T.C.

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORLİCZ FONKSİYONLAR DİZİSİ YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI

Firdevs ÖZARSLAN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Çiğdem BEKTAŞ

HAZİRAN-2019

T.C.

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORLİCZ FONKSİYONLAR DİZİSİ YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI

Yüksek Lisans Tezi

Firdevs ÖZARSLAN

(111121107)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih	**:**	**17.05.2019**
Tezin Savunulduğu Tarih	**:**	**13.06.2019**

Tez Danışmanı	:	**Prof. Dr. Çiğdem BEKTAŞ (F.Ü)**
Diğer Jüri Üyeleri	:	**Prof. Dr. Rifat ÇOLAK (F.Ü)**
		Dr. Öğr. Üyesi Funda TÜRK (B.Ü)

HAZİRAN-2019

ÖNSÖZ

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygıdeğer hocam Prof. Dr. Çiğdem BEKTAŞ'a üzerimdeki emeklerinden dolayı teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Yanında çalışmaktan dolayı onur duyduğumu belirtmek ister, tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu sabır ve hoşgörüden dolayı ise özellikle teşekkür ederim.

Bu zorlu süreçte beni yalnız bırakmayan ve desteklerini bir an olsun esirgemeyen eşime, aileme ve tüm dostlarıma teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Firdevs ÖZARSLAN

ELAZIĞ-2019

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Orlicz Fonksiyonlar Dizisi Yardımıyla Tanımlanmış Genelleştirilmiş Fark Dizi Uzayları

Dört bölümden oluşan bu çalışmada bir Orlicz fonksiyonlar dizisi ve fark dizisi kullanılarak genelleştirilmiş fark dizi uzayları tanımlanmış ve kapsama bağıntıları incelenmiştir.

Birinci bölümde fark dizi uzaylarının ortaya çıkışı, gelişimi ve tarihçesi hakkında genel bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde konu ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde Orlicz fonksiyonu ve fark dizi uzaylarının tanımları ve bazı kapsama bağıntıları verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise bir Orlicz fonksiyonlar dizisi ile tanımlı genelleştirilmiş fark dizi uzayları tanımlanmış ve kapsama bağıntıları detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler : Orlicz fonksiyonu, Fark dizi uzayları, Genelleştirilmiş fark dizi uzayları

SUMMARY

Generalized Difference Sequence Spaces Defined by the Help of a Sequence of Orlicz Functions

In this study, which consists of four sections, generalized difference sequence spaces have been defined using an Orlicz functions sequence and difference sequence and inclusion relations are analyzed.

In the first chapter, general information about the emergence, development and history of difference sequence spaces are given.

In the second chapter, fundamental definitions and theorems related to the subject are given.

In the third chapter, definitions of Orlicz function and difference sequence spaces and some inclusion relations are given.

In the fourth chapter, generalized difference sequence spaces defined by the help of an Orlicz functions sequences are defined and inclusion relations are investigated in detail.

Key Words : Orlicz function, Difference sequence spaces, Generalized difference sequence spaces.

SEMBOLLER LİSTESİ

Bu tezde kullanılan bazı simgeler, aşağıda açıklamaları ile birlikte verilmiştir.

s	:	Bütün diziler uzayı
c	:	Yakınsak diziler uzayı
c_0	:	Sıfıra yakınsak diziler uzayı
ℓ_∞	:	Sınırlı diziler uzayı
$\hat{c}$	:	Hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı
$[\hat{c}]$	:	Kuvvetli hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı
$[\hat{c}_0]$	:	Sıfıra kuvvetli hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı
$[\hat{c}, p]$	:	Kuvvetli hemen hemen toplanabilen diziler uzayı
$[\hat{c}_0, p]$	:	Sıfıra kuvvetli hemen hemen toplanabilen diziler uzayı
Δ	:	Fark operatörü
$\tilde{l}_M$	:	Orlicz dizi sınıfı
l_M	:	Orlicz dizi uzayı

1 GİRİŞ

Fark dizi uzayları tanımı ilk olarak 1981 yılında Kızmaz [1] tarafından tanımlandı. Kızmaz $y = (y_k)$ dizisini Δ operatörüyle yeniden yapılandırarak $\Delta y_k = y_k - y_{k+1}$ fark dizisini elde etmiş ve

$$X(\Delta) = \{y = (y_k) : \Delta y \in X\} \tag{1.1}$$

şeklinde fark dizi uzaylarını tanımlamıştır. Burada $X = l_\infty$, c ve c_0 dır.

Et [2] 1993 yılında Kızmaz'ın bu fikrini bir adım daha ileri taşıyarak $\left(\Delta^2 y_k\right)$ dizisi yardımıyla $\Delta^2 X$ fark dizi uzayını tanımlamıştır.

Çolak ve Et 1995 ve 1997 yılında [3, 4] Δ^m genelleştirilmiş fark operatörü yardımıyla Kızmaz'ın [1] tanımlamış olduğu fark dizi uzayını genelleştirmişlerdir.

