

q-çatılı Timelike Eğrilerin Smarandache Eğrileri Üzerine

Merve Büşra Mandal

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Kasım 2019



On Smarandache Curves of Timelike Curves with q -frame

Merve Büşra Mandal

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics-Computer

November 2019

q-çatılı Timelike Eğrilerin Smarandache Eğrileri Üzerine

Merve Büşra Mandal

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Cumali Ekici

Kasım 2019

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Cumali Ekici danışmanlığında hazırlamış olduğum "q-çatılı Timelike Eğrilerin Smarandache Eğrileri Üzerine" başlıklı YÜKSEK LİSANS tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim.

14/11/2019

Merve Büşra Mandal

ÖZET

Bu tez çalışmasının amacı, bir izdüşüm vektörü, quasi normal ve quasi binormal vektörleri yardımıyla tanımlanan q -çatısını kullanarak Öklid ve Minkowski 3-uzayında yönlü eğrilerin Smarandache eğrileri üzerine inceleme yapmaktır.

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın giriş ve literatür araştırması bölümlerinde konunun tarihçesi ve gelişimi hakkında bilgi verilmiştir. Üçüncü bölümde çalışmamızda kullandığımız temel olan bazı tanım ve teoremlere değinilmiş, q -çatısı üzerinde durulmuştur. Ayrıca Minkowski 3-uzayında izdüşüm vektörüne bağlı oluşan spacelike ve timelike eğrilerin q -çatısı, eğrilikleri ve Frenet elemanları arasındaki bağıntılara yer verilmiştir. Dördüncü bölümde ise Öklid uzayında q -çatılı Smarandache eğrileri tanımlanmış, bu eğrilere dair bazı eşitlikler ele alınmıştır. Tanımladığımız her eğri için q -çatı vektörleri ve q -eğrilikleri elde edilmiştir. Beşinci bölümde Minkowski 3-uzayında q -çatılı timelike Bertrand, Mannheim ve involüt-evolüt eğri çiftleri hakkında tanım ve teoremler verilmiş olup Öklid uzayında incelemiş olduğumuz Smarandache eğrileri Minkowski uzayında tanımlanmıştır. Bu eğrilerin de q -çatı vektörleri ve q -eğrilikleri elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Frenet çatısı, Minkowski uzayı, q -çatısı, Smarandache eğrileri.

SUMMARY

The aim of this thesis is to investigate Smarandache curves of the directional curves in Euclidean and Minkowski 3-space using the q-frame. Even though q-frame is defined by a projection vector, quasi normal and quasi binormal vectors.

This study consists of five chapters. In the introduction and literature research sections, some information about the history and development of the subject are given. In the third chapter, some definitions and theorems which will be used throughout this thesis are mentioned and q-frame is emphasized. In addition to the relations between the Frenet frame and q-frame, curvatures of the spacelike and timelike curves due to the k projection vector in Minkowski 3-space are given. In the fourth chapter, Smarandache curves with q-frame in Euclidean space are defined and some equations related to Smarandache curves are discussed. For each curve we defined q-frame vectors and q-curvatures were obtained. In the fifth chapter, definitions and theorems about timelike Bertrand, Mannheim and involute-evolute curve pairs in Minkowski 3-space are given. In these curves, q-frame vectors and q-curvatures were obtained.

Keywords: Frenet frame, Minkowski space, q-frame, Smarandache curves.

TEŞEKKÜR

q-çatılı Timelike Eğrilerin Smarandache Eğrileri Üzerine adlı tez çalışmamda, bana her konuda destek olan, bilgilerini ve tecrübesini benimle paylaşıp yol gösteren, çalışmam boyunca yardımcı olan ve bana inanan değerli danışmanlarım Sayın

Prof. Dr. Cumali Ekici ve Doç. Dr. Mustafa Dede

hocalarıma, maddi ve manevi destekleriyle bugünlere gelmemi sağlayan kıymetli anneanneme, varlığıyla hep güçlü hissettiğim, başarısımı başarıma saydığım en büyük gururum kardeşime ve herşeyden önemlisi bu hayattaki umut ışığım, sayesinde herşeyi başarabileceğime inandığım, tüm evreni anlamlı ve beni hep sevgili kılan değerli hayat arkadaşım Onur Mandal'a yürekten teşekkürlerimi iletmeyi bir borç bilirim.

Merve Büşra Mandal

Kasım 2019

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	vi
SUMMARY	vii
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xii
1. GİRİŞ VE AMAÇ	1
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI	3
3. TEMEL KAVRAMLAR	6
3.1. Öklid Uzayı	6
3.2. Öklid Uzayında Eğriler ve Frenet Formülleri	6
3.3. R_1^3 Minkowski Uzayı	8
3.4. Yarı-Riemann Manifoldları	12
3.5. R_1^3 Minkowski Uzayı Üzerinde Vektörel Çarpım	13
3.6. Uzay Eğrisi Boyunca q-Çatı	15
3.7. Frenet Çatısı ile q-Çatı Arasındaki Bağlıntılar	17
3.8. Smarandache Eğrileri.	18
3.9. Minkowski Uzayında Spacelike Eğriler İçin q-Çatısı	19
3.10. Minkowski Uzayında Timelike Eğriler İçin q-Çatısı	21
4. ÖKLİD UZAYINDA q-ÇATILI SMARANDACHE EĞRİLER.	22
4.1. tn_q -Smarandache Eğrisi	22
4.2. tb_q -Smarandache Eğrisi	27
4.3. n_qb_q -Smarandache Eğrisi	32
4.4. tn_qb_q -Smarandache Eğrisi	37

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
5. q-ÇATILI TIMELIKE EĞRİLERİN SMARANDACHE EĞRİLERİ	44
5.1. Minkowski Uzayında q-Çatılı Timelike Eğriler	44
5.2. Minkowski Uzayında q-Çatılı Timelike Eğrilerin Smarandache Eğrileri . . .	46
5.2.1. tn_q -Smarandache eğrisi	46
5.2.2. tb_q -Smarandache eğrisi	51
5.2.3. n_qb_q -Smarandache eğrisi	57
5.2.4. tn_qb_q -Smarandache eğrisi	63
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	70
KAYNAKLAR DİZİNİ	71

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
3.1. İzdüşüm vektörü	15
3.2. Frenet çatısı	16
3.3. q-çatısı	17
3.4. q-çatısı ve Frenet çatısı	18
4.1. Eğri ve \mathbf{tn}_q -Smarandache eğrisi.	26
4.2. Eğri ve \mathbf{tb}_q -Smarandache eğrisi.	31
4.3. Eğri ve $\mathbf{n}_q\mathbf{b}_q$ -Smarandache eğrisi.	36
4.4. Eğri ve $\mathbf{tn}_q\mathbf{b}_q$ -Smarandache eğrisi.	42
5.1. Eğri ve \mathbf{tn}_q -Smarandache eğrisi.	52
5.2. Eğri ve \mathbf{tb}_q -Smarandache eğrisi.	57
5.3. Eğri ve $\mathbf{n}_q\mathbf{b}_q$ -Smarandache eğrisi.	63
5.4. Eğri ve $\mathbf{tn}_q\mathbf{b}_q$ -Smarandache eğrisi.	68

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
\mathbb{R}	Reel Sayılar Cismi
\mathbb{R}_1^3	Üç Boyutlu Minkowski Uzayı
α	Uzay Eğrisi
β	Uzay Eğrisi
α_1	Mannheim Uzay Eğrisi
\mathbf{t}	Birim Teğet Vektör
\mathbf{n}	Birim Normal Vektör
\mathbf{b}	Birim Binormal Vektör
\mathbf{n}_q	Quasi-Normal Vektör
\mathbf{b}_q	Quasi-Binormal Vektör
k_1	Birinci q -Eğriliği
k_2	İkinci q -Eğriliği
k_3	Üçüncü q -Eğriliği
\mathbf{t}_β	Smarandache Eğrisi İçin Birim Teğet Vektör
\mathbf{n}_q^β	Smarandache Eğrisi İçin Quasi-Normal Vektör
\mathbf{b}_q^β	Smarandache Eğrisi İçin Quasi-Binormal Vektör
k_1^β	Smarandache Eğrisi İçin Birinci q -Eğriliği
k_2^β	Smarandache Eğrisi İçin İkinci q -Eğriliği
k_3^β	Smarandache Eğrisi İçin Üçüncü q -Eğriliği
$\ \cdot\ $	Norm Fonksiyonu
\langle, \rangle	Skaler Çarpım Fonksiyonu
\wedge	Vektörel Çarpım Fonksiyonu

1. GİRİŞ VE AMAÇ

3-boyutlu Öklid uzayında eğriler teorisi, diferensiyel geometride çok sık çalışılan bir konu olmuştur. Özellikle bu çalışmalarda eğrilerin Frenet vektörleri, eğri hakkında yeni teoriler elde etmemizi sağlamıştır. Bir uzay eğrisi için Frenet çatısından farklı çatılar üzerine yapılan çalışmalar içinde, Bishop (1975) öncü olmuştur. Minimize edilmiş dönme çatısı ise bu çalışmalardan biridir. Wang vd. (2008) çalışmasında bu çatının hesaplanmasında karşılaşılan problemler ve çözümleri üzerine eğilmiştir. Eğri üzerinde değinilen çatılar haricinde de çatı üzerine çalışmalar yapılmıştır. Coquillart (1987) çalışmasında quasi-normal vektörü tanımlamıştır. 2015 yılında Dede ve arkadaşları, ilk olarak çalışmalarında bu quasi-normal vektörünü kullanarak bir uzay eğrisi boyunca yeni bir çatı olan q-çatıyı tanımlamışlardır.

Regüler eğriler teorisinde, Öklid uzayında Bertrand, Mannheim ve involüt-evolüt eğri çiftleri gibi eğriler geniş bir şekilde çalışılmıştır. Uzay eğrisinin nedensel karakteristiğine (causalına) yani timelike veya spacelike olmasına bağlı olarak alınan bir izdüşüm vektörü ile Minkowski uzayında uzay eğrisinin timelike veya spacelike olması durumuna göre beş farklı q-çatısı tanımlamış, buradaki her bir durum için q-çatılar ve o çatıya göre türev denklemleri ile q-eğrilikleri elde edilmiştir (Tarım, 2016). Bunların dışında Smarandache eğrileri de vardır. Bu eğri, regüler bir eğrinin Frenet vektörleri ile üretilen yer vektörüne sahip bir eğri olarak tanımlanmıştır. Bunu ilk olarak Smarandache geometrisi çalışmasıyla Ashbacher (1997) tanıtmıştır. Ali (2010) çalışmasında ise özel Smarandache eğrilerini ele almıştır.

Öklid ve Minkowski uzaylarında özel Smrandache eğrileri Yılmaz, Turgut (2010), Koç Öztürk (2014), Çetin (2014) tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmalardaki hesaplamalar, Frenet ve Bishop çatıları kullanılarak yapılmıştır. Bu çatılardaki uygulamalar bazı sınırlamalara sahiptir. Frenet çatısının eğriliğinin sıfır olma durumunda tanımsız olması ve Bishop çatısı için de hesaplamaların biraz uzun olması dezavantajlardandır. q-çatısı ise Frenet ve Bishop gibi diğer çatılardan daha kullanışlıdır. Örneğin; q-çatısının tanımlanması için eğriliği sıfır olmayan bir doğru şartı yoktur.

Bu tez çalışmasında, Öklid ve Minkowski uzayında bir izdüşüm vektörü kullanılarak oluşturulan q-çatılı eğriler ele alınmıştır. Öncelikle 3-boyutlu Öklid uzayındaki bir eğri için tanımlanan q-çatı yardımıyla elde edilen Smarandache eğrileri çalışılmıştır. Sonrasında

Minkowski 3-uzayında, bir timelike uzay eğrisi için q-çatısı ve q-eğrilikleri kullanılarak özel Smarandache eğrileri oluşturulup diferensiyel özellikleri incelenmiştir.

Çalışma boyunca verilen örnekler ile teorilerdeki hesaplamalar ve şekiller için Maple programından yararlanılmıştır.



2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Eğriler teorisi diferensiyel geometride önemli çalışma alanlarından biridir. Bu konuda 3-boyutlu Öklid uzayında bir çok çalışma vardır. Öklid ve Minkowski uzayında başta Frenet çatısı olmak üzere birçok çatı kullanılmış olup Bishop çatısında bunlardan biridir (Bishop, 1975). Bir diğer çatı olan uzay eğrisi üzerinde minimize edilmiş dönme çatısı (rotation minimizing frame) da farklı araştırmalara konu olmuştur (Yılmaz ve Turgut, 2010; Farouki, 2008; Wang ve Joe, 1997; Klok, 1986; Ravani vd., 2004; Maurer ve Jüttler, 1999; Guggenheimer, 1989). Karacan ve Bükücü (2008), 3 boyutlu Minkowski uzayında bir eğrinin timelike olması durumunda Bishop çatısını kullanmışlar ve bazı sonuçlara ulaşmışlardır. Başka bir çalışmada ise spacelike eğriler üzerinde esas normal spacelike olanlar için Bishop çatısını kullanmışlardır. Ayrıca 2012 yılında Uğurlu ve Çalışkan, 3 boyutlu Minkowski uzayında Darboux ve Frenet üçyüzlülerini timelike ve spacelike eğriler için hesaplamış, dik bir katı 3 yüzlüyü de inceleyip bu üçyüzlüler ile bunların ani dönme vektörleri arasındaki ilişkileri inceledi ve bazı sonuçlara ulaşmışlardır.

Eğriler ile ilgili bahsedilen çalışmalarda kullanılan başka çatılar da vardır. Bunlardan biri Coquillart tarafından 1987 yılında quasi-normal ve quasi-binormal vektörleri ile tanımlanan q-çatısıdır. Bu çatı quasi-normal vektörün, izdüşüm vektörü ile teğet vektörün vektörel çarpımına bağlı olarak tanımlanmıştır. Ayrıca Frenet ve Bishop gibi diğer çatıların, q-çatısına göre daha az avantajlı olduğunu ifade edip, Frenet çatısının, q-çatısı ile ilişkisini incelemişlerdir (Dede vd., 2015).

Eğriler teorisindeki çalışılmış önemli konulardan biri özel eğri çiftleri üzerine olan çalışmalardır. İlk olarak 1850 yılında Bertrand tarafından Bertrand eğri çifti tanımlanmış, 4 boyutlu Öklid uzayında Bertrand eğrileri için genelleştirme fikri sunulmuştur (Matsuda ve Yorozu, 2003). 2012 yılında Tunçer ve Ünal, Bertrand eğrilerine üzerine bir başka çalışmada, bu eğrilerin Öklid uzayında küresel göstergelerinin özelliklerini incelemiş ve Mannheim, involüt-evolüt ve Bertrand çiftleri için yeni eğri çiftleri elde edilmesi durumu ele almıştır. 3 boyutlu Minkowski uzayında Darboux çatısı kullanılarak Bertrand D-eğri çiftini tanımlanmış ve bu eğrilerin genel karakterizasyonları verilmiştir (Kazaz vd., 2014). Minkowski 3-uzayında Bertrand eğrilerinin spacelike, timelike ve null olma durumları incelenmiş ve bu eğrilerin karakterizasyonları üzerine çalışılmıştır (Balgetir vd., 2004). Timelike ve spacelike Bertrand eğrilerinin küresel göstergelerine karşılık gelen Bertrand eğrileri araştırılmıştır (Güner ve

Ekmekçi, 2012; Öztekin ve Bektaş, 2010). Yönlü Bertrand eğrileri q-çatısı kullanılarak da çalışılmış ve bazı özellikleri verilmiştir (Dede ve Ekici, 2016).

Bir başka özel eğri çiftlerinden biri de Mannheim eğri çiftidir. 1878 yılında Mannheim tarafından tanımlanan bu eğri çifti Öklidyen ve Minkowski uzayında pek çok çalışmaya konu olmuştur. Öklid 3-uzayında Mannheim eğrileri ile ilgili Riccati denklemleri de kullanılmış ve hesaplamalar yapılmıştır (Blum, 1966). 2007 yılında özel eğri çifti için farklı bir tanım Wang ve Liu'dan gelmiştir. Lorentz-3 uzayında bu eğrilerin timelike olma durumu incelenmiştir (Azak, 2009). 3-boyutlu Minkowski ve Öklid uzayında Mannheim eğri çifti için gerek ve yeter şartları elde etmişlerdir. Mannheim eğri çiftlerinin eğrilikleri ve torsiyonları 3-boyutlu Öklidyen uzayında hesaplanmış ve aralarındaki bazı ilişkiler elde edilmiştir (Orbay ve Kasap, 2009). 2011 yılında Minkowski 3-uzayında tanımlanan null Mannheim eğrileri için gerek ve yeter koşullar, Öztekin ve Ergüt tarafından incelenmiştir.

2009 yılında Bilici ve Çalışkan tarafından incelenen bir diğer özel eğri çifti olan involüt-evolüt eğrileri ele alınmış, Minkowski 3-uzayında binormali timelike olan spacelike ve timelike eğrilerin involütleri incelenmiştir. Bu eğriler üzerinde durulmuş ve eğriler arasındaki uzaklığın sabit olduğu gösterilmiştir (Bilici ve Çalışkan, 2011). Minkowski 3-uzayında spacelike binormal ile verilen spacelike eğrilerin involüt-evolütleri çalışılmıştır ve esas normal spacelike olan spacelike eğrilerin involüt-evolütleri de incelenmiştir (Bükcü ve Karacan, 2007).

Minkowski uzayında alınan bir izdüşüm vektörüne bağlı olarak farklı q-çatıları tanımlanmış, seçilen uzay eğrisinin timelike veya spacelike olmasına göre oluşan bu q-çatılar için türev denklemleri ile birlikte q-eğrilikleri de hesaplanmış ve bu eğrinin Bertrand, Mannheim, involüt-evolüt eğrileri incelenip bazı özellikleri verilmiştir (Tarım, 2016).

Başka bir eğri çeşidi olan Smarandache eğrileri, regüler bir eğrinin Frenet vektörleri ile üretilen yer vektörüne sahip bir eğri olarak tanımlanmıştır (Ashbacher, 1997). 2008 yılında Turgut ve Yılmaz tarafından Minkowski uzayında ifade edilerek bu eğrinin Frenet elemanları hesaplanmıştır. Öklid uzayında Smarandache eğrileri ve Bishop çatısına göre özel Smarandache eğrileri araştırılmış ve bu eğrilerin bazı özelliklerini verilmiştir (Ali, 2010; Çetin vd., 2010). Ayrıca Smarandache eğrisine ait oskülatör kürenin merkezini ve kürenin eğriliği ile ilgili sonuçlar bulunmuştur (Çetin vd., 2010). 2013 yılında Şenyurt ve Sivas, birim Darboux vektörü C olmak üzere NC-Smarandache eğrisini tanımlamış ve Smarandache eğrilerinin eğriliklerini hesaplamışlardır. Smarandache eğrileri ve bu eğrilere ait bazı karakterizasyonlar ile ilgili sonuçlar verilmiştir (Bektaş ve Yüce, 2013). Sabban çatısına göre de incelemeler yapılmış

olup küresel gösterge eğrilerinin Sabban çatısına göre Smarandache eğrileri araştırılmıştır (Çalışkan ve Şenyurt, 2015). Öklid uzayında ise Smarandache eğrilerinin helis olma durumları incelenmiştir (Karaman, 2015). Minkowski uzayında da Smarandache eğrileri üzerinde çalışılmıştır (Özgün, 2015; Demircan, 2016; Çelik, 2016).



3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda çalışmamızda yararlanacağımız bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

3.1 Öklid Uzayı

Tanım 3.1.1 \mathbb{R}^3 3-boyutlu standart reel vektör uzayı ile birleştirilmiş \mathbb{R}^3 afin uzayını ele alalım. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ iki vektör olsun. Bu \mathbb{R}^3 vektör uzayında Öklid iç çarpımı

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

biçiminde tanımlanır. Böylece \mathbb{R}^3 Afin uzayı 3-boyutlu Öklid uzayı olur ve \mathbb{E}^3 ile gösterilir (Hacısalioğlu, 1998).

3.2 Öklid Uzayında Eğriler ve Frenet Formülleri

Frenet çatısı, diferensiyel geometrinin farklı konularında birçok alanda kullanılmıştır. Klasik konuların ele alınmasında ve küresel eğriler, Mannheim eğrileri, Bertrand eğrileri üzerinde araştırılan konularda Frenet çatısı kullanılmıştır. Bu bölümde bir uzay eğrisi üzerinde en çok kullanılan Frenet çatısı ile ilgili temel kavramlar verilecektir.

Tanım 3.2.1 $I \subseteq \mathbb{R}$ açık aralık olmak üzere, (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanan ve

$$\begin{aligned} \alpha: I &\rightarrow E^n, I \subseteq \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)) \end{aligned}$$

parametrik ifadesi ile verilen $M = \alpha(I) \subset E^n$ kümesine uzay eğrisi adı verilir. Bu eğri kısaca α olarak gösterilecektir (Hacısalioğlu, 1998).

Tanım 3.2.2 (I, α) koordinat komşuluğu ile bir M eğrisi verilmiş olsun. Eğer $\forall s \in I$ için, $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise M eğrisi (I, α) ya göre birim hızlı eğridir denir ve s ye de yay-parametresi adı verilir (Hacısalioğlu, 1998).

Tanım 3.2.3 $\alpha : I \rightarrow E^3$, $s \rightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$ eğrisi için s yay-parametresi olsun. Burada $\mathbf{t} = \mathbf{V}_1$ birim teğet, $\mathbf{n} = \mathbf{V}_2$ birim normal, $\mathbf{b} = \mathbf{V}_3$ binormal ve $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ Frenet 3-ayaklısı adını alır. Buna göre

$$\mathbf{t}(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} = \alpha'(s) \quad (3.1)$$

ve

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \frac{\mathbf{t}'(s)}{\|\mathbf{t}'(s)\|} \quad (3.2)$$

olmak üzere binormal vektör de

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s) \quad (3.3)$$

olarak verilir. Buradan da

$$\mathbf{b}(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

olur (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 3.2.4 (I, α) koordinat komşuluğu ile $M \subset E^n$ eğrisi verilsin. $s \in I$ yay parametresine karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r -ayaklısı $\{\mathbf{V}_1(s), \dots, \mathbf{V}_r(s)\}$ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} k_i : I &\rightarrow \mathbb{R} & 1 < i < r \\ s &\rightarrow k_i(s) = \langle \mathbf{V}'_i(s), \mathbf{V}_{i+1}(s) \rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i -yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M nin i -yinci eğrilik denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Teorem 3.2.1 (I, α) koordinat komşuluğu ile $M \subset E^n$ eğrisi verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasında i -yinci eğrilik fonksiyonu $k_i(s)$ ve Frenet r -ayaklısı $\{\mathbf{V}_1(s), \dots, \mathbf{V}_r(s)\}$ ise

$$\begin{aligned} \mathbf{V}'_1(s) &= k_1(s)\mathbf{V}_2(s) \\ \mathbf{V}'_i(s) &= -k_{i-1}(s)\mathbf{V}_{i-1}(s) + k_i(s)\mathbf{V}_{i+1}(s) & 1 < i < r \\ \mathbf{V}'_r(s) &= -k_{r-1}(s)\mathbf{V}_{r-1}(s) \end{aligned}$$

olur (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 3.2.5

$$\begin{aligned}\alpha: I &\rightarrow E^3 \\ s &\rightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))\end{aligned}$$

s yay parametresi ile verilen bir eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ olsun.

$$\begin{aligned}\mathbf{t}'(s) &= k_1(s)\mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) &= -k_1(s)\mathbf{t}(s) + k_2(s)\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) &= -k_2(s)\mathbf{n}(s)\end{aligned}$$

formüllerine Frenet formülleri denir. Burada $k_1 = \kappa$ ve $k_2 = \tau$ için

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

eşitliği mevcuttur (Hacısalıhoğlu, 1998). O halde

$$\begin{aligned}\mathbf{t}' &= \kappa\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= -\tau\mathbf{n}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

yazılabilir. Burada $k_2 = \tau$ ile gösterilir. τ ya kısaca α eğrisinin burulması denir.

Sonuç 3.2.1 $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi yay parametresi ile verilmiş olsun. $k_1(s) = \|\alpha''(s)\|$ değerine α eğrisinin s noktasındaki eğriliği denir (Carmo, 1976).

3.3 R_1^3 Minkowski Uzayı

1908 yılında, Alman matematikçi Hermann Minkowski tarafından geliştirilen özel göreliliğin temel kavramları olan uzay ve zaman profilini açıklamada oldukça başarılı bir diyagram olarak tanımlanan Minkowski uzayı; Matematik ve fizikte Albert Einstein'ın izafiyet teorisini formülize etmek için en uygun yöntemdir. Bu uzaydaki spacetime, uzayın genel 3 boyutu ile zamanın bir boyutunun birleştirilmesiyle elde edilen 4 boyutlu bir manifolddur. Hermann Minkowski uzay ve zamanı aynı durumda ele almış ve izafiyet teorisinden farklı olarak iki tarafı tek çatı altında birleştirmiştir.

Tanım 3.3.1 V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlı

$$g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü bilinear ve simetrik ise g ye V üzerinde simetrik bilinear form denir. Bu dönüşüm aynı zamanda nondejenere ise g ye V üzerinde bir skaler çarpım, bu durumda V vektör uzayına da bir skaler çarpım uzayı denir (O'Neill, 1983).

Ayrıca,

(i) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $g(\vec{v}, \vec{v}) > 0$ ise g simetrik bilineer formuna pozitif tanımlı,

(ii) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $g(\vec{v}, \vec{v}) < 0$ ise g simetrik bilineer formuna negatif tanımlı,

(iii) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $g(\vec{v}, \vec{v}) \geq 0$ ise bu durumda g simetrik bilineer formuna yarı-pozitif tanımlı,

(iv) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $g(\vec{v}, \vec{v}) \leq 0$ ise bu durumda g simetrik bilineer formuna yarı-negatif tanımlıdır denir.

Bundan başka,

(a) g nin nondejenere olması için gerek ve yeter koşul $g(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ ve $\forall \vec{w} \in V$ için $\vec{v} = 0$ olmasıdır.

(b) g nin dejenere olması için gerek ve yeter koşul $g(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ ve $\forall \vec{w} \in V$ için $\vec{v} \neq 0$ olmasıdır (O Neill, 1983).

Tanım 3.3.2 V bir skaler çarpım uzayı, W da üzerindeki skaler çarpım negatif tanımlı olacak şekilde V nin en büyük boyutlu altuzayı olsun. Bu durumda W nin boyutuna g skaler çarpımının indeksi denir (O Neill, 1983).

g skaler çarpımının indeksi ν ise $0 \leq \nu \leq \text{boy}V$ dir. Ayrıca V skaler çarpım uzayının indeksi, üzerinde tanımlı g skaler çarpımının indeksi olarak tanımlanır.

Tanım 3.3.3 V skaler çarpım uzayı olsun. V nin indeksi ν olmak üzere $\nu = 1$ ve $\text{boy}V \geq 2$ ise V skaler çarpım uzayına bir Lorentz uzayı denir (O Neill, 1983).

Tanım 3.3.4 V bir Lorentz uzayı olsun. $\mathbf{v} \in V$ için

i) $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$ veya $\mathbf{v} = 0$ ise \mathbf{v} ye spacelike vektör,

ii) $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) < 0$ ise \mathbf{v} ye timelike vektör,

iii) $g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ ve $\mathbf{v} \neq 0$ ise \mathbf{v} ye null (lightlike) vektör ve $\|\mathbf{v}\| = |g(\mathbf{v}, \mathbf{v})|^{1/2}$ reel sayısına da ν vektörünün normu denir. V Lorentz uzayında tüm timelike vektörlerin cümlesi Γ olsun.

$\mathbf{u} \in \Gamma$ için

$$C(\mathbf{u}) = \{\mathbf{v} \in \Gamma \mid g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) < 0\}$$

kümesine \mathbf{u} vektörünü kapsayan V Lorentz uzayının time-konisi denir (O'Neill, 1983).



Teorem 3.3.1 V Lorentz uzayı ve iki timelike vektör \mathbf{v} ve \mathbf{w} olsun. Bu durumda

$$i) |g(\mathbf{v}, \mathbf{w})| \geq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlikte eşitlik olması için gerek ve yeter şart \mathbf{v} ve \mathbf{w} vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır.

ii) \mathbf{v} , \mathbf{w} timelike vektörleri aynı time-konide ise

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\| \cosh \varphi$$

olacak şekilde bir tek $\varphi \geq 0$ sayısı vardır. Bu φ sayısına, \mathbf{v} ve \mathbf{w} timelike vektörleri arasındaki hiperbolik açı denir (O'Neill, 1983).

Burada \mathbf{v} ve \mathbf{w} vektörleri aynı time-konide değilseler o zaman

$$|g(\mathbf{v}, \mathbf{w})| = \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\| \cosh \varphi$$

dir. V Lorentz uzayında spacelike vektörler \mathbf{v} ve \mathbf{w} olmak üzere

$$\cos \theta = \frac{g(\mathbf{v}, \mathbf{w})}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|}$$

olacak şekilde bir tek $0 \leq \theta \leq \pi$ sayısı vardır. Bu sayıya, \mathbf{v} ve \mathbf{w} spacelike vektörler arasındaki açı denir. \mathbf{v} ve \mathbf{w} spacelike vektörler için

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$$

eşitsizliği vardır .

Tanım 3.3.5 \mathbb{R}_1^3 Minkowski uzayında $M \subset \mathbb{R}_1^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet üçyüzlüsü $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} \kappa : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\rightarrow \kappa(s) = \langle \mathbf{t}', \mathbf{n} \rangle \end{aligned} \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlanan κ fonksiyonuna α eğrisinin eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $\kappa(s)$ sayısına da M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir (Kobayashi, 1983).

Tanım 3.3.6 \mathbb{R}_1^3 Minkowski uzayında $M \subset \mathbb{R}_1^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet üçyüzlüsü $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} \tau : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\rightarrow \tau(s) = \langle \mathbf{n}', \mathbf{b} \rangle \end{aligned} \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanan τ fonksiyonuna α eğrisinin burulma fonksiyonu ve $\tau(s)$ sayısına da M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir (Kobayashi, 1983).

Ayrıca Minkowski 3-uzayında bir timelike eğri için $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ Frenet çatısındaki teğet vektörü timelike vektör, normal vektör ile binormal vektör spacelike vektörler olarak alınsın. Birim hızlı bir timelike eğrinin Serret-Frenet çatısının türev formülleri

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

denklemleri ile verilir (Lopez, 2014).

3.4 Yarı-Riemann Manifolları

Tanım 3.4.1 M diferensiyellenebilir bir manifoldun üzerinde simetrik, nondejenere ve sabit indeksli $(0, 2)$ -tipinden g tensör alanına bir metrik tensör denir. Başka bir deyişle g , M manifoldunun her p noktasına $T_p M$ tanjant uzayı üzerinde bir g_p skaler çarpımı karşılık getirir ve g skaler çarpımının indeksi her $p \in M$ için aynıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 3.4.2 \mathbb{R}^3 , standart reel vektör uzayı üzerinde her $p \in \mathbb{R}^3$ ve

$$\mathbf{v}_p = (v_1, v_2, v_3), \quad \boldsymbol{\omega}_p = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in T_p \mathbb{R}^3$$

olmak üzere

$$g : \langle \mathbf{v}_p, \boldsymbol{\omega}_p \rangle = v_1 \omega_1 + v_2 \omega_2 - v_3 \omega_3$$

eşitliğiyle verilen 1-indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya \mathbb{R}_1^3 3-boyutlu Minkowski uzayı denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.4.3 M diferensiyellenebilir bir manifold ve g de M üzerinde sabit indeksli bir metrik tensör olmak üzere (M, g) ikilisine bir yarı-Riemann manifoldu denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.4.4 M bir yarı-Riemann manifoldu olsun. g nin sabit indeksine M yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.4.5 M bir yarı-Riemann manifoldu olsun. $boyM \geq 2$ ve M nin indeksi 1 ise M ye bir Lorentz manifoldu denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.4.6 M bir Lorentz manifoldu ve $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ bir eğri olsun. α eğrisinin teğet vektör alanı \mathbf{t} olmak üzere

- i) $g(\mathbf{t}, \mathbf{t}) > 0$ ise α eğrisine spacelike eğri,
- ii) $g(\mathbf{t}, \mathbf{t}) < 0$ ise α eğrisine timelike eğri,
- iii) $g(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = 0$ ve $\mathbf{t} \neq 0$ ise α eğrisine null eğri denir (O'Neill, 1983).

