T.C.

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

REKTİFİYE ALTMANİFOLDLARIN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ

Yüksek Lisans Tezi

Yunus İŞCAN
Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Geometri
Danışman: Prof. Dr. Alper Osman ÖĞRENMİŞ

Ağustos-2019

T.C.

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

REKTİFİYE ALTMANİFOLDLARIN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yunus İŞCAN

(161121123)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 06.08.2019

Tezin Savunulduğu Tarih : 28.08.2019

Tez Danışmanı :	Prof. Dr. Alper Osman ÖĞRENMİŞ (Fırat Üniversitesi)
Diğer Jüri Üyeleri :	Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ (Fırat Üniversitesi)
	Dr. Öğr. Üyesi Fatma Bulut KORKMAZ (Bitlis Eren Üniversitesi)

AĞUSTOS-2019

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın planlanmasında, araştırılmasında ve oluşumunda kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve sabırla yardımcı olan çok değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Alper Osman ÖĞRENMİŞ'e sonsuz teşekkür eder, saygılarımı sunarım**.**

Ayrıca her zaman olduğu gibi, bu çalışmam süresince de daima yanımda olup beni destekleyen değerli eşim Meryem İŞCAN'a ve bütün aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Yunus İŞCAN

ELAZIĞ-2019

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ .... **II**

İÇİNDEKİLER .... **III**

ÖZET .... **IV**

SUMMARY .... **V**

SEMBOLLER LİSTESİ .... **VI**

1. GİRİŞ **1**

2. TEMEL KAVRAMLAR **3**

2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar 3

3. REKTİFİYE ALTMANİFOLDLAR **11**

3.1. Rektifiye Altmanifoldların Temel Özellikleri 11

4. REKTİFİYE ALTMANİFOLDLARIN SINIFLANDIRILMASI **14**

4.1. Rektifiye Altmanifoldların Bir Karakterizasyonu ve Özel Bir Sınıflandırması.. 14

5. REKTİFİYE ALTMANİFOLDLARIN ÖZELLİKLERİ **20**

5.1. Rektifiye Altmanifoldların Temel Özellikleri 20

6. SONUÇ **22**

KAYNAKLAR **23**

ÖZGEÇMİŞ **25**

ÖZET

3-boyutlu Öklid uzayı E^3'te bulunan bir uzay eğrisinin, konum vektörü daima rektifiye düzlemde bulunuyorsa, bu uzay eğrisi rektifiye eğri olarak adlandırılır. Rektifiye eğri kavramı [1]' de detaylıca verilmiştir. Bu çalışmada ilk olarak Öklid uzayında rektifiye altmanifoldlar incelendi. Ardından Öklidyen altmanifoldun rektifiye olması için gerek ve yeter şartın, konum vektör alanının teğet bileşeninin bir eş zamanlı vektör alanı olması durumu verildi. Son olarak ise keyfi eş boyutlu rektifiye altmanifold kavramı detaylıca incelendi.

Anahtar Kelimeler: Rektifiye Eğri, Rektifiye Altmanifold

SUMMARY

Differential Geometry of Rectifying Submanifolds

A space curve in a Euclidean 3-space E^3 is called a rectifying curve if its position vector field always lies in its rectifying plane. This notion of rectifying curves was introduced by the author in [1]. In this present article, we introduce and study the notion of rectifying submanifolds in Euclidean spaces. In particular, we prove that a Euclidean submanifold is rectifying if and only if the tangential component of its position vector field is a eş zamanlı vector field. Moreover, rectifying submanifolds with arbitrary codimension are completely determined.

Key Words: Rectifying Curve, Rectifying Submanifold

SEMBOLLER LİSTESİ

B	: Eğrinin binormal vektör alanı
D	: Afin konneksiyon
E^3	: 3-boyutlu Öklid uzayı
E^n	: n-boyutlu Öklid uzayı
H	: Ortalama eğrilik
K	: Gauss eğriliği
M	: Manifold
N	: Eğrinin asli normal vektör alanı
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar
S	: Şekil operatörü
T	: Eğrinin birim teğet vektör alanı
T_pM	: p noktasındaki tanjant uzayı
V	: Vektör uzayı
$\times$	: Vektörel çarpım
$<,>$	: İç çarpım
$\Vert,\Vert$	: Norm
κ	: Eğrilik
τ	: Burulma
$\otimes$	: Tensör çarpımı
∇	: Lineer konneksiyon
Δ	: Laplacian operatörü
h	:Altmanifoldun ikinci temel formu

1. GİRİŞ

E^3, 3-boyutlu Öklid uzayı göz önüne alınsın.

$I = (\alpha, \beta)$ bir reel aralık olmak üzere, $x: I \rightarrow E^3$ birim hızlı bir uzay eğrisi olsun. Bu x eğrisinin konum vektör alanı $\mathbf{x}$ olsun ve $\mathbf{x}'$ ifadesi de $\boldsymbol{t}$ ile gösterilsin. Bazı s'ler için $\boldsymbol{t}'(\mathrm{s}) = 0$ olarak alabiliriz ancak bu çalışmada kabul edelim ki $\boldsymbol{t}'(\mathrm{s}) \neq 0$ olsun. O halde pozitif bir κ fonksiyonu için $\boldsymbol{t}' = \kappa\mathbf{n}$ yazabiliriz. Burada eğrilik vektör alanını $\boldsymbol{t}'$, asli normal vektör alanını $\mathbf{n}$ ve eğriliği de κ ile gösterelim. $\boldsymbol{t}$ sabit uzunlukta olduğundan $\boldsymbol{t}$ ile $\mathbf{n}$ ortogonaldir. Ayrıca $\boldsymbol{t}$ ve $\mathbf{n}$'ye ortogonal olan binormal vektör alanı $\mathbf{b}= \boldsymbol{t} \times \mathbf{n}$ şeklinde tanımlanır. $\mathbf{b}'=-\tau\mathbf{n}$ denklemindeki τ ise eğrinin burulması olarak adlandırılır. E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında alınan x eğrisi için Frenet-Serret formülleri

$$\begin{cases} \boldsymbol{t}' = \kappa\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' = -\kappa\boldsymbol{t} + \tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' = -\tau\,\mathbf{n}\,. \end{cases} \tag{1.1}$$

olarak verilir.

Yukarıda verilen eğrinin her bir noktasında , { $\boldsymbol{t}$, $\mathbf{n}$ } , { $\boldsymbol{t}$, $\mathbf{b}$ } ve { $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ } tarafından gerilen düzlemler, sırasıyla, oskülatör düzlem, rektifiye düzlem ve normal düzlem olarak adlandırılır.

E^3'teki bir eğrinin konum vektörü oskülatör düzlemde iken düzlemsel eğri, konum vektörü normal düzlemde iken de küresel eğri olarak adlandırıldığı temel diferensiyel geometriden açıktır. Bu temel gerçekler ışığında aşağıdaki soru sorulabilir [1].