Bir Orlicz fonksiyonu, $M(0) = 0$ ve $x \to \infty$ ise $M(x) \to \infty$ olacak şekilde sürekli, pozitif tanımlı, azalmayan, konveks $M : [0, \infty) \to [0, \infty)$ şeklinde tanımlı bir fonksiyondur. Ayrıca

$$M(x) = \int_0^x p(t)\,dt \tag{1.2}$$

gösterimine sahiptir, burada $p(t)$ azalmayan sağdan sürekli bir fonksiyondur.

1971 yılında Lindenstrauss ve Tzafriri [5] Orlicz dizi uzayını tanımladılar.

1994 yılında Parashar ve Choudhary [6] Orlicz fonksiyonlarını kullanarak $l_M(s)$ dizi uzayını $s = (s_m)$ dizisi sınırlı bir dizi olacak şekilde tanımladılar.

2001 yılında Mursaleen [7] $\mathbb{M} = (M_m)$ Orlicz fonksiyonları dizisi yardımıyla $s = (s_m)$ pozitif reel sayıların herhangi bir dizisi olmak üzere $l_\infty(\mathbb{M}, \Delta)$ ve $c_0(\mathbb{M}, \Delta)$ fark dizi uzaylarını tanımladı.

2003 yılında Güngör ve Et [8], 2004 yılında Bektas [9, 10] M Orlicz fonksiyonunu kullanarak bazı genelleştirilmiş fark dizi uzaylarını tanımladılar.

2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1. *[11] X boştan farklı bir küme, $\mathcal{F}$ kompleks ya da reel sayıların bir cismi olmak üzere*

$$\begin{aligned} + &: X \times X \to X \\ \cdot &: \mathcal{F} \times X \to X \end{aligned} \tag{2.1}$$

işlemleri $\forall\ x, y, z \in X$ *ve* $\forall\ \alpha, \beta \in \mathcal{F}$ *için*

i) $x + y \in X$,

ii) $x + y = y + x$,

iii) $(x + y) + z = x + (y + z)$,

iv) $x + \theta = x$,

v) $x + (-x) = \theta$,

vi) $\alpha x \in X$,

vii) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,

viii) $(\alpha + \beta)\,x = \alpha x + \beta x$, $\alpha(x + y) = x + y$,

ix) $1 \cdot x = x$,

özellikleri sağlanırsa X kümesine $\mathcal{F}$ skaler cismi üzerinde bir vektör uzayı denir.

Tanım 2.2. *[11] X bir vektör uzayı ve $Y \subseteq X$ olsun. X deki işlemlere göre Y alt kümesi de bir vektör uzayı ise Y kümesi bir alt vektör uzayı olarak adlandırılır.*

Lemma 2.3. *[11] Bir $Y \subseteq X$ alt kümesinin bir alt uzay olabilmesi için gerek ve yeter koşullar aşağıdaki gibidir;*

i) $\forall\ x, y \in Y$ *için* $x+y \in Y$

ii) $\forall\ \alpha \in \mathcal{F}$ *ve* $\forall\ x \in Y$ *için* $\alpha x \in Y$.

Tanım 2.4. *[12]* $X \neq \varnothing$ *bir küme olmak üzere* $\forall\ x, y, z \in X$ *için*

i) $d(x,y) \geq 0,$

ii) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

iii) $d(x,y) = d(y,x),$

iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

özeliklerini sağlayan $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *fonksiyonuna* X *üzerinde bir metrik,* (X,d) *ye de metrik uzay adı verilir.*

Tanım 2.5. $X \neq \varnothing$ *olmak üzere* $f : \mathbb{N} \to X$ *fonksiyonuna* X *kümesi üzerinde bir dizi denir ve* $(f(n))$ *şeklinde gösterilir.*

Tanım 2.6. *[12]* X, $\mathcal{F}$ ($\mathbb{R}$ *veya* $\mathbb{C}$) *cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere* $\forall\ x, y \in X$ *için*

i) $g(\theta) = \theta,$

ii) $g(-x) = g(x),$

iii) $g(x+y) \leq g(x) + g(y),$

iv) $\lambda_n \to \lambda_0,\ x_n \to x_0 \Rightarrow \lambda_n x_n \to \lambda_0 x_0,\ (x_n, x_0 \in X; \lambda_n, \lambda_0 \in \mathcal{F})$

ise $g : X \to \mathbb{R}$ *fonksiyonuna paranorm,* (X,g) *ye de paranormlu uzay denir.*

Tanım 2.7. *[11, 12] X, $\mathcal{F}$ ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere $\forall\ \alpha \in \mathcal{F}$ ve $\forall\ x, y \in X$ için*

i) $\|x\| \geq 0$,

ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\|$,

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

ise $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna norm, $(X, \|.\|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

Tanım 2.8. *[13] Bir (X, d) metrik uzayında bir (y_m) dizisini ele alalım. Eğer*

$$\lim_{m\to\infty} d(y_m, y) = 0 \tag{2.2}$$

olacak biçimde bir $y \in X$ noktası varsa (y_m) dizisine yakınsaktır denir.

Tanım 2.9. *[11] Bir (X, d) metrik uzayında bir (y_m) dizisine, $\forall\ \varepsilon > 0$ için $m,\ n \geq N$ iken*

$$d(y_m,\ y_n) < \varepsilon,\ m,\ n \geq N \tag{2.3}$$

olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa bu dizi Cauchy dizisi olarak adlandırılır.