Eğrinin bir özel hali olan doğruyu göz önüne alalım. Doğrunun doğrultman vektörü spacelike ise doğru spacelike doğru, doğrultman vektörü timelike ise doğru timelike doğru, doğrultman vektörü null ise doğru null doğrudur.

3.5 \mathbb{R}_1^3 Minkowski Uzayı Üzerinde Vektörel Çarpım

Tanım 3.5.1 \mathbb{R}_1^3 Minkowski uzayında iki vektör \mathbf{v} ve ω olsun. $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ olmak üzere

$$(v_3\omega_2 - v_2\omega_3, v_1\omega_3 - v_3\omega_1, v_1\omega_2 - v_2\omega_1)$$

vektörüne \mathbf{v} ve ω nin vektörel çarpımı (veya dış çarpımı) denir. $\mathbf{v} \times \omega$ veya $\mathbf{v} \wedge \omega$ şeklinde gösterilir (Akutagawa ve Nishikawa, 1990).

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \text{ ise} \\ 0 & , i \neq j \text{ ise} \end{cases} \text{ ve } e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$$

olmak üzere

$$\mathbf{v} \wedge \omega = -\det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{bmatrix}$$

veya

$$\mathbf{v} \wedge \omega = \det \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanabilir. Burada

$$e_1 \wedge e_2 = e_3, e_2 \wedge e_3 = -e_1, e_3 \wedge e_1 = -e_2$$

dir. Saat yönünün ters yönü pozitif yön olarak alınmıştır.

Saat yönünün tersi negatif yön olarak kabul edilecek olursa o zaman

$$e_1 \wedge e_2 = -e_3, e_2 \wedge e_3 = e_1, e_3 \wedge e_1 = e_2$$

olur. Bu durumda

$$\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{bmatrix}$$

biçimindedir (Turgut, 1995).

Teorem 3.5.1 \mathbb{R}_1^3 Minkowski uzayında üç vektör $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} i) \quad \langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega} \rangle &= -\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}) \\ ii) \quad (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \boldsymbol{\omega} &= -\langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega} \rangle \mathbf{v} + \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega} \rangle \mathbf{u} \\ iii) \quad \langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle &= 0 \text{ ve } \langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \\ iv) \quad \langle \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \rangle &= -\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + (\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 \end{aligned}$$

dir (Turgut, 1995).

Teorem 3.5.2 \mathbb{R}_1^3 3- boyutlu Minkowski uzayında $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ iki vektör olsun. Bu durumda

i) \mathbf{u} ve \mathbf{v} spacelike vektör ise $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ bir timelike vektördür.

ii) \mathbf{u} spacelike ve \mathbf{v} timelike vektör ise $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ bir spacelike vektördür.

iii) \mathbf{u} spacelike ve \mathbf{v} null vektör olmak üzere $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ ise $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ null vektör, eğer $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$ ise $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ bir spacelike vektördür.

iv) \mathbf{u} ve \mathbf{v} null vektörler ise $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ bir spacelike vektördür.

v) \mathbf{u} timelike ve \mathbf{v} null vektör ise $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ bir spacelike vektördür.

vi) \mathbf{u} ve \mathbf{v} timelike ise $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ bir spacelike vektördür (Turgut, 1995).

3.6 Uzay Eğrisi Boyunca q-Çatı

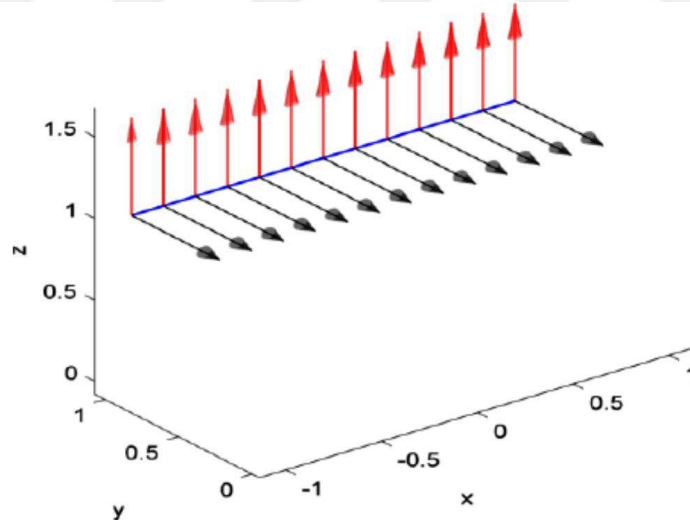
Dede ve arkadaşları bir uzay eğrisi boyunca tanımladıkları q-çatısının Frenet çatısına göre bazı önemli avantajları vardır. Bunlardan biri bu çatının ikinci türevinin tanımsız olduğu bir eğri için de tanımlanabilmesi ve teğet etrafında gereksiz bükülmenin önüne geçmesidir.

Bu kısımda bir uzay eğrisi boyunca q-çatı tanımlanmış ve q-eğrilikleri elde edilmiştir.

$\mathbf{k}_z = (0, 0, 1)$ ve $\mathbf{X} = (x, y, z)$ olsun.

$$\mathbf{X} \wedge \mathbf{k}_z = (x, y, z) \wedge (0, 0, 1) = (y, -x, 0)$$

olduğundan \mathbf{X} vektörü xy -düzlemine izdüşürülmüş olur. Buna göre \mathbf{k} izdüşüm vektörü eksenler doğrultusunda birim vektör olarak alınır. Bir eğrinin \mathbf{t} teğet vektörü ile \mathbf{k} izdüşüm vektörü paralel ise $\mathbf{t} \wedge \mathbf{k} = 0$ olduğu dikkate alınmalıdır. z -ekseni, y -ekseni ve x -ekseni yönündeki q-çatıları



Şekil 3.1: İzdüşüm vektörü

sırasıyla, $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q, \mathbf{k}_z\}$, $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q, \mathbf{k}_y\}$ ve $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q, \mathbf{k}_x\}$ ile gösterilir. Şekil 3.1 ile bir doğru boyunca y -ekseni yönündeki q-çatısı gösterilmiştir. Burada izdüşüm vektörleri sırasıyla $\mathbf{k}_z = (0, 0, 1)$, $\mathbf{k}_y = (0, 1, 0)$ ve $\mathbf{k}_x = (1, 0, 0)$ olur (Dede vd., 2015).

Tanım 3.6.1 Bir uzay eğrisi boyunca yönlü q-çatı

$$\mathbf{t} = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \mathbf{n}_q = \frac{\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}}{\|\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}\|}, \mathbf{b}_q = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q \quad (3.7)$$

olarak tanımlanır. Burada \mathbf{k} izdüşüm vektörüdür ve \mathbf{t} eğrinin teğeti, \mathbf{n}_q eğrinin quasi-normali ve \mathbf{b}_q ise eğrinin quasi-binormali olarak adlandırılır (Dede vd., 2015).

Teorem 3.6.1 Bir uzay eğrisi boyunca q-çatının Frenet formülleri benzeri varyasyon denklemi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}'_q \\ \mathbf{b}'_q \end{bmatrix} = \|\alpha'\| \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & k_3 \\ -k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

şeklindedir. q-eğrilikleri ise

$$k_1 = \frac{\langle \mathbf{t}', \mathbf{n}_q \rangle}{\|\alpha'\|}, k_2 = \frac{\langle \mathbf{t}', \mathbf{b}_q \rangle}{\|\alpha'\|}, k_3 = \frac{\langle \mathbf{n}'_q, \mathbf{b}_q \rangle}{\|\alpha'\|} \quad (3.9)$$

olarak ifade edilebilir (Dede vd., 2015).

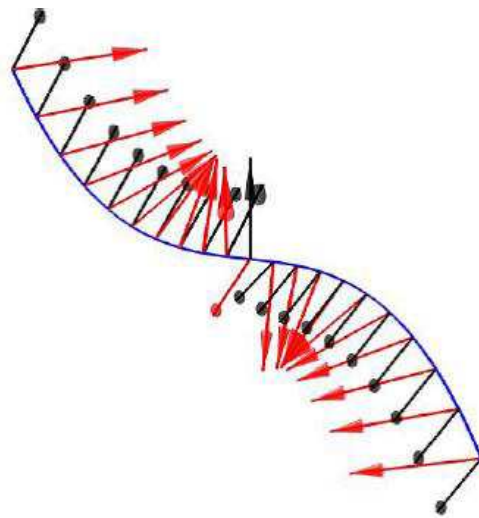
Örnek 3.6.1 $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t^3)$ eğrisi verilsin. İzdüşüm vektörü $\mathbf{k}_z = (0, 0, 1)$ olan z eksenini yönündeki q-çatısı

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \frac{1}{\sqrt{1+9t^2}}(-\sin(t), \cos(t), 3t^2) \\ \mathbf{n}_q &= (\cos(t), \sin(t), 0) \\ \mathbf{b}_q &= \frac{1}{\sqrt{1+9t^2}}(-3t^2 \sin(t), 3t^2 \cos(t), -\sqrt{1+9t^2}) \end{aligned}$$

olarak bulunur. q-eğrilikleri ise

$$k_1 = -\frac{1}{\sqrt{1+9t^2}}, k_2 = -\frac{6t}{1+9t^2}, k_3 = \frac{3t^2}{\sqrt{1+9t^2}}$$

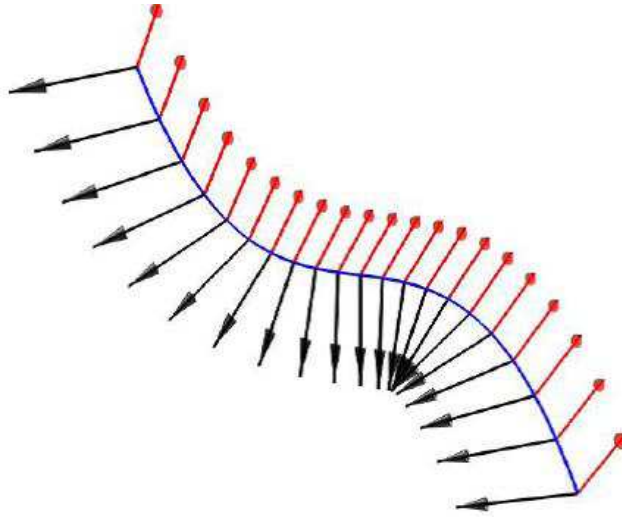
olarak elde edilir (Dede vd.,2015).



Şekil 3.2: Frenet çatısı

Şekil 3.2 de α eğrisi boyunca Frenet çatısı ile normal düzlem vektörleri gösterilmiştir.

Aynı α eğrisi boyunca z-ekseni yönündeki q-çatısı için normal düzlem vektörleri Şekil 3.3 ile verilmiştir.



Şekil 3.3: q-çatısı

Teorem 3.6.2 Öklid uzayında $\alpha(t)$ düzgün bir eğri olsun. q-eğrilikler $\alpha(t)$ eğrisinin türevleri cinsinden

$$k_1 = \frac{\det[\alpha'', \alpha', \mathbf{k}]}{\|\alpha' \wedge \mathbf{k}\| \|\alpha'\|^2}$$

$$k_2 = \frac{\langle \alpha', \mathbf{k} \rangle \langle \alpha'', \alpha' \rangle - \|\alpha'\|^2 \langle \alpha'', \mathbf{k} \rangle}{\|\alpha'\|^3 \|\alpha' \wedge \mathbf{k}\|}$$

ve

$$k_3 = \frac{\langle \alpha', \mathbf{k} \rangle \det[\alpha', \alpha'', \mathbf{k}]}{\|\alpha' \wedge \mathbf{k}\|^2 \|\alpha'\|^2}$$

bu şekilde verilmektedir (Dede vd., 2015).

Sonuç 3.6.1 q-çatının k_1, k_2, k_3 q-eğrilikleri izdüşüm vektörü \mathbf{k} ya bağlı olduğu kolayca görülür (Dede vd., 2015).

3.7 Frenet Çatısı ile q-Çatı Arasındaki Bağlılıklar

\mathbb{R}^3 3-boyutlu uzayda keyfi parametreye bağlı herhangi bir uzay eğrisi için Frenet vektörleri

$$\mathbf{t} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, \mathbf{b} = \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}, \mathbf{n} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{t} \quad (3.10)$$

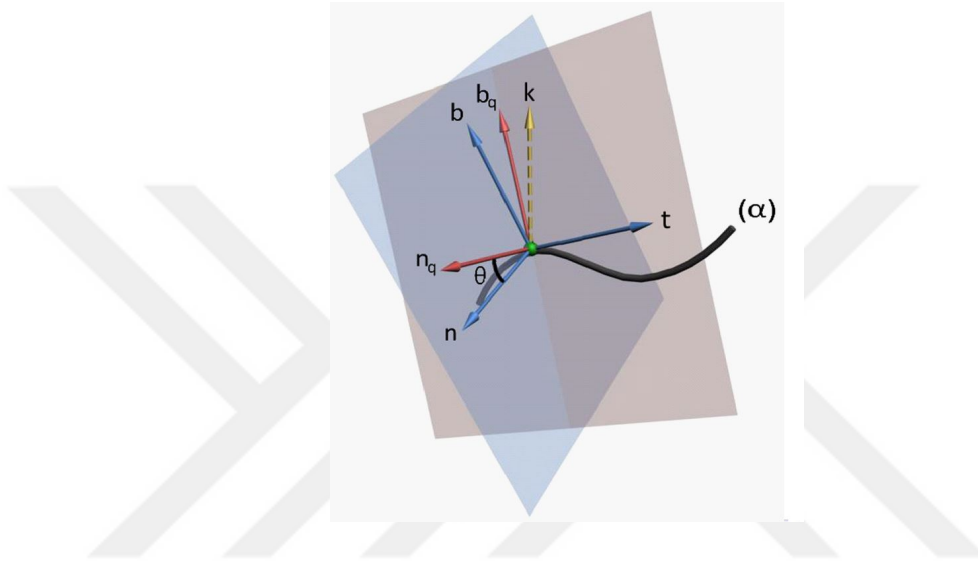
olarak verilir. Ayrıca eğrinin eğriliği κ ve eğrinin burulması τ olmak üzere

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2} \quad (3.11)$$

şeklinde ifade edilir (Sabuncuoğlu, 2010). Şekil 3.4 ile verilmiş olan Frenet çatısı ile q-çatısı arasındaki ilişki ise

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

olarak ifade edilir (Dede vd., 2015).



Şekil 3.4: q-çatısı ve Frenet çatısı

Teorem 3.7.1 $\alpha(s)$ yay parametresi ile verilen bir uzay eğrisi olsun. $\|\alpha'\| = 1$ dir. \mathbf{n} ve \mathbf{n}_q vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere q-eğrilikleri ve Frenet eğrilikleri arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} k_1 &= \kappa \cos \theta \\ k_2 &= -\kappa \sin \theta \\ k_3 &= d\theta + \tau \end{aligned} \quad (3.13)$$

şeklindedir (Dede ve Ekici, 2016).

3.8 Smarandache Eğrileri

Tanım 3.8.1 Konum vektörü, herhangi bir α eğrisinin Frenet çatıları tarafından oluşturulan ve bu vektör tarafından çizilen regüler eğriye Smarandache eğrisi denir (Turgut ve Yılmaz, 2008). Bir başka ifade ile $\alpha : I \rightarrow E^3$ birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ olsun. Konum vektörü

$$\beta(s) = \frac{a(s)\mathbf{t}(s) + b(s)\mathbf{n}(s) + c(s)\mathbf{b}(s)}{\sqrt{a^2(s) + b^2(s) + c^2(s)}} \quad (3.14)$$

olan vektörün çizdiği regüler eğriye Smarandache eğrisi denir (Şenyurt ve Sivas, 2013).

Tanım 3.8.2 Herhangi bir $\alpha : I \rightarrow E^3$ birim hızlı regüler eğrisinin Frenet çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ olsun

$$\beta_{tn}(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{t} + \mathbf{n}) \quad (3.15)$$

eğrisi \mathbf{tn} -Smarandache eğrisi olarak adlandırılır,

$$\beta_{tb}(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{t} + \mathbf{b}). \quad (3.16)$$

eğrisi \mathbf{tb} -Smarandache eğrisi olarak adlandırılır,

$$\beta_{nb}(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{n} + \mathbf{b}) \quad (3.17)$$

eğrisi \mathbf{nb} -Smarandache eğrisi olarak adlandırılır,

$$\beta_{tnb}(s^*) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{t} + \mathbf{n} + \mathbf{b}) \quad (3.18)$$

eğrisi \mathbf{tnb} -Smarandache eğrisi olarak adlandırılır (Ali, 2010).

3.9 Minkowski Uzayında Spacelike Eğriler İçin q-Çatısı

Bu kısımda spacelike eğrilerin q-çatısı elde edilmiştir. Özel olarak \mathbf{k} izdüşüm vektörünün timelike veya spacelike olması, normal ve binormal vektörlerin timelike veya spacelike kabul edilmesi durumlarında quasi-normal vektör, quasi-binormal vektör ve q-eğrilikleri arasındaki ilişki ve q-çatısı ile Frenet çatısı arasındaki denklemler verilmiştir.

Teorem 3.9.1 Normal vektörü spacelike, binormal vektörü timelike olan spacelike eğrilerin; Minkowski 3-uzayında birim teğet vektör \mathbf{t} (spacelike), izdüşüm vektör $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ (timelike), quasi-normal vektör \mathbf{n}_q (spacelike) ve quasi-binormal vektör \mathbf{b}_q (timelike) olduğunda spacelike eğri boyunca q-çatının Frenet formülleri benzeri varyasyon denklemi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}'_q \\ \mathbf{b}'_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & -k_2 \\ -k_1 & 0 & -k_3 \\ -k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

şeklindedir. q-eğrilikleri ise

$$k_1 = \kappa \cosh \theta, k_2 = \kappa \sinh \theta, k_3 = -d\theta - \tau$$

şeklinde gösterilebilir (Ekici ve Tarım, 2017; Tarım, 2016).

Teorem 3.9.2 Normal vektörü timelike, binormal vektörü spacelike olan spacelike eğrilerin; Minkowski 3-uzayında birim teğet vektör \mathbf{t} (spacelike), izdüşüm vektör $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ (timelike), quasi-normal vektör \mathbf{n}_q (spacelike) ve quasi-binormal vektör \mathbf{b}_q (timelike) olduğunda spacelike eğri boyunca q-çatının Frenet formülleri benzeri varyasyon denklemi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}'_q \\ \mathbf{b}'_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & -k_2 \\ -k_1 & 0 & -k_3 \\ -k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

şeklindedir. q-eğrilikleri ise

$$k_1 = \kappa \sinh \theta, k_2 = -\kappa \cosh \theta, k_3 = d\theta + \tau$$

şeklinde gösterilebilir (Ekici ve Tarım, 2017; Tarım, 2016).

Teorem 3.9.3 Normal vektörü timelike, binormal vektörü spacelike olan spacelike eğrilerin; Minkowski 3-uzayında birim teğet vektör \mathbf{t} (spacelike), izdüşüm vektör $\mathbf{k} = (0, 1, 0)$ (spacelike), quasi-normal vektör \mathbf{n}_q (timelike) ve quasi-binormal vektör \mathbf{b}_q (spacelike) olduğunda spacelike eğri boyunca q-çatının Frenet formülleri benzeri varyasyon denklemi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}'_q \\ \mathbf{b}'_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & k_3 \\ -k_2 & k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

şeklindedir. q-eğrilikleri ise

$$k_1 = -\kappa \cosh \theta, k_2 = -\kappa \sinh \theta, k_3 = d\theta + \tau$$

şeklinde gösterilebilir (Ekici ve Tarım, 2017; Tarım, 2016).

Teorem 3.9.4 Normal vektörü spacelike, binormal vektörü timelike olan spacelike eğrilerin; Minkowski 3-uzayında birim teğet vektör \mathbf{t} (spacelike), izdüşüm vektör $\mathbf{k} = (0, 1, 0)$ (spacelike), quasi-normal vektör \mathbf{n}_q (timelike) ve quasi-binormal vektör \mathbf{b}_q (spacelike) olduğunda spacelike eğri boyunca q-çatının Frenet formülleri benzeri varyasyon denklemi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}'_q \\ \mathbf{b}'_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & k_3 \\ -k_2 & k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

şeklindedir. q-eğrilikleri ise

$$k_1 = \kappa \sinh \theta, k_2 = -\kappa \cosh \theta, k_3 = -d\theta - \tau$$

şeklinde gösterilebilir (Ekici ve Tarım, 2017; Tarım, 2016).

3.10 Minkowski Uzayında Timelike Eğriler İçin q-Çatısı

Bu kısımda timelike eğrilerin q-çatısı elde edilmiştir. \mathbf{k} izdüşüm vektörünün timelike veya spacelike seçilmesi farklı sonuçlar vermeyeceği için sadece spacelike kabul edilmesi durumunda bulunan eşitlikler ve q-eğrilikleri arasındaki bağıntıları, q-çatısı ile Frenet çatısı arasındaki denklemler verilmiştir.

Teorem 3.10.1 Minkowski 3-uzayında birim teğet vektör \mathbf{t} (timelike), izdüşüm vektör $\mathbf{k} = (0, 1, 0)$ (spacelike), quasi-normal vektör \mathbf{n}_q (spacelike) ve quasi-binormal vektör \mathbf{b}_q (spacelike) olduğunda timelike eğri boyunca q-çatının Frenet formülleri benzeri varyasyon denklemi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}'_q \\ \mathbf{b}'_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ k_1 & 0 & k_3 \\ k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

şeklindedir. q-eğrilikleri ise

$$k_1 = \kappa \cos \theta, k_2 = -\kappa \sin \theta, k_3 = d\theta + \tau \quad (3.24)$$

şeklinde ifade edilebilir (Ekici ve Tarım, 2017; Tarım, 2016).

4. ÖKLİD UZAYINDA q -ÇATILI SMARANDACHE EĞRİLER

Bu bölümde Öklid uzayında alınan bir uzay eğrisinin $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ q -çatısının vektörleri kullanılarak \mathbf{tn}_q -Smarandache eğrisi, \mathbf{tb}_q -Smarandache eğrisi, $\mathbf{n}_q\mathbf{b}_q$ -Smarandache eğrisi ve $\mathbf{tn}_q\mathbf{b}_q$ -Smarandache eğrisi tanımlanmış, bu eğriler üzerinden uygun hesaplamalar ile Frenet vektörleri ve eğrilikleri bulunmuştur. Elde edilen eşitliklerden bu Smarandache eğrilerinin $\mathbf{t}_\beta, \mathbf{n}_q^\beta, \mathbf{b}_q^\beta$ q -çatı vektörleri ve q -eğrilikleri elde edilmiştir.

4.1 \mathbf{tn}_q -Smarandache Eğrisi

$\alpha : I \rightarrow E^3$ birim hızlı regüler eğrisinin q -çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ olsun. \mathbf{tn}_q -Smarandache eğrisi, $\beta : I \rightarrow E^3$, s^* yay-parametresi ile verilsin. Buna göre

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{t} + \mathbf{n}_q) \quad (4.1)$$

olarak yazılır. Burada s parametresine göre türev alınırsa

$$\beta' = \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{t}' + \mathbf{n}_q') \quad (4.2)$$

bulunur. $\frac{d\beta}{ds^*} = t_\beta$ olup (4.2) eşitliğinde Teorem 3.6.1 kullanılırsa

$$\mathbf{t}_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-k_1\mathbf{t} + k_1\mathbf{n}_q + (k_2 + k_3)\mathbf{b}_q) \quad (4.3)$$

olur. İki tarafın normunun karesi alınırsa

$$\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 = \frac{1}{2}(k_1^2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + k_1^2 \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle + (k_2 + k_3)^2 \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle) \quad (4.4)$$

elde edilir. $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 1$ olduğundan

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{k_1^2 + \frac{1}{2}(k_2 + k_3)^2} \quad (4.5)$$

olur. (4.3) eşitliğinde (4.5) eşitliği kullanılırsa

$$\mathbf{t}_\beta = \frac{1}{\sqrt{2k_1^2 + (k_2 + k_3)^2}}(-k_1\mathbf{t} + k_1\mathbf{n}_q + (k_2 + k_3)\mathbf{b}_q) \quad (4.6)$$

bulunur ve $\mu = 2k_1^2 + (k_2 + k_3)^2$ olarak alınıp s parametresine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} &= \frac{-1}{2\mu^{\frac{3}{2}}} (4k_1k_1' + 2(k_2 + k_3)(k_2' + k_3')) (-k_1\mathbf{t} + k_1\mathbf{n}_q + (k_2 + k_3)\mathbf{b}_q) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\mu}} (-k_1'\mathbf{t} - k_1\mathbf{t}' + k_1'\mathbf{n}_q + k_1\mathbf{n}_q' + (k_2' + k_3')\mathbf{b}_q + (k_2 + k_3)\mathbf{b}_q') \end{aligned} \quad (4.7)$$

elde edilir. Teorem 3.6.1 kullanılırsa

$$\frac{d\mathbf{t}_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{-1}{\mu^{\frac{3}{2}}} \left[\begin{array}{l} (2k_1k_1' + (k_2 + k_3)(k_2' + k_3')) (-k_1\mathbf{t} + k_1\mathbf{n}_q + (k_2 + k_3)\mathbf{b}_q) \\ -\mu(-k_1'\mathbf{t} - k_1\mathbf{t}' - k_1k_2\mathbf{b}_q + k_1'\mathbf{n}_q - k_1^2\mathbf{t} + k_1k_3\mathbf{b}_q \\ + (k_2' + k_3')\mathbf{b}_q - k_2^2\mathbf{t} - k_2k_3\mathbf{n}_q - k_2k_3\mathbf{t} - k_3^2\mathbf{n}_q) \end{array} \right] \quad (4.8)$$

olur. Burada $\Delta = k_1^2 \left(\frac{k_2 + k_3}{k_1} \right)'$ olarak alınır, \mathbf{t} , \mathbf{n}_q ve \mathbf{b}_q vektörlerinin katsayıları sırasıyla

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2k_1^4 - k_1^2(k_2 + k_3) \left(\frac{\Delta}{k_1^2} - 3k_2 - k_3 \right) + \mu k_2(k_2 + k_3) \\ \lambda_2 &= 2k_1^4 + k_1^2(k_2 + k_3) \left(\frac{\Delta}{k_1^2} + k_2 + k_3 \right) + \mu k_3(k_2 + k_3) \\ \lambda_3 &= -2k_1\Delta + \mu k_1(k_2 - k_3) \end{aligned} \quad (4.9)$$

olarak ifade edilirse (4.8) eşitliği

$$\frac{d\mathbf{t}_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{-1}{\mu^{\frac{3}{2}}} (\lambda_1\mathbf{t} + \lambda_2\mathbf{n}_q + \lambda_3\mathbf{b}_q) \quad (4.10)$$

şeklinde yazılır. $\frac{d\mathbf{t}_\beta}{ds^*} = \mathbf{t}'_\beta$ olup (4.5) eşitliği, (4.10) eşitliğinde yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\mathbf{t}'_\beta = \frac{-\sqrt{2}}{\mu^2} (\lambda_1\mathbf{t} + \lambda_2\mathbf{n}_q + \lambda_3\mathbf{b}_q) \quad (4.11)$$

olur. Bu ifadenin normu alınırsa

$$\kappa_\beta = \|\mathbf{t}'_\beta\| = \sqrt{\langle \mathbf{t}'_\beta, \mathbf{t}'_\beta \rangle} = \frac{\sqrt{2}}{\mu^2} \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \quad (4.12)$$

bulunur. $\eta = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ olarak alınıp Tanım 3.2.3 gereği (4.11) ve (4.12) eşitlikleri kullanılırsa

$$\mathbf{n}_\beta = \frac{-1}{\sqrt{\eta}} (\lambda_1\mathbf{t} + \lambda_2\mathbf{n}_q + \lambda_3\mathbf{b}_q) \quad (4.13)$$

olur. (4.6) ve (4.13) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_\beta &= \frac{-1}{\sqrt{\mu\eta}} [(-k_1\mathbf{t} + k_1\mathbf{n}_q + (k_2 + k_3)\mathbf{b}_q) \wedge (\lambda_1\mathbf{t} + \lambda_2\mathbf{n}_q + \lambda_3\mathbf{b}_q)] \\ &= \frac{-1}{\sqrt{\mu\eta}} \left[\begin{array}{l} -k_1\lambda_1(\mathbf{t} \wedge \mathbf{t}) - k_1\lambda_2(\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q) - k_1\lambda_3(\mathbf{t} \wedge \mathbf{b}_q) + k_1\lambda_1(\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{t}) \\ + k_1\lambda_2(\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{n}_q) + k_1\lambda_3(\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{b}_q) + (k_2 + k_3)\lambda_1(\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{t}) \\ + (k_2 + k_3)\lambda_2(\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{n}_q) + (k_2 + k_3)\lambda_3(\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{b}_q) \end{array} \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

olarak hesaplanır, Tanım 3.6.1 kullanılırsa

$$\mathbf{b}_\beta = \frac{-1}{\sqrt{\mu\eta}} \left[(k_1\lambda_3 - (k_2 + k_3)\lambda_2)\mathbf{t} + (k_1\lambda_3 + (k_2 + k_3)\lambda_2)\mathbf{n}_q + (-k_1\lambda_2 - k_1\lambda_1)\mathbf{b}_q \right] \quad (4.15)$$

bulunur. t , n_q ve b_q katsayıları sırasıyla σ_1 , σ_2 ve σ_3 ile gösterilirse

$$\sigma_1 = k_1\lambda_3 - (k_2 + k_3)\lambda_2 \quad \sigma_2 = k_1\lambda_3 + (k_2 + k_3)\lambda_2 \quad \sigma_3 = -k_1\lambda_2 - k_1\lambda_1 \quad (4.16)$$

olur ve (4.15) eşitliği

$$\mathbf{b}_\beta = \frac{-1}{\sqrt{\mu\eta}} (\sigma_1\mathbf{t} + \sigma_2\mathbf{n}_q + \sigma_3\mathbf{b}_q) \quad (4.17)$$

şeklinde ifade edilir. Buraya kadar t_β , n_β ve b_β vektörleri bulundu. Şimdi τ_β hesabı için β' , β'' ve β''' eşitlikleri gerekli olup bunun için (4.3) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınır

$$\frac{d\beta'}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-k'_1\mathbf{t} + k'_1\mathbf{n}_q + (k'_2 + k'_3)\mathbf{b}_q - k_1\mathbf{t}' + k_1\mathbf{n}'_q + (k_2 + k_3)\mathbf{b}'_q) \quad (4.18)$$

bulunur. Teorem 3.6.1 kullanır

$$\beta'' = \frac{-1}{\sqrt{2}} [(k'_1 + k_1^2 + k_2(k_2 + k_3))\mathbf{t} - (k'_1 - k_1^2 - k_3(k_2 + k_3))\mathbf{n}_q - (k'_2 + k'_3 - k_1(k_2 - k_3))\mathbf{b}_q] \quad (4.19)$$

olur. Türev alınır ve $\kappa = k_1^2 + k_2^2$ eşitliği kullanılarak düzenlenirse

$$\beta''' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{l} (-k''_1 - 3k'_1k_1 + (k_2(k_2 + k_3))' - k_2(k_2 + k_3)' + k_1(\kappa + k_3^2))\mathbf{t} \\ + (k''_1 - 3k_1k'_1 + (k_3(k_2 + k_3))' - k_2(k_2 + k_3)' - k_1(k_1^2 + 2k_2k_3))\mathbf{n}_q \\ + (k''_2 + k''_3 - (k_1(k_2 - k_3))' - k'_1(k_2 - k_3) - (k_2 + k_3)(\kappa + k_3^2))\mathbf{b}_q \end{array} \right] \quad (4.20)$$

bulunur. t , n_q ve b_q katsayıları sırasıyla ρ_1 , ρ_2 ve ρ_3 ile gösterilirse

$$\begin{aligned} \rho_1 &= -k''_1 - 3k'_1k_1 + (k_2(k_2 + k_3))' - k_2(k_2 + k_3)' + k_1(\kappa + k_3^2) \\ \rho_2 &= k''_1 - 3k_1k'_1 + (k_3(k_2 + k_3))' - k_2(k_2 + k_3)' - k_1(k_1^2 + 2k_2k_3) \\ \rho_3 &= k''_2 + k''_3 - (k_1(k_2 - k_3))' - k'_1(k_2 - k_3) - (k_2 + k_3)(\kappa + k_3^2) \end{aligned} \quad (4.21)$$

olur ve (4.20) eşitliği

$$\beta''' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\rho_1\mathbf{t} + \rho_2\mathbf{n}_q + \rho_3\mathbf{b}_q) \quad (4.22)$$