Bir $x: I \rightarrow E^3$ uzay eğrisin konum vektörü ne zaman rektifiye düzlemde bulunur?

Böyle bir eğri [1]'de rektifiye eğri olarak adlandırıldı ve rektifiye eğrilerin bir çok temel özelliği verildi. Özellikle [1]'de rektifiye eğriler tamamen sınıflandırılmıştır. Sabit ve kıvrımlı eğri kavramlarının rektifiye eğriler ile ilgili olduğu bilinmektedir [2-6]. Ayrıca [7]' de rektifiye eğrilerin genel eşitsizliği sağlayan en uç eğriler olduğu gösterilmiştir. Rektifiye eğriler bir çok makalede detaylıca incelenmiştir, [1, 8-15]. Rektifiye eğriler ile ilgili son çalışmalardan biri [10]'dur.

Bu makalede, rektifiye eğriler kavramı altmanifoldların rektifiye olması kavramıyla uygun bir şekilde ilişkilendirildi. Rektifiye altmanifoldların birçok temel özelliği verildi.

Öklidyen altmanifoldun rektifiye olması için gerek ve yeter şartın, konum vektör alanının teğet bileşeninin bir eş zamanlı vektör alanı olması durumu incelendi. Ayrıca keyfi eş boyutlu rektifiye altmanifoldlar da detaylıca çalışıldı.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. Boş olmayan bir cümle A ve bir F cismi üzerinde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki üç önermeye uyan bir $f: A \times A \to V$ fonksiyonu varsa A'ya V ile birleşen bir afin uzay denir.

1. $\forall P, Q \epsilon A$ nokta çifti için $f(P,Q) = \alpha$ olacak şekilde bir tek $\alpha \epsilon V$ vektörü vardır.
2. A'da belli bir nokta seçildiğinde A'da geri kalan her noktaya V'de bir vektör karşılık gelir.
3. $\forall P, Q, R \epsilon A$ için $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$'dir [16].

Tanım 2.1.2. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V'de tanımlanan

$$<,>: V \times V \to R$$

$$(x,y) \to < x,y >= \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i,\ x = (x_i, \dots, x_n), y = (y_i, \dots, y_n)$$

işlemine Öklid iç çarpımı denir [16].

Tanım 2.1.3. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V'de bir iç çarpım işlemi olarak

$$< , > : V \times V \to IR$$

$$(x,y) \to < x,y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \begin{cases} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A'da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece A afin uzayı Öklid uzayı adını alır. Bu uzay E^n ile gösterilir [16].

Tanım 2.1.4. $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$,R^n uzayında bir vektör ise, $\boldsymbol{v}$'nin uzunluğu(normu)

$$\| \mathbf{v} \| = \sqrt{< v, v >} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

şeklinde gösterilir [17].

Tanım 2.1.5. $I \subseteq R$ açık alt cümle olmak üzere diferensiyellenebilir bir

$$\alpha: I \to R$$

$$t \to \alpha(t)$$

fonksiyonu verilmiş olsun. (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanan $\alpha(I) \subset E^n$ ifadesine E^n'de bir eğri denir [17].

Tanım 2.1.6. $\gamma: (\alpha, \beta) \to R^n$ bir parametrik eğri olsun. $\| \dot{\gamma}(t) \|$ sayısına γ'nın $\gamma(t)$ noktasındaki hızı denir. Eğer her $t \in (\alpha, \beta)$ için $\dot{\gamma}(t)$ birim vektör yani $\| \dot{\gamma}(t) \| = 1$ ise γ eğrisine birim hızlı eğri denir [17].

Tanım 2.1.7. E^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \to E^3$ eğrisi için $T(s) = \alpha'(s)$ eşitliği ile verilen $T(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektör alanı denir [17].

Tanım 2.1.8. E^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \to E^3$ eğrisi için

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

eşitliği ile ifade edilen $N(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki asli normal vektör alanı denir [17].

Tanım 2.1.9. E^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \to E^3$ eğrisi için

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

şeklinde ifade edilen $B(s)$ vektörüne binormal vektör alanı denir [17].

Tanım 2.1.10. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda,

$\psi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}, k > r$, için; $\alpha^{(k)} \in S_p\{\psi\}$olmak üzere, ψ'den elde edilen $\{V_1, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrsinin Serret-Frenet r-ayaklı alanı ve $m \in M$ için $\{V_1(m), \dots, V_r(m)\}$'ye ise $m \in M$ noktasındaki Serret-Frenet r-ayaklısı denir. Her bir $V_i, 1 \leq i \leq r$,ye Serret-Frenet vektörü adı verilir [17].

Tanım 2.1.11. Bir α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasında $\{T(s), N(s), B(s)\}$ Frenet 3-ayaklısını göz önüne alalım:

$Sp\{T(s), N(s)\}$ vektör uzayı ile birleşen, $\alpha(s)$ noktasındaki afin alt uzaya oskülatör düzlem denir.

$Sp\{N(s), B(s)\}$ vektör uzayı ile birleşen $\alpha(s)$ noktasındaki afin alt uzaya normal düzlem denir.

$Sp\{T(s), B(s)\}$ vektör uzayı ile birleşen, $\alpha(s)$ noktasındaki afin alt uzaya rektifiyan düzlem denir [17].

Tanım 2.1.12. $\alpha: I \to E^3$, eğriliği $\kappa > 0$ olan birim hızlı bir eğri olsun. α'nın Frenet-Serret elemanlarını $\{\kappa, \tau, T, N, B\}$ olarak göz önüne alalım. Eğer $s \epsilon I$ için

$$< \alpha(s), N(s) >= 0$$

şartı sağlanıyorsa α'ya rektifiye eğri adı verilir [17].

Tanım 2.1.13. M bir Hausdorff uzay olsun. Eğer her $p \in M$ için R^m'deki bir açık kümeye homeomorfik olacak şekilde p noktasının bir açık komşuluğu U varsa M Hausdorff uzayına bir topolojik manifold veya kısaca manifold denir [18].

Tanım 2.1.14. M bir k-manifold ve $\overline{M}$ de bir n-manifold olsun. $\forall P \in M$ noktası için $\overline{M}$' de bir $\overline{U}$ ve M'de bir U koordinat komşuluğu mevcut ve

$$U = \{m \in \overline{U} | \ \bar{x}_{k+1}(m) = \dots = \bar{x}_n(m) = 0\}$$

şeklinde yazılabiliyor ise M'ye $\overline{M}$'nin bir alt manifoldu denir [18].

Tanım 2.1.15. M bir n-topolojik manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M'ye C^k sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir [18].

