

**T.C.  
FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**q - ÇATI VE GEOMETRİK UYGULAMALARI**

**Ayten ERDOĞAN DOĞAN**

Yüksek Lisans Tezi

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Geometri Bilim Dalı

OCAK, 2020

**T.C.**  
**FIRAT ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Matematik Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

# **q- ÇATI VE GEOMETRİK UYGULAMALARI**

Tez Yazarı

**Ayten ERDOĞAN DOĞAN**

Danışman

Prof. Dr. Münevver YILDIRIM YILMAZ

OCAK, 2020

ELAZIĞ

**T.C.**  
**FIRAT ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Matematik Anabilim Dalı  
Yüksek Lisans Tezi

---

Başlığı : q- Çatı ve Geometrik Uygulamaları  
Yazarı : Ayten ERDOĞAN DOĞAN  
İlk Teslim : 24/12/2019  
Savunma Tarihi : 24/01/2020

---

**TEZ ONAYI**

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık olarak yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

*İmza*

Danışman : Prof. Dr. Münevver YILDIRIM YILMAZ	Onaylarım
<hr/> Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	
Başkan : .....	Onaylarım
<hr/> Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	
Üye : .....	Onaylarım
<hr/> ..... Üniversitesi, ..... Fakültesi	
Üye : .....	Onaylarım
<hr/> ..... Üniversitesi, ..... Fakültesi	
Üye : .....	Onaylarım
<hr/> ..... Üniversitesi, ..... Fakültesi	

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun ....\..\2020 tarihli toplantısında tescillenmiştir.

.....  
Enstitü Müdürü

# BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “q-Çatı ve Geometrik Uygulamaları” başlıklı Yüksek Lisans Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum\kuruş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

24 \ 01 \ 2020

Ayten ERDOĞAN DOĞAN

# ÖNSÖZ

---

Yönlendirilmiş  $q$  çatı; normal vektör ve tanjant vektörünün belirli bir vektör ile vektörel çarpımı olarak tanımlanır. Bu tezde  $q$ -çatının Frenet ve Bishop çatılarına göre avantajları örneklerle gösterilmiştir. Sonuç olarak; yönlü  $q$ - çatının Frenet ve Bishop çatılarına göre avantajı, eğriliğin ortadan kalktığında bile kolayca kurabilmesidir.

Bu tezin hazırlanmasında ve düzenlenmesinde benden yardımlarını esirgemeyen engin bilgi ve birikimlerinden yararlandığım, değerli zamanını ayırarak çalışmamın her aşamasında yanımda olan, sürekli yardımda bulunan çok kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Münevver YILDIRIM YILMAZ'a teşekkürlerimi sunmayı borç bilir, saygılarımı sunarım.

**Ayten ERDOĞAN DOĞAN**

ELAZIĞ, 2020

# İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ .....	iv
İÇİNDEKİLER .....	v
ÖZET .....	vi
ABSTRACT.....	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ .....	viii
SİMGELER.....	ix
<b>1. GİRİŞ.....</b>	<b>1</b>
<b>2. TEMEL KAVRAMLAR.....</b>	<b>2</b>
<b>3. MATERYAL VE METOT.....</b>	<b>7</b>
3.1. $E^3$ de q-Çatı ve Özellikleri.....	7
3.2. $E^3$ de q-Çatı ve Yönlü Bertrand Offset Eğrileri.....	12
3.3. Örnekler.....	19
<b>4. BULGULAR VE TARTIŞMA .....</b>	<b>25</b>
4.1. q- Çatı ve Uygulamaları .....	25
4.2. Yönlü İnvolut-Evolüt Eğri Çifti .....	25
4.3. Yönlü Rektifiyen Eğri ve Uygulamaları.....	26
<b>5. SONUÇLAR .....</b>	<b>30</b>
ÖNERİLER.....	31
KAYNAKLAR .....	32
ÖZGEÇMİŞ	

# ÖZET

---

## q- Çatı ve Geometrik Uygulamaları

Ayten ERDOĞAN DOĞAN

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

2020, Sayfa iv+33

---

Bu çalışmada q-çatı ve özellikleri incelenerek; q- çatının diğer bazı çatılara göre avantajları ele alınmıştır. q- çatı kullanılarak yönlü Bertrand eğri kavramı incelenmiştir.

Yönlü involüt-evolüt eğri çifti ve yönlü rektifiyen eğriler tanımlanarak özellikleri ifade edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Bertrand eğrisi, Frenet çatısı, Rektifiyen eğri, İnvolut-evolüt eğri çifti.

# ABSTRACT

---

## q- Frame And Its Geometrical Applications

Ayten ERDOĞAN DOĞAN

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY

Graduate School of Natural & Applied Sciences

Department of Mathematics

2020, Page iv+33

---

In this thesis q-frame and its properties are studied. In addition we have deal with the advantages of this frame to other ones. Directional Bertrand offset curves are examined via q- frame.

Directional involute-evolute curves and directional rectifying curves are defined and also their characterizations are given.

**Keywords:** Bertrand curves, Frenet frame, Rectifying curves, Involute- evolute curves.



# ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

---

Şekil 2.1.	AOB üçgeninde kosinüs teoremi.....	5
Şekil 3.1.	y ekseninde yönlendirilmiş q- çatısı boyunca çizgiler. quasi-normal (kesikli oklar) ve quasi-binormal (siyah) vektörler.....	10
Şekil 3.2.	Frenet çatısı, q-çatı,normal düzlem vektörleri.....	11
Şekil 3.3.	Eğri (kesikli çizgi), yönlü Bertrand çifti (siyah çizgi), quasi- normal vektörler (oklar).....	20
Şekil 3.4.	Bertrand çifti, Frenet normal vektörleri ve quasi-normal vektörler.....	21
Şekil 3.5.	Eğri, Bertrand eğri çifti, Frenet normal vektörü, Bertrand eğrisi ve quasi-normal vektörü....	23



# SİMGELER

---

$V$	: Vektör uzayı
$M$	: Yüzey
$E^3$	: 3-boyutlu Öklid uzayı
$E^n$	: n-boyutlu Öklid uzayı
$T$	: Eğrinin birim teğet vektör alanı
$N$	: Eğrinin asli normal vektör alanı
$B$	: Eğrinin binormal vektör alanı
$Z$	: Yüzeyin birim dik vektör alanı
$\chi$	: Vektör alanı
$\wedge$	: Vektörel çarpım
$\langle \cdot \rangle$	: İç çarpım
$ \cdot $	: Norm
$\wedge$	: Dış çarpım
$\kappa$	: Eğrilik
$\tau$	: Torsiyon
$\mathbb{R}^n$	: n-boyutlu vektör uzayı
$k_1$	: Birinci asli eğrilik
$k_2$	: İkinci asli eğrilik
$k_3$	: Üçüncü asli eğrilik

# 1. GİRİŞ

Eğriler konusu bilimin hemen hemen her alanında çalışma sahası bulması sebebiyle diferansiyel geometrinin en çok çalışılan konularından biridir.

Bir eğrinin pek çok özelliğini karakterize etmek için; Frenet üçlüsü ve bunların eğri boyunca değişimlerini içeren Frenet denklemleri kullanılır. Ancak Frenet çatısı uygulamada bazı dezavantajlara sahiptir. Örneğin; bu çatı eğriliğin türevinin sıfır olduğu yerlerde tanımsızdır [1]. Bu da matematikçileri uygulamalarda daha kullanışlı olan çatı arayışlarına yöneltmiştir [2]. Bu çabanın bir sonucu olarak eğriliğin sıfır olduğu bir doğru boyunca bile tanımlanabilen q- çatı olarak adlandırılan yeni bir çatı kurgulanmıştır. Bu çatı diğer çatılara göre pek çok avantaja sahiptir ve kolayca hesaplanabilir [3,4].

Diğer taraftan Frenet denklemleri ve eğrinin eğrilikleri, eğrileri sınıflandırmada kullanılan önemli bir araçtır. Eğriliklerin aldığı değerlere göre bir eğri, geodezik, çember ve helis olarak adlandırılmaktadır. Bunun yanı sıra  $E^3$ , 3 – boyutlu Öklid uzayında iki regüler eğri Frenet vektörleri arasındaki ilişki ile de sınıflandırılabilir. Eğrilerin asli normalleri lineer bağımlı ise eğriler Bertrand eğri çifti, asli normal ve binormalleri lineer bağımlı ise Mannheim eğri çifti ve teğet vektörleri dik ise involüt- evolüt eğri çifti oluştururlar. Bu eğriler farklı boyut ve özelliğe sahip pek çok uzayda tanımlanmış ve karakterize edilmiştir [5-10].

2003 yılında B. Y. Chen [11] tarafından “ Ne zaman bir eğrinin konum vektörü daima kendi rektifiyen düzleminde yatar?” probleminin çözümü ile eğriler teorisi yeni bir bakış açısına kavuşmuştur. Bir eğrinin konum vektörü kullanılarak sınıflandırılması problemi diferansiyel geometriye verimli bir çalışma sahası oluşturmuştur. Rektifiyen eğri kavramı Öklid uzayları dışında başta Minkowski 3- uzayı olmak üzere pek çok uzayda incelenmiş ve özellikler elde edilmiştir [11-13].

Bu çalışmada öncelikli olarak yönlü q- çatı kavramı ele alınarak, yönlü q- çatının diğer çatılara göre avantajlarından bahsedilmiştir. q- çatı yardımıyla tanımlanmış olan yönlü Bertrand eğri çifti incelenmiş ve özellikleri ele alınmıştır. Çeşitli örnekler yardımıyla normal Bertrand eğrisi ve yönlü Bertrand eğrisi arasındaki farklar ortaya konulmuştur. Çalışmanın son kısmında yönlü Bertrand eğrisi kavramına benzer düşünceyle yönlü involüt-evolüt eğri çifti ve yönlü rektifiyen eğri kavramları tanımlanmıştır. Bu özel eğrilerin taşıdığı özellikler araştırılmıştır.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda tezin daha iyi anlaşılmasını sağlamak amacıyla konu ile ilgili bazı temel tanımlara ve ifadelere yer verilmiştir.

**Tanım 2.1 :** Boş olmayan bir cümle  $A$  ve bir  $F$  cismi üzerinde bir vektör uzayı  $V$  olsun. Aşağıdaki üç önermeye uyan bir  $f : A \times A \rightarrow V$  fonksiyonu varsa  $A$ 'ya  $V$  ile eşlenen bir Afin uzay denir.

**A1)**  $\forall P, Q \in A$  nokta çifti için  $f(P, Q) = \alpha$  olacak şekilde bir tek  $\alpha \in V$  vektörü vardır.