şeklinde ifade edilir. (4.3), (4.19) ve (4.22) kullanılarak istenilen eşitlikler

$$\beta' \wedge \beta'' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Delta + k_3\mu, -\Delta + k_2\mu, k_1\mu) \quad (4.23)$$

ve

$$\langle \beta' \wedge \beta'', \beta''' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\Delta + k_3\mu)\rho_1 + (-\Delta + k_2\mu)\rho_2 + k_1\mu\rho_3] \quad (4.24)$$

olur. Bulunan eşitlikler (3.11) eşitliği göz önünde bulundurularak kullanılırsa

$$\tau_\beta = \left[\frac{\sqrt{2}(\Delta(\rho_1 - \rho_2) + \mu(k_3\rho_1 + k_2\rho_2 + k_1\rho_3))}{(\Delta + k_3\mu)^2 + (\Delta - k_2\mu)^2 + (k_1\mu)^2} \right] \quad (4.25)$$

elde edilir. β eğrisinin quasi-normal ve quasi binormal vektörleri, (4.13) ve (4.17) eşitlikleri kullanılarak (3.12) eşitliğinde yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\mathbf{n}_q^\beta = \frac{-1}{\sqrt{\mu\eta}} \left[\begin{array}{l} (\sqrt{\mu}\lambda_1 \cos \theta_\beta + \sigma_1 \sin \theta_\beta)\mathbf{t} + (\sqrt{\mu}\lambda_2 \cos \theta_\beta + \sigma_2 \sin \theta_\beta)\mathbf{n}_q \\ + (\sqrt{\mu}\lambda_3 \cos \theta_\beta + \sigma_3 \sin \theta_\beta)\mathbf{b}_q \end{array} \right] \quad (4.26)$$

ve

$$\mathbf{b}_q^\beta = \frac{1}{\sqrt{\mu\eta}} \left[\begin{array}{l} (\sqrt{\mu}\lambda_1 \sin \theta_\beta - \sigma_1 \cos \theta_\beta)\mathbf{t} + (\sqrt{\mu}\lambda_2 \sin \theta_\beta - \sigma_2 \cos \theta_\beta)\mathbf{n}_q \\ + (\sqrt{\mu}\lambda_3 \sin \theta_\beta - \sigma_3 \cos \theta_\beta)\mathbf{b}_q \end{array} \right] \quad (4.27)$$

olarak hesaplanır.

k_1^β ve k_2^β eğriliklerini bulmak için (4.11), (4.26) ve (4.27) eşitlikleri kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$k_1^\beta = \langle \mathbf{t}'_\beta, \mathbf{n}_q^\beta \rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mu^5\eta}} (\cos \theta_\beta \sqrt{\mu\eta} + \sin \theta_\beta (\sigma_1 \lambda_1 + \sigma_2 \lambda_2 + \sigma_3 \lambda_3)) \quad (4.28)$$

ve

$$k_2^\beta = \langle \mathbf{t}'_\beta, \mathbf{b}_q^\beta \rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mu^5\eta}} (-\sin \theta_\beta \sqrt{\mu\eta} + \cos \theta_\beta (\sigma_1 \lambda_1 + \sigma_2 \lambda_2 + \sigma_3 \lambda_3)) \quad (4.29)$$

bulunur. k_3^β eğriliği için (4.26) eşitliğinin türevi alınırsa

$$\mathbf{n}_q^{\beta'} = \frac{(\mu\eta)'}{2(\mu\eta)^{\frac{3}{2}}} \left[\begin{array}{l} (\sqrt{\mu}\lambda_1 \cos \theta_\beta + \sigma_1 \sin \theta_\beta)\mathbf{t} + (\sqrt{\mu}\lambda_2 \cos \theta_\beta + \sigma_2 \sin \theta_\beta)\mathbf{n}_q \\ + (\sqrt{\mu}\lambda_3 \cos \theta_\beta + \sigma_3 \sin \theta_\beta)\mathbf{b}_q \end{array} \right] - \frac{1}{\sqrt{\mu\eta}} \left[\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} (\sqrt{\mu}'\lambda_1 + \mu\lambda'_1 + \sigma_1 - \sqrt{\mu}(\lambda_2 k_1 + \lambda_3 k_2)) \cos \theta_\beta \\ -(\sqrt{\mu}\lambda_1 + \sigma'_1 - \sigma_2 k_1 - \sigma_3 k_2) \sin \theta_\beta \end{array} \right) \mathbf{t} \\ + \left(\begin{array}{l} (\sqrt{\mu}'\lambda_2 + \mu\lambda'_2 + \sigma_2 + \sqrt{\mu}(\lambda_1 k_1 - \lambda_3 k_3)) \cos \theta_\beta \\ -(\sqrt{\mu}\lambda_2 + \sigma'_2 + \sigma_1 k_1 - \sigma_3 k_3) \sin \theta_\beta \end{array} \right) \mathbf{n}_q \\ + \left(\begin{array}{l} (\sqrt{\mu}'\lambda_3 + \mu\lambda'_3 + \sigma_3 + \sqrt{\mu}(\lambda_1 k_2 + \lambda_2 k_3)) \cos \theta_\beta \\ -(\sqrt{\mu}\lambda_3 + \sigma'_3 + \sigma_1 k_2 + \sigma_2 k_3) \sin \theta_\beta \end{array} \right) \mathbf{b}_q \end{array} \right] \quad (4.30)$$

bulunur ve yerine yazılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned} k_3^\beta &= \langle \mathbf{n}_q^{\beta'}, \mathbf{b}_q^\beta \rangle \\ &= \frac{-1}{2\mu\eta} \left[\begin{array}{l} \sin 2\theta_\beta [\sqrt{\mu}(\lambda'_1 \sigma_1 + \lambda'_2 \sigma_2 + \lambda'_3 \sigma_3) + \theta'_\beta (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \mu\eta)] \\ -2\sqrt{\mu}\theta'_\beta (\lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2 \sigma_2 + \lambda_3 \sigma_3) - 2\mu \cos^2 \theta_\beta (\lambda_1 \lambda'_1 + \lambda_2 \lambda'_2 + \lambda_3 \lambda'_3) \end{array} \right] \end{aligned} \quad (4.31)$$

olarak hesaplanır.

Örnek 4.1.1 $\alpha(s) = (\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}})$ eğrisi verilsin. İzdüşüm vektörü $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ olan bu eğrinin q-çatı vektörleri

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, 1 \right) \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{t} \wedge \mathbf{k} &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \wedge (0, 0, 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right)\end{aligned}$$

$$\mathbf{n}_q = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right) \quad (4.33)$$

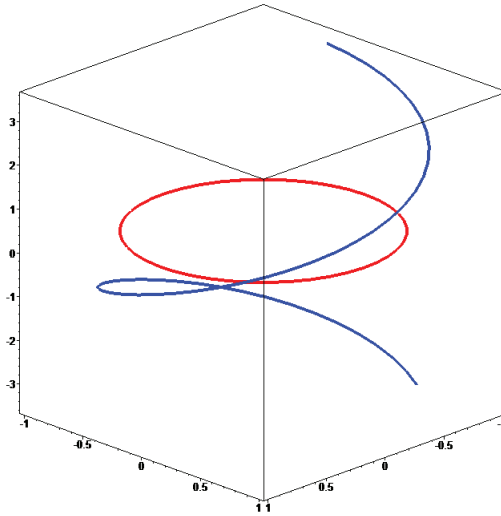
ve

$$\mathbf{b}_q = \frac{-1}{\sqrt{2}} \left(\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, -\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, 1\right). \quad (4.34)$$

olarak hesaplanır. Tanım 3.8.2 kullanılırsa \mathbf{tn}_q -Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*) = \left(\frac{-1}{2} \sin \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \cos \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) \quad (4.35)$$

şeklinde bulunur. Esas eğri mavi ile onun \mathbf{tn}_q -Smarandache eğrisi kırmızı ile Şekil 4.1 de gösterilmiştir.



Şekil 4.1: Eğri ve \mathbf{tn}_q -Smarandache eğrisi.

Frenet vektörleri için Tanım 3.2.3 göz önünde bulundurulursa

$$\mathbf{t}_\beta = \frac{-\sqrt{6}}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}} + \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}} - \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right) \quad (4.36)$$

$$\mathbf{n}_\beta = \frac{-\sqrt{3}}{3} \left(-\sin \frac{s}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \cos \frac{s}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right) \quad (4.37)$$

ve

$$\mathbf{b}_\beta = (0, 0, 1) \quad (4.38)$$

bulunur. Frenet eğrilikleri ise

$$\kappa_\beta = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ ve } \tau_\beta = 0 \quad (4.39)$$

olur. \mathbf{tn}_q -Smarandache eğrisinin q-çatısının \mathbf{n}_q^β ve \mathbf{b}_q^β vektörleri ise

$$\mathbf{n}_q^\beta = \frac{-\sqrt{3}}{3} \left(-\sin \frac{s}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \cos \frac{s}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right) \quad (4.40)$$

ve

$$\mathbf{b}_q^\beta = (0, 0, 1) \quad (4.41)$$

olur. Teorem 3.6.1 eşitliğinden q-eğrilikleri ise

$$\begin{aligned} k_1^\beta &= \frac{-2\sqrt{3}}{3} \\ k_2^\beta &= 0 \\ k_3^\beta &= 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

olarak hesaplanır.

4.2 \mathbf{tb}_q -Smarandache Eğrisi

$\alpha: I \rightarrow E^3$ birim hızlı regüler eğrisinin q-çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ olsun. \mathbf{tn}_q -Smarandache eğrisi, $\beta: I \rightarrow E^3$, s^* yay-parametresi ile verilsin. Buna göre

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{t} + \mathbf{b}_q) \quad (4.43)$$

olarak yazılır. Burada s parametresine göre türev alınırsa

$$\beta' = \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{t}' + \mathbf{b}_q') \quad (4.44)$$

bulunur. $\frac{d\beta}{ds^*} = \mathbf{t}_\beta$ olup eşitliğinde Teorem 3.6.1 kullanılırsa

$$\mathbf{t}_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-k_2\mathbf{t} + (k_1 - k_3)\mathbf{n}_q + k_2\mathbf{b}_q) \quad (4.45)$$

olur. İki tarafın normunun karesi alınırsa

$$\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 = \frac{1}{2}(k_2^2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + (k_1 - k_3)^2 \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle + k_2^2 \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle) \quad (4.46)$$

elde edilir. $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 1$ olduğundan

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{k_2^2 + \frac{1}{2}(k_1 - k_3)^2} \quad (4.47)$$

olur. (4.45) eşitliğinde (4.47) eşitliği kullanılırsa

$$\mathbf{t}_\beta = \frac{1}{\sqrt{2k_2^2 + (k_1 - k_3)^2}}(-k_2\mathbf{t} + (k_1 - k_3)\mathbf{n}_q + k_2\mathbf{b}_q) \quad (4.48)$$

bulunur ve $\bar{\mu} = 2k_1^2 + (k_2 + k_3)^2$ olarak alınıp s parametresine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} &= \frac{-1}{2\bar{\mu}^{\frac{3}{2}}} (4k_2k_2' + 2(k_1 - k_3)(k_1' - k_3')) (-k_2\mathbf{t} + (k_1 - k_3)\mathbf{n}_q + k_2\mathbf{b}_q) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\bar{\mu}}} (-k_2'\mathbf{t} - k_2\mathbf{t}' + (k_1' - k_3)\mathbf{n}_q + (k_1 - k_3)\mathbf{n}_q' + k_2'\mathbf{b}_q + k_2\mathbf{b}_q') \end{aligned} \quad (4.49)$$

elde edilir. Teorem 3.6.1 kullanılırsa

$$\frac{d\mathbf{t}_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{-1}{\bar{\mu}^{\frac{3}{2}}} \left[\begin{array}{l} (2k_2k_2' + (k_1 - k_3)(k_1' - k_3')) (-k_2\mathbf{t} + (k_1 - k_3)\mathbf{n}_q + k_2\mathbf{b}_q) \\ -\bar{\mu}(-k_2'\mathbf{t} - k_1k_2\mathbf{n}_q - k_2^2\mathbf{b}_q + (k_1' - k_3)\mathbf{n}_q - (k_1 - k_3)k_1\mathbf{t} \\ + (k_1 - k_3)k_3\mathbf{b}_q + k_2'\mathbf{b}_q - k_2^2\mathbf{t} - k_2k_3\mathbf{n}_q) \end{array} \right] \quad (4.50)$$

olur. Burada $\varepsilon = k_1^2 \left(\frac{k_2 + k_3}{k_1} \right)'$ olarak alınır, \mathbf{t} , \mathbf{n}_q ve \mathbf{b}_q vektörlerinin katsayıları sırasıyla

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1 &= (k_1 - k_3)(\bar{\mu}k_1 - \varepsilon) + \bar{\mu}k_2^2 \\ \bar{\lambda}_2 &= 2(k_1 - k_3)^2(k_1 - k_3)' + k_2((k_1 + k_3)\bar{\mu} + 2\varepsilon) \\ \bar{\lambda}_3 &= -(k_1 - k_3)(\bar{\mu}k_3 + \varepsilon) + \bar{\mu}k_2^2 \end{aligned} \quad (4.51)$$

olarak ifade edilirse (4.50) eşitliği

$$\frac{d\mathbf{t}_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{-1}{\bar{\mu}^{\frac{3}{2}}} (\bar{\lambda}_1\mathbf{t} + \bar{\lambda}_2\mathbf{n}_q + \bar{\lambda}_3\mathbf{b}_q) \quad (4.52)$$

şeklinde yazılır. $\frac{d\mathbf{t}_\beta}{ds^*} = \mathbf{t}'_\beta$ ve (4.47) eşitliği, (4.52) eşitliğinde yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\mathbf{t}'_\beta = \frac{-\sqrt{2}}{\bar{\mu}^2} (\bar{\lambda}_1\mathbf{t} + \bar{\lambda}_2\mathbf{n}_q + \bar{\lambda}_3\mathbf{b}_q) \quad (4.53)$$

olur. Bu ifadenin normu alınırsa

$$\kappa_\beta = \|\mathbf{t}'_\beta\| = \sqrt{\langle \mathbf{t}'_\beta, \mathbf{t}'_\beta \rangle} = \frac{\sqrt{2}}{\bar{\mu}^2} \sqrt{\bar{\lambda}_1^2 + \bar{\lambda}_2^2 + \bar{\lambda}_3^2} \quad (4.54)$$

bulunur. $\bar{\eta} = \bar{\lambda}_1^2 + \bar{\lambda}_2^2 + \bar{\lambda}_3^2$ olarak alınıp Tanım 3.2.3 gereği (4.53) ve (4.54) eşitlikleri kullanılırsa

$$\mathbf{n}_\beta = \frac{-1}{\sqrt{\bar{\eta}}} (\bar{\lambda}_1\mathbf{t} + \bar{\lambda}_2\mathbf{n}_q + \bar{\lambda}_3\mathbf{b}_q) \quad (4.55)$$

ve (4.48), (4.55) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_\beta &= \frac{-1}{\sqrt{\bar{\mu}\bar{\eta}}} \left[(-k_2\mathbf{t} + (k_1 - k_3)\mathbf{n}_q + k_2\mathbf{b}_q) \wedge (\bar{\lambda}_1\mathbf{t} + \bar{\lambda}_2\mathbf{n}_q + \bar{\lambda}_3\mathbf{b}_q) \right] \\ &= \frac{-1}{\sqrt{\bar{\mu}\bar{\eta}}} \left[\begin{array}{l} -k_2\bar{\lambda}_1(\mathbf{t} \wedge \mathbf{t}) - k_2\bar{\lambda}_2(\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q) - k_2\bar{\lambda}_3(\mathbf{t} \wedge \mathbf{b}_q) + (k_1 - k_3)\bar{\lambda}_1(\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{t}) \\ + (k_1 - k_3)\bar{\lambda}_2(\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{n}_q) + (k_1 - k_3)\bar{\lambda}_3(\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{b}_q) \\ + k_2\bar{\lambda}_1(\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{t}) + k_2\bar{\lambda}_2(\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{n}_q) + k_2\bar{\lambda}_3(\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{b}_q) \end{array} \right] \end{aligned} \quad (4.56)$$

olarak hesaplanır, Tanım 3.6.1 kullanılırsa

$$\mathbf{b}_\beta = \frac{-1}{\sqrt{\mu\eta}} \left[((k_1 - k_3)\bar{\lambda}_3 - k_2\bar{\lambda}_2)\mathbf{t} + (k_2\bar{\lambda}_3 + k_2\bar{\lambda}_1)\mathbf{n}_q + (-k_2\bar{\lambda}_2 - (k_1 - k_3)\bar{\lambda}_1)\mathbf{b}_q \right] \quad (4.57)$$

bulunur. \mathbf{t} , \mathbf{n}_q ve \mathbf{b}_q katsayıları sırasıyla $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$ ve $\bar{\sigma}_3$ ile gösterilirse

$$\bar{\sigma}_1 = (k_1 - k_3)\bar{\lambda}_3 - k_2\bar{\lambda}_2 \quad \bar{\sigma}_2 = k_2\bar{\lambda}_3 + k_2\bar{\lambda}_1 \quad \bar{\sigma}_3 = -k_2\bar{\lambda}_2 - (k_1 - k_3)\bar{\lambda}_1 \quad (4.58)$$

olur ve (4.57) eşitliği

$$\mathbf{b}_\beta = \frac{-1}{\sqrt{\mu\eta}} (\bar{\sigma}_1\mathbf{t} + \bar{\sigma}_2\mathbf{n}_q + \bar{\sigma}_3\mathbf{b}_q) \quad (4.59)$$

şeklinde ifade edilir. Buraya kadar \mathbf{t}_β , \mathbf{n}_β ve \mathbf{b}_β vektörlerini bulundu. Şimdi τ_β hesabı için β' , β'' ve β''' gerekli olup bunun için (4.44) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\beta'}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-k'_2\mathbf{t} + (k'_1 - k'_3)\mathbf{n}_q + k'_2\mathbf{b}_q - k_2\mathbf{t}' + (k_1 - k_3)\mathbf{n}'_q + k_2\mathbf{b}'_q) \quad (4.60)$$

bulunur. Teorem 3.6.1 kullanılırsa

$$\beta'' = \frac{-1}{\sqrt{2}} [(k'_2 + k_1(k_1 - k_3) + k_2^2)\mathbf{t} - (k'_1 - k'_3 - k_2(k_1 + k_3))\mathbf{n}_q - (k'_2 - k_2^2 + k_3(k_1 - k_3))\mathbf{b}_q] \quad (4.61)$$

olur. Türev alınır ve $\kappa = k_1^2 + k_2^2$ eşitliği kullanılarak düzenlenirse

$$\beta''' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{l} (-k''_2 - 3k'_2k_2 - (k_1(k_1 - k_3))' - k_1(k_1 - k_3)' + k_2(\kappa + k_3^2))\mathbf{t} \\ + (k''_1 - k'_3 - (k_2(k_1 + k_3))' - k'_2(k_1 + k_3) - (k_1 - k_3)(\kappa + k_3^2))\mathbf{n}_q \\ + (k''_2 - 3k'_2k_2 - (k_3(k_1 - k_3))' - k_3(k_1 - k_3)' - k_2(\kappa + k_3^2))\mathbf{b}_q \end{array} \right] \quad (4.62)$$

bulunur. \mathbf{t} , \mathbf{n}_q ve \mathbf{b}_q katsayıları sırasıyla $\bar{\rho}_1$, $\bar{\rho}_2$ ve $\bar{\rho}_3$ ile gösterilirse

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_1 &= -k''_2 - 3k'_2k_2 - (k_1(k_1 - k_3))' - k_1(k_1 - k_3)' + k_2(\kappa + k_3^2) \\ \bar{\rho}_2 &= k''_1 - k'_3 - (k_2(k_1 + k_3))' - k'_2(k_1 + k_3) - (k_1 - k_3)(\kappa + k_3^2) \\ \bar{\rho}_3 &= k''_2 - 3k'_2k_2 - (k_3(k_1 - k_3))' - k_3(k_1 - k_3)' - k_2(\kappa + k_3^2) \end{aligned} \quad (4.63)$$

olur ve (4.62) eşitliği

$$\beta''' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\rho}_1\mathbf{t} + \bar{\rho}_2\mathbf{n}_q + \bar{\rho}_3\mathbf{b}_q) \quad (4.64)$$

şeklinde ifade edilir. (4.44), (4.61) ve (4.64) kullanılarak istenilen eşitlikler

$$\beta' \wedge \beta'' = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\varepsilon + k_3\bar{\mu}, -k_2\bar{\mu}, -\varepsilon + k_2\bar{\mu}) \quad (4.65)$$

ve

$$\langle \beta' \wedge \beta'', \beta''' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [(-\varepsilon + k_3\bar{\mu})\bar{\rho}_1 - k_2\bar{\mu}\bar{\rho}_2 + (-\varepsilon + k_2\bar{\mu})\bar{\rho}_3] \quad (4.66)$$

olur. Bulunan eşitlikler (3.11) eşitliği göz önünde bulundurularak kullanılırsa

$$\tau_\beta = \left[\frac{\sqrt{2}(\varepsilon(\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_3) - \bar{\mu}(k_3\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2 - k_2\bar{\rho}_3))}{(\varepsilon - k_3\bar{\mu})^2 + (k_2\bar{\mu})^2 + (\varepsilon - k_2\bar{\mu})^2} \right] \quad (4.67)$$

elde edilir. β eğrisinin quasi-normal ve quasi binormal vektörleri, (4.55) ve (4.59) eşitlikleri kullanılarak (3.12) eşitliğinde yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\mathbf{n}_q^\beta = \frac{-1}{\sqrt{\bar{\mu}\bar{\eta}}} \left[\begin{aligned} &(\sqrt{\bar{\mu}\bar{\lambda}_1} \cos \theta_\beta + \bar{\sigma}_1 \sin \theta_\beta) \mathbf{t} + (\sqrt{\bar{\mu}\bar{\lambda}_2} \cos \theta_\beta + \bar{\sigma}_2 \sin \theta_\beta) \mathbf{n}_q \\ &+ (\sqrt{\bar{\mu}\bar{\lambda}_3} \cos \theta_\beta + \bar{\sigma}_3 \sin \theta_\beta) \mathbf{b}_q \end{aligned} \right] \quad (4.68)$$

ve

$$\mathbf{b}_q^\beta = \frac{1}{\sqrt{\bar{\mu}\bar{\eta}}} \left[\begin{aligned} &(\sqrt{\bar{\mu}\bar{\lambda}_1} \sin \theta_\beta - \bar{\sigma}_1 \cos \theta_\beta) \mathbf{t} + (\sqrt{\bar{\mu}\bar{\lambda}_2} \sin \theta_\beta - \bar{\sigma}_2 \cos \theta_\beta) \mathbf{n}_q \\ &+ (\sqrt{\bar{\mu}\bar{\lambda}_3} \sin \theta_\beta - \bar{\sigma}_3 \cos \theta_\beta) \mathbf{b}_q \end{aligned} \right] \quad (4.69)$$

olarak hesaplanır.

k_1^β ve k_2^β eğriliklerini bulmak için (4.53), (4.68) ve (4.69) eşitlikleri kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$k_1^\beta = \langle \mathbf{t}'_\beta, \mathbf{n}_q^\beta \rangle = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{\bar{\mu}^5 \bar{\eta}}} \left(\cos \theta_\beta \sqrt{\bar{\mu}\bar{\eta}} + \sin \theta_\beta (\bar{\sigma}_1 \bar{\lambda}_1 + \bar{\sigma}_2 \bar{\lambda}_2 + \bar{\sigma}_3 \bar{\lambda}_3) \right) \quad (4.70)$$

ve

$$k_2^\beta = \langle \mathbf{t}'_\beta, \mathbf{b}_q^\beta \rangle = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{\bar{\mu}^5 \bar{\eta}}} \left(-\sin \theta_\beta \sqrt{\bar{\mu}\bar{\eta}} + \cos \theta_\beta (\bar{\sigma}_1 \bar{\lambda}_1 + \bar{\sigma}_2 \bar{\lambda}_2 + \bar{\sigma}_3 \bar{\lambda}_3) \right) \quad (4.71)$$

bulunur. k_3^β eğriliği için (4.68) eşitliğinin türevi alınır

$$\mathbf{n}_q^{\beta'} = -\frac{(\bar{\mu}\bar{\eta})'}{2(\bar{\mu}\bar{\eta})^{\frac{3}{2}}} \left[\begin{aligned} &(\sqrt{\bar{\mu}\bar{\lambda}_1} \cos \theta_\beta + \bar{\sigma}_1 \sin \theta_\beta) \mathbf{t} + (\sqrt{\bar{\mu}\bar{\lambda}_2} \cos \theta_\beta + \bar{\sigma}_2 \sin \theta_\beta) \mathbf{n}_q \\ &+ (\sqrt{\bar{\mu}\bar{\lambda}_3} \cos \theta_\beta + \bar{\sigma}_3 \sin \theta_\beta) \mathbf{b}_q \end{aligned} \right] \\ + \frac{1}{\sqrt{\bar{\mu}\bar{\eta}}} \left[\begin{aligned} &\left(\begin{aligned} &(\sqrt{\bar{\mu}} \bar{\lambda}_1 + \bar{\mu} \bar{\lambda}'_1 + \bar{\sigma}_1 - \sqrt{\bar{\mu}}(\bar{\lambda}_2 k_1 + \bar{\lambda}_3 k_2)) \cos \theta_\beta \\ &-(\sqrt{\bar{\mu}} \bar{\lambda}_1 + \bar{\sigma}'_1 - \bar{\sigma}_2 k_1 - \bar{\sigma}_3 k_2) \sin \theta_\beta \end{aligned} \right) \mathbf{t} \\ &+ \left(\begin{aligned} &(\sqrt{\bar{\mu}} \bar{\lambda}_2 + \bar{\mu} \bar{\lambda}'_2 + \bar{\sigma}_2 + \sqrt{\bar{\mu}}(\bar{\lambda}_1 k_1 - \bar{\lambda}_3 k_3)) \cos \theta_\beta \\ &-(\sqrt{\bar{\mu}} \bar{\lambda}_2 + \bar{\sigma}'_2 + \bar{\sigma}_1 k_1 - \bar{\sigma}_3 k_3) \sin \theta_\beta \end{aligned} \right) \mathbf{n}_q \\ &+ \left(\begin{aligned} &(\sqrt{\bar{\mu}} \bar{\lambda}_3 + \bar{\mu} \bar{\lambda}'_3 + \bar{\sigma}_3 + \sqrt{\bar{\mu}}(\bar{\lambda}_1 k_2 + \bar{\lambda}_2 k_3)) \cos \theta_\beta \\ &-(\sqrt{\bar{\mu}} \bar{\lambda}_3 + \bar{\sigma}'_3 + \bar{\sigma}_1 k_2 + \bar{\sigma}_2 k_3) \sin \theta_\beta \end{aligned} \right) \mathbf{b}_q \end{aligned} \right] \quad (4.72)$$

bulunur ve eşitlikte yerine yazılıp düzenlenirse

$$k_3^\beta = \langle \mathbf{n}_q^{\beta'}, \mathbf{b}_q^\beta \rangle \quad (4.73) \\ = \frac{1}{2\bar{\mu}\bar{\eta}} \left[\begin{aligned} &\sin 2\theta_\beta [\sqrt{\bar{\mu}}(\bar{\lambda}'_1 \bar{\sigma}_1 + \bar{\lambda}'_2 \bar{\sigma}_2 + \bar{\lambda}'_3 \bar{\sigma}_3) + \theta'_\beta (\bar{\sigma}_1^2 + \bar{\sigma}_2^2 + \bar{\sigma}_3^2 + \bar{\mu}\bar{\eta})] \\ &- 2\sqrt{\bar{\mu}}\theta'_\beta (\bar{\lambda}_1 \bar{\sigma}_1 + \bar{\lambda}_2 \bar{\sigma}_2 + \bar{\lambda}_3 \bar{\sigma}_3) - 2\bar{\mu} \cos^2 \theta_\beta (\bar{\lambda}'_1 \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}'_2 \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}'_3 \bar{\lambda}_3) \end{aligned} \right]$$

olarak hesaplanır.

Örnek 4.1.2 $\alpha(s) = (\cos s, \sin s, 1)$ eğrisi verilsin. İzdüşüm vektörü $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ olan bu eğrinin q-çatı vektörleri

$$\mathbf{t} = (-\sin s, \cos s, 0) \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{t} \wedge \mathbf{k} &= (-\sin s, \cos s, 0) \wedge (0, 0, 1) \\ &= (-\cos s, \sin s, 0)\end{aligned}\quad (4.75)$$

$$\mathbf{n}_q = (-\cos s, \sin s, 0) \quad (4.76)$$

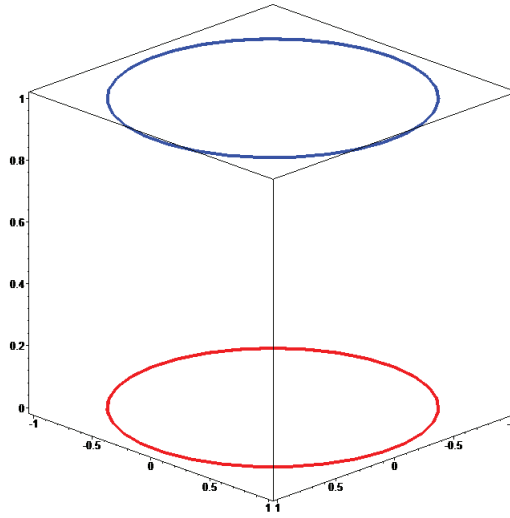
ve

$$\mathbf{b}_q = (0, 0, -1) \quad (4.77)$$

olarak hesaplanır. Tanım 3.8.2 kullanılırsa \mathbf{tb}_q -Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin s, \cos s, -1) \quad (4.78)$$

şeklinde bulunur. Esas eğri mavi ile onun \mathbf{tb}_q -Smarandache eğrisi kırmızı ile Şekil 4.2 de gösterilmiştir.



Şekil 4.2: Eğri ve \mathbf{tb}_q -Smarandache eğrisi.

Frenet vektörleri için Tanım 3.2.3 göz önünde bulundurulursa

$$\mathbf{t}_\beta = (-\cos s, -\sin s, 0) \quad (4.79)$$

$$\mathbf{n}_\beta = (\sin s, -\cos s, 0) \quad (4.80)$$

ve

$$\mathbf{b}_\beta = (0, 0, 1) \quad (4.81)$$

bulunur. Frenet eğrilikleri ise

$$\kappa_\beta = 1 \text{ ve } \tau_\beta = 0 \quad (4.82)$$

olur. \mathbf{t}_q -Smarandache eğrisinin q -çatısının \mathbf{n}_q^β ve \mathbf{b}_q^β vektörleri ise

$$\mathbf{n}_q^\beta = (-\sin s, \cos s, 0) \quad (4.83)$$

ve

$$\mathbf{b}_q^\beta = (0, 0, -1) \quad (4.84)$$

olur. Teorem 3.6.1 eşitliğinden q -eğrilikleri ise

$$\begin{aligned} k_1^\beta &= 1 \\ k_2^\beta &= 0 \\ k_3^\beta &= 0 \end{aligned} \quad (4.85)$$

olarak hesaplanır.