Tanım 2.1.16. M bir diferensiyellenebilir manifold ve manifold üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ olsun. Bu durumda

$$g: \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M)$$

ile tanımlı g bilineer formu simetrik ve pozitif tanımlı ise, yani $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

(a) $g(X,Y) = g(Y,X)$,

(b) $g(X,X) \geq 0$ ve $\forall X$ için $g(X,X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$

şartları sağlanıyorsa g bilineer formuna Riemann metriği veya metrik tensör adı verilir. Bu durumda (M,g) ikilisine de Riemann manifoldu denir [18].

Tanım 2.1.17. M bir differensiyellenebilir manifold olsun. M üzerinde bir vektör alanı diye

$$\chi: M \to \cup_{P \in M} T_M(P)$$

olarak tanımlanan birebir ve örten χ fonksiyonuna denir [19].

Tanım 2.1.18. M bir n-boyutlu C^∞ manifold olsun. M üzerinde bir konneksiyon, infinitezimal(diferensiyel) konneksiyon veya kovaryant diferensiyel adlarıyla anılan öyle bir

$$D: \chi(A) \times \chi(A) \to \chi(A), A \subseteq M$$

operatörüdür ki, M'nin bir A bölgesi üzerindeki her bir $C^\infty, X, Y \in \chi(A)$ vektör alanı çiftine, yine A üzerinde $D_X Y$ ile gösterilen üçüncü bir C^∞ vektör alanı karşılık getirir [17].

Tanım 2.1.19. M bir differensiyellenebilir manifold ve bir $P \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerin uzayı $T_M(P)$ olsun. $T_M(P)$ vektör uzayına M'nin P noktasındaki tanjant uzayı denir [17].

Tanım 2.1.20. M ve $\overline{M}$ birer C^∞ manifold ve $f: M \to \overline{M}$ bir C^∞ fonksiyon olsun. Eğer f'nin f_* jakobien matrisi $\forall p \in M$ noktasında regüler ise f'ye M'den $\overline{M}$ içine bir immersiyon(daldırma) denir [18].

Tanım 2.1.21. $S \subset R^3$ olsun. Eğer her $p \in S$ için p'yi içeren bir $W \subset R^3$ açık alt kümesi ve bir $U \subset R^2$ açık alt kümesi $S \cap W$ ile U homeomorfik olacak şekilde bulunabiliyor ise, S'ye R^3 uzayında bir yüzeydir denir [19].

Tanım 2.1.22. E^n, n-boyutlu Öklid uzayında (n-1)-boyutlu bir yüzey veya (n-1)-yüzey diye E^n'deki boş olmayan bir M cümlesine denir, öyle ki bu M cümlesi

$M = \{x \in U \subset E^n | \, f: U \to R$

$x \to f(x) = c$

U bir açık alt cümle$\}$

$\nabla f]_P = 0$, $\forall P \in M$ biçiminde tanımlanır. E^2'de bir 1-yüzeye düzlemsel eğri denir. E^3'te bir 2-yüzeye ekseriya sadece yüzey denir. E^n'de bir (n-1)-yüzey , $n > 3$ olması halinde bir hiperyüzey olarak adlandırılır [19].

Tanım 2.1.23. E^n'in bir hiper yüzeyi M ve M'nin birim normal vektör alanı N verilsin. E^n'de Riemann konneksiyonu D olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için $S(X) = D_X N$ şeklinde tanımlı S dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü denir [17].

Tanım 2.1.24. E^n'de bir hiper yüzey M olsun. M'nin bir P noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere

$H: M \to R$

$P \to H(P) = \dot{\mathrm{I}}z(S(P))$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M'nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H(P)$ değerine de M'nin P noktasındaki ortalama eğriliği denir [17].

Tanım 2.1.25. M bir n-boyutlu (n≥ 4) Riemann (yarı Riemann) manifoldu ve g de M'nin metriği olsun.

$$\mathrm{R}: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\infty}(M, IR)$$

$$(X, Y, Z, W) \to R(X, Y, Z, W) = < X, R(Z, W)Y >, \forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$$

$$= g(X, R(Z, W)Y)$$

olarak tanımlanan 4. mertebeden kovaryant tensöre, $(R \in T_4^0(\chi(M)))$, M üzerinde Riemann-Christoffel eğrilik tensörü denir [18].

Tanım 2.1.26. M, n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve M üstündeki düzgün vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun.

$$D: \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$(X, Y) \to D_X Y$$

operatörü, $\forall f \in \Im(M)$ ve $X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$D1)\ D_X(Y + Z) = D_X Y + D_X Z,$

$D2)\ D_{(X+Y)} Z = D_X Z + D_Y Z,$

$D3)\ D_{fX} Y = f D_X Y,$

$D4)\ D_X(fY) = f D_X Y + X[f]Y,$

önermelerini sağlıyor ise D'ye M üzerinde bir lineer konneksiyon (afin konneksiyon) denir ve D_X ise X vektör alanı yönünde kovaryant türev olarak adlandırılır. Ayrıca

$D5)\ D_X Y - D_Y X = [X, Y]$ (sıfır torsiyon özeliği),

$D6)$ $X[< Y, Z >] =< D_X Y, Z > + < Y, D_X Z >$ (konneksiyonun metrikle bağdaşması özelliği)

önermeleri de sağlanıyor ise D, M'nin Riemann konneksiyonu ya da Levi-Civita konneksiyonu olarak adlandırılır ve D yerine genellikle ∇ sembolü kullanılır [20].

Tanım 2.1.27. Bir M Riemann manifoldu üzerindeki non-trivial vektör alanı Z olsun. M'ye teğet olan herhangi bir X vektörü için

$$\nabla_{\mathrm{X}} \mathrm{Z} = \mathrm{X}$$

eşitliğini sağlayan Z vektör alanına eş zamanlı vektör alanı denir, burada ∇ ifadesi M'nin Levi-Civita konneksiyonunu göstermektedir [18].

Tanım 2.1.28. M, $\bar{M}$'nin bir yarı Riemann altmanifoldu olsun. $\bar{\nabla}$ ve ∇ sırasıyla $\bar{M}$ ve M üzerindeki Levi Civita konneksiyonları olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)$$

eşitliğine M'nin Gauss denklemi denir [19].

Tanım 2.1.29. E^n'de M bir $(n-1)$ altmanifold ve bir P noktasında M'nin tanjant uzayı $T_M(P)$ olsun. M üzerinde Weingarten dönüşümü $S: T_M(P) \to T_M(P)$ idi. S ile tanımlanan II. Temel form M üzerinde ikinci dereceden bir kovaryant tensör olarak $\forall X_P, Y_P \in (P)$ için

$$\mathrm{II}(X_P, Y_P) =< S(X_P, Y_P) >$$

şeklinde tanımlanır [19].

Tanım 2.1.30. Sabit bir noktadan(kürenin merkezi), sabit bir uzakılıkta(kürenin yarıçapı) bulunan R^3 uzayının noktalarının kümesi küre olarak adlandırılır. Merkezi orijin ve yarıçapı 1 birim olan küreye birim küre denir ve denklemi

$$S^2 = \{(x, y, z) \in R^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

şeklinde verilir [19].