Yakınsak her dizi bir Cauchy dizisi olmasına karşın tersi genellikle doğru değildir. Örneğin $X = (0, 1)$ uzayında $\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi bir Cauchy dizisidir ancak yakınsak değildir.

Tanım 2.10. *[13] (X, d) bir metrik uzay, $M \neq \emptyset$, $M \subset X$ alt kümesini göz önüne alalım. Eğer bu kümenin çapı olan*

$$\delta(M) = \sup_{x,y\in M} d(x, y) \tag{2.4}$$

sonlu ise M'ye sınırlı küme denir. X'deki bir (y_m) dizisinin elemanlarından oluşan nokta kümesi X'in sınırlı bir alt kümesi ise (y_m) dizisine sınırlı dizi denir.

Lemma 2.11. *[11, 12] Bir metrik uzayda her Cauchy dizisi sınırlıdır.*

Tanım 2.12. *[11, 12] Bir metrik uzayda, her Cauchy dizisi metrik uzayın bir noktasına yakınsıyorsa metrik uzaya tamdır denir.*

Tanım 2.13. *[12]* $(X, \|.\|)$ *normlu uzayı tam ise Banach uzayı olarak adlandırılır.*

Tanım 2.14. *[14]* $X, \mathcal{F}$ *cismi üzerinde bir vektör uzayı,* $g : X \to \mathcal{F}$ *bir dönüşüm,* $\forall\ \alpha, \beta \in \mathcal{F}$ *ve* $\forall\ x, y \in X$ *için*

$$g(\alpha x + \beta y) = \alpha g(x) + \beta g(y) \tag{2.5}$$

ise g, X *üzerinde bir lineer fonksiyoneldir denir. Eğer*

$$\begin{aligned} g(x+y) &\leq g(x) + g(y) \quad (2.6) \\ g(\alpha x) &= \alpha g(x) \quad (2.7) \end{aligned}$$

ise g *alt lineer fonksiyoneldir denir.*

Tanım 2.15. *[12]* $y = (y_m)$, $x = (x_m)$ *kompleks terimli diziler olmak üzere bütün sınırlı dizilerin uzayı* ℓ_∞

$$d(x, y) = \sup_m |y_m - x_m|, \tag{2.8}$$

alışılmış doğal metrikle bir metrik uzaydır. ℓ_∞ *sınırlı diziler uzayı hem vektör uzayı hem de normlu uzaydır.*

Tanım 2.16. *[13]* c *dizi uzayı, kompleks terimli tüm yakınsak dizilerinden oluşur ve yakınsak diziler uzayı olarak adlandırılır.*

Tanım 2.17. *[13]* c_0 *dizi uzayı, kompleks terimli tüm sıfıra yakınsak dizilerinden oluşur ve sıfıra yakınsayan diziler uzayı olarak adlandırılır.*

c ve c_0 dizi uzayları ℓ_∞ dizi uzayının alt kümeleridir ve ℓ_∞ üzerinde tanımlanan metriğe sahiptir.

Tanım 2.18. *[15] (**Konveks fonksiyon**)* $\forall\ y_1, y_2 \in I \subset \mathbb{R}$ *ve* $0 < K < 1$ *için*

$$M[Ky_1 + (1-K)y_2] \leq KM[y_1] + (1-K)M[y_2] \tag{2.9}$$

ise $M : I \to \mathbb{R}$ *fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.*

Tanım 2.19. *[16] (**Orlicz fonksiyonu**)* $M : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *fonksiyonu*

i) $M(0) = 0,$

ii) $\forall\ x > 0$ *için* $M(x) > 0,$

iii) M*, sürekli, azalmayan ve konvekstir,*

iv) $M(x) \to \infty\ (x \to \infty)$

özelliklerini sağlarsa Orlicz fonksiyonu olarak adlandırılır.

3 ORLİCZ VE FARK DİZİ UZAYLARI

Tanım 3.1. *[17] Bir $L : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ lineer fonsiyoneli aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, L ye bir Banach limiti denir.*

i) $m = 0, 1, 2, \ldots$ *için* $y_m \geq 0$ *ise* $L(y) \geq 0$,

ii) $m = 0, 1, 2, \ldots$ *için* $y_m \geq 0$ *ise* $L(y_{m+1}) = L(y_m)$,

iii) $L(e) = 1$, $e = (1, 1, 1, \ldots)$.

Tanım 3.2. *[18]* ***(Cesáro yakınsaklık)*** (y_m) *bir kompleks sayı dizisi olmak üzere*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} y_m = L \tag{3.1}$$

mevcutsa (y_m) *dizisi L ye Cesáro yakınsaktır veya* $(C, 1)$ *yakınsaktır denir.*

Teorem 3.3. *[19]* ***(Hemen hemen yakınsaklık)*** $y \in \ell_\infty$ *olmak üzere* $y = (y_m)$ *dizisinin bir* l *sayısına hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter şart tüm L Banach limitleri için* $L(y) = l$ *olmasıdır.*

1948'de Lorentz [19] y nin l ye hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter şartın