4.3 $\mathbf{n}_q \mathbf{b}_q$ -Smarandache Eğrisi

$\alpha : I \rightarrow E^3$ birim hızlı regüler eğrisinin q -çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ olsun. \mathbf{t}_q -Smarandache eğrisi, $\beta : I \rightarrow E^3$, s^* yay-parametresi ile verilsin. Buna göre

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{n}_q + \mathbf{b}_q) \quad (4.86)$$

olarak yazılır. Burada s parametresine göre türev alınır

$$\beta' = \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{n}'_q + \mathbf{b}'_q) \quad (4.87)$$

bulunur. $\frac{d\beta}{ds^*} = \mathbf{t}_\beta$ olup (4.87) eşitliğinde Teorem 3.6.1 kullanılırsa

$$\mathbf{t}_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-(k_1 + k_2)\mathbf{t} - k_3\mathbf{n}_q + k_3\mathbf{b}_q) \quad (4.88)$$

olur. İki tarafın normunun karesi alınır

$$\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 = \frac{1}{2}((k_1 + k_2)^2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + k_3^2 \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle + k_3^2 \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle) \quad (4.89)$$

elde edilir. $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 1$ olduğundan

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\frac{1}{2}(k_1 + k_2)^2 + k_3^2} \quad (4.90)$$

olur. (4.88) eşitliğinde (4.90) eşitliği kullanılırsa

$$\mathbf{t}_\beta = \frac{1}{\sqrt{2k_3^2 + (k_1 + k_2)^2}}(-(k_1 + k_2)\mathbf{t} - k_3\mathbf{n}_q + k_3\mathbf{b}_q) \quad (4.91)$$

bulunur. $\tilde{\mu} = 2k_3^2 + (k_1 + k_2)^2$ olarak alınıp s parametresine göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} &= \frac{-1}{2\tilde{\mu}^{\frac{3}{2}}} (4k_3k_3' + 2(k_1 + k_2)(k_1' + k_2')) (-(k_1 + k_2)\mathbf{t} - k_3\mathbf{n}_q + k_3\mathbf{b}_q) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mu}}} (-(k_1' + k_2')\mathbf{t} - (k_1 + k_2)\mathbf{t}' - k_3'\mathbf{n}_q - k_3\mathbf{n}_q' + k_3'\mathbf{b}_q + k_3\mathbf{b}_q') \end{aligned} \quad (4.92)$$

elde edilir. Teorem 3.6.1 kullanılırsa

$$\frac{d\mathbf{t}_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{-1}{\tilde{\mu}^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} (2k_3k_3' + (k_1 + k_2)(k_1' + k_2')) (-(k_1 + k_2)\mathbf{t} - k_3\mathbf{n}_q + k_3\mathbf{b}_q) \\ -\tilde{\mu} (-(k_1' + k_2')\mathbf{t} - k_1(k_1 + k_2)\mathbf{n}_q - k_2(k_1 + k_2)\mathbf{b}_q) \\ -k_3'\mathbf{n}_q + k_3k_1\mathbf{t} - k_3^2\mathbf{b}_q + k_3'\mathbf{b}_q + k_2k_3\mathbf{t} + k_3^2\mathbf{n}_q \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

olur. Burada $\varphi = k_3^2 \left(\frac{k_1 + k_2}{k_3} \right)'$ olarak alınıp, \mathbf{t} , \mathbf{n}_q ve \mathbf{b}_q vektörlerinin katsayıları sırasıyla

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1 &= 2k_3\varphi - \tilde{\mu}k_3(k_1 + k_2) \\ \tilde{\lambda}_2 &= -(k_1 + k_2)(\varphi - \tilde{\mu}k_1) - 2k_3^3 + k_3^2(k_1 + k_2) \\ \tilde{\lambda}_3 &= (k_1 + k_2)(\varphi + \tilde{\mu}k_2) + \tilde{\mu}k_3^2 \end{aligned} \quad (4.94)$$

olarak ifade edilirse (4.93) eşitliği düzenlenirse

$$\frac{d\mathbf{t}_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{-1}{\tilde{\mu}^{\frac{3}{2}}} (\tilde{\lambda}_1\mathbf{t} + \tilde{\lambda}_2\mathbf{n}_q + \tilde{\lambda}_3\mathbf{b}_q) \quad (4.95)$$

şeklinde yazılır. $\frac{d\mathbf{t}_\beta}{ds^*} = \mathbf{t}'_\beta$ ve (4.90) eşitliği, (4.95) eşitliğinde yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\mathbf{t}'_\beta = \frac{-\sqrt{2}}{\tilde{\mu}^2} (\tilde{\lambda}_1\mathbf{t} + \tilde{\lambda}_2\mathbf{n}_q + \tilde{\lambda}_3\mathbf{b}_q) \quad (4.96)$$

olur. Bu ifadenin normu alırsa

$$\kappa_\beta = \|\mathbf{t}'_\beta\| = \sqrt{\langle \mathbf{t}'_\beta, \mathbf{t}'_\beta \rangle} = \frac{\sqrt{2}}{\tilde{\mu}^2} \sqrt{\tilde{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_2^2 + \tilde{\lambda}_3^2} \quad (4.97)$$

bulunur. $\tilde{\eta} = \tilde{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_2^2 + \tilde{\lambda}_3^2$ olarak alınıp Tanım 3.2.3 gereği (4.96) ve (4.97) eşitlikleri kullanılırsa

$$\mathbf{n}_\beta = \frac{-1}{\sqrt{\tilde{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_2^2 + \tilde{\lambda}_3^2}} (\tilde{\lambda}_1\mathbf{t} + \tilde{\lambda}_2\mathbf{n}_q + \tilde{\lambda}_3\mathbf{b}_q) \quad (4.98)$$

olur. (4.91) ve (4.98) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_\beta &= \frac{-1}{\sqrt{\tilde{\mu}\tilde{\eta}}} \left[(-(k_1 + k_2)\mathbf{t} - k_3\mathbf{n}_q + k_3\mathbf{b}_q) \wedge (\tilde{\lambda}_1\mathbf{t} + \tilde{\lambda}_2\mathbf{n}_q + \tilde{\lambda}_3\mathbf{b}_q) \right] \\ &= \frac{-1}{\sqrt{\tilde{\mu}\tilde{\eta}}} \begin{bmatrix} -(k_1 + k_2)\tilde{\lambda}_1(\mathbf{t} \wedge \mathbf{t}) - (k_1 + k_2)\tilde{\lambda}_2(\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q) - (k_1 + k_2)\tilde{\lambda}_3(\mathbf{t} \wedge \mathbf{b}_q) \\ -k_3\tilde{\lambda}_1(\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{t}) - k_3\tilde{\lambda}_2(\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{n}_q) - k_3\tilde{\lambda}_3(\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{b}_q) \\ +k_3\tilde{\lambda}_1(\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{t}) + k_3\tilde{\lambda}_2(\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{n}_q) + k_3\tilde{\lambda}_3(\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{b}_q) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.99)$$

olarak hesaplanır, Tanım 3.6.1 kullanılırsa

$$\mathbf{b}_\beta = \frac{-1}{\sqrt{\mu\tilde{\eta}}} \left[(-k_3\tilde{\lambda}_3 - k_3\tilde{\lambda}_2)\mathbf{t} + ((k_1 + k_2)\tilde{\lambda}_3 + k_3\tilde{\lambda}_1)\mathbf{n}_q + (-(k_1 + k_2)\tilde{\lambda}_2 + k_3\tilde{\lambda}_1)\mathbf{b}_q \right] \quad (4.100)$$

bulunur. \mathbf{t} , \mathbf{n}_q ve \mathbf{b}_q katsayıları sırasıyla $\tilde{\sigma}_1$, $\tilde{\sigma}_2$ ve $\tilde{\sigma}_3$ ile gösterilirse

$$\tilde{\sigma}_1 = -k_3\tilde{\lambda}_3 - k_3\tilde{\lambda}_2 \quad \tilde{\sigma}_2 = (k_1 + k_2)\tilde{\lambda}_3 + k_3\tilde{\lambda}_1 \quad \tilde{\sigma}_3 = -(k_1 + k_2)\tilde{\lambda}_2 + k_3\tilde{\lambda}_1 \quad (4.101)$$

olur ve (4.100) eşitliği

$$\mathbf{b}_\beta = \frac{-1}{\sqrt{\mu\tilde{\eta}}} (\tilde{\sigma}_1\mathbf{t} + \tilde{\sigma}_2\mathbf{n}_q + \tilde{\sigma}_3\mathbf{b}_q) \quad (4.102)$$

şeklinde ifade edilir. Buraya kadar \mathbf{t}_β , \mathbf{n}_β ve \mathbf{b}_β vektörlerini bulundu. Şimdi τ_β hesabı için β' , β'' ve β''' gerekli olup bunun için (4.87) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\beta'}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-k'_1 + k'_2)\mathbf{t} - k'_3\mathbf{n}_q + k'_3\mathbf{b}_q - (k_1 + k_2)\mathbf{t}' - k_3\mathbf{n}'_q + k_3\mathbf{b}'_q \quad (4.103)$$

bulunur. Teorem 3.6.1 kullanılırsa

$$\beta'' = \frac{-1}{\sqrt{2}} [(k'_1 + k'_2 - k_1k_3 - k_2k_3)\mathbf{t} + (k'_3 + k_1^2 + k_3^2 + k_1k_2)\mathbf{n}_q - (k'_3 - k_2^2 - k_3^2 - k_1k_2)\mathbf{b}_q] \quad (4.104)$$

olur. Türev alınır ve $\kappa = k_1^2 + k_2^2$ eşitliği kullanılarak düzenlenirse

$$\beta''' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{l} (-k''_1 - k''_2 - (k_2)' - k_2k'_3 + (k_1 + k_2)(\kappa + k_3^2))\mathbf{t} \\ + (-k''_3 - 3(k_1k'_1 + k_3k'_3) - (k_1k_2)' - k_1k'_2 + k_3(\kappa + k_3^2))\mathbf{n}_q \\ + (k''_3 - (k_1k_2)' - k_2k'_1 - 3k'_2k_2 - k_3k'_3 - k_3(\kappa + k_3^2))\mathbf{b}_q \end{array} \right] \quad (4.105)$$

bulunur. \mathbf{t} , \mathbf{n}_q ve \mathbf{b}_q katsayıları sırasıyla $\tilde{\rho}_1$, $\tilde{\rho}_2$ ve $\tilde{\rho}_3$ ile gösterilirse

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_1 &= -k''_1 - k''_2 - (k_2k_3)' - k_2k'_3 + (k_1 + k_2)(\kappa + k_3^2) \\ \tilde{\rho}_2 &= -k''_3 - 3(k_1k'_1 + k_3k'_3) - (k_1k_2)' - k_1k'_2 + k_3(\kappa + k_3^2) \\ \tilde{\rho}_3 &= k''_3 - (k_1k_2)' - k_2k'_1 - 3k'_2k_2 - k_3k'_3 - k_3(\kappa + k_3^2) \end{aligned} \quad (4.106)$$

olur ve (4.105) eşitliği

$$\beta''' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{\rho}_1\mathbf{t} + \tilde{\rho}_2\mathbf{n}_q + \tilde{\rho}_3\mathbf{b}_q) \quad (4.107)$$

şeklinde ifade edilir. (4.87), (4.104) ve (4.107) kullanılarak istenilen eşitlikler

$$\beta' \wedge \beta'' = \frac{1}{\sqrt{2}} (k_3\tilde{\mu}, -\varphi - k_2\tilde{\mu}, -\varphi + k_1\tilde{\mu}) \quad (4.108)$$

ve

$$\langle \beta' \wedge \beta'', \beta''' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [\tilde{\mu}(k_1\tilde{\rho}_3 - k_2\tilde{\rho}_2 + k_3\tilde{\rho}_1) - \varphi(\tilde{\rho}_2 + \tilde{\rho}_3)] \quad (4.109)$$

olur. Bulunan eşitlikler (3.11) eşitliği göz önünde bulundurularak kullanılırsa

$$\tau_\beta = \left[\frac{\sqrt{2}(\tilde{\mu}(k_1\tilde{\rho}_3 - k_2\tilde{\rho}_2 + k_3\tilde{\rho}_1) - \varphi(\tilde{\rho}_2 + \tilde{\rho}_3))}{(k_3\tilde{\mu})^2 + (\varphi + k_2\tilde{\mu})^2 + (\varphi - k_1\tilde{\mu})^2} \right] \quad (4.110)$$

elde edilir. β eğrisinin quasi-normal ve quasi binormal vektörleri, (4.98) ve (4.102) eşitlikleri kullanılarak (3.12) eşitliği yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\mathbf{n}_q^\beta = \frac{-1}{\sqrt{\tilde{\mu}\tilde{\eta}}} \left[\begin{aligned} &(\sqrt{\tilde{\mu}\tilde{\lambda}_1} \cos \theta_\beta + \tilde{\sigma}_1 \sin \theta_\beta) \mathbf{t} + (\sqrt{\tilde{\mu}\tilde{\lambda}_2} \cos \theta_\beta + \tilde{\sigma}_2 \sin \theta_\beta) \mathbf{n}_q \\ &+ (\sqrt{\tilde{\mu}\tilde{\lambda}_3} \cos \theta_\beta + \tilde{\sigma}_3 \sin \theta_\beta) \mathbf{b}_q \end{aligned} \right] \quad (4.111)$$

ve

$$\mathbf{b}_q^\beta = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mu}\tilde{\eta}}} \left[\begin{aligned} &(\sqrt{\tilde{\mu}\tilde{\lambda}_1} \sin \theta_\beta - \tilde{\sigma}_1 \cos \theta_\beta) \mathbf{t} + (\sqrt{\tilde{\mu}\tilde{\lambda}_2} \sin \theta_\beta - \tilde{\sigma}_2 \cos \theta_\beta) \mathbf{n}_q \\ &+ (\sqrt{\tilde{\mu}\tilde{\lambda}_3} \sin \theta_\beta - \tilde{\sigma}_3 \cos \theta_\beta) \mathbf{b}_q \end{aligned} \right] \quad (4.112)$$

olarak hesaplanır.

k_1^β ve k_2^β eğriliklerini bulmak için (4.96), (4.111) ve (4.112) eşitlikleri kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$k_1^\beta = \langle \mathbf{t}'_\beta, \mathbf{n}_q^\beta \rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mu^5 \eta}} \left(\cos \theta_\beta \sqrt{\tilde{\mu}\tilde{\eta}} + \sin \theta_\beta (\tilde{\sigma}_1 \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\sigma}_2 \tilde{\lambda}_2 + \tilde{\sigma}_3 \tilde{\lambda}_3) \right) \quad (4.113)$$

ve

$$k_2^\beta = \langle \mathbf{t}'_\beta, \mathbf{b}_q^\beta \rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mu^5 \eta}} \left(-\sin \theta_\beta \sqrt{\tilde{\mu}\tilde{\eta}} + \cos \theta_\beta (\tilde{\sigma}_1 \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\sigma}_2 \tilde{\lambda}_2 + \tilde{\sigma}_3 \tilde{\lambda}_3) \right) \quad (4.114)$$

bulunur. k_3^β eğriliği için (4.111) eşitliğinin türevi alınır

$$\mathbf{n}_q^{\beta'} = -\frac{(\tilde{\mu}\tilde{\eta})'}{2(\tilde{\mu}\tilde{\eta})^{\frac{3}{2}}} \left[\begin{aligned} &(\sqrt{\tilde{\mu}\tilde{\lambda}_1} \cos \theta_\beta + \tilde{\sigma}_1 \sin \theta_\beta) \mathbf{t} + (\sqrt{\tilde{\mu}\tilde{\lambda}_2} \cos \theta_\beta + \tilde{\sigma}_2 \sin \theta_\beta) \mathbf{n}_q \\ &+ (\sqrt{\tilde{\mu}\tilde{\lambda}_3} \cos \theta_\beta + \tilde{\sigma}_3 \sin \theta_\beta) \mathbf{b}_q \end{aligned} \right] \\ + \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mu}\tilde{\eta}}} \left[\begin{aligned} &\left(\begin{aligned} &(\sqrt{\tilde{\mu}\tilde{\lambda}_1} + \tilde{\mu}\tilde{\lambda}'_1 + \tilde{\sigma}_1 - \sqrt{\tilde{\mu}}(\tilde{\lambda}_2 k_1 + \tilde{\lambda}_3 k_2)) \cos \theta_\beta \\ &-(\sqrt{\tilde{\mu}\tilde{\lambda}_1} + \tilde{\sigma}'_1 - \tilde{\sigma}_2 k_1 - \tilde{\sigma}_3 k_2) \sin \theta_\beta \end{aligned} \right) \mathbf{t} \\ &+ \left(\begin{aligned} &(\sqrt{\tilde{\mu}\tilde{\lambda}_2} + \tilde{\mu}\tilde{\lambda}'_2 + \tilde{\sigma}_2 + \sqrt{\tilde{\mu}}(\tilde{\lambda}_1 k_1 - \tilde{\lambda}_3 k_3)) \cos \theta_\beta \\ &-(\sqrt{\tilde{\mu}\tilde{\lambda}_2} + \tilde{\sigma}'_2 + \tilde{\sigma}_1 k_1 - \tilde{\sigma}_3 k_3) \sin \theta_\beta \end{aligned} \right) \mathbf{n}_q \\ &+ \left(\begin{aligned} &(\sqrt{\tilde{\mu}\tilde{\lambda}_3} + \tilde{\mu}\tilde{\lambda}'_3 + \tilde{\sigma}_3 + \sqrt{\tilde{\mu}}(\tilde{\lambda}_1 k_2 + \tilde{\lambda}_2 k_3)) \cos \theta_\beta \\ &-(\sqrt{\tilde{\mu}\tilde{\lambda}_3} + \tilde{\sigma}'_3 + \tilde{\sigma}_1 k_2 + \tilde{\sigma}_2 k_3) \sin \theta_\beta \end{aligned} \right) \mathbf{b}_q \end{aligned} \right] \quad (4.115)$$

ve eşitlikte yerine yazılıp düzenlenirse

$$k_3^\beta = \langle \mathbf{n}_q^{\beta'}, \mathbf{b}_q^\beta \rangle \quad (4.116) \\ = \frac{1}{2\tilde{\mu}\tilde{\eta}} \left[\begin{aligned} &\sin 2\theta_\beta [\sqrt{\tilde{\mu}}(\tilde{\lambda}'_1 \tilde{\sigma}_1 + \tilde{\lambda}'_2 \tilde{\sigma}_2 + \tilde{\lambda}'_3 \tilde{\sigma}_3) + \theta'_\beta (\tilde{\sigma}_1^2 + \tilde{\sigma}_2^2 + \tilde{\sigma}_3^2 + \tilde{\mu}\tilde{\eta})] \\ &- 2\sqrt{\tilde{\mu}}\theta'_\beta (\tilde{\lambda}_1 \tilde{\sigma}_1 + \tilde{\lambda}_2 \tilde{\sigma}_2 + \tilde{\lambda}_3 \tilde{\sigma}_3) - 2\tilde{\mu} \cos^2 \theta_\beta (\tilde{\lambda}'_1 \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}'_2 \tilde{\lambda}_2 + \tilde{\lambda}'_3 \tilde{\lambda}_3) \end{aligned} \right]$$

olarak hesaplanır.

Örnek 4.1.3 $\alpha(s) = (\cos 2s, 1, -\sin 2s)$ eğrisi verilsin. İzdüşüm vektörü $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ olan bu eğrinin q-çatı vektörleri

$$\mathbf{t} = (-\sin 2s, 0, -\cos 2s) \quad (4.117)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \wedge \mathbf{k} &= (-\sin 2s, 0, -\cos 2s) \wedge (0, 0, 1) \\ &= (0, \sin 2s, 0) \end{aligned} \quad (4.118)$$

$$\mathbf{n}_q = (0, 1, 0) \quad (4.119)$$

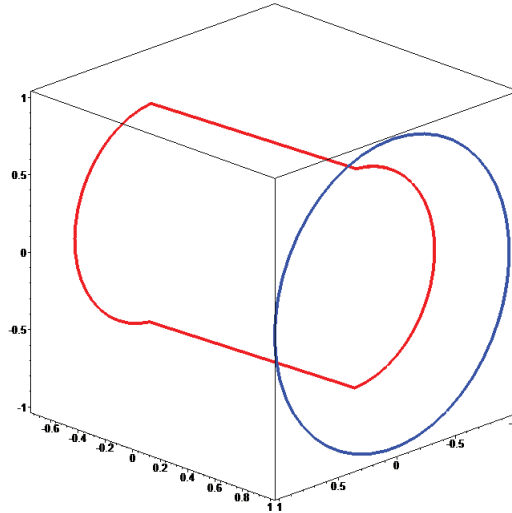
ve

$$\mathbf{b}_q = (\cos 2s, 0, -\sin 2s) \quad (4.120)$$

olarak hesaplanır. Tanım 3.8.2 kullanılırsa $\mathbf{n}_q \mathbf{b}_q$ -Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos 2s, 1, -\sin 2s) \quad (4.121)$$

şeklinde bulunur. Esas eğri mavi ile onun $\mathbf{n}_q \mathbf{b}_q$ -Smarandache eğrisi kırmızı ile Şekil 4.3 de gösterilmiştir.



Şekil 4.3: Eğri ve $\mathbf{n}_q \mathbf{b}_q$ -Smarandache eğrisi.

Frenet vektörleri için Tanım 3.2.3 göz önünde bulundurulursa

$$\mathbf{t}_\beta = (-\sin 2s, 0, -\cos 2s) \quad (4.122)$$

$$\mathbf{n}_\beta = (-\cos 2s, 0, \sin 2s) \quad (4.123)$$

ve

$$\mathbf{b}_\beta = (0, 1, 0) \quad (4.124)$$

bulunur. Frenet eğrilikleri ise

$$\kappa_\beta = 2 \text{ ve } \tau_\beta = 0 \quad (4.125)$$

olur. $\mathbf{n}_q \mathbf{b}_q$ -Smarandache eğrisinin q-çatısının \mathbf{n}_q^β ve \mathbf{b}_q^β vektörleri ise

$$\mathbf{n}_q^\beta = (0, 1, 0) \quad (4.126)$$

ve

$$\mathbf{b}_q^\beta = (\cos 2s, 0, -\sin 2s) \quad (4.127)$$

olur. Teorem 3.6.1 eşitliğinden q-eğrilikleri ise

$$\begin{aligned} k_1^\beta &= 0 \\ k_2^\beta &= -2 \\ k_3^\beta &= 0 \end{aligned} \quad (4.128)$$

olarak hesaplanır.

4.4 $\mathbf{tn}_q \mathbf{b}_q$ -Smarandache Eğrisi

$\alpha : I \rightarrow E^3$ birim hızlı regüler eğrisinin q-çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ olsun. \mathbf{tn}_q -Smarandache eğrisi, $\beta : I \rightarrow E^3$, s^* yay-parametresi ile verilsin. Buna göre

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{t} + \mathbf{n}_q + \mathbf{b}_q) \quad (4.129)$$

olarak yazılır. Burada s parametresine göre türev alınırsa

$$\frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{t}' + \mathbf{n}_q' + \mathbf{b}_q') \quad (4.130)$$

bulunur. $\frac{d\beta}{ds^*} = \mathbf{t}_\beta$ olup (4.130) eşitliğinde Teorem 3.6.1 kullanılırsa

$$\mathbf{t}_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-(k_1 + k_2)\mathbf{t} + (k_1 - k_3)\mathbf{n}_q + (k_2 + k_3)\mathbf{b}_q) \quad (4.131)$$

olur. İki tarafın normunun karesi alınırsa

$$\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 = \frac{1}{3}((k_1 + k_2)^2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + (k_1 - k_3)^2 \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle + (k_2 + k_3)^2 \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle) \quad (4.132)$$

elde edilir. $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = 1, \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = 1, \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 1$ olduğundan

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(k_1 + k_2)^2 + (k_1 - k_3)^2 + (k_2 + k_3)^2} \quad (4.133)$$

olur. (4.131) eşitliğinde (4.133) eşitliği kullanılırsa

$$\mathbf{t}_\beta = \frac{-(k_1 + k_2)\mathbf{t} + (k_1 - k_3)\mathbf{n}_q + (k_2 + k_3)\mathbf{b}_q}{\sqrt{(k_1 + k_2)^2 + (k_1 - k_3)^2 + (k_2 + k_3)^2}} \quad (4.134)$$

bulunur. $\hat{\mu} = (k_1 + k_2)^2 + (k_1 - k_3)^2 + (k_2 + k_3)^2$ olarak alınıp s parametresine göre türev alınırsa

$$\frac{d\mathbf{t}_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\hat{\mu}^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} 2\{(k_1 + k_2)(k_1 + k_2)' + (k_1 - k_3)(k_1 - k_3)' \\ + (k_2 + k_3)(k_2 + k_3)'\} \cdot \{(k_1 + k_2)\mathbf{t} - (k_1 - k_3)\mathbf{n}_q \\ - (k_2 + k_3)\mathbf{b}_q\} + \hat{\mu}((k_1 + k_2)'\mathbf{t} + (k_1 + k_2)\mathbf{t}' \\ - (k_1 - k_3)'\mathbf{n}_q - (k_1 - k_3)\mathbf{n}'_q - (k_2 + k_3)'\mathbf{b}_q - (k_2 + k_3)\mathbf{b}'_q) \end{bmatrix} \quad (4.135)$$

elde edilir. Teorem 3.6.1 kullanılırsa

$$\frac{d\mathbf{t}_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{-1}{\hat{\mu}^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} ((k_1 + k_2)(k_1 + k_2)' + (k_1 - k_3)(k_1 - k_3)' + (k_2 + k_3)(k_2 + k_3)') \\ (- (k_1 + k_2)\mathbf{t} + (k_1 - k_3)\mathbf{n}_q + (k_2 + k_3)\mathbf{b}_q) \\ + \hat{\mu}((k_1 + k_2)'\mathbf{t} + (k_1 + k_2)k_1\mathbf{n}_q + (k_1 + k_2)k_2\mathbf{b}_q \\ - (k_1 - k_3)'\mathbf{n}_q + (k_1 - k_3)k_1\mathbf{t} - (k_1 - k_3)k_3\mathbf{b}_q \\ - (k_2 + k_3)'\mathbf{b}_q + (k_2 + k_3)k_2\mathbf{t} + (k_2 + k_3)k_3\mathbf{n}_q) \end{bmatrix} \quad (4.136)$$

olur. Burada $\phi = 2(k_1k_1' + k_2k_2' + k_3k_3') + (k_1k_2)' - (k_1k_3)' + (k_2k_3)'$ olarak alınır ve \mathbf{t} , \mathbf{n}_q ve \mathbf{b}_q vektörlerinin katsayıları sırasıyla

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1 &= \phi(k_1 + k_2) + \hat{\mu}((k_1 + k_2)' + k_1^2 + k_2^2 - k_3(k_1 - k_2)) \\ \hat{\lambda}_2 &= -\phi(k_1 - k_3) - \hat{\mu}((k_1 - k_3)' - k_1^2 - k_3^2 - k_2(k_1 + k_3)) \\ \hat{\lambda}_3 &= -\phi(k_2 + k_3) - \hat{\mu}((k_2 + k_3)' - k_2^2 - k_3^2 - k_1(k_2 - k_3)) \end{aligned} \quad (4.137)$$

olarak ifade edilirse (4.136) eşitliği

$$\frac{d\mathbf{t}_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{-1}{\hat{\mu}^{\frac{3}{2}}} (\hat{\lambda}_1\mathbf{t} + \hat{\lambda}_2\mathbf{n}_q + \hat{\lambda}_3\mathbf{b}_q) \quad (4.138)$$

şeklinde yazılır. $\frac{d\mathbf{t}_\beta}{ds^*} = \mathbf{t}'_\beta$ ve (4.133) eşitliği, (4.138) eşitliğinde yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\mathbf{t}'_\beta = \frac{-\sqrt{3}}{\hat{\mu}^2} (\hat{\lambda}_1\mathbf{t} + \hat{\lambda}_2\mathbf{n}_q + \hat{\lambda}_3\mathbf{b}_q) \quad (4.139)$$

olur. Bu ifadenin normu alınırsa

$$\kappa_\beta = \|\mathbf{t}'_\beta\| = \sqrt{\langle \mathbf{t}'_\beta, \mathbf{t}'_\beta \rangle} = \frac{\sqrt{3}}{\hat{\mu}} \sqrt{\hat{\lambda}_1^2 + \hat{\lambda}_2^2 + \hat{\lambda}_3^2} \quad (4.140)$$

bulunur. $\hat{\eta} = \hat{\lambda}_1^2 + \hat{\lambda}_2^2 + \hat{\lambda}_3^2$ olarak alınırsa Tanım 3.2.3 gereği (4.139) ve (4.140) eşitlikleri kullanılırsa

$$\mathbf{n}_\beta = \frac{-1}{\sqrt{\hat{\eta}}} (\hat{\lambda}_1\mathbf{t} + \hat{\lambda}_2\mathbf{n}_q + \hat{\lambda}_3\mathbf{b}_q) \quad (4.141)$$

olur. (4.134) ve (4.141) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_\beta &= \frac{-1}{\sqrt{\widehat{\mu\eta}}} \left[(-(k_1+k_2)\mathbf{t} + (k_1-k_3)\mathbf{n}_q + (k_2+k_3)\mathbf{b}_q) \wedge (\widehat{\lambda}_1\mathbf{t} + \widehat{\lambda}_2\mathbf{n}_q + \widehat{\lambda}_3\mathbf{b}_q) \right] \quad (4.142) \\ &= \frac{-1}{\sqrt{\widehat{\mu\eta}}} \begin{bmatrix} -(k_1+k_2)\widehat{\lambda}_1(\mathbf{t} \wedge \mathbf{t}) - (k_1+k_2)\widehat{\lambda}_2(\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q) \\ -(k_1+k_2)\widehat{\lambda}_3(\mathbf{t} \wedge \mathbf{b}_q) + (k_1-k_3)\widehat{\lambda}_1(\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{t}) \\ + (k_1-k_3)\widehat{\lambda}_2(\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{n}_q) + (k_1-k_3)\widehat{\lambda}_3(\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{b}_q) \\ + (k_2+k_3)\widehat{\lambda}_1(\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{t}) + (k_2+k_3)\widehat{\lambda}_2(\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{n}_q) \\ + (k_2+k_3)\widehat{\lambda}_3(\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{b}_q) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır, Tanım 3.6.1 kullanılırsa

$$\mathbf{b}_\beta = \frac{-1}{\sqrt{\widehat{\mu\eta}}} \begin{bmatrix} ((k_1-k_3)\widehat{\lambda}_3 - (k_2+k_3)\widehat{\lambda}_2)\mathbf{t} + ((k_1+k_2)\widehat{\lambda}_3 + (k_2+k_3)\widehat{\lambda}_1)\mathbf{n}_q \\ + (-(k_1+k_2)\widehat{\lambda}_2 - (k_1-k_3)\widehat{\lambda}_1)\mathbf{b}_q \end{bmatrix} \quad (4.143)$$

bulunur. \mathbf{t} , \mathbf{n}_q ve \mathbf{b}_q başkatsayıları sırasıyla $\widehat{\sigma}_1$, $\widehat{\sigma}_2$ ve $\widehat{\sigma}_3$ ile gösterilirse

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_1 &= -k_3(\widehat{\lambda}_3 + \widehat{\lambda}_2) + k_1\widehat{\lambda}_3 - k_2\widehat{\lambda}_2 \\ \widehat{\sigma}_2 &= k_2(\widehat{\lambda}_3 + \widehat{\lambda}_1) + k_1\widehat{\lambda}_3 + k_3\widehat{\lambda}_1 \\ \widehat{\sigma}_3 &= -k_1(\widehat{\lambda}_2 + \widehat{\lambda}_1) - k_2\widehat{\lambda}_2 + k_3\widehat{\lambda}_1 \end{aligned} \quad (4.144)$$

olur ve (4.143) eşitliği

$$\mathbf{b}_\beta = \frac{-1}{\sqrt{\widehat{\mu\eta}}} (\widehat{\sigma}_1\mathbf{t} + \widehat{\sigma}_2\mathbf{n}_q + \widehat{\sigma}_3\mathbf{b}_q) \quad (4.145)$$

şeklinde ifade edilir. Buraya kadar \mathbf{t}_β , \mathbf{n}_β ve \mathbf{b}_β vektörlerini bulundu. Şimdi τ_β hesabı için β' , β'' ve β''' gerekli olup bunun için (4.130) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\beta'}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} (-(k_1+k_2)'\mathbf{t} + (k_1-k_3)'\mathbf{n}_q + (k_2+k_3)'\mathbf{b}_q) \\ -(k_1+k_2)\mathbf{t}' + (k_1-k_3)\mathbf{n}_q' + (k_2+k_3)\mathbf{b}_q' \end{bmatrix} \quad (4.146)$$

bulunur. Teorem 3.6.1 kullanılırsa

$$\beta'' = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -(k_1' + k_2' - k_3(k_1 - k_2) + k_1^2 + k_2^2)\mathbf{t} + (k_1' - k_3' - k_2(k_1 + k_3) - k_1^2 - k_3^2)\mathbf{n}_q \\ + (k_2' + k_3' - k_1(k_2 - k_3) - k_2^2 - k_3^2)\mathbf{b}_q \end{bmatrix} \quad (4.147)$$

olur. Türev alınır ve $\kappa = k_1^2 + k_2^2$ eşitlikleri kullanılarak yerine yazılırsa

$$\beta''' = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} -k_1'' - k_2'' - 3k_1k_1' - 3k_2'k_2 + (k_1k_3)' - (k_2k_3)' \\ + k_3'(k_1 - k_2) + (k_1 + k_2)(\kappa + k_3^2) \end{pmatrix} \mathbf{t} \\ + \begin{pmatrix} k_1'' - k_3'' - 3k_1k_1' - 3k_3k_3' - (k_1k_2)' - (k_2k_3)' \\ - k_2'(k_1 + k_3) - (k_1 - k_3)(\kappa + k_3^2) \end{pmatrix} \mathbf{n}_q \\ + \begin{pmatrix} k_2'' + k_3'' - 3k_2'k_2 - 3k_3k_3' - (k_1k_2)' + (k_1k_3)' \\ - k_1'(k_2 - k_3) - (k_2 + k_3)(\kappa + k_3^2) \end{pmatrix} \mathbf{b}_q \end{bmatrix} \quad (4.148)$$

bulunur. \mathbf{t} , \mathbf{n}_q ve \mathbf{b}_q katsayıları sırasıyla $\widehat{\rho}_1$, $\widehat{\rho}_2$ ve $\widehat{\rho}_3$ ile gösterilirse

$$\begin{aligned}\widehat{\rho}_1 &= -k_1'' - k_2'' - 3(k_1 k_1' + k_2' k_2) + (k_3(k_1 - k_2))' \\ &\quad + k_3'(k_1 - k_2) + (k_1 + k_2)(\kappa + k_3^2) \\ \widehat{\rho}_2 &= k_1'' - k_3'' - 3(k_1 k_1' + k_3 k_3') - (k_2(k_1 + k_3))' \\ &\quad - k_2'(k_1 + k_3) - (k_1 - k_3)(\kappa + k_3^2) \\ \widehat{\rho}_3 &= k_2'' + k_3'' - 3(k_2' k_2 + k_3 k_3') - (k_1(k_2 - k_3))' \\ &\quad - k_1'(k_2 - k_3) - (k_2 + k_3)(\kappa + k_3^2)\end{aligned}\quad (4.149)$$

olur ve (4.148) eşitliği

$$\beta''' = \frac{1}{\sqrt{3}} (\widehat{\rho}_1 \mathbf{t} + \widehat{\rho}_1 \mathbf{n}_q + \widehat{\rho}_1 \mathbf{b}_q) \quad (4.150)$$

şeklinde ifade edilir. (4.130), (4.147) ve (4.150) kullanılarak istenilen eşitlikler

$$\beta' \wedge \beta'' = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \left(\frac{k_2 - k_3}{k_1 - k_3} \right)' (k_1 - k_3)^2 + k_3 \widehat{\mu}, \left(\frac{k_2 + k_3}{k_1 + k_2} \right)' (k_1 + k_2)^2 \\ -k_2 \widehat{\mu}, \left(\frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_3} \right)' (k_1 - k_3)^2 + k_1 \widehat{\mu} \end{bmatrix} \quad (4.151)$$

ve

$$\langle \beta' \wedge \beta'', \beta''' \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} (k_1 - k_3)^2 \left\{ \left(\frac{k_2 - k_3}{k_1 - k_3} \right)' \widehat{\rho}_1 + \left(\frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_3} \right)' \widehat{\rho}_3 \right\} + \left(\frac{k_2 + k_3}{k_1 + k_2} \right)' (k_1 + k_2)^2 \widehat{\rho}_2 \\ + \widehat{\mu} (k_3 \widehat{\rho}_1 - k_2 \widehat{\rho}_2 + k_1 \widehat{\rho}_3) \end{bmatrix} \quad (4.152)$$

olur. Bulunan eşitlikler (3.11) eşitliği göz önünde bulundurularak kullanılırsa

$$\tau_\beta = \sqrt{3} \frac{\begin{bmatrix} (k_1 - k_3)^2 \left\{ \left(\frac{k_2 - k_3}{k_1 - k_3} \right)' \widehat{\rho}_1 + \left(\frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_3} \right)' \widehat{\rho}_3 \right\} \\ + \left(\frac{k_2 + k_3}{k_1 + k_2} \right)' (k_1 + k_2)^2 \widehat{\rho}_2 + \widehat{\mu} (k_3 \widehat{\rho}_1 - k_2 \widehat{\rho}_2 + k_1 \widehat{\rho}_3) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \left\{ \left(\frac{k_2 - k_3}{k_1 - k_3} \right)' (k_1 - k_3)^2 + k_3 \widehat{\mu} \right\}^2 + \left\{ \left(\frac{k_2 + k_3}{k_1 + k_2} \right)' (k_1 + k_2)^2 - k_2 \widehat{\mu} \right\}^2 \\ + \left\{ \left(\frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_3} \right)' (k_1 - k_3)^2 + k_1 \widehat{\mu} \right\}^2 \end{bmatrix}} \quad (4.153)$$

elde edilir. β eğrisinin quasi-normal ve quasi binormal vektörleri, (4.141) ve (4.145) eşitlikleri kullanılarak (3.12) eşitliğinde yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\mathbf{n}_q^\beta = \frac{-1}{\sqrt{\widehat{\mu}\widehat{\eta}}} \begin{bmatrix} (\sqrt{\widehat{\mu}\widehat{\lambda}_1} \cos \theta_\beta + \widehat{\sigma}_1 \sin \theta_\beta) \mathbf{t} + (\sqrt{\widehat{\mu}\widehat{\lambda}_2} \cos \theta_\beta + \widehat{\sigma}_2 \sin \theta_\beta) \mathbf{n}_q \\ + (\sqrt{\widehat{\mu}\widehat{\lambda}_3} \cos \theta_\beta + \widehat{\sigma}_3 \sin \theta_\beta) \mathbf{b}_q \end{bmatrix} \quad (4.154)$$

ve

$$\mathbf{b}_q^\beta = \frac{1}{\sqrt{\widehat{\mu}\widehat{\eta}}} \begin{bmatrix} (\sqrt{\widehat{\mu}\widehat{\lambda}_1} \sin \theta_\beta - \widehat{\sigma}_1 \cos \theta_\beta) \mathbf{t} + (\sqrt{\widehat{\mu}\widehat{\lambda}_2} \sin \theta_\beta - \widehat{\sigma}_2 \cos \theta_\beta) \mathbf{n}_q \\ + (\sqrt{\widehat{\mu}\widehat{\lambda}_3} \sin \theta_\beta - \widehat{\sigma}_3 \cos \theta_\beta) \mathbf{b}_q \end{bmatrix} \quad (4.155)$$

olarak hesaplanır.

k_1^β ve k_2^β eğriliklerini bulmak için (4.139), (4.154) ve (4.155) eşitlikleri kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$k_1^\beta = \langle \mathbf{t}'_\beta, \mathbf{n}_q^\beta \rangle = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\widehat{\mu}^5 \widehat{\eta}}} \left(\cos \theta_\beta \sqrt{\widehat{\mu} \widehat{\eta}} + \sin \theta_\beta (\widehat{\sigma}_1 \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\sigma}_2 \widehat{\lambda}_2 + \widehat{\sigma}_3 \widehat{\lambda}_3) \right) \quad (4.156)$$

ve

$$k_2^\beta = \langle \mathbf{t}'_\beta, \mathbf{b}_q^\beta \rangle = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\widehat{\mu}^5 \widehat{\eta}}} \left(-\sin \theta_\beta \sqrt{\widehat{\mu} \widehat{\eta}} + \cos \theta_\beta (\widehat{\sigma}_1 \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\sigma}_2 \widehat{\lambda}_2 + \widehat{\sigma}_3 \widehat{\lambda}_3) \right) \quad (4.157)$$

bulunur. k_3^β eğriliği için (4.154) eşitliğinin türevi alınırsa

$$\mathbf{n}_q^{\beta'} = -\frac{(\widehat{\mu \widehat{\eta}})'}{2(\widehat{\mu \widehat{\eta}})^{\frac{3}{2}}} \left[\begin{aligned} & (\sqrt{\widehat{\mu} \widehat{\lambda}_1} \cos \theta_\beta + \widehat{\sigma}_1 \sin \theta_\beta) \mathbf{t} + (\sqrt{\widehat{\mu} \widehat{\lambda}_2} \cos \theta_\beta + \widehat{\sigma}_2 \sin \theta_\beta) \mathbf{n}_q \\ & + (\sqrt{\widehat{\mu} \widehat{\lambda}_3} \cos \theta_\beta + \widehat{\sigma}_3 \sin \theta_\beta) \mathbf{b}_q \end{aligned} \right] + \frac{1}{\sqrt{\widehat{\mu \widehat{\eta}}}} \left[\begin{aligned} & \left(\begin{aligned} & (\sqrt{\widehat{\mu}} \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\mu} \widehat{\lambda}'_1 + \widehat{\sigma}_1 - \sqrt{\widehat{\mu}} (\widehat{\lambda}_2 k_1 + \widehat{\lambda}_3 k_2)) \cos \theta_\beta \\ & - (\sqrt{\widehat{\mu} \widehat{\lambda}_1} + \widehat{\sigma}'_1 - \widehat{\sigma}_2 k_1 - \widehat{\sigma}_3 k_2) \sin \theta_\beta \end{aligned} \right) \mathbf{t} \\ & + \left(\begin{aligned} & (\sqrt{\widehat{\mu}} \widehat{\lambda}_2 + \widehat{\mu} \widehat{\lambda}'_2 + \widehat{\sigma}_2 + \sqrt{\widehat{\mu}} (\widehat{\lambda}_1 k_1 - \widehat{\lambda}_3 k_3)) \cos \theta_\beta \\ & - (\sqrt{\widehat{\mu} \widehat{\lambda}_2} + \widehat{\sigma}'_2 + \widehat{\sigma}_1 k_1 - \widehat{\sigma}_3 k_3) \sin \theta_\beta \end{aligned} \right) \mathbf{n}_q \\ & + \left(\begin{aligned} & \sqrt{\widehat{\mu}} \widehat{\lambda}_3 + \widehat{\mu} \widehat{\lambda}'_3 + \widehat{\sigma}_3 + \sqrt{\widehat{\mu}} (\widehat{\lambda}_1 k_2 + \widehat{\lambda}_2 k_3) \cos \theta_\beta \\ & - (\sqrt{\widehat{\mu} \widehat{\lambda}_3} + \widehat{\sigma}'_3 + \widehat{\sigma}_1 k_2 + \widehat{\sigma}_2 k_3) \sin \theta_\beta \end{aligned} \right) \mathbf{b}_q \end{aligned} \right] \quad (4.158)$$

ve eşitlikte yerine yazılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned} k_3^\beta &= \langle \mathbf{n}_q^{\beta'}, \mathbf{b}_q^\beta \rangle \\ &= \frac{1}{2\widehat{\mu \widehat{\eta}}} \left[\begin{aligned} & \sin 2\theta_\beta [\sqrt{\widehat{\mu}} (\widehat{\lambda}'_1 \widehat{\sigma}_1 + \widehat{\lambda}'_2 \widehat{\sigma}_2 + \widehat{\lambda}'_3 \widehat{\sigma}_3) + \theta'_\beta (\widehat{\sigma}_1^2 + \widehat{\sigma}_2^2 + \widehat{\sigma}_3^2 + \widehat{\mu \widehat{\eta}})] \\ & - 2\sqrt{\widehat{\mu}} \theta'_\beta (\widehat{\lambda}_1 \widehat{\sigma}_1 + \widehat{\lambda}_2 \widehat{\sigma}_2 + \widehat{\lambda}_3 \widehat{\sigma}_3) - 2\widehat{\mu} \cos^2 \theta_\beta (\widehat{\lambda}'_1 \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}'_2 \widehat{\lambda}_2 + \widehat{\lambda}'_3 \widehat{\lambda}_3) \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (4.159)$$

olarak hesaplanır.

Örnek 4.1.4 $\alpha(s) = (2 \cos^2 s, \sin 2s, s)$ eğrisi verilsin. İzdüşüm vektörü $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ olan bu eğrinin q-çatı vektörleri

$$\mathbf{t} = \frac{\sqrt{5}}{5} (-\sin 2s, \cos 2s, 1) \quad (4.160)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \wedge \mathbf{k} &= \frac{\sqrt{5}}{5} (-\sin 2s, \cos 2s, 1) \wedge (0, 0, 1) \\ &= (2 \cos 2s, 2 \sin 2s, 0) \end{aligned} \quad (4.161)$$

$$\mathbf{n}_q = (\cos 2s, \sin 2s, 0) \quad (4.162)$$

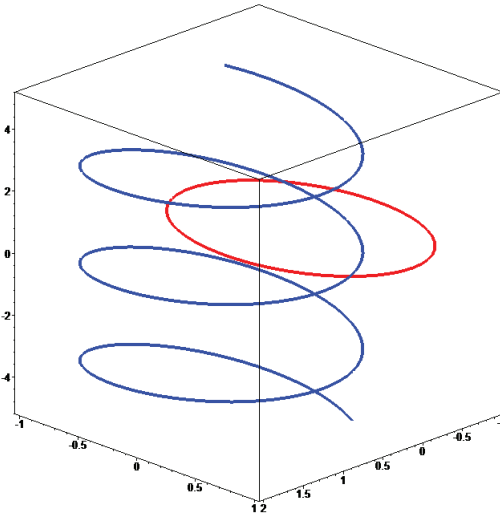
ve

$$\mathbf{b}_q = \frac{\sqrt{5}}{5} (-\sin 2s, \cos 2s, -2) \quad (4.163)$$

olarak hesaplanır. Tanım 3.8.2 kullanılırsa $\mathbf{tn}_q\mathbf{b}_q$ -Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*) = \left(\frac{-\sqrt{15}}{5} \sin 2s + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos 2s, \frac{\sqrt{15}}{5} \cos 2s + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin 2s, \frac{-\sqrt{15}}{5} \right) \quad (4.164)$$

şeklinde bulunur. Esas eğri mavi ile onun $\mathbf{tn}_q\mathbf{b}_q$ -Smarandache eğrisi kırmızı ile Şekil 4.4 de gösterilmiştir.



Şekil 4.4: Eğri ve $\mathbf{tn}_q\mathbf{b}_q$ -Smarandache eğrisi.

Frenet vektörleri için Tanım 3.2.3 göz önünde bulundurulursa

$$\mathbf{t}_\beta = \frac{\sqrt{210}}{28} \left(\frac{-2\sqrt{15}}{5} \cos 2s - \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin 2s, \frac{-2\sqrt{15}}{5} \sin 2s + \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos 2s, 0 \right) \quad (4.165)$$

$$\mathbf{n}_\beta = \frac{\sqrt{14}}{14} \left(3 \sin 2s - \sqrt{5} \cos 2s, -3 \cos 2s - \sqrt{5} \sin 2s, 0 \right) \quad (4.166)$$

ve

$$\mathbf{b}_\beta = (0, 0, 1) \quad (4.167)$$

bulunur. Frenet eğrilikleri ise

$$\kappa_\beta = \frac{\sqrt{210}}{14} \text{ ve } \tau_\beta = 0 \quad (4.168)$$

olur. $\mathbf{tn}_q\mathbf{b}_q$ -Smarandache eğrisinin q -çatısının \mathbf{n}_q^β ve \mathbf{b}_q^β vektörleri ise

$$\mathbf{n}_q^\beta = \left(\frac{-2\sqrt{15}}{5} \sin 2s + \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos 2s, \frac{2\sqrt{15}}{5} \cos 2s + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin 2s, 0 \right) \quad (4.169)$$

ve

$$\mathbf{b}_q^\beta = (0, 0, 1) \quad (4.170)$$

olur. Teorem 3.6.1 eşitliğinden q-eğrilikleri ise

$$\begin{aligned} k_1^\beta &= \frac{-\sqrt{210}}{14} \\ k_2^\beta &= 0 \\ k_3^\beta &= 0 \end{aligned} \quad (4.171)$$

olarak hesaplanır.



5. q-ÇATILI TIMELIKE EĞRİLERİN SMARANDACHE EĞRİLERİ

Bu bölümde Minkowski-3 uzayında $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ q-çatısı kullanılarak yönlü Bertrand, Mannheim ve involüt-evolüt eğri çiftleri hakkında bilgi verilmiştir, bu eğrilerin timelike olma durumlarına göre elde edilmiş bazı teoremlere yer verilmiştir. Ayrıca \mathbf{tn}_q -Smarandache eğrisi, \mathbf{tb}_q -Smarandache eğrisi, $\mathbf{n}_q\mathbf{b}_q$ -Smarandache eğrisi ve $\mathbf{tn}_q\mathbf{b}_q$ -Smarandache eğrisi tanımlanmış, tanımlanan bu eğriler için Frenet vektörleri ve eğrilikleri bulunmuştur. Elde edilen eşitliklerden bu Smarandache eğrilerinin $\mathbf{t}_\beta, \mathbf{n}_q^\beta, \mathbf{b}_q^\beta$ q-çatı vektörleri ile q-eğrilikleri elde edilmiştir.

5.1 Minkowski Uzayında q-Çatılı Timelike Eğriler

Bu alt bölümde Minkowski 3-uzayında timelike bir uzay eğrisinin quasi-normal ve quasi-binormal vektörü kullanılarak Bertrand, Mannheim ve involüt-evolüt eğri çiftleri hakkında bazı tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Buradaki hesaplamalarda birim teğet vektör \mathbf{t} (timelike) ve izdüşüm vektör \mathbf{k} (spacelike) olup buna bağlı olarak quasi-normal vektör \mathbf{n}_q (spacelike) ve quasi-binormal vektör \mathbf{b}_q (spacelike) olarak kullanılmıştır.

Tanım 5.1.1 $M, N \subset \mathbb{R}_1^3$ iki uzay eğrisi (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. M eğrisinin q-çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ ve N eğrisinin q-çatısı $\{\mathbf{t}^\lambda, \mathbf{n}_q^\lambda, \mathbf{b}_q^\lambda\}$ olmak üzere, eğer \mathbf{n}_q ve \mathbf{n}_q^λ quasi-normal vektörleri lineer bağımlı ise M ve N eğrilerine yönlü Bertrand eğri çifti denir (Dede vd, 2018; Tarım, 2016).

Teorem 5.1.1 $\alpha(s)$ birim hızlı yönlü timelike bir uzay eğrisi ve yay parametresi s_1 olan $\beta(s)$ eğrisi, $\alpha(s)$ nin yönlü timelike Bertrand eğri çifti olsun. Burada izdüşüm vektörü \mathbf{k} (spacelike) olup bu durumda

(a) Yönlü timelike Bertrand eğrileri olan $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ eğrileri arasındaki uzaklık sabittir.

(b) $k_3 = 0$ ise yönlü timelike Bertrand eğrilerinin karşılık gelen noktalarındaki teğet vektörler arasındaki açı sabittir (Dede vd, 2018; Tarım, 2016).

Teorem 5.1.2 $\alpha(s)$ birim hızlı yönlü timelike bir uzay eğrisi ve yay parametresi s_1 olan $\beta(s)$ eğrisi, $\alpha(s)$ nin yönlü timelike Bertrand eğri çifti olsun. Burada izdüşüm vektörü \mathbf{k}

(spacelike) tır. Bu iki eğrinin q-çatıları arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}^\lambda \\ \mathbf{n}_q^\lambda \\ \mathbf{b}_q^\lambda \end{bmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{|\lambda^2 k_3^2 - (1 + \lambda k_1)^2|}} \begin{bmatrix} 1 + \lambda k_1 & 0 & \lambda k_3 \\ 0 & \sqrt{|\lambda^2 k_3^2 - (1 + \lambda k_1)^2|} & 0 \\ \pm \lambda k_3 & 0 & \pm (1 + \lambda k_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_q \\ \mathbf{b}_q \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

şeklinde verilir (Dede vd, 2018; Tarım, 2016).

Sonuç 5.1.2 Yönlü timelike Bertrand eğri çiftlerinde her zaman quasi-normal vektörleri lineer bağımlıdır (Dede vd, 2018).

Teorem 5.1.3 $\alpha(s)$ birim hızlı yönlü timelike bir uzay eğrisi ve yay parametresi s_1 olan $\beta(s)$ eğrisi, $\alpha(s)$ nin yönlü timelike Bertrand eğri çifti olsun. Burada izdüşüm vektörü \mathbf{k} spacelike olup q-eğrilikleri arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} k_1^\lambda &= \frac{(1 + \lambda k_1) k_1 - \lambda k_3^2}{\sqrt{|\lambda^2 k_3^2 - (1 + \lambda k_1)^2|}} \\ k_2^\lambda &= \pm \frac{\lambda k_3' (1 + \lambda k_1) - \lambda^2 k_3 k_1' + ((1 + \lambda k_1)^2 - \lambda^2 k_3^2) k_2}{|\lambda^2 k_3^2 - (1 + \lambda k_1)^2|} \\ k_3^\lambda &= \pm \frac{k_3}{\sqrt{|\lambda^2 k_3^2 - (1 + \lambda k_1)^2|}} \end{aligned} \quad (5.2)$$

şeklinde verilir. Burada $\beta(s)$ eğrisinin q-eğrilikleri k_1^λ, k_2^λ ve k_3^λ dır (Dede vd, 2018; Tarım, 2016).

Tanım 5.1.2 α ve α_1 , 3-boyutlu Minkowski uzayında birim hızlı eğriler olsun. α eğrisinin q-çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ ve α_1 eğrisinin q-çatısı $\{\mathbf{t}^\gamma, \mathbf{n}_q^\gamma, \mathbf{b}_q^\gamma\}$ olmak üzere, α eğrisinin quasi-normali ile α_1 eğrisinin quasi-binormali lineer bağımlı ise, α eğrisine yönlü Mannheim eğrisi, α_1 eğrisine de yönlü Mannheim eğri ortağı denir (Tarım, 2016).

Teorem 5.1.4 α ve α_1 , \mathbb{R}_1^3 Minkowski uzayında birim hızlı yönlü timelike eğriler olsun. Burada izdüşüm vektörü \mathbf{k} spacelike olup $\{\alpha, \alpha_1\}$ yönlü Mannheim eğri çiftinin ilgili noktaları arasındaki uzaklık sabittir (Tarım, 2016).

Teorem 5.1.5 α ve α_1, \mathbb{R}_1^3 Minkowski uzayında birim hızlı yönlü timelike eğriler olsun. α ile yay parametresi s_1 olan α_1 eğrisinin yönlü timelike Mannheim eğri çifti olması için gerek ve yeter koşul λ sıfırdan farklı bir sabit ve izdüşüm vektör \mathbf{k} spacelike olmak üzere

$$k_2^\gamma = \pm \frac{k_1 + \lambda k_1^2 - \lambda k_3^2}{\left| \lambda^2 k_3^2 - (1 + \lambda k_1)^2 \right|} \quad (5.3)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada k_1, k_2 ve k_3 , α eğrisinin, k_1^γ, k_2^γ ve k_3^γ , α_1 eğrisinin q-eğrilikleridir (Tarım, 2016).

Tanım 5.1.3 $M, N \subset \mathbb{R}_1^3$ iki uzay eğrisi M ve N sırasıyla (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ noktalarında M ve N nin q-çatısı sırasıyla $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ ve $\{\mathbf{t}^*, \mathbf{n}_q^*, \mathbf{b}_q^*\}$ olmak üzere, eğer $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t}^* \rangle = 0$ ise N ye M nin yönlü involütü, M ye de N nin evolütü denir (Tarım, 2016).

Teorem 5.1.6 $\alpha(s)$ birim hızlı yönlü timelike bir uzay eğrisi ve yay parametresi s_1 olan $\beta(s)$ eğrisi, $\alpha(s)$ nin yönlü timelike involüt-evolüt eğri çifti olsun. Burada izdüşüm vektörü \mathbf{k} spacelike olup $d(\alpha(s), \beta(s)) = |c - s|$, $c = \text{sabit}$ (Tarım, 2016).

5.2 Minkowski Uzayında q-Çatılı Timelike Eğrilerin Smarandache Eğrileri

Bu kısımda Minkowski 3-uzayında timelike bir uzay eğrisinin quasi-normal ve quasi-binormal vektörleri kullanılarak Smrandache eğrileri tanımlanacaktır. Burada birim teğet vektör \mathbf{t} (timelike) ve izdüşüm vektör \mathbf{k} (spacelike) olup buna bağlı olarak quasi-normal vektör \mathbf{n}_q (spacelike) ve quasi-binormal vektör \mathbf{b}_q (spacelike) olarak alınmıştır. Ayrıca bu Smarandache eğrilerinin casual karakteristikleri de incelenmiş ve Frenet vektörleri, eğrilikleri, $\mathbf{t}_\beta, \mathbf{n}_q^\beta, \mathbf{b}_q^\beta$ q-çatı vektörleri ile q-eğrilikleri elde edilmiştir.

5.2.1 \mathbf{tn}_q -Smarandache eğrisi

$\alpha : I \rightarrow E^3$ birim hızlı regüler eğrisinin q-çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ olsun. \mathbf{tn}_q -Smarandache eğrisi, $\beta : I \rightarrow E^3$, s^* yay-parametresi ile verilsin. Buna göre

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{t} + \mathbf{n}_q) \quad (5.4)$$

olarak yazılır. Burada s parametresine göre türevi alınırsa

$$\beta' = \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{t}' + \mathbf{n}'_q) \quad (5.5)$$

bulunur. $\frac{d\beta}{ds^*} = t_\beta$ olup (5.5) eşitliğinde Teorem 3.10.1 kullanılırsa

$$\mathbf{t}_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(k_1 \mathbf{t} + k_1 \mathbf{n}_q + (k_2 + k_3) \mathbf{b}_q) \quad (5.6)$$

olur. İki tarafın normunun karesi alınırsa

$$\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 = \frac{1}{2}(k_1^2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + k_1^2 \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle + (k_2 + k_3)^2 \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle) \quad (5.7)$$

elde edilir. $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = -1$, $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = 1$, $\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 1$ olduğundan

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{|k_2 + k_3|}{\sqrt{2}} \quad (5.8)$$

olur. $k_2 \neq -k_3$ olmak üzere (5.6) eşitliğinde (5.8) eşitliği kullanılırsa

$$\mathbf{t}_\beta = \frac{1}{|k_2 + k_3|}(k_1 \mathbf{t} + k_1 \mathbf{n}_q + (k_2 + k_3) \mathbf{b}_q) \quad (5.9)$$

bulunur. tn_q – Smrandache eğrisinin karakteristiği için

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}_\beta, \mathbf{t}_\beta \rangle &= \frac{1}{|k_2 + k_3|^2}(k_1^2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + k_1^2 \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle + (k_2 + k_3)^2 \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle) \\ &= 1 \end{aligned} \quad (5.10)$$

eşitliğinden $\langle \mathbf{t}_\beta, \mathbf{t}_\beta \rangle > 0$ olur ve bu durumda β eğrisi spacelike olarak bulunur. Diğer taraftan (5.9) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\mathbf{t}_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{|k_2 + k_3|^2} \begin{bmatrix} -|k_2 + k_3|'(k_1 \mathbf{t} + k_1 \mathbf{n}_q + (k_2 + k_3) \mathbf{b}_q) \\ + |k_2 + k_3| (k_1' \mathbf{t} + k_1 \mathbf{t}' + k_1' \mathbf{n}_q + k_1 \mathbf{n}'_q \\ + (k_2 + k_3)' \mathbf{b}_q + (k_2 + k_3) \mathbf{b}'_q) \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

elde edilir. Teorem 3.10.1 kullanılırsa

$$\frac{d\mathbf{t}_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{|k_2 + k_3|^2} \begin{bmatrix} -|k_2 + k_3|'(k_1 \mathbf{t} + k_1 \mathbf{n}_q + (k_2 + k_3) \mathbf{b}_q) \\ + |k_2 + k_3| (k_1' \mathbf{t} + k_1^2 \mathbf{n}_q + k_1 k_2 \mathbf{b}_q + k_1' \mathbf{n}_q + k_1^2 \mathbf{t} \\ + k_1 k_3 \mathbf{b}_q + (k_2 + k_3)' \mathbf{b}_q + (k_2 + k_3) k_2 \mathbf{t} - (k_2 + k_3) k_3 \mathbf{n}_q) \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

olur. Burada $\psi = -\left(\frac{|k_2 + k_3|}{k_1}\right)' k_1^2$ olarak alınır, \mathbf{t} , \mathbf{n}_q ve \mathbf{b}_q vektörlerinin katsayıları sırasıyla

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \psi + |k_2 + k_3| (k_1^2 + k_2^2 + k_2 k_3) \\ \zeta_2 &= \psi + |k_2 + k_3| (k_1^2 + k_3^2 - k_2 k_3) \\ \zeta_3 &= k_1 |k_2 + k_3| (k_2 + k_3) \end{aligned} \quad (5.13)$$

olarak ifade edirse (5.12) eşitliği

$$\frac{d\mathbf{t}_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{|k_2 + k_3|^2} (\zeta_1 \mathbf{t} + \zeta_2 \mathbf{n}_q + \zeta_3 \mathbf{b}_q) \quad (5.14)$$

şeklinde yazılır. $\frac{d\mathbf{t}_\beta}{ds^*} = \mathbf{t}'_\beta$ olup (5.8) eşitliği, (5.14) eşitliğinde yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\mathbf{t}'_\beta = \frac{\sqrt{2}}{|k_2 + k_3|^3} (\zeta_1 \mathbf{t} + \zeta_2 \mathbf{n}_q + \zeta_3 \mathbf{b}_q) \quad (5.15)$$

olur. Bu ifadenin normu alınır

$$\kappa_\beta = \|\mathbf{t}'_\beta\| = \sqrt{\langle \mathbf{t}'_\beta, \mathbf{t}'_\beta \rangle} = \frac{\sqrt{2}}{|k_2 + k_3|^3} \sqrt{|-\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2|} \quad (5.16)$$

bulunur. $\xi \neq 0$ olmak üzere, $\xi = |-\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2|$ alınır, Tanım 3.2.3 gereği (5.15) ve (5.16) eşitlikleri kullanılırsa

$$\mathbf{n}_\beta = \frac{1}{\sqrt{\xi}} (\zeta_1 \mathbf{t} + \zeta_2 \mathbf{n}_q + \zeta_3 \mathbf{b}_q) \quad (5.17)$$

olur. (5.9) ve (5.17) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_\beta &= \frac{1}{|k_2 + k_3| \sqrt{\xi}} [(k_1 \mathbf{t} + k_1 \mathbf{n}_q + (k_2 + k_3) \mathbf{b}_q) \wedge (\zeta_1 \mathbf{t} + \zeta_2 \mathbf{n}_q + \zeta_3 \mathbf{b}_q)] \\ &= \frac{1}{|k_2 + k_3| \sqrt{\xi}} \left[\begin{array}{l} k_1 \zeta_1 (\mathbf{t} \wedge \mathbf{t}) + k_1 \zeta_2 (\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q) + k_1 \zeta_3 (\mathbf{t} \wedge \mathbf{b}_q) + k_1 \zeta_1 (\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{t}) \\ + k_1 \zeta_2 (\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{n}_q) + k_1 \zeta_3 (\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{b}_q) + (k_2 + k_3) \zeta_1 (\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{t}) \\ + (k_2 + k_3) \zeta_2 (\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{n}_q) + (k_2 + k_3) \zeta_3 (\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{b}_q) \end{array} \right] \end{aligned} \quad (5.18)$$

olarak hesaplanır, Tanım 3.5.1 kullanılırsa

$$\mathbf{b}_\beta = \frac{1}{|k_2 + k_3| \sqrt{\xi}} \left[\begin{array}{l} (k_1 \zeta_3 - (k_2 + k_3) \zeta_2) \mathbf{t} + (k_1 \zeta_3 - (k_2 + k_3) \zeta_1) \mathbf{n}_q \\ + (-k_1 \zeta_2 + k_1 \zeta_1) \mathbf{b}_q \end{array} \right] \quad (5.19)$$

bulunur. t , n_q ve b_q katsayıları sırasıyla ζ_1 , ζ_2 ve ζ_3 ile gösterilirse

$$\zeta_1 = k_1 \zeta_3 - (k_2 + k_3) \zeta_2 \quad \zeta_2 = k_1 \zeta_3 - (k_2 + k_3) \zeta_1 \quad \zeta_3 = -k_1 \zeta_2 + k_1 \zeta_1 \quad (5.20)$$

olur ve (5.19) eşitliği

$$\mathbf{b}_\beta = \frac{1}{|k_2 + k_3| \sqrt{\xi}} (\zeta_1 \mathbf{t} + \zeta_2 \mathbf{n}_q + \zeta_3 \mathbf{b}_q) \quad (5.21)$$

şeklinde ifade edilir. Buraya kadar t_β , n_β ve b_β vektörleri bulundu. Şimdi τ_β hesabı için β' , β'' ve β''' eşitlikleri gerekli olup bunun için (5.5) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınır

$$\frac{d\beta'}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (k'_1 \mathbf{t} + k'_1 \mathbf{n}_q + (k'_2 + k'_3) \mathbf{b}_q + k_1 \mathbf{t}' + k_1 \mathbf{n}'_q + (k_2 + k_3) \mathbf{b}'_q) \quad (5.22)$$

bulunur. Teorem 3.10.1 kullanılırsa

$$\beta'' = \frac{1}{\sqrt{2}} [(k'_1 + k_1^2 + k_2(k_2 + k_3)) \mathbf{t} + (k'_1 + k_1^2 - k_3(k_2 + k_3)) \mathbf{n}_q + (k'_2 + k'_3 + k_1(k_2 + k_3)) \mathbf{b}_q] \quad (5.23)$$

olur. Türev alınır ve $\kappa = k_1^2 + k_2^2$ eşitliği kullanılarak düzenlenirse

$$\beta''' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (k_1'' + 3k_1'k_1 + (k_2(k_2 + k_3))' + k_2(k_2 + k_3)' + k_1(\kappa - k_3^2))\mathbf{t} \\ +(k_1'' - 3k_1k_1' + k_3'(k_2 + k_3) - 2k_3(k_2 + k_3)' - k_1(\kappa - k_3^2))\mathbf{n}_q \\ +(k_2'' + k_3'' + (k_1(k_2 + k_3))' + (k_2 + k_3)(\kappa - k_3^2))\mathbf{b}_q \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

bulunur. t , n_q ve b_q katsayıları sırasıyla v_1 , v_2 ve v_3 ile gösterilirse

$$\begin{aligned} v_1 &= k_1'' + 3k_1'k_1 + (k_2(k_2 + k_3))' + k_2(k_2 + k_3)' + k_1(\kappa - k_3^2) \\ v_2 &= k_1'' - 3k_1k_1' + k_3'(k_2 + k_3) - 2k_3(k_2 + k_3)' - k_1(\kappa - k_3^2) \\ v_3 &= k_2'' + k_3'' + (k_1(k_2 + k_3))' + (k_2 + k_3)(\kappa - k_3^2) \end{aligned} \quad (5.25)$$

olur ve (5.24) eşitliği

$$\beta''' = \frac{1}{\sqrt{2}} (v_1\mathbf{t} + v_2\mathbf{n}_q + v_3\mathbf{b}_q) \quad (5.26)$$

şeklinde ifade edilir. (5.5), (5.23) ve (5.26) kullanılarak istenilen eşitlikler

$$\beta' \wedge \beta'' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi - k_3(k_2 + k_3)^2, -\psi - k_2(k_2 + k_3)^2, -k_1(k_2 + k_3)^2) \quad (5.27)$$

ve

$$\langle \beta' \wedge \beta'', \beta''' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi(v_1 - v_2) - (k_2 + k_3)^2(v_1k_3 + v_2k_2 - v_3k_1)] \quad (5.28)$$

olur. Bulunan eşitlikler (3.11) eşitliği göz önünde bulundurularak kullanılırsa

$$\tau_\beta = \left[\frac{\sqrt{2}(\psi(v_1 - v_2) - (k_2 + k_3)^2(v_1k_3 + v_2k_2 - v_3k_1))}{(\psi - k_3(k_2 + k_3)^2)^2 + (\psi + k_2(k_2 + k_3)^2)^2 - (k_1(k_2 + k_3)^2)^2} \right] \quad (5.29)$$

elde edilir. β eğrisinin quasi-normal ve quasi binormal vektörleri, (5.17) ve (5.21) eşitlikleri kullanılarak (3.12) eşitliğinde yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\mathbf{n}_q^\beta = \frac{1}{|k_2 + k_3| \sqrt{\xi}} \begin{bmatrix} (|k_2 + k_3| \zeta_1 \cos \theta_\beta + \zeta_1 \sin \theta_\beta)\mathbf{t} \\ + (|k_2 + k_3| \zeta_2 \cos \theta_\beta + \zeta_2 \sin \theta_\beta)\mathbf{n}_q \\ + (|k_2 + k_3| \zeta_3 \cos \theta_\beta + \zeta_3 \sin \theta_\beta)\mathbf{b}_q \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

ve

$$\mathbf{b}_q^\beta = \frac{-1}{|k_2 + k_3| \sqrt{\xi}} \begin{bmatrix} (|k_2 + k_3| \zeta_1 \sin \theta_\beta - \zeta_1 \cos \theta_\beta)\mathbf{t} \\ + (|k_2 + k_3| \zeta_2 \sin \theta_\beta - \zeta_2 \cos \theta_\beta)\mathbf{n}_q \\ + (|k_2 + k_3| \zeta_3 \sin \theta_\beta - \zeta_3 \cos \theta_\beta)\mathbf{b}_q \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

olur.

k_1^β ve k_2^β eğriliklerini bulmak için ise (5.15), (5.30) ve (5.31) eşitlikleri kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$k_1^\beta = \langle \mathbf{t}'_\beta, \mathbf{n}_q^\beta \rangle = \frac{\sqrt{2}}{(k_2 + k_3)^2 \sqrt{\xi}} (|k_2 + k_3| \xi \cos \theta_\beta + \sin \theta_\beta (-\zeta_1 \zeta_1 + \zeta_2 \zeta_2 + \zeta_3 \zeta_3)) \quad (5.32)$$

ve

$$k_2^\beta = \langle \mathbf{t}'_\beta, \mathbf{b}_q^\beta \rangle = \frac{-\sqrt{2}}{(k_2 + k_3)^2 \sqrt{\xi}} (|k_2 + k_3| \xi \sin \theta_\beta - \cos \theta_\beta (-\zeta_1 \zeta_1 + \zeta_2 \zeta_2 + \zeta_3 \zeta_3)) \quad (5.33)$$

bulunur. k_3^β eğriliği için (5.30) eşitliğinin türevi alınırsa

$$\mathbf{n}_q^{\beta'} = \frac{(|k_2 + k_3| \sqrt{\xi})'}{2 \left((k_2 + k_3)^2 \xi^{\frac{3}{2}} \right)} \left[\begin{array}{l} (|k_2 + k_3| \zeta_1 \cos \theta_\beta + \zeta_1 \sin \theta_\beta) \mathbf{t} \\ + (|k_2 + k_3| \zeta_2 \cos \theta_\beta + \zeta_2 \sin \theta_\beta) \mathbf{n}_q \\ + (|k_2 + k_3| \zeta_3 \cos \theta_\beta + \zeta_3 \sin \theta_\beta) \mathbf{b}_q \end{array} \right]$$

$$- \frac{1}{|k_2 + k_3| \sqrt{\xi}} \left[\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} (|k_2 + k_3| \zeta_1 + (k_2 + k_3)^2 \zeta_1' + \zeta_1 \\ - |k_2 + k_3| (\zeta_2 k_1 + \zeta_3 k_2)) \cos \theta_\beta \\ - (|k_2 + k_3| \zeta_1 + \zeta_1' - \zeta_2 k_1 - \zeta_3 k_2) \sin \theta_\beta \end{array} \right) \mathbf{t} \\ + \left(\begin{array}{l} (|k_2 + k_3| \zeta_2 + |k_2 + k_3| \zeta_2' + \zeta_2 \\ + |k_2 + k_3| (\zeta_1 k_1 - \zeta_3 k_3)) \cos \theta_\beta \\ - (|k_2 + k_3| \zeta_2 + \zeta_2' + \zeta_1 k_1 - \zeta_3 k_3) \sin \theta_\beta \end{array} \right) \mathbf{n}_q \\ + \left(\begin{array}{l} (|k_2 + k_3| \zeta_3 + (k_2 + k_3)^2 \zeta_3' + \zeta_3 \\ + |k_2 + k_3| (\zeta_1 k_2 + \zeta_2 k_3)) \cos \theta_\beta \\ - (|k_2 + k_3| \zeta_3 + \zeta_3' + \zeta_1 k_2 + \zeta_2 k_3) \sin \theta_\beta \end{array} \right) \mathbf{b}_q \end{array} \right] \quad (5.34)$$

bulunur ve eşitlikte yerine yazılıp düzenlenirse

$$k_3^\beta = \langle \mathbf{n}_q^{\beta'}, \mathbf{b}_q^\beta \rangle$$

$$= \frac{-1}{2(k_2 + k_3)^2 \xi} \left[\begin{array}{l} \sin 2\theta_\beta (|k_2 + k_3| (\zeta_1' \zeta_1 + \zeta_2' \zeta_2 + \zeta_3' \zeta_3)) \\ + \theta_\beta' (\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 + (k_2 + k_3)^2 \xi) \\ - 2 |k_2 + k_3| \theta_\beta' (\zeta_1 \zeta_1 + \zeta_2 \zeta_2 + \zeta_3 \zeta_3) \\ - 2(k_2 + k_3)^2 \cos^2 \theta_\beta (\zeta_1 \zeta_1' + \zeta_2 \zeta_2' + \zeta_3 \zeta_3') \end{array} \right] \quad (5.35)$$

olarak hesaplanır.

Örnek 5.2.1 E_1^3 Minkowski uzayında $\alpha(s) = (2 \cosh s, \sqrt{3}s, 2 \sinh s)$ timelike eğrisi verilsin. İzdüşüm vektörü $\mathbf{k} = (0, 1, 0)$ (spacelike) olan bu eğrinin q-çatısı vektörleri

$$\mathbf{t} = (2 \sinh s, \sqrt{3}, 2 \cosh s) \quad (5.36)$$

\wedge Lorentz vektörel çarpımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \wedge \mathbf{k} &= (2 \sinh s, \sqrt{3}, 2 \cosh s) \wedge (0, 1, 0) \\ &= (2 \cosh s, 0, 2 \sinh s) \end{aligned}$$

olur.

$$\mathbf{n}_q = \frac{\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}}{\|\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}\|} = (\cosh s, 0, \sinh s) \quad (5.37)$$

ve

$$\mathbf{b}_q = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q = (-\sqrt{3} \sinh s, -2, -\sqrt{3} \cosh s) \quad (5.38)$$

olarak hesaplanır. Tanım 3.8.2 eşitliğinden \mathbf{tn}_q -Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2 \sinh s + \cosh s, \sqrt{3}, 2 \cosh s + \sinh s) \quad (5.39)$$

şeklinde bulunur. Frenet vektörleri için Tanım 3.2.3 göz önünde bulundurulursa

$$\mathbf{t}_\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}(2 \cosh s + \sinh s, 0, 2 \sinh s + \cosh s) \quad (5.40)$$

olur, buradan $\langle \mathbf{t}_\beta, \mathbf{t}_\beta \rangle > 0$ olup elde ettiğimiz \mathbf{tn}_q -Smarandache eğrisi spacelike olur.

$$\mathbf{n}_\beta = \frac{-\sqrt{3}}{3}(2 \sinh s + \cosh s, 0, 2 \cosh s + \sinh s) \quad (5.41)$$

ve

$$\mathbf{b}_\beta = (0, 1, 0) \quad (5.42)$$

bulunur. Frenet eğrilikleri ise

$$\kappa_\beta = -\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ ve } \tau_\beta = 0 \quad (5.43)$$

olur. \mathbf{tn}_q -Smarandache eğrisinin q-çatısının \mathbf{n}_q^β ve \mathbf{b}_q^β vektörleri

$$\mathbf{n}_q^\beta = \frac{-\sqrt{3}}{3}(2 \sinh s + \cosh s, 0, 2 \cosh s + \sinh s) \quad (5.44)$$

ve

$$\mathbf{b}_q^\beta = (0, -1, 0) \quad (5.45)$$

olur. Teorem 3.7.1 eşitliğinden q-eğrilikleri ise

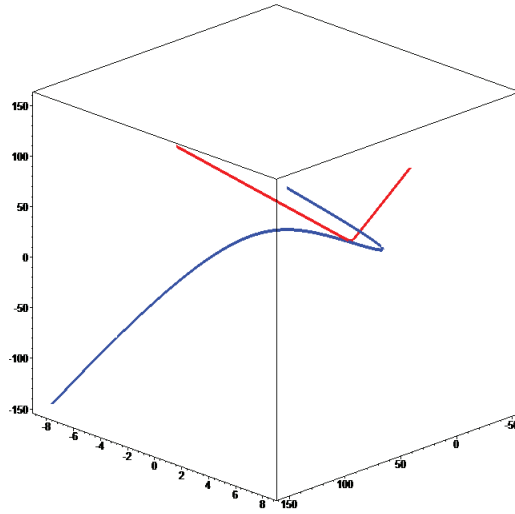
$$\begin{aligned} k_1^\beta &= -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ k_2^\beta &= 0 \\ k_3^\beta &= 0 \end{aligned} \quad (5.46)$$

şeklinde bulunur. Şekil 5.1 üzerinde gösterilen ele aldığımız eğri siyah ile, \mathbf{tn}_q -Smarandache eğrisi ise kırmızı ile gösterilmiştir.

5.2.2 \mathbf{tb}_q -Smarandache eğrisi

$\alpha: I \rightarrow E^3$ birim hızlı regüler eğrisinin q-çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ olsun. \mathbf{tn}_q -Smarandache eğrisi, $\beta: I \rightarrow E^3$, s^* yay-parametresi ile verilsin. Buna göre

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{t} + \mathbf{b}_q) \quad (5.47)$$



Şekil 5.1: Eğri ve \mathbf{tn}_q -Smarandache eğrisi.

olarak yazılır. Burada s parametresine göre türev alınırsa

$$\beta' = \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{t}' + \mathbf{b}'_q) \quad (5.48)$$

bulunur. $\frac{d\beta}{ds^*} = t_\beta$ olup (5.48) eşitliğinde Teorem 3.10.1 kullanılırsa

$$\mathbf{t}_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(k_2 \mathbf{t} + (k_1 - k_3) \mathbf{n}_q + k_2 \mathbf{b}_q) \quad (5.49)$$

olur. İki tarafın normunun karesi alınırsa

$$\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 = \frac{1}{2}(k_2^2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + (k_1 - k_3)^2 \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle + k_2^2 \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle) \quad (5.50)$$

elde edilir. $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = -1$, $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = 1$, $\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 1$ olduğundan

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{|k_1 - k_3|}{\sqrt{2}} \quad (5.51)$$

olur. $k_1 \neq k_3$ olmak üzere (5.49) eşitliğinde (5.51) kullanılırsa

$$\mathbf{t}_\beta = \frac{1}{|k_1 - k_3|}(k_2 \mathbf{t} + (k_1 - k_3) \mathbf{n}_q + k_2 \mathbf{b}_q) \quad (5.52)$$

bulunur. t_β – Smrandache eğrisinin karakteristiği için

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}_\beta, \mathbf{t}_\beta \rangle &= \frac{1}{|k_1 - k_3|^2} (k_2^2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + (k_1 - k_3)^2 \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle + k_2^2 \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle) \\ &= 1 \end{aligned} \quad (5.53)$$

eşitliğinden $\langle \mathbf{t}_\beta, \mathbf{t}_\beta \rangle > 0$ olur ve bu durumda β eğrisi spacelike olarak bulunur. Diğer taraftan (5.49) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\mathbf{t}_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{|k_1 - k_3|^2} \begin{bmatrix} -|k_1 - k_3|' (k_2 \mathbf{t} + (k_1 - k_3) \mathbf{n}_q + k_2 \mathbf{b}_q) \\ + |k_1 - k_3| (k_2' \mathbf{t} + k_2 \mathbf{t}' + (k_1 - k_3)' \mathbf{n}_q \\ + (k_1 - k_3) \mathbf{n}'_q + k_2' \mathbf{b}_q + k_2 \mathbf{b}'_q) \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

elde edilir Teorem 3.10.1 kullanılırsa

$$\frac{d\mathbf{t}_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{|k_1 - k_3|^2} \begin{bmatrix} -|k_1 - k_3|' (k_2 \mathbf{t} + (k_1 - k_3) \mathbf{n}_q + k_2 \mathbf{b}_q) \\ + |k_1 - k_3| (k_2' \mathbf{t} + k_1 k_2 \mathbf{n}_q + k_2^2 \mathbf{b}_q + (k_1 - k_3)' \mathbf{n}_q \\ + (k_1 - k_3) k_1 \mathbf{t} + (k_1 - k_3) k_3 \mathbf{b}_q + k_2' \mathbf{b}_q + k_2^2 \mathbf{t} - k_2 k_3 \mathbf{n}_q) \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

olur. Burada $\omega = - \left(\frac{|k_1 - k_3|}{k_2} \right)' k_2^2$ olarak alınır, \mathbf{t} , \mathbf{n}_q ve \mathbf{b}_q vektörlerinin katsayıları sırasıyla

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}_1 &= \omega + |k_1 - k_3| (k_1^2 + k_2^2 - k_1 k_3) \\ \bar{\zeta}_2 &= k_2 |k_1 - k_3| (k_1 - k_3) \\ \bar{\zeta}_3 &= \omega + |k_1 - k_3| (k_2^2 - k_3^2 + k_1 k_3) \end{aligned} \quad (5.56)$$

olarak ifade edilirse (5.55) eşitliği

$$\frac{d\mathbf{t}_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{|k_1 - k_3|^2} (\bar{\zeta}_1 \mathbf{t} + \bar{\zeta}_2 \mathbf{n}_q + \bar{\zeta}_3 \mathbf{b}_q) \quad (5.57)$$

şeklinde yazılır. $\frac{d\mathbf{t}_\beta}{ds^*} = \mathbf{t}'_\beta$ ve (5.51) eşitliği, (5.57) eşitliğinde yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\mathbf{t}'_\beta = \frac{\sqrt{2}}{|k_1 - k_3|^3} (\bar{\zeta}_1 \mathbf{t} + \bar{\zeta}_2 \mathbf{n}_q + \bar{\zeta}_3 \mathbf{b}_q) \quad (5.58)$$

olur. Bu ifadenin normu alınırsa

$$\kappa_\beta = \|\mathbf{t}'_\beta\| = \sqrt{\langle \mathbf{t}'_\beta, \mathbf{t}'_\beta \rangle} = \frac{\sqrt{2}}{|k_1 - k_3|^3} \sqrt{|-\bar{\zeta}_1^2 + \bar{\zeta}_2^2 + \bar{\zeta}_3^2|} \quad (5.59)$$

bulunur. $\bar{\xi} \neq 0$ olmak üzere, $\bar{\xi} = |-\bar{\zeta}_1^2 + \bar{\zeta}_2^2 + \bar{\zeta}_3^2|$ alınır, Tanım 3.2.3 gereği (5.58) ve (5.59) eşitlikleri kullanılırsa

$$\mathbf{n}_\beta = \frac{1}{\sqrt{\bar{\xi}}} (\bar{\zeta}_1 \mathbf{t} + \bar{\zeta}_2 \mathbf{n}_q + \bar{\zeta}_3 \mathbf{b}_q) \quad (5.60)$$

olur. (5.52) ve (5.60) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_\beta &= \frac{1}{|k_1 - k_3| \sqrt{\bar{\xi}}} \left[(k_2 \mathbf{t} + (k_1 - k_3) \mathbf{n}_q + k_2 \mathbf{b}_q) \wedge (\bar{\zeta}_1 \mathbf{t} + \bar{\zeta}_2 \mathbf{n}_q + \bar{\zeta}_3 \mathbf{b}_q) \right] \\ &= \frac{1}{|k_1 - k_3| \sqrt{\bar{\xi}}} \begin{bmatrix} k_2 \bar{\zeta}_1 (\mathbf{t} \wedge \mathbf{t}) + k_2 \bar{\zeta}_2 (\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q) + k_2 \bar{\zeta}_3 (\mathbf{t} \wedge \mathbf{b}_q) \\ + (k_1 - k_3) \bar{\zeta}_1 (\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{t}) + (k_1 - k_3) \bar{\zeta}_2 (\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{n}_q) \\ + (k_1 - k_3) \bar{\zeta}_3 (\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{b}_q) + k_2 \bar{\zeta}_1 (\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{t}) \\ + k_2 \bar{\zeta}_2 (\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{n}_q) + k_2 \bar{\zeta}_3 (\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{b}_q) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.61)$$

olarak hesaplanır, Tanım 3.5.1 kullanılırsa

$$\mathbf{b}_\beta = \frac{1}{|k_1 - k_3| \sqrt{\bar{\xi}}} \left[((k_1 - k_3) \bar{\zeta}_3 - k_2 \bar{\zeta}_2) \mathbf{t} + (k_2 \bar{\zeta}_3 - k_2 \bar{\zeta}_1) \mathbf{n}_q + ((k_1 - k_3) \bar{\zeta}_1 - k_2 \bar{\zeta}_2) \mathbf{b}_q \right] \quad (5.62)$$

bulunur. t , n_q ve b_q başkatsayıları sırasıyla $\bar{\zeta}_1$, $\bar{\zeta}_2$ ve $\bar{\zeta}_3$ ile gösterilirse

$$\bar{\zeta}_1 = (k_1 - k_3)\bar{\zeta}_3 - k_2\bar{\zeta}_2 \quad \bar{\zeta}_2 = k_2\bar{\zeta}_3 - k_2\bar{\zeta}_1 \quad \bar{\zeta}_3 = (k_1 - k_3)\bar{\zeta}_1 - k_2\bar{\zeta}_2 \quad (5.63)$$

olur ve (5.62) eşitliği

$$\mathbf{b}_\beta = \frac{1}{|k_1 - k_3| \sqrt{\bar{\xi}}} (\bar{\zeta}_1 \mathbf{t} + \bar{\zeta}_2 \mathbf{n}_q + \bar{\zeta}_3 \mathbf{b}_q) \quad (5.64)$$

şeklinde ifade edilir. Buraya kadar t_β , n_β ve b_β vektörleri bulundu. Şimdi τ_β hesabı için β' , β'' ve β''' eşitlikleri gerekli olup bunun için (5.49) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\beta'}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} (k_2' \mathbf{t} + (k_1 - k_3)' \mathbf{n}_q + k_2' \mathbf{b}_q + k_2 \mathbf{t}' + (k_1 - k_3) \mathbf{n}_q' + k_2 \mathbf{b}_q') \quad (5.65)$$

bulunur. Teorem 3.10.1 kullanılırsa

$$\beta'' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{l} (k_2' + k_2^2 + k_1(k_1 - k_3)) \mathbf{t} + ((k_1 - k_3)' + k_2(k_1 - k_3)) \mathbf{n}_q \\ + (k_2' + k_2^2 + k_3(k_1 - k_3)) \mathbf{b}_q \end{array} \right] \quad (5.66)$$

olur. Türev alınır ve $\kappa = k_1^2 + k_2^2$ eşitliği kullanılarak yerine yazılırsa

$$\beta''' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{l} (k_2'' + 3k_2'k_2 + (k_1(k_1 - k_3))' + k_1(k_1 - k_3)' + k_2(\kappa - k_3^2)) \mathbf{t} \\ + (k_1'' - k_3'' + (k_2(k_1 - k_3))' + k_2'(k_1 - k_3) + (k_1 - k_3)(\kappa - k_3^2)) \mathbf{n}_q \\ + (k_2'' + 3k_2'k_2 + (k_3(k_1 - k_3))' + k_3(k_1 - k_3)' + k_2(\kappa - k_3^2)) \mathbf{b}_q \end{array} \right] \quad (5.67)$$

bulunur. t , n_q ve b_q katsayıları sırasıyla \bar{v}_1 , \bar{v}_2 ve \bar{v}_3 ile gösterilirse

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= k_2'' + 3k_2'k_2 + (k_1(k_1 - k_3))' + k_1(k_1 - k_3)' + k_2(\kappa - k_3^2) \\ \bar{v}_2 &= k_1'' - k_3'' + (k_2(k_1 - k_3))' + k_2'(k_1 - k_3) + (k_1 - k_3)(\kappa - k_3^2) \\ \bar{v}_3 &= k_2'' + 3k_2'k_2 + (k_3(k_1 - k_3))' + k_3(k_1 - k_3)' + k_2(\kappa - k_3^2) \end{aligned} \quad (5.68)$$

olur ve (5.67) eşitliği

$$\beta''' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{v}_1 \mathbf{t} + \bar{v}_2 \mathbf{n}_q + \bar{v}_3 \mathbf{b}_q) \quad (5.69)$$

şeklinde ifade edilir. (5.49), (5.66) ve (5.69) kullanılarak istenilen eşitlikler

$$\beta' \wedge \beta'' = \frac{-1}{\sqrt{2}} (\omega + k_3(k_1 - k_3)^2, k_2(k_1 - k_3)^2, \omega + k_1(k_1 - k_3)^2) \quad (5.70)$$

ve

$$\langle \beta' \wedge \beta'', \beta''' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [-\omega(\bar{v}_1 - \bar{v}_3) - (k_1 - k_3)^2(\bar{v}_1 k_3 + \bar{v}_2 k_2 - \bar{v}_3 k_1)] \quad (5.71)$$

olur. Bulunan eşitlikler (3.11) eşitliği göz önünde bulundurularak kullanılırsa

$$\tau_\beta = \left[\frac{\sqrt{2}(-\omega(\bar{v}_1 - \bar{v}_3) - (k_1 - k_3)^2(\bar{v}_1 k_3 + \bar{v}_2 k_2 - \bar{v}_3 k_1))}{(\omega + k_3(k_1 - k_3)^2)^2 + (k_2(k_1 - k_3)^2)^2 - (\omega + k_1(k_1 - k_3)^2)^2} \right] \quad (5.72)$$

elde edilir. β eğrisinin quasi-normal ve quasi binormal vektörleri, (5.60) ve (5.64) eşitlikleri kullanılarak (3.12) eşitliğinde yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\mathbf{n}_q^\beta = \frac{1}{|k_1 - k_3| \sqrt{\bar{\xi}}} \begin{bmatrix} (|k_1 - k_3| \bar{\zeta}_1 \cos \theta_\beta + \bar{\zeta}_1 \sin \theta_\beta) \mathbf{t} \\ + (|k_1 - k_3| \bar{\zeta}_2 \cos \theta_\beta + \bar{\zeta}_2 \sin \theta_\beta) \mathbf{n}_q \\ + (|k_1 - k_3| \bar{\zeta}_3 \cos \theta_\beta + \bar{\zeta}_3 \sin \theta_\beta) \mathbf{b}_q \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

ve

$$\mathbf{b}_q^\beta = \frac{-1}{|k_1 - k_3| \sqrt{\bar{\xi}}} \begin{bmatrix} (|k_1 - k_3| \bar{\zeta}_1 \sin \theta_\beta - \bar{\zeta}_1 \cos \theta_\beta) \mathbf{t} \\ + (|k_1 - k_3| \bar{\zeta}_2 \sin \theta_\beta - \bar{\zeta}_2 \cos \theta_\beta) \mathbf{n}_q \\ + (|k_1 - k_3| \bar{\zeta}_3 \sin \theta_\beta - \bar{\zeta}_3 \cos \theta_\beta) \mathbf{b}_q \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

olur.

k_1^β ve k_2^β eğriliklerini bulmak için ise (5.58), (5.73) ve (5.74) eşitliklerini kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$k_1^\beta = \langle \mathbf{t}'_\beta, \mathbf{n}_q^\beta \rangle = \frac{\sqrt{2}}{(k_1 - k_3)^2 \sqrt{\bar{\xi}}} \left(|k_1 - k_3| \bar{\xi} \cos \theta_\beta + \sin \theta_\beta (-\bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_1 + \bar{\zeta}_2 \bar{\zeta}_2 + \bar{\zeta}_3 \bar{\zeta}_3) \right) \quad (5.75)$$

ve

$$k_2^\beta = \langle \mathbf{t}'_\beta, \mathbf{b}_q^\beta \rangle = \frac{-\sqrt{2}}{(k_1 - k_3)^2 \sqrt{\bar{\xi}}} \left(|k_1 - k_3| \bar{\xi} \sin \theta_\beta - \cos \theta_\beta (-\bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_1 + \bar{\zeta}_2 \bar{\zeta}_2 + \bar{\zeta}_3 \bar{\zeta}_3) \right) \quad (5.76)$$

bulunur. k_3^β eğriliği için (5.73) eşitliğinin türevi alınırsa

$$\mathbf{n}_q^{\beta'} = \frac{(|k_1 - k_3| \sqrt{\bar{\xi}})' }{2 \left((k_1 - k_3)^2 \bar{\xi}^{\frac{3}{2}} \right)} \begin{bmatrix} (|k_1 - k_3| \bar{\zeta}_1 \cos \theta_\beta + \bar{\zeta}_1 \sin \theta_\beta) \mathbf{t} \\ + (|k_1 - k_3| \bar{\zeta}_2 \cos \theta_\beta + \bar{\zeta}_2 \sin \theta_\beta) \mathbf{n}_q \\ + (|k_1 - k_3| \bar{\zeta}_3 \cos \theta_\beta + \bar{\zeta}_3 \sin \theta_\beta) \mathbf{b}_q \end{bmatrix} - \frac{1}{|k_1 - k_3| \sqrt{\bar{\xi}}} \begin{bmatrix} \left(\begin{array}{l} (|k_1 - k_3| \bar{\zeta}_1' + (k_1 - k_3)^2 \bar{\zeta}_1' + \bar{\zeta}_1 \\ - |k_1 - k_3| (\bar{\zeta}_2 k_1 + \bar{\zeta}_3 k_2)) \cos \theta_\beta \\ - (|k_1 - k_3| \bar{\zeta}_1 + \bar{\zeta}_1' - \bar{\zeta}_2 k_1 - \bar{\zeta}_3 k_2) \sin \theta_\beta \end{array} \right) \mathbf{t} \\ + \left(\begin{array}{l} (|k_1 - k_3| \bar{\zeta}_2' + (k_1 - k_3)^2 \bar{\zeta}_2' + \bar{\zeta}_2 \\ + |k_1 - k_3| (\bar{\zeta}_1 k_1 - \bar{\zeta}_3 k_3)) \cos \theta_\beta \\ - (|k_1 - k_3| \bar{\zeta}_2 + \bar{\zeta}_2' + \bar{\zeta}_1 k_1 - \bar{\zeta}_3 k_3) \sin \theta_\beta \end{array} \right) \mathbf{n}_q \\ + \left(\begin{array}{l} (|k_1 - k_3| \bar{\zeta}_3' + (k_1 - k_3)^2 \bar{\zeta}_3' + \bar{\zeta}_3 \\ + |k_1 - k_3| (\bar{\zeta}_1 k_2 + \bar{\zeta}_2 k_3)) \cos \theta_\beta \\ - (|k_1 - k_3| \bar{\zeta}_3 + \bar{\zeta}_3' + \bar{\zeta}_1 k_2 + \bar{\zeta}_2 k_3) \sin \theta_\beta \end{array} \right) \mathbf{b}_q \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

bulunur ve eşitlikte yerine yazılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned}
 k_3^\beta &= \langle \mathbf{n}_q^{\beta'}, \mathbf{b}_q^\beta \rangle \\
 &= \frac{-1}{2(k_1 - k_3)^2 \bar{\xi}} \begin{bmatrix} \sin 2\theta_\beta [|k_1 - k_3| (\bar{\zeta}'_1 \bar{\zeta}_1 + \bar{\zeta}'_2 \bar{\zeta}_2 + \bar{\zeta}'_3 \bar{\zeta}_3) \\ + \theta'_\beta (\bar{\zeta}_1^2 + \bar{\zeta}_2^2 + \bar{\zeta}_3^2 + (k_1 - k_3)^2 \bar{\xi})] \\ -2 |k_1 - k_3| \theta'_\beta (\bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_1 + \zeta_2 \bar{\zeta}_2 + \zeta_3 \bar{\zeta}_3) \\ -2(k_1 - k_3)^2 \cos^2 \theta_\beta (\zeta_1 \zeta'_1 + \zeta_2 \zeta'_2 + \zeta_3 \zeta'_3) \end{bmatrix} \quad (5.78)
 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Örnek 5.2.2 E_1^3 Minkowski uzayında $\alpha(s) = (\cosh s, 1, \sinh s)$ timelike eğrisi verilsin. İzdüşüm vektörü $\mathbf{k} = (0, 1, 0)$ (spacelike) olan bu eğrinin q-çatısı vektörleri

$$\mathbf{t} = (\sinh s, 0, \cosh s) \quad (5.79)$$

\wedge Lorentz vektörel çarpımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t} \wedge \mathbf{k} &= (\sinh s, 0, \cosh s) \wedge (0, 1, 0) \\
 &= (\cosh s, 0, \sinh s)
 \end{aligned}$$

olur.

$$\mathbf{n}_q = \frac{\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}}{\|\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}\|} = (\cosh s, 0, \sinh s) \quad (5.80)$$

ve

$$\mathbf{b}_q = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q = (0, -1, 0) \quad (5.81)$$

olarak hesaplanır. Tanım 3.8.2 eşitliğinden $\mathbf{t}\mathbf{b}_q$ –Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sinh s, -1, \cosh s) \quad (5.82)$$

şeklinde bulunur. Frenet vektörleri için Tanım 3.2.3 göz önünde bulundurulursa

$$\mathbf{t}_\beta = (\cosh s, 0, \sinh s) \quad (5.83)$$

olur, buradan $\langle \mathbf{t}_\beta, \mathbf{t}_\beta \rangle > 0$ olup elde ettiğimiz $\mathbf{t}\mathbf{b}_q$ –Smarandache eğrisi spacelike olur.

$$\mathbf{n}_\beta = (-\sinh s, 0, -\cosh s) \quad (5.84)$$

ve

$$\mathbf{b}_\beta = (0, -1, 0) \quad (5.85)$$

bulunur. Frenet eğrilikleri ise

$$\kappa_\beta = -1 \text{ ve } \tau_\beta = 0 \quad (5.86)$$

olur. \mathbf{tb}_q -Smarandache eğrisinin q -çatısının \mathbf{n}_q^β ve \mathbf{b}_q^β vektörleri

$$\mathbf{n}_q^\beta = (-\sinh s, 0, -\cosh s) \quad (5.87)$$

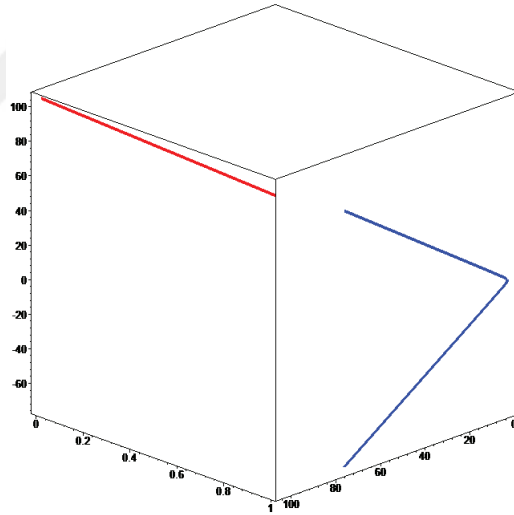
ve

$$\mathbf{b}_q^\beta = (0, -1, 0) \quad (5.88)$$

olur. Teorem 3.7.1 eşitliğinden q -eğrilikleri ise

$$\begin{aligned} k_1^\beta &= 0 \\ k_2^\beta &= 0 \\ k_3^\beta &= 0 \end{aligned} \quad (5.89)$$

şeklinde bulunur. Şekil 5.2 üzerinde gösterilen ele aldığımız eğri siyah ile, \mathbf{tb}_q -Smarandache eğrisi ise kırmızı ile gösterilmiştir.



Şekil 5.2: Eğri ve \mathbf{tb}_q -Smarandache eğrisi.

5.2.3 $\mathbf{n}_q\mathbf{b}_q$ -Smarandache eğrisi

$\alpha : I \rightarrow E^3$ birim hızlı regüler eğrisinin q -çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ olsun. \mathbf{tn}_q -Smarandache eğrisi, $\beta : I \rightarrow E^3$, s^* yay-parametresi ile verilsin. Buna göre

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{n}_q + \mathbf{b}_q) \quad (5.90)$$

olarak yazılır. Burada s parametresine göre türev alınırsa

$$\beta' = \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{n}'_q + \mathbf{b}'_q) \quad (5.91)$$

bulunur. $\frac{d\beta}{ds^*} = t_\beta$ olup (5.91) eşitliğinde Teorem 3.10.1 kullanılırsa

$$t_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} ((k_1 + k_2)\mathbf{t} - k_3\mathbf{n}_q + k_3\mathbf{b}_q) \quad (5.92)$$

olur. İki tarafın normunun karesi alınırsa

$$\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 = \frac{1}{2} ((k_1 + k_2)^2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + k_3^2 \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle + k_3^2 \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle) \quad (5.93)$$

elde edilir. $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = -1$, $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = 1$, $\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 1$ olduğundan

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{|2k_3^2 - (k_1 + k_2)^2|} \quad (5.94)$$

olur. $2k_3^2 \neq (k_1 + k_2)^2$ olmak üzere (5.92) eşitliğinde (5.94) eşitliği kullanılırsa

$$t_\beta = \frac{1}{\sqrt{|2k_3^2 - (k_1 + k_2)^2|}} ((k_1 + k_2)\mathbf{t} - k_3\mathbf{n}_q + k_3\mathbf{b}_q) \quad (5.95)$$

bulunur. $\mathbf{n}_q \mathbf{b}_q$ – Smrandache eğrisinin karakteristiği için

$$\begin{aligned} \langle t_\beta, t_\beta \rangle &= \frac{1}{|2k_3^2 - (k_1 + k_2)^2|} ((k_1 + k_2)^2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + k_3^2 \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle + k_3^2 \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle) \\ &= \frac{2k_3^2 - (k_1 + k_2)^2}{|2k_3^2 - (k_1 + k_2)^2|} \end{aligned} \quad (5.96)$$

eşitliğinden iki farklı durum söz konusu olur

$$2k_3^2 > (k_1 + k_2)^2 \Rightarrow \langle t_\beta, t_\beta \rangle > 0 \quad (5.97)$$

olup β eğrisi; spacelike,

$$2k_3^2 < (k_1 + k_2)^2 \Rightarrow \langle t_\beta, t_\beta \rangle < 0 \quad (5.98)$$

olup β eğrisi; timelike olarak bulunur. Burada (5.97) şartı kabul edilip β eğrisinin spacelike olma durumuna göre hesaplamalara devam edilir. Diğer taraftan $v = 2k_3^2 - (k_1 + k_2)^2$ olarak yazılır, (5.92) eşitliğinin ve s parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{dt_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{|v|^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} -(2k_3k_3' - (k_1 + k_2)'(k_1 + k_2))((k_1 + k_2)\mathbf{t} - k_3\mathbf{n}_q + k_3\mathbf{b}_q) \\ +v((k_1 + k_2)'\mathbf{t} + (k_1 + k_2)\mathbf{t}' - k_3'\mathbf{n}_q - k_3\mathbf{n}_q' + k_3'\mathbf{b}_q + k_3\mathbf{b}_q') \end{bmatrix} \quad (5.99)$$

elde edilir. Teorem 3.10.1 kullanılırsa

$$\frac{dt_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{|v|^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} (-2k_3k_3' + (k_1 + k_2)(k_1 + k_2)')((k_1 + k_2)\mathbf{t} - k_3\mathbf{n}_q + k_3\mathbf{b}_q) \\ +v((k_1 + k_2)'\mathbf{t} + (k_1 + k_2)k_1\mathbf{n}_q + (k_1 + k_2)k_2\mathbf{b}_q - k_3'\mathbf{n}_q \\ -k_1k_3\mathbf{t} + k_3^2\mathbf{b}_q + k_3'\mathbf{b}_q + k_2k_3\mathbf{t} - k_3^2\mathbf{n}_q) \end{bmatrix} \quad (5.100)$$

olur. Burada $\delta = \left(\frac{k_1 + k_2}{k_3}\right)' k_3^2$ olarak alınır, \mathbf{t} , \mathbf{n}_q ve \mathbf{b}_q vektörlerinin katsayıları sırasıyla

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}_1 &= 2k_3\delta - \nu k_3(k_1 - k_2) \\ \tilde{\zeta}_2 &= -(k_1 + k_2)\delta + \nu(k_1^2 - k_3^2 + k_1k_2) \\ \tilde{\zeta}_3 &= (k_1 + k_2)\delta + \nu(k_2^2 - k_3^2 + k_1k_2)\end{aligned}\quad (5.101)$$

olarak ifade edilirse (5.100) eşitliği

$$\frac{d\mathbf{t}_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{|\mathbf{v}|^{\frac{3}{2}}} \left(\tilde{\zeta}_1 \mathbf{t} + \tilde{\zeta}_2 \mathbf{n}_q + \tilde{\zeta}_3 \mathbf{b}_q \right) \quad (5.102)$$

şeklinde yazılır. $\frac{d\mathbf{t}_\beta}{ds^*} = \mathbf{t}'_\beta$ ve (5.94) eşitliği, (5.102) eşitliğinde yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\mathbf{t}'_\beta = \frac{\sqrt{2}}{\nu^2} \left(\tilde{\zeta}_1 \mathbf{t} + \tilde{\zeta}_2 \mathbf{n}_q + \tilde{\zeta}_3 \mathbf{b}_q \right) \quad (5.103)$$

olur. Bu ifadenin normu alınırsa

$$\kappa_\beta = \|\mathbf{t}'_\beta\| = \sqrt{\langle \mathbf{t}'_\beta, \mathbf{t}'_\beta \rangle} = \frac{1}{\nu^2} \sqrt{2 \left| -\tilde{\zeta}_1^2 + \tilde{\zeta}_2^2 + \tilde{\zeta}_3^2 \right|} \quad (5.104)$$

bulunur. $\tilde{\xi} \neq 0$ olmak üzere, $\tilde{\xi} = \left| -\tilde{\zeta}_1^2 + \tilde{\zeta}_2^2 + \tilde{\zeta}_3^2 \right|$ alınır ve Tanım 3.2.3 gereği (5.103) ve (5.104) eşitlikleri kullanılırsa

$$\mathbf{n}_\beta = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\xi}}} \left(\tilde{\zeta}_1 \mathbf{t} + \tilde{\zeta}_2 \mathbf{n}_q + \tilde{\zeta}_3 \mathbf{b}_q \right) \quad (5.105)$$

olur. (5.95) ve (5.105) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_\beta &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{\xi}}|\mathbf{v}|} \left[((k_1 + k_2)\mathbf{t} - k_3\mathbf{n}_q + k_3\mathbf{b}_q) \wedge (\tilde{\zeta}_1 \mathbf{t} + \tilde{\zeta}_2 \mathbf{n}_q + \tilde{\zeta}_3 \mathbf{b}_q) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{\xi}}|\mathbf{v}|} \left[\begin{array}{l} (k_1 + k_2)\tilde{\zeta}_1(\mathbf{t} \wedge \mathbf{t}) + (k_1 + k_2)\tilde{\zeta}_2(\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q) + (k_1 + k_2)\tilde{\zeta}_3(\mathbf{t} \wedge \mathbf{b}_q) \\ -k_3\tilde{\zeta}_1(\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{t}) - k_3\tilde{\zeta}_2(\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{n}_q) - k_3\tilde{\zeta}_3(\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{b}_q) + k_3\tilde{\zeta}_1(\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{t}) \\ +k_3\tilde{\zeta}_2(\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{n}_q) + k_3\tilde{\zeta}_3(\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{b}_q) \end{array} \right]\end{aligned}\quad (5.106)$$

olarak hesaplanır, Tanım 3.5.1 kullanılırsa

$$\mathbf{b}_\beta = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\xi}}|\mathbf{v}|} \left[(-k_3\tilde{\zeta}_3 - k_3\tilde{\zeta}_2)\mathbf{t} + ((k_1 + k_2)\tilde{\zeta}_3 - k_3\tilde{\zeta}_1)\mathbf{n}_q + (-(k_1 + k_2)\tilde{\zeta}_2 - k_3\tilde{\zeta}_1)\mathbf{b}_q \right] \quad (5.107)$$

bulunur. t , n_q ve b_q katsayıları sırasıyla $\tilde{\zeta}_1$, $\tilde{\zeta}_2$ ve $\tilde{\zeta}_3$ ile gösterilirse

$$\tilde{\zeta}_1 = -k_3\tilde{\zeta}_3 - k_3\tilde{\zeta}_2 \quad \tilde{\zeta}_2 = (k_1 + k_2)\tilde{\zeta}_3 - k_3\tilde{\zeta}_1 \quad \tilde{\zeta}_3 = -(k_1 + k_2)\tilde{\zeta}_2 - k_3\tilde{\zeta}_1 \quad (5.108)$$

olur ve (5.107) eşitliği

$$\mathbf{b}_\beta = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\xi}}|\mathbf{v}|} \left(\tilde{\zeta}_1 \mathbf{t} + \tilde{\zeta}_2 \mathbf{n}_q + \tilde{\zeta}_3 \mathbf{b}_q \right) \quad (5.109)$$

şeklinde ifade edilir. Buraya kadar t_β , n_β ve b_β vektörleri bulundu. Şimdi τ_β hesabı için β' , β'' ve β''' eşitlikleri gerekli olup bunun için (5.92) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\beta'}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} ((k'_1 + k'_2)\mathbf{t} - k'_3\mathbf{n}_q + k'_3\mathbf{b}_q + (k_1 + k_2)\mathbf{t}' - k_3\mathbf{n}'_q + k_3\mathbf{b}'_q) \quad (5.110)$$

bulunur. Teorem 3.10.1 kullanılırsa

$$\beta'' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{l} (k'_1 + k'_2 + k_3(k_2 - k_1))\mathbf{t} + (-k'_3 - k_3^2 + k_1(k_1 + k_2))\mathbf{n}_q \\ + (k'_3 - k_3^2 + k_2(k_1 + k_2))\mathbf{b}_q \end{array} \right] \quad (5.111)$$

olur. Türev alınır ve $\kappa = k_1^2 + k_2^2$ eşitliği kullanılarak yerine yazılırsa

$$\beta''' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{l} (k''_1 + k''_2 + (k_3(k_2 - k_1))' + k'_3(k_2 - k_1) + (k_1 + k_2)(\kappa - k_3^2))\mathbf{t} \\ - (k''_3 + 3k_3k'_3 - (k_1(k_1 + k_2))' - k_1(k_1 + k_2)' + k_3(\kappa - k_3^2))\mathbf{n}_q \\ + (k''_3 - 3k_3k'_3 + (k_2(k_1 + k_2))' + k_2(k_1 + k_2)' + k_3(\kappa - k_3^2))\mathbf{b}_q \end{array} \right] \quad (5.112)$$

bulunur. t , n_q ve b_q katsayıları sırasıyla \tilde{v}_1 , \tilde{v}_2 ve \tilde{v}_3 ile gösterilirse

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 &= k''_1 + k''_2 + (k_3(k_2 - k_1))' + k'_3(k_2 - k_1) + (k_1 + k_2)(\kappa - k_3^2) \\ \tilde{v}_2 &= -k''_3 - 3k_3k'_3 + (k_1(k_1 + k_2))' + k_1(k_1 + k_2)' - k_3(\kappa - k_3^2) \\ \tilde{v}_3 &= k''_3 - 3k_3k'_3 + (k_2(k_1 + k_2))' + k_2(k_1 + k_2)' + k_3(\kappa - k_3^2) \end{aligned} \quad (5.113)$$

olur ve (5.112) eşitliği

$$\beta''' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{v}_1\mathbf{t} + \tilde{v}_2\mathbf{n}_q + \tilde{v}_3\mathbf{b}_q) \quad (5.114)$$

şeklinde ifade edilir. (5.92), (5.111) ve (5.114) kullanılarak istenilen eşitlikler

$$\beta' \wedge \beta'' = \frac{-1}{\sqrt{2}} (k_3\mathbf{v}, \delta + k_2\mathbf{v}, \delta + k_1\mathbf{v}) \quad (5.115)$$

ve

$$\langle \beta' \wedge \beta'', \beta''' \rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}} [\delta(\tilde{v}_2 + \tilde{v}_3) + \mathbf{v}(k_3\tilde{v}_1 + k_2\tilde{v}_2 + k_1\tilde{v}_3)] \quad (5.116)$$

olur. Bulunan eşitlikler (3.11) eşitliği göz önünde bulundurularak kullanılırsa

$$\tau_\beta = \left[\frac{-\sqrt{2}(\delta(\tilde{v}_2 + \tilde{v}_3) + \mathbf{v}(k_3\tilde{v}_1 + k_2\tilde{v}_2 + k_1\tilde{v}_3))}{(k_3\mathbf{v})^2 + (\delta + k_2\mathbf{v})^2 + (\delta + k_1\mathbf{v})^2} \right] \quad (5.117)$$

elde edilir. β eğrisinin quasi-normal ve quasi binormal vektörleri, (5.105) ve (5.109) eşitlikleri kullanılarak (3.12) eşitliğinde yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\mathbf{n}_q^\beta = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\xi}|\mathbf{v}|}} \left[\begin{array}{l} (\sqrt{|\mathbf{v}|}\tilde{\zeta}_1 \cos \theta_\beta + \tilde{\zeta}_1 \sin \theta_\beta)\mathbf{t} + (\sqrt{|\mathbf{v}|}\tilde{\zeta}_2 \cos \theta_\beta + \tilde{\zeta}_2 \sin \theta_\beta)\mathbf{n}_q \\ + (\sqrt{|\mathbf{v}|}\tilde{\zeta}_3 \cos \theta_\beta + \tilde{\zeta}_3 \sin \theta_\beta)\mathbf{b}_q \end{array} \right] \quad (5.118)$$

ve

$$\mathbf{b}_q^\beta = \frac{-1}{\sqrt{\tilde{\xi}|\mathbf{v}|}} \left[\begin{array}{l} (\sqrt{|\mathbf{v}|}\tilde{\zeta}_1 \sin \theta_\beta - \tilde{\zeta}_1 \cos \theta_\beta)\mathbf{t} + (\sqrt{|\mathbf{v}|}\tilde{\zeta}_2 \sin \theta_\beta - \tilde{\zeta}_2 \cos \theta_\beta)\mathbf{n}_q \\ + (\sqrt{|\mathbf{v}|}\tilde{\zeta}_3 \sin \theta_\beta - \tilde{\zeta}_3 \cos \theta_\beta)\mathbf{b}_q \end{array} \right] \quad (5.119)$$

olur.

k_1^β ve k_2^β eğriliklerini bulmak için (5.103), (5.118) ve (5.119) eşitlikleri kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$k_1^\beta = \langle \mathbf{t}'_\beta, \mathbf{n}_q^\beta \rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{|\mathbf{v}|^5 \tilde{\xi}}} \left(\sqrt{|\mathbf{v}|} \tilde{\xi} \cos \theta_\beta + \sin \theta_\beta (-\tilde{\zeta}_1 \tilde{\zeta}'_1 + \tilde{\zeta}_2 \tilde{\zeta}'_2 + \tilde{\zeta}_3 \tilde{\zeta}'_3) \right) \quad (5.120)$$

ve

$$k_2^\beta = \langle \mathbf{t}'_\beta, \mathbf{b}_q^\beta \rangle = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{|\mathbf{v}|^5 \tilde{\xi}}} \left(\sqrt{|\mathbf{v}|} \tilde{\xi} \sin \theta_\beta - \cos \theta_\beta (-\tilde{\zeta}_1 \tilde{\zeta}'_1 + \tilde{\zeta}_2 \tilde{\zeta}'_2 + \tilde{\zeta}_3 \tilde{\zeta}'_3) \right) \quad (5.121)$$

bulunur. k_3^β eğriliği için (5.118) eşitliğinin türevi alınırsa

$$\mathbf{n}_q^{\beta'} = \frac{(\tilde{\xi}|\mathbf{v}|)'}{2(\tilde{\xi}|\mathbf{v}|)^{\frac{3}{2}}} \left[\begin{array}{l} (\sqrt{|\mathbf{v}|} \tilde{\zeta}_1 \cos \theta_\beta + \tilde{\zeta}_1 \sin \theta_\beta) \mathbf{t} \\ + (\sqrt{|\mathbf{v}|} \tilde{\zeta}_2 \cos \theta_\beta + \tilde{\zeta}_2 \sin \theta_\beta) \mathbf{n}_q \\ + (\sqrt{|\mathbf{v}|} \tilde{\zeta}_3 \cos \theta_\beta + \tilde{\zeta}_3 \sin \theta_\beta) \mathbf{b}_q \end{array} \right] \quad (5.122)$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\tilde{\xi}|\mathbf{v}|}} \left[\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} (\sqrt{|\mathbf{v}|} \tilde{\zeta}'_1 + |\mathbf{v}| \tilde{\zeta}'_1 + \tilde{\zeta}_1 \\ - \sqrt{|\mathbf{v}|} (\tilde{\zeta}_2 k_1 + \tilde{\zeta}_3 k_2)) \cos \theta_\beta \\ - (\sqrt{|\mathbf{v}|} \tilde{\zeta}_1 + \tilde{\zeta}'_1 - \tilde{\zeta}_2 k_1 - \tilde{\zeta}_3 k_2) \sin \theta_\beta \end{array} \right) \mathbf{t} \\ + \left(\begin{array}{l} (\sqrt{|\mathbf{v}|} \tilde{\zeta}'_2 + |\mathbf{v}| \tilde{\zeta}'_2 + \tilde{\zeta}_2 \\ + \sqrt{|\mathbf{v}|} (\tilde{\zeta}_1 k_1 - \tilde{\zeta}_3 k_3)) \cos \theta_\beta \\ - (\sqrt{|\mathbf{v}|} \tilde{\zeta}_2 + \tilde{\zeta}'_2 + \tilde{\zeta}_1 k_1 - \tilde{\zeta}_3 k_3) \sin \theta_\beta \end{array} \right) \mathbf{n}_q \\ + \left(\begin{array}{l} (\sqrt{|\mathbf{v}|} \tilde{\zeta}'_3 + |\mathbf{v}| \tilde{\zeta}'_3 + \tilde{\zeta}_3 \\ + \sqrt{|\mathbf{v}|} (\tilde{\zeta}_1 k_2 + \tilde{\zeta}_2 k_3)) \cos \theta_\beta \\ - (\sqrt{|\mathbf{v}|} \tilde{\zeta}_3 + \tilde{\zeta}'_3 + \tilde{\zeta}_1 k_2 + \tilde{\zeta}_2 k_3) \sin \theta_\beta \end{array} \right) \mathbf{b}_q \end{array} \right]$$

bulunur ve eşitlikte yerine yazılıp düzenlenirse

$$k_3^\beta = \langle \mathbf{n}_q^{\beta'}, \mathbf{b}_q^\beta \rangle$$

$$= \frac{-1}{2\tilde{\xi}|\mathbf{v}|} \left[\begin{array}{l} \sin 2\theta_\beta [\sqrt{|\mathbf{v}|} (\tilde{\zeta}'_1 \tilde{\zeta}_1 + \tilde{\zeta}'_2 \tilde{\zeta}_2 + \tilde{\zeta}'_3 \tilde{\zeta}_3) + \theta'_\beta (\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 + \tilde{\xi}|\mathbf{v}|)] \\ - 2\sqrt{|\mathbf{v}|} \theta'_\beta (\tilde{\zeta}_1 \zeta_1 + \tilde{\zeta}_2 \zeta_2 + \tilde{\zeta}_3 \zeta_3) \\ - 2|\mathbf{v}| \cos^2 \theta_\beta (\tilde{\zeta}_1 \tilde{\zeta}'_1 + \tilde{\zeta}_2 \tilde{\zeta}'_2 + \tilde{\zeta}_3 \tilde{\zeta}'_3) \end{array} \right] \quad (5.123)$$

olarak hesaplanır.

Örnek 5.2.3 E_1^3 Minkowski uzayında $\alpha(s) = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cosh s, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} s, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \sinh s \right)$ timelike eğrisi verilsin. İzdüşüm vektörü $\mathbf{k} = (0, 1, 0)$ (spacelike) olan bu eğrinin q-çatısı vektörleri

$$\mathbf{t} = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \sinh s, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cosh s \right) \quad (5.124)$$

\wedge Lorentz vektörel çarpımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathbf{t} \wedge \mathbf{k} &= \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \sinh s, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cosh s \right) \wedge (0, 1, 0) \\ &= \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cosh s, 0, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \sinh s \right)\end{aligned}$$

olur.

$$\mathbf{n}_q = \frac{\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}}{\|\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}\|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cosh s, 0, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \sinh s \right) \quad (5.125)$$

ve

$$\mathbf{b}_q = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q = \left(\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \sinh s, -1, \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cosh s \right) \quad (5.126)$$

olarak hesaplanır. Tanım 3.8.2 eşitliğinden $\mathbf{n}_q \mathbf{b}_q$ –Smarandache eğrisi

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(\sqrt{2} \cosh s - \sqrt{3} \sinh s, -\sqrt{5}, \sqrt{2} \sinh s - \sqrt{3} \cosh s \right) \quad (5.127)$$

şeklinde bulunur. Frenet vektörleri için Tanım 3.2.3 göz önünde bulundurulursa

$$\mathbf{t}_\beta = \left(\sqrt{2} \sinh s - \sqrt{3} \cosh s, 0, \sqrt{2} \cosh s - \sqrt{3} \sinh s \right) \quad (5.128)$$

olur, buradan $\langle \mathbf{t}_\beta, \mathbf{t}_\beta \rangle > 0$ olup elde ettiğimiz $\mathbf{n}_q \mathbf{b}_q$ –Smarandache eğrisi spacelike olur.

$$\mathbf{n}_\beta = \left(\sqrt{3} \sinh s - \sqrt{2} \cosh s, 0, \sqrt{3} \cosh s - \sqrt{2} \sinh s \right) \quad (5.129)$$

ve

$$\mathbf{b}_\beta = (0, -1, 0) \quad (5.130)$$

bulunur. Frenet eğrilikleri ise

$$\kappa_\beta = -\frac{1}{10} \text{ ve } \tau_\beta = 0 \quad (5.131)$$

olur. $\mathbf{n}_q \mathbf{b}_q$ –Smarandache eğrisinin q-çatısının \mathbf{n}_q^β ve \mathbf{b}_q^β vektörleri

$$\mathbf{n}_q^\beta = \left(\sqrt{2} \cosh s - \sqrt{3} \sinh s, 0, \sqrt{2} \sinh s - \sqrt{3} \cosh s \right) \quad (5.132)$$

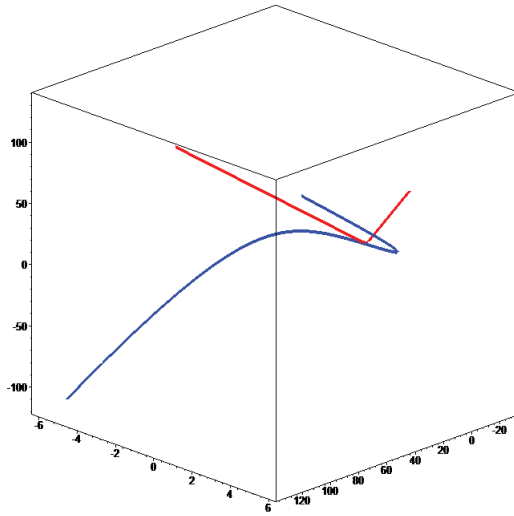
ve

$$\mathbf{b}_q^\beta = (0, 1, 0) \quad (5.133)$$

olur. Teorem 3.7.1 eşitliğinden q-eğrilikleri ise

$$\begin{aligned}k_1^\beta &= -1 \\ k_2^\beta &= -0 \\ k_3^\beta &= 0\end{aligned} \quad (5.134)$$

şeklinde bulunur. Şekil 5.3 üzerinde gösterilen ele aldığımız eğri siyah ile, $\mathbf{n}_q \mathbf{b}_q$ –Smarandache eğrisi ise kırmızı ile gösterilmiştir.



Şekil 5.3: Eğri ve $\mathbf{n}_q \mathbf{b}_q$ -Smarandache eğrisi.

5.2.4 $\mathbf{tn}_q \mathbf{b}_q$ -Smarandache eğrisi

$\alpha : I \rightarrow E^3$ birim hızlı regüler eğrisinin q -çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_q, \mathbf{b}_q\}$ olsun. \mathbf{tn}_q -Smarandache eğrisi, $\beta : I \rightarrow E^3$, s^* yay-parametresi ile verilsin. Buna göre

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{t} + \mathbf{n}_q + \mathbf{b}_q) \quad (5.135)$$

olarak yazılır. Burada s parametresine göre türev alınırsa

$$\beta' = \frac{d\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{t}' + \mathbf{n}'_q + \mathbf{b}'_q) \quad (5.136)$$

bulunur. $\frac{d\beta}{ds^*} = t_\beta$ olup (5.136) eşitliğinde Teorem 3.10.1 kullanılırsa

$$t_\beta \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}}((k_1 + k_2)\mathbf{t} + (k_1 - k_3)\mathbf{n}_q + (k_2 + k_3)\mathbf{b}_q) \quad (5.137)$$

olur. İki tarafın normunun karesi alınırsa

$$\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 = \frac{1}{3}((k_1 + k_2)^2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + (k_1 - k_3)^2 \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle + (k_2 + k_3)^2 \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle) \quad (5.138)$$

elde edilir. $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = -1$, $\langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle = 1$, $\langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle = 1$ olduğundan

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{|(k_1 + k_2)^2 - (k_1 - k_3)^2 - (k_2 + k_3)^2|} \quad (5.139)$$

olur. $(k_1 - k_3)^2 + (k_2 + k_3)^2 \neq (k_1 + k_2)^2$ olmak üzere (5.137) eşitliğinde (5.139) kullanılırsa

$$t_\beta = \frac{1}{\sqrt{|(k_1 + k_2)^2 - (k_1 - k_3)^2 - (k_2 + k_3)^2|}} ((k_1 + k_2)\mathbf{t} + (k_1 - k_3)\mathbf{n}_q + (k_2 + k_3)\mathbf{b}_q) \quad (5.140)$$

bulunur. $\Lambda = (k_1 - k_3)^2 + (k_2 + k_3)^2 - (k_1 + k_2)^2$ olarak alınsın. $\mathbf{t}_q \mathbf{b}_q$ – Smrandache eğrisinin karakteristiği için

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}_\beta, \mathbf{t}_\beta \rangle &= \frac{1}{|\Lambda|} ((k_1 + k_2)^2 \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle + (k_1 - k_3)^2 \langle \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_q \rangle + (k_1 - k_3)^2 \langle \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_q \rangle) \quad (5.141) \\ &= \frac{\Lambda}{|\Lambda|} \end{aligned}$$

eşitliğinden iki farklı durum söz konusu olur.

$$(k_1 + k_2)^2 < (k_1 - k_3)^2 + (k_2 + k_3)^2 \Rightarrow \langle \mathbf{t}_\beta, \mathbf{t}_\beta \rangle > 0 \quad (5.142)$$

olup β eğrisi; spacelike ve

$$(k_1 + k_2)^2 > (k_1 - k_3)^2 + (k_2 + k_3)^2 \Rightarrow \langle \mathbf{t}_\beta, \mathbf{t}_\beta \rangle < 0 \quad (5.143)$$

olup β eğrisi; timelike olarak bulunur. Burada (5.142) şartı kabul edilip β eğrisinin spacelike olma durumuna göre hesaplamalara devam edilir ve $\Gamma = (k_3^2)' - (k_1 k_2)' - (k_1 k_3)' + (k_2 k_3)'$ olarak yazılır, (5.137) eşitliğinin ve s parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\mathbf{t}_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{|\Lambda|^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} \Gamma((k_1 + k_2)\mathbf{t} + (k_1 - k_3)\mathbf{n}_q + (k_2 + k_3)\mathbf{b}_q) \\ -|\Lambda|((k_1 + k_2)'\mathbf{t} + (k_1 + k_2)\mathbf{t}' - (k_1 - k_3)'\mathbf{n}_q) \\ -(k_1 - k_3)\mathbf{n}'_q - (k_2 + k_3)'\mathbf{b}_q - (k_2 + k_3)\mathbf{b}'_q \end{bmatrix} \quad (5.144)$$

elde edilir. Teorem 3.10.1 kullanılır ve \mathbf{t} , \mathbf{n}_q , \mathbf{b}_q vektörlerinin katsayıları sırasıyla

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_1 &= |\Lambda| (\kappa - k_3(k_1 - k_2) - (k_1 + k_2)') + (k_1 + k_2)\Gamma \\ \hat{\xi}_2 &= -|\Lambda| (k_1^2 + k_3^2 + k_2(k_1 + k_3) - (k_1 - k_3)') + (k_1 - k_3)\Gamma \\ \hat{\xi}_3 &= -|\Lambda| (k_2^2 + k_3^2 - k_1(k_2 - k_3) - (k_2 + k_3)') + (k_2 + k_3)\Gamma \end{aligned} \quad (5.145)$$

olarak ifade edilirse (5.144) eşitliği

$$\frac{d\mathbf{t}_\beta}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{|\Lambda|^{\frac{3}{2}}} (\hat{\xi}_1 \mathbf{t} + \hat{\xi}_2 \mathbf{n}_q + \hat{\xi}_3 \mathbf{b}_q) \quad (5.146)$$

şeklinde yazılır. $\frac{d\mathbf{t}_\beta}{ds^*} = \mathbf{t}'_\beta$ ve (5.139) eşitliği, (5.146) eşitliğinde yerine yazılıp düzenlenirse

$$\mathbf{t}'_\beta = \frac{\sqrt{3}}{\Lambda^2} (\hat{\xi}_1 \mathbf{t} + \hat{\xi}_2 \mathbf{n}_q + \hat{\xi}_3 \mathbf{b}_q) \quad (5.147)$$

olur. Bu ifadenin normu alınırsa

$$\kappa_\beta = \|\mathbf{t}'_\beta\| = \sqrt{\langle \mathbf{t}'_\beta, \mathbf{t}'_\beta \rangle} = \frac{1}{\Lambda^2} \sqrt{3 \left| -\hat{\xi}_1^2 + \hat{\xi}_2^2 + \hat{\xi}_3^2 \right|} \quad (5.148)$$

bulunur. $\hat{\xi} \neq 0$ olmak üzere, $\hat{\xi} = \left| -\hat{\xi}_1^2 + \hat{\xi}_2^2 + \hat{\xi}_3^2 \right|$ alınır, Tanım 3.2.3 gereği (5.147) ve (5.148) eşitlikleri kullanılırsa

$$\mathbf{n}_\beta = \frac{1}{\sqrt{\hat{\xi}}} (\hat{\xi}_1 \mathbf{t} + \hat{\xi}_2 \mathbf{n}_q + \hat{\xi}_3 \mathbf{b}_q) \quad (5.149)$$

olur. (5.140) ve (5.149) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_\beta &= \frac{1}{\sqrt{\widehat{\xi}|\Lambda|}} \left[((k_1+k_2)\mathbf{t} + (k_1-k_3)\mathbf{n}_q + (k_2+k_3)\mathbf{b}_q) \wedge (\widehat{\zeta}_1\mathbf{t} + \widehat{\zeta}_2\mathbf{n}_q + \widehat{\zeta}_3\mathbf{b}_q) \right] \quad (5.150) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\widehat{\xi}|\Lambda|}} \left[\begin{aligned} &(k_1+k_2)\widehat{\zeta}_1(\mathbf{t} \wedge \mathbf{t}) + (k_1+k_2)\widehat{\zeta}_2(\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q) + (k_1+k_2)\widehat{\zeta}_3(\mathbf{t} \wedge \mathbf{b}_q) \\ &+ (k_1-k_3)\widehat{\zeta}_1(\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{t}) + (k_1-k_3)\widehat{\zeta}_2(\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{n}_q) + (k_1-k_3)\widehat{\zeta}_3(\mathbf{n}_q \wedge \mathbf{b}_q) \\ &+ (k_2+k_3)\widehat{\zeta}_1(\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{t}) + (k_2+k_3)\widehat{\zeta}_2(\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{n}_q) + (k_2+k_3)\widehat{\zeta}_3(\mathbf{b}_q \wedge \mathbf{b}_q) \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

olarak hesaplanır, Tanım 3.5.1 kullanılırsa

$$\mathbf{b}_\beta = \frac{1}{\sqrt{\widehat{\xi}|\Lambda|}} \left[\begin{aligned} &((k_1-k_3)\widehat{\zeta}_3 - (k_2+k_3)\widehat{\zeta}_2)\mathbf{t} + ((k_1+k_2)\widehat{\zeta}_3 - (k_2+k_3)\widehat{\zeta}_1)\mathbf{n}_q \\ &+ (-(k_1+k_2)\widehat{\zeta}_2 + (k_1-k_3)\widehat{\zeta}_1)\mathbf{b}_q \end{aligned} \right] \quad (5.151)$$

bulunur. t , n_q ve b_q katsayıları sırasıyla $\widehat{\zeta}_1$, $\widehat{\zeta}_2$ ve $\widehat{\zeta}_3$ ile gösterilirse

$$\begin{aligned} \widehat{\zeta}_1 &= (k_1-k_3)\widehat{\zeta}_3 - (k_2+k_3)\widehat{\zeta}_2 \\ \widehat{\zeta}_2 &= (k_1+k_2)\widehat{\zeta}_3 - (k_2+k_3)\widehat{\zeta}_1 \\ \widehat{\zeta}_3 &= -(k_1+k_2)\widehat{\zeta}_2 + (k_1-k_3)\widehat{\zeta}_1 \end{aligned} \quad (5.152)$$

olur ve (5.151) eşitliği

$$\mathbf{b}_\beta = \frac{1}{\sqrt{\widehat{\xi}|\Lambda|}} (\widehat{\zeta}_1\mathbf{t} + \widehat{\zeta}_2\mathbf{n}_q + \widehat{\zeta}_3\mathbf{b}_q) \quad (5.153)$$

şeklinde ifade edilir. Buraya kadar t_β , n_β ve b_β vektörleri bulundu. Şimdi τ_β hesabı için β' , β'' ve β''' eşitlikleri gerekli olup bunun için (5.137) eşitliğinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d\beta'}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\begin{aligned} &(k_1+k_2)'\mathbf{t} + (k_1+k_2)\mathbf{t}' + (k_1-k_3)'\mathbf{n}_q \\ &+ (k_1-k_3)\mathbf{n}_q' + (k_2+k_3)'\mathbf{b}_q + (k_2+k_3)\mathbf{b}_q' \end{aligned} \right] \quad (5.154)$$

bulunur. Teorem 3.10.1 kullanılırsa

$$\beta'' = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\begin{aligned} &(k_1' + k_2' - k_3(k_1 - k_2) + k_1^2 + k_2^2)\mathbf{t} \\ &+ (k_1' - k_3' + k_2(k_1 - k_3) + k_1^2 - k_3^2)\mathbf{n}_q \\ &+ (k_2' + k_3' + k_1(k_2 + k_3) + k_2^2 - k_3^2)\mathbf{b}_q \end{aligned} \right] \quad (5.155)$$

olur. Türev alınır ve $\kappa = k_1^2 + k_2^2$ eşitliği kullanılarak yerine yazılırsa

$$\beta''' = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\begin{aligned} &\left(\begin{aligned} &k_1'' + k_2'' + 3k_1k_1' + 3k_2k_2' - (k_3(k_1 - k_2))' \\ &-k_3'(k_1 - k_2) + (k_1 + k_2)(\kappa - k_3^2) \end{aligned} \right) \mathbf{t} \\ &+ \left(\begin{aligned} &k_1'' - k_3'' + 3k_1k_1' - 3k_3k_3' + (k_2(k_1 - k_3))' \\ &+ k_2'(k_1 - k_3) + (k_1 - k_3)(\kappa - k_3^2) \end{aligned} \right) \mathbf{n}_q \\ &+ \left(\begin{aligned} &k_2'' + k_3'' + 3k_2k_2' - 3k_3k_3' + (k_1(k_2 + k_3))' \\ &+ k_1'(k_2 + k_3) + (k_2 + k_3)(\kappa - k_3^2) \end{aligned} \right) \mathbf{b}_q \end{aligned} \right] \quad (5.156)$$

bulunur. t , n_q ve b_q katsayıları sırasıyla \widehat{v}_1 , \widehat{v}_2 ve \widehat{v}_3 ile gösterilirse

$$\begin{aligned}\widehat{v}_1 &= k_1'' + k_2'' + 3k_1k_1' + 3k_2k_2' - (k_3(k_2 - k_1))' \\ &\quad - k_3'(k_1 - k_2) + (k_1 + k_2)(\kappa - k_3^2) \\ \widehat{v}_2 &= k_1'' - k_3'' + 3k_1k_1' - 3k_3k_3' + (k_2(k_1 - k_3))' \\ &\quad + k_2'(k_1 - k_3) + (k_1 - k_3)(\kappa - k_3^2) \\ \widehat{v}_3 &= k_2'' + k_3'' + 3k_2k_2' - 3k_3k_3' + (k_1(k_2 + k_3))' \\ &\quad + k_1'(k_2 + k_3) + (k_2 + k_3)(\kappa - k_3^2)\end{aligned}\tag{5.157}$$

olur ve (5.156) eşitliği

$$\beta''' = \frac{1}{\sqrt{3}} (\widehat{v}_1 \mathbf{t} + \widehat{v}_2 \mathbf{n}_q + \widehat{v}_3 \mathbf{b}_q)\tag{5.158}$$

şeklinde ifade edilir. (5.137), (5.155) ve (5.158) kullanılarak istenilen eşitlikler

$$\beta' \wedge \beta'' = \frac{-1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \left(\frac{k_1 - k_3}{k_2 + k_3} \right)' (k_2 + k_3)^2 + 2k_3(k_2 + k_3), \\ \left(\frac{k_1 + k_2}{k_2 + k_3} \right)' (k_2 + k_3)^2 + 2k_2(k_1 - k_3)(k_2 + k_3), \\ - \left(\frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_3} \right)' (k_1 - k_3) + 2k_1(k_2 + k_3)(k_1 - k_3) \end{pmatrix}\tag{5.159}$$

ve

$$\langle \beta' \wedge \beta'', \beta''' \rangle = \frac{-1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \left(\left(\frac{k_1 - k_3}{k_2 + k_3} \right)' (k_2 + k_3) + 2k_3 \right) (k_2 + k_3) \widehat{v}_1 \\ + \left(\left(\frac{k_1 + k_2}{k_2 + k_3} \right)' (k_2 + k_3) + 2k_2(k_1 - k_3) \right) (k_2 + k_3) \widehat{v}_2 \\ + \left(\left(\frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_3} \right)' (k_1 - k_3) - 2k_1(k_2 + k_3) \right) (k_1 - k_3) \widehat{v}_3 \end{bmatrix}\tag{5.160}$$

olur. Bulunan eşitlikler (3.11) eşitliği göz önünde bulundurularak kullanılırsa

$$\tau_\beta = -\sqrt{3} \frac{\begin{bmatrix} \left(\left(\frac{k_1 - k_3}{k_2 + k_3} \right)' (k_2 + k_3) + 2k_3 \right) (k_2 + k_3) \widehat{v}_1 \\ + \left(\left(\frac{k_1 + k_2}{k_2 + k_3} \right)' (k_2 + k_3) + 2k_2(k_1 - k_3) \right) (k_2 + k_3) \widehat{v}_2 \\ + \left(\left(\frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_3} \right)' (k_1 - k_3) - 2k_1(k_2 + k_3) \right) (k_1 - k_3) \widehat{v}_3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \left(\left(\frac{k_1 - k_3}{k_2 + k_3} \right)' (k_2 + k_3)^2 + 2k_3(k_2 + k_3) \right)^2 \\ + \left(\left(\frac{k_1 + k_2}{k_2 + k_3} \right)' (k_2 + k_3)^2 + 2k_2(k_1 - k_3)(k_2 + k_3) \right)^2 \\ - \left(\left(\frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_3} \right)' (k_1 - k_3) - 2k_1(k_2 + k_3)(k_1 - k_3) \right)^2 \end{bmatrix}}\tag{5.161}$$

elde edilir. β eğrisinin quasi-normal ve quasi binormal vektörleri, (5.105) ve (5.109) eşitlikleri kullanılarak (3.12) eşitliğinde yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\mathbf{n}_q^\beta = \frac{1}{\sqrt{\widehat{\xi}|\Lambda|}} \left[\begin{array}{l} (|\Lambda| \widehat{\zeta}_1 \cos \theta_\beta + \widehat{\zeta}_1 \sin \theta_\beta) \mathbf{t} + (|\Lambda| \widehat{\zeta}_2 \cos \theta_\beta + \widehat{\zeta}_2 \sin \theta_\beta) \mathbf{n}_q \\ + (|\Lambda| \widehat{\zeta}_3 \cos \theta_\beta + \widehat{\zeta}_3 \sin \theta_\beta) \mathbf{b}_q \end{array} \right] \quad (5.162)$$

$$\mathbf{b}_q^\beta = \frac{-1}{\sqrt{\widehat{\xi}|\Lambda|}} \left[\begin{array}{l} (|\Lambda| \widehat{\zeta}_1 \sin \theta_\beta - \widehat{\zeta}_1 \cos \theta_\beta) \mathbf{t} + (|\Lambda| \widehat{\zeta}_2 \sin \theta_\beta - \widehat{\zeta}_2 \cos \theta_\beta) \mathbf{n}_q \\ + (|\Lambda| \widehat{\zeta}_3 \sin \theta_\beta - \widehat{\zeta}_3 \cos \theta_\beta) \mathbf{b}_q \end{array} \right] \quad (5.163)$$

olur. Şimdi k_1^β ve k_2^β eğriliklerini bulmak için (m6), (m17) ve (m18) eşitliklerini kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$k_1^\beta = \langle \mathbf{t}'_\beta, \mathbf{n}_q^\beta \rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\widehat{\xi}|\Lambda|}} \left(|\Lambda| \widehat{\xi} \cos \theta_\beta + \sin \theta_\beta (-\widehat{\zeta}_1 \widehat{\zeta}_1 + \widehat{\zeta}_2 \widehat{\zeta}_2 + \widehat{\zeta}_3 \widehat{\zeta}_3) \right) \quad (5.164)$$

ve

$$k_2^\beta = \langle \mathbf{t}'_\beta, \mathbf{b}_q^\beta \rangle = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{\widehat{\xi}|\Lambda|}} \left(|\Lambda| \widehat{\xi} \sin \theta_\beta - \cos \theta_\beta (-\widehat{\zeta}_1 \widehat{\zeta}_1 + \widehat{\zeta}_2 \widehat{\zeta}_2 + \widehat{\zeta}_3 \widehat{\zeta}_3) \right) \quad (5.165)$$

bulunur. k_3^β eğriliği için

$$\mathbf{n}_q^{\beta'} = \frac{(\widehat{\xi}|\Lambda|)'}{2(\widehat{\xi}|\Lambda|)^{\frac{3}{2}}} \left[\begin{array}{l} (\sqrt{|\Lambda|} \widehat{\zeta}_1 \cos \theta_\beta + \widehat{\zeta}_1 \sin \theta_\beta) \mathbf{t} \\ + (\sqrt{|\Lambda|} \widehat{\zeta}_2 \cos \theta_\beta + \widehat{\zeta}_2 \sin \theta_\beta) \mathbf{n}_q \\ + (\sqrt{|\Lambda|} \widehat{\zeta}_3 \cos \theta_\beta + \widehat{\zeta}_3 \sin \theta_\beta) \mathbf{b}_q \end{array} \right] - \frac{1}{\sqrt{\widehat{\xi}|\Lambda|}} \left[\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} (\sqrt{|\Lambda|}' \widehat{\zeta}_1 + \mu \widehat{\zeta}'_1 + \widehat{\zeta}_1 \\ - \sqrt{|\Lambda|} (\widehat{\zeta}'_2 k_1 + \widehat{\zeta}_3 k_2)) \cos \theta_\beta \\ - (\sqrt{|\Lambda|} \widehat{\zeta}_1 + \widehat{\zeta}'_1 - \widehat{\zeta}_2 k_1 - \widehat{\zeta}_3 k_2) \sin \theta_\beta \end{array} \right) \mathbf{t} \\ + \left(\begin{array}{l} (\sqrt{|\Lambda|}' \widehat{\zeta}_2 + \mu \widehat{\zeta}'_2 + \widehat{\zeta}_2 \\ + \sqrt{|\Lambda|} (\widehat{\zeta}'_1 k_1 - \widehat{\zeta}_3 k_3)) \cos \theta_\beta \\ - (\sqrt{|\Lambda|} \widehat{\zeta}_2 + \widehat{\zeta}'_2 + \widehat{\zeta}_1 k_1 - \widehat{\zeta}_3 k_3) \sin \theta_\beta \end{array} \right) \mathbf{n}_q \\ + \left(\begin{array}{l} (\sqrt{|\Lambda|}' \widehat{\zeta}_3 + \mu \widehat{\zeta}'_3 + \widehat{\zeta}_3 \\ + \sqrt{|\Lambda|} (\widehat{\zeta}'_1 k_2 + \widehat{\zeta}_2 k_3)) \cos \theta_\beta \\ - (\sqrt{|\Lambda|} \widehat{\zeta}_3 + \widehat{\zeta}'_3 + \widehat{\zeta}_1 k_2 + \widehat{\zeta}_2 k_3) \sin \theta_\beta \end{array} \right) \mathbf{b}_q \end{array} \right] \quad (5.166)$$

bulunur ve eşitlikte yerine yazılıp düzenlenirse

$$k_3^\beta = \langle \mathbf{n}_q^{\beta'}, \mathbf{b}_q^\beta \rangle = \frac{-1}{2\widehat{\xi}|\Lambda|} \left[\begin{array}{l} \sin 2\theta_\beta [\sqrt{|\Lambda|} (\widehat{\zeta}'_1 \widehat{\zeta}_1 + \widehat{\zeta}'_2 \widehat{\zeta}_2 + \widehat{\zeta}'_3 \widehat{\zeta}_3) + \theta'_\beta (\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 + \widehat{\xi}|\Lambda|)] \\ - 2\sqrt{|\Lambda|} \theta'_\beta (\widehat{\zeta}_1 \widehat{\zeta}_1 + \widehat{\zeta}_2 \widehat{\zeta}_2 + \widehat{\zeta}_3 \widehat{\zeta}_3) \\ - 2|\Lambda| \cos^2 \theta_\beta (\widehat{\zeta}_1 \widehat{\zeta}'_1 + \widehat{\zeta}_2 \widehat{\zeta}'_2 + \widehat{\zeta}_3 \widehat{\zeta}'_3) \end{array} \right] \quad (5.167)$$

olarak hesaplanır.

Örnek 5.2.4 E_1^3 Minkowski uzayında $\alpha(s) = (\sqrt{2}\cosh s, -s, \sqrt{2}\sinh s)$ timelike eğri verilsin. İzdüşüm vektörü $\mathbf{k} = (0, 1, 0)$ (spacelike) olan bu eğrinin q-çatısı vektörleri

$$\mathbf{t} = (\sqrt{2}\sinh s, -1, \sqrt{2}\cosh s) \quad (5.168)$$

\wedge Lorentz vektörel çarpımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \wedge \mathbf{k} &= (\sqrt{2}\sinh s, -1, \sqrt{2}\cosh s) \wedge (0, 1, 0) \\ &= (\sqrt{2}\cosh s, 0, \sqrt{2}\sinh s) \end{aligned}$$

olur.

$$\mathbf{n}_q = \frac{\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}}{\|\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}\|} = (\cosh s, 0, \sinh s) \quad (5.169)$$

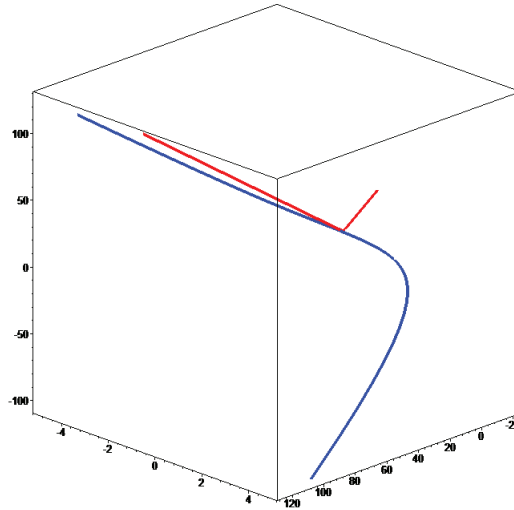
ve

$$\mathbf{b}_q = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}_q = (\sinh s, -\sqrt{2}, \cosh s) \quad (5.170)$$

olarak hesaplanır. Tanım 3.8.2 eşitliğinden $\mathbf{t}_q \mathbf{b}_q$ -Smarandache eğri

$$\beta(s^*) = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}} (\sinh s + (\sqrt{2}-1)\cosh s, -1, \cosh s + (\sqrt{2}-1)\sinh s) \quad (5.171)$$

şeklinde bulunur. Şekil 5.4 üzerinde gösterilen ele aldığımız eğri siyah ile, $\mathbf{t}_q \mathbf{b}_q$ -Smarandache eğri ise kırmızı ile gösterilmiştir.



Şekil 5.4: Eğri ve $\mathbf{t}_q \mathbf{b}_q$ -Smarandache eğri.

Frenet vektörleri için Tanım 3.2.3 göz önünde bulundurulursa

$$\mathbf{t}_\beta = \frac{1}{2-\sqrt{2}} (\cosh s + (\sqrt{2}-1)\sinh s, 0, \sinh s + (\sqrt{2}-1)\cosh s) \quad (5.172)$$

olur, buradan $\langle \mathbf{t}_\beta, \mathbf{t}_\beta \rangle > 0$ olup elde ettiğimiz $\mathbf{t}_q \mathbf{b}_q$ -Smarandache eğri spacelike olur.

$$\mathbf{n}_\beta = (\sinh s + (\sqrt{2}-1)\cosh s, 0, -\cosh s + (\sqrt{2}-1)\sinh s) \quad (5.173)$$

ve

$$\mathbf{b}_\beta = (0, 2 - \sqrt{2}, 0) \quad (5.174)$$

bulunur. Frenet eğrilikleri ise

$$\kappa_\beta = 1 \text{ ve } \tau_\beta = 0 \quad (5.175)$$

olur. $\mathbf{t}_q, \mathbf{b}_q$ –Smarandache eğrisinin q-çatısının \mathbf{n}_q^β ve \mathbf{b}_q^β vektörleri

$$\mathbf{n}_q^\beta = \frac{1}{\sqrt{2}-2} \left(\sinh s + (\sqrt{2}-1) \cosh s, 0, \cosh s + (\sqrt{2}-1) \sinh s \right) \quad (5.176)$$

ve

$$\mathbf{b}_q^\beta = (0, -1, 0) \quad (5.177)$$

olur. Teorem 3.7.1 eşitiliğinden q-eğrilikleri ise

$$\begin{aligned} k_1^\beta &= 0 \\ k_2^\beta &= 0 \\ k_3^\beta &= 0 \end{aligned} \quad (5.178)$$

şeklinde bulunur.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, eğrilerin diferensiyel geometrisinin incelenmesi için Öklid ve Minkowski uzaylarında temel kavramlar ile hesaplamalarda yardımcı olacak tanımlar ve teoremler yer almıştır. Üçüncü bölümde öncelikle temel geometrik kavramlar üzerinde durulmuş, q-çatı ve Frenet çatısı arasındaki ilişki verilmiş ve Smarandache eğrileri tanımlanmıştır. Sonrasında bu kavramlar kullanılarak dördüncü bölümde; 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin \mathbf{k} izdüşüm vektörü ile tanımlanmış q-çatılı Smarandache eğrileri elde edilmiştir. Beşinci bölümde ise; 3-boyutlu Minkowski uzayında izdüşüm vektörünün timelike alınması durumunda, bir uzay eğrisi ile bulunan q-çatı vektörleri yardımıyla oluşan Smarandache eğrileri elde edilmiştir.

Timelike vektör alınan izdüşüm vektörüne bağlı olarak oluşturulan sırasıyla \mathbf{tn}_q , \mathbf{tb}_q , $\mathbf{n}_q\mathbf{b}_q$ ve $\mathbf{tn}_q\mathbf{b}_q$ ile bulunan Smarandache eğrileri için yapılan hesaplarda türev denklemleri kullanılarak, Frenet ve q-çatı elemanları elde edilmiştir. Ayrıca her bir durum için örnekler üzerinden q-çatısı ve q-eğrilikleri hesaplanmıştır.

Benzer hesaplar, q-çatısı kullanılarak 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike ve null eğriler için de yapılabilir. Bu eğriler ele alındığında oluşturulan Smarandache eğrilerinin timelike ve null olması durumları incelenebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Ali, A.T., 2010, Special Smarandache curves in the Euclidean space, *International Journal of Mathematical Combinatorics*, 2, 30-36.
- Akutagawa, K., Nishikawa, S., 1990, The Gauss map and spacelike surfaces with prescribed mean curvature in Minkowski 3-space, *Tohoku Mathematical Journal*, 42, 67-82.
- Ashbacher, C., 1997, Smarandache geometries, *Smarandache Notions Journal*, 8,1-3, 212-215.
- Azak, A., 2009, Üç boyutlu Lorentz uzayı L^3 de timelike Mannheim eğri çifti üzerine, II, 35-45.
- Balgetir, H., Bektaş, M., Inoguchi, J., 2004, Null Bertrand curves in Minkowski 3-space and their characterizations, *Note di Matematica*, 23, 1, 7-13.
- Bektaş, Ö., Yüce, S., 2013, Special Smarandache Curves According to Darboux Frame in E^3 , *Rom. J. Math. Comput. Sci.*, 3, 48-59.
- Bertrand, J.M., 1850, Memoire sur la theorie des courbes a double courbure, *Journal de Mathematiques Pures Et Appliquees*, 15, 332-350.
- Bilici, M., Çalışkan, M., 2009, On the involutes of the spacelike curve with a timelike binormal in Minkowski 3-space, *International Mathematical Forum*, 4, 31, 1497-1509.
- Bilici, M., Çalışkan, M., 2011, Some new notes on the involutes of the timelike curves in Minkowski 3-space, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 6, 41, 2019-2030.
- Bishop, R. L., 1975, There is more than one way to frame a curve, *The American Mathematical Monthly*, 82, 246-251.
- Bloomenthal, J., 1990, Calculation of Reference Frames Along a Space Curve, *Graphics gems*, Academic Press Professional Inc., San Diego, CA.
- Blum, R., 1966, A remarkable class of Mannheim-curves, *Canadian Mathematical Bulletin*, 9, 2, 223-228.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Bonnor, W.B., 1969, Null curves in a Minkowski space-time, *Tensor*, 20, 229-242.
- Boyer, C., 1968, *A History of Mathematics*, New York:Wiley, p. 334.
- Bükcü, B., Karacan, M.K., 2007, On the involute and evolute curves of the spacelike curve with a spacelike binormal in Minkowski 3-space, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 2, 5, 221-232.
- Bükcü, B., Karacan, M.K., 2008, Bishop frame of the spacelike curve with a spacelike principal normal in Minkowski 3-space, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1*, 57, 1, 13-22.
- Bükcü, B., Karacan, M.K., 2009, On involute and evolute curves of spacelike curve with a spacelike principal normal in Minkowski 3-space, *International Journal of Mathematical Combinatorics*, 1, 27-37.
- Carmo, do M.P., 2012, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, p. 503.
- Choi, J., Kang, T., Kim, Y., 2012, Bertrand curves in 3-dimensional space forms, *Applied Mathematics and Computation*, 219, 3, 1040-1046.
- Coquillart, S., 1987, Computing offsets of B-spline curves, *Computer-Aided Design*, 19, 6, 305-309.
- Çetin, M., Tunçer, Y., Karacan, M.K., 2014, Smarandache curves according to Bishop frame in Euclidean 3-space, *General Mathematics Notes*, 20, 2, 50-66.
- Dede, M., Ekici, C., Görgülü, A., 2015, Directional q -frame along a space curve, *International Journal of Advanced Research in Computer Science and Software Engineering*, 5, 12, 775-780.
- Dede, M., Ekici, C., Tozak, H., 2015, Directional tubular surfaces, *International Journal of Algebra*, 9, 12, 527-535.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Dede, M., Ekici C., Güven, İ. A., 2018, Directional Bertrand Curves, GU J Sci, 31,1, 202-211.
- Dede, M., Tarım, G., Ekici, C., 2017, Timelike Directional Bertrand Curves in Minkowski Space. 15th International Geometry Symposium, Amasya-Turkey.
- Ekici, C., Göksel, M.B., Dede, M., 2018, Smarandache Curves According to q-Frame in Euclidean 3-Space. 16th International Geometry Symposium, Manisa-Turkey.
- Farouki, R.T., 2008, Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and Geometry Inseparable, Springer, Berlin, p. 728.
- Gray, A., Salamon, S., Abbena, E., Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica, Chapman and Hall/CRC.
- Guggenheimer, H., 1989, Computing frames along a trajectory, Computational Aided Geometry Design, 6, 77-78.
- Güner, G., Ekmekçi, N., 2012, On the spherical curves and Bertrand curves in Minkowski 3-space, Journal of Mathematics and Computer Science, 2, 4, 898-906.
- Hacısalıhoğlu, H.H., 1998, Diferensiyel geometri, Ankara Üniversitesi, s.269.
- Hanson, A.J., Ma, H., 1995, Parallel transport approach to curve framing, Indiana University, Techreports-TR425, January 11.
- Karacan, M.K., Bükcü, B., 2008, Bishop frame of the timelike curve in Minkowski 3-space, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi, 3, 1, 80-90.
- Karaman, F., 2015, Özel Smarandache eğrileri, Anadolu Üniversitesi/Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek lisans Tezi, s. 49.
- Klok, F., 1986, Two moving coordinate frames for sweeping along a 3D trajectory, Comput. Aided Geom. Des., 3,3, 217-229.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Kobayashi, S., Nomizu, K., 1983, Foundations of Differential Geometry, A Wiley-Interscience Publication, New York, p. 329.
- Kuhnel, W., 2006, Differential geometry curves-surfaces-manifolds, American Mathematical Society, Second Edition, p.54.
- Lai H., 1967, Weakened Bertrand curves, Tôhoku Mathematical Journal, 19,2, 141-155.
- Liu, H., Wang, F., 2008, Mannheim partner curves in 3-space, Journal of Geometry, 88, 120-126.
- Lopez R., 2014, Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space, International Electronic Journal of Geometry, 7,1, 44-107.
- Maekawa, T., Patrikalakis, N.M., Sakkalis, T., Yu, G., 1988, Analysis and applications of pipe surfaces, Comput. Aided Geom. Design, 15, 437-458.
- Matsuda, H., Yorozu, S., 2003, Notes on Bertrand curves, Yokohama Mathematical Journal, 50, 41-58.
- Maurer, C., Jüttler, B., 1999, Rational approximation of rotation minimizing frames using Pythagorean-Hodograph cubics, Journal for Geometry and Graphics, 3, 2, 141-159.
- O'Neill, B., 1983, Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, p. 468.
- Orbay, K., Kasap, E., 2009, On Mannheim partner curves in E^3 , International Journal of Physical Sciences, 4, 5, 261-264.
- Otsuki, T., 1961, Differential Geometry (Japanese), Asakura Shoten, Tokyo.
- Öztekin, H., Bektaş, M., 2010, Representation formulae for Bertrand curves in the Minkowski 3-space, Scientia Magna, 6, 1, 89-96.
- Öztekin, H., Ergüt, M., 2011, Null Mannheim curves in the Minkowski 3-space E_1^3 , Turkish Journal of Mathematics, 35, 107-114.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Öztürk, U., Koç Öztürk, E., B., İlarıslan, K., 2013, On the involute-evolute of the pseudonull curve in Minkowski 3-space, Journal of Applied Mathematics, 2013, 1-6.
- Ravani, R., Meghdari, A., 2004, Rational Frenet-Serret curves and rotation minimizing frames in spatial motion design, IEEE international conference on Intelligent engineering systems, 186-192.
- Sabuncuoğlu, A., 2010, Diferensiyel Geometri, Nobel Yayınevi, s.515.
- Salimov, A., Mađden, A., 2008, Diferensiyel geometri, Aktif Yayınevi, s.303.
- Shin, H., Yoo, S.K., Cho, S.K., Chung, W.H., 2003, Directional Offset of a Spatial Curve for Practical Engineering Design, ICCSA, 3, 711-720.
- Şahin, B., 2012, Manifoldların diferensiyel geometrisi, Nobel Akademik Yayıncılık, s.26-29.
- Şenyurt, S., Sivas, S., 2013, Smarandache eğrilerine ait bir uygulama, Ordu Üniv. Bil. Tek. Derg. 3,1, 46-60.
- Tarım, G., 2016, Minkowski uzayında yönlü eğriler üzerine, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek lisans Tezi, s. 86.
- Taşköprü, K., Tosun, M., 2014, Smarandache Curves on S^2 , Boletim da Sociedade paranaense de Matemtica 3 srie. 32,1, 51-59.
- Tunçer, Y., Ünal, S., 2012, New representations of Bertrand pairs in Euclidean 3-space, Applied Mathematics and Computation, 2019, 1833-1842.
- Turgut, A., 1995, 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike ve timelike regle yüzeyler, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, s. 96.
- Turgut, M., Yılmaz, S., 2008, Smarandache curves in Minkowski space-time, International Journal of Mathematical Combinatorics, 3, 51-55.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Uğurlu, H.H., Çalışkan, A., 2012, Darboux Ani Dönme Vektörleri ile Spacelike ve Timelike Yüzeyler Geometrisi, Celal Bayar Üniversitesi Yayınları, 0006, s. 170.
- Venant, B.S., 1845, Memoire sur les lignes courbes non planes, Journal de l'Ecole Polytechnique, 18, 1-76.
- Wang, F., Liu, H.L., 2007, Mannheim partner curves in 3-Euclidean space, Mathematics in Practice and Theory, 37, 1, 141-43.
- Wang, W., Joe, B., 1997, Robust computation of the rotation minimizing frame for sweep surface modelling, Computational Aided Geometry Design, 29, 379-391.
- Wang, W., Jüttler, B., Zheng, D., Liu, Y., 2008, Computation of rotation minimizing frames, ACM Transactions on Graphics, 27, 1, 1-18.
- Yılmaz, S., Turgut, M., 2010, A new version of Bishop frame and an application to spherical images, Journal of Mathematical Analysis Applications, 371, 764-776.