Tanım 2.1.31. E^n, n-boyutlu Öklid uzayında

$$S_r^{n-1} = \{x = (x_1, \dots, x_n) | f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = r^2, \left|\vec{\nabla} f\right| \neq 0, r \in IR, r \text{ sabit}\}$$

nokta cümlesine bir (n-1)-boyutlu hiperküre veya kısaca(n-1)-küre denir [19].

3. REKTİFİYE ALTMANİFOLDLAR

3.1. Rektifiye Altmanifoldların Temel Özellikleri

Bu bölümde [21]'de ele alınan bazı kavramları açıklayacağız.

E^m, m-boyutlu Öklid uzayında $x: I \to E^m$ izometrik immesiyonu ile tanımlanan M Riemann manifoldunu göz önüne alalım. Her $p \in M$ noktası için , T_pM ile tanjant uzayı ve $T_p^{\perp}M$ ile de normal uzay gösterilsin. Burada doğal bir ortogonal eşitlik vardır: yani,

$$T_pE^m = T_pM \oplus T_p^{\perp}M \tag{3.1.1}$$

yazılır. ∇ ve $\widetilde{\nabla}$ sırasıyla M ve E^m'de Levi-Civita konneksiyonunu göstersin.

X vektör alanı için Gauss ve Weingarten formülleri, sırasıyla,

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y), \tag{3.1.2}$$

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + D_X \xi \tag{3.1.3}$$

şeklinde olup, burada M'nin teğeti Y ve normali ξ'dir, ayrıca h ikinci temel form, D normal konneksiyon ve A da M'nin şekil operatörüdür.

E^m'de M'nin birinci normal uzayı, verilen bir $p \in M$ noktasında

$$\mathrm{Im}h_p = \mathrm{Span}\{h(X, Y): X, Y \in T_pM\} \tag{3.1.4}$$

alt uzayı tarafından tanımlanan ifadedir. p'deki her bir ξ normal vektörü için A_ξ şekil operatörü T_pM'nin self-adjoint endomorfizmasıdır. İkinci temel form h ve şekil operatörü A ile ilgili verilen

$$< A_\xi X, Y > = < h(X, Y), \xi > \tag{3.1.5}$$

denkleminde $<,>$ ifadesi Öklid uzayında M üzerindeki iç çarpımı temsil eder.

E^m'de M'nin Gauss denklemi

$$R(X, Y; Z, W) = < \sigma(X, W), \sigma(Y, Z) > - < \sigma(X, Z), \sigma(Y, W) > \tag{3.1.6}$$

tarafından verilir. Burada X, Y, Z, W M'nin teğetlerini ve R de M'nin eğrilik tensörlerini gösterir. h'nin kovaryant türevi $\overline{\nabla}h$, $TM \oplus T^{\perp}M$ ifadesine bağlı olarak

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = D_X\big(h(Y,Z)\big) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \tag{3.1.7}$$

şeklinde elde edilir. Codazzi eşitliği ise

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = (\overline{\nabla}_Y h)(X,Z) \tag{3.1.8}$$

şeklindedir. Bazı λ ve μ fonksiyonları için $x\colon I \to E^3$ rektifiye eğrisinin tanımından dolayı x'in **x** konum vektör alanı

$$\mathbf{x}(s) = \lambda(s)\boldsymbol{t}(s) + \mu(s)\boldsymbol{b}(s) \tag{3.1.9}$$

şeklinde yazılır. $\kappa(s_0) \neq 0$, $s_0 \in I$ için $x\colon I \to E^3$ eğrisinin s_0'daki birinci normal uzayı $\mathbf{n}(s_0)$ asli normal vektörü tarafından karşılanır. Dolayısıyla s_0'daki birinci normal uzaya dik olan düzlemden başka bir şey değildir. Bu nedenle E^m'deki M manifoldunun bir $p \in M$ noktası için T_pE^m'nin alt uzayını, $Im\sigma_p$ birinci normal uzayına ortogonal olan M'nin p'deki rektifiye uzayına koyarız.

E^m'de orijinden geçen çizgi ailesi tarafından oluşturulan altmanifold, tepe noktası orijinde olan bir koni belirtir. E^m'de bir altmanifoldun tepe noktası ile koninin açık bir kısmı orijinde ise bu altmanifold, konik altmanifold olarak adlandırılır. M bir Öklid altmanifold olsun. M'nin her noktasında **x** konum vektör alanının doğal ortogonal ayrışması vardır; yani

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^T + \mathbf{x}^N \tag{3.1.10}$$

yazabiliriz. Burada $\mathbf{x}^T$ ve $\mathbf{x}^N$ sırasıyla **x**'in teğet ve normal bileşenlerini, $|\mathbf{x}^T|$ ve $|\mathbf{x}^N|$ ise sırasıyla $\mathbf{x}^T$ ve $\mathbf{x}^N$' nin uzunluğunu gösterir.

Lemma 3.1.1. $x\colon M \to E^m$ bir Riemann n-manifoldunun m-boyutlu Öklid uzayı E^m'e izometrik immersiyonu olsun. $\mathbf{x} = \mathbf{x}^T$ olması için gerek ve yeter şart M'nin, tepe noktası orijinde olan konik bir altmanifold olmasıdır.

İspat. $x\colon M \to E^m$ m-boyutlu Öklid uzayında Riemann n-manifolduna bir izometrik immersiyon olsun. . $\mathbf{x} = \mathbf{x}^T$ alalım. $e_1 = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$, M' ye teğet olan birim vektör alanıdır.

$\mathbf{x} = \rho e_1$ yazarsak $\widetilde{\nabla}_{e_1} e_1$, e_1'e dik olur ve buradan $\widetilde{\nabla}_{e_1} e_1 = 0$ için

$$\widetilde{\nabla}_{e_1}\mathbf{x} = e_1\,, \quad \widetilde{\nabla}_{e_1}\mathbf{x} = (e_1\rho)e_1 + \rho\widetilde{\nabla}_{e_1} e_1 \tag{3.1.11}$$

bulunur. Bu nedenle e_1'in integral eğrileri E^m'deki üreteç doğrularının bazı açık kısımlarıdır. Dahası $\mathbf{x} = \mathbf{x}^T$ olduğundan e_1'in integral eğrileri tarafından belirtilen üreteç doğruları orijinden geçer. Sonuç olarak M, tepe noktası orijinde olan konik bir altmanifolddur. Tersi de aşikardır.

Lemma 3.1.2. $x: M \rightarrow E^m$ bir Riemann n-manifoldundan $m-$boyutlu Öklid uzayı E^m'e bir izometrik immersiyon olsun. $\mathbf{x} = \mathbf{x}^N$ olması için gerek ve yeter şart M'nin orijin merkezli bir hiperkürede bulunmasıdır.