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} y_{m+u} \to l \ (n \to \infty), \ u\text{'ya göre düzgün} \tag{3.2}$$

olduğunu ispatlamıştır. Böylece hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı

$$\hat{c} = \left\{ y : \lim_{n} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} y_{m+u} \text{ mevcut, } u\text{'ya göre düzgün} \right\} \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.4. *[20, 21] (**Kuvvetli hemen hemen yakınsaklık**) Kuvvetli hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı*

$$[\hat{c}] = \left\{ y : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} |y_{m+u} - l| = 0,\ u\text{'ya göre düzgün} \right\}, \tag{3.4}$$

ve sıfıra kuvvetli hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı da

$$[\hat{c}_0] = \left\{ y : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} |y_{m+u}| = 0,\ u\text{'ya göre düzgün} \right\} \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.5. *[14] $s = (s_m)$ pozitif reel sayıların bir dizisi olmak üzere $[\hat{c}, s]$ kuvvetli hemen hemen toplanabilen dizilerin uzayı*

$$[\hat{c}, s] = \left\{ y : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} |y_{m+u} - l|^{s_m} = 0,\ u\text{'ya göre düzgün} \right\}, \tag{3.6}$$

$[\hat{c}, s]_0$ sıfıra kuvvetli hemen hemen toplanabilen dizilerin uzayı,

$$[\hat{c}, s]_0 = \left\{ y : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} |y_{m+u}|^{s_m} = 0,\ u\text{'ya göre düzgün} \right\} \tag{3.7}$$

ve $[\hat{c}, s]_\infty$ sınırlı kuvvetli hemen hemen toplanabilen dizilerin uzayı,

$$[\hat{c}, s]_\infty = \left\{ y : \sup_{n,m} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} |y_{m+u}|^{s_m} < \infty,\ u\text{'ya göre düzgün} \right\} \tag{3.8}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.6. *[1] $y = (y_m)$ bir dizi ve Δ fark operatörü de $\Delta y = (y_m - y_{m+1})$ şeklinde tanımlı olmak üzere fark dizi uzayları*

$$\ell_\infty(\Delta) = \{y = (y_m) : \Delta y \in \ell_\infty\}, \tag{3.9}$$

$$c(\Delta) = \{y = (y_m) : \Delta y \in c\}, \tag{3.10}$$

$$c_0(\Delta) = \{y = (y_m) : \Delta y \in c_0\} \tag{3.11}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca bu dizi uzayları $\|y\|_\Delta = |y_1| + \|\Delta y\|_\infty$ normuyla birer Banach uzayıdır.

Tanım 3.7. [4] *$y = (y_m)$ bir dizi ve Δ^n fark operatörü $\Delta^n y = (\Delta^n y_m) = \left(\Delta^{n-1} y_m - \Delta^{n-1} y_{m+1}\right)$ ve $\Delta^n y = \sum_{v=0}^{n} (-1)^v \begin{pmatrix} n \\ v \end{pmatrix} y_{m+v}$ şeklinde tanımlı olmak üzere genelleştirilmiş fark dizi uzayları*

$$\ell_\infty (\Delta^n) = \{y = (y_m) : \Delta^n y \in \ell_\infty\}, \tag{3.12}$$

$$c(\Delta^n) = \{y = (y_m) : \Delta^n y \in c\}, \tag{3.13}$$

$$c_0 (\Delta^n) = \{y = (y_m) : \Delta^n y \in c_0\} \tag{3.14}$$

şeklinde tanımlanır ve aynı zamanda bu dizi uzayları

$$\|y\|_\Delta = \sum_{i=1}^{n} |y_i| + \left\|\Delta^n y\right\|_\infty \tag{3.15}$$

normuyla birer Banach uzayıdır.

Tanım 3.8. [15] *Her M Orlicz fonksiyonu için*

$$\tilde{l}_M = \left\{ y = (y_m) : \sum_{m=1}^{\infty} M(|y_m|) < \infty \right\} \tag{3.16}$$

ile tanımlı $\tilde{l}_M$ kümesine Orlicz dizi sınıfı denir.

Tanım 3.9. *[5, 22] M bir Orlicz fonksiyonu olmak üzere*

$$l_M = \left\{ y = (y_m) : \sum_{m=1}^{\infty} M\left(\frac{|y_m|}{\rho}\right) < \infty, \exists \rho > 0 \text{ için} \right\} \tag{3.17}$$

ile tanımlı dizi uzayı Orlicz dizi uzayı olarak adlandırılır.

l_M uzayı

$$\|y\| = \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{m=1}^{\infty} M\left(\frac{|y_m|}{\rho}\right) \le 1 \right\} \tag{3.18}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 3.10. *[6] $s = (s_m)$ dizisi sınırlı pozitif terimli bir dizi, M Orlicz fonksiyonu olmak üzere $l_M(s)$ dizi uzayı*

$$l_M(s) = \left\{ y = (y_m) : \sum_{m=1}^{\infty} \left[M\left(\frac{|y_m|}{\rho}\right) \right]^{s_m} < \infty,\ \exists \rho > 0 \right\} \tag{3.19}$$

ile tanımlanır.