**A2)**  $A$ 'da belli bir nokta seçildiğinde  $A$ 'daki geri kalan her noktaya  $V$ 'deki bir vektör karşılık gelir.

**A3)**  $\forall P$  için  $Q, R \in A$   $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$ ' dir.  $F = \mathbb{R}$ , reel sayılar cismi olarak alınması halinde afin uzaya reeldir denir [14].

**Tanım 2.2 :**  $V = \mathbb{R}^n$  standart  $n$  boyutlu reel vektör uzayıyla birleşen Afin uzay  $E^n$  ile gösterilir.  $\mathbb{R}^n$  de iç çarpım işlemi olarak Öklid iç çarpımı:

$$\langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(X, Y) \rightarrow \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \vec{X} = (x_1, \dots, x_n), \quad \vec{Y} = (y_1, \dots, y_n)$$

olarak alınırsa bu iç çarpım yardımıyla  $E^n$  de uzaklık ve metrik gibi kavramlar tanımlanabilir. Böylece  $E^n$  afin uzayı  $n$  – boyutlu Öklid uzayı adını alır.

$$\mathbb{R}^n = \{ \vec{X} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n \} [14].$$

**Tanım 2.3 :** Bir  $n$ - boyutlu reel iç çarpım uzayı  $\mathbb{R}^n$  ile birleşen  $E^n$  Öklid uzayında sıralı bir  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  nokta  $n$ -lisi için eğer  $\{\overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n}\}$  vektör sistemi  $\mathbb{R}^n$  in bir ortonormal bazı ise  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  çatısına bir dik çatı veya Öklid çatısı denir. Böylece bir çatıda tanımlanan  $\{x_1, \dots, x_n\}$  sistemine afin koordinat sistemi veya Öklid koordinat sistemi denir [14].

**Tanım 2.4 :**  $E^n$  uzayında  $E_0 = (0, 0, \dots, 0)$ ,  $E_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $E_n = (0, 0, \dots, 1)$  noktaları bir dik çatı oluştururlar.  $E^n$  uzayında  $\{E_0, E_1, \dots, E_n\}$  çatısına Öklid çatısı denir [14].

**Tanım 2.5 :**  $I \subset \mathbb{R}$  olmak üzere  $\alpha : I \xrightarrow{C^\infty} E^n$  fonksiyonuna  $E^n$  de eğri denir [15].

**Tanım 2.6 :**  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eğrisi verilsin.

$\forall t \in I$  için  $\alpha'(t) \neq 0$  ise  $\alpha$  eğrisine (regüler eğri) denir [16].

**Tanım 2.7 :**  $M \subset E^3$  eğrisi  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilsin.  $\forall t \in I$  için  $\alpha(t)$  noktasındaki Frenet 3 ayaklısı;

$$T(t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \alpha'(t)$$

$$N(t) = B(t) \times T(t)$$

$$B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}$$

şeklindedir [15].

**Tanım 2.8 :**  $\alpha: I \rightarrow E^3$  birim hızlı eğri olmak üzere  $\forall s \in I$  için  $\alpha(s)$  noktasındaki Frenet 3 ayaklısı;

$$T(s) = \alpha'(s)$$

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \frac{1}{K(s)} T'(s)$$

$$B(s) = \frac{\alpha'(s) \times \alpha''(s)}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|}$$

şeklindedir [15].

**Tanım 2.9 :**  $E^3$  uzayında birim hızlı  $\alpha: I \rightarrow E^3$  eğrisi için;

$$N(s) = \frac{1}{K(s)} T'(s)$$

eğriliği ile belirli  $N(s)$  vektörüne  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki birinci dik vektörü (asli normali) denir.  $N$  vektör alanına  $\alpha$  eğrisinin birinci dik vektör alanı (asli normal vektör alanı) denir [16].

**Tanım 2.10 :**  $E^3$  uzayındaki birim hızlı  $\alpha: I \rightarrow E^3$  eğrisi için;

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

eşitliği ile tanımlı  $B(s)$  vektörüne  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki ikinci dik vektörü (binormali) denir [16].

**Tanım 2.11 :**  $E^3$  uzayındaki birim hızlı  $\alpha: I \rightarrow E^3$  eğrisi için

$$\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \rightarrow \kappa(s) = \|T'(s)\|$$

fonksiyonuna  $\alpha$  eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir.  $\kappa(s)$  sayısına eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki eğriliği denir [16].

**Tanım 2.12 :** Birim hızlı  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eğrisinin Frenet vektör alanları  $\{T, N, B\}$  olmak üzere;

$$\tau: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \rightarrow \tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle$$

fonksiyonuna,  $\alpha$  eğrisinin burulma (torsiyon) fonksiyonu denir.  $\tau(s)$  sayısına eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki burulması (torsiyonu) denir [16].

**Tanım 2.13 :**  $M, (I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilmiş bir eğri olsun.

$\forall s \in I$  için;

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

ise  $M$  eğrisine birim hızlı eğri denir.  $s \in I$ 'ya da yay parametresi adı verilir [15].

**Tanım 2.14 :**  $M \subset E^n$  eğrisi,

$$\alpha: I \rightarrow E^n \text{ ve } s \rightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \dots, \alpha_n(s))$$

şeklinde verilsin. Bu durumda;

$$\psi = \{\alpha'(s), \alpha''(s), \dots, \alpha^{(r)}(s)\} \text{ sistemi lineer bağımsız ve}$$

$$\forall \alpha^{(k)}, k > r \text{ için } \alpha^{(k)} \in S_p \{\psi\}$$

olmak üzere  $\psi$  den elde edilen  $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$  ortonormal sistemine eğrinin Frenet çatısı ve  $m \in M$  için  $\{V_1(m), \dots, V_r(m)\}$  sistemine ise  $m \in M$  noktasındaki Frenet çatısı denir. Burada  $V_i, 1 \leq i \leq r$ 'ye Frenet vektörü adı verilir [14].

**Tanım 2.15 :**  $M, N \subset E^n$  iki eğri olsun.  $M$  ve  $N$  sırasıyla  $(I, \alpha), (I, \beta)$  koordinat komşulukları ile verilsin.  $\alpha(s)$  ve  $\beta(s)$  noktalarında  $M$  ve  $N$ 'nin Frenet  $r$ -ayaklıları sırasıyla,

$$\{V_1(s), \dots, V_r(s)\} \text{ ve } \{V_1^*(s), \dots, V_r^*(s)\}$$

olmak üzere,

$$\langle V_1(s), V_1^*(s) \rangle = 0$$

ise  $N$ 'ye  $M$ 'nin involütü,  $M$ 'ye de  $N$ 'nin evolütü denir [14].

**Tanım 2.16 :**  $M, N \subset \mathbb{R}^n$  eğrileri, sırasıyla;  $(I, \alpha), (I, \beta)$  koordinat komşulukları ile verilsin.  $s \in I$ 'ya karşılık gelen  $\alpha(s) \in M$  ve  $\beta(s) \in N$  noktalarında,  $M$  ve  $N$ 'nin

$$\{V_1(s), \dots, V_r(s)\} \text{ ve } \{V_1^*(s), \dots, V_r^*(s)\}$$

Frenet r-ayaklıları verildiğinde  $\forall s \in I$  için  $\{V_2(s), V_2^*(s)\}$  lineer bağımlı ise (M,N) eğri ikilisine bir Bertrand çifti denir [14].

**Tanım 2.17 :**  $\alpha: I \rightarrow E^3$  birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları  $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$  olsun.

- (i)  $\{\vec{T}, \vec{N}\}$  nin gerdiği düzleme  $\alpha(s)$  noktasındaki “oskulator düzlem”,
- (ii)  $\{\vec{T}, \vec{B}\}$  nin gerdiği düzleme  $\alpha(s)$  noktasındaki “rektifiyen düzlem”,
- (iii)  $\{\vec{N}, \vec{B}\}$  nin gerdiği düzleme  $\alpha(s)$  noktasındaki “normal düzlem” denir [16].

**Tanım 2.18 :** T teğet ve B binormal vektör alanı olmak üzere, Öklid 3- uzayında yer vektörü, eğrinin T teğet ve B binormal vektör alanları tarafından gerilen rektifiyen düzleminde yatan eğriye rektifiyen eğri denir.

Buna göre  $E^3$  teki rektifiyen eğrinin seçilmiş bir orijine göre yer vektörü:

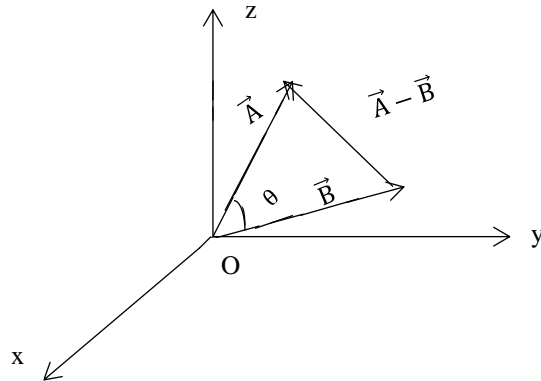
$$\alpha(s) = \lambda(s)\vec{T}(s) + \mu(s)\vec{B}(s)$$

denklemini sağlar.

Burada  $\lambda(s)$  ve  $\mu(s)$ ,  $s \in I \subset \mathbb{R}$ , yay uzunluğu parametresi için keyfi diferensiyellenebilir fonksiyonlardır [14].

**Tanım 2.19 :**

Şekil 2.1’de AOB üçgenine ait şekil verilmiştir.



**Şekil 2.1.** AOB üçgeninde kosinüs teoremi [7].

Şekil 2.1.'den;

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos \theta$$

dır. Vektör özelliklerini kullanarak OAB üçgenine kosinüs teoremi uygulanırsa,

$$\|\vec{BA}\|^2 = \|\vec{OA}\|^2 + \|\vec{OB}\|^2 - 2\|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\| \cos \theta$$

yazılır. Burada;

$$\vec{BA} = \vec{A} - \vec{B}, \quad \vec{OA} = \vec{A}, \quad \vec{OB} = \vec{B}$$

olduğu dikkate alınır,

$$\|\vec{A} - \vec{B}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 - 2\|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos \theta \quad (2.1)$$

elde edilir. Skaler çarpımın özelliklerinden dolayı,

$$\begin{aligned} \|\vec{A} - \vec{B}\|^2 &= (\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B}) \\ &= \vec{A} \cdot \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{B} \\ &= \|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 - 2\vec{A} \cdot \vec{B} \end{aligned} \quad (2.2)$$

(2.1) ve (2.2) eşitliklerden;

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos \theta$$

eşitliği elde edilir.

Burada  $\|\vec{B}\| \cdot \cos \theta$  ifadesine  $\|\vec{B}\|$  nun  $\vec{A}$  vektörü üzerine dik izdüşümü adı verilir. Bu aynı zamanda  $\vec{B}$  vektörünün  $\vec{A}$  vektörü üzerindeki izdüşüm vektörünün bileşenine denir [17].

**Tanım 2.20 :**  $E^3$  Öklid uzayında birim hızlı  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$  eğrisinin teğet vektör alanı  $T$  olsun. Eğri boyunca;

$$\langle T, N_1 \rangle = \langle T, N_2 \rangle = \langle N_1, N_2 \rangle = 0$$

şartını sağlayan vektör alanları;

$$N_1 \wedge N_2 = T \wedge N_1$$

olmak üzere  $T, N_1, N_2$  vektör alanları hareketli  $\alpha$  eğrisi boyunca ortonormal bir çatı oluşturur. Bu  $\{T, N_1, N_2\}$  çatısına Bishop çatısı denir [2].



### 3. MATERYAL VE METOT

Bu çalışmada temel olarak Dede M., Ekici C., Güven Arslan İ.'nin "Directional Bertrand Curves" [3] isimli çalışması ve Dede M., Ekici C. ve Görgülü A.'nın "Directional q- frame along q space curve" [4] isimli makaleleri incelenmiştir.

Temel kavramlar ve tanımlar için Hacısalihoğlu H. H.'ye ait " Dif. Geo I ", " Dif. Geo II " ve Sabuncuoğlu A.'ya ait "Diferensiyel Geometri" kitaplarıyla çalışılmıştır [14-16].

İnvolut ve evolüt eğri çifti ile ilgili olarak [5-10] numaralı makaleler incelenmiştir.

[11] numaralı çalışma yukarıda Chen B. Y.'nin rektifiyen eğriyi tanımladığı çalışmadır. Ayrıca rektifiyen eğrinin başka uzaylardaki karşılıkları [11-13] numaralı kaynaklarda verilmiştir.

Bu çalışmada yukarıda belirtilen çalışmaların ışığı altında benzer metot ve yaklaşım kullanılarak,  $E^3$  de q- çatı yardımıyla yönlü involüt ve evolüt eğri çifti ve yönlü rektifiyen eğri tanımlanmıştır ve bazı karakterizasyonlarına yer verilmiştir.

#### 3.1. $E^3$ de q-Çatı ve Özellikleri

Regüler bir  $\alpha(t)$  eğrisinin regüler q- çatısı;

$$t = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, n_q = \frac{t \wedge k}{\|t \wedge k\|}, b_q = t \wedge n_q \quad (3.1)$$

ile verilir. Burada k izdüşüm vektörüdür. Regüler bir  $\alpha(t)$  eğrisinin yönlü q- çatısı aşağıdaki varyasyon denklemlerine sahiptir [4].

$$\begin{bmatrix} t' \\ n'_q \\ b'_q \end{bmatrix} = \|\alpha'\| \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & k_3 \\ -k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Burada q- eğrilikleri aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$k_1 = \frac{\langle t', n_q \rangle}{\|\alpha'\|}, k_2 = \frac{\langle t', b_q \rangle}{\|\alpha'\|}, k_3 = -\frac{\langle n_q, b'_q \rangle}{\|\alpha'\|} \quad (3.3)$$

Bu bölümde, yönlü q-çatısını kullanarak uzay eğrilerinin lokal teorisi ve  $R^3$  te Öklidiyen hareket altında q- eğriliklerinin değişmezleri incelenecektir.

**Teorem 3.1 :**  $\alpha(t)$  regüler bir eğri olsun.  $q$  –eğrilikleri;

$$k_1 = \frac{\det[\alpha'', \alpha', k]}{\|\alpha'\|^2 \|\alpha' \wedge k\|}, k_2 = \frac{\langle \alpha', k \rangle \langle \alpha'', \alpha' \rangle - \|\alpha'\|^2 \langle \alpha'', k \rangle}{\|\alpha'\|^3 \|\alpha' \wedge k\|} \text{ ve}$$

$$k_3 = \frac{\langle \alpha', k \rangle \det[\alpha', \alpha'', k]}{\|\alpha' \wedge k\|^2 \|\alpha'\|^2}$$

olarak verilir [4].

**İspat:** Denklem 3.1 kullanılarak;  $\alpha'(t) = \|\alpha'\| t$  yazılır. Türev alıp denklem 3.2 yerine yazılırsa;

$$\alpha''(s) = \|\alpha'\| t + \|\alpha'\|^2 k_1 n_q + \|\alpha'\|^2 k_2 b_q \text{ olur.}$$

Diğer yandan denklem 3.1'den;

$$\alpha' \wedge k = \|\alpha' \wedge k\|^2 n_q$$

böylece yukarıdaki denklemlerle birlikte;

$$\langle \alpha''(s), \alpha' \wedge k \rangle = \|\alpha' \wedge k\| \|\alpha'\|^2 k_1 \text{ olur.}$$

Böylece ;

$$k_3 = \frac{\det[\alpha'', \alpha', k]}{\|\alpha'\|^2 \|\alpha' \wedge k\|}$$

bulunur.

$t$  tanjant vektörünün türevi alınır;

$$t' = \frac{\alpha'' \|\alpha'\| - \alpha' \|\alpha'\|'}{\|\alpha'\|^2} \quad (3.4)$$

Denklem 3.1 ve denklem 3.4, 3.3 denkleminde yerine yazılırsa;

$$k_2 = \frac{1}{\|\alpha'\|^3} \langle \alpha'', \alpha' \wedge \frac{\alpha' \wedge k}{\|\alpha' \wedge k\|} \rangle$$

Lagrange formülünde denklemini yazılırsa;

$$k_2 = \frac{\langle \alpha' \wedge k \rangle \langle \alpha'', \alpha' \rangle - \|\alpha'\|^2 \langle \alpha'', k \rangle}{\|\alpha'\|^3 \|\alpha' \wedge k\|}$$

benzer şekilde;

$$k_3 = \frac{\langle \alpha' \wedge k \rangle \det[\alpha', \alpha'', k]}{\|\alpha' \wedge k\|^2 \|\alpha'\|^2}$$

elde edilir.

**Sonuç 3.1 :**  $k_1, k_2$  ve  $k_3$  ; q- eğriliklerinin k izdüşüm vektörüne bağlı olduğunu göstermek kolaydır; bu nedenle aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz [4].

**Teorem 3.2:**  $\alpha$  regüler eğrisi, k izdüşüm vektörü ile verilsin ve q- eğrilikleri  $k_1, k_2, k_3$  olsun.

F:  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  lineer A kısmı ile birlikte bir Öklidiyen hareket olsun.

Eğer  $\gamma = F\alpha$  eğrisi  $k^* = A_k$  şeklinde yeni bir izdüşüm vektörüne sahip ise q- eğrilikleri Öklidiyen hareket altında değişmez kalır.

**İspat:**  $\gamma$  eğrisini  $k_1^*, k_2^*$  ve  $k_3^*$  olacak şekilde  $\gamma(t) = A \alpha(t) + F(0)$  olarak yazılırsa ve denklemin türevi alınırsa;

$$\gamma'(t) = A \alpha'(t) \text{ ve } \gamma''(t) = A \alpha''(t) \text{ olur.}$$

Bundan dolayı denklem 3.3'ten;

$$k_1^* = \frac{\det[\gamma'', \gamma', k^*]}{\|\gamma'\|^2 \|\gamma' \wedge k^*\|} = \frac{\det[A\alpha'', A\alpha', Ak]}{\|A\alpha'\|^2 \|A\alpha' \wedge Ak\|} \quad (3.5)$$

Diğer yandan;

$$\|A\alpha'\| = \|\alpha'\|, \|Ak\| = \|k\|, \|A\alpha' \wedge Ak\| = \|\alpha' \wedge k\|$$

olduğunu göstermek kolaydır.

Bunlar denklem 3.5'te yerine yazılırsa;

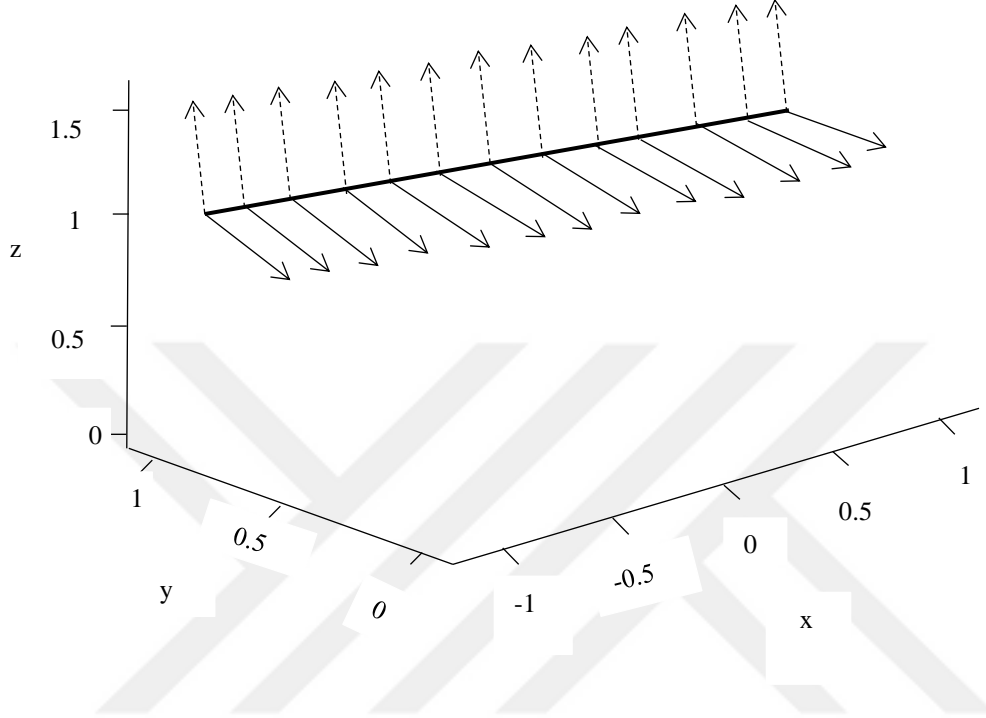
$$k_1^* = \frac{\det[\alpha'', \alpha', k]}{\|\alpha'\|^2 \|\alpha' \wedge k\|} = k_1$$

Diğer q- eğriliklerinden  $k_2^*$  ve  $k_3^*$  benzer metotla elde edilir. Yönlü q- çatısının Öklidiyen invaryantı olması için projeksiyon vektörünün k ve Öklid hareketinin ekseninin aynı olması gerekir. Böylece q-çatısı 3'e ayrılır: z eksenini, y eksenini, x eksenini. Yönlü q-çatısı sırasıyla  $\{t, n_q, b_q, k_z\}$ ,  $\{t, n_q, b_q, k_y\}$  ve  $\{t, n_q, b_q, k_x\}$  olarak ele alınır buradan; projeksiyon vektörleri sırasıyla  $k_z = (0,0,1)$ ,  $k_y = (0,1,0)$  ve  $k_x = (1,0,0)$ 'dir [4].

**Örnek 3.1.** : Şimdi  $\alpha(t) = (t,1,1)$  ile parametrelendirilmiş eğriyi (doğruyu) ele alalım.

Yönlü q- çatı aşağıdaki gibi elde edilir:  $t = (1,0,0)$ ,  $n_q = (0,0,1)$  ve  $b_q = (0,-1,0)$  ile  $k_y = (0,1,0)$

y eksenine yönlü q- çatı Şekil 3.1.'de gösterilmiştir [4].



**Şekil 3.1.** y ekseninde yönlendirilmiş q- çatısı boyunca çizgiler. quasi-normal (kesikli oklar) ve quasi-binormal (siyah) vektörlerle gösterildi [4].

**Örnek 3.2.** : Şekil 3.2.'deki  $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t^3)$  eğrisi düşünülürse; z eksenindeki yönlü q-çatı aşağıdaki gibidir:

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 + 9t^4}} (-\sin(t), \cos(t), 3t^2)$$

$$n_q = (\cos(t), \sin(t), 0)$$

$$b_q = \frac{1}{\sqrt{1 + 9t^2}} (-3t^2 \sin(t), -3t^2 \cos(t), -\sqrt{1 + 9t^2})$$

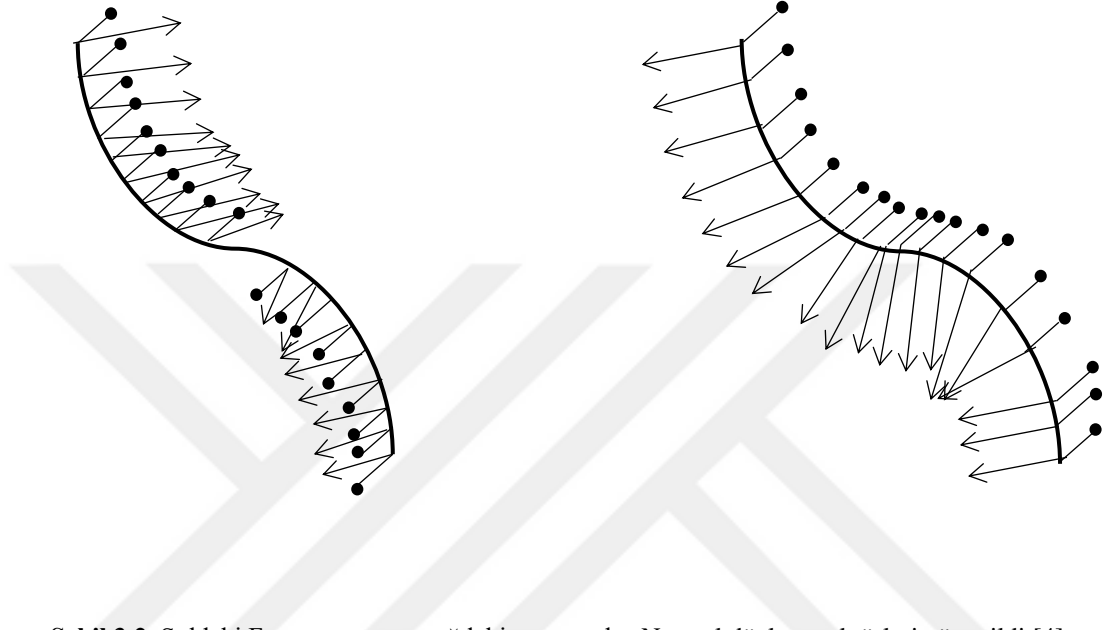
$$k_z = (0,0,1) \text{ dir.}$$

Denklem 3.3'ten q-eğrilikleri:

$$k_1 = -\frac{1}{\sqrt{1+9t^4}}, k_2 = -\frac{6t}{1+9t^2}, k_3 = \frac{3t^2}{\sqrt{1+9t^4}}$$

olarak elde edilir.

Şekil 3.2.'de  $\alpha(t)$  eğrisi boyunca Frenet çatısını ve z eksenli q- çatı vektörlerinin eğri boyunca karşılaştırılması verilmiştir [4].



Şekil 3.2. Soldaki Frenet çatısı ve sağdaki q- çatısıdır. Normal düzlem vektörleri gösterildi [4].

$\alpha(s)$ ,  $s$  yay uzunluğu parametresine sahip bir eğri olsun. Bu eğri boyunca  $\{t, n_q, b_q, k\}$  q- çatısı aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$t = \alpha', n_q = \frac{t \wedge k}{\|t \wedge k\|}, b_q = t \wedge n_q \quad (3.6)$$

Burada  $t$  birim teğet vektör,  $n_q$  quasi-normal vektör,  $b_q$  quasi-binormal vektör ve  $k$ 'da izdüşüm vektörüdür.

q-çatı  $t$  ve  $k$ 'nın paralel olduğu durumlarda singülerdir. Bu tip durumlarda  $k$  izdüşüm vektörünü hesaplama kolaylığı açısından  $k = (0,0,1)$  olarak seçilecektir [3].

q çatısının varyasyon denklemleri;

$$\begin{bmatrix} t' \\ n'_q \\ b'_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & k_3 \\ -k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Burada  $\theta$ ,  $n$  asli normal vektör ve quasi-normal vektör arasındaki açı olmak üzere;

q -eğrilikleri aşağıdaki gibi ifade edilir [3]:

$$k_1 = \kappa \cos \theta = \langle t', n_q \rangle$$

$$k_2 = -\kappa \sin \theta = \langle t', b_q \rangle$$

$$k_3 = d\theta + \tau = \langle n_q, b'_q \rangle \quad (3.8)$$

### 3.2. $E^3$ de q- Çatı ve Yönlü Bertrand Offset Eğrileri

Bu kısımda, Öklid 3- uzayda yönlü Bertrand eğrileri tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir [18].

**Tanım 3.1 :**  $\alpha(s)$ ,  $E^3$  3- boyutlu Öklid uzayında yay parametresi s olan bir eğri ve bu uzayda yay parametresi  $s_1$  olan bir diğer eğri de  $\beta(s_1)$  olsun. Bu eğrilerin q- çatıları da sırasıyla  $\{t, n_q, b_q\}$  ve  $\{t^\lambda, n_q^\lambda, b_q^\lambda\}$  olarak verilsin.

Eğer  $\{\alpha, \beta\}$  eğri çifti için karşılık gelen noktalarda asli quasi-normalleri ortak olacak şekilde birebir eşleme varsa, bu eğri çifti yönlü Bertrand çifti olarak adlandırılır [3].

#### Teorem 3.3:

$\alpha(s)$  uzayda bir eğri ve yay parametresi s olsun. Eğer;  $s_1$  yay parametresi olmak üzere  $\beta(s_1)$ ,  $\alpha(s)$  eğrisinin yönlü Bertrand çifti ise aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (a) Yönlü Bertrand çiftlerinin karşılık gelen noktaları arasındaki uzaklık sabittir.
- (b) Eğer  $k_3=0$  ise, yönlü Bertrand çiftlerinin karşılık gelen noktalardaki teğet vektörleri arasındaki açı sabittir [3].

#### İspat:

- (a)  $\alpha$  ve  $\beta$ , q- çatıları sırasıyla  $\{t, n_q, b_q\}$  ve  $\{t^\lambda, n_q^\lambda, b_q^\lambda\}$  olan iki eğri olsun.  $\alpha$  ve  $\beta$ 'nin yer vektörleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir [3]:

$$\beta(s_1) = \alpha(s) + \lambda n_q(s) \quad (3.9)$$

$$\frac{d\beta}{ds_1} \frac{ds_1}{ds} = \alpha'(s) + \lambda' n_q(s) + n'_q \lambda$$

$$n'_q = (-k_1 t + k_3 b_q)$$

$$t^\lambda \frac{ds_1}{ds} = t + \lambda' n_q(s) + \lambda(-k_1 t + k_3 b_q) \quad (3.10)$$

$n'_q$  denklemi 3.10 denkleminde yerine yazılırsa;

$$t^\lambda \frac{ds_1}{ds} = t + \lambda' n_q(s) - \lambda k_1 t + \lambda k_3 b_q$$

$$t^\lambda \frac{ds_1}{ds} = t(1 - \lambda k_1) + \lambda' n_q(s) + \lambda k_3 b_q \quad (3.11)$$

Denklem 3.11  $n_q$  ile iç çarpıma tabi tutulursa;

$$\langle t^\lambda, n_q \rangle = (1 - \lambda k_1) \langle t, n_q \rangle + \lambda' \langle n_q, n_q \rangle + \lambda k_3 \langle n_q, b_q \rangle$$

$$\langle t, n_q \rangle = \langle n_q, b_q \rangle = 0 \text{ ve } \langle n_q, n_q \rangle = 1 \text{ olduğundan;}$$

$$0 = \lambda'$$

Buradan;  $\lambda'$ 'nin sabit olduğu sonucuna ulaşılır.

$$\| \beta(s_1) - \alpha(s) \| = \lambda$$

olduğundan ispat tamamlanır [3].

(a) Eğer  $k_3=0$  ise; yönlü Bertrand çiftlerinin karşılık gelen noktalarındaki teğet vektörleri arasındaki açı sabittir [3].

$$t^\lambda \frac{ds_1}{ds} = t(1 - \lambda k_1) + \lambda' n_q(s) + \lambda k_3 b_q$$

$$\lambda' = 0 \text{ olduğundan;}$$

$$\| t^\lambda \frac{ds_1}{ds} \| = \| t(1 - \lambda k_1) + \lambda k_3 b_q \|^2$$

$$\| t^\lambda \| = 1 \text{ ve } b_q^2 = 1 \text{ olduğundan;}$$

Denklem 3.10 ve denklem 3.11'den ;

$$\frac{ds_1}{ds} = \sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2} \quad (3.12)$$

Denklem 3.12 denklemi 3.10 denkleminde yerine yazılırsa;

$$\frac{t^\lambda \cdot \sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} = \frac{t(1 - \lambda k_1) + \lambda k_3 b_q}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}}$$

$$t^\lambda = \mp \frac{t(1 - \lambda k_1) + \lambda k_3 b_q}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} \quad (3.13)$$

elde edilir.

Aradaki açığı bulmak için  $t$  ile iç çarpıma tabi tutulursa;

$$\langle t^\lambda, t \rangle = \mp \frac{\langle t(1 - \lambda k_1) + \lambda k_3 b_q, t \rangle}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}}$$

$$\langle t^\lambda, t \rangle = \cos \varphi \quad (3.14)$$

$$\cos \varphi = \frac{\langle (1 - \lambda k_1) + \lambda k_3 b_q, t \rangle}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}}$$

$\langle b_q, t \rangle = 0$  olduğundan;

$$\cos \varphi = \mp \frac{(1 - \lambda k_1)}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} \quad (3.15)$$

Eğer  $k_3 = 0$  'sa sabit tanjant vektörleri arasındaki açı  $\varphi$  ise

$\cos \varphi = \mp 1$  'dir [3].

**Teorem 3.4 :**

$\alpha(s)$  bir uzay eğrisi ve yay parametresi  $s$  olsun. Eğer  $\beta(s_1)$  eğrisi,  $\alpha(s)$  eğrisinin yönlü Bertrand çifti ise  $\alpha$  ve  $\beta$  eğrilerinin arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir [3]:

$$\begin{bmatrix} t^\lambda \\ n_q^\lambda \\ b_q^\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm \frac{(1-\lambda k_1)}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} & 0 & \pm \frac{\lambda k_3}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} \\ -k_1 & \pm 1 & k_3 \\ \pm \frac{\lambda k_3}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} & 0 & \pm \frac{(1-\lambda k_1)}{\sqrt{(1-\lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

**İspat:** Denklem 3.6 ve 3.3 denkleminde:

$$t^\lambda \wedge k = \frac{t(1 - \lambda k_1) + \lambda k_3 b_q}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} \wedge k$$

$$n_q = \frac{t \wedge k}{\| t \wedge k \|}$$

$$t^\lambda \wedge k = \frac{t \wedge k(1 - \lambda k_1) + \lambda k_3 b_q \wedge k}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}}$$

olur. Diğer yandan;  $k = (0,0,1)$  ve Lagrange Özdeşliğinden;

$$\| a \wedge b \| = \sqrt{(\| a \|^2 \| b \|^2 - \| a \cdot b \|^2)}$$

$$\| t \wedge k \| = \sqrt{(\| t \|^2 \| k \|^2 - \| t \cdot k \|^2)}$$



$$= \sqrt{1 - \langle t, k \rangle^2} \quad (3.17)$$

$\langle t, k \rangle = \mu$  denirse;

$$t^\lambda \wedge k = \frac{\sqrt{1 - \mu^2}(1 - \lambda k_1)n_q + \lambda k_3 b_q \wedge k}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}}$$

$b_q \wedge k = n_q$  yerine yazılırsa [3]:

$$t^\lambda \wedge k = \frac{\sqrt{1 - \mu^2}(1 - \lambda k_1)n_q + \lambda k_3 n_q}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}}$$

$$t^\lambda \wedge k = \frac{\sqrt{1 - \mu^2}((1 - \lambda k_1) + \lambda k_3)n_q}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}}$$

quasi- normal vektör;

$$n_q^\lambda = \frac{t \wedge k}{\|t \wedge k\|} = \mp n_q \quad (3.18)$$

$t^\lambda$  birim teğet,  $k = (1,0,0)$  ve  $t^\lambda \wedge k$  her ikisine de dik olan 3. vektörü verir, o da  $n^\lambda$  olur ve  $n_q^\lambda$  ya eşit olur.

$n_q^\lambda = \mp n_q$  dur.

$$\frac{t^\lambda \wedge k \sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}}{\sqrt{1 - \mu^2}((1 - \lambda k_1) + \lambda k_3)} = \frac{\sqrt{1 - \mu^2}((1 - \lambda k_1) + \lambda k_3)n_q}{\sqrt{1 - \mu^2}((1 - \lambda k_1) + \lambda k_3)}$$

$$b_q = t \wedge n_q$$

$$\begin{aligned} b_q^\lambda = t^\lambda \wedge n_q^\lambda &= \frac{t \cdot (1 - \lambda k_1) + \lambda k_3}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} b_q \wedge n_q^\lambda \\ &= \frac{(1 - \lambda k_1)(t \wedge n_q^\lambda) + \lambda k_3 (b_q \wedge n_q^\lambda)}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} \end{aligned}$$

$n_q^\lambda$  quasi-normal vektörü;

$$n_q^\lambda = \frac{t^\lambda \wedge k}{\|t^\lambda \wedge k\|} = n_q$$

şeklinindedir. Yukarıdaki denklemlerden  $\alpha$  ve  $\beta$  yönlü Bertrand quasi-normalleri olan  $n_q$  ve  $n_q^\lambda$  nın daima lineer bağımlı olduğu görülür.

Denklem 3.6 ve 3.13 denkleminde  $\beta(s_1)$ 'in quasi- binormali:

$$b_q^\lambda = \frac{(1 - \lambda k_1)b_q + \lambda k_3(-t)}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} \quad (3.19)$$

olarak elde edilir [3].

**Sonuç 3.2 :** Denklem 3.18'den her uzay eğrisinin sonsuz yönlü Bertrand eğri çiftine sahip olduğu görülür [3].

**Teorem 3.5 :**  $\alpha(s)$  bir eğrinin yönlü Bertrand eğrileri  $\alpha(s)$  ve  $\beta(s_1)$  arasındaki ilişki:

$$k_1^\lambda = \pm \frac{(1 - \lambda k_1)k_1 - \lambda k_3^2}{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}$$

$$k_2^\lambda = \pm \frac{\lambda}{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2} + k_2$$

dir. Burada  $k_1^\lambda$ ,  $k_2^\lambda$  ve  $k_3^\lambda$ ;  $\beta(s_1)$  eğrisinin q- eğrilikleridir [3].

**İspat:** Denklem 3.9 ve 3.10 denklemlerinden  $t^\lambda$  ve  $b_q^\lambda$  denklemleri sırasıyla ;

$$t^\lambda = \cos\varphi t + \sin\varphi b_q \quad (3.20)$$

$$b_q^\lambda = -\sin\varphi t + \cos\varphi b_q \quad (3.21)$$

$$\sin\varphi = \pm \frac{\lambda k_3}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} \quad (3.22)$$

Denklem 3.19'un  $s_1$  e göre türevi alınıp; denklem 3.7 ve 3.12 denklemlerinde yerine yazılırsa;

$$t^{\lambda'} \frac{ds_1}{ds} = \frac{-\sin\varphi(d\varphi + k_2)t + n_q(\cos\varphi k_1 - \sin\varphi k_3) + b_q \cos\varphi(k_2 + d\varphi)}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}}$$

Denklem 3.3'ten;

$$k_1^\lambda = \langle t^{\lambda'} \frac{ds_1}{ds}, n_q^\lambda \rangle = (t(1 - \lambda k_1) + \lambda' n_q(s) + \lambda k_3 b_q)' + \frac{(\cos\varphi k_1 - \sin\varphi k_3)}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} \frac{ds_1}{ds}$$

$$k_1^\lambda = \frac{(\cos\varphi k_1 - \sin\varphi k_3)}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}}$$

$$k_1^\lambda = \mp \frac{(\cos\varphi k_1 - \sin\varphi k_3)}{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}$$

$$k_2^\lambda = \langle t^{\lambda'} \frac{ds_1}{ds}, b_q^\lambda \rangle$$

$$= \langle \frac{(-\sin\varphi d\varphi - \sin\varphi k_2)t + (\cos\varphi k_1 - \sin\varphi k_3)n_q + (\cos\varphi d\varphi k_2 + \cos\varphi d\varphi)b_q}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}}, \frac{(1 - \lambda k_1)b_q - \lambda k_3 t}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} \rangle$$

$b_q^\lambda$  y1 denklem 3.19 kullanıp yerine yazılırsa;

$$k_2^\lambda = \frac{(1 - \lambda k_1)\cos\varphi d\varphi k_2 \langle b_q, b_q \rangle + \sin\varphi(d\varphi + k_2) + \lambda k_3 \langle t, t \rangle}{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}$$

$\langle b_q, b_q \rangle = 1$  ve  $\langle t, t \rangle = 1$  olduğundan;

$$k_2^\lambda = \mp \frac{(1 - \lambda k_1)\cos\varphi d\varphi k_2 + \sin\varphi(d\varphi + k_2) + \lambda k_3}{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2} \quad (3.23)$$

$$k_2^\lambda = - \langle n_q^\lambda, b_q^\lambda \rangle$$

$$= - \langle n_q^\lambda, \mp \left( \frac{(1 - \lambda k_1)b_q - \lambda k_3 t}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} \right)' \rangle$$

$$= -\langle n_q^\lambda \frac{(1 - \lambda k_1) b'_q - \lambda k_3 t'}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} \rangle$$

$$b'_q = -k_2 - k_3 n_q \text{ ve } t' = k_1 n_q + k_2 b_q$$

$$= -\langle n_q^\lambda \frac{(1 - \lambda k_1)(-k_2 - k_3 n_q) - \lambda k_3(k_1 n_q + k_2 b_q)}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} \rangle$$

$$= -\langle n_q \frac{ds_1}{ds} \frac{(1 - \lambda k_1)(-k_2 - k_3 n_q) - \lambda k_3(k_1 n_q + k_2 b_q)}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} \rangle$$

$$= \langle \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}}, \frac{(1 - \lambda k_1)(-k_2 - k_3 n_q) - \lambda k_3(k_1 n_q + k_2 b_q)}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} \rangle$$

$$= -\left( \frac{-k_3 \langle n_q, n_q \rangle}{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2} \right) = \mp \frac{k_3}{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}$$

diğer yandan ;

$$\sin \varphi = \frac{\lambda k_3}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{(1 - \lambda k_1)}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}}$$

ifadeler oranlanırsa;

$$\tan \varphi = \frac{\lambda k_3}{(1 - \lambda k_1)}$$

olur. Denklemın türevi alınırsa;

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{\lambda k'_3 (1 - \lambda k_1) + \lambda^2 k'_1 k_3}{(1 - \lambda k_1)^2}$$

$$d\varphi = \frac{\lambda k'_3 (1 - \lambda k_1) \lambda^2 k'_1 k_3}{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}$$

Denklem 3.22'de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
k_2^\lambda &= (1 - \lambda k_1) \frac{(1 - \lambda k_1)}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} \frac{\lambda k_3' (1 - \lambda k_1) + \lambda^2 k_1' k_3}{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2} k_2 + \frac{\lambda k_3}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} \frac{\lambda k_3' (1 - \lambda k_1) + \lambda^2 k_1' k_3}{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2} \\
&= \frac{\lambda k_3' (1 - \lambda k_1) + \lambda^2 k_1' k_3}{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2} \left( \frac{(1 - \lambda k_1)^2}{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2} k_2 + \frac{\lambda k_3}{\sqrt{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2}} k_3 \right) \\
k_2^\lambda &= \frac{\lambda k_3' (1 - \lambda k_1) + \lambda^2 k_1' k_3}{(1 - \lambda k_1)^2 + \lambda^2 k_3^2} + k_2
\end{aligned}$$

olur. Bu da ispatı tamamlar [3].

### 3.3. Örnekler

Bu kısımda, birkaç örnekle yeni yöntemin avantajları gösterildi.

**Örnek 3.3.** : Bu örnekte;  $\alpha(t) = (t, t, t)$  olarak parametrelendirilen yönlü Bertrand çifti elde edilmiştir. (Şekil 3.3.)

q- çatıdan aşağıdaki doğru elde edilir [3].

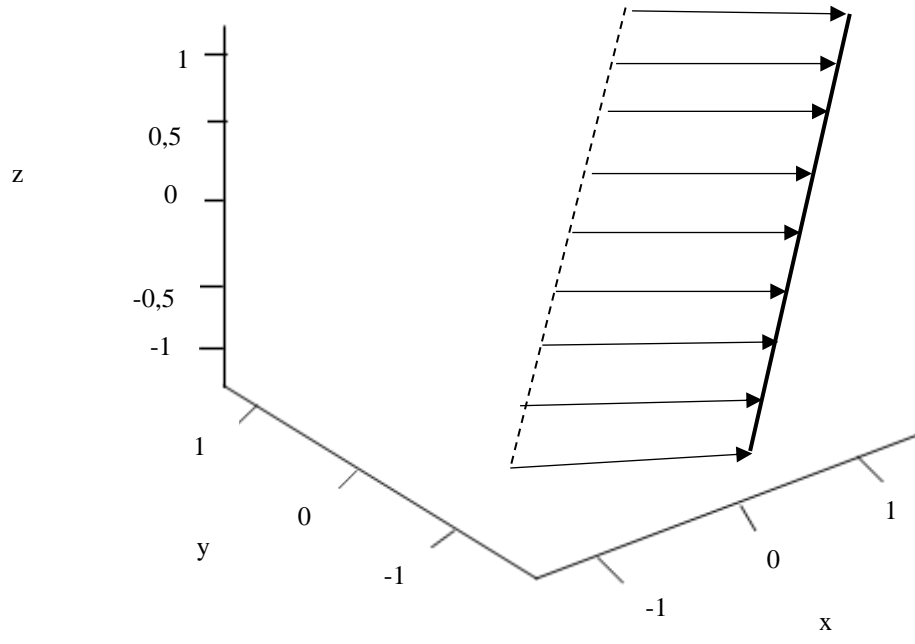
$$t = \left( \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

$k = (0, 0, 1)$  kullanılırsa; quasi- normal vektörler:

$$n_q = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \text{ ve } b_q = \left( \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6} \right)$$

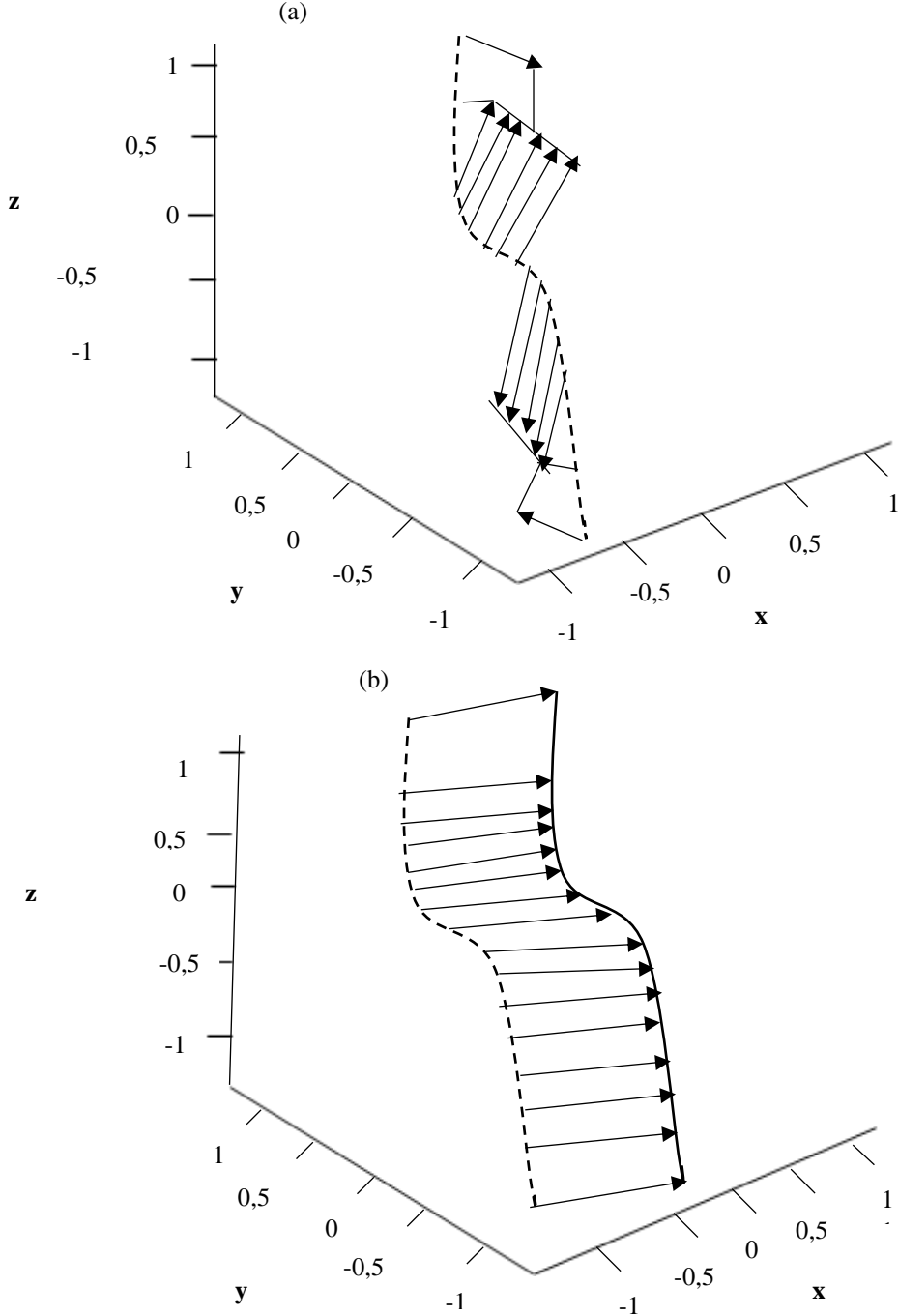
$\lambda=1$  için; doğrunun yönlü Bertrand çifti olarak parametrelendirilir.

$$\beta(t) = \left( t + \frac{\sqrt{2}}{2}, t - \frac{\sqrt{2}}{2}, t \right) \text{ dir [3].}$$



**Şekil 3.3.** Eğri (kesikli çizgi), yönlü Bertrand çifti (siyah çizgi), quasi- normal vektörler (oklar) gösterilmiştir [3].

**Örnek 3.4.:** Şekil 3.4.'teki  $\alpha(t) = (t, t, t^9)$  eğrisini alalım.



**Şekil 3.4.** Birinci şekilde (a); eğri (kesikli çizgiyle) ve Bertrand çifti (siyah çizgi) ve Frenet normal vektörleri (siyah oklarla) gösterildi. İkinci şekilde (b); eğride yönlü Bertrand çifti (siyah çizgi) ve quasi-normal vektörler (siyah oklarla) gösterildi [3].

$\kappa$  eğriliği ve  $\tau$  torsiyonu kolayca elde edilir.

$$\kappa = \frac{72\sqrt{2}t^7}{(2 + 81t^{16})^{\frac{3}{2}}}, \tau = 0$$

Bu eğri düzlemsel bir eğridir. Bu nedenle; bu eğri sonsuz Bertrand eğri çiftine sahiptir.  $\lambda=1$  için eğrinin Bertrand ve yönlü Bertrand ve yönlü Bertrand eğri çifti Şekil 3.2.'de gösterildi.

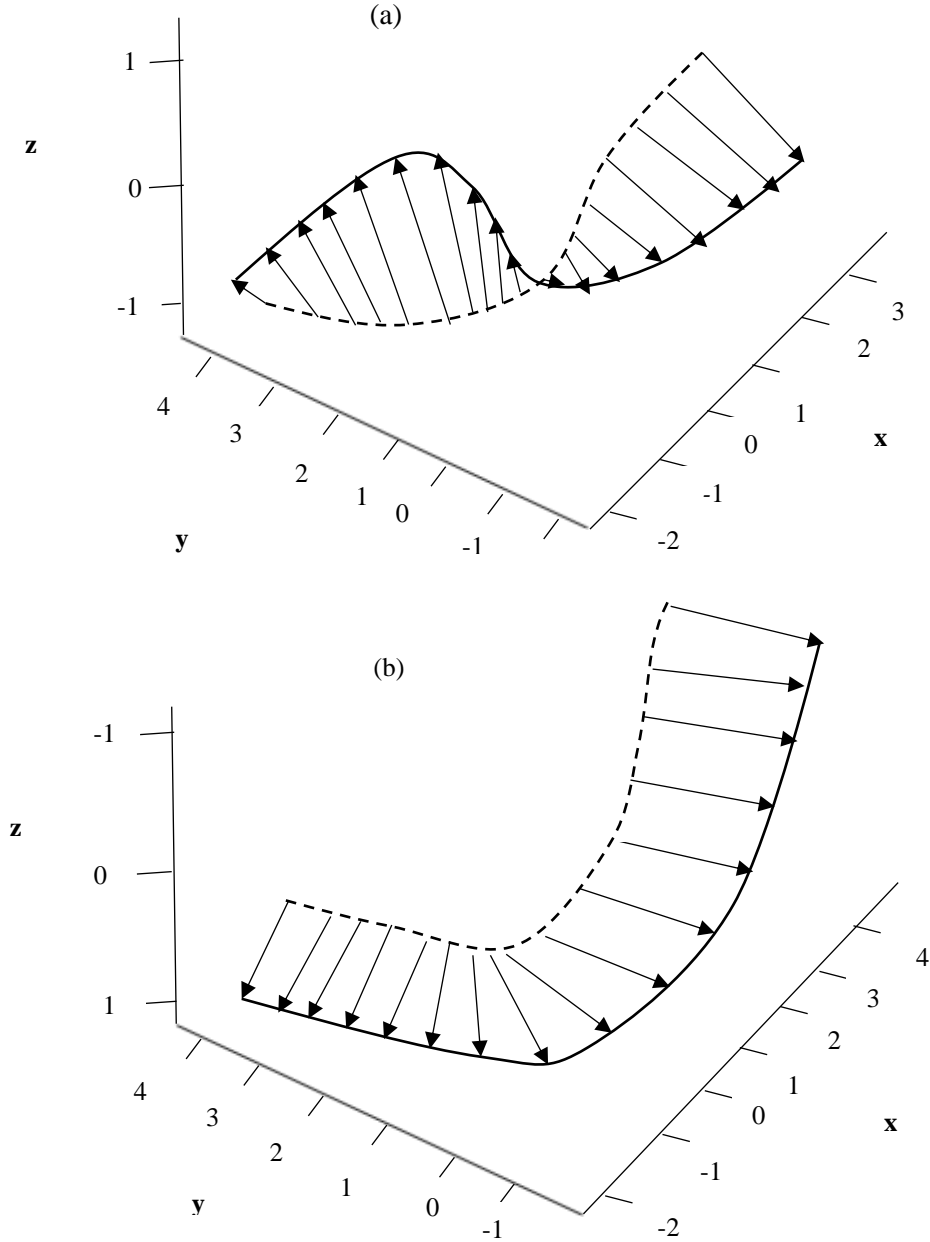
Şekil 3.2.'de gösterildiği gibi, Frenet normal vektörü  $(0,0,0)$  noktasında hesaplanamaz, bu yüzden eğrinin Bertrand çifti, doğru olarak elde edilemez.

Bu yüzden en iyi sonuç q-çatısı kullanılarak ortaya çıkar [3].





**Örnek 3.5 :** Şekil 3.5'te  $\alpha(t) = \left(\frac{(1+t)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{(1-t)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{\sqrt{2}t}{2}\right)$  olarak parametrelendirilmiş eğriyi göz önüne alalım [3].



**Şekil 3.5.** Birinci şekilde (a); eğri (kesikli çizgiyle) ve Bertrand eğri çifti (siyah) ve Frenet normal vektörü (siyah oklar) gösterildi. İkinci şekilde (b); eğri (siyah), yönlü Bertrand eğrisi (siyah) ve quasi-normal vektörü (siyah oklarla) gösterildi [3].

$$\kappa = -\frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-t^2}} \text{ ve } \tau = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-t^2}}$$

olduğu kolayca görülür. Torsiyon ve eğrilik arasında lineer bir ilişki vardır. Bu eğri sonsuz Bertrand çiftine sahiptir.  $\lambda=3$  için;  $\alpha(t)$ 'nin Bertrand çifti ve yönlü Bertand çifti Şekil 3.5'te gösterildi [3].



## 4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Yönlü q- çatısı; eğrinin türevi sıfır olsa bile iyi tanımlıdır ve diğer çatılara oranla daha kolay hesaplanır.

Bu tezde,  $E^3$  deki yönlü q- çatı kullanılarak; yönlü involüt- evolüt kavramı tanımlanmıştır. Yönlü involüt- evolüt çiftlerine karşılık gelen noktaların arasındaki uzaklığın sabit olduğu ispatlanmıştır. Buna ek olarak yönlü rektifiye eğri kavramı tanımlanarak, yönlü rektifiyen eğrinin özellikleri incelenmiştir. Yönlü rektifiyen eğrinin  $k_1$ ,  $k_2$  ve  $k_3$  eğrilikleri sabit olarak alındığında yönlü rektifiyen eğrinin  $E^3$  Öklid uzayındaki rektifiyen eğriye karşılık geldiği sonucuna varılmıştır.

### 4.1. q- Çatı Ve Uygulamaları

Bu bölüm; literatüre katkıda bulunduğumuz tanım ve teoremleri içermektedir. Buradaki çalışmalar tarafıma ait olup daha önce çalışılmamış olan orijinal ifadelerdir. İlk olarak  $E^3$  de yönlü q- çatı kullanılarak involüt ve evolüt eğri çifti ve yönlü rektifiyen eğri kavramları tanıtılacaktır.

### 4.2. Yönlü İnvolut- Evolüt Eğri Çifti

Bu bölümde involüt-evolüt eğri çifti kavramı tanıtılacaktır.

**Tanım 4.1:**  $\alpha, \beta \subset E^3$  de iki eğri olsun.  $\alpha$  ve  $\beta$  sırasıyla  $(I, \alpha)$  ve  $(I, \beta)$  koordinat komşuluklarıyla verilsin.  $\alpha$ 'nın yay parametresi  $s$  ve  $\beta$ 'nin yay parametresi  $s_1$  olmak üzere;  $\alpha$  ve  $\beta$ 'nin q-çatıları  $\{t, n_q, b_q, k\}$  ve  $\{t^\lambda, n_q^\lambda, b_q^\lambda, k\}$  olarak alınsın. Buna göre;

$\langle t, t^\lambda \rangle = 0$  ise  $\beta$ 'ya,  $\alpha$ 'nın yönlü involütü  $\alpha$ 'ya da  $\beta$ 'nin yönlü evolütü denir.

**Teorem 4.1 :**  $\alpha, \beta \subset E^3$  eğrileri  $(I, \alpha), (J, \beta)$  koordinat komşulukları ile verilsin. Eğer,  $\beta, \alpha$ 'nın yönlü involütü ise; yönlü involüt- evolüt çiftlerinin karşılık gelen noktaları arasındaki uzaklık sabittir.

**İspat:**  $\alpha$  ve  $\beta$ , q-çatıları sırasıyla  $\{t, n_q, b_q\}$  ve  $\{t^\lambda, n_q^\lambda, b_q^\lambda\}$  olan iki eğri olsun.  $\alpha$  ve  $\beta$  yer vektörleri arasındaki ilişki:

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda t(s)$$

yazılabilir. Buradan;

$$\frac{d\beta}{ds} I_s = \alpha'(s) + \lambda' t + \lambda t'$$

$$t^\lambda \frac{ds}{ds_1} = t + \lambda' t + \lambda(k_1 n_q + k_2 b_q)$$

$$\langle t^\lambda I_s, t \rangle = (1 + \lambda') \langle t, t \rangle + \lambda k_1 \langle n_q, t \rangle + \lambda k_2 \langle b_q, t \rangle$$

$$\langle t, t \rangle = 1, \langle n_q, t \rangle = 0, \langle b_q, t \rangle = 0$$

olduğundan;

$$0 = 1 + \lambda' \Rightarrow \lambda' = -1 \Rightarrow \lambda = c - s$$

olur; yani sabittir.

### 4.3. Yönlü Rektifiyen Eğri ve Uygulamaları

Bu kısımda yönlü rektifiyen eğri kavramı tanıtılacaktır.

**Tanım 4.2:**  $\alpha \subset E^3$  eğrisi  $(I, \alpha)$  komşuluğu ile verilsin.  $\alpha$  eğrisinin Frenet q- çatısı  $\{t, n_q, b_q, k\}$  olsun.  $E^3$  uzayında yer vektörü  $t$  teğet ve  $b_q$  quasi-binormal vektör alanları tarafından gerilen rektifiyen düzlemde yatan eğriye yönlü rektifiyen eğri denir.

Buna göre;  $E^3$  teki yönlü rektifiyen eğrinin seçilmiş bir orijine göre yer vektörü:

$$\alpha(s) = \lambda(s)t(s) + \mu(s)b_q(s) \text{ denklemini sağlar.}$$

Burada  $\lambda(s)$  ve  $\mu(s)$ ,  $s \in I \subset \mathbb{R}$  yay uzunluğu parametresi için keyfi diferansiyellenebilir fonksiyonlardır.

**Teorem 4.2:**  $\alpha: I \rightarrow E^3$ ,  $E^3$  te bir yönlü rektifiyen eğri ve  $k_1 > 0$  olsun.  $s$  yay uzunluğu fonksiyonu olmak üzere;

$$i) \rho = |\alpha| \text{ uzaklık fonksiyonu } \rho^2 = \int (1 + k_2 e^{-\int \frac{k_2 k_3}{k_1} ds}) ds + e^{-\int \frac{k_2 k_3}{k_1} ds} \text{ şartını sağlar.}$$

ii)  $\alpha$  eğrisinin yer vektörünün teğet bileşeni  $b$  sabiti için;

$$\langle \alpha, t \rangle = \int (1 + k_2 e^{-\int \frac{k_2 k_3}{k_1} ds}) ds \text{ şartını sağlar.}$$

iii)  $\alpha$  eğrisinin yer vektörünün normal bileşeni  $x^N = e^{-\int \frac{k_2 k_3}{k_1} ds}$  şartını sağlar.

iv)  $k_2$  sıfırdan farklı ve yer vektörünün quasi-binormal bileşeni  $\langle \alpha, b_q \rangle = e^{-\int \frac{k_2 k_3}{k_1} ds}$  dir.

**İspat:**  $\alpha: I \rightarrow E^3$ ,  $E^3$  te  $k_1 > 0$  şartını sağlayan ve  $\{t, n_q, b_q, k\}$  q- çatisına sahip yay parametrelili bir eğri olsun.

$\alpha'$ 'nin yönlü rektifiyen eğri olduğu kabul edilirse; tanımdan  $\lambda(s)$  ve  $\mu(s)$  fonksiyonu için;

$$\alpha(s) = \lambda(s).t(s) + \mu(s).b_q(s) \quad (4.1)$$

olur.