İspat. $x: M \rightarrow E^m$ $m-$boyutlu Öklid uzayında Riemann n-manifolduna bir izometrik immersiyon olsun. $\mathbf{x} = \mathbf{x}^N$ alırsak her $Z \in TM$ için

$$Z < \mathbf{x}, \mathbf{x} >= 2 < \widetilde{\nabla}_Z \mathbf{x}, \mathbf{x} >= 2 < Z, \mathbf{x}^N >= 0$$

elde ederiz. Böylece M, orijin merkezli bir hiper kürenin içinde yer alır. Tersi de aşikardır. Lemma 3.1.1. ve Lemma 3.1.2.'ye göre aşağıdaki ifadeleri verebiliriz.

Tanım 3.1.1. M'nin her noktasında **x** konum vektör alanı $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^T$ ve $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^N$ ifadelerini sağlıyorsa M, E^m'de bir rektifiye altmanifolddur denir.

Lemma 3.1.3. dim M = n için M, E^m'de bir rektifiye altmanifold olsun. Her bir $p \in M$ için

$$m > n + \dim(\mathrm{Im} h_p) \tag{3.1.12}$$

dir.

İspat. M , E^m'de bir rektifiye altmanifold olsun. Eğer $m = n + \dim(\mathrm{Im} h_p)$ ise $\mathbf{x} = \mathbf{x}^T$ olur ve bu bir çelişkidir.

4. REKTİFİYE ALTMANİFOLDLARIN SINIFLANDIRILMASI

4.1. Rektifiye Altmanifoldların Bir Karakterizasyonu ve Özel Bir Sınıflandırması

Bu bölümde rektifiye altmanifoldlar ele alınarak bunlarla ilgili bazı karakterizasyon ve sınıflandırılmalar verilmiştir [21].

İlk olarak rektifiye altmanifoldlar için aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.1.1. E^m'de bir M altmanifoldunun $\mathbf{x}$ konum vektör alanı $\mathbf{x}^N \neq 0$ ifadesini sağlıyorsa, M'nin uygun bir rektifiye altmanifold olması için gerek ve yeter şart, $\mathbf{x}^T$'nin M üzerinde eş zamanlı vektör alanı olmasıdır.

İspat. $x: M \to E^m$ bir Riemann n-manifoldunun m boyutlu Öklid uzayı E^m'e bir izometrik immersiyonu olsun. E^m'de M'nin $\mathbf{x}$ konum vektör alanı için

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^T + \mathbf{x}^N \tag{4.1.1}$$

ortogonal ayrışmasını düşünelim. (4.1.1) denklemi ile birlikte

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)$$

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + D_X \xi$$

şeklindeki Gauss ve Weingarten formülleri kullanılarak her $Z \epsilon TM$ için

$$Z = \widetilde{\nabla}_Z \mathbf{x} = \nabla_Z \mathbf{x}^T + h(Z, \mathbf{x}^T) - A_{\mathbf{x}^N} Z + D_Z \mathbf{x}^N \tag{4.1.2}$$

elde ederiz. (4.1.2)'deki teğet bileşenlerini karşılaştırdıktan sonra

$$A_{\mathbf{x}^N} Z = \nabla_Z \mathbf{x}^T - Z \tag{4.1.3}$$

elde ederiz.

M'nin uygun bir rektifiye altmanifold olduğunu varsayalım. $\mathbf{x}^T \neq 0$ ve $\mathbf{x}^N \neq 0$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca Tanım 2.1.2.'den $X, Y \epsilon\ TM$ için

$$< \mathbf{x}, h(X, Y) >= 0 \tag{4.1.4}$$

dır. Böylece $A_{\mathbf{x}^N} = 0$ elde ederiz. Dolayısıyla (4.1.3)'ten

$$\nabla_Z \mathbf{x}^T = Z \tag{4.1.5}$$

elde ederiz ve bu da $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$'nin M üzerinde eş zamanlı vektör alanı olduğunu gösterir. Tersine, eğer $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$, M üzerinde bir eş zamanlı vektör alanı ise o zaman Tanım 2.1.26. ve (4.1.3)'ten $\mathrm{A}_{\mathbf{x}^{\mathrm{N}}} = 0$ bulunur. Dolayısıyla (4.1.4) ifadesini elde ederiz. Sonuç olarak varsayımla M'nin, $\mathbf{x}^{\mathrm{N}} \neq 0$'a bağlı olarak uygun bir rektifiye altmanifold olduğu görülür. Ardından rektifiye altmanifoldlar için aşağıdaki sınıflandırmayı verebiliriz.

Teorem 4.1.2. M, E^m'de uygun bir rektifiye altmanifold olsun. M üzerinde bazı uygun $\{s, u_2, \dots, u_n\}$ koordinat sistemlerine göre M'nin x immersiyonu

$$\mathrm{x}(s, u_2, \dots, u_n) = \sqrt{s^2 + c^2}\, Y(s, u_2, \dots, u_n), < Y, Y >= 1, c > 0 \tag{4.1.6}$$

şeklindedir, öyle ki Y tarafından tanımlanan küresel altmanifoldun metrik tensörü g_Y'yi sağlayacak şekilde

$$g_Y = \frac{c^2}{(s^2+c^2)^2} ds^2 + \frac{s^2}{s^2+c^2} \sum_{i,j=2}^{n} g_{ij}(u_2, \dots, u_n) d_{u_i} d_{u_j} \tag{4.1.7}$$

olarak yazılır. Tersine (4.1.6) ve (4.1.7) ile verilen immersiyon uygun bir rektifiye altmanifold tanımlar.

İspat. m-boyutlu Öklid uzayı E^m'de bir Riemann altmanifoldu olan M için, $x: M \rightarrow E^m$ bir izometrik immersiyon olsun. M'nin uygun bir rektifiye altmanifold olduğunu varsayalım. Sonra (4.1.2)'yi ele alalım.(4.1.2)'nin normal bileşenlerini karşılaştırdıktan sonra, $Z \epsilon TM$ için

$$\mathrm{D_Z}\mathbf{x}^{\mathrm{N}} = -\mathrm{h}(\mathrm{Z}, \mathbf{x}^{\mathrm{T}}) \tag{4.1.8}$$

elde ederiz. (4.1.4) ve (4.1.8)'den $< \mathbf{x}, \mathrm{D_Z}\mathbf{x}^{\mathrm{N}} >= 0$'dır. Dolayısıyla

$$\mathrm{Z} < \mathbf{x}^{\mathrm{N}}, \mathbf{x}^{\mathrm{N}} > = 0$$

ifadesi $\mathbf{x}^{\mathrm{N}}$'nin c gibi bir pozitif uzunluğa sahip olduğunu gösterir. (4.1.4)'den

$$< \mathrm{A}_{\mathbf{x}^{\mathrm{N}}}\mathrm{X}, \mathrm{Y} >=< \mathbf{x}^{\mathrm{N}}, \mathrm{h}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) >=< \mathbf{x}, \mathrm{h}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) >= 0 \tag{4.1.9}$$

elde edilir. $\mathrm{A}_{\mathbf{x}^{\mathrm{N}}} = 0$ olduğunu biliyoruz. $\rho =| \mathbf{x}^T |$ ve $e_1 = \mathbf{x}^T / \rho$ alalım. e_1'i $e_1, \dots, e_n$ yerel ortonormal çatısı olarak alabiliriz.