Tanım 3.11. *[5, 23]* $\mathbb{M} = (M_m)$ *Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi olmak üzere*

$$l(\mathbb{M}) = \left\{ y = (y_m) : \sum_{m=1}^{\infty} M_m \left(\frac{|y_m|}{\rho} \right) < \infty, \ \exists \rho > 0 \right\} \tag{3.20}$$

ile tanımlı $l(\mathbb{M})$ *dizi uzayı modular dizi uzayı olarak adlandırılır.*

$l(\mathbb{M})$ *uzayı*

$$\|y\|_{\mathbb{M}} = \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{m=1}^{\infty} M_m \left(\frac{|y_m|}{\rho} \right) \leq 1 \right\} \tag{3.21}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 3.12. *[8] M bir Orlicz fonksiyonu ve* $s = (s_m)$ *pozitif reel sayıların herhangi bir dizisi olsun. Aşağıdaki dizi uzayları*

$$[\hat{c}, M, s](\Delta^n) = \left\{ y = (y_m) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \left[M \left(\frac{|\Delta^n y_{m+u} - L|}{\rho} \right) \right]^{s_m} = 0, \exists \rho > 0, \right. \tag{3.22}$$

$$\left. L > 0, u\text{'ya göre düzgün} \right\},$$

$$[\hat{c}, M, s]_0(\Delta^n) = \left\{ y = (y_m) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \left[M \left(\frac{|\Delta^n y_{m+u}|}{\rho} \right) \right]^{s_m} = 0, \exists \rho > 0, \right. \tag{3.23}$$

$$\left. u\text{'ya göre düzgün} \right\},$$

$$[\hat{c}, M, s]_\infty(\Delta^n) = \left\{ y = (y_m) : \sup_{s,n} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \left[M \left(\frac{|\Delta^n y_{m+u}|}{\rho} \right) \right]^{s_m} < \infty, \exists \rho > 0 \right\} \tag{3.24}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.13. *[7]* $\mathbb{M} = (M_m)$ *Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Aşağıdaki dizi uzayları*

$$\ell_\infty(\mathbb{M}, \Delta) = \left\{ y = (y_m) : \sup_k M_m \left(\frac{|\Delta y_m|}{\rho} \right) < \infty \right\}, \tag{3.25}$$

$$c_0(\mathbb{M}, \Delta) = \left\{ y = (y_m) : M_m \left(\frac{|\Delta y_m|}{\rho} \right) \to 0, m \to \infty \right\} \tag{3.26}$$

şeklinde tanımlanır.

4 ORLİCZ FONKSİYONLAR DİZİSİ YARDIMIYLA TANIMLI GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI

Bu kısımda Orlicz fonksiyonlar dizisi kullanılarak Bektaş [10] tarafından genelleştirilen fark dizi uzayları verilip bunlar arasındaki kapsama bağıntıları incelenmiştir.

Tanım 4.1. *[10] $\mathbb{M} = (M_m)$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi ve $s = (s_m)$ kesin pozitif reel sayıların herhangi bir dizisi olsun. Bu takdirde aşağıdaki dizi uzaylarını tanımlayabiliriz:*

$$[\hat{c}, \mathbb{M}, s](\Delta^n) = \left\{ y = (y_m) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \left[M_m \left(\frac{|\Delta^n y_{m+u} - L|}{\rho} \right) \right]^{s_m} = 0,\ \exists \rho > 0, \right. \tag{4.1}$$

$$\left. L > 0, u\text{'ya göre düzgün} \right\},$$

$$[\hat{c}, \mathbb{M}, s]_0(\Delta^n) = \left\{ y = (y_m) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \left[M_m \left(\frac{|\Delta^n y_{m+u}|}{\rho} \right) \right]^{s_m} = 0,\ \exists \rho > 0, \right. \tag{4.2}$$

$$\left. u\text{'ya göre düzgün} \right\},$$

$$[\hat{c}, \mathbb{M}, s]_\infty(\Delta^n) = \left\{ y = (y_m) : \sup_{s,n} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \left[M_m \left(\frac{|\Delta^n y_{m+u}|}{\rho} \right) \right]^{s_m} < \infty,\ \exists \rho > 0 \right\}. \tag{4.3}$$

Eğer her m için $M_m(y) = y$ ise bu takdirde $[\hat{c}, \mathbb{M}, s](\Delta^n) = [\hat{c}, s](\Delta^n)$, $[\hat{c}, \mathbb{M}, s]_0(\Delta^n) = [\hat{c}, s]_0(\Delta^n)$ ve $[\hat{c}, \mathbb{M}, s]_\infty(\Delta^n) = [\hat{c}, s]_\infty(\Delta^n)$ dir.

Her m için $s_m = 1$ ise $[\hat{c}, \mathbb{M}, s](\Delta^n)$, $[\hat{c}, \mathbb{M}, s]_0(\Delta^n)$ ve $[\hat{c}, \mathbb{M}, s]_\infty(\Delta^n)$ leri sırasıyla $[\hat{c}, \mathbb{M}](\Delta^n)$, $[\hat{c}, \mathbb{M}]_0(\Delta^n)$ ve $[\hat{c}, \mathbb{M}]_\infty(\Delta^n)$ ile göstereceğiz.

