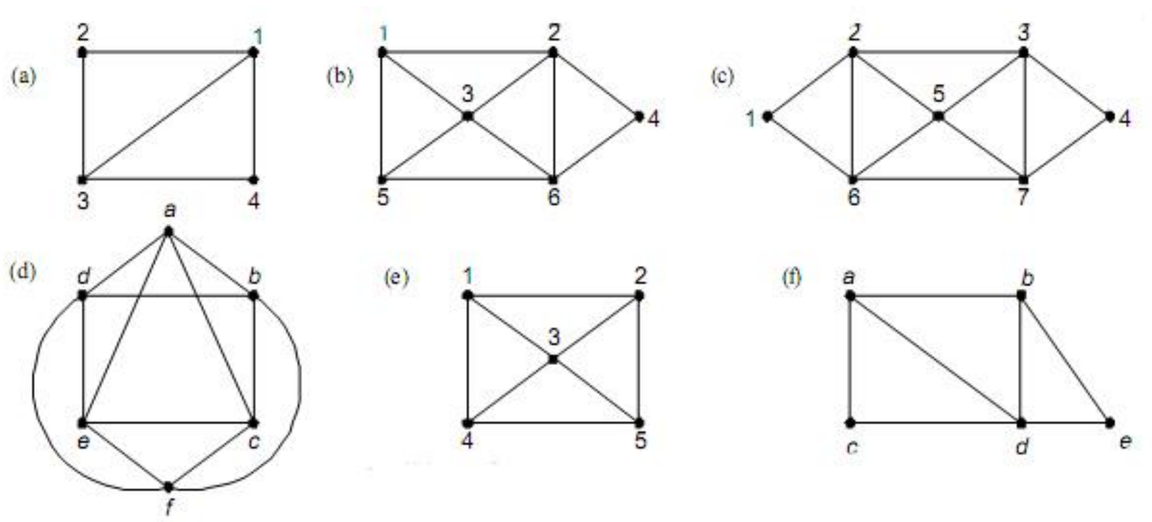
Şe kil 3.9 Ağırlıklı Yol Grafı

Çözüm : a dan e ye minimum ağırlıklı yol ; $a - b - c - e$ dir. Bu yol için toplam ağırlık $1 + 2 + 5 = 8$ dir.

a dan e ye maksimum ağırlıklı yol ; $a - f - c - d - e$ dir. Bu yol için için toplam ağırlık $7 + 6 + 3 + 4 = 20$ dir.

Tanım 3.25 : $G = (V, E)$ bağlı grafı verilsin. G nin her düğümünü içeren bir çevre varsa; G grafına **Hamilton graf** denir.

Örnek 3.10 : Şekil 3.10 daki graf modellerinin Hamilton olup olmadığını belirleyiniz.



Şekil 3.10 Hamilton Graf Modeli

Çözüm : a) $2 - 1 - 4 - 3 - 2$ düğümlerini içeren bir çevre bulunduğundan verilen graf modeli Hamiltondur.

b) $1 - 2 - 4 - 6 - 3 - 5 - 1$ düğümlerini içeren bir çevre bulunduğundan verilen graf modeli Hamiltondur.

c) $1 - 2 - 3 - 4 - 7 - 5 - 6 - 1$ düğümlerini içeren bir çevre bulunduğundan verilen graf modeli Hamiltondur.

d) $d - f - b - c - a - e - d$ düğümlerini içeren bir çevre bulunduğundan verilen graf modeli Hamiltondur.

e) $1 - 2 - 5 - 3 - 4 - 1$ düğümlerini içeren bir çevre bulunduğundan verilen graf modeli Hamiltondur.

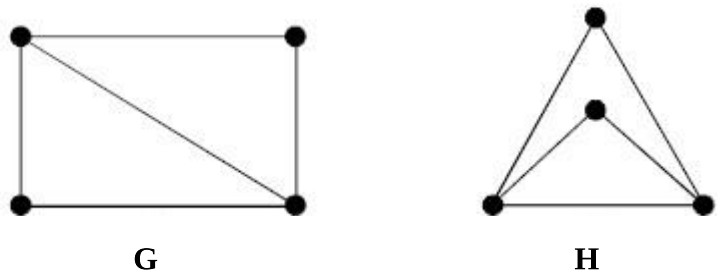
f) $a - b - e - d - c - a$ düğümlerini içeren bir çevre bulunduğundan verilen graf modeli Hamiltondur.

Teorem 3.3 (Dırac Teoremi) : $n \geq 3$ olmak üzere, $G = (n, m)$ basit bir graf olsun. Her v düğümü için $der\ (v) \geq \frac{1}{2} n$ ise G grafı Hamiltondur.

Teorem 3.4 (Ore Teoremi) : $n \geq 3$ olmak üzere, $G = (n, m)$ basit bir graf olsun. Bitişik olmayan v ve w düğümleri için $der\,(v) + der\,(w) \geq n$ ise G grafı Hamiltondur.(Teorem 3.3 ve Teorem 3.4 in ispatları Chartrand G., Lesniak L.(1979), Graphs and Digraphs adlı kitapta ayrıntılı olarak yapılmıştır.)

Tanım 3.26 : $G = (V, E)$ herhangi bir graf olsun. G nin ayrıtları sadece düğümlerde kesişecek şekilde bir geometrik modeli varsa G grafına **düzlemsel graf** denir.

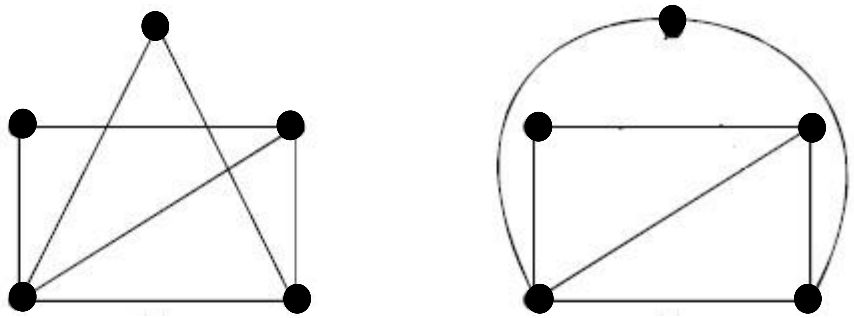
Örnek 3.11 : Aşağıdaki graf modellerinin düzlemselliği incelenirsin;



Şekil 3.11 Düzlemsel Graf Modelleri

Çözüm : Şekil 3.11 de verilen graf modellerinde ayrıtlar sadece düğümlerde kesiştiğinden her ikisi de düzlemsel graftır. Bir G grafının ayrıtlarının düğümler dışında kesişmesi, G grafının düzlemsel olup olmadığı ile ilgili bilgi vermez. Bu nedenle G grafının ayrıtlarının sadece düğümlerde kesişecek şekilde başka bir modeli çizilebiliyorsa G grafı düzlemsel graftır.

Örnek 3.12 : Şekil 3.12 de G_1 ile verilen grafın başka bir geometrik modeli G_2 deki gibi çizilebildiğinden bu graf düzlemsel graftır.



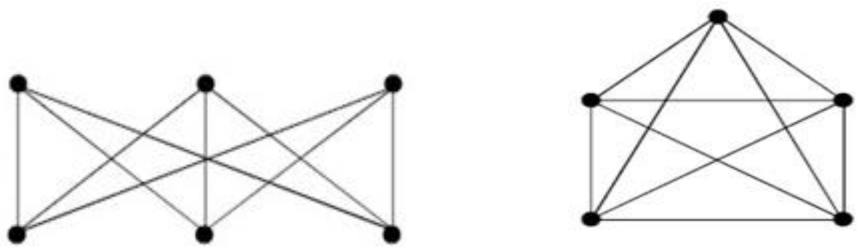
G$_1$ **G**$_2$

Şekil 3.12 Düzlemsel Graf Çizimi

Tanım 3.27 : Düzlemsel olmayan, 5 düğümlü tam graf olan K_5 ve 6 düğüme ve 9 ayrıta sahip $K_{3,3}$ graflarına **Kuratowskı's Grafları** denir.

1) Her iki grafta regülerdir.
2) Her iki grafta düzlemsel olmayan graflardır.
3) Bu iki graftan bir düğüm ya da bir ayrıt kaldırılırsa düzlemsel grafa dönüşür.
4) K_5 minimum düğümlü düzlemsel olmayan graf, $K_{3,3}$ de minimum ayrıtlı düzlemsel olmayan graftır.

Örnek 3.13 : K_5 ve $K_{3,3}$ graflarının modelleri Şekil 3.13 te verilmiştir.



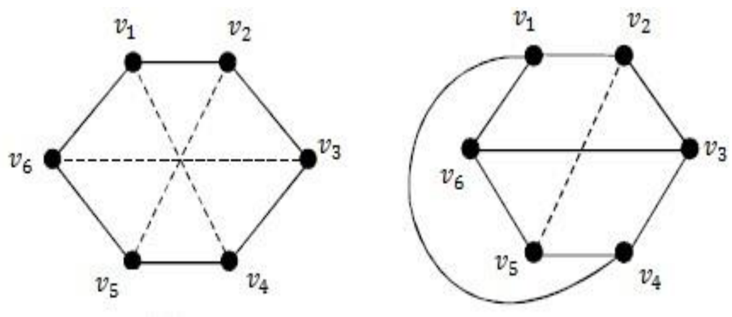
K$_{3,3}$ **K**$_5$

Şekil 3.13 Kuratowski Grafları

Teorem 3.5 : $K_{3,3}$ ve K_5 grafları düzlemsel değildir.

İspat : $K_{3,3}$ ve K_5 graflarının düzlemsel olduğu kabul edilsin.

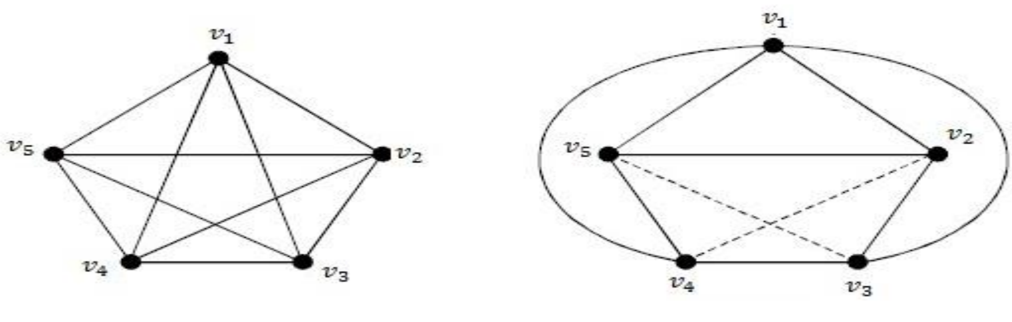
$K_{3,3}$: v_1 - v_2 - v_3 – v_4 - v_5 - v_6 - v_1 şeklinde 6 uzunluklu bir çevre içerdiğinden herhangi bir düzleme Şekil 3.14 de ki gibi bu çevreyi içeren bir altıgen formunda çizilebilir.



Şekil 3.14 Düzlemsel Olmayan Graf Modeli - 1

v_3v_6 kenarı ya tamamen altıgenin içinden ya da tamamen altıgenin dışından çizilebilir. v_3v_6 kenarının altıgenin içinden çizildiği kabul edilsin. Altıgenin dışından çizilme durumu içinde benzer şekilde gösterilebilir. Bu durumda v_1v_4 kenarı, v_3v_6 kenarı ile kesişmemesi için altıgenin dışından çizilmek zorundadır. Bu durumda v_2v_5 kenarını v_3v_6 veya v_1v_4 kenarı ile kesişmeksizin çizmek imkansızdır. Bu sebeple kabul yanlıştır yani $K_{3,3}$ düzlemsel değildir.

K_5 in düzlemsel olmadığı benzer şekilde gösterilecektir. K_5 in düzlemsel olduğu kabul edilsin. Bu durumda K_5, v_1 –v_2 – v_3 – v_4 – v_5 – v_1 olacak şekilde; 5 uzunluklu bir çevre içerdiğinden düzleme Şekil 3.15 deki gibi bu çevreyi içeren bir beşgen şeklinde çizilebilir.

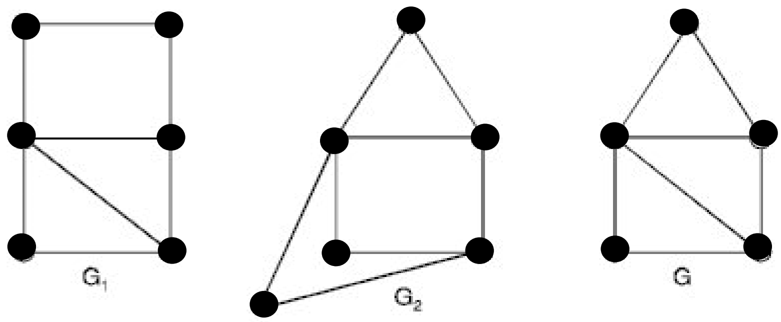


Şekil 3.15 Düzlemsel Olmayan Graf Modeli - 2

v_2v_5 kenarı ya tamamen beşgenin içinden ya da tamamen beşgenin dışından çizilebilir. v_2v_5 kenarının beşgenin içinden çizildiği kabul edilsin. Beşgenin dışından çizilme durumu da benzer şekilde gösterilebilir.
v_1v_3 kenarı v_2v_5 kenarı ile kesişmemesi için beşgenin dışından çizilmek zorundadır. Bu taktirde v_2v_4 kenarı beşgenin içindedir. Bu durumda ise v_3v_5 kenarı kesişme olmadan çizilemez. Bu durum K_5 in düzlemsel olmasıyla çelişir. Dolayısıyla K_5 düzlemsel değildir.

Tanım 3.28 : G_1 ve G_2 herhangi iki graf olsun. Bu iki graf, aynı grafın kenarlarına derecesi iki olacak şekilde düğümlerin eklenmesiyle elde edilebiliyorsa, G_1 ve G_2 graflarına **homoemorfik graf** denir.

Örnek 3.14 :

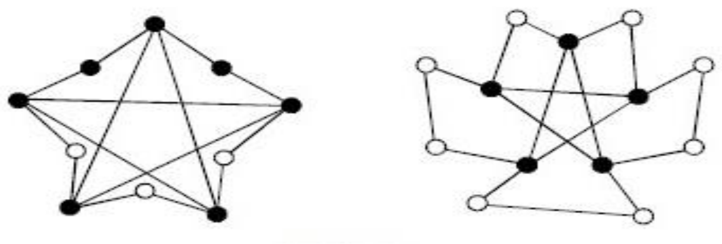


Şekil 3.16 Homeomorfik Graf Modeli

Şekil 3.16 de verilen G_1 ve G_2 graflarının her ikisi de G grafının ayrıtlarına derecesi iki olacak şekilde düğümlerin eklenmesiyle elde edildiğinden G_1 ve G_2 grafları homoemorfik graflardır.

Örnek 3.15 : Şekil 3.17 de verilen graf modeli K_5 e düğüm eklenerek elde edilebileceğinden bu iki graf homeomorfik graftır.

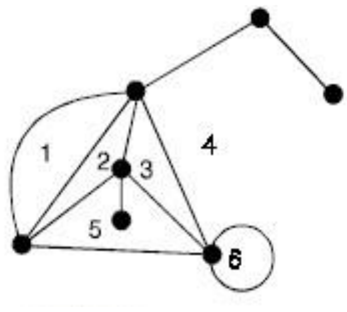
Şekil bir sonraki sayfada gösterilmiştir.