$$\nabla_{\mathrm{X}} \mathrm{e_i} = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \omega_{\mathrm{i}}^{\mathrm{j}}(\mathrm{X}) \mathrm{e_j}, \ \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{n} \tag{4.1.10}$$

yazarız. $j,k=2,\ldots,n$ için

$$0=e_k<\mathbf{x},e_j>=\delta_{jk}+<\mathbf{x},\nabla_{e_k}e_j>+<\mathbf{x},h(e_j,e_k)> \tag{4.1.11}$$

elde ederiz. $h(e_j,e_k)=h(e_k,e_j)$ olduğundan (4.1.11) denklemi

$$\omega_j^1(e_k)=\omega_k^1(e_j),\ j,k=2,\ldots,n$$

eşitliğini verir.

Frobenius teoreminden dolayı $\mathcal{D}$ dağılımı $e_2,\ldots,e_n$ tarafından kapsanan integrallenebilir bir dağılımdır. Ayrıca $\mathcal{D}^\perp$ =Span$\{e_1\}$ dağılımı da bir rankı olduğu için integrallenebilirdir. Bu nedenle M üzerinde $\{s,u_2,\ldots,u_n\}$ yerel koordinat sistemleri vardır öyle ki, $e_1=\partial/\partial s$ ve $\partial/\partial u_2,\ldots,\partial/\partial u_n$ ifadeleri $\mathcal{D}$ dağılımını kapsar. $\varphi=|\mathbf{x}^T|$ olmak üzere

$$\mathbf{x}^T=\varphi e_1 \tag{4.1.12}$$

yazalım. $j=1,\ldots,n$ için $\varphi=<\mathbf{x},e_1>$' in e_j' ye göre türevini alarak

$$e_j\varphi=\delta_{1j}+<\mathbf{x},h(e_1,e_j)> \tag{4.1.13}$$

buluruz. (4.1.4) ve (4.1.13) birlikte

$$e_j\varphi=\delta_{1j},\ j=1,\ldots,n \tag{4.1.14}$$

eşitliğini verir. Dolayısıyla $\varphi=\varphi(s)$ ve $\varphi'(s)=1$ elde ederiz ve bu da bazı b sabitleri için $\varphi(s)=s+b$ olması anlamına gelir. Böylece s üzerinde uygun bir dönüşüm uygulanırsa $\varphi=s$ bulunur. Sonuç olarak, konum vektör alanı

$$\mathbf{x}=se_1+\mathbf{x}^N \tag{4.1.15}$$

eşitliğini sağlar. (4.1.15) ve $|\mathbf{x}^N|=c$ ifadelerini birleştirirsek

$$<\mathbf{x},\mathbf{x}>=s^2+c^2 \tag{4.1.16}$$

buluruz, burada c sabit bir sayıdır. Dolayısıyla

$$x(s,u_2,\ldots,u_n)=\sqrt{s^2+c^2}\,Y(s,u_2,\ldots,u_n) \tag{4.1.17}$$

yazarsak , bazı E^m-değerli $Y=Y(s,u_2,\ldots,u_n)$ fonksiyonları

$<Y,Y>=1$ eşitliğini sağlar. (4.1.17) ve $e_1=\partial/\partial_s$'in $\mathcal{D}$ dağılımına ortogonal olması halini kullanırsak

$$<\mathrm{Y_s}, \mathrm{Y_s}> = \frac{c^2}{(s^2+c^2)^2}, <Y_s, Y_{u_j}> = 0, j = 2, \dots, n \tag{4.1.18}$$

elde ederiz. Bu nedenle Y tarafından tanımlanan küresel altmanifoldun metrik tensörü

$$g_Y = \frac{c^2}{(s^2+c^2)^2} ds^2 + \sum_{i,j=2}^{n} g_{ij}(\mathrm{s}, \mathrm{u_2}, \dots, \mathrm{u_n}) \mathrm{du_i du_j} \tag{4.1.19}$$

şeklinde ifade edilir. Diğer taraftan Teorem 4.1.1.'den $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \mathrm{se_1}$'in bir eş zamanlı vektör alanı olduğu anlaşılmaktadır. Böylece (4.1.5)'ten

$$\mathrm{e_1} = \nabla_{\mathrm{e_1}} \mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \nabla_{\mathrm{e_1}} \mathrm{se_1} = \mathrm{e_1} + \mathrm{s} \nabla_{\mathrm{e_1}} \mathrm{e_1} \tag{4.1.20}$$

buluruz. Dolayısıyla $\nabla_{\mathrm{e_1}} \mathrm{e_1} = 0$ elde ederiz ve bu da $\mathrm{e_1}$'in integral eğrilerinin M'de geodezik olduğunu gösterir. Bu nedenle $\mathrm{e_1}$ tarafından kapsanan $\mathcal{D}^{\perp}$ dağılımı tamamen geodezik bir liflenmedir. (4.1.5)'ten

$$\mathrm{e_i} = \nabla_{\mathrm{e_i}} \mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \mathrm{s} \nabla_{\mathrm{e_i}} \mathrm{e_i}, \quad \mathrm{i} = 2, \dots, \mathrm{n} \tag{4.1.21}$$

olduğunu biliyoruz. Bu durumda

$$\omega_1^{\mathrm{j}}(\mathrm{e_i}) = \frac{\delta_{\mathrm{ij}}}{\mathrm{s}}, \quad \mathrm{i}, \mathrm{j} = 2, \dots, \mathrm{n} \tag{4.1.22}$$

olur, burada $\mathrm{i} = \mathrm{j}$ veya $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$ olmasına bağlı olarak $\delta_{\mathrm{ij}} = 1$ veya $\delta_{\mathrm{ij}} = 0$'dır. (4.1.22)'den, $\mathcal{D}$'nin, lifleri M'de tamamen unbilikal olan integrallenebilir bir dağılım olduğu sonucuna vardık. Ayrıca $\mathcal{D}$'nin liflerinin ortalama eğriliği s^{-1} ile verilir. $\mathcal{D}$'nin liflerinin M'de hiperyüzey olması, $\mathcal{D}_2$'nin liflerinin ortalama eğrilik vektör alanlarının M'nin normal demetine paralel olduğu anlamına gelir. Bu nedenle $\mathcal{D}$ küresel bir liflenmedir. Dolayısıyla [27]'in bir sonucu olarak, M'nin yerel olarak çarpık $\mathrm{I} \times_{\mathrm{s}} \mathrm{F}$ ürünü olduğu anlaşılır. Burada F bir Riemann $(\mathrm{n}-1)$-manifolddur. Dolayısıyla M'nin g metrik tensörü

$$g = \mathrm{ds}^2 + \mathrm{s}^2 g_{\mathrm{F}} \tag{4.1.23}$$

şeklinde yazılır. Burada $\mathrm{g_F}$, F'nin metrik tensörüdür.

Şimdi (4.1.6), (4.1.19) ve (4.1.23)'ü kullanarak, metrik tensörün (4.1.7)'deki gibi ifade edilebileceği sonucuna varabiliriz. Tersine

$$\mathrm{x}(\mathrm{s}, \mathrm{u_2}, \dots, \mathrm{u_n}) = \sqrt{s^2 + c^2}\, Y(\mathrm{s}, \mathrm{u_2}, \dots, \mathrm{u_n}), <\mathrm{Y}, \mathrm{Y}> = 1, \mathrm{c} > 0 \tag{4.1.24}$$

tarafından tanımlanan E^m üzerindeki M altmanifoldunu, g_{Y} metrik tensörü

$$g_{\mathrm{Y}}=\frac{c^2}{(s^2+c^2)^2}ds^2+\frac{s^2}{s^2+c^2}\sum_{i,j=2}^{n}g_{ij}(u_2,\dots,u_n)du_idu_j \tag{4.1.25}$$

ifadesini sağlayacak şekilde göz önünde bulunduralım. Daha sonra (4.1.24)'ten

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathrm{s}}=\frac{\mathrm{sY}}{\sqrt{\mathrm{s}^2+\mathrm{c}^2}}+\sqrt{\mathrm{s}^2+\mathrm{c}^2}\mathrm{Y}_{\mathrm{s}} \tag{4.1.26}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathrm{u_j}}=\sqrt{\mathrm{s}^2+\mathrm{c}^2}\mathrm{Y}_{\mathrm{u_j}}\ ,\ \mathrm{j}=2,\dots,\mathrm{n}$$

bulunur. Burada $\mathrm{Y_s}=\partial\mathrm{Y}/\partial\mathrm{s}$ ve $\mathrm{Y_{u_j}}=\partial\mathrm{Y}/\partial\mathrm{u_j}$' dir. (4.1.24) , (4.1.25) ve (4.1.26)'dan M'nin $\mathrm{g_M}$ metrik tensörü

$$g_{\mathrm{M}}=\mathrm{ds}^2+\mathrm{s}^2\sum_{i,j=2}^{n}g_{ij}(u_2,\dots,u_n)du_idu_j \tag{4.1.27}$$

şeklinde verilir. Şimdi kolay bir hesaplama ile (4.1.27)'den

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial s}=0,\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial \mathrm{u_j}}}\frac{\partial}{\partial s}=\frac{1}{\mathrm{s}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{u_j}},\ \mathrm{j}=2,\dots,\mathrm{n} \tag{4.1.28}$$

buluruz. $<\mathrm{Y},\mathrm{Y}>=1$ olduğundan , (4.1.24) ve (4.1.26)

$$<\mathbf{x},\mathbf{x}_{\mathrm{u_j}}>=0\ ,\ \ \mathrm{j}=2,\dots,\mathrm{n} \tag{4.1.29}$$

olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}=\mathrm{s}\frac{\partial}{\partial \mathrm{s}}$ elde ederiz. Şimdi $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$'nin M üzerinde bir eş zamanlı vektör alanı olduğunu doğrulamak kolaydır. Ayrıca

$$\mathbf{x}^{\mathrm{N}}=\frac{\mathrm{c}^2}{\sqrt{\mathrm{s}^2+\mathrm{c}^2}}\mathrm{Y}-\mathrm{s}\sqrt{\mathrm{s}^2+\mathrm{c}^2}\mathrm{Y_s}$$

ile verilen **x**'in normal bileşeninin M'nin her yerinde daima sıfırdan farklı olduğu doğrudan gösterilebilir. Sonuç olarak, Teorem 4.1.1.'e göre M uygun bir rektifiye altmanifolddur.

Uyarı 4.1.1. Teorem 4.1.2. , [1]'deki Teorem 3'ün genel halidir.

Uyarı 4.1.2. $\mathrm{s}=\tan^{-1}(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{c}})$ yazılırsa (4.1.7)'den

$$g_{\mathrm{Y}}=\mathrm{dt}^2+\sin^2\mathrm{t}\sum_{j,k=2}^{n}g_{jk}(u_2,\dots,u_n)du_jdu_k \tag{4.1.30}$$

elde edilir. $n=2$ için, (4.1.30)'dan $g_Y=\mathrm{dt}^2+(\sin^2\mathrm{t})\mathrm{du}^2$ buluruz ki bu da $\mathrm{S}^2(1)$ üzerinde (t,u) küresel koordinat sisteminin metrik tensörüdür. Bu nedenle $\mathrm{n}=2$ için

$Y = Y(t, u)$, $S^1(1)$'in açık kısımlarından $S^{m-1}(1) \subset E^m$ içine bir izometrik immersiyondan başka bir şey değildir. Dolayısıyla E^m'de metrik tensörü (4.1.7) ile verilen bir çok küresel altmanifold vardır. Sonuç olarak, Teorem 4.1.2.'ye göre E^m'de bir çok rektifiye altmanifold vardır.

5. REKTİFİYE ALTMANİFOLDLARIN ÖZELLİKLERİ

5.1. Rektifiye Altmanifoldların Temel Özellikleri

Bu son bölümde, uygun rektifiye altmanifoldların bazı temel özelliklerini ele alalım [21].

Teorem 5.1.1. M, E^m'de uygun bir rektifiye altmanifold olsun.

(a) Bazı b sabitleri için $|\mathbf{x}^T| = s + b$ yazılabilir.

(b) Bazı c_1 ve c_2 sabitleri için $|\mathbf{x}|^2 = s^2 + c_1 s + c_2$ yazılabilir.

(c) $\mathbf{x}^N$ sabit uzunluktadır.

(d) $A_{\mathbf{x}^N} = 0$'dır.

(e) Herhangi bir Y∊TM için, R eğrilik tensörü $R = (\mathbf{x}^T, Y) = 0$ eşitliğini sağlar.

(f) M'nin seksiyonel eğriliği K, $\mathbf{x}^T$'ye dik olan herhangi bir Z birim vektörü için $K(\mathbf{x}^T, Z) = 0$ eşitliğini sağlar.