Teorem 4.2. *[10] $\mathbb{M} = (M_m)$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:*

i) $[\hat{c}, s]_\infty(\Delta^n) \subseteq [\hat{c}, \mathbb{M}, s]_\infty(\Delta^n)$, *ii)* $[\hat{c},s]_0(\Delta^n) \subseteq [\hat{c},\mathbb{M},s]_\infty(\Delta^n)$,

iii) $\sup_n \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\left[M_m\left(\frac{t}{\rho}\right)\right]^{s_m} < \infty \ (t,\rho > 0)$.

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$. $[\hat{c},s]_0(\Delta^n) \subseteq [\hat{c},s]_\infty(\Delta^n)$ olduğundan açıktır.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. $[\hat{c},s]_0(\Delta^n) \subseteq [\hat{c},\mathbb{M},s]_\infty(\Delta^n)$ olsun. (iii) nin sağlanmadığını varsayalım. Bu takdirde bazı $t,\rho > 0$ için

$$\sup_n \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\left[M_m\left(\frac{t}{\rho}\right)\right]^{s_m} = \infty \tag{4.4}$$

olur ve böylece

$$\frac{1}{n_i}\sum_{m=1}^{n_i}\left[M_m\left(\frac{i^{-1}}{\rho}\right)\right]^{s_m} > i, \ i = 1,2,\ldots \tag{4.5}$$

olacak şekilde pozitif tamsayıların (n_i) dizisi vardır. Şimdi $y = (y_m)$ dizisini

$$y_m = \begin{cases} i^{-1}, & 1 \le m \le n_i, \quad i = 1,2,\ldots; \\ 0, & m > n_i, \end{cases} \tag{4.6}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde $y \in [\hat{c},s]_0(\Delta^n)$ dir, fakat (4.5) den $y \notin [\hat{c},\mathbb{M},s]_\infty(\Delta^n)$ olur ki bu ise (ii) ile çelişir. Buradan (iii) sağlanmalıdır.

$(iii) \Rightarrow (i)$. (iii) sağlansın ve $y \in [\hat{c},s]_\infty(\Delta^n)$ olsun. $y \notin [\hat{c},\mathbb{M},s]_\infty(\Delta^n)$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde

$$\sup_{s,n} \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\left[M_m\left(\frac{|\Delta^n y_{m+u}|}{\rho}\right)\right]^{s_m} = \infty \tag{4.7}$$

dir.

Herbir m ve u için $t = |\Delta^n y_{m+u}|$ olsun, bu takdirde (4.7) den

$$\sup_n \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\left[M_m\left(\frac{t}{\rho}\right)\right]^{s_m} = \infty \tag{4.8}$$

elde edilir ve bu ise (iii) ile çelişir. Böylece (i) sağlanmalıdır. ∎

Teorem 4.3. *[10] Herbir $m \in \mathbb{N}$ için $1 \le s_m \le \sup_m s_m < \infty$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler herhangi bir $\mathbb{M} = (M_m)$ Orlicz fonksiyonlar dizisi için denktir:*

i) $[\hat{c},\ \mathbb{M},\ s]_0(\Delta^n) \subseteq [\hat{c},\ s]_0(\Delta^n)$,

ii) $[\hat{c},\ \mathbb{M},\ s]_0(\Delta^n) \subseteq [\hat{c},\ s]_\infty(\Delta^n)$, *iii)* $\inf\limits_{n} \frac{1}{n} \sum\limits_{m=1}^{n} \left[M_m\left(\frac{t}{\rho}\right)\right]^{s_m} > 0 \; (t,\rho > 0).$

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$ açıktır.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. $[\hat{c},\ \mathbb{M},\ s]_0(\Delta^n) \subseteq [\hat{c},\ s]_\infty(\Delta^n)$ olsun. (iii) nin sağlanmadığını kabul edelim. Bu takdirde

$$\inf_{n} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \left[M_m\left(\frac{t}{\rho}\right)\right]^{s_m} = 0 \;\; (t,\rho > 0) \tag{4.9}$$

dir. Bu yüzden

$$\frac{1}{n_i} \sum_{m=1}^{n_i} \left[M_m\left(\frac{i}{\rho}\right)\right]^{s_m} < i^{-1},\; i = 1,2,\ldots \tag{4.10}$$

olacak şekilde bir (n_i) indis dizisi seçebiliriz. $y = (y_m)$ dizisini

$$y_m = \begin{cases} i, & 1 \le m \le n_i, \quad i = 1,2,\ldots \\ 0, & m > n_i, \quad \text{aksi takdirde} \end{cases} \tag{4.11}$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece (4.9) den $y \in [\hat{c},\mathbb{M},s]_0(\Delta^n)$, fakat $y \notin [\hat{c},s]_\infty(\Delta^n)$ olur ki bu (ii) ile çelişir. Buradan (iii) sağlanmalıdır.

$(iii) \Rightarrow (i)$. (iii) sağlansın ve $y \in [\hat{c},\mathbb{M},s]_0(\Delta^n)$, yani

$$\lim_{n} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \left[M_m\left(\frac{|\Delta^n y_{m+u}|}{\rho}\right)\right]^{s_m} = 0,\; u\text{'ya göre düzgün} \tag{4.12}$$

olsun. $y \notin [\hat{c},s]_0(\Delta^n)$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde en az bir $\varepsilon_0 > 0$ sayısı ve n_0 indisi için

$$\left|\Delta^n y_{m+u}\right| \ge \varepsilon_0,\; \text{en az bir } s > s' \text{ ve } 1 \le m \le n_0 \text{ için} \tag{4.13}$$

dir.