Denklem 4.1'in s'ye göre türevi alınıp, q-çatı varyasyon denklemleri kullanılırsa;

$$\alpha'(s) = \lambda'(s).t(s) + t'(s).\lambda(s) + \mu'(s).b_q(s) + b_q'(s).\mu(s)$$

$$t' = k_1 n_q + k_2 b_q$$

$$n_q' = -k_1 t + k_3 b_q$$

$$b_q' = -k_2 t - k_3 n_q$$

$$\alpha'(s) = \lambda'(s).t(s) + (k_1 n_q + k_2 b_q).\lambda(s) + \mu'(s).b_q(s) + (-k_2 t - k_3 n_q).\mu(s)$$

$$t(s) = \lambda'(s).t(s) + k_1 n_q.\lambda(s) + k_2 b_q.\lambda(s) + \mu'(s).b_q(s) - k_2 t.\mu(s) - k_3 n_q.\mu(s)$$

$$t(s) = \lambda'(s).t(s) + n_q(k_1 \lambda(s) - k_3 \mu(s)) + b_q(k_2 \lambda(s) + \mu'(s)) - k_2 t(s).\mu(s)$$

$$t(s) = t(s)(\lambda'(s) - k_2 \mu(s)) + n_q(k_1 \lambda(s) - k_3 \mu(s)) + b_q(k_2 \lambda(s) + \mu'(s))$$

$$\lambda'(s) - k_2 \mu(s) = 1$$

$$\lambda'(s) = 1 + k_2 \mu(s) \quad k_1 \lambda(s) = k_3 \mu(s) \quad \mu'(s) = -\lambda(s)k_2$$

(4.2)

bulunur.

Denklem 4.2'deki birinci ve ikinci eşitliklerinden;

$$\lambda'(s) = 1 + k_2 \mu(s) \implies \lambda(s) = \int (1 + k_2 \mu(s)) ds \quad (4.3)$$

$$k_1 \lambda(s) - k_3 \mu(s) = 0$$

$$k_1 \lambda(s) = k_3 \mu(s) \implies \lambda(s) = \frac{k_3 \mu(s)}{k_1} \quad (4.4)$$

$$k_2 \lambda(s) + \mu'(s) = 0$$

$$\frac{k_2 \lambda(s)}{k_2} = \frac{-\mu'(s)}{k_2} \quad (4.5)$$

Denklem 4.4 ve 4.5 denklemlerinden;

$$\frac{k_3 \mu(s)}{k_1} = \frac{-\mu'(s)}{k_2} \Rightarrow \int \frac{\mu'(s)}{\mu(s)} ds = \int -\frac{k_2 k_3}{k_1} ds$$

$$\ln \mu = - \int \frac{k_2 k_3}{k_1} ds$$

$$\mu(s) = e^{-\int \frac{k_2 k_3 \mu(s)}{k_1} ds} \quad (4.6)$$

Böylece denklem 4.1'de yerine yazılırsa;

$$\alpha(s) = \lambda(s).t(s) + \mu(s)b_q(s)$$

t ile iç çarpıma tabi tutulursa;

$$\langle \alpha(s), t(s) \rangle = \lambda(s) \langle t(s), t(s) \rangle + \mu(s) \langle b_q(s), t(s) \rangle$$

$$\langle \alpha(s), t(s) \rangle = \lambda(s) + \mu(s) \langle t \wedge n_q(s), t(s) \rangle$$

$$\langle \alpha(s), t(s) \rangle = \lambda(s) + \mu(s) \langle t(s), t(s) \rangle \langle n_q(s), t(s) \rangle$$

$$\langle \alpha(s), t(s) \rangle = \lambda(s)$$

Denklem 4.1'de yerine yazılırsa;

$$\langle \alpha(s), t(s) \rangle = \int (1 + k_2 \mu(s)) ds$$

Denklem 4.6'daki  $\mu$  değeri; 4.4 denkleminde yerine yazılırsa;

$$\langle \alpha(s), t(s) \rangle = \int (1 + k_2 e^{-\int \frac{k_2 k_3}{k_1} ds}) ds \text{ elde edilir.}$$

$k_1, k_2$  ve  $k_3$  eğrilikleri sabit olduğundan; bu teorem aşağıdaki gibi verilebilir.

$$(ii) (\|x\|)' = (\langle x, x \rangle')^2 = 2 \langle x, x' \rangle = \langle x, x' \rangle = \int (1 + e^{-\int \frac{k_2 k_3}{k_1} ds}) ds$$

(iii) Denklem 4.1'de eğrinin yer vektörünün normal bileşeni;  $x^N$  in  $\mu(s)b_q(s)$  olduğu görülebilir.

$$\langle x(s), b_q(s) \rangle = \lambda(s) \langle t(s), b_q(s) \rangle + \mu(s) \langle b_q(s), b_q(s) \rangle$$

$\langle x(s), b_q(s) \rangle = \mu(s)$  ifadesini yerine yazılırsa;

$$\langle x(s), b_q(s) \rangle = e^{-\int \frac{k_2 k_3}{k_1} ds} \text{ olur.}$$

**Sonuç 4.2:**  $k_1$ ,  $k_2$  ve  $k_3$  eğrilikleri sabit alındığında bu teorem  $E^3$  Öklid uzayındaki rektifiye eğrisi ile aynı şartları sağlar.



## 5. SONUÇLAR

Bu tezde bir uzay eğrisi boyunca yönlü  $q$ - çatı ve geometrik uygulamaları çalışıldı.  $q$  – çatının Frenet çatısına göre avantajları örneklerle ve teoremlerle incelendi.

$E^3$  deki yönlü  $q$ - çatısı kullanılarak yönlü involüt- evolüt kavramları tanıtıldı ve  $E^3$  deki gibi yönlü involüt ve evolüt çiftlerine karşılık gelen noktaların arasındaki uzaklığın sabit olduğu sonucuna varıldı.

Yönlü rektifiyen eğri tanımı verilerek yönlü bir rektifiye eğrinin uzaklık fonksiyonunun yer vektörünün teğet, normal ve quasi- binormal bileşeninin sağladığı şartlar ifade edilmiştir.

$k_1, k_2, k_3$  eğrilikleri sabit olduğundan yönlü rektifiye eğrinin  $E^3$  Öklid uzayındaki rektifiye eğriyle aynı şartları sağladığı sonucuna ulaşılmıştır.



## ÖNERİLER

- 1) Bu çalışmada kısıtlı zaman sebebiyle  $E^3$  de q- çatı kullanılarak oskülatör ve normal eğri tanımlamaları yapılamamıştır. Bu kavramlar ve özellikleri incelenebilir.
- 2) Farklı uzaylarda q- çatının tanımlanıp tanımlanamayacağı araştırılabilir.



## KAYNAKLAR

- [1] Bloomenthal, J., (1990).“Calculation of reference frames along a space curve” , *In Graphics Gems.*, 567-571.
- [2] R.L. Bishop, (1975). “There is more than one way to frame a curve ,”*Amer. Math. Monthly*, (vol.82), 246-251.
- [3] Dede, M. Ekici, C., Güven Arslan İ., (2018). “Directional Bertrand Curves”, *Gazi University Journal of Science* 31(1): 202-211.
- [4] Dede, M., Ekici C., Görgülü A., (2015). “Directional q- frame along space curve”, *Intenational Journal of Advanced Research in Computer Science and Software Engineering*, 5(12), December 775-780.
- [5] Turgut A., Erdoğan E. (1992). Involute-evolute curve couples of higher order in  $\mathbb{R}^n$  and their horizontal lifts in  $\mathbb{R}^n$ . *Common. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A*, 41(3),125-130.
- [6] As, E., Sarioğlugil A. (2014). “On the Bishop Curvatures of involute-evolute curve in  $E^3$ ”, *International Journal of Physical* 9(7), 140-145.
- [7] Bektaş, O, Yüce S. (2019). Special involute- evolute partner D- Curves in  $E^3$ , *European Journal of Pure and Applied Mathematics* 6(1) 20-29.
- [8] Azak, A.Z. Akyiğit,M.,Ersoy S. (2010). Involute- Curves in Galilean space  $G_3$ , *Department of Mathematics Nortwest University ,Journal of Mathematics* 6(4), 75-81.
- [9] Kaya, F.E., (2015). On involute- evolute of the curve and curve surface pair in Euclidean 3-space, *Pure and Applied Mathematics Journal*, 4(1-2):6-9.
- [10] Ozturk, U, Ozturk E.B.K., İlarıslan, K., (2013). On the involute- evolute of the Pseudo null curve in Minkowski 3- space, *Journal of Applied Mathematics Vision*, Hindawi Publishing Coop., 6.
- [11] Chen, B.Y. (2003). “When does the position vector of a space curve always lie its rectifying plane?”*Amer. Math. Monthly*, 147-152.
- [12] İlarıslan K., Nesovic, E., Torgasev , Petrovic, (2003). “Some charecterizations of rectifying curves in the Minkowski 3- space”, *Novi Sad J. Math.*, 23-32.
- [13] Kılıç, N. (2012). *R^4 Yarı Öklidyen uzayda Pseudo Null ve Partially null rektifiyen eğrilerin karakterizasyonları*, Yüksek Lisans Tezi, Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [14] Hacısalihoğlu,H.H. (1983), *Diferansiyel Geometri I* Ankara Üniversitesi Yayınları, Ankara.
- [15] Hacısalihoğlu,H.H. (2000), *Diferansiyel Geometri II* Ankara Üniversitesi Yayınları, Ankara.
- [16] Sabuncuoğlu, A. (2006), *Diferansiyel Geometri Nobel Yayınları*, Ankara.
- [17] Sağel M.K. (2006), *Vektörel Analiz A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları*, Ankara.

- [18] Tunçer, Y. and Ünal, S., (2012). “New representations of Bertrand pairs in Euclidean 3-space”, *Applied Mathematics and Computation*, 2019: 1833-1842.



# ÖZGEÇMİŞ

Ayten ERDOĞAN DOĞAN

## KİŞİSEL BİLGİLER

**Doğum Yeri** : Elazığ  
**Doğum Yılı** : 1993  
**Uyruğu** : T.C.  
**Adres** : Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi  
**E-posta** : aytenaygun2334@gmail.com  
**Yabancı Diller** : İngilizce (B2)

## EĞİTİM BİLGİLERİ

**Yüksek Lisans** : “q-Çatı ve Geometrik Uygulamaları”  
Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2020  
Danışman: Prof. Dr. Münevver YILDIRIM YILMAZ  
**Lisans** : Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 2016  
**Lise** : Elazığ Balakgazi Lisesi, 2011

## ARAŞTIRMA DENEYİMİ

- ✓ MATLAB, MATHEMATİCA, C++
- ✓ Journal Of Science, Turk J Math, TÜBİTAK, math. DG, Journaf Of Geometry

## İŞ DENEYİMİ

2016-2017: Data Yayınevi  
2017-2018: Elazığ Gazi Kamil Ayhan Ortaokulu  
2018-2019: İstanbul Esenler Amiral Vehbi Ziya Dümer Anadolu Lisesi  
2019-2020: İstanbul Esenler Yunus Emre Ortaokulu