İspat. (*a*), (*b*), (*c*) ve (*d*) ifadeleri Teorem 4.1.2.'nin ispatında gösterilmiştir. Ayrıca (*f*) ifadesi (*e*) ifadesinden elde edilir. Şimdi (*e*) ifadesinin geçerli olduğunu göstermeye çalışalım. (3.1.6) ve (4.1.8)'i uygulayarak

$$\begin{aligned} R(\mathbf{x}^T, Y, Z; W) &= < h(\mathbf{x}^T, W), h(Y, Z) > - < h(\mathbf{x}^T, Z), h(Y, W) > \\ &= < D_Z \mathbf{x}^N, h(Y, W) > - < D_W \mathbf{x}^N, h(Y, Z) > \qquad (5.1.1) \\ &= - < \mathbf{x}^N, D_Z h(Y, W) > + < \mathbf{x}^N, D_W h(Y, Z) > \end{aligned}$$

buluruz. Bu nedenle (4.1.4)'ü ve Codazzi'nin (3.1.8) denklemini kullanarak (5.1.1)'den (*e*) ifadesini veren

$$R(\mathbf{x}^T, Y, Z; W) = < \mathbf{x}^N, (\bar{\nabla}_W h)(Y, Z) > - < \mathbf{x}^N, (\bar{\nabla}_Z h)(Y, W) > = 0 \qquad (5.1.2)$$

eşitliğini buluruz.

Uyarı 5.1.1. Teorem 5.1.1.'in (a), (b) ve (c) ifadeleri, [1]'deki Teorem 1'de elde edilen ilgili sonuçları açıklar.

Uyarı 5.1.2. Bir pseudo-Öklid uzayında rektifiye altmanifoldların Tanım 2.1.14. gibi bir tanımı yapılabilir.

6. SONUÇ

Bu çalışmada ilk olarak Öklid uzayında temel kavramlar verilmiş ve ardından rektifiye altmanifoldlar incelenmeye başlanmıştır. Rektifiye altmanifold kavramına bir giriş yapıldıktan sonra temel özelliklerine değinilmiş ve rektifiye altmanifoldların bir karakterizasyonu verilerek sınıflandırma yapılmıştır. Bu çalışma, araştırmalara rektifiye altmanifoldların nasıl karakterize edileceği konusunda bir fikir vercektir. Ayrıca Öklid uzayı dışında, farklı uzaylarda tanımlanabilecek manifoldlar ve rektifiye altmanifoldlar üzerinde de benzer çalışmalar yapılabileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] **Chen, B.-Y.**, 2003. When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane?. *Amer. Math. Monthly* **110,** no. 2, 147–152.

[2] **Chen, B.-Y.**, 2001. Constant-ratio hypersurfaces. *Soochow J. Math.* **21,** 353–361.

[3] **Chen, B.-Y.**, 2002. Geometry of position functions of Riemannian submanifolds in pseudo-Euclidean space. *J. Geom.* **74,** 61–77.

[4] **Chen, B.-Y.**, 2002. Convolution of Riemannian manifolds and its applications. *Bull. Austral. Math. Soc.* **66,** no. 2, 177–191.

[5] **Chen, B.-Y.**, 2003. More on convolution of Riemannian manifolds. *Beiträge Algebra Geom.* **44,** 9–24.

[6] **Chen, B.-Y.**, 2003. Constant-ratio space-like submanifolds in pseudo-Euclidean space. *Houston J. Math.* **29,** no. 2, 281–294

[7] **Chen, B.-Y. and Dillen, F.**, 2005. Rectifying curves as centrodes and extremal curves. *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica* **33,** no. 2, 77–90.

[8] **İslarslan, K., Nesovic, E. and Petrovic-Torgasev, M.**, 2003. Some characterizations of rectifying curves in the Minkowski 3-space. *Novi Sad J. Math.* **33,** no. 2, 23-32.

[9] **İlarslan, K. and Nesovic, E.**, 2007. On rectifying curves as centrodes and extremal curves in the Minkowski 3-space. *Novi Sad J. Math.* **37,** no. 1, 53–64.

[10] **İlarslan, K. and Nesovic, E.**, 2008. Some characterizations of rectifying curves in the Euclidean space E^4. *Turkish J. Math.* **32,** no. 1, 21–30.

[11] **İlarslan, K. and Nesovic, E.**, 2014. Some relations between normal and rectifying curves in Minkowski space-time. *Int. Electron. J. Geom.* **7,** no. 1, 26–35.

[12] **Lucas, P. and Ortega-Yagues, J. A.**, 2015. Rectifying curves in the three-dimensional sphere. *J. Math. Anal. Appl.* **421,** no. 2, 1855–1868.

[13] **Özbey and Oral, M.**, 2009. A study on rectifying curves in the dual Lorentzian space. *Bull. Korean Math. Soc.* **46,** no. 5, 967–978.

[14] **Yılmaz, B., Gok, I. and Yayli, Y.**, 2016. Extended rectifying curves in Minkowski 3-space. *Adv. Appl. Clifford Algebr.* **26,** no. 2, 861–872.

[15] **Yücesan, A., Ayyıldız, N. and Coken, A. C.**, 2007. On rectifying dual space curves. *Rev. Mat. Complut.* **20,** no. 2, 497–506.

[16] **Hacısalihoğlu, H.H.,** 1982. Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi.

[17] **Hacısalihoğlu, H.H.,** 1994. Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi.

[18] **Şahin, B.,** 2012. Manifoldların Diferensiyel Geometrisi, Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık Tic. Ltd. Şti., Ankara.

[19] **Kaya, Y., Küçük, A., Melekoğlu, A.,** 2015. Diferensiyel Geometriye Giriş, Dora Yayıncılık, Bursa.

[20] **O'Neill, B.,** 1983. Semi Riemannian Geometry with Application to Relativity. Academic-Press, New York.

[21] **Chen, B.-Y.,** 2016. Differential Geometry of Rectifying Submanifolds, *International electronic journal of geometry* **9(2),** 1-8.

[22] **Cambie, S., Goemans, W. and Van den Bussche, I.,** 2016. Rectifying curves in the n-dimensional Euclidean space. *Turkish J. Math.* **40,** no.1, 210–223.

[23] **Chen, B.-Y.,** 1973. Geometry of Submanifolds. Marcel Dekker, New York.

[24] **Chen, B.-Y.,** 2011. Pseudo-Riemannian geometry, δ-invariants and applications. World Scientific.

[25] **Chen, B.-Y.,** 2017. Topics in differential geometry associated with position vector fields on Euclidean submanifolds. *Arab J. Math. Sci.* **23,** no. 1.

[26] **Güngör, M. A. and Tosun, M.,** 2011. Some characterizations of quaternionic rectifying curves. *Differ. Geom. Dyn. Syst.* **13,** 89–100.

[27] **Hiepko, S.,** 1979. Eine innere Kennzeichnung der verzerrten Produkte. *Math. Ann.* **241,** no. 3, 209–215.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Tunceli'nin Ovacık ilçesinde doğmuşum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2008 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım ve 2012 yılında bu bölümden mezun oldum. 2016 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansa başladım.

Yunus İŞCAN