Bu nedenle

$$\left[M_m\left(\frac{\varepsilon_0}{\rho}\right)\right]^{s_m} \le \left[M_m\left(\frac{|\Delta^n y_{m+u}|}{\rho}\right)\right]^{s_m} \tag{4.14}$$

olur ve sonuç olarak (4.12) ten

$$\lim_{n} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \left[M_m\left(\frac{\varepsilon_0}{\rho}\right)\right]^{s_m} = 0 \tag{4.15}$$

elde edilir ki bu ise (iii) ile çelişmektedir. Buradan

$$[\hat{c},\ \mathbb{M},\ s]_0(\Delta^n) \subseteq [\hat{c},\ s]_0(\Delta^n) \tag{4.16}$$

elde edilir. ∎

Teorem 4.4. *[10] Herbir $m \in \mathbb{N}$ için $1 \leq s_m \leq \sup_m s_m < \infty$ olsun. Bu takdirde*

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \left[M_m \left(\frac{t}{\rho} \right) \right]^{s_m} = \infty \ (t, \rho > 0) \tag{4.17}$$

ise $[\hat{c}, \mathbb{M}, s]_\infty (\Delta^n) \subseteq [\hat{c}, s]_0 (\Delta^n)$ *sağlanır.*

İspat. $[\hat{c}, \mathbb{M}, s]_\infty (\Delta^n) \subseteq [\hat{c}, s]_0 (\Delta^n)$ olsun. (4.17)'in sağlanmadığını varsayalım. Böylece

$$\frac{1}{n_i} \sum_{m=1}^{n_i} \left[M_m \left(\frac{t_0}{\rho} \right) \right]^{s_m} \leq N < \infty, \ i = 1, 2, \ldots \tag{4.18}$$

olacak şekilde bir $t_0 > 0$ sayısı ve bir (n_i) indis dizisi vardır.

$y = (y_m)$ dizisini

$$y_m = \begin{cases} t_0, & 1 \leq m \leq n_i, \quad i = 1, 2, \ldots \\ 0, & m > n_i \quad \text{aksi takdirde} \end{cases} \tag{4.19}$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece (4.18) dan $y \in [\hat{c}, \mathbb{M}, s]_\infty$, fakat $y \notin [\hat{c}, s]_0 (\Delta^n)$ olur. Buradan (4.17) sağlanmalıdır.

Aksine, (4.17) sağlansın. Eğer $y \in [\hat{c}, \mathbb{M}, s]_\infty$ ise bu takdirde herbir s ve m için

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \left[M_m \left(\frac{\Delta^n y_{m+u}}{\rho} \right) \right]^{s_m} \leq N < \infty \tag{4.20}$$

olur.

$y \notin [\hat{c}, s]_0 (\Delta^n)$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde en az bir $\varepsilon_0 > 0$ sayısı için

$$\left| \Delta^n y_{m+u} \right| \geq \varepsilon_0, \ s \geq s_0 \text{ için}, \tag{4.21}$$

olacak şekilde bir s_0 sayısı ve n_0 indisi vardır. Bu nedenle

$$\left[M_m \left(\frac{\varepsilon_0}{\rho} \right) \right]^{s_m} \leq \left[M_m \left(\frac{\Delta^n y_{m+u}}{\rho} \right) \right]^{s_m} \tag{4.22}$$

olur ve buradan herbir m ve u için (4.20) den en az bir $N > 0$ için

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \left[M_m \left(\frac{\varepsilon_0}{\rho} \right) \right]^{s_m} \leq N < \infty \tag{4.23}$$

elde ederiz ki bu (4.17) ile çelişir. Buradan $[\hat{c}, \mathbb{M}, s]_\infty (\Delta^n) \subseteq [\hat{c}, s]_0 (\Delta^n)$ olur. ∎

Teorem 4.5. *[10] Herbir* $m \in \mathbb{N}$ *için* $1 \leq s_m \leq \sup_m s_m < \infty$ *olsun. Bu takdirde eğer*

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \left[M_m \left(\frac{t_0}{\rho} \right) \right]^{s_m} = 0 \ (t, \rho > 0) \tag{4.24}$$

ise $[\hat{c}, s]_\infty (\Delta^n) \subseteq [\hat{c}, \mathbb{M}, s]_0 (\Delta^n)$ *sağlanır.*

İspat. $[\hat{c}, s]_\infty (\Delta^n) \subseteq [\hat{c}, \mathbb{M}, s]_0 (\Delta^n)$ olsun. (4.24) in sağlanmadığını varsayalım. Bu takdirde en az bir $t_0 > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \left[M_m \left(\frac{t_0}{\rho} \right) \right]^{s_m} = L \neq 0 \tag{4.25}$$

dır.

$y = (y_m)$ dizisini

$$y_m = t_0 \sum_{v=0}^{m-k} (-1)^k \begin{pmatrix} k+m-v-1 \\ m-v \end{pmatrix}, \ m = 1, 2, 3, \ldots \text{ için} \tag{4.26}$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece (4.25) dan $y \notin [\hat{c}, \mathbb{M}, s]_0$ fakat $y \in [\hat{c}, s]_\infty (\Delta^n)$ olur. Buradan (4.24) sağlanmalıdır.