Şekil 3.17 Homeomorfik Graf Modeli - 2

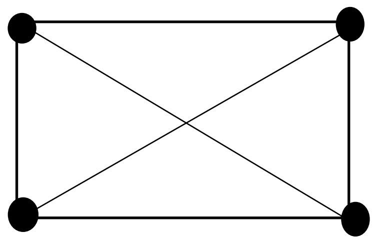
Tanım 3.29 : $G = (V, E)$ verilsin. G nin düzlemsel graf modelindeki her bir kirişsiz çevreye **bölge** denir ve F ile gösterilir. Düzlemsel bir grafın herhangi bir bölgesinin sınırlarını oluşturan ayrıt sayısına o **bölgenin derecesi** denir ve $d\,(F)$ ile gösterilir.

Örnek 3.16 : Şekil 3.18 de verilen grafta 6 bölge bulunmaktadır.
Düzlemsel olmayan bir grafta veya düzlemsel olduğu halde düzlemsel modeli çizilmemiş graflarda bölgeler tanımlanmamıştır.



Şekil 3.18 Graflarda Bölge Gösterimi

Örnek 3.17 : Şekil 3.19 da verilen grafın düzlemsel modeli verilmediğinden bölgelere sahip değildir.



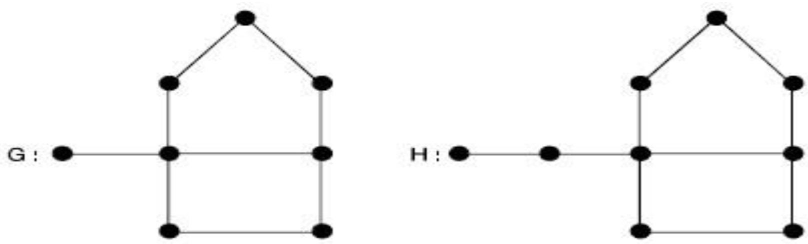
Şekil 3.19 Düzlemsel Olmayan Tam Graf

Tanım 3.30 : G düzlemsel bir graf olsun. G grafına bir ayrıt eklendiğinde düzlemsellik bozuluyorsa G grafına **maksimal düzlemsel graf** denir.

En az üç düğüme sahip maksimal düzlemsel G grafında, G nin her bölgesinin sınırları bir üçgendir. Bu sebeple maksimal düzlemsel graflara **üçgensel graflarda** denir.

Tanım 3.31 : G herhangi bir graf olsun. G grafının herhangi bir ayrıtı üzerine derecesi iki olacak şekilde düğüm eklenmesiyle elde edilen yeni grafa G nin **alt bölüntü grafı** denir.

Örnek 3.18 :



Şekil 3.20 Alt Bölüntü Grafı

Şekil 3.20 de verilen H grafı, G grafının herhangi bir ayrıtına (derecesi iki olan düğüme) eklenerek elde edildiğinden ; H, G nin bir alt bölüntüsüdür.

Tanım 3.32 : Düzlemsel bir G grafında dış bölgeye ait olmayan düğümlere **iç düğümler** denir ve iç düğümlerin sayısı $i(G)$ ile gösterilir.

Örnek 3.19 :

$i(K_4) = 1$ $i(K_{2,3}) = 1$

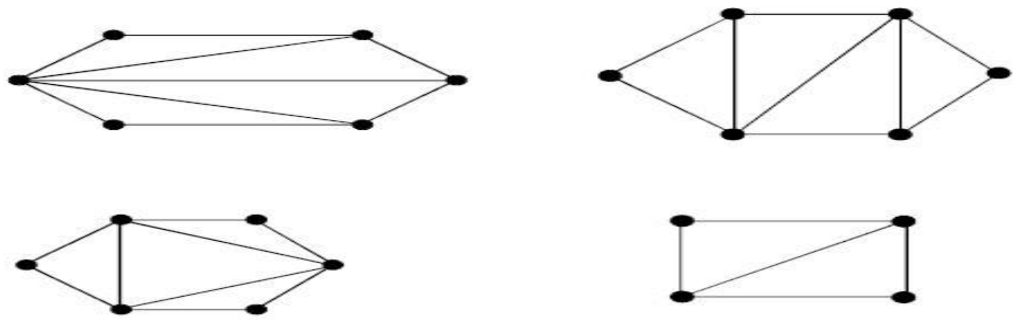
Şekil 3.21 İç Düzlemsel Graflar

Tanım 3.33 : G düzlemsel bir graf olsun Eğer $i(G) = 0$ ise G ye **dış düzlemsel graf** denir.

Tanım 3.34 : G bir graf olsun. Eğer G grafına bir ayrıt eklendiğinde G nin dış düzlemselliği bozulursa G grafına **maksimal dış düzlemsel graf** denir.

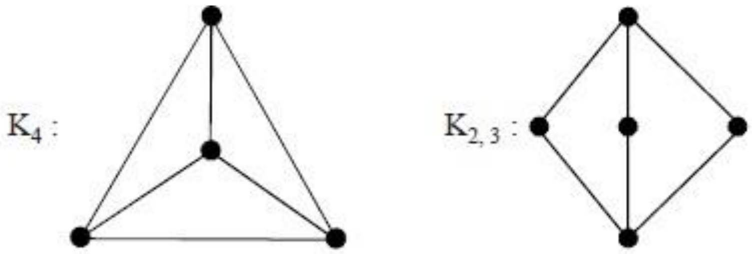
Tanım 3.35 : G düzlemsel bir graf olsun. Eğer $i(G) = 1$ ise G grafına **dış düzlemsel olmayan graf** denir.

Örnek 3.20 : Şekil 3.22 ile verilen düzlemsel graflar maksimal dış düzlemsel graflardır.



Şekil 3. 22 Maksimal Dış Düzlemsel Graflar

Örnek 3.21 :

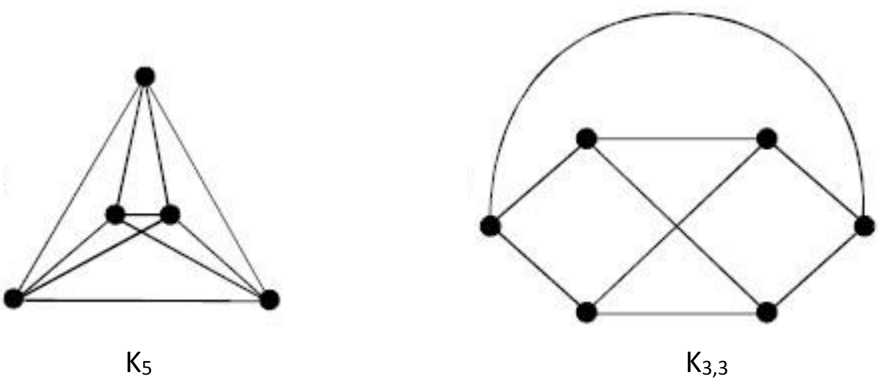


Şekil 3.23 Dış Düzlemsel Olmayan Graflar

Şekil 3.23 ile verilen graflar $i(G) = 1$ olduğundan minimal dış düzlemsel olmayan graflardır.

Tanım 3.36 : G herhangi bir graf olsun. G grafının düzleme çizilebilecek tüm modelleri arasında ayrıtların minimum kesişme sayısına G grafının **kesişme sayısı** denir ve $C(G)$ ile gösterilir. G grafının düzlemsel olması için $C(G) = 0$ olmalıdır. Bu durumda K_4 grafı için $C(K_4) = 0$ dır.

Örnek 3.22 :

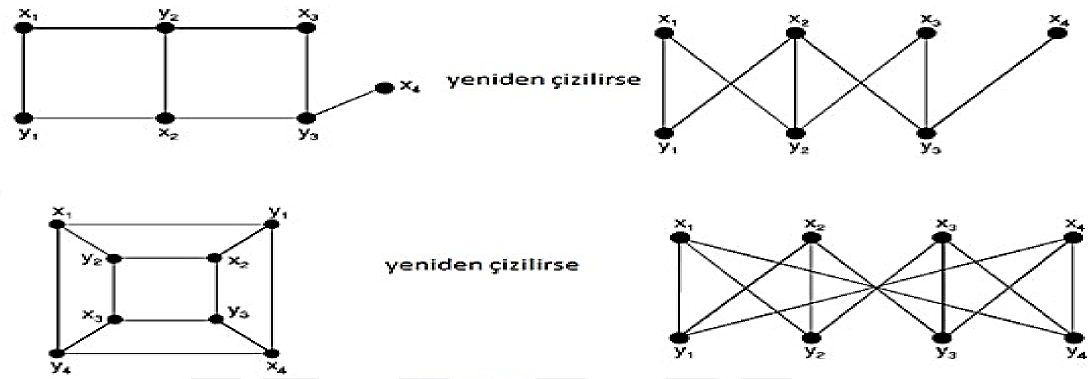


Şekil 3.24 Düzlemsel Olmayan Graf Örnekleri

Şekil 3.24 ile verilen K_5 ve $K_{3,3}$ grafları düzlemsel olmayan graflardır.
$C(K_5) = 1$ ve $C(K_{3,3}) = 1$ dir.

Tanım 3.37 : Herhangi bir $G = (V, E)$ verilsin. G nin $V_1 \cup V_2 = V$ düğümler kümesi olacak şekilde iki alt kümeye bölünebilir ve $\forall\, e = (a, b) \in E$ için $a \in V_1$ ve $b \in V_2$ şeklinde ise G ye **iki kümeli graf** denir.

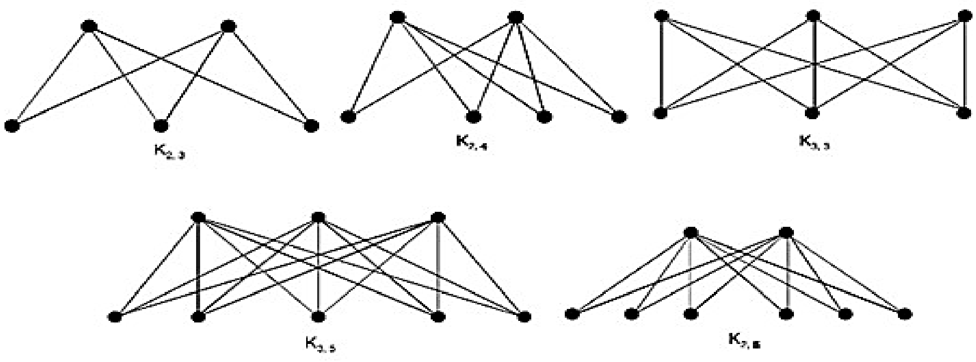
Örnek 3.23 : Şekil 3.25 de verilen graflar yeniden çizilirlerse iki kümeli graf oldukları rahatlıkla görülebilir



Şekil 3.25 İki Kümeli graf Modelleri

Tanım 3.38 : $G = (V, E)$ iki kümeli bir graf ve V nin ayrık bağımsız maksimal alt kümeleri $V_1 \cup V_2 = V$ olsun. Eğer $\forall\, x \in V_1$ ve $y \in V_2$ için $(x, y) \in E$ oluyorsa G ye **iki kümeli tam graf** denir. $s\,(V_1) - m$ ve $s\,(V_2) - n$ olmak üzere iki kümeli tam graf $K_{m,n}$ şeklinde gösterilir. Bu grafın düğüm sayısı $m + n$ ve ayrıt sayısı $m.n$ dir.

Örnek 3.24 : Şekil 3.26 ile verilen graf modelleri iki kümeli tam graf örnekleridir.



Şekil 3.26 İki Kümeli Tam Graf Modelleri

Yardımcı Teorem 3.2 : Üçgen içeren bir graf iki kümeli değildir.

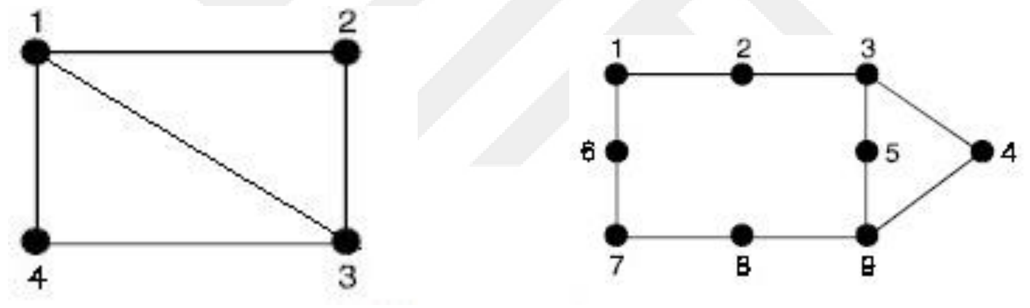
İspat : Üçgen içeren bir G grafı iki kümeli olduğu kabul edilsin. Bu durumda üçgenin en az iki düğümü iki parçadan birinde olur. Bu sebeple üçgendeki tüm düğümler bitişik olduğundan parçaların bağımsız olmasıyla çelişir. O halde kabul yanlıştır ve üçgen içeren graf iki kümeli değildir.

Örnek 3.25 : Aşağıda verilen grafların iki kümeli olmadığını gösteriniz.

Çözüm : G_1 ile verilen graf üçgen içerdiğinden iki kümeli graf değildir.
G_2 grafı için $V_1 = \{1,3,7,9\}$ ve $V_2 = \{2,4,5,6,8\}$ alınırsa

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset,\ V_1 \cup V_2 = V \text{ ve } V_1 \text{ ve } V_2$$

bağımsız olduğundan iki kümeli graftır



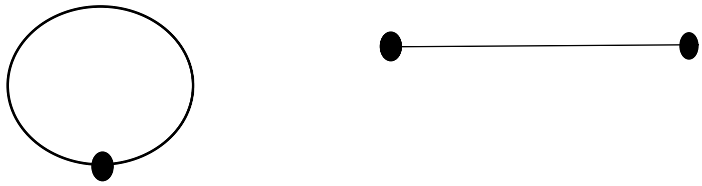
***G*₁** ***G*₂**

Şekil 3.27 İki Kümeli Olmayan Graf Modelleri

Teorem 3.7 : G, n düğümlü, e kenarlı ve r bölgeli bir bağlı düzlemsel graf ise $n - e + r = 2$ dir.

İspat : G grafının e kenarı üzerinden tümevarım metodunu kullanılsın. $e = 0$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda $n = 1$ ve $r = 1$ olur ve $n - e + r = 1 - 0 + 1 = 2$ dir. $e = 1$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda $n = 1$ veya $n = 2$ olur.

$n = 1$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $n = 2$



Şekil 3.28 Düğüm Sayısına Göre Graflar

İkinci durumda $n = 2, e = 1\ ve\ r = 1$ olduğundan;

$$n - e + r = 2 - 1 + 1 = 2$$

dir.

Bağlı, düzlemsel ve $e - 1$ ayrıtlı G grafında bu eşitlik doğru olsun. Bu durumda üç muhtemel durum vardır.

$n', e', r' \in G$ ve $n, e, r \in G + k$ olmak üzere,

i. k bir ilmiktir. Bu durumda düğüm sayısı değişmez fakat bölge sayısı 1 artar;

$$n - e + r = n' - (e' + 1) + (r' + 1) = n' - e' + r' = 2$$

ii. k, G nin iki düğümünü birleştirsin. Bu durumda G nin düğüm sayısı değişmez fakat G nin bölgelerinden biri iki parçaya ayrılır ve bölge sayısı 1 artar;

$$n - e + r = n' - (e' + 1) + (r' + 1) = n' - e' + r' = 2$$

iii. k, G nin sadece bir düğümü üzerinde olsun. Bu durumda düğüm sayısı 1 artar fakat bölge sayısı değişmez;

$$n - e + r = (n' + 1) - (e' + 1) + r' = n' - e' + r' = 2$$

dir.

Sonuç 3.1 : $G = (n, e)$ basit bağlı düzlemsel graf ise $e < 3n - 6$ dır.

İspat : Basit bağlı düzlemsel bir G grafında her bölge en az üç kenarla sınırlıdır ve kenarlar tam olarak iki bölgeye aittir.
Bu durumda bölgeler üzerinden kenarları sayıldığında, r; bütün bölgeler ve $d(f)$; bölgelerin derecesi olmak üzere

$$3r \leq \sum_{f \in r} d(f) \leq 2e$$

yazılabilir.

Bu durumda:

$$3r \leq 2e \iff r \leq \frac{2e}{3}$$

olduğundan bu eşitsizlik ile Euler formülü birlikte kullanılırsa,

$$n - e + r = 2 \;,\; n - e + \frac{2e}{3} \geq 2$$

$e \leq 3n - 6$ elde edilir.

Sonuç 3.2 : Düzlemsel bir G grafı k bileşene sahip ise

$$n - e + r = k + 1$$

dir.

İspat : $G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_K$ olsun. G_i, n_i düğümlü, e_i ayrıtlı ve r_i bölgeli olsun. $(1 < i < k)$

G düzlemsel olduğundan bileşenlerin her biri düzlemseldir. Bu sebeple G_i ler düzlemsel olduğundan Euler formülünü sağlar,

$$n_i - e_i + r_i = 2$$

dir.

Her iki tarafa toplam sembolü uygulanıp düzenlenirse,

$$\sum_i^k n_i - \sum_i^k e_i + \sum_i^k r_i = \sum_i^k 2 \ldots (1)$$

elde edilir.$e_i = e$, $n_i = n$ olmak üzere

$$[\ \sum_{i=1}^k (r_i - 1)\ ] + 1 = r \text{ olduğundan}$$

$$r_i = r + k - 1$$

olduğu görülür ve (1) de yerine yazılırsa

$$n - e + r + k - 1 = 2k$$

$$n - e + r = k + 1$$

elde edilir.

Sonuç 3.3 : $n \geq 3$ olmak üzere , $G = (n, e)$ grafı 3 uzunluklu bir çevre içermeyen bağlı basit düzlemsel graf olsun. Bu durumda ,

$$e \leq 2n - 4$$

dir.

İspat : Eğer G grafı düzlemsel ise her bölgenin derecesi en az 4 tür. Bu sebeple bölgeler üzerinden toplam kenar sayısı hesaplandığında $4r$ olur. (Burada r, toplam bölge sayıdır) Her bir ayrıt iki bölgeyi sınırlandırdığından tüm bölgeler üzerinden toplam ayrıt sayısı sayıldığından $2e$ elde edilir. Bu sebeple,

$$2e \geq 4r \Leftrightarrow e \geq 2r$$

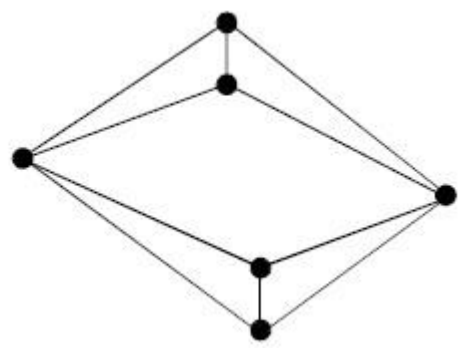
Euler formülünde yerine yazılırsa,

$$n - e + r - 2 \Leftrightarrow n - e + \frac{e}{2} \geq 2 \Leftrightarrow 2n - e \geq 4 \Leftrightarrow e \leq 2n - 4$$

olur.

Örnek 3.26 : Derece dizisi 4,4,3,3,3,3 olan bir grafın düzlemsel modelini çiziniz.

Çözüm : Aşağıda verilen model istenen özellikte düzlemsel graf modelidir.



3.29 Derece Dizisi Belli Düzlemsel Graf

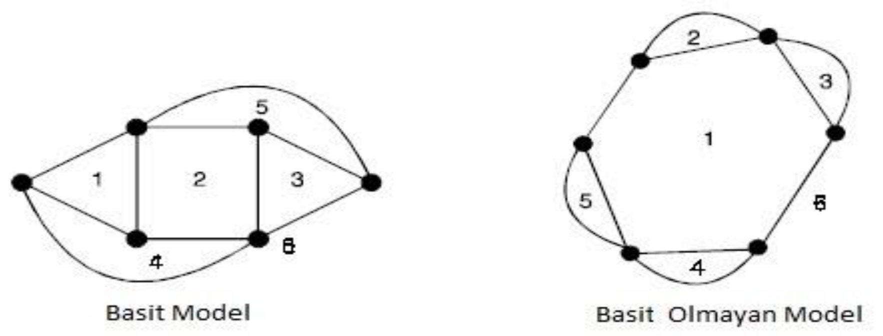
Örnek 3.27 : 6 düğümlü ve 10 kenarlı bağlı düzlemsel bir grafın bölge sayısını bulup basit ve basit olmayan modellerini çiziniz.

Çözüm : $n = 6$ ve $e = 10$ olmak üzere Euler formülünden,

$$n - e + r = 2 \iff 6 - 10 + r = 2 \iff r = 6$$

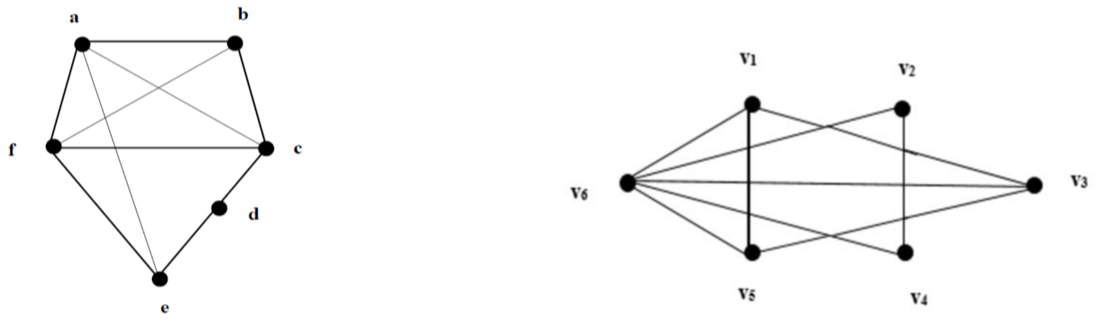
dır.

Verilen grafın basit ve basit olmayan modelleri Şekil 3.30 da görüldüğü gibi çizilir.



Şekil 3.30 Basit ve Basit Olmayan Graflar

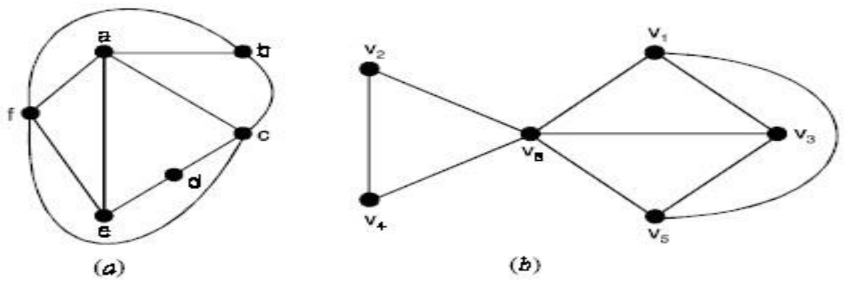
Örnek 3.28 : Aşağıdaki grafların düzlemsel modellerini çiziniz.



(a) **(b)**

Şekil 3.31 Düzlemsel Graf Örnekleri

Çözüm : Verilen grafların sırasıyla düzlemsel modelleri bir sonraki sayfa da verilmiştir.



Şekil 3.32 Düzlemsel Graf örnekleri 2

Bu bölümde graf ile ilgili olarak bilinmesi gereken temel bilgiler verilmiştir. Dördüncü bölümde ise doymuş graflarda önemli role sahip olan ağaçlar konusunda bilgi verilecektir.

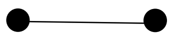
4 . AĞAÇLAR

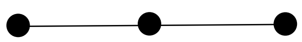
Ağaçlar konusu minimal doymuş yol grafları için önemli rol oynadığından bu bölümde ayrıca incelenmiştir.

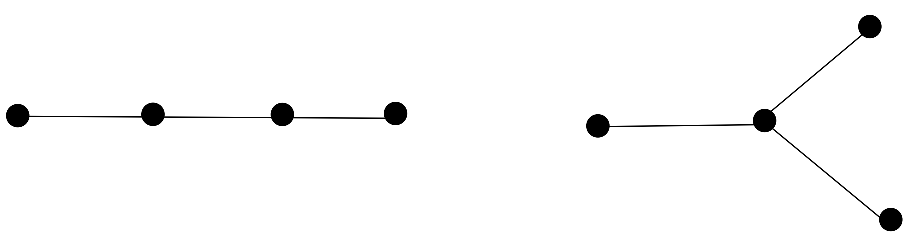
Tanım 4.1 : Hiç çevre içermeyen bağlı basit graflara **ağaç** denir.
Tanımda da verildiği gibi bir ağaçta katlı ayrıt ve ilmik bulunmaz. Her ilmik kendi başına bir çevredir. Benzer şekilde katlı ayrıtta çevre belirtir.

Örnek 4.1 : Şekil 4.1 de 5. mertebeye kadar olan bütün ağaç modelleri verilmiştir.

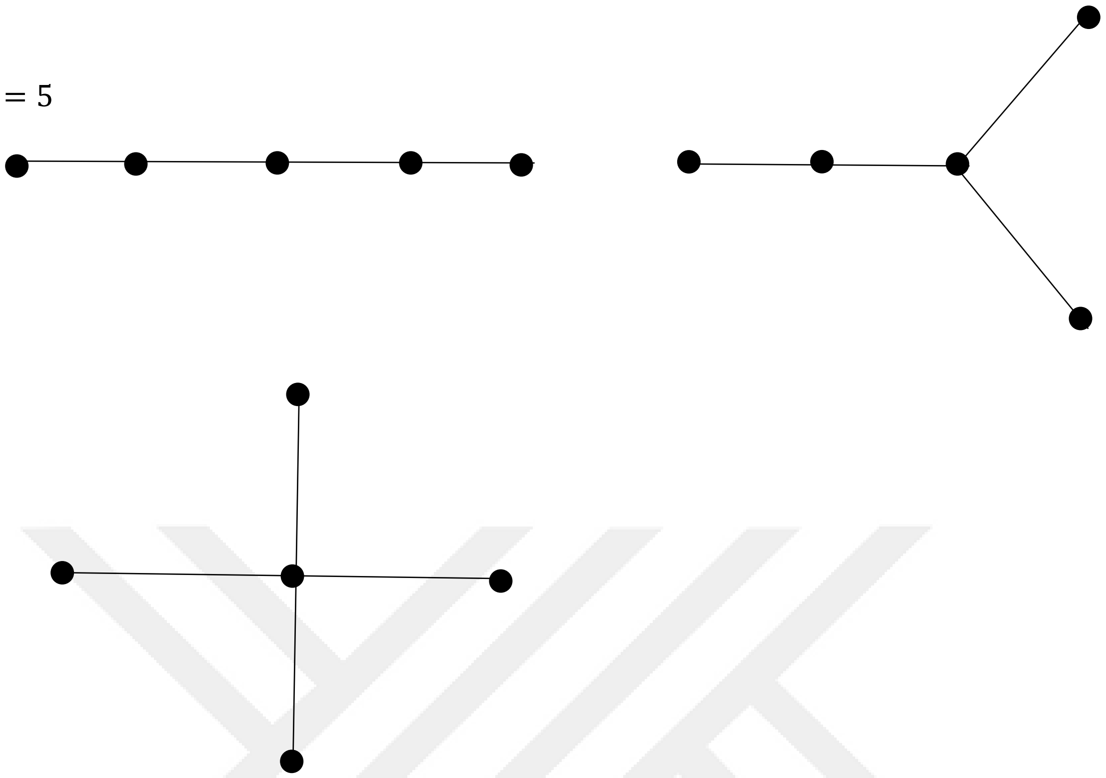
$n = 1$ 

$n = 2$ 

$n = 3$ 

$n = 4$ 

$n = 5$



Şekil 4.1 Düğüm Sayılarına Göre Ağaçlar

Teorem 4.1 : Bağlı bir grafta bulunan ve atılmasıyla grafı bağlantısız yapan ayrıta **köprü** denir. T bağlı bir graf olsun. T bir ağaçtır $\Leftrightarrow$ T nin her ayrıtı bir köprüdür.

İspat : $\Rightarrow$ T grafı bir ağaç olsun. Ağaç tanımından dolayı T çevre içermez. O halde T ağacının her ayrıtı bir köprüdür.

$\Leftarrow$ Bağlı T grafının her ayrıtının bir köprü olduğu kabul edilsin. Teoremden dolayı bağlı T grafının her ayrıtı bir köprü ise T çevre içermez dolayısıyla T bir ağaçtır.

Teorem 4.2 : T bir ağaç olsun. T nin bitişik olmayan herhangi iki u, v düğümü için $T + uv$ tek bir C çevresi içerir. Tersine, $T + uv$ daki C çevresinin herhangi bir e ayrıtı için $T + uv - e$ bir ağaçtır.

İspat : T ağaç olduğundan dolayı bağlantılıdır ve çevre içermez. T bağlantılı olduğundan herhangi u, v düğümleri arasında en az bir $u - v$ yolu vardır. Ve T çevre içermediğinden $u - v$ yolu tektir. T ağacına bir uv ayrıtı eklensin. Bu $u - v$ yolu $T + uv$ grafında bir çevre oluşturur. $T + uv$ grafında bulunan C çevresindeki herhangi bir ayrıt silindiğinde oluşan $T + uv - e$ grafı bir ağaçtır.

Tanım 4.2 : Bir T ağacında derecesi 1 olan düğümlere **uç düğüm (yaprak)** denir.

Teorem 4.3 : T bir ağaç olsun. v bir uç düğüm ise $T - v$ de bir ağaçtır.

İspat : v bir uç düğüm olsun. T bir ağaç olduğundan çevre içermez. Dolayısıyla $T - v$ de çevre içermez ve bağlıdır. Böylece $T - v$ bir ağaçtır.

Bir ağacın uç olmayan her düğümü en az 2 derecelidir ve **eklem düğümdür**.

Sonuç 4.1 : Aşikar olmayan her ağaç en az iki uç düğüm içerir.

İspat : T aşikar olmayan bir ağaç ve P maksimal bir yol olsun. P nin bir $u - v$ yolu olsun kabul edilsin. P maksimal bir yol olduğu için u ve v düğümü P yolu üzerinde olmayan hiçbir düğüme bitişik değildir. Dolayısıyla u, P üzerinde onu izleyen bir düğüme bitişik, v de P üzerinde onu izleyen bir düğüme bitişiktir. Bunun dışında u ve v düğümü, P yolundaki hiçbir düğüme bitişik değildir. Çünkü T çevre içermez. Bu nedenle $der(u) = der(v) = 1$ dir. Böylece T en az iki adet uç düğüm içerir.

Teorem 4.4 : $G = (n, m)$ grafı verilsin. G ağaçtır $\Leftrightarrow$ G çevre kapsamaz ve $n = m + 1$ dir.

İspat : $\Rightarrow$ G bir ağaç olsun. Tanımdan dolayı çevre kapsamaz. Şimdi $n = m + 1$ olduğunu gösterilsin. Bunun için n üzerinde indüksiyon metodu uygulansın. $n = 1$ için G hiç ayrıt kapsamadığından $m = 0$ olup istenilen eşitlik sağlanır. $n \geq 1$ olacak şekilde tüm n düğümlü ağaçlar için $n = m + 1$ olduğu kabul edilsin. $T, n + 1$ düğümlü olsun. v, T nin bir uç düğümü olsun. $T' = T$ –v grafı n düğümlü bir ağaçtır ve indüksiyon hipotezinden dolayı T' , $m = n - 1$ ayrıta sahiptir.

T nin, T' den bir adet fazla ayrıtı olduğu için, T, $m + 1 = n$ ayrıta sahiptir ve $n + 1 = (m + 1) + 1$ fazla ayrıtı olduğu için, $T, m + 1 = n$ ayrıta sahiptir.
$n + 1 = (m + 1) + 1$ olup istenilen sonuç elde edilir.

$\Leftarrow$ $G = (n, m)$ grafı çevre kapsamasın ve $n = m + 1$ olsun. G nin ağaç olduğunu göstermek için, bağlı olduğunu göstermek yeterlidir. G nin bağlı olmadığı kabul edilsin. O zaman $k \geq 2$ olmak üzere G, k tane bağlı $G_1, G_2, \ldots, G_k$ bileşenine sahiptir. G_i bir (n_i, m_i) grafı olsun. $\forall$ G_i bileşeni bağlı ve çevre kapsamadığından dolayı bir ağaçtır ve $n_i = m_i + 1$ dir.

Dolayısıyla $n - 1 = m = \sum_{m=i}^{k} m_i = \sum_{m=i}^{k} (n_i - 1) = n - k$ dır. Buradan da $n - 1 = n - k$ olup $k = 1$ elde edilir. Bu da $k \geq 2$ olmasıyla çelişir. O halde G grafı bağlantılı olup bir ağaçtır.

Tanım 4.3 : Bileşenleri ağaçlar olan, çevre kapsamayan bir F grafına **orman** denir. Bileşenlerin sayısı $k(F)$ ile gösterilir.

Sonuç 4.1.2 : n. mertebeden bir F ormanı $n - k(F)$ ayrıta sahiptir.

İspat : F ormanı, $k(F) = k$ olacak şekilde k tane bileşenden oluşsun. Bu bileşenleri $T_1, T_2, \ldots, T_k$ ile gösterilsin. $T_i = (n_i, m_i)$ olsun. $n_i = m_i + 1$ olduğunu biliniyor. Dolayısıyla $m = \sum_{m=i}^{k} m_i = \sum_{m=i}^{k} (n_i - 1) = n - k(F)$ olup sonuç elde edilir.

Tanım 4.4 : G bir graf olsun. Eğer G grafının bir G' alt grafı, G grafının tüm düğümlerini içeren bir graf ise G' ağacına **uzanımlı ağaç** denir.

Teorem 4.5 : Bir G grafı uzanımlı ağaca sahiptir $\Leftrightarrow$ G bağlantılıdır.

İspat : $\Rightarrow$ G grafının bir T uzanımlı ağacına sahip olduğu kabul edilsin. G grafının iki düğümü u ve v olsun. Bu iki düğüm aynı zamanda T ağacının da iki düğümü olduğundan, düğümünden v düğümüne bir yol vardır. Bu yol aynı zamanda G grafının da bir yoludur. Böylece G bağlantılıdır.

$\Leftarrow$ G nin bağlı olduğu kabul edilsin. G çevre içermezse, G nin kendisi bir uzanımlı ağaçtır. G grafı bir çevre içerdiği kabul edilsin.

Çevreden bir ayrıt silinmesi halinde graf hala bağlıdır. Bu işlem çevre kalmayacak şekilde devam edilsin ve elde edilen yeni graf T olsun.

G grafından düğüm silinmediği için; G ile T aynı düğüm sayısına sahiptir. T bağlıdır dolayısıyla G grafının uzanımlı bir ağacıdır.

Teorem 4.6 : $G = (n, m)$ grafı ağaçtır $\Leftrightarrow$ G grafı bağlantılı ve $n = m + 1$ dir.

İspat : $\Rightarrow$ $G = (n, m)$ bir ağaç olsun. Ağaç tanımından dolayı G bağlantılıdır ve Teorem 4.4 den dolayı $n = m + 1$ dir.

$\Leftarrow$ $G = (n, m)$ grafı için $n = m + 1$ olduğu kabul edilsin. G nin bir ağaç olduğunu göstermek için, G nin çevre kapsamadığını göstermek yeterlidir. Eğer G bir C çevresi kapsamış olsaydı ; C çevresindeki e ayrıtı için, $G - e, n - 2$ ayrıtlı ve n düğümlü bir graf olurdu. Bu ise $n = m + 1$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla G çevre kapsamaz ve ağaçtır.

Sonuç 4.3 : $G = (n, m)$ grafı için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir;

a) G bir ağaçtır.
b) G bağlıdır ve çevre içermez.
c) G bağlıdır ve $n - 1$ tane ayrıtı vardır.
d) G çevre içermez ve $n - 1$ tane ayrıtı vardır.

Teorem 4.7 : $G = (V, E)$ grafı verilsin. G çevre içerir $\Leftrightarrow$ $\exists\, (u, v) \in V, (u \neq v)$ için G iki farklı $u - v$ yolu içerir.

İspat : $\Rightarrow$ $P : u = x_0, x_1, \dots, x_m = v$

$Q : u = y_0, y_1, \dots, y_n = v$ olacak şekilde iki farklı $u - v$ yolu olsun. Genelliği bozmayacak şekilde $x_1 \neq y_1$ olduğu kabul edilsin.

O halde $\exists\, i > 0$ ve j için $x_i = y_j$ dir. $w = x_i$ olsun. O zaman P ve Q yolları yardımıyla;

$$u = x_0, x_1, \ldots, x_i = y_j, y_{j-1}, \ldots, y_0 = u$$

çevresi elde edilir.

Eğer P ve Q yolu u ve v nin dışında hiç ortak düğüme sahip değilse, $P \cup Q$ yolu bir çevredir.

⇐ Tersine G bir C çevresi kapsasın. Bu çevrenin de uzunluğu $n \geq 3$ olsun. O zaman bu çevreden iki tane uu_i yolu elde edilir. C çevresine ait farklı iki u, v düğümü seçilirse C çevresi iki tane uv yolundan oluşur. O halde G grafı farklı iki uv yolunu içerir.

Teorem 4.8 : G grafı bir ağaçtır ⇔ G nin farklı iki düğümünden bir tek yol geçer.

İspat : ⇒ G bir ağaç olsun. G nin farklı her iki u, v düğümünden bir tek yol geçtiğini göstermek yeterlidir. u ve v nin farklı iki yol geçtiği kabul edilsin. Bu durumda Teorem 4.7 dolayı herhangi iki düğüm arasında iki yol bulunur. Bu ise kabul ile çelişir. Dolayısıyla G çevre içermez ve bir ağaçtır.

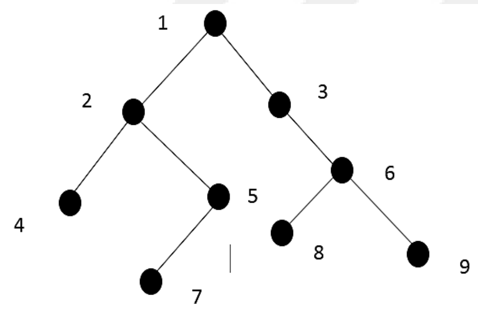
⇐ G nin her farklı iki düğümünden bir tek yol geçtiği kabul edilsin. Bu ise grafın bağlı olmasını gerektirir. G grafının ağaç olduğunu göstermek için çevre kapsamadığını göstermek yeterlidir. Eğer G grafı bir çevre içerirse Teorem 4.7 den dolayı herhangi iki düğüm arasında iki yol bulunur. Bu ise kabul ile çelişir. Dolayısıyla G çevre içermez ve bir ağaçtır.

Tanım 4.5 : Bir T ağacı uç düğüm olmayan tam iki bitişik düğüme sahipse, T ye **çift yıldız** denir.

Tanım 4.6 : Herhangi bir T ağacından uç düğümler çıkartıldığında bir yol elde ediliyorsa, T ye **tırtıl** denir. Bu yol aynı zamanda tırtılın omurgasını gösterir.

Tanım 4.7 : Bir G grafı üzerindeki ayrıtlar bağlantının nereden başlayıp nerede sonlandığını belirten yön bilgisine sahip ise **yönlü-graf** veya **yönlendirilmiş graf (directed graf)** olarak adlandırılır. Yönlendirilmiş grafta bir düğüme gelen yönlenmiş ayrıt sayısına **giriş derecesi** denir ve giriş derecesi 0 olan yani hiyerarşinin en tepesindeki düğüme **kök** denir. Yönlendirilmiş grafta bir düğümden çıkan yönlenmiş ayrıt sayısına **çıkış derecesi** denir ve çıkış derecesi 0 olan düğümlere ise **yaprak** denir. Kök ve yapraklar arasında kalan düğümlere de **iç düğümler** denir.

Örnek 4.2 : Aşağıdaki ağaç modeli köklü ağaçlara örnektir.



Şekil 4.2 Köklü Ağaç Modeli

Şekil 4.2 de verilen ağaç modelinde 1 ile etiketli düğüm kök düğümdür. 2, 3, 5, 6 ile etiketli düğümler iç düğümler ve 4, 7, 8, 9 ile etiketlenen düğümler ise yapraklardır.

Bu bölümde doymuş graflarda geçen ağaçların tanınmasında yeterli olacak şekilde bilgi verilmiştir.

5. MİNİMAL YOL DOYMUŞ GRAFLAR

5.1 Üç Düğümlü Doymuş Yollar

Bu bölümde P_3- doymuş ve minimal P_3 - doymuş graflar incelenecektir.

Tanım 5.1.1 : G ve H herhangi iki graf olsun. G nin herhangi bir bitişik olmayan düğüm çiftine yeni bir e kenarının eklenmesiyle oluşan $G + e$ grafı H ya izomorf alt graf içerirse G ye $\boldsymbol{H}$ **– doymuş graf** denir. Eğer G den herhangi bir ayrıtının silinmesiyle oluşan graf H – doymuş değilse G ye **minimal** $\boldsymbol{H}$ **– doymuş graf** denir

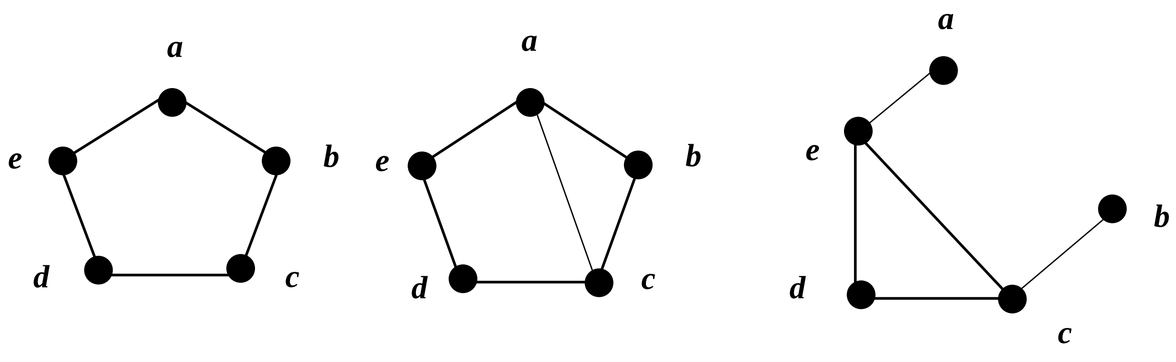
G ve H grafları için; G nin hiçbir alt grafı H ya izomorf değilse (veya G, H nin hiçbir kopyası içermiyorsa) G, $\boldsymbol{H}$ **– serbesttir**. Eğer H – serbest olan bir G grafına yeni bir ayrıt eklendiğinde H nın yeni bir kopyası oluşuyorsa bu durumda G, **maksimal** $\boldsymbol{H}$ **– serbest** olur. Yani her yeni e kenarı için; $G + e$ de H ile izomorf olan bir alt graf vardır.

Tüm maksimal H – serbest graflar H – doymuş graflardır. Fakat H – doymuş graflar H nın bir kopyasını içerebileceğinden maksimal H – serbest olmayabilir. Dolayısıyla uygun H alt grafı seçimine bağlı olarak H – doymuş graf sınıfı kesinlikle maksimal H – serbest graf sınıfından daha geniştir.

Örnek 5.1.1:

$H = P_5$ (5 uzunluklu yol)

$G = C_5$ (5 uzunluklu çevre) olmak üzere G minimal H – doymuş graftır. Fakat ce ayrıtı eklendiğinde ce den geçen P_5 yolu yoktur ve C_5 çevresi H yi içerdiğinden kesinlikle H – serbest değildir (Şekil 5.1) .



C5 $\quad$ C5 + ac $\quad$ C5 $-ab + ce$

Şekil 5.1 Doymuş ve Doymamış Yol Graf Örneği

Bu bölümde $m \geq 3$ için P_m , $m -$ uzunluklu yol olmak üzere, P_m – doymuş ve minimal P_m – doymuş graflar incelenecektir. (P_m ; m düğümlü ve $m - 1$ uzunluklu yolu belirtmek için kullanılacaktır.)

Yardımcı Teorem 5.1.1 : Her bağlı graf P_3- doymuştur.

İspat : Her tam graf P_3 – doymuş olduğundan tam olmayan G bağlı grafı için; T, G nin herhangi uzanımlı bir alt ağacı olsun. T ye herhangi bir e ayrıtının eklenmesiyle oluşan $T + e, r \geq 3$ olmak üzere en az bir C_r çevresi oluşturur. C_r de, e ayrıtından geçen en az bir P_3 yolu içerir. Dolayısıyla T, P_3-doymuştur.

O halde G grafı P_3 –doymuştur.

Teorem 5.1.1 : G, P_3–doymuş graf ise G en fazla bir izole düğüm içerir.

İspat : G, P_3 –doymuş graf olsun. G nin iki izole düğümü olduğu kabul edilsin.

Bu durumda iki izole düğüm arasına eklenen bir e ayrıtı P_3 yolunu oluşturmadığından G, P_3 -doymuş değildir. Bu ise G nin P_3 –doymuş graf olmasıyla çelişir. O halde G grafı en fazla bir izole düğüm içerir.

Teorem 5.1.2 : Minimal P_3 - doymuş graflar tam olarak bir bileşeni bir düğümlü ya da tüm bileşenleri iki düğümlü yıldızların birleşimidir.

İspat : G minimal P_3-doymuş graf olsun. Teorem 5.1.1 den G en fazla bir izole düğüme sahiptir. G den herhangi bir ayrıtın silinmesi en az iki izole düğüme sahip alt grafını oluşturur.

Çevreden bir ayrıt silinmesi yeni bir izole düğüm oluşturmadığından G çevre içermez. Aynı şekilde P_4 yolunun ortasından bir ayrıt silmek yeni bir izole düğüm oluşturmadığından G, P_4 yolu içermez. Bu nedenle G nin her bileşeni bir ağaçtır. Dolayısıyla G deki her ağaç çapı en fazla iki olan yıldızların birleşimidir.

G nin ikiden daha fazla düğüme sahip S bileşeni olduğunu varsayılsın. S den bir ayrıt silinmesi bir izole düğüm ve en az iki düğümlü bir yıldız oluşturur. Fakat $G - e$, P_3-doymuş olur. Bu ise G nin minimal P_3 – doymuş olmasıyla çelişir. O halde S nin her bileşeni 2 düğümlüdür.

Sonuç 5.1.1 : Herhangi P_2 yollarının birleşimi A olsun. Maksimal P_3 - serbest graflar tam olarak A ya da $P_1 \cup A$ formunda graflardır.

5.2 Dört Düğümlü Doymuş Graflar

Bu bölümde hangi grafların P_4 – doymuş olduğuna karar verilecektir.

Yardımcı Teorem 5.2.1 : P_4 – doymuş olmayan, bağlı tek graf P_3 yoludur.

İspat : P_3 yoluna eklenen herhangi bir e ayrıtı C_3 çevresini oluşturur. C_3 çevresi P_4– serbest olduğundan P_3 yolu P_4 – doymamış graftır. P_3 yol grafı dışında diğer tüm bağlı grafların P_4 – doymuş olduğu gösterilmesi yeterlidir. Tam graflar genel olarak P_4 – doymuş olduğundan; tam olmayan ve üç düğümden daha fazla düğüme sahip bağlı graflar göz önüne alınsın. G grafının uzanımlı T ağacı için $T + e$, $r \geq 3$ olmak üzere C_r çevresi içerir. $r \geq 4$ ise e ayrıtı çevredeki P_4 yoluna aittir. $r = 3$ ise T bağlı ve üçten daha fazla düğüme sahip olduğundan $T + e$ çevre içerir. e bu çevreye ait bir kenar olduğundan çevre üzerinde bulunan e yi içerecek şekilde v, y, z, t düğümleri vardır. Dolayısıyla T uzanımlı ağacı P_4 – doymuştur. O halde G, P_4 – doymuştur.

Teorem 5.2.1 : P_4 – doymuş graflar tam olarak; P_3 yol grafını bileşen olarak içermeyen, bir bileşeni izole düğümse diğer bileşenlerden hiç birinin yıldız olmadığı graflardır.

İspat : Yardımcı teorem 5.2.1 den dolayı, bağlı olmayan ve P_3 ü bileşen olarak içeren graflar P_4 – doymamış graflardır. Hiçbir bileşeni P_3 olmayan, bağlantısız G grafı verilsin. Yardımcı teoremden dolayı G nin her bir bileşeni P_4 – doymuştur. G grafı, bir v izole düğümünü ve diğer bileşen olarak ikiden daha az uzunluklu S yıldızını içerirse, v düğümü ile S yıldızının merkezine eklenen e ayrıtı P_4 yolu oluşturmadığından G grafı P_4 –doymamıştır. Bir başka deyişle G en az iki düğümlü iki bileşen içerirse eklenen herhangi yeni bir ayrıt P_4 yolu meydana getirir.

Son olarak G grafı v izole düğümünü ve yıldız olmayan A bileşenini içerirsin ve v düğümü ile A bileşenindeki w düğümü arasına herhangi bir ayrıt eklensin.

A da ki herhangi bir x düğümü ile w düğümü arasındaki uzaklık en az iki olduğundan yeni bir P_4 yolu oluşturur. Dolayısıyla G grafı bir izole düğüme sahipken diğer bileşenleri yıldız değilse P_4 – doymuştur.

5.3 Oluşturulabilir Ağaçlar

Bu bölümde kısaca, sonlu tüm ağaçların oluşturulabilmesi için sistematik bir notasyon belirlenecektir. Herhangi bir sonlu yolun düğümlerinin $1 \in \mathbb{Z}^+$ ile başlayarak ardışık etiketlendiği varsayılacaktır. Böylece düğümlerin etiketleri ardışık tamsayılar olacaktır.

Tanım 5.3.1 : Herhangi sonlu bir yola **gövde** denir. Bir gövdenin düğümlerinin 1 ile başlayarak ardışık olarak etiketlenmesiyle oluşan yola **oluşturulabilir gövde** denir. Her gövde oluşturulabilir bir ağaçtır ve gövdenin kökü 1 ile etiketli düğümdür. A, P_m gövdesine sahip oluşturulabilir bir ağaç ve B, P_n gövdesine sahip oluşturulabilir bir ağaç olmak üzere A ağacındaki r etiketli düğümün, B ağacındaki s etiketli düğümünün bir ayrıt yardımıyla birleştirilmesiyle elde edilen T ağacına **oluşturulabilir ağaç** denir. T ağacı $A(r: s, B)$ formundadır. Burada T ağacının gövde ve kökü için A ağacının gövde ve kökü esas alınacaktır.

Teorem 5.3.1 : Herhangi bir ağaç maksimal uzunluklu alt yolu gövde alınarak oluşturulabilirdir.

İspat : T, n düğümlü sonlu ağacı maksimal uzunluklu P yoluna sahip olsun. T ağacında derecesi 2 den daha büyük olan bir düğüm yoksa $T = P$ dir. Dolayısıyla T bir gövdedir ve oluşturulabilir bir ağaçtır. T ağacında derecesi 2 den daha büyük dereceli bir düğüm varsa $n \geq 4$ tür ve n den daha az düğümlü ağaçlar oluşturulabilir olsun. T bağlı ve bir yol olmadığı için, derecesi 2 den daha büyük olan bir v düğümüne sahip P yolunu içerir. w, P yolu üzerinde bulunmayan ve v düğümü ile komşu bir düğüm olsun. $T - wv$; n den daha az düğümlü, $v \in A$ ve $w \in B$ olacak şekilde ağaç çiftidir. Dolayısıyla A, P gövdesine sahip oluşturulabilir bir ağaç ve B de w düğümünü içeren maksimal uzunluklu yolu gövde kabul eden oluşturulabilir bir ağaçtır. A ağacındaki v düğümü r ile B ağacındaki w düğümü s ile etiketlenmek üzere, P yi gövde olarak kabul eden T ağacı; $T = A(r: s, B)$ formunda oluşturulabilir ağaçtır.

A, B, B' oluşturulabilir ağaçları ve $T := A(r; s, B)$ verilsin. Yukarıdaki tanımlamalardan dolayı $T' := T\ (r' : s', B\ )$ oluşturulabilir ağacı aynı zamanda $T' = A\ (r: s, B)\ (r' : s'\ , B')$ ile gösterilir.

Bu durumda $T' := A\ (r: s, B;\ r': s', B'\ )$ ifadesi parantezlerin birleşimi ile oluşan yoğunlaştırılmış bir gösterimdir. Bu birleştirilmiş notasyon T' nün kökünün ve gövdesinin A ağacının kökü ve gövdesi olduğunu ifade eder. T' ile izomorf olan gösterim ise $T'' :=\ A\ (r': s', B'\ ; r: s, B)$ dir.

Dolayısıyla $A\ (r': s', B'\ ; r: s, B)\ =\ A\ (r: s, B;\ r': s', B'\ )$ olduğu görülür.

A, B oluşturulabilir bir ağaç ve L de her bir girdisi $r: s, B$ formunda olan bir liste olmak üzere; yukarıdaki bu yoğunlaştırılmış notasyonu yinelemek yerine $A(L)$ şeklinde de temsil edilebilir. Eğer L de $r: s, B;\ r: s', B'$ ardışık terimleri ve aynı r etiketli düğümlerde çeşitli eklemeler varsa L kısaltılarak $r: \{\ s, B;\ s', B';\ ...\ \}$ şeklinde yazılabilir. Boş ω listesi için yoğunlaştırılmış notasyon $A :=\ A(\omega)$ dir.

Sonuç 5.3.1 : Oluşturulabilir ağaçlar sadece sonlu ağaçlardır.

İspat : Teorem 5.3.1 den her sonlu ağacın oluşturulabilir bir ağaç olduğu aşikardır.

Teorem 5.3.2 : P, T de maksimal uzunluklu yol ve L her bir girdisi $(r: s, B)$ olan sonlu bir liste olsun. Bu durumda her sonlu T oluşturulabilir ağacı $P(L)$ formundadır.

İspat : Her sonlu P yolu, $P\ =\ P\ (\omega)$ şeklinde oluşturulabilir ağaçtır. $n \geq 4$ düğümlü herhangi sonlu T ağacı için bu teoremin n den daha az düğümlü ağaçlarda geçerli olduğu kabul edilsin. P, T de maksimal uzunluklu yol ise $T :=\ A(r: s, B)$ formunda oluşturulabilir bir ağaçtır. Burada B ve A oluşturulabilir ağaçlardır. (Teorem 5.3.1 den A, P yolunu gövde olarak kabul eden oluşturulabilir ağaçtır.) Ancak A ağacı n den daha az düğümlüdür ve $A\ =\ P(L)$ dir.

Böylece $T\ =\ P(\ L\ )(r: s, B) =\ P\ (\ L')$ olur. Burada $P\ (\ L'\ )\ , r: s, B$ üçlüsünü girdi olarak kabul eden L listelerinin birleşimidir. Açıkça görülür ki T ağacı teoremde belirtilen formda yazılabilir.

Teorem 5.3.2, yollar tarafından oluşturulan sonlu ağaçların özel bir yapısını vermiştir. Bu yapı, çok katlı yol listeleri ile yapılabilecek ağaçların belirlenmesine karşılık gelir. ω boş listesi herhangi bir P_m sonlu yolu için çok katlı bir yol listesidir.

$r, s, t \in \mathbb{Z}^+, r \leq m$ ve $s \leq t$ olmak üzere P_t nin çok katlı yol listesi L ise P_m için çok katlı yol gösterimi r: s, P_t (L) olur. Yine benzer şekilde P_m nin çok katlı yol listeleri L ve L' ise P_m için birleştirilmiş çok katlı yol listesi L; L' halini alır.

P sonlu yolu için çok katlı bir yol listesi; sonlu yolların pozitif tamsayılarla etiketli düğümlerin eklenmesiyle oluşan bir listedir. Üst seviyede ekleme P yolunun kendisi içindir. Daha düşük seviyelerde, eklemeler, liste içindeki uygun yollara uygulanır. Teorem 5.3.2 deki bu yinelemelerden dolayı aşağıdaki sonuç meydana gelir;

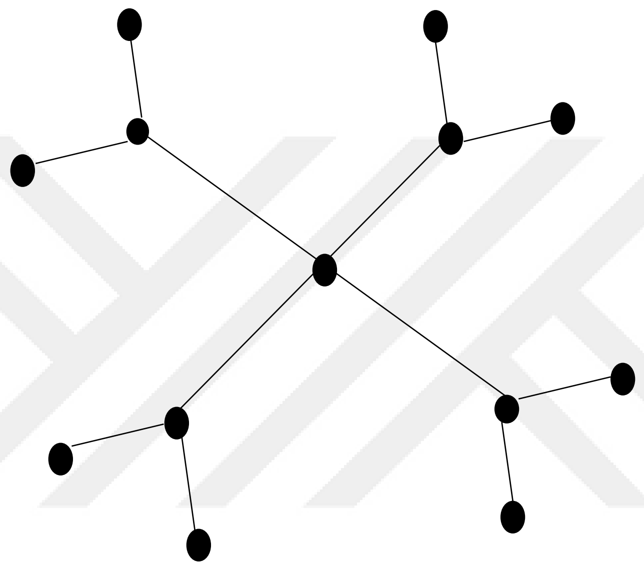
Sonuç 5.3.2 : T sonlu ağacındaki maksimal uzunluklu P yolu için çok katlı yol gösterimi L olsun. Bu durumda her sonlu T ağacının gösterimi $P(L)$ formundadır.

İspat : T sonlu bir ağaç ve T ağacının maksimal uzunluklu yolu P olsun. Teorem 5.3.1 ve Teorem 5.3.2 den, T oluşturulabilir ağacının çok katlı yol listeleri halinde yazımının P (L) olduğu açıktır. Eğer T bir yol ise $T = P$ olur ve bu durumda $L = \omega$ dir. Tersine eğer T bir yol değilse bu durumda $T - V(P)$ A ve B ağaçlarına parçalanır. P yolunda alınan uygun r, r' etiketli düğümler olsun.

A ve B ağaçlarındaki maksimal uzunluklu yollardaki sırasıyla s, s' düğümleri dikkate alınarak $T = P\,(r\!: s\,, A;\ r' : s', B;\ \ldots)$ şeklinde ifade edilir. A ağacındaki maksimal uzunluklu herhangi bir P_t yolu için çok katlı yol gösterimi $A = Pt\,(L(A))$ olduğundan T için $r\!: s, Pt\,(L(A))$ gösterimi de $T = P(L)$ halini alır.

Herhangi bir $r\!: s\,, Pt\,(*)$ iç içe geçmiş çok katlı yol listesinde s girdisi n −kez tekrar ediyorsa $(*)$ ifadesi için bu gösterim r: $s[t]^n$ halini alır. Örneğin en az iki düğümlü yıldızlar için bu tekrarlı ifade P_2 (2: $[1]^n$) dir.

Örnek 5.3.1 : P_5 (2: 1, P_1; 3: { 2, P_3 ; 2, P_3 } ; 4: 1 , P_1) çok katlı yol listesi için uygun ağaç modelini çiziniz.



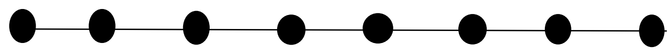
Şekil 5.2 Çok Katlı Yol Listesi Örneği

5.4 Minimal P_4 – Doymuş Graflar

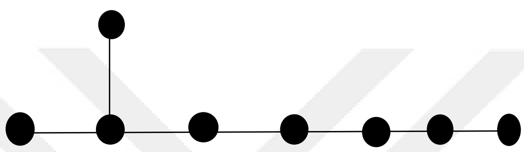
Bu bölümde minimal P_4 – doymuşluğu karakterize etmede önemli bir rol oynayan 8 düğümlü 10 farklı ağaç bir sonraki sayfada örnekte verilmiştir.

Örnek 5.4.1 :

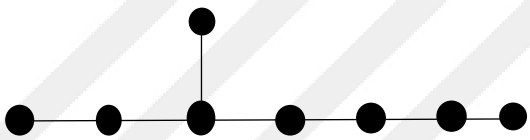
T_1 : P_8



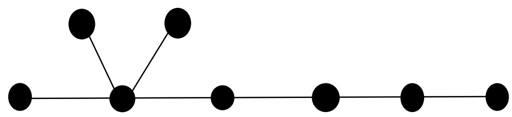
T_2 : P_7 (2: [1])



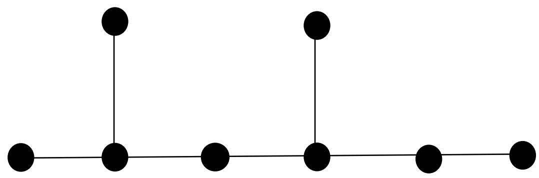
T_3 : P_7 (3: [1])



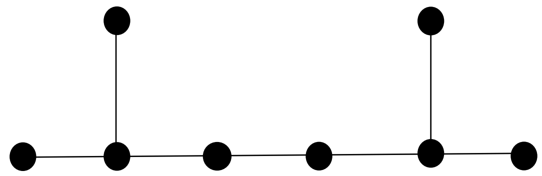
T_4 : P_6 (2: $[1]^2$)



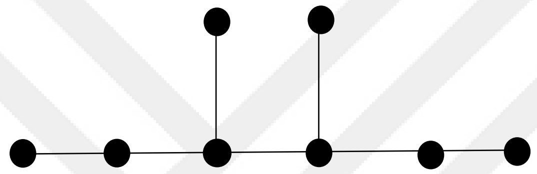
T_5 : P_6 (2: [1]; 4: [1])



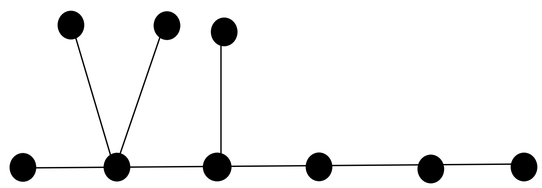
T_6 : P_6 (2: [1]; 5: [1])



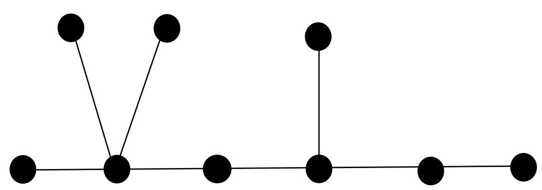
T_7: P_6 (3: [1]; 4: [1])



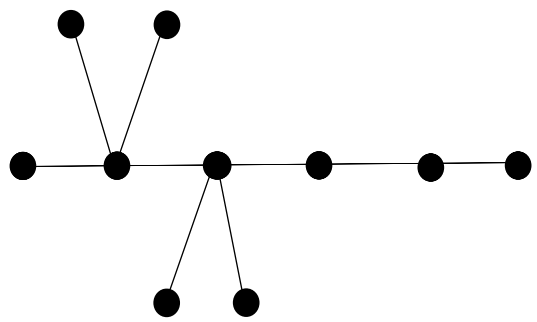
T_8: P_5 (2: $[1]^2$; 3: [1])



T_9: P_5 (2: $[1]^2$; 4: [1])



T_{10}: P_4 (2: $[1]^2$; 3: $[1]^2$)



Şekil 5.3 8 Düğümlü Özel Ağaçlar

Yardımcı Teorem 5.4.1 : T bir ağaç olsun. Eğer T ; P_8, P_7 (3: [1]), P_6 (3: [1]; 4: [1]) ağaçlarından en az birini içeriyorsa iki bileşeni de yıldız olmayan bir orman içerir.

İspat : Şekil 5.3 de belirtilen ağaçların her biri; iki bileşeni de yıldız olmayan bir orman içerir. Bu belirtilen ağaçlardan herhangi birini içeren ağaçlar da benzer özelliklere sahiptir. T nin bu belirtilen ağaçlardan P_8, P_7 (3: [1]), P_6 (3: [1]; 4: [1]) den birini içerdiği kabul edilsin. O halde T nin iki bileşeni de yıldız değildir. Tersine T ağacında alınan herhangi bir ab ayrıtı için $T - ab$ nin sadece bir bileşeni yıldız olmasın. A ve B sırasıyla a ve b düğümlerini içeren bileşenler olsun. A nın yıldız olmadığı kabul edilsin. a düğümü A bileşeninin bir yaprağı ve v de a nın komşusu olsun. Bu durumda A, bir yıldız olmadığından A da v ye bitişik olmayan bir düğüm daha vardır. Dolayısıyla a düğümü A da ki P_4 yolunun uç düğümüdür. Eğer a, A nın bir yaprağı değilse en az iki komşusu vardır ve A yıldız olmadığı için a ya bitişik olmayan bir düğüm daha olmalıdır. Dolayısıyla a düğümü A da ki P_4 yolunun iç düğümüdür. Benzer durum B de bulunan b düğümü için yapılır.

Böylece $T - ab$ nin iki bileşeninin de yıldız olmadığı açıktır. O halde T iki bileşeni de yıldız olmayan bir orman içerir.

Yardımcı Teorem 5.4.2 : Bir T ağacı Örnek 5.4.1 deki; P_8, P_7 (2: [1]), P_7 (3: [1]), P_6 (2: $[1]^2$), P_6 (2: [1]; 4: [1]), P_6 (2: [1]; 5: [1]), P_6 (3: [1]; 4: [1]), P_5 (2: $[1]^2$; 3:[1]), P_5 (2: $[1]^2$; 4: [1]), P_4 (2: $[1]^2$; 3: $[1]^2$) ağaçlarından en az birini içeriyorsa, her iki bileşeni de en az dört düğümlü yıldız olan bir orman içerir.

İspat : T nin bu belirtilen ağaçlardan birini içerdiği kabul edilsin .Dolayısıyla T bu özel ağaçların sağladığı özelliklere sahip bir ağaçtır. T ağacında ki herhangi bir ab ayrıtı için $T - ab$ nın her bir bileşeni 3 ya da daha az düğümlü bir yıldız olsun. A ve B sırasıyla a ve b düğümlerini içeren en fazla 3 düğümlü bileşenler olsun. A en fazla üç düğümlü bir S yıldızını içerdiği kabul edilsin. Bu durumda a, üç düğümlü bir yıldızın ya yaprağıdır ya da merkezidir. Eğer B bir yıldız değilse bu durumda b, B deki üç düğümlü P yolunun ya iç düğümüdür ya da uç düğümüdür.

Bu durumda T, P_7 (2: [1]), P_6 (2: $[1]^2$), P_6 (2: [1]; 4: [1]), P_5 (2: $[1]^2$; 3:[1]) dört ağaçtan biri olan $(S \cup P) + ab$ alt grafını içermez. Bu ise bir çelişkidir. Tersine B bir yıldızsa bu durumda b, en fazla üç düğümlü S' yıldızının ya merkezidir ya da yaprağıdır. Her durumda T, P_6 (2: [1]; 5: [1]), P_5 (2: $[1]^2$; 4: [1]), P_4 (2: $[1]^2$; 3: $[1]^2$) üç ağaçtan hiç birini içermez. Bu ise bir çelişkidir. O halde T her bir bileşeni en az dört düğümlü yıldız olan bir orman içerir.

Yardımcı Teorem 5.4.3 : A bir yıldız olmamak üzere, en az beş düğümlü T ağacı $P_1 \cup$ A uzanımlı ormanını içerir $\Leftrightarrow$ Eğer T nin kendisi bir yıldız değildir.

İspat : Bu yardımcı teoremin ispatı T nin çapı üzerine yapılacaktır. Burada 5 farklı durum ile ele alınacaktır.

Durum 1 : T bir yıldız olsun. T nin herhangi bir e ayrıtı için S bir yıldız olmak üzere $T - e = P_1 \cup S$ dir. Dolayısıyla T belirtilen tipte bir uzanımlı ormana sahip değildir. O halde T yıldız değildir.

Durum 2 : T nin çapı 3 olsun. Dolayısıyla T de maksimum uzunluklu P_4 yolu vardır. T nin herhangi bir düğümü bu yolun herhangi bir iç düğümüyle bitişik olmalıdır. (Maksimal uzunlukla çelişeceğinden uç düğümle bitişik olamaz).

Böylece T, P_4 (2: [1]) ağacını içerir ve bu alt grafın yaprakları T nin yapraklarıdır. T nin yaprağı olan P_1 düğümü için P_4 (2: [1]) ağacı $P_1 \cup P_4$ şeklinde bir orman içerir. Dolayısıyla T, T' nün yıldız olmadığı $P_1 \cup T'$ uzanımlı ormanı şeklinde ifade edilebilir.

Durum 3 : T nin çapı en az 4 olsun. Dolayısıyla T bir P_5 yolu içerir. Bu P_5 yolunun uç düğümü aynı zaman da T nin de uç düğümüdür. T de ki bir P_1 uç düğümü için P_5 yolu $P_1 \cup P_4$ ormanını içerir. Dolayısıyla T, T' nün yıldız olmadığı $P_1 \cup T'$ uzanımlı ormanını kapsar. Bu durumda T yıldız değildir.

Durum 4 : T sonsuz çapa ve en az bir yaprağa sahip olsun. T, Durum 3 tekine benzer şekilde P_5 yolunu içerir ve bu yolun uç düğümü T nin bir yaprağıdır. Dolayısıyla T, T' nün yıldız olmadığı $P_1 \cup T'$ uzanımlı ormanını kapsar.

Durum 5 : T sonsuz çapa sahip olsun ve hiç yaprak içermesin. T den herhangi bir u düğümünün silinmesiyle oluşan yeni graf A ve A nın herhangi bir bileşeni T' olsun. T' bileşenindeki v düğümü ile A nın u düğümü bağlı olsun. T yaprak içermediğinden T' nde tek bir v düğümü olamaz. Bu durumda T' deki herhangi bir w düğümüne sahiptir. w ün derecesi u düğümüne bitişik olmadığından T ve A da benzer dereceye sahiptir. O halde w, T nin bir yaprağı olamaz.

T' nde birden fazla düğüm bulunur ve en çok bir yaprağı vardır. Dolayısıyla T' sonsuz çapa sahiptir. Burada u düğümü yerine P_1, hiçbir bileşeni yıldız olmayan bir orman yerine de A alınırsa T, $P_1 \cup A$ uzanımlı ormanını içerir. Bu gösterim ise yardımcı teoremi tamamlar.

Yardımcı Teorem 5.4.3 ve Teorem 5.2.1 den sadece 3 ten farklı düğüme sahip yıldızların minimal P_4 $-$ doymuş olduğu görülmektedir. Şimdi verilecek olan teorem ile minimum $P_4$$-$doymuş grafların karakteristiği kanıtlanacaktır.

İspatta derecesi 2 olan düğüme bitişik bir yaprağa sahip olan ağaçlar önemli rol oynar. Bu duruma ise bir yaprağa maruz kalan düğüm ya da kolye yolu adı verilir.

Teorem 5.4.1 : r$\neq$ 1 ve

Δ **:** K_3 tam graflarının birleşimi,

$\sum$ **:** Her biri 2 yada en az 4 düğümlü yıldızların birleşimi,

A : Her biri 3 yada 4 çaplı ağaçların birleşimi,

$\boldsymbol{A'}$: Her biri 5 veya 6 çaplı ve $P_6(3\colon[1]\,;\ 4\colon[1]\,)$ yada $P_7(3\colon[1])$ içermeyen ağaçların birleşimi,

B : Her biri 3 çaplı ve $n\ \geq\ 0$ için $P_4(2\colon[1];\ 3\colon[1]^n\,)$ formundaki ağaçların birleşimi,

$\boldsymbol{B'}$: Her biri 4 çaplı ve $m,n\ \geq\ 0$ için P_5 ya da

$P_5(2\colon[1];\ 3\colon\{[1]^m;\ 2\colon[3]^n\ \};4\colon[1]\,)$ formundaki ağaçların birleşimi olmak üzere minimal P_4 $-$ doymuş graflar $\Delta\,,\Delta\ \cup \mathrm{P}_1\ \cup\ A\ \cup\ A'$ ya da $\Delta\ \ \cup\ P_2\ (2\colon[1]^r)\ \cup\ \sum\ \cup\ B \cup\ B'$ formundaki graflardır.

İspat : G minimal P_4 – doymuş graf , G_Δ ise G den K_3 e izomorf olan bileşenlerinin atılmasıyla elde edilen G nin alt grafı olsun.

G_Δ ağaç olmayan bir bileşene sahip olduğu kabul edilsin. Eğer H,S gibi yıldız olan uzanımlı ağaca sahip ve e de H ın S de olmayan bir kenarı ise $S+\ e, H$ de en az 4 düğümlü bir tek üçgen içeren bağlı uzanımlı alt grafttır. $e',S+e$ den farklı üçgenin bir ayrıtı olsun. Bu durumda $S+e-\ e'$, yıldız olmayan bir uzanımlı ağaçtır. Fakat her bağlı graf bir uzanımlı ağaca sahip olduğundan H' de, yıldız olmayan bir uzanımlı ağaca sahiptir. Bu durumda G_Δ , Teorem 5.2.1 nin şartları sağlar. H ile H' nün yer değiştirmesi bu şartları sağlayacağından has uzanımlı alt ağacını verir ve bu uzanımlı ağaç P_4 – doymuştur. Bu ise G_Δ nin minimal P_4 – doymuş olmasıyla çelişir. Böylece G_Δ nin her bileşeni bir ağaçtır.

G_Δ nin bileşenlerinin yıldız olup olmamasına bağlı olarak bazı kısıtlamalar vardır. Bu kısıtlamalar aşağıdaki durumlarla açıklanmıştır;

Durum 1 : G_Δ nin bir bileşeni izole düğüm ve $G^* = G_\Delta - P_1$ olsun. T ağacı G^* nün bir bileşeni olsun. G_Δ tek izole düğüme sahip olduğundan Teorem 5.2.1 den dolayı minimal P_4 – doymuştur ve T; Yardımcı Teorem 5.4.1 de belirtilen üç ağaçtan hiç birini içermeyen en az 3 çaplı ağaçtır. T, P_8 yolunu içermediği için T nin çapı en fazla 6 dır. Dolayısıyla T, 3 ya da 4 çaplı bir ağaç veya P_6 (3:[1]; 4: [1]) , P_7 (3: [1]) içermeyen 5 ya da 6 çaplı ağaçtır.

Δ, A, A' teoremde belirtildiği gibi olmak üzere; H, $\Delta \cup P_1 \cup A \cup A'$ formunda herhangi bir graf ve e de H grafında herhangi bir ayrıt olsun. Teorem 5.2.1 den dolayı Δ deki bir e ayrıtının H dan silinmesiyle oluşan $H - e$ grafının herhangi bir bileşeni P_3 ü içerirse P_4 – doymamıştır. Eğer $A \cup A'$ deki e ayrıtının H dan silinmesiyle oluşan $H - e$ grafı P_4 – doymamışsa Yardımcı Teorem 5.4.1 den dolayı $H - e - P_1$ in bir bileşeni yıldızdır. Bu yüzden H minimal P_4 – doymuştur.

Dolayısıyla $\Delta \cup P_1 \cup A \cup A'$ formundaki graflar tam olarak minimal P_4 – doymuş graflardır ve izole düğüme sahiptir.

Durum 2 : $r \in \mathbb{Z} - \{1\}$ için G_Δ nin bir bileşeni P_2 (2: [1]^r) olan yıldızdır. Teorem 5.2.1 den dolayı G_Δ nin hiç izole düğümü olmasın. G_Δ nin yıldız olmayan herhangi bir T bileşeni en az 3 çaplı bir ağaçtır. G_Δ minimal P_4 – doymuş olduğundan Teorem 5.2.1 den dolayı hiç izole düğümü yoktur. T, Yardımcı Teorem 5.4.2 de belirtilen on ağaçtan hiç birini içermez dolayısıyla P_8 yolunu da içermediğinden çapı en az 7 dir.

T nin düğüm sayısı 5 ten farklıysa yaprak içermez. T', 3 den farklı düğüme sahip bir ağaç olsun. T den herhangi bir e ayrıtının atılmasıyla $P_2 \cup T'$ uzanımlı ağacı elde edilir. Bu ise Teorem 5.4.1 den dolayı $G_\Delta - e$ nin P_4– doymuş olmasıyla çelişir. Dolayısıyla T, yaprak içerirse ya P_4 (2: [1]) ya da P_5 olmalıdır.

2a : T nin çapı 6 olsun. Bu durumda T, Yardımcı Teorem 5.4.2 den dolayı maksimal uzunluklu P_7 yolunu içerir. Fakat P_7 (2: [1]) i içermez. Bu nedenle P_7 nin her bir uç düğümü T de bir yapraktır. Fakat T yaprak içermediği için hiçbir bileşeni 6 çaplı olamaz.

2b : T nin çapı 5 olsun. T, Yardımcı Teorem 5.4.2 den dolayı maksimal uzunluklu P_6 yolunu içerir. Fakat P_6 (2: [1]; 5: [1]) içermez. Bu nedenle P_6 nın en az bir uç düğümü T nin bir yaprağıdır. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla T nin hiçbir bileşeni 5 çaplı olamaz.

2c : T nin çapı 4 olsun. T maksimal uzunluklu P_5 yoludur. T, P_5 (2: $[1]^2$) içerirse en az 7 düğümlüdür. Yardımcı Teorem 5.4.2 den dolayı T, P_5 (2: $[1]^2$; 4: [1]) içermediği için P_5 in 5. düğümü T nin yaprağıdır. Ancak T de yaprak olmadığından P_5 (2: $[1]^2$) içermez. Eğer T, P_5 (2: [1]) içerseydi bu durumda yaprak bulundururdu ve P_5 (2: [1]; 4: [1]) içerirdi. Bu nedenle $m, n \geq 0$ olmak üzere T, P_5 (2: [1]; 3: {$[1]^m$; 2 $[3]^n$ }; 4 [1]) tir. Aksi taktirde T, P_5 tir.

2d : T, 3 çaplı maksimal uzunluklu P_4 yolu olsun. Eğer T en az 6 düğümlü P_4 (2: $[1]^2$) i içerirse P_4 yolunun 4. düğümü T ağacının yaprağıdır. Ancak Yardımcı Teorem 5.4.2 den dolayı T, P_4(2: $[1]^2$; 3: $[1]^2$) yi içermediğinden $n \geq 2$ için P_4(2: [1]; 3: $[1]^n$) dir. Aksi taktirde $T = P_4$ (2: [1]) yada P_4(2: [1]; 3: [1]) olup P_4 yolu değildir çünkü bu yolun 4. düğümü yapraktır.

Δ, $\sum, B, B`$ teoremdeki ifadeler olmak üzere ve bazı $r \in \mathbb{Z} - \{1\}$ için H, $\Delta \cup P_2$ (2:$[1]^r$) $\cup \sum \cup B \cup B'$ formunda olsun. H ın herhangi bir ayrıtının silinmesiyle oluşan $H - e$ grafındaki bileşenler P_3, P_1 veya P_2 (2: $[1]^r$) den biriyse Teorem 5.2.1 den dolayı $H - e$ grafı P_4 – doymamıştır. Bu nedenle H minimal P_4 – doymuş graftır.

Dolayısıyla $\Delta \cup P_2$ (2:$[1]^r$) $\cup \sum \cup B \cup B'$ formundaki graflar bir bileşeni en az 2 düğümlü yıldız olan minimal P_4 – doymuş graflardır.

Durum 3 : G_{Δ} nin hiçbir bileşeni yıldız olmasın bu durumda G_{Δ} boştur. O halde G basit anlamda K_3 bileşenlerinin sonlu sayıda birleşimidir. G_{Δ} nin boştan farklı olduğu kabul edilsin. T, G_{Δ} nin herhangi bir bileşeni olsun.

T bir yıldız olmadığı için en az 4 düğümlüdür. Eğer $T = P_4$ ise T nin ortasında ki ayrıtının silinmesiyle iki tane P_2 yolu oluşur bu durumda Teorem 5.2.1 den dolayı G_{Δ} uzanımlı alt grafı P_4 – doymuştur. Bu ise G_{Δ} nin seçimiyle çelişir. Dolayısıyla T, dörtten daha fazla düğüme sahiptir. A nın hiçbir bileşeni yıldız olmamak koşuluyla Yardımcı Teorem 5.4.3 den dolayı T den uygun ayrıt kümesinin silinmesi uzanımlı $P_1 \cup A$ ormanını oluşturur. O halde G_{Δ} nin uzanımlı alt grafları P_4 – doymuştur . Bu ise Teorem 5.2.1 den dolayı çelişkidir. O halde G_{Δ} boştur. Bu durumda teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 5.4.1 : Δ **:** K_3 tam graflarının herhangi birleşimi

$\sum$: Her biri 2 ya da en az 4 düğümlü yıldızların herhangi bir birleşimi olmak üzere;

Maksimal P_4 – serbest graflar tam olarak $\Delta \cup P_1$ veya $\Delta \cup \sum$ formundaki graflardır.

5.5 Minimal P_m – Doymuş Çevreler

Bu tezin geri kalan kısmında, $m \geq 5$ için P_m – doymuş ve minimal P_m – doymuş graflar çalışılacaktır. Bu bölümde C_n çevrelerinin hangilerinin P_m – doymuş hangilerinin minimal P_m – doymuş olduğu üzerinde durulacaktır.

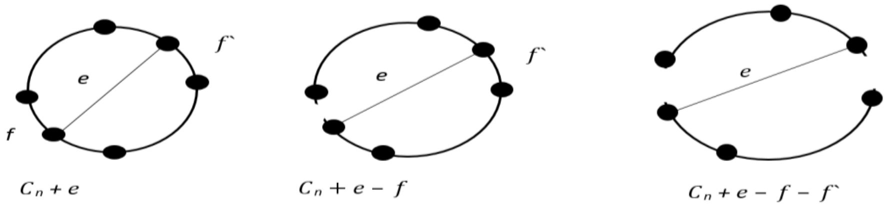
Teorem 5.5.1 : $n \geq 4$ ve $m \geq 5$ ise $n \geq m$ olduğunda C_n çevresi P_m – doymuştur.

İspat : Hamilton graflar uzanımlı çevre graflarıdır. Bölüm 5.4 te belirtildiği gibi Hamilton grafları P_m – doymuş graflardır.

Sonuç 5.5.1 : Eğer $m \geq 5$ ise $n \geq m$ olmak üzere herhangi Hamilton graflar P_m – doymuştur.

İspat : C_n çevresi, $n \geq 4$ için bitişik olmayan düğüm çiftlerine sahiptir. Eklenen herhangi bir e ayrıtı, $C_n + e$ çevresinde dört ayrıt ile bitişiktir. f, e ye bitişik herhangi bir ayrıt olmak üzere $C_n + e - f$ bir ilmikli yoldur. e ye ve eklenen yola bitişik olan döngünün tek kenarı f' olsun. f' nün silinmesiyle oluşan $P = C_n + e - f - f'$ yolu n düğümlü bir yoldur.

(Burada f ve f' nün iki farklı seçimi vardır.) e ayrıtından geçen bir yol olduğundan P_m – doymuştur.



Şekil 5.4 Yol Oluşturma Gösterimi

Yardımcı Teorem 5.5.1 : $q := \lfloor (m+2)/2 \rfloor, r := \lfloor (m-3)/2 \rfloor$ ve $m \geq 5$ olmak üzere A grafı, her biri r uzunluklu kolye yolu üzerinde olan a ve b düğümlerinin bir ayrıtla (bu ayrıt ab olsun) bağlanmasıyla elde edilen bir q – çevresine sahip olsun. Bu durumda A grafındaki herhangi maksimum uzunluklu yol $m - 1$ tane ab ayrıtı içerir.

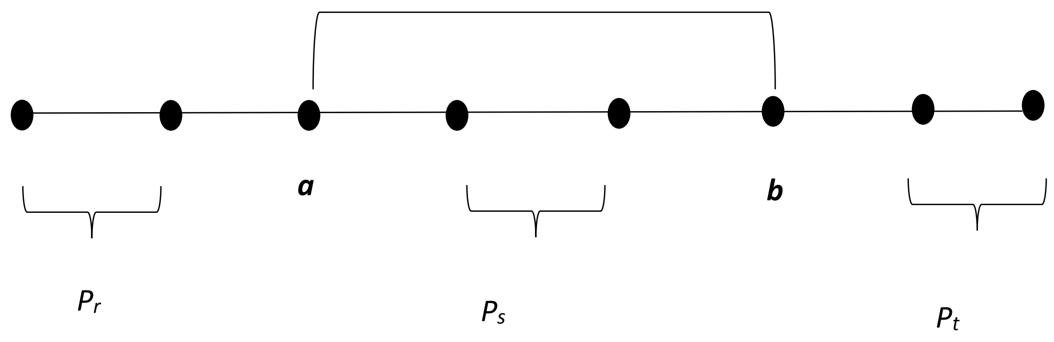
İspat : Bir çevreden herhangi bir ayrıtı silmek bir yolu üretir ve genel olarak bir yola ayrıt eklemek, bitişik düğümlere eklenen iki kolye yolu ile bir çevre oluşturur.

$r \geq 0, q \geq 1, t \geq 0$ için $r+q+t+2$ düğümlü yola bir e kenarı ekleyerek oluşan graf A olsun. Bu durumda e ayrıtı yolun bir ucunda $r+1$ diğer ucunda ise $t+1$ tane düğüm ile bitişiktir. Eğer A da e ile bitişik olan iki düğüm silinirse bu durum r, q, t düğümlü yollar üretir. Bu nedenle r ve t pozitifse, e ye bitişik olan düğümler A nın e yi içeren üç maksimum uzunluklu yolunun ikisinde bulunur. Dolayısıyla A da e yi içeren üç maksimum uzunluklu yol $r+q+2$, $r+t+2$, $q+t+2$ düğümlüdür. $q := \lfloor (m-2)/2 \rfloor$, $r := \lfloor (m-3)/2 \rfloor$ ve $t := \lfloor (m-3)/2 \rfloor$ ve $m \geq 5$ olsun.

Bu durumda A da e yi içeren maksimum uzunluklu herhangi bir yol

$$\lfloor (m-2)/2 \rfloor + \lfloor (m-3)/2 \rfloor + 2 = m - 1$$

dir.



Şekil 5.5 Maksimal Uzunluklu Yol

Teorem 5.5.2 : $m \geq 5$ ve $n \geq 4$ olmak üzere $\lfloor (3m-5)/2 \rfloor \geq n \geq m$ $\Leftrightarrow$ C_n çevresi minimal P_m – doymuştur.

İspat : $\Leftarrow$ C_n minimal P_m – doymuş olsun. C_n Hamilton çevre grafı olduğundan Sonuç 5.5.1 den dolayı $n \geq m$ dir.

Böylece C_n den herhangi bir kenar atıldığında P_n yolu elde edilir ve C_n den herhangi e kenarı atıldığında minimallikten dolayı e yi içeren P_m alt yolu yoktur. Yardımcı Teorem 5.5.1 den dolayı $e = ab$ ayrıtı bu özelliğe sahip olsun. Bu durumda;

$$n = q + 2r = 2r + s + 2$$

$$2\lfloor (m-3)/2 \rfloor + \lfloor (m-2)/2 \rfloor + 2 = \lfloor (3m-5)/2 \rfloor$$

dir.

$n \geq m$ olduğu için $n < \lfloor (3m-5)/2 \rfloor$ seçilsin. $\lfloor (3m-5)/2 \rfloor$ – n tane düğümün atılmasıyla (bir yada iki ilmikli yolun atılmasıyla) A grafı oluşsun. Yeni graf $e = ab$ den geçen P_m yolu içermez. Böylece C_n minimal P_m – doymuştur.

Dolayısıyla $m \leq n \leq \lfloor (3m-5)/2 \rfloor$ dir.

$\Longrightarrow$ Eğer $n \geq \lfloor (3m-5)/2 \rfloor$ ise Teorem 5.5.1 den C_n, P_m – doymuştur. Yardımcı Teorem 5.5.1 deki A grafı göz önüne alınsın. e kenarını içeren maksimum P_m yolu A nın bir ilmikli yoluna $n - \lfloor (3m-5)/2 \rfloor$ tane düğümün eklenmesiyle elde edilebilir. O zaman e yi içeren herhangi bir yolun uç düğümü q olsun. Diğer düğümü a ya çok yakın yada çok uzak seçildiğinde $P_n + e$ için maksimal uzunluklu yol elde edilir. Böylece $P_n + e$ deki e nin her seçimi P_m ye aittir.

Bu durumda C_n minimal P_n – doymuş olamaz. Eğer $n \geq \lfloor (3m-5)/2 \rfloor$ ise C_n, minimal P_m – doymamıştır. Bu durum ise çelişkidir.

Dolayısıyla $m \leq n \leq \lfloor (3m-5)/2 \rfloor$ dir.

5.6 Minimal P_m – Doymuş Yollar

Bu bölümde $m \geq 5$ olmak üzere P_n yollarının hangilerinin $P_m -$ doymuş ve minimum P_m- doymuş olduğunu incelecektir.

Teorem 5.5.2 in ispatında, Yardımcı Teorem 5.5.1 deki A kritik grafındaki ilave düğümleri hakkındaki tartışma 5.6.1 de elde edilir.

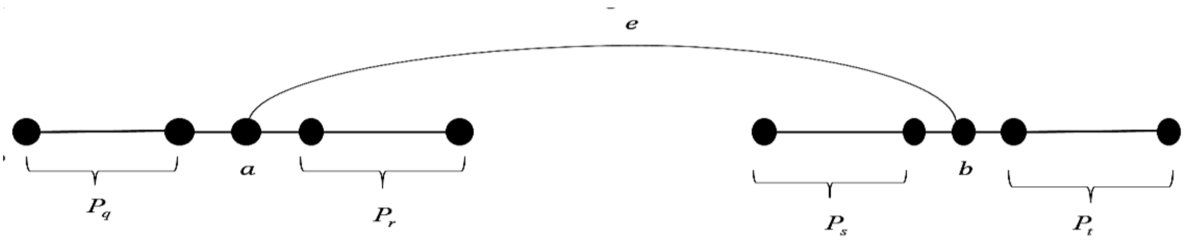
Teorem 5.6.1 : $m \geq 5$ ve $n \geq 3$ olmak üzere P_n yolu P_m – doymuştur $\Leftrightarrow$ $n \geq \lfloor (3m-3)/2 \rfloor$ dir.

İspat : $\Longrightarrow$ Teorem 5.5.2 den C_n çevresinin $\lfloor (3m-3)/2 \rfloor \geq n \geq m$ koşulunu sağlarsa minimal $P_m -$ doymuş olduğu görülür. C_n bir çevre olduğundan $P_n -$ Hamilton yolunu içerir. O halde C_n çevresi P_m- doymuş ise bu durumda P_n de $P_m -$ doymuştur. Eğer P_n yolu P_m – doymuş ise P_n in uç düğümlerine bir kenar ekleyerek C_n çevresi elde edilir.

Dolayısıyla C_n, P_m – doymuştur.

$\Longleftarrow$ $n \geq \lfloor (3m-3)/2 \rfloor$ ise P_n yoluna bir e ayrıtının eklenmesiyle C_n çevresi oluşur. Teorem 5.5.1 den dolayı C_n çevresi P_m – doymuştur. O halde C_n çevresinden e ayrıtının silinmesiyle oluşan P_n yolunun bir ucunu P_m yoluyla birleştirilmesi de P_m- doymuşluğu gösterir.

Sonuç 5.6.1 : $m \geq 5$ için, n düğümlü Hamilton yol grafları $n \geq \lfloor (3m-3)/2 \rfloor$ eşitsizliğini sağlarsa P_m – doymuştur.



Şekil 5.6 H Grafı

Yardımcı Teorem 5.6.1 : $m \geq 3$, $0 \leq k \leq m-3$ ve $q = m-k-3$, $s = k$ olsun. $2q+1$ ve $2s+1$ düğümlü iki yolun orta noktalarının bir e ayrıtıyla birleştirilmesiyle oluşan $2m-4$ düğümlü ağaç H_k olsun. Bu durumda H_k da e yi içeren herhangi yolun mertebesi $m-1$ kadardır.

İspat : Herhangi bir yoldan silinen bir ayrıt iki yol üretir ve bu yollara eklenen herhangi bir ayrıt hem ağaç hem de en çok dört farklı yaprak üretir.

$q \geq r \geq 0$ ve $s \geq t \geq 0$ olmak üzere $q+r+1$ ve $s+t+1$ düğümlü yolların arasına e ayrıtı eklenerek H oluşturulsun. Böylece e ayrıtı ilk olarak $q+1$ düğüm ikinci olarak ise $s+1$ düğümle bitişiktir. H grafından iki tane düğüm silmek, H grafını e ile bitişik q, r, s ve t düğümlü yaprak içeren yollara parçalar. H da e yi içeren maksimum uzunluklu dört tane yol $q+s+2$, $q+t+2$, $r+s+2$, $r+t+2$ sayıda düğümden oluşur. $q > r$ ve $s > t$ olduğundan e yi içeren maksimum uzunluklu yolun düğüm sayısı $q+s+2$ kadardır. $m \geq 5$ ve $0 \leq k < m$ olmak üzere $q = m-k-3$, $r = m-k-3$, $s = k$, $t = k$ eşitlikleri için $q+s+2 = m-1$ dir.

Yardımcı teorem 5.5.1 de bahsedilen ekstremal A grafları tarafından oluşan çevreler ile ekstremal H_k grafları minimal P_m – doymuş yollar için önemli rol oynar.

Teorem 5.6.2 : $m \geq 5, n \geq 3$ ve $5 \leq m \leq 7$ için $f(m) = 2m-4$, $m \geq 8$ için $f(m) = 2m-5$ olmak üzere; P_n yolu minimal P_m - doymuştur $\Leftrightarrow$ $\lfloor (3m-3)/2 \rfloor \leq n \leq f(m)$ dir.

İspat: Teorem 5.6.1 den $m \geq 6$ için, P_{2m-5} yolu , $2m-5 \geq \lfloor(3m-3)/2\rfloor$ olursa P_m $-$doymuştur. Herhangi bir e ayrıtının P_{2m-5} yolundan atılmasıyla oluşan $P_{2m-5}-e$ grafında iki yol üretir. Bu yollardan biri tek sayıda, diğeri çift sayıda düğüm içerir. $P_{2m-5}-e$ grafı, P_{2q} ve P_{2s+1} yollarına parçalanır. P_{2q} nun ucuna bir düğüm eklemek $q, s \in \mathbb{Z}$ ve $q \geq s \geq 0$ ve $q+s = m-3$ için $P_{2q+1} \cup P_{2s+1}$ yi oluşturur. Bu iki yolun orta düğümlerine yeni bir e ayrıtı eklemek H_s ağacını oluşturur. Böylece P_{2m-5} in herhangi bir e' ayrıtı için $P_{2m-5}-e' + e = H_s - v$ olacak şekilde bir e ayrıtı seçilsin. Burada eklenen v düğümü H_s nin herhangi bir yaprağıdır.

Yardımcı teorem 5.6.1 den $m \geq 5$ için P_{2m-4} yolu P_m - doymuştur. Bu durumdan P_{2m-4} den bir e ayrıtının silinmesi iki tane tek düğümlü yol üretir. Yukarıda yapılan analizler bazı s ler için $P_{2m-4}-e' + e = H_s$ olacak şekilde bir e ayrıtının varlığını gösterir. Eklenilen e ayrıtı Yardımcı teorem 5.6.1 den m $-$yol oluşturmaz. $P_{2m-4}-e'$ grafındaki iki tane çift düğümlü yol içerisindeki alternatif durumların ise, r ve $s \in \mathbb{Z}$, $r \geq s \geq 0$ ve $r+s = m-2$ için $P_{2m-4}-e' = P_{2r} \cup P_{2s}$ olduğu söylenebilir. Eğer $s \geq 2$ ise P_m yi oluşturmadan P_{2s} yoluna e eklenebilir. Çünkü $P_{2s}+e$ nin düğüm sayısı $2s < m$ dir.

Eğer $s = 1$ ise $P_{2m-4}-e' = P_{2m-6} \cup P_2$ dir. P_2 ye hiçbir ayrıt eklenemez ve P_{2m-6} ve P_2 ye eklenen e ayrıtı en az m düğümlü maksimum yol üretir. Çünkü P_{2m-6} nın iki merkezi düğümünün her biri P_2 alt grafının uç düğümleridir.

Teorem 5.6.1, P_{2m-6} nin 2m-6 $\geq \lfloor(3m-3)/2\rfloor$ ise P_m $-$doymuş olduğunu gösterir. Dolayısıyla $m \geq 8$ olduğunda P_{2m-6} ya eklenen e ayrıtı yeni m yollar oluşturur.

Eğer $5 \leq m \leq 7$ ise $P_{2m-6} \cup P_2$ den büyük bileşen P_m- doymamıştır. Bu yüzden e ile ilgili uygun seçim P_{2m-6}+e de yeni m yol oluşturmaz.

Özet olarak; P_{2m-4} grafı, sadece $5 \leq m \leq 7$ olduğunda $P_{2m-6} \cup P_2$ uzanımlı alt grafı P_m doymuş olması durumunda minimal P_m −doymuştur.

İspatı tamamlamak için $2m - 4$ den daha fazla düğümlü yolun doymuş P_m −doymamış olduğu kontrol edilmelidir.

Teorem 5.6.1 den $m \geq 5$ ve $n \geq 2m - 3$ için P_{n-1} yolu $P_m -$ doymuştur. Yani $P_{n-1} \cup P_1$ graflarının P_m − doymuş olduğu bellidir. Dolayısıyla P_n uzanımlı süper grafı minimal $P_m -$ doymamıştır.

Her $m \geq 3$ için P_1 ve P_2 tam grafları $P_m -$ doymuştur. Teorem 5.1.2 ve 5.4.1 den dolayı $m = 3{,}4$ için minimal $P_m -$ doymuştur.

5.7 Minimal Doymuş Yolların Birleşimi

Her yolun uygun uzanımlı alt grafı, yolların birleşimidir. Yani belirli bir yol P_m − doymuş fakat minimal $P_m -$ doymamışsa bu durumda uzanımlı alt grafları minimal P_m − doymuş olan yolların birleşimi olmalıdır.

Bu bölümde hangi yolların birleşiminin P_m − doymuş hangilerinin minimal P_m − doymuş olduğuna karar verilecektir. Bağlantısız bir G grafının bağlı olmayan her bileşeni P_m − doymuş olsun. Herhangi iki bileşeni P_m − doymuşsa G grafı $P_m -$ doymuştur.

Yardımcı Teorem 5.7.1 : $m \geq 5$ için

a) En az $\lfloor(3\mathrm{m}-3)/2\rfloor$ düğümlü iki yola

b) Bir bileşeni P_1 ve en az $2m-4$ düğümlü doymuş yola

c) Bir bileşeni P_2 ve en az $2m-6$ düğümlü yola herhangi bir ayrıt eklemek en az m düğümlü yeni bir yol üretir.

İspat : a) En fazla $\lfloor(3\mathrm{m}-3)/2\rfloor$ düğümlü iki yola herhangi bir ayrıt eklendiği kabul edilsin ve bu yollardan biri P_m diğeri P_2 olsun. Bu durumda $P_m \cup P_2$, Teorem 5.6.1 den dolayı $n \leq \lfloor(3m-3)/2\rfloor$ olduğundan P_m- doymuş değildir. Dolayısıyla P_m- doymuş olmayan bir yola yeni bir ayrıt eklemek $P_m + e$ grafında yeni bir m $-$ yolu oluşturmaz.

b) Yollardan birinin P_1 diğerinin $2m-5$ den daha az uzunluklu olduğu kabul edilsin. Teorem 5.6.1 den $m \geq 5$ ise bu yol P_m – doymuştur. $P_1 \cup P_{2m-5}$ için bir bileşeni P_1 diğer bileşeni $2m-4$ düğümlü yollar olsun. $2m-4$ uzunluklu yola yeni bir ayrıt eklendiğinde oluşan $P_{2m-4} - e' + e$ için Yardımcı Teorem 5.6.1 den dolayı yeni bir $m-$ yolu oluşmadığı görülür. O halde en az $2m-4$ uzunluklu olmalıdır.

c) Yollardan birinin P_2 diğerinin $2m-7$ uzunluklu olduğu kabul edilsin. $m \geq 5$ için $P_2 \cup P_{2m-7} = P_{2m-5}$ düğümlüdür. $m \geq 6$ olduğunda Teorem 5.6.1 den dolayı $P_{2m-5} \geq \lfloor(3\mathrm{m}-3)/2\rfloor$ olur.

Teorem 5.7.1 : $m \geq 5$ için herhangi iki ya da daha fazla düğüme sahip yolların birleşimi P_m doymuştur ve

a) Tüm bileşenleri en az $\lfloor(3\mathrm{m}-3)/2\rfloor$ düğümlü

b) Bir bileşeni P_1 ve diğerleri $2m-4$ düğümlü

c) Bir bileşeni P_2 ve diğer tüm bileşenleri en az $g\,(m)$ kadardır.

d) Burada $5 \leq m \leq 2$ için $g\,(m) = \lfloor(3m-3)/2\rfloor$, $m \geq 8$ için $g\,(m) = 2m-6$ durumlarından birini sağlar.

İspat **:** $m \geq 5$ ve G grafı P_m- doymuş olan iki yada daha fazla düğümlü yolların birleşimi olsun. Tam olmayan herhangi bileşenler Teorem 5.6.1 den dolayı P_m- doymuş olduğundan böylesi bileşenlerin düğüm sayısı en az $\lfloor(3\mathrm{m}-3)/2\rfloor$ dir.

G nin mümkün tam bileşenlerini için:

Durum 1 **:** Bileşenlerin tümü P_1 olsun.Yardımcı Teorem 5.6.3 ten $P_{2m-5} \cup P_1$, P_m- doymamıştır. Eğer $1 \leq n \leq 2m-5$ ise $P_n \cup P_1$, P_m $-$doymamıştır. Yani G nin bir bileşeni P_1 ise diğer bileşenleri en az $2m-4$ düğümlü olmalıdır. Fakat bir kenar silinince oluşan yeni graf minimal P_m – doymuş olmadığı için $2m-4 \geq \lfloor(3m-3)/2\rfloor$ dir. Teorem 5.6.1 den dolayı her tam olmayan bileşenler P_m $-$ doymuştur.

Durum 2 **:** Bileşenlerin tümü P_2 olsun. Yardımcı Teorem 5.6.1 den $P_{2m-7} \cup P_3$, P_m - doymamıştır. Eğer $1 \leq n \leq 2m-7$ ise $P_n \cup P_2$,P_m- doymamıştır. Yani G, P_2 bileşenine sahip ve diğer bileşenleri en az 2m-6 düğümlü olmalıdır. Eğer $5 \leq m \leq 7$ ise her diğer bileşen tam değildir ve P_m $-$ doymuştur. $2m-6$ dan fazla en az $\lfloor(3\mathrm{m}-3)/2\rfloor$ düğümlüdür. $m \geq 8$ ise diğer tüm bileşenler $2m-6 \geq \lfloor(3m-3)/2\rfloor$ düğümlüdür yani tam değildir. Ve P_m- doymuştur.

Sonuç 5.7.1 **:** $m \geq 5$ için iki yada daha fazla Hamilton yollarının birleşim grafı P_m – doymuştur ve aşağıdaki durumlardan birini sağlar ;

a) Tüm bileşenleri en az $\lfloor(3\mathrm{m}-3)/2\rfloor$ düğümlüdür.
b) Bir bileşeni P_1 diğer tüm bileşenleri en az $2m-4$ düğümlüdür.
c) Bir bileşeni P_2 diğer tüm bileşenleri en az $g(m)$ kadardır.
   Burada $g(m)$; $5 \leq m \leq 7$ için $\lfloor(3\mathrm{m}-3)/2\rfloor$ düğümlü $m \geq 8$ için $2m-6$ düğümlüdür.

İspat **:** m≥ 5 olmak üzere G, iki yada daha fazla düğümlü yolun Hamilton graf birleşimi olsun.

O halde G bağlı ve tam olmayan graf ise Teorem 5.6.1 den dolayı $P_m -$ doymuştur. Ve en az $\lfloor(3\mathrm{m}-3)/2\rfloor$ düğümlüdür. Tam olan bileşenleri için ise Teorem 5.7.1 den aşikardır.

Teorem 5.7.2 : $m \geq 5$ için iki yada daha fazla yolların birleşimi aşağıdaki koşullardan birini sağladığında minimal $P_m -$ doymuştur .

a) Her bir bileşeni en az $\lfloor(3\mathrm{m}-3)/2\rfloor$ düğümlü ve en fazla $f(m)$ kadardır. Burada $f(m)$; $5 \leq m \leq 7$ için $f(m) = 2m-4$ düğümlü $m \geq 8$ için $f(m) = 2m-6$ düğümlüdür.

b) Bir bileşeni P_1 diğer tüm bileşenleri en az $2m-4$ en fazla $4m-9$ düğümlüdür.

c) Bir bileşeni P_2 diğer tüm bileşenleri en az $g(m)$, en fazla $2g(m)-1$ kadardır. Burada $g(m)$; $5 \leq m \leq 7$ için $\lfloor(3\mathrm{m}-3)/2\rfloor$ düğümlü $m \geq 8$ için $2m-6$ düğümlüdür.

İspat : Verilen bir yoldan bir ayrıt silmek her zaman farklı yolların birleşimine ayrılır. Bu farklı yolların birleşimi Teorem 5.7.1 den herhangi birini sağlamazsa bu durumda minimal Pm – doymuş değildir.

6. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu tezde genel olarak doymuş yol grafları incelenmiş ve önemli sonuçlar elde edilmiştir. Üç düğümlü yollar bölümünde P_3 – doymuş ve minimal P_3 – doymuş graflar incelenmiş ve her bağlı grafın P_3 $-$ doymuş olduğu gösterilmiştir. Dört düğümlü doymuş graflar bölümünde P_4 – doymuş olmayan tek bağlı grafın P_3 $-$ yol olduğu ve bir bileşeni izole düğüm diğer bileşenleri yıldız olmayan grafların P_4 – doymuş olduğu belirtilmiştir. Oluşturulabilir ağaçlar bölümünde bir ağaç yapısının sonlu ve maksimal uzunluklu bir gövde yardımıyla yeniden inşa edilmesi incelenmiştir. Oluşturulabilir ağaçların $A\ (r: s, B)$ şeklinde gösterildiğinden bahsedilmiştir. Minimal P_4 $-$ doymuş graflar bölümünde bazı 8 düğümlü ağaçlar verilmiş ve bu ağaçları içeren grafların minimal P_4 –doymamış olduğu incelenmiştir. Minimal P_m – doymuş çevreler bölümünde $n \geq 4$ ve $m \geq 5$ için; $n \geq m$ ise C_n çevresinin P_m –doymuş olduğu , $\lfloor (3m-5)/2 \rfloor \geq n \geq m$ ise C_n çevresinin minimal P_m – doymuş olduğu gösterilmiştir. Minimal P_m – doymuş yollar bölümünde P_n yollarının hangilerinin P_m – doymuş hangilerinin minimal P_m – doymuş olduğu incelenmiştir. $m \geq 5, n \geq 3$ olmak üzere $n \geq \lfloor (3m-3)/2 \rfloor$ ise P_m – doymuş olduğu gösterilmiştir. $5 \leq m \leq 7$ için $f\,(m) = 2m-4$, $m \geq 8$ için $f(m) = 2m-5$ fonksiyonları için ; $\lfloor (3m-3)/2 \rfloor \leq n \leq f(m)$ ise P_n yolunun minimal P_m – doymuş olduğu incelenmiştir. Minimal yolların birleşimi bölümünde hangi yolların birleşiminin P_m $-$ doymuş hangilerinin minimal P_m $-$ doymuş olduğuna karar verilmiştir. Bağlantısız bir G grafının bağlı olmayan her bileşeni P_m $-$ doymuş olarak kabul edilirse herhangi iki bileşeni P_m $-$ doymuş olan G grafının P_m – doymuş olduğu gösterilmiştir.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Sonuç olarak graf teorinin en temel yapısı olan yolların doymuşluğu incelenmiş ve hangi şartlar altında doymuşluktan söz edileceği belirlenmiştir. Yine herhangi sonlu ağaçların nasıl oluşturulabileceği de yollar yardımıyla saptanmıştır. Yolların uç düğümlerine bir ayrıtın eklenmesiyle oluşan çevre grafları için doymuşluk kriterlerinin ne olduğu açıklanmıştır. $H -$ serbest ve $H -$doymuş graflar, Graf Teori nin incelenmesi gereken önemli bir konusudur.

Başka geometrik yapılar yardımıyla oluşturulabilecek graflar da $H -$doymuşluk ve serbestlik kavramı önemlidir. Bundan sonraki yapılacak çalışmalarda geometrik graflar ve lineer grafların doymuşluğu incelenecektir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Bondy, J.A. , Murty, U.S.R., 1985, Graph Theory With Applications, American Elsevier, New York.

Boswell S.G, Eggleton R.B, MacDougall J.A.,Minimally Path Saturated Graph, 1999, Congr. Numer. 138, pp.97-117

Chartrand G. , Lesniak L., Graphs and Digraphs, 1979, Boca Raton London New York Washington, D.C.

Doğanaksoy Ali, Graf Teorisi, 1993, Matematik Dünyası

Eggleton R.B., MacDougall J.A., 1996, Two families of primitive minimally triangle-saturated graphs, Congr. Numer. 119, 85-96.

Eggleton R.B. , MacDougall J.A. ,1997, Triangle free and triangle saturated graphs, J. Combin. Math. Combin. Comput. 25, 3-21.

Eggleton R.B. , MacDougal J.A. , 1997, Triangle-saturated graphs: the hanging planter construction, Congr. Numer 123, 79-96.

Eggleton R.B. , J.A. MacDougall, 1998, Almost K_m -saturated graphs, Congv: Numer. 131, 187-203.

West D.B., 1996, Introduction to Graph Theory, Prentice Hall.