Şimdi (4.24) in sağlandığını ve $y \in [\hat{c}, s]_\infty (\Delta^n)$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde her m ve u için

$$\left| \Delta^n y_{m+u} \right| \leq N < \infty \tag{4.27}$$

olur. Buradan

$$\left[M_m \left(\frac{|\Delta^n y_{m+u}|}{\rho} \right) \right]^{s_m} \leq \left[M_m \left(\frac{N}{\rho} \right) \right]^{s_m} \tag{4.28}$$

olur ve (4.24) den

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \left[M_m \left(\frac{|\Delta^n y_{m+u}|}{\rho} \right) \right]^{s_m} \leq \lim_n \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \left[M_m \left(\frac{N}{\rho} \right) \right]^{s_m} = 0 \tag{4.29}$$

elde edilir. Böylece $y \in [\hat{c}, \mathbb{M}, s]_0 (\Delta^n)$ olur. ∎

5 SONUÇ

Bu tezde, fark dizi uzaylarının ortaya çıkışı, gelişimi ve tarihçesi hakkında genel bilgi verilmiş olup sonrasında, Orlicz fonksiyonu ve fark dizi uzaylarının tanımları ve bazı kapsama bağıntıları verilmiştir.

Sonuç olarak Orlicz fonksiyonlar dizisi kullanılarak Bektaş [10] tarafından genelleştirilen fark dizi uzayları verilip bunlar arasındaki kapsama bağıntıları incelenmiştir.

References

[1] **Kızmaz, H.,** 1981. On certain sequence spaces, *Canad. Math. Bull.*, **24**, 169-176.

[2] **Et, M.,** 1993. On Some Difference Sequence Spaces, *Doğa Tr. J. of Mathematics* , **17**, 18-24.

[3] **Çolak, R., Mikail, E. T.,** 1997. On some generalized difference sequence spaces and related matrix transformations, *Hokkaido Mathematical Journal*, **26**, 483-492.

[4] **Et, M., Colak, R.,** 1995. On some generalized difference sequence spaces, *Soochow J. Math.,* **21**, 377-386.

[5] **Lindenstrauss, J., Tzafriri, L.,** 1971. On Orlicz sequence spaces, *Israel J. Math.*, **10**, 379-390.

[6] **Parashar, S. D. and Choudhary, B.,** 1994. Sequence Spaces defined by Orlicz functions, *Indian J. Appl. Math.,* **25**, 419-428.

[7] **Mursaleen, Mushir, Qamaruddin,** 2001. Some difference sequence spaces defined by Orlicz functions, *Matimyas Matematica*, **24**, 42-47.

[8] **Güngör, M., Et, M.** 2003. Δ^r-strongly almost summable sequences defined by Orlicz functions, *Indian J. Pure Appl. Math*, **34**, 1141-1151.

[9] **Bektas, Ç. A.,** 2004. On some difference sequence spaces defined by Orlicz functions, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **28**, 195-202.

[10] **Bektaş, Ç. A.**, 2006. On some difference sequence spaces defined by a sequence of Orlicz functions, *Journal of Zhejiang University-SCIENCE A*, **7**, 2093-2096.

[11] **Şuhubi, E.**, 2001. Fonksiyonel Analiz, İTÜ Vakfı.

[12] **Maddox, I. J.,** 1988. Elements of functional analysis, CUP Archive.

[13] **Çakar, Ö.,** 2007. Fonksiyonel Analize Giriş, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları No:13.

[14] **Nanda, S.,** 1984. Strongly almost convergent sequences, *Bull. Cal. Math. Soc.*, **76**, 236-240.

[15] **Kamthan, P. K., & Gupta, M.,** 1981. Sequence spaces and series, Marcel Dekker Inc.

[16] **Ghosh, D., Srivastava, P. D.,** 1999. On some vector valued sequence space using Orlicz function, *Glasnik matematički,* **34**, 253-261.

[17] **Banach, S.,** 1932. Théorie des Opérations Linéaires, Monografje Matematyczne, vol. I. Z Subwencji Funduszu Kultury Narodowej, Warszawa.

[18] **Powell, R. E., Shah, S. M.,** 1972. Summability theory and its applications, Van Nostrand-Reinhold.

[19] **Lorentz, G.G.,** 1948. A contribution to the theory of divergent sequences, *Acta Mathematica,* **80**, 167-190.

[20] **Maddox, I. J.,** 1978. A new type of convergence, *In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **83**, 1, 61-64). Cambridge University Press.

[21] **Maddox, I. J**., 1979. On strong almost convergence, *In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* **85**, 2, 345-350.

[22] **Lindberg, K.,** 1973. On subspaces of Orlicz sequences spaces, *Studia Mathematica*, **45**, 119-146.

[23] **Woo, J. Y. T.,** 1973. On Modular Sequence spaces, *Studia Math.*, **48**, 271–289.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Elazığ'da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 2007 yılında Fırat Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümünü kazandım ve 2011 yılında mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım.