Bazı Öklidyen Olmayan Geometrilerde İnversiyonlar Üzerine

Adnan Pekzorlu

DOKTORA TEZİ

Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı

Haziran 2019

On Inversions In Non-Euclidean Geometries

Adnan Pekzorlu

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Mathematics - Computer

June 2019

Bazı Öklidyen Olmayan Geometrilerde İnversiyonlar Üzerine

Adnan Pekzorlu

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Ayşe Bayar

Haziran 2019

ONAY

Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı Doktora öğrencisi Adnan Pekzorlu'nun DOKTORA tezi olarak hazırladığı "Bazı Öklidyen Olmayan Geometrilerde İnversiyonlar Üzerine" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Ayşe Bayar

İkinci Danışman : Prof. Dr. Ziya Akça

Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Ayşe Bayar

Üye : Prof. Dr. Süheyla Ekmekçi

Üye : Prof. Dr. Mine Turan

Üye : Prof. Dr. Erhan Ata

Üye : Prof. Dr. Özcan Gelişgen

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .... tarih ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Ayşe Bayar danışmanlığında hazırlamış olduğum "**Bazı Öklidyen Olmayan Geometrilerde İnversiyonlar Üzerine**" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 13/06/2019

Adnan Pekzorlu

ÖZET

Literatürde inversiyon dönüşümü pek çok farklı şekilde sunulmuştur. İnversiyon kavramı Perga tarafından (M.Ö. 225 – M.Ö. 180) sunulduktan sonra takip eden yıllar boyunca, birçok fizikçi ve matematikçi birbirlerinden bağımsız olarak, inversiyon kavramını yeniden keşfettiler ve kendi uygulamaları için en faydalı olan özellikleri merkezsel bir koni, elips ve çembere göre inversiyon tanımlayarak ispatladılar. Bu özelliklerin bazıları klasik çembere göre inversiyonun sağladığı özelliklerdir. Bir küreye göre inversiyon, küreyi içten dışa dönüştüren uzayın bir dönüşümüdür. Yani, kürenin dışındaki noktalar kürenin içindeki noktalara ve kürenin içindeki noktalar kürenin dışına eşlenirler. Üstelik inversiyonlar farklı metriklerle donatılmış düzlem ve uzaylarda da incelenebilir.

Bu çalışmanın birinci ve ikinci bölümlerinde inversiyon ve Öklidyen olmayan bazı metriklerle ilgili temel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde Çin dama ile donatılmış düzlemde Çin dama çemberine göre bir inversiyon tanımlanıp ve bu yeni dönüşümün pek çok özelliği incelenmiştir. Ayrıca invers noktalar, çifte oran, harmonik eşlenik kavramları ile ilgili özellikler verilmiştir.

Dördüncü ve beşinci bölümde, taksi ve Çin dama küresine göre inversiyon tanımlanarak bu dönüşümün çeşitli özellikleri incelenmiştir. Ayrıca taksi ve Çin dama uzayında invers noktalar, çifte oran, harmonik eşlenikler ile doğruların, düzlemlerin, çemberlerin ve kürelerinin inversiyon altındaki görüntülerinin özellikleri araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: İnversiyon, Taksi Uzayı, Çin Dama Düzlemi, Çin Dama Uzayı, Harmonik Eşlenik

SUMMARY

Inversion transformation has been presented in different kinds in the literature. After the concept of inversion was introduced by Perga (225 BC - 180 BC) throughout the following years, many physicists and mathematicians, independently of each other, rediscovered the consept of inversion and they proved the most useful properties for their applications by defining a central cone, ellipse, and circle inversion. Some of these features are inversion compared to the classical circle. The part of the space inside the sphere is sent off the sphere and vice versa by an inversion with respect to a sphere. That is, the points outside the sphere are mapped to the points inside the sphere, and the points inside the sphere are mapped outside the sphere. Inversions can also be studied in planes and spaces equipped with different metrics.

In the first and second chapter of in this study, basic consepts of inversion and some non-Euclidean metrics are given. In the third chapter, an inversion is defined with respect to Chinese Checkers circle in Chinese Checkers plane and many properties of this transformation are examined. In addition, properties of inverse points, cross ratio, harmonic conjugate concepts are given.

In the fourth and fifth chapter, spherical inversions with respect to of the taxicab and the Chinese Checkers sphere have been defined and proved several properties of this transformations in taxicab and Chinese Checkers spaces. In addition, the inverse points, cross ratio, harmonic conjugates and lines, planes, circles, spheres under spherical inversion are investigated in the taxicab and Chinese Checkers space.

Keywords: Inversion, Taxicab Space, Chinese Checkers Plane, Chinese Checkers Space, Harmonic Conjugate

TEŞEKKÜR

Bu doktora tez çalışmasında yardımlarını esirgemeyen, yönlendirmeleriyle bana yardımcı olan değerli danışmanım **Prof. Dr. Ayşe Bayar**'a, bilimsel katkılarını ve desteklerini esirgemeyen değerli hocalarım **Prof. Dr. Ziya Akça** ile **Prof. Dr. Süheyla Ekmekçi**'ye teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmanın her aşamasında her türlü desteği ve yardımını hissettiğim, her zaman yanımda olan

değerli annem, babam ve kardeşime

en içten ve sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Adnan Pekzorlu

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ VE AMAÇ

20. yüzyılın başlarında H. Minkowski taksi metriğini de kapsayan bir metrik ailesi vermiştir (Minkowski, 1967). Daha sonra K. Menger, analitik düzlemde herhangi iki nokta arasındaki uzaklık için iyi bilinen Öklidyen metrik $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$ analitik düzlemde herhangi iki noktaları için

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

yerine taksi metriğini

$$d_T(P,Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

kullanarak Öklidyen olmayan bir geometri olan taksi düzlem geometrisini geliştirmiştir (Menger, 1952). Daha sonra E. F. Krause düzlem taksi geometrideki temel kavramları işleyen bir kitap yayınlamıştır (Krause, 1975). Geçen yüzyılın son çeyreğinde taksi geometri pek çok matematikçi tarafından çalışılarak çeşitli yönlerde geliştirildi.

E.F Krause öğrencisi G.Chen'den Çin dama oyunundaki gibi çapraz ilerleme olmadan sadece yatay ve dikey hareketleri kullanarak hesaplanan bir metrik geliştirmesini istedi. Çin dama metriğinin

$$d_c(P,Q) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

tanımı Chen tarafından (1992) verilmiştir. Çin dama geometrisi de bir Öklidyen olmayan düzlem modelidir.

İnversiyon kavramı Perga Apollonius tarafından son kitabı Plane Loci'de tanıtılmıştır. Sistematik olarak Steiner tarafından 1820'lerde çalışılmış ve uygulanmıştır. Ardından genelleştirilmiş birçok inversiyon türü kullanılmış ve geliştirilmiştir (Childress, 1965), (Blair, 2000), (Ramirez, 2013), (Bayar, Ekmekçi, 2014), (Ramirez, Rubiano, 2016), (Gelişgen, Ermiş, 2019).

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Aşağıda ifade edilen tanım ve teoremler (Özcan ve Kaya, 2003), (Kaya ve Çolakoğlu, 2006), (Krause, 1975), (Martin, 1998), (Millmann and Parker, 1991), (Yağcı, 2006) ve (Coxeter, 1961) kaynaklarından esas alınarak özetlenmiştir.

Tanım 2.0.1 *$\mathcal{P}$, elemanları noktalar olan bir küme; $\mathcal{L}$ de, $\mathcal{P}$ nin boş olmayan alt kümelerinden oluşan ve elemanları doğrular olarak adlandırılan bir küme olmak üzere, aşağıdaki iki aksiyomu sağlayan matematiksel sisteme soyut geometri denir ve $[\mathcal{P}, \mathcal{L}]$ ile gösterilir.*

i) *$\mathcal{P}$ deki her farklı iki noktadan geçen en az bir doğru vardır.*

ii) *Her doğru en az iki noktaya sahiptir.*

Tanım 2.0.2 *Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $[\mathcal{P}, \mathcal{L}]$ soyut geometrisine konum (incidence) geometrisi denir.*

i) *$\mathcal{P}$ deki her farklı iki nokta bir tek doğru üzerindedir.*

ii) *Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.*

Tanım 2.0.3 *X boş olmayan bir küme olmak üzere $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki üç koşulu sağlarsa X kümesi üzerinde bir metriktir denir. Her $P, Q, R \in X$ için,*

i) $d(P,Q) \geq 0$ *ve* $d(P,Q) = 0 \iff P = Q$

ii) $d(P,Q) = d(Q,P)$

iii) $d(P,Q) + d(Q,R) \geq d(P,R)$

Tanım 2.0.4 *l, $[\mathcal{P}, \mathcal{L}]$ konum geometrisinin bir doğrusu, d de $\mathcal{P}$ üzerinde bir uzaklık fonksiyonu olmak üzere, aşağıdaki koşulları sağlayan $f : l \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna l için cetveldir denir.*

i) *f fonksiyonu birebir ve örtendir.*

ii) *l üzerindeki her P ve Q noktaları için $|f(P) - f(Q)| = d(P,Q)$ dir.*

Tanım 2.0.5 *$[\mathcal{P}, \mathcal{L}]$ bir konum geometrisi ve d de $\mathcal{P}$ üzerinde bir uzaklık fonksiyonu olmak üzere, her $l \in \mathcal{L}$ doğrusu cetvele sahipse, d ile birlikte $[\mathcal{P}, \mathcal{L}]$ konum geometrisine metrik geometri denir ve $[\mathcal{P}, \mathcal{L}, d]$ ile gösterilir.*

Tanım 2.0.6 *P, Q ve R, $[\mathcal{P}, \mathcal{L}, d]$ metrik geometrisi içinde üç farklı nokta olmak üzere, eğer bu noktalar aynı doğru üzerinde ve*

$$d(P,Q) + d(Q,R) = d(P,R)$$

ise, Q noktası P ve R noktaları arasındadır denir ve $P - Q - R$ ile gösterilir.

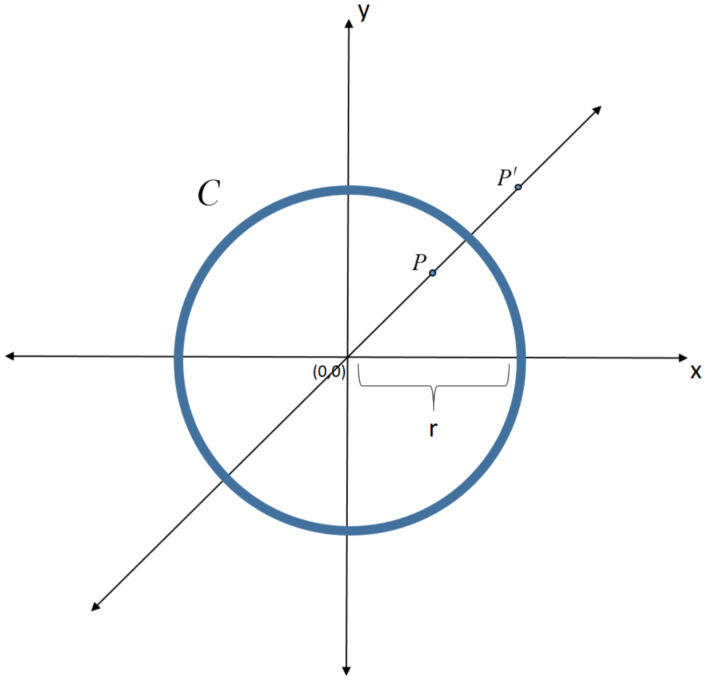
P ve Q farklı iki nokta olmak üzere, $\{X \in \mathcal{P} : X = P$ veya $X = Q$ veya $P - X - Q\}$ kümesine PQ doğru parçası denir ve $\overline{PQ}$ veya $[PQ]$ şeklinde gösterilir. $[PQ]$ ve $[RS]$ iki doğru parçası olmak üzere, $d(P,Q) = d(R,S)$ ise $[PQ]$ ve $[RS]$ doğru parçaları eştir denir. Ayrıca $[PQ] \cup \{X \in \mathcal{P} : P - Q - X\}$ kümesine PQ ışını, P noktasına da PQ ışınının başlangıç noktası denir. PQ ışını, $\overrightarrow{PQ}$ veya $[PQ$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.0.7 *$P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$ analitik düzlemde herhangi iki nokta olsun.*

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

şeklinde tanımlanan $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ fonksiyonuna analitik düzlemde P ve Q noktaları arasındaki Öklidyen uzaklık fonksiyonu adı verilir.

Tanım 2.0.8 *$C = C(O, r)$ çemberine göre inversiyon, $I_{(O,r)}$ ile gösterilsin. Her $P \neq O$ için, $d(O,P)d(O,P') = r^2$ koşulunu sağlayan OP ışını üzerindeki P' noktasına P nin inversi denir (Şekil 2.1.) ve $I_{(O,r)}(P) = P'$ şeklinde gösterilir. O noktasına inversiyon merkezi, C ye inversiyon çemberi, r ye inversiyon çemberinin yarıçapı ve r^2 ye de inversiyon çemberinin kuvveti denir.*



Şekil 2.1. Merkezil Çemberde İnvers Noktalar

$C = C(O,r)$ çemberine göre inversiyon, C çemberine göre yansıma olarak da düşünülebilir. İnversiyonlar açıları ve çifte oranı koruduğu gibi çemberi çembere, çemberi doğruya ya da doğruyu çembere dönüştürebilen dönüşümlerdir. Bir P noktasının inversi P' olduğunda, P' noktasının inversinin de P olması gerektiği $d(O,P)d(O,P') = r^2$ koşulundan kolayca görülebilir. Bu da yarı dönme ve simetrilere benzer olarak inversiyon dönüşümünün involusyonlu olduğunu gösterir.

P noktası eğer C nin iç bölgesinde ise $d(O,P) < r$ dir.

$$d(O,P)d(O,P') = r^2$$

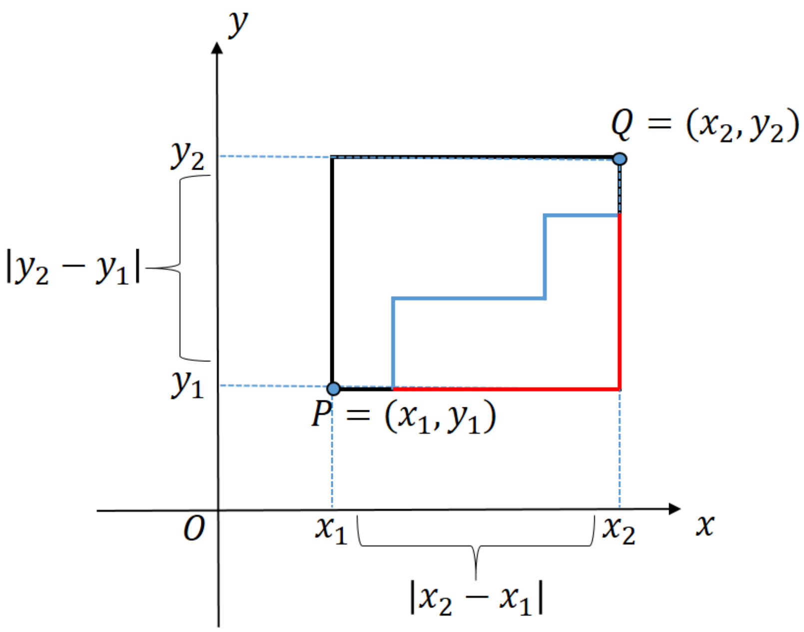
olması için $d(O,P) > r$ olmalıdır. Bu sebeple inversion çemberinin içinde bulunan noktaların inversleri çemberin dışında olur. Benzer şekilde inversiyon çemberinin dışında kalan noktaların inverslerinin çemberin içinde yer aldığı söylenebilir.

Eğer P noktası C nin üzerinde ise $d(O,P) = r$ dir. $d(O,P)d(O,P') = r^2$ koşulunun sağlanması için $d(O,P') = r$ olması gerekir. Böylelikle $P = P'$ olur. Yani inversion çemberi üzerinde bulunan bir noktanın inversi yine kendisi olmaktadır. Bu önermenin tersi de sağlanır. $P = P'$ olsun. Buradan $(d(O,P))^2 = r^2$ ve dolayısıyla $d(O,P) = r$ elde edilir. Bu da P noktasının inversion çemberi üzerinde bulunduğunun bir göstergesidir. İnversiyon O noktasında tanımlı değildir. Dolayısıyla tanım kümesi düzlemin tamamını içermez. Ayrıca inversiyon örten de değildir. Çünkü $I_{(O,r)}(P) = O$ olacak şekilde bir P noktası yoktur. Bu tür eksiklikleri gidermek için düzleme ∞ noktası (sonsuzdaki bir nokta) ilave edilerek düzlem genişletilmektedir. $I_{(O,r)}(O) = \infty$ ve $I_{(O,r)}(\infty) = O$ şeklinde tanımlandığında O ve ∞ noktaları birbirine karşılık gelmektedir. Dolayısıyla inversiyon genişletilmiş düzlemin bir dönüşümü olur.

Tanım 2.0.9 $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$ *analitik düzlemde herhangi iki nokta olsun.*

$$d_T(P, Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

şeklinde tanımlanan $d_T : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ *fonksiyonuna analitik düzlemde* P *ve* Q *noktaları arasındaki Taksi uzaklık fonksiyonu adı verilir (Şekil 2.2.). Taksi düzleminin noktaları ve doğruları Öklid düzleminin noktaları ve doğrularının aynısıdır. Açı ölçümü de Öklidyen düzlemdeki ile aynı yolla yapılır.*

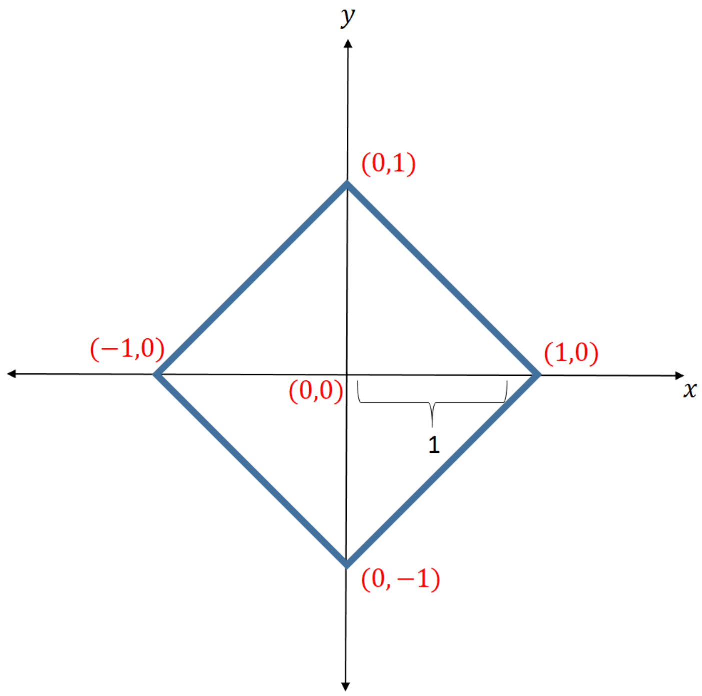


Şekil 2.2. Taksi Düzleminde İki Nokta Arasındaki Uzaklık

Taksi birim çemberi (Şekil 2.3.); $\mathbb{R}^2$ de orijinden bir taksi birim uzaklıktaki $P = (x, y)$ noktalarının geometrik yeridir ve denklemi,

$$|x| + |y| = 1$$

biçimindedir.



Şekil 2.3. Taksi Düzleminde Merkezil Birim Çember

Teorem 2.0.10 *Analitik düzlemde tanımlanan Taksi uzaklık fonksiyonu bir metriktir.*

İspat: *Metrik tanımı gereğince Taksi uzaklık fonksiyonunun pozitif tanımlı olduğunu, simetrik ve üçgen eşitsizliğini sağladığını göstermeliyiz.* $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *olsun. Mutlak değer tanımından dolayı* $|x_1 - x_2| \geq 0$ *ve* $|y_1 - y_2| \geq 0$ *olduğundan* $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \geq 0$ *olup* $d_T(P, Q) \geq 0$ *dır. Ayrıca*

$$d_T(P, Q) = 0 \Longrightarrow |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 0$$

olması gerektiğinden dolayı $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| = 0$ *elde edilir. Yani* $x_1 = x_2$ *ve* $y_1 = y_2$ *olup* $P = Q$ *dur. Açıkca* $P = Q$ *ise* $d_T(P, Q) = 0$ *dır. O halde* $d_T(P, Q) = 0 \Longleftrightarrow P = Q$ *dur. Yani* d_T*-uzaklık fonksiyonu pozitif tanımlıdır. Üstelik mutlak değer tanımı gereğince* $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$ *ve* $|y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$ *olduğundan* $d_T(P, Q) = d_T(Q, P)$ *dir. Bu nedenle* d_T*-uzaklık fonksiyonu simetriktir.* $R = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ *olsun. Mutlak değer özelliği gereğince*

$$|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \geq |x_1 - x_2|$$

$$|y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \geq |y_1 - y_2|$$

olduğundan dolayı

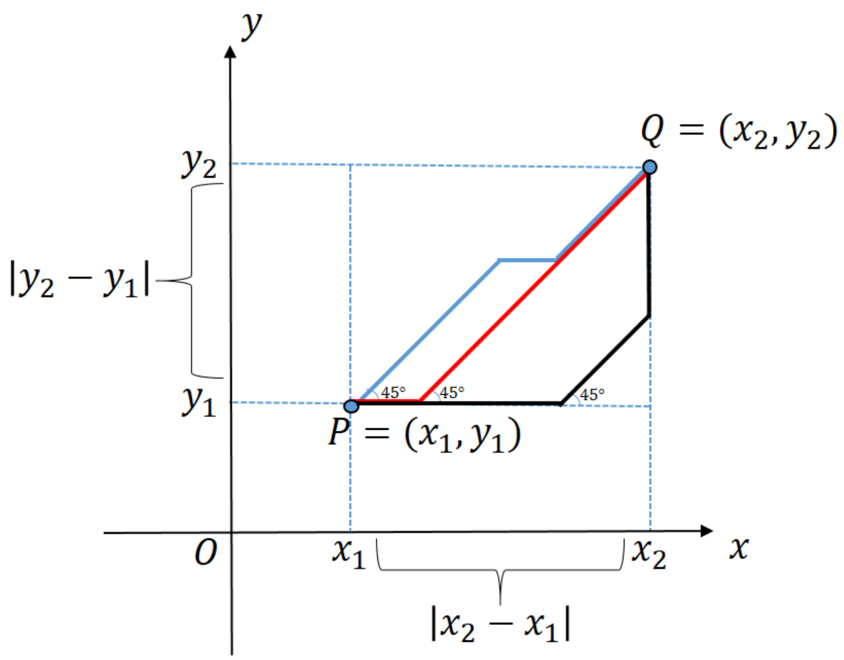
$$\begin{aligned} d_T(P,Q) &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ &\leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \\ &= (|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|) + (|x_3 - x_2| + |y_3 - y_2|) \\ &= d_T(P,R) + d_T(R,Q) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bir başka deyişle taksi uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar. O halde analitik düzlemde tanımlanan taksi uzaklık fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ *de bir metriktir.* □

Tanım 2.0.11 $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$ *analitik düzlemde herhangi iki nokta olsun.*

$$d_c(P,Q) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

şeklinde tanımlanan $d_c : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ *fonksiyonuna analitik düzlemde* P *ve* Q *noktaları arasındaki Çin dama uzaklık fonksiyonu adı verilir (Şekil 2.4.). Çin dama düzleminin noktaları ve doğruları Öklid düzleminin noktaları ve doğrularının aynısıdır. Açı ölçümü de Öklidyen düzlemdeki ile aynı yolla yapılır.*

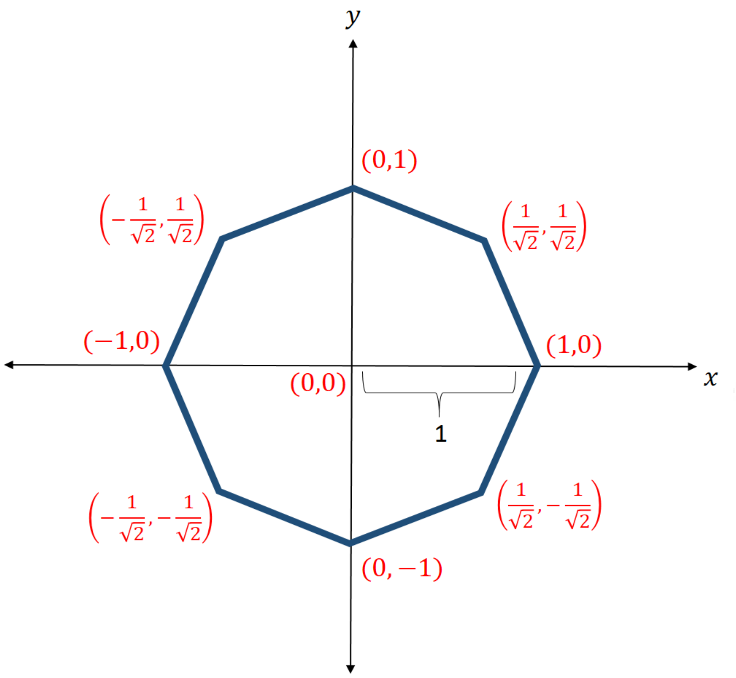


Şekil 2.4. Çin Dama Düzleminde İki Nokta Arasındaki Uzaklık

Çin dama birim çemberi (Şekil 2.5.); $\mathbb{R}^2$ de orijinden bir Çin dama birim uzaklıktaki $P = (x, y)$ noktalarının geometrik yeridir ve denklemi,

$$\max\{|x|,|y|\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{|x|,|y|\} = 1$$

biçimindedir.



Şekil 2.5. Çin Dama Düzleminde Merkezil Birim Çember

Teorem 2.0.12 *Analitik düzlemde tanımlanan Çin dama uzaklık fonksiyonu bir metriktir.*

İspat: $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *olsun. Mutlak değer tanımından dolayı* $|x_1 - x_2| \geq 0$, $|y_1 - y_2| \geq 0$ *ve* $\sqrt{2} - 1 \geq 0$ *olduğundan* $d_c(P,Q) \geq 0$ *dır. Ayrıca* $d_c(P,Q) = 0 \implies \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = 0$ *olması gerektiğinden dolayı* $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| = 0$ *elde edilir. Yani* $x_1 = x_2$ *ve* $y_1 = y_2$ *olup* $P = Q$ *dur. Açıkça* $P = Q$ *ise* $d_c(P,Q) = 0$ *dır. O halde* $d_c(P,Q) = 0 \iff P = Q$ *dur. Yani* d_c*-uzaklık fonksiyonu pozitif tanımlıdır. Üstelik mutlak değer tanımı gereğince* $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$ *ve* $|y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$ *olduğundan* $d_c(P,Q) = d_c(Q,P)$ *dir. Bu nedenle* d_c*-uzaklık fonksiyonu simetriktir.* $R = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ *olsun.*

$$
\begin{aligned}
d_c(P,Q) &= \max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\} \\
&= \max\{|x_1-x_3+x_3-x_2|,|y_1-y_3+y_3-y_2|\}+ \\
&\quad \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{|x_1-x_3+x_3-x_2|,|y_1-y_3+y_3-y_2|\} \\
&\leq \max\{|x_1-x_3|+|x_3-x_2|,|y_1-y_3|+|y_3-y_2|\}+ \\
&\quad \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{|x_1-x_3|+|x_3-x_2|,|y_1-y_3|+|y_3-y_2|\} \\
&= k
\end{aligned}
$$

olsun. Buradaki dört farklı durum incelenmelidir:

I.Durum:

$$|x_1-x_3|\geq|y_1-y_3|\,ve\,|x_3-x_2|\geq|y_3-y_2|$$

olsun. Bu taktirde

$$
\begin{aligned}
d_c(P,Q) &\leq k=(|x_1-x_3|+|x_3-x_2|)+\left(\sqrt{2}-1\right)(|y_1-y_3|+|y_3-y_2|) \\
&= \left(|x_1-x_3|+\left(\sqrt{2}-1\right)|y_1-y_3|\right)+\left(|x_3-x_2|+\left(\sqrt{2}-1\right)|y_3-y_2|\right) \\
&= d_c(P,R)+d_c(R,Q)
\end{aligned}
$$

olur.

II.Durum:

$$|x_1-x_3|\geq|y_1-y_3|\,ve\,|x_3-x_2|\leq|y_3-y_2|$$

olsun. Burada iki alt durum vardır $|x_1-x_3|+|x_3-x_2|\geq|y_1-y_3|+|y_3-y_2|$ *olması durumunda*

$$
\begin{aligned}
d_c(P,Q) &\leq k=(|x_1-x_3|+|x_3-x_2|)+\left(\sqrt{2}-1\right)(|y_1-y_3|+|y_3-y_2|) \\
&= \left(|x_1-x_3|+\left(\sqrt{2}-1\right)|y_1-y_3|\right)+\left(|x_3-x_2|+\left(\sqrt{2}-1\right)|y_3-y_2|\right) \\
&= d_c(P,R)+d_c(R,Q)-\left(2-\sqrt{2}\right)(|y_3-y_2|-|x_3-x_2|)
\end{aligned}
$$

olup burada $2-\sqrt{2}>0$ *ve* $|y_3-y_2|-|x_3-x_2|\geq 0$ *olduğundan*

$$d_c(P,Q)\leq d_c(P,R)+d_c(R,Q)$$

olur. $|x_1-x_3|+|x_3-x_2|\leq|y_1-y_3|+|y_3-y_2|$ *olması durumunda ise*

$$
\begin{aligned}
d_c(P,Q) &\leq k = (|y_1-y_3|+|y_3-y_2|) + \left(\sqrt{2}-1\right)(|x_1-x_3|+|x_3-x_2|) \\
&= \left(|y_1-y_3| + \left(\sqrt{2}-1\right)|x_1-x_3|\right) + \left(|y_3-y_2| + \left(\sqrt{2}-1\right)|x_3-x_2|\right) \\
&= d_c(P,R) + d_c(R,Q) - \left(2-\sqrt{2}\right)(|x_1-x_3|-|y_1-y_3|)
\end{aligned}
$$

olup burada $2-\sqrt{2}>0$ *ve* $|x_1-x_3|-|y_1-y_3| \geq 0$ *olduğundan*

$$d_c(P,Q) \leq d_c(P,R) + d_c(R,Q)$$

olur.

III.Durum:

$$|x_1-x_3| \leq |y_1-y_3| \, ve \, |x_3-x_2| \geq |y_3-y_2|$$

olsun. Bu taktirde

$$
\begin{aligned}
d_c(P,Q) &\leq k = (|y_1-y_3|+|y_3-y_2|) + \left(\sqrt{2}-1\right)(|x_1-x_3|+|x_3-x_2|) \\
&= \left(|y_1-y_3| + \left(\sqrt{2}-1\right)|x_1-x_3|\right) + \left(|y_3-y_2| + \left(\sqrt{2}-1\right)|x_3-x_2|\right) \\
&= d_c(P,R) + d_c(R,Q)
\end{aligned}
$$

olur.

IV.Durum:

$$|x_1-x_3| \leq |y_1-y_3| \, ve \, |x_3-x_2| \leq |y_3-y_2|$$

olsun. Bu taktirde

$$
\begin{aligned}
d_c(P,Q) &\leq k = (|y_1-y_3|+|y_3-y_2|) + \left(\sqrt{2}-1\right)(|x_1-x_3|+|x_3-x_2|) \\
&= \left(|y_1-y_3| + \left(\sqrt{2}-1\right)|x_1-x_3|\right) + \left(|y_3-y_2| + \left(\sqrt{2}-1\right)|x_3-x_2|\right) \\
&= d_c(P,R) + d_c(R,Q)
\end{aligned}
$$

olur. Tüm durumların sonuçları birleştirildiğinde her $P,\ Q,\ R \in \mathbb{R}^2$ *için*

$$d_c(P,Q) \leq d_c(P,R) + d_c(R,Q)$$

sonucu ortaya çıkar. Yani Çin dama uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar. O halde analitik düzlemde tanımlanan Çin dama uzaklık fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ *de bir metriktir.* □

3. ÇİN DAMA DÜZLEMİNDE ÇEMBERE GÖRE İNVERSİYONLAR

Öklidyen olmayan bir düzlem modeli olan Çin dama geometrisi Çin dama oyunundan esinlenilerek güneybatıdan kuzeydoğuya, kuzeybatıdan güneydoğuya, doğudan batıya, kuzeyden güneye tüm yönlerde hareket edilebilen Çin dama oyunundaki hareketlerden yola çıkılarak Chen (1992) tarafından geliştirilmiştir. Çin dama düzleminin noktaları ve doğruları Öklid düzleminin noktaları ve doğrularının aynısıdır. Açı ölçümü de Öklidyen düzlemdeki ile aynıdır. Ancak uzaklık fonksiyonu farklıdır (Gelişgen, Kaya, Özcan, 2006), (Kaya, Gelişgen, Bayar, Ekmekçi, 2006), (Turan, 2004). $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için Öklid metriğinin uzaklık fonksiyonu

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

iken Çin dama metriğinin uzaklık fonksiyonu

$$d_c(A, B) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

olarak tanımlanır.

$\mathbb{R}^2_c$, Çin dama düzlemindeki birim çember

$$\max\{|x|, |y|\} + \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\{|x|, |y|\} = 1$$

denklemini sağlayan (x, y) noktalarının geometrik yeridir.

3.1 Çin Dama Düzleminde Çembere Göre İnversiyonlar

Tanım 3.1.1 $\mathbb{R}^2_c$ *Çin dama düzleminde merkezi* $O = (0, 0)$ *ve yarıçapı* r *olan Çin dama çemberi* C *olsun.* C *ye göre* $I_{(O,r)}$ *Çin dama inversiyonu düzlemdeki* P *noktasını* P' *noktasına eşleyen aşağıdaki koşulları sağlayan dönüşümdür:*

i) *P' noktası OP ışını üzerindedir.*

ii) $d_c(O,P) \cdot d_c(O,P') = r^2$

Bu inversiyona göre P' noktasına P noktasının C Çin dama çemberine göre inversi ve $O = (0,0)$ ya inversiyon merkezi denir. Bir C çemberine göre Çin dama inversiyonu involusyonludur.

Teorem 3.1.2 *C, $I_{(O,r)}$ Çin dama inversiyonunda O merkezli r yarçaplı bir Çin dama çemberi olsun. P noktası C nin dışında ise P nin inversi olan P' noktası çemberin içindedir. İfadenin tersi de doğrudur. Yani P noktası C çemberinin içinde ise P nin inversi çemberin dışındadır (Şekil 3.1.).*

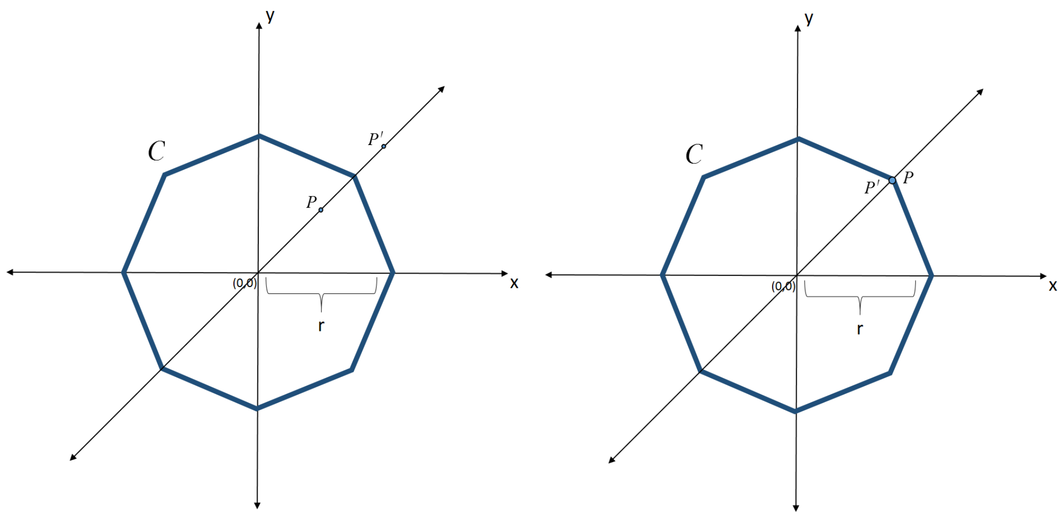
İspat: P noktası C nin dışında ise $d_c(O,P) > r$ olur. $P' = I_{(O,r)}(P)$ ise

$$d_c(O,P) \cdot d_c(O,P') = r^2$$

olduğundan $r^2 = d_c(O,P) \cdot d_c(O,P') > r \cdot d_c(O,P')$ olur. Buradan

$$r > d_c(O,P')$$

elde edilir. P nin C çemberinin içinde olması durumu benzer şekilde kolaylıkla gösterilebilir. □



Şekil 3.1. Çin Dama Çemberine Göre İnvers Noktalar

Bir $I_{(O,r)}$ inversiyonu, inversiyon çemberinin merkezinde tanımlı değildir. P noktası çemberin merkezine yaklaştıkça P' invers noktası $\overrightarrow{PP'}$ ışını yönünde sonsuza doğu çemberden uzaklaşır. Bu gözlem ile düzlemde bulunmayan sonsuzdaki bir noktanın eklenmesi ile inversiyon tanımına merkez eklenebilir. Buna göre Çin dama çemberine tek bir O_∞ noktası eklenirse bu nokta C Çin dama çemberinin O merkezinin inversidir. Böylece $I_{(O,r)}$ inversiyonu Çin dama düzleminin genişletilmişi olan düzlemde bir dönüşüm olur.

Teorem 3.1.3 *$\mathbb{R}_c^2$ de merkezi $O = (0,0)$ olan r yarıçaplı C Çin dama çemberi için $P \neq O$ olmak üzere $P = (x,y)$ ve $P' = (x',y')$ noktaları Çin dama çemberine göre $I_{(O,r)}$ inversiyonunda invers noktalar iseler P ile P' arasında*

$$x' = \frac{r^2 x}{\left(\max\{|x|,|y|\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{|x|,|y|\}\right)^2}$$

$$y' = \frac{r^2 y}{\left(\max\{|x|,|y|\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{|x|,|y|\}\right)^2}$$

bağıntısı vardır.

İspat: *$\mathbb{R}_c^2$ de $O = (0,0)$ merkezli r yarıçaplı C Çin dama çemberi için $P \neq O$ olmak üzere $P = (x,y)$, $P' = (x',y') \in \mathbb{R}_c^2$ olsun. İnversiyon tanımı gereğince*

$$d_c(O,P) \cdot d_c(O,P') = r^2$$

olduğundan burada P ve P' noktalarının konumuna göre iki durum ortaya çıkar:

i) *$|x| \geq |y|$ ve $\left|x'\right| \geq \left|y'\right|$ iken $\left(x + \left(\sqrt{2}-1\right)y\right) \cdot \left(x' + \left(\sqrt{2}-1\right)y'\right) = r^2$ olup ve O, P, P' doğrudaş olduğundan $x' = kx$ ve $y' = ky$ olacak şekilde $k \in \mathbb{R}$ vardır. Böylece*

$$\left(x + \left(\sqrt{2}-1\right)y\right) \cdot \left(kx + \left(\sqrt{2}-1\right)ky\right) = r^2$$

$$k\left(x + \left(\sqrt{2}-1\right)y\right)^2 = r^2$$

$$k = \frac{r^2}{\left(x + \left(\sqrt{2}-1\right)y\right)^2}$$

olarak bulunur ve $x^{'} = kx$ *ve* $y^{'} = ky$ *bağlantılarında yerine konulursa*

$$x' = \frac{r^2 x}{\left(x + \left(\sqrt{2}-1\right) y\right)^2}$$

$$y' = \frac{r^2 y}{\left(x + \left(\sqrt{2}-1\right) y\right)^2}$$

şeklinde elde edilir.

ii) $|x| \leq |y|$ *ve* $\left|x^{'}\right| \leq \left|y^{'}\right|$ *iken*

$$\left(y + \left(\sqrt{2}-1\right) x\right) \cdot \left(y^{'} + \left(\sqrt{2}-1\right) x^{'}\right) = r^2$$

olup O*,*P *,*P' *doğrudaş olduğundan* $x^{'} = kx$ *ve* $y^{'} = ky$ *olacak şekilde* $k \in \mathbb{R}$ *vardır. Böylelikle*

$$\left(y + \left(\sqrt{2}-1\right) x\right) \cdot \left(ky + \left(\sqrt{2}-1\right) kx\right) = r^2$$

$$k\left(y + \left(\sqrt{2}-1\right) x\right)^2 = r^2$$

$$k = \frac{r^2}{\left(y + \left(\sqrt{2}-1\right) x\right)^2}$$

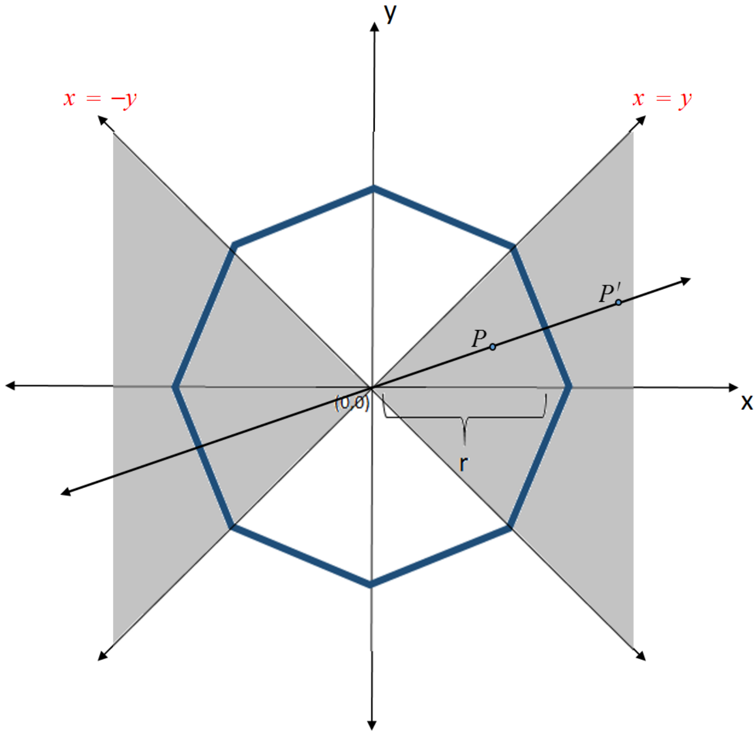
dir ve $x^{'} = kx$ *ve* $y^{'} = ky$ *bağlantılarında yerine konulursa*

$$x' = \frac{r^2 x}{\left(y + \left(\sqrt{2}-1\right) x\right)^2}$$

$$y' = \frac{r^2 y}{\left(y + \left(\sqrt{2}-1\right) x\right)^2}$$

şeklinde elde edilir. $\square$

Şekil 3.2. de merkezi orijin olan C çemberine göre Çin dama inversiyonu gösterilmiştir. Bu tanımlama, çemberin merkezinin (a, b) olması durumuna aşağıdaki sonuçla genelleştirilebilir:



Şekil 3.2. Merkezil Çin Dama Çemberinde İnvers Noktaların Durumları

Sonuç $\mathbb{R}_c^2$ de merkezi $O = (a,b)$ olan r yarıçaplı Çin dama çemberi C olsun. $P \neq O$ olmak üzere $P = (x,y)$ ve $P' = (x',y')$ noktaları Çin dama çemberine göre $I_{(O,r)}$ inversiyonunda invers noktalar iseler,

$$x' = a + \frac{r^2(x-a)}{\left(\max\{|x-a|,|y-b|\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{|x-a|,|y-b|\}\right)^2}$$

$$y' = b + \frac{r^2(y-b)}{\left(\max\{|x-a|,|y-b|\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{|x-a|,|y-b|\}\right)^2}$$

dir.

İspat: $\mathbb{R}_c^2$ de $O = (a,b)$ merkezli r yarıçaplı C Çin dama çemberinin denklemi

$$\max\{|x-a|,|y-b|\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{|x-a|,|y-b|\} = r$$

dir. Bu çembere göre $P \neq O$ olmak üzere $P = (x,y)$, $P' = (x',y') \in \mathbb{R}_c^2$ invers noktaları

$$d_c(O,P) \cdot d_c(O,P') = r^2$$

şartını sağlarlar. Burada

$$d_{cl}(OP) = \max\{|x-a|, |y-b|\} \text{ ve } d_{cs}(OP) = \min\{|x-a|, |y-b|\}$$

olmak üzere

$$\left(d_{cl}(OP) + \left(\sqrt{2}-1\right) d_{cs}(OP)\right) \cdot \left(d_{cl}(OP') + \left(\sqrt{2}-1\right) d_{cs}(OP')\right) = r^2$$

olur. Ayrıca burada P ve P' noktalarının konumuna göre iki durum ortaya çıkar:

i) $|x-a| \geq |y-b|$ ve $\left|x^{'}-a\right| \geq \left|y^{'}-b\right|$ için

$$\left((x-a) + \left(\sqrt{2}-1\right)(y-b)\right) \cdot \left(\left(x^{'}-a\right) + \left(\sqrt{2}-1\right)\left(y^{'}-b\right)\right) = r^2$$

olup ve$O$,P ,P' doğrudaş olduğundan $x^{'}-a = k(x-a)$ ve $y^{'}-b = k(y-b)$ olacak şekilde $k \in \mathbb{R}$ vardır. Böylece

$$\left((x-a) + \left(\sqrt{2}-1\right)(y-b)\right) \cdot \left(k(x-a) + \left(\sqrt{2}-1\right) k(y-b)\right) = r^2,$$

$$k\left((x-a) + \left(\sqrt{2}-1\right)(y-b)\right)^2 = r^2,$$

$$k = \frac{r^2}{\left((x-a) + \left(\sqrt{2}-1\right)(y-b)\right)^2}$$

olduğundan bulunan k değeri $x^{'}-a = k(x-a)$ ve $y^{'}-b = k(y-b)$ bağıntılarında yerine yazılırsa

$$x' = a + \frac{r^2(x-a)}{((x-a) + \left(\sqrt{2}-1\right)(y-b))^2}$$

$$y' = b + \frac{r^2(y-b)}{\left((x-a) + \left(\sqrt{2}-1\right)(y-b)\right)^2}$$

şeklinde elde edilir.

ii) $|x-a| \leq |y-b|$ ve $\left|x^{'}-a\right| \leq \left|y^{'}-b\right|$ için

$$\left((y-b) + \left(\sqrt{2}-1\right)(x-a)\right) \cdot \left(\left(y^{'}-b\right) + \left(\sqrt{2}-1\right)\left(x^{'}-a\right)\right) = r^2$$

O, P, P' doğrudaş olduğundan $x^{'} - a = k(x-a)$ ve $y^{'} - b = k(y-b)$ olacak şekilde $k \in \mathbb{R}$ vardır. Böylece

$$\left((y-b) + \left(\sqrt{2}-1\right)(x-a)\right) \cdot \left(k(y-b) + \left(\sqrt{2}-1\right) k(x-a)\right) = r^2,$$

$$k\left((y-b) + \left(\sqrt{2}-1\right)(x-a)\right)^2 = r^2,$$

$$k = \frac{r^2}{\left((y-b) + \left(\sqrt{2}-1\right)(x-a)\right)^2}$$

olduğundan bulunan k değeri $x^{'} - a = k(x-a)$ ve $y^{'} - b = k(y-b)$ bağıntılarında yerine yazılırsa

$$x' = a + \frac{r^2(x-a)}{\left((y-b) + \left(\sqrt{2}-1\right)(x-a)\right)^2}$$

$$y' = b + \frac{r^2(y-b)}{\left((y-b) + \left(\sqrt{2}-1\right)(x-a)\right)^2}$$

şeklinde elde edilir.$\square$

Teorem 3.1.4 *O,P, Q noktaları $\mathbb{R}_c^2$ de üç farklı doğrudaş nokta olsun. Eğer Çin dama çemberine göre $I_{(O,r)}$ inversiyonu P yi P' ye ve Q yu Q' ye dönüştürürse*

$$d_c(P', Q') = \frac{r^2 \cdot d_c(P, Q)}{d_c(O, P) \cdot d_c(O, Q)}$$

dir.

İspat: O,P, Q doğrudaş noktaları için P ile P' ve Q ile Q' invers noktalar olduğundan

$$d_c(O, P) \cdot d_c(O, P') = r^2 = d_c(O, Q) \cdot d_c(O, Q')$$

$$\begin{aligned} d_c(P', Q') &= |d_c(O, P') - d_c(O, Q')| \\ &= \left|\frac{r^2}{d_c(O, P)} - \frac{r^2}{d_c(O, Q)}\right| = \left|\frac{r^2\left(d_c(O, Q) - d_c(O, P)\right)}{d_c(O, P) \cdot d_c(O, Q)}\right| \\ &= \frac{r^2 \cdot d_c(P, Q)}{d_c(O, P) \cdot d_c(O, Q)} \end{aligned}$$

elde edilir.$\square$

Örnek 3.1.5 $P=(1,1)$, $Q=(2,2)$, $O=(0,0)$ *doğrudaş noktaları ve* $r=2\sqrt{2}$ *için Çin dama uzaklıkları ve invers noktalar bulunursa*

$d_c(O,P)=\max\{1,1\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\{1,1\}=\sqrt{2},$

$d_c(O,Q)=\max\{2,2\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\{2,2\}=2\sqrt{2},$

$d_c(P,Q)=\max\{1,1\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\{1,1\}=\sqrt{2},$

$d_c(O,P)\cdot d_c(O,P')=r^2$ *eşitliğinden* $d_c(O,P')=4\sqrt{2}$ *ve* $P'\in\overrightarrow{OP}$ *olduğundan* $P'=(4,4),$

$d_c(O,Q)\cdot d_c(O,Q')=r^2$ *eşitliğinden* $d_c(O,Q')=2\sqrt{2}$ *ve* $Q'\in\overrightarrow{OQ}$ *olduğundan* $Q'=(2,2)$ *dir. Buna göre*

$d_c(P',Q')=\max\{2,2\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\{2,2\}=2\sqrt{2},$

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \frac{r^2\cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)} \\ &= \frac{8\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

olur böylece bu noktalar için teorem sağlanır.

Örnek 3.1.6 *Ancak seçilen* $P=(1,0),Q=(2,1),O=(0,0)$ *noktaları ve* $r=2\sqrt{2}$ *için Çin dama uzaklıkları ve invers noktalar bulunursa*

$d_c(O,P)=\max\{1,0\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\{1,0\}=1,$

$d_c(O,Q)=\max\{2,1\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\{2,1\}=1+\sqrt{2},$

$d_c(P,Q)=\max\{1,1\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\{1,1\}=\sqrt{2},$

$d_c(O,P)\cdot d_c(O,P')=r^2$ *den* $d_c(O,P')=8$ *ve* $P'\in\overrightarrow{OP}$ *olduğundan* $P'=(8,0),$

$d_c(O,Q)\cdot d_c(O,Q')=r^2$ *den* $d_c(O,Q')=\frac{8}{2+\sqrt{2}}$ *ve* $Q'\in\overrightarrow{OQ}$ *olduğundan* $Q'=(48-32\sqrt{2},24-16\sqrt{2})$ *dir. Buna göre*

$d_c(P',Q')=8\sqrt{2}-8$

$$8\sqrt{2}-8\neq 16-8\sqrt{2}$$

olduğundan doğrudaş olmayan noktalar için teoremin geçerli olmadığı görülür.

Aşağıdaki teorem O,P,Q noktaları doğrudaş değilken Teorem 3.1.3 ün hangi koşullar altında sağlandığını ifade etmektedir.

Teorem 3.1.7 *O,P,Q noktaları $\mathbb{R}_c^2$ de doğrudaş olmayan üç nokta ve Çin dama çemberine göre $I_{(O,r)}$ inversiyonu P yi P' ye ve Q yu Q' ye dönüştüren bir inversiyon olsun. P ve Q noktaları $P \neq O$ ve $Q \neq O$ olmak üzere, eğimi $D_1 = \{0, \infty\}$, $D_2 = \{+1, -1\}$, $D_3 = \{\sqrt{2}-1, 1-\sqrt{2}\}$, $D_4 = \{-\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1\}$ kümelerinin herhangi birisinin elemanı olan bir doğru üzerinde ise*

$$d_c(P', Q') = \frac{r^2 \cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P) \cdot d_c(O,Q)}$$

dır.

İspat: Öteleme dönüşümü Çin dama uzaklığını koruduğu için $I_{(O,r)}$ inversiyonunun merkezi $O = (0,0)$ orijin olarak düşünülebilir.

1) P ve Q noktaları eğimleri $D_1 = \{0, \infty\}$ olan doğrular üzerinde bulunan noktalar ise $P = (p, 0)$, $Q = (0, q)$, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda görüntüleri (Şekil 3.3.)

$d_c(O,P) = \max\{p, 0\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{p, 0\} = p$,

$d_c(O,Q) = \max\{0, q\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{0, q\} = q$,

$d_c(O,P) \cdot dc(O,P') = r^2$ eşitliğinden $d_c(O,P') = \frac{r^2}{p}$,

$d_c(O,Q) \cdot dc(O,Q') = r^2$ eşitliğinden $d_c(O,Q') = \frac{r^2}{q}$ olup

$$P' = (\frac{r^2}{p}, 0), Q' = (0, \frac{r^2}{q})$$

olur. Buradan da

$$d_c(P', Q') = \max\left\{\left|\frac{r^2}{p}\right|, \left|\frac{r^2}{q}\right|\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\left|\frac{r^2}{p}\right|, \left|\frac{r^2}{q}\right|\right\}$$

elde edilir.

$\left|\frac{r^2}{p}\right| \geq \left|\frac{r^2}{q}\right|$ olması halinde

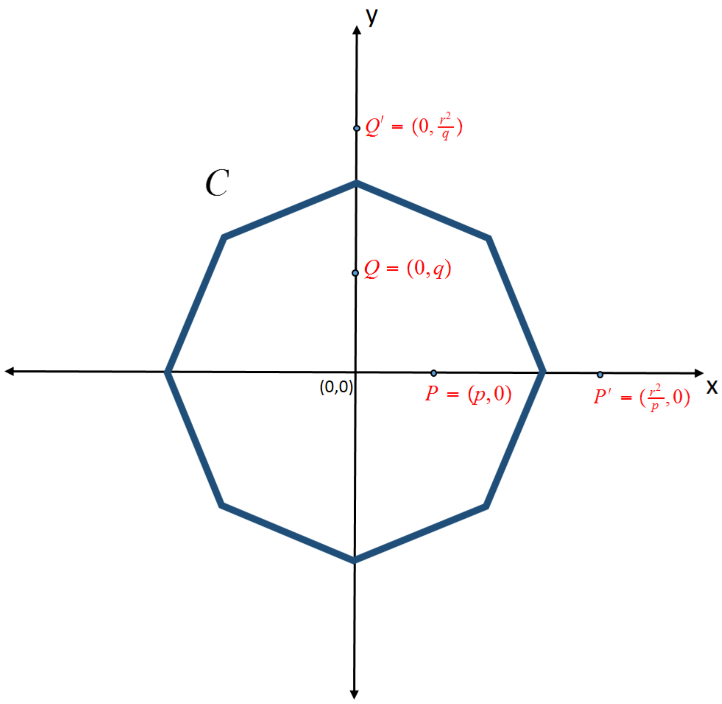
$$d_c(P', Q') = \left|\frac{r^2}{p}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left|\frac{r^2}{q}\right| = \frac{r^2\left(|q| + \left(\sqrt{2}-1\right)|p|\right)}{|p| \cdot |q|} = \frac{r^2 \cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P) \cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

$\left|\frac{r^2}{p}\right| \leq \left|\frac{r^2}{q}\right|$ olması halinde ise

$$d_c(P', Q') = \left|\frac{r^2}{q}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left|\frac{r^2}{p}\right| = \frac{r^2\left(|p| + \left(\sqrt{2}-1\right)|q|\right)}{|p| \cdot |q|} = \frac{r^2 \cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P) \cdot d_c(O,Q)}$$

dir.



Şekil 3.3. Merkezil Çin Dama Çemberine Göre Eksenler Üzerindeki Noktaların İnversleri

2) P ve Q noktaları eğimleri $D_2 = \{+1, -1\}$ olan doğrular üzerinde bulunan noktalar ise $P = (p, p)$, $Q = (q, -q)$ olarak alınabilir. $I_{(O,r)}$ inversiyonunda görüntüleri (Şekil 3.4.)

$d_c(O, P) = \max\{p, p\} + \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\{p, p\} = p\sqrt{2}$,

$d_c(O, Q) = \max\{q, q\} + \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\{q, q\} = q\sqrt{2}$,

$d_c(O, P) \cdot dc(O, P') = r^2$ eşitliğinden $d_c(O, P') = \frac{r^2}{p\sqrt{2}}$,

$d_c(O, Q) \cdot d_c(O, Q') = r^2$ eşitliğinden $d_c(O, Q') = \frac{r^2}{q\sqrt{2}}$ olup

$d_c(P, Q) = \max\{|p - q|, |p + q|\} + \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\{|p - q|, |p + q|\}$ için sekiz farklı durum vardır:

i) $p \geq 0 \geq q$ ve $|p| \geq |q|$ için

$|p - q| + \left(\sqrt{2} - 1\right) |p + q| = +p - q + \left(\sqrt{2} - 1\right) (p + q) = \sqrt{2}p + \left(-2 + \sqrt{2}\right) q$

ii) $p \geq 0 \geq q$ ve $|q| \geq |p|$ için

$|p - q| + \left(\sqrt{2} - 1\right) |p + q| = +p - q + \left(\sqrt{2} - 1\right) (-p - q) = -\sqrt{2}q + \left(2 - \sqrt{2}\right) p$

iii) $q \geq 0 \geq p$ ve $|q| \geq |p|$için

$|p - q| + \left(\sqrt{2} - 1\right) |p + q| = -p + q + \left(\sqrt{2} - 1\right) (p + q) = \sqrt{2}q + \left(-2 + \sqrt{2}\right) p$

iv) $q \geq 0 \geq p$ ve $|p| \geq |q|$için

$|p-q|+\left(\sqrt{2}-1\right)|p+q|=-p+q+\left(\sqrt{2}-1\right)(-p-q)=-\sqrt{2}p+\left(2-\sqrt{2}\right)q$

v) $q\geq p\geq 0$ için

$|p+q|+\left(\sqrt{2}-1\right)|p-q|=p+q+\left(\sqrt{2}-1\right)(-p+q)=\sqrt{2}q+\left(2-\sqrt{2}\right)p$

vi) $p\geq q\geq 0$ için

$|p+q|+\left(\sqrt{2}-1\right)|p-q|=p+q+\left(\sqrt{2}-1\right)(p-q)=\sqrt{2}p+\left(2-\sqrt{2}\right)q$

vii) $0\geq q\geq p$ için

$|p+q|+\left(\sqrt{2}-1\right)|p-q|=-p-q+\left(\sqrt{2}-1\right)(-p+q)=-\sqrt{2}p+\left(-2+\sqrt{2}\right)q$

viii) $0\geq p\geq q$ için

$|p+q|+\left(\sqrt{2}-1\right)|p-q|=-p-q+\left(\sqrt{2}-1\right)(p-q)=-\sqrt{2}q+\left(-2+\sqrt{2}\right)p$

$$P'=\left(\frac{r^2}{2p},\frac{r^2}{2p}\right),Q'=\left(\frac{r^2}{2q},-\frac{r^2}{2q}\right)$$

bulunur. Buradan da

$$d_c(P',Q')=\max\left\{\left|\frac{r^2}{2p}-\frac{r^2}{2q}\right|,\left|\frac{r^2}{2p}+\frac{r^2}{2q}\right|\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\left|\frac{r^2}{2p}-\frac{r^2}{2q}\right|,\left|\frac{r^2}{2p}+\frac{r^2}{2q}\right|\right\}$$

$$\begin{aligned}d_c(P',Q') &= \max\left\{\left|\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{p}-\frac{r^2}{q}\right)\right|,\left|\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{p}+\frac{r^2}{q}\right)\right|\right\}\\ &\quad+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\left|\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{p}-\frac{r^2}{q}\right)\right|,\left|\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{p}+\frac{r^2}{q}\right)\right|\right\}\end{aligned}$$

elde edilir.

$\left|\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{p}+\frac{r^2}{q}\right)\right|\geq\left|\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{p}-\frac{r^2}{q}\right)\right|$ olması halinde (v numaralı durum incelenirse)

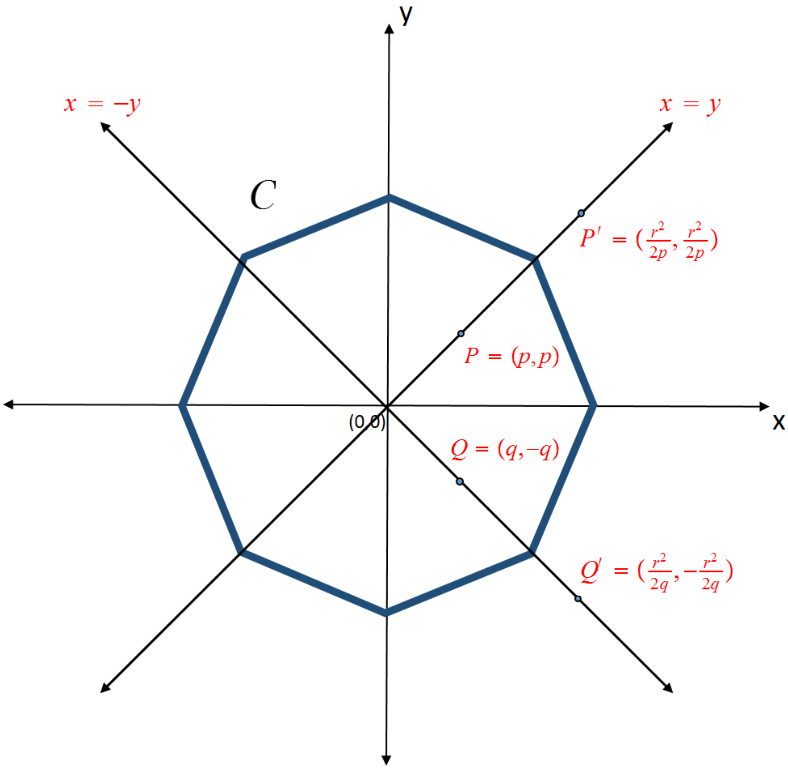
$$\begin{aligned}d_c(P',Q') &= \left|\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{p}+\frac{r^2}{q}\right)\right|+\left(\sqrt{2}-1\right)\left|\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{p}-\frac{r^2}{q}\right)\right|\\ &= \frac{1}{2}r^2\left|\frac{\sqrt{2}}{p}+\frac{2-\sqrt{2}}{q}\right|=\frac{1}{2}\frac{r^2\left(\sqrt{2}q+\left(2-\sqrt{2}\right)p\right)}{|p|\cdot|q|}=\frac{r^2\cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}\end{aligned}$$

olur.

$\left|\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{p}+\frac{r^2}{q}\right)\right|\leq\left|\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{p}-\frac{r^2}{q}\right)\right|$ olması halinde ise (iii numaralı durum incelenirse)

$$\begin{aligned}d_c(P',Q') &= \left|\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{p}-\frac{r^2}{q}\right)\right|+\left(\sqrt{2}-1\right)\left|\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{p}+\frac{r^2}{q}\right)\right|\\ &= \frac{1}{2}r^2\left|\frac{\sqrt{2}}{p}+\frac{\sqrt{2}-2}{q}\right|=\frac{1}{2}\frac{r^2\left(\sqrt{2}q+\left(\sqrt{2}-2\right)p\right)}{|p|\cdot|q|}=\frac{r^2\cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir ve diğer durumlar için benzer ispat yapılır.



Şekil 3.4. $y = x$ ve $y = -x$ Doğruları Üzerindeki İnvers Noktalar

3) P ve Q noktaları eğimleri $D_3 = \{\sqrt{2}-1, 1-\sqrt{2}\}$ olan doğrular üzerinde bulunan noktalar $P = \left(p, p\left(\sqrt{2}-1\right)\right)$, $Q = \left(q, q\left(1-\sqrt{2}\right)\right)$ ise $I_{(O,r)}$ inversiyonunda görüntüleri (Şekil 3.5.)

$d_c(O,P) = \max\left\{p, p\left(\sqrt{2}-1\right)\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{p, p\left(\sqrt{2}-1\right)\right\} = p\left(4-2\sqrt{2}\right),$

$d_c(O,Q) = \max\left\{q, \left|q\left(1-\sqrt{2}\right)\right|\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{q, \left|q\left(1-\sqrt{2}\right)\right|\right\} = q\left(4-2\sqrt{2}\right),$

$d_c(O,P) \cdot d_c(O,P') = r^2$ eşitliğinden $d_c(O,P') = \frac{r^2}{p\left(4-2\sqrt{2}\right)}$,

$d_c(O,Q) \cdot d_c(O,Q') = r^2$ eşitliğinden $d_c(O,Q') = \frac{r^2}{q\left(4-2\sqrt{2}\right)}$ olur. Böylece

$$d_c(P,Q) = \max\left\{|p-q|, \left(\sqrt{2}-1\right)|p+q|\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{|p-q|, \left(\sqrt{2}-1\right)|p+q|\right\}$$

için sekiz farklı durum ortaya çıkar

i) $p \geq 0 \geq q$ ve $|p| \geq |q|$ için $|p-q| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left|p\left(\sqrt{2}-1\right) - q\left(1-\sqrt{2}\right)\right|$

$$= +p-q+\left(3-2\sqrt{2}\right)(p+q) = \left(4-2\sqrt{2}\right)p + \left(2-2\sqrt{2}\right)q$$

ii) $p \geq 0 \geq q$ ve $|q| \geq |p|$ için $|p-q| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left|p\left(\sqrt{2}-1\right) - q\left(1-\sqrt{2}\right)\right|$

$$= \left(-2+2\sqrt{2}\right)p + \left(-4+2\sqrt{2}\right)q$$

iii) $q \geq 0 \geq p$ ve $|q| \geq |p|$için $|p-q| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left|p\left(\sqrt{2}-1\right) - q\left(1-\sqrt{2}\right)\right|$

$$= \left(2-2\sqrt{2}\right)p + \left(4-2\sqrt{2}\right)q$$

iv) $q \geq 0 \geq p$ ve $|p| \geq |q|$için $|p-q| + \left|\left(\sqrt{2}-1\right)p\left(\sqrt{2}-1\right) - q\left(1-\sqrt{2}\right)\right|$

$$= \left(-4+2\sqrt{2}\right)p + \left(-2+2\sqrt{2}\right)q$$

v) $q \geq p \geq 0$ için $\left|p\left(\sqrt{2}-1\right) - q\left(1-\sqrt{2}\right)\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)|p-q|$

$$= \left(\sqrt{2}-1\right)(p+q) + \left(\sqrt{2}-1\right)(-p+q) = \left(2\sqrt{2}-2\right)q$$

vi) $p \geq q \geq 0$ için $\left|p\left(\sqrt{2}-1\right) - q\left(1-\sqrt{2}\right)\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)|p-q|$

$$= \left(\sqrt{2}-1\right)(p+q) + \left(\sqrt{2}-1\right)(p-q) = \left(2\sqrt{2}-2\right)p$$

vii) $0 \geq q \geq p$ için $\left|p\left(\sqrt{2}-1\right) - q\left(1-\sqrt{2}\right)\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)|p-q|$

$$= \left(\sqrt{2}-1\right)(-p-q) + \left(\sqrt{2}-1\right)(-p+q) = \left(-2\sqrt{2}+2\right)p$$

viii) $0 \geq p \geq q$ için $\left|p\left(\sqrt{2}-1\right) - q\left(1-\sqrt{2}\right)\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)|p-q|$

$$= \left(\sqrt{2}-1\right)(-p-q) + \left(\sqrt{2}-1\right)(p-q) = \left(-2\sqrt{2}+2\right)q$$

$$P' = \left(p', p'\left(\sqrt{2}-1\right)\right), Q' = \left(q', q'\left(1-\sqrt{2}\right)\right)$$

elde edilir. p' ve q' sırasıyla p ve q cinsinden yazılırsa

$$P' = \left(\frac{r^2}{8p(\sqrt{2}-1)^2}, \frac{r^2}{8p(\sqrt{2}-1)}\right),\ Q' = \left(\frac{r^2}{8q(\sqrt{2}-1)^2}, -\frac{r^2}{8q(\sqrt{2}-1)}\right)$$

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \max\left\{\frac{r^2}{8(\sqrt{2}-1)^2}\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|, \frac{r^2}{8(\sqrt{2}-1)}\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|\right\} \\ &\quad + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\frac{r^2}{8(\sqrt{2}-1)^2}\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|, \frac{r^2}{8(\sqrt{2}-1)}\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|\right\} \end{aligned}$$

elde edilir.

$\left|\frac{r^2}{8(\sqrt{2}-1)^2}\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|\right| \geq \left|\frac{r^2}{8(\sqrt{2}-1)}\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|\right|$ olması halinde (v numaralı durum incelenirse)

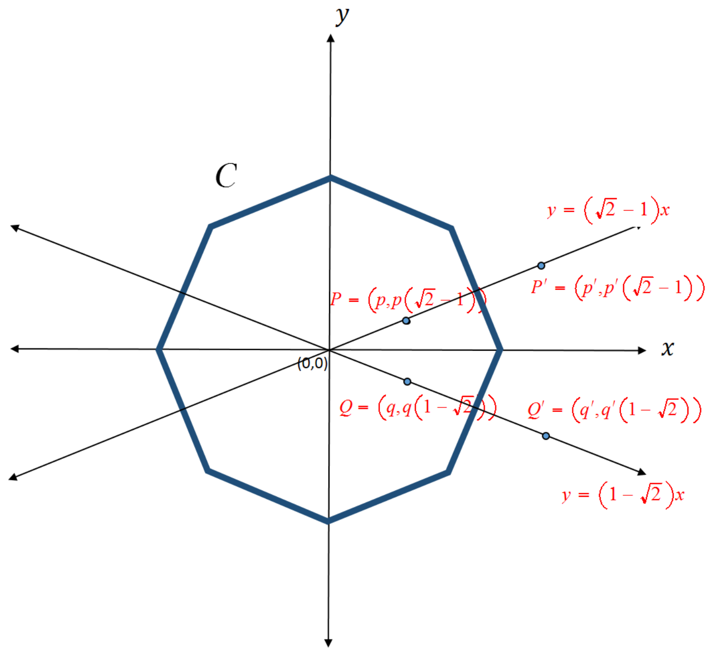
$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \frac{r^2}{8(\sqrt{2}-1)^2}\frac{q-p}{pq} + \frac{r^2}{8}\frac{q+p}{pq} = \frac{r^2}{8pq}\left(\frac{q-p}{(\sqrt{2}-1)^2} + \frac{q+p}{1}\right) \\ &= \frac{r^2\left(q-p+(3-2\sqrt{2})(q+p)\right)}{8(3-2\sqrt{2})\,|p|\cdot|q|} = \frac{r^2\cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)} \end{aligned}$$

olur.

$\left|\frac{r^2}{8(\sqrt{2}-1)^2}\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|\right| \leq \left|\frac{r^2}{8(\sqrt{2}-1)}\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|\right|$ olması halinde ise (vi numaralı durum incelenirse)

$$
\begin{aligned}
d_c(P',Q') &= \frac{r^2}{8(\sqrt{2}-1)}\frac{q+p}{pq}+\frac{r^2}{8(\sqrt{2}-1)}\frac{q-p}{pq}=\frac{r^2}{8pq}\left(\frac{q+p}{(\sqrt{2}-1)}+\frac{q-p}{(\sqrt{2}-1)}\right)\\
&= \frac{r^2 q}{4(\sqrt{2}-1)pq}=\frac{r^2\left(2\sqrt{2}-2\right)q}{p\left(4-2\sqrt{2}\right)\cdot q\left(4-2\sqrt{2}\right)}=\frac{r^2\cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}
\end{aligned}
$$

diğer durumlar da benzer ispat yapılır.



Şekil 3.5. $y=\mp\left(\sqrt{2}-1\right)x$ Doğruları Üzerindeki İnvers Noktalar

4) P ve Q noktaları eğimleri $\{-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1\}$ olan doğrular üzerinde bulunan noktalar $P=\left(p,p\left(-\sqrt{2}-1\right)\right)$, $Q=\left(q,q\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda görüntüleri (Şekil 3.6.)

$d_c(O,P)=\max\left\{|p|,\left|p\left(-\sqrt{2}-1\right)\right|\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{|p|,\left|p\left(-\sqrt{2}-1\right)\right|\right\}=2\sqrt{2}p,$

$d_c(O,Q)=\max\left\{|q|,\left|q\left(\sqrt{2}+1\right)\right|\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{|q|,\left|q\left(\sqrt{2}+1\right)\right|\right\}=2\sqrt{2}q,$

$d_c(O,P)\cdot d_c(O,P')=r^2$ eşitliğinden $d_c(O,P')=\frac{r^2}{2\sqrt{2}p},$

$d_c(O,Q)\cdot d_c(O,Q')=r^2$ eşitliğinden $d_c(O,Q')=\frac{r^2}{2\sqrt{2}q}$

$$d_c(P,Q)=\max\left\{|p-q|,\left(\sqrt{2}+1\right)|p+q|\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{|p-q|,\left(\sqrt{2}+1\right)|p+q|\right\}$$

sekiz ayrı durum ortaya çıkar:

i) $p\geq 0\geq q$ ve $|p|\geq|q|$ için $|p-q|+\left(\sqrt{2}-1\right)\left|p\left(-\sqrt{2}-1\right)-q\left(\sqrt{2}+1\right)\right|$

$$=+p-q+p+q=2p$$

ii) $p \geq 0 \geq q$ ve $|q| \geq |p|$ için $|p-q| + \left(\sqrt{2}-1\right) \left|p\left(-\sqrt{2}-1\right) - q\left(\sqrt{2}+1\right)\right|$

$$= +p - q - p - q = -2q$$

iii) $q \geq 0 \geq p$ ve $|q| \geq |p|$için $|p-q| + \left(\sqrt{2}-1\right) \left|p\left(-\sqrt{2}-1\right) - q\left(\sqrt{2}+1\right)\right|$

$$= -p + q + p + q = 2q$$

iv) $q \geq 0 \geq p$ ve $|p| \geq |q|$için $|p-q| + \left(\sqrt{2}-1\right) \left|p\left(-\sqrt{2}-1\right) - q\left(\sqrt{2}+1\right)\right|$

$$= -p + q - p - q = -2p$$

v) $q \geq p \geq 0$ için $\left|p\left(-\sqrt{2}-1\right) - q\left(\sqrt{2}+1\right)\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)|p-q|$

$$= \left(\sqrt{2}+1\right)(p+q) + \left(\sqrt{2}-1\right)(-p+q) = 2p + 2\sqrt{2}q$$

vi) $p \geq q \geq 0$ için $\left|p\left(-\sqrt{2}-1\right) - q\left(\sqrt{2}+1\right)\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)|p-q|$

$$= \left(\sqrt{2}+1\right)(p+q) + \left(\sqrt{2}-1\right)(p-q) = 2\sqrt{2}p + 2q$$

vii) $0 \geq q \geq p$ için $\left|p\left(-\sqrt{2}-1\right) - q\left(\sqrt{2}+1\right)\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)|p-q|$

$$= \left(\sqrt{2}+1\right)(-p-q) + \left(\sqrt{2}-1\right)(-p+q) = -2\sqrt{2}p - 2q$$

viii) $0 \geq p \geq q$ için $\left|p\left(-\sqrt{2}-1\right) - q\left(\sqrt{2}+1\right)\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)|p-q|$

$$= \left(\sqrt{2}+1\right)(-p-q) + \left(\sqrt{2}-1\right)(p-q) = -2\sqrt{2}q - 2p$$

olup

$$P' = \left(p', p'\left(-\sqrt{2}-1\right)\right), Q' = \left(q', q'\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$$

olur. p' ve q' sırasıyla p ve q cinsinden yazılırsa

$$P' = \left(\frac{r^2}{8p}, \frac{r^2\left(-\sqrt{2}-1\right)}{8p}\right), Q' = \left(\frac{r^2}{8q}, \frac{r^2\left(\sqrt{2}+1\right)}{8q}\right)$$

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \max\left\{\left|\frac{r^2}{8p} - \frac{r^2}{8q}\right|, \left|\frac{r^2\left(-\sqrt{2}-1\right)}{8p} - \frac{r^2\left(\sqrt{2}+1\right)}{8q}\right|\right\} \\ &\quad + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\left|\frac{r^2}{8p} - \frac{r^2}{8q}\right|, \left|\frac{r^2\left(-\sqrt{2}-1\right)}{8p} - \frac{r^2\left(\sqrt{2}+1\right)}{8q}\right|\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \max\left\{\frac{r^2}{8}\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right|, \frac{r^2}{8}\left(\sqrt{2}+1\right)\left|\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right|\right\} \\ &\quad + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\frac{r^2}{8}\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right|, \frac{r^2}{8}\left(\sqrt{2}+1\right)\left|\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right|\right\} \end{aligned}$$

elde edilir.

$\frac{r^2}{8}\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right| \geq \frac{r^2}{8}\left(\sqrt{2}+1\right)\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|$ olması halinde (iii numaralı durum incelenirse)

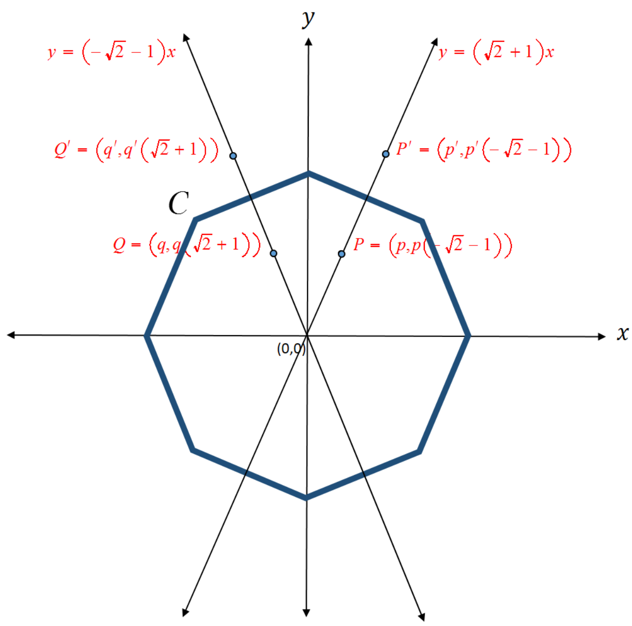
$$\begin{aligned} d_c(P', Q') &= \frac{r^2}{8}\frac{q-p}{pq} + \left(\sqrt{2}-1\right)\frac{r^2}{8}\left(\sqrt{2}+1\right)\frac{q+p}{pq} = \frac{r^2}{8pq}\left(q-p+q+p\right) \\ &= \frac{r^2 q}{4pq} = \frac{r^2 \cdot 2q}{2\sqrt{2}p \cdot 2\sqrt{2}q} = \frac{r^2 \cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)} \end{aligned}$$

olur.

$\frac{r^2}{8}\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right| \leq \frac{r^2}{8}\left(\sqrt{2}+1\right)\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|$ olması halinde ise (v numaralı durum incelenirse)

$$\begin{aligned} d_c(P', Q') &= \frac{r^2}{8}\left(\sqrt{2}+1\right)\frac{q+p}{pq} + \left(\sqrt{2}-1\right)\frac{r^2}{8}\frac{q-p}{pq} = \frac{r^2}{8pq}\left(2\sqrt{2}q+2p\right) \\ &= \frac{r^2\left(2\sqrt{2}q+2p\right)}{2\sqrt{2}p \cdot 2\sqrt{2}q} = \frac{r^2 \cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)} \end{aligned}$$

diğer durumlar da benzer şekilde yapılır. □



Şekil 3.6. $y = \mp\left(\sqrt{2}+1\right)x$ Doğruları Üzerindeki İnvers Noktalar

3.2 Çifte Oran

$\mathbb{R}_c^2$ de l doğrusu üzerindeki A ve B noktaları için A dan B ye yönlü Çin dama uzaklığı $d_c[AB]$ ile gösterilsin. Eğer ışının başlangıç noktası A ve B yi içeriyorsa pozitif yönlü yönelme olup

$$d_c[AB] = d_c\left(A, B\right),$$

ışın ters yönlü ise negatif yönlü yönelmedir ve

$$d_c[AB] = -d_c\left(A, B\right)$$

dir.

Tanım 3.2.1 $\mathbb{R}_c^2$ *de bir yönlendirilmiş doğru üzerinde dört farklı nokta* A, B, C, D *olsun. Bu noktaların Çin dama çifte oranı* $(AB, CD)_c$

$$(AB, CD)_c = \frac{d_c[AC]}{d_c[AD]} \cdot \frac{d_c[BD]}{d_c[BC]}$$

ile tanımlanır.

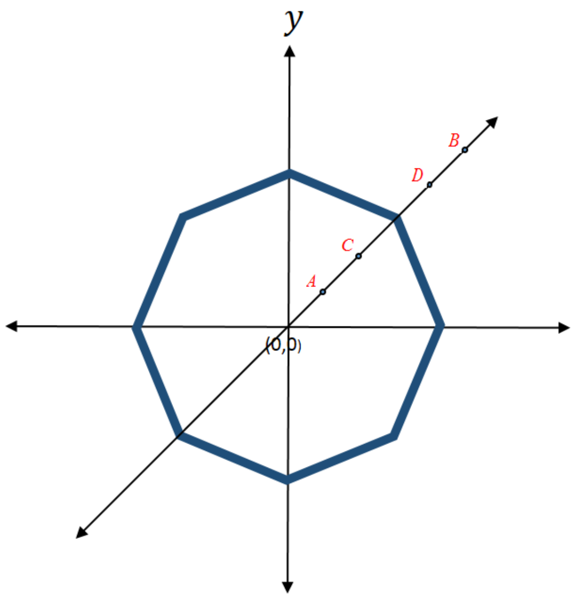
C ve D nin her ikisi de A ve B arasındaysa çifte oran pozitiftir. C ve D , A ile B nin arasında değilse de poziftir. Ancak $\{A, B\}$ ve $\{C, D\}$ çiftleri birbirlerinden ayrı olurlarsa negatiftir. Öklidyen düzlemde iyi bilinen bir özellik olarak çemberin merkezi A, B, C, D den herhangi biri değilse çifte oran inversiyon altında invaryant kalır. Bu özellik Çin dama düzleminde de geçerlidir.

Merkezil Çin dama birim çemberine göre inversiyon altında aşağıdaki örnekler verilebilir:

Örnek 3.2.2 $\mathbb{R}_c^2$ *deki* $A = (1,1), B = (4,4), C = (2,2), D = (3,3)$ *noktaları için Çin dama uzaklıkları ve çifte oran hesaplanırsa*

$d_c\left(A, C\right) = \max\{1,1\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{1,1\} = \sqrt{2},$
$d_c\left(B, D\right) = \max\{1,1\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{1,1\} = \sqrt{2},$
$d_c\left(A, D\right) = \max\{2,2\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{2,2\} = 2\sqrt{2},$
$d_c\left(B, C\right) = \max\{2,2\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{2,2\} = 2\sqrt{2}$ *olup,*

$(AB,CD)_c = \frac{d_c[AC]}{d_c[AD]} \cdot \frac{d_c[BD]}{d_c[BC]} = \frac{d_c(A,C)}{d_c(A,D)} \cdot \frac{-d_c(B,D)}{-d_c(B,C)} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$ olur (Şekil 3.7.). Bu durumda C ve D noktaları, A ve B noktalarının arasında ise çifte oran pozitiftir.

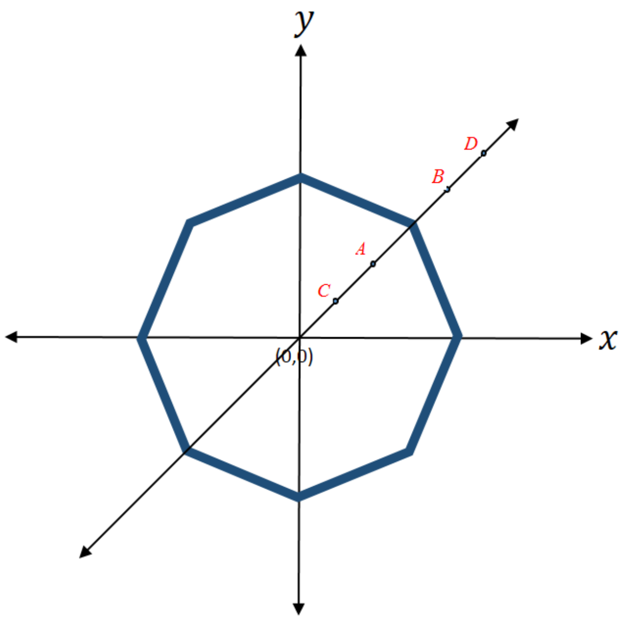


Şekil 3.7. Merkezil Çin Dama Çemberinde Çifte Oran

Örnek 3.2.3 $\mathbb{R}^2_c$ *deki* $A = (2,2), B = (3,3), C = (1,1), D = (4,4)$ *noktaları için Çin dama uzaklıkları ve çifte oran hesaplanırsa*

$$d_c(A,C) = \max\{1,1\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{1,1\} = \sqrt{2},$$
$$d_c(B,D) = \max\{1,1\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{1,1\} = \sqrt{2},$$
$$d_c(A,D) = \max\{2,2\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{2,2\} = 2\sqrt{2},$$
$$d_c(B,C) = \max\{2,2\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{2,2\} = 2\sqrt{2} \text{ } \textit{olup,}$$

$(AB,CD)_c = \frac{d_c[AC]}{d_c[AD]} \cdot \frac{d_c[BD]}{d_c[BC]} = \frac{-d_c(A,C)}{d_c(A,D)} \cdot \frac{d_c(B,D)}{-d_c(B,C)} = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$ olur (Şekil 3.8.). Bu durumda A ve B noktaları, C ve D noktalarının arasında ise çifte oran pozitiftir.



Şekil 3.8. Merkezil Çin Dama Çemberinde Çifte Oran

Örnek 3.2.4 $\mathbb{R}_c^2$ *deki* $A = (2,2), B = (4,4), C = (1,1), D = (3,3)$ *noktaları için Çin dama uzaklıkları ve çifte oran hesaplanırsa*

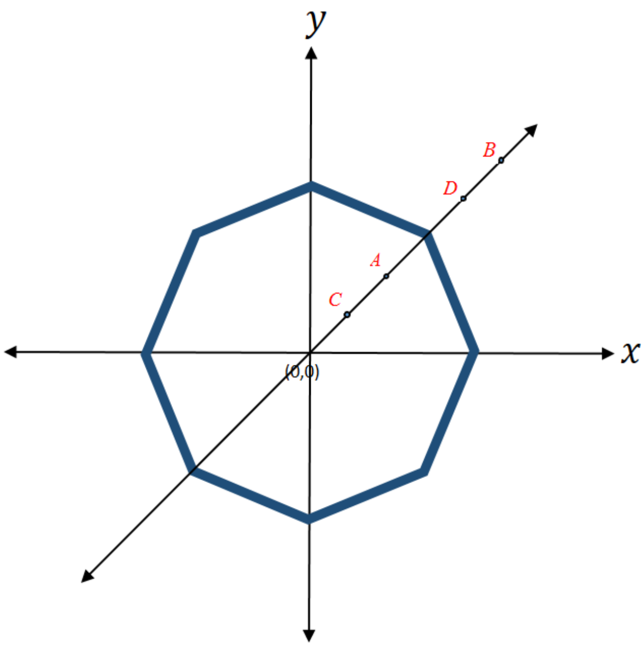
$$d_c(A,C) = \max\{1,1\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{1,1\} = \sqrt{2},$$

$$d_c(B,D) = \max\{1,1\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{1,1\} = \sqrt{2},$$

$$d_c(A,D) = \max\{1,1\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{1,1\} = \sqrt{2},$$

$$d_c(B,C) = \max\{3,3\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{3,3\} = 3\sqrt{2} \text{ } \textit{olup,}$$

$(AB,CD)_c = \frac{d_c[AC]}{d_c[AD]} \cdot \frac{d_c[BD]}{d_c[BC]} = \frac{-d_c(A,C)}{d_c(A,D)} \cdot \frac{-d_c(B,D)}{-d_c(B,C)} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{-3\sqrt{2}} = \frac{-1}{3}$ olur (Şekil 3.9.). Bu durumda C ve D noktaları A ve B noktalarının arasında değil ise çifte oran negatiftir.



Şekil 3.9. Merkezil Çin Dama Çemberinde Çifte Oran

Teorem 3.2.5 $\mathbb{R}_c^2$ *de* O *merkezli,* r *yarıçaplı Çin dama çemberine göre* $I_{(O,r)}$ *inversiyonu çifte oranı korur.*

İspat: A, B, C, D, $\mathbb{R}_c^2$ de dört doğrudaş nokta olsun. $I_{(O,r)}$ inversiyonu A, B, C, D yi sırasıyla A', B', C', D' ye eşlesin. Çin dama çemberine göre inversiyonu alınan noktalar arasındaki uzaklığın yönünü inversiyon alınmadan önceki yöne göre tersine dönüştürdüğünden dolayı açıkça inversiyon altında $\{A, B\}$ ve $\{C, D\}$ çiftleri ayrılmayı ya da ayrılamamayı korurlar. Böylece

$$\left|(A'B', C'D')_c\right| = |(AB, CD)_c|$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Teorem 3.1.3 den dolayı

$$\begin{aligned}
\left|(A'B', C'D')_c\right| &= \left|\frac{d_c\left[A'C'\right]}{d_c\left[A', D'\right]} \cdot \frac{d_c\left[B', D'\right]}{d_c\left[B', C'\right]}\right| = \frac{d_c\left(A', C'\right)}{d_c\left(A', D'\right)} \cdot \frac{d_c\left(B', D'\right)}{d_c\left(B', C'\right)} \\
&= \frac{\frac{r^2 \cdot d_c(A,C)}{d_c(O,A) \cdot d_c(O,C)}}{\frac{r^2 \cdot d_c(A,D)}{d_c(O,A) \cdot d_c(O,D)}} \cdot \frac{\frac{r^2 \cdot d_c(B,D)}{d_c(O,B) \cdot d_c(O,D)}}{\frac{r^2 \cdot d_c(B,C)}{d_c(O,B) \cdot d_c(O,C)}} = \frac{d_c\left(A, C\right)}{d_c\left(A, D\right)} \cdot \frac{d_c\left(B, D\right)}{d_c\left(B, C\right)} \\
&= \frac{d_c\left[A, C\right]}{d_c\left[A, D\right]} \cdot \frac{d_c\left[B, D\right]}{d_c\left[B, C\right]} = |(AB, CD)_c|
\end{aligned}$$

elde edilir. □

3.3 Harmonik Eşlenikler

Tanım 3.3.1 *A ve B, $\mathbb{R}_c^2$ de bir l doğrusu üzerindeki iki nokta olsun. l üzerindeki $\{C, D\}$ çifti için*

$$\frac{d_c[AC]}{d_c[CB]} = \frac{d_c[AD]}{d_c[DB]}$$

eşitliği sağlanıyorsa A ve B harmonik olarak bölünür denir. C ve D noktalarına da A ve B ye göre Çin dama harmonik eşlenikler denir ve $H(AB, CD)_c$ ile gösterilir. C ve D noktaları A ve B ye göre Çin dama harmonik eşlenik olması için gerek ve yeter koşulun $(AB, CD)_c = -1$ olduğu açıktır.

Teorem 3.3.2 *C, $O = (0,0)$ merkezli Çin dama çemberi ve $[A, B]$ doğru parçası C nin çapı olsun. P ve P' noktaları $\overrightarrow{OA}$ ışınının farklı noktaları olsunlar ki bu noktalar $[A, B]$ yi içten ve dıştan bölerler. P ve P' noktalarının A ve B ye göre Çin dama harmonik eşlenik olması için gerek ve yeter koşul P ve P' noktalarının Çin dama çemberine göre $I_{(O,r)}$ inversiyonunda invers noktalar olmasıdır.*

İspat: P ve P' noktaları A ve B ye göre Çin dama harmonik eşlenikler olsunlar. Böylece

$$(AB, PP')_c = -1,$$

$$\frac{d_c[AP]}{d_c[AP']} \cdot \frac{d_c[BP']}{d_c[BP]} = -1$$

olduğundan P noktası $[AB]$ doğru parçasını içten böler ve P, OB ışını üzerinde olduğundan $d_c(P, B) = r -\ d_c(O, P)$ ve $d_c(A, P) = r +\ d_c(O, P)$ dır. P' noktası $[A, B]$ doğru parçasını dıştan böler ve P', OB ışını üzerinde olduğundan $d_c(A, P') = r +\ d_c(O, P')$ ve $d_c(B, P') = -r +\ d_c(O, P')$ dür.

Böylece

$$\frac{r + \ d_c(O, P)}{r + \ d_c(O, P')} \cdot \frac{-r + \ d_c(O, P')}{-r + \ d_c(O, P)} = -1,$$

$$(r + d_c(O,P)) \cdot (-r + d_c(O,P')) = (r + d_c(O,P')) \cdot (r - d_c(O,P))$$

olur. Buradan $d_c(O,P)\, d_c(O,P') = r^2$ elde edilir. Böylece P ve P' noktalarının Çin dama çemberine göre $I_{(O,r)}$ inversiyonu altında invers noktalar olduğu ortaya çıkar.

Tersine P ve P' noktaları Çin dama çemberine göre $I_{(O,r)}$ inversiyonunda invers noktalar ise $(AB, PP')_c = -1$ olması ispatı benzerdir. $\square$

4. 3-BOYUTLU TAKSİ UZAYINDA TAKSİ KÜRESEL İNVERSİYONLAR

K. Menger analitik düzlemde herhangi iki nokta arasındaki uzaklık için iyi bilinen Öklidyen metrik yerine Minkowski tarafından geliştirilen (Minkowski, 1967) taksi metriğini kullanarak taksi düzlem geometri geliştirdi (Menger, 1952). Ardından taksi geometri, zaman içinde pekçok matematikçi ve fizikçi tarafından çalışılıp geliştirildi (Gelişgen, Kaya, 2008), (Akça, Kaya, 2006), (Bayar, Ekmekçi, 2014), (Özcan, Kaya, 2002), (Kaya, Akça, Günaltılı, Özcan, 2000), (Kaya, Çolakoglu, 2006), (Ramirez, Rubiano, 2016). Taksi uzayındaki noktalar, doğrular ve düzlemler Öklid uzayındaki noktaların, doğruların ve düzlemlerin aynısıdır. Açı ölçümü de Öklidyen uzaydaki ile aynıdır. Ancak uzaklık fonksiyonu farklıdır.

$A = (x_1, y_{1,} z_1), B = (x_2, y_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$ için Öklid uzaklık fonksiyonu

$$d(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

iken taksi uzaklık fonksiyonu

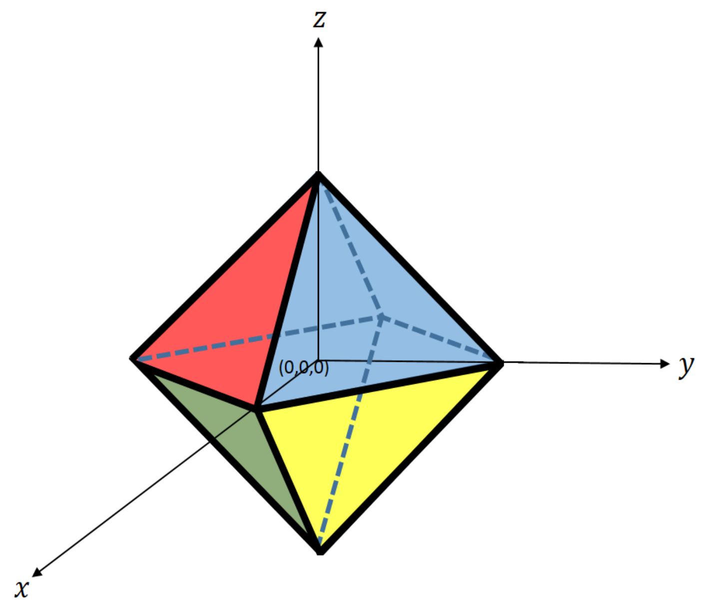
$$d_T(A,B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|$$

olarak tanımlanır.

$\mathbb{R}^3_T$, 3-boyutlu taksi uzayındaki birim küre

$$|x| + |y| + |z| = 1$$

denklemini sağlayan (x, y, z) noktalarının geometrik yeridir (Şekil 4.1.).



Şekil 4.1. Merkezil Taksi Birim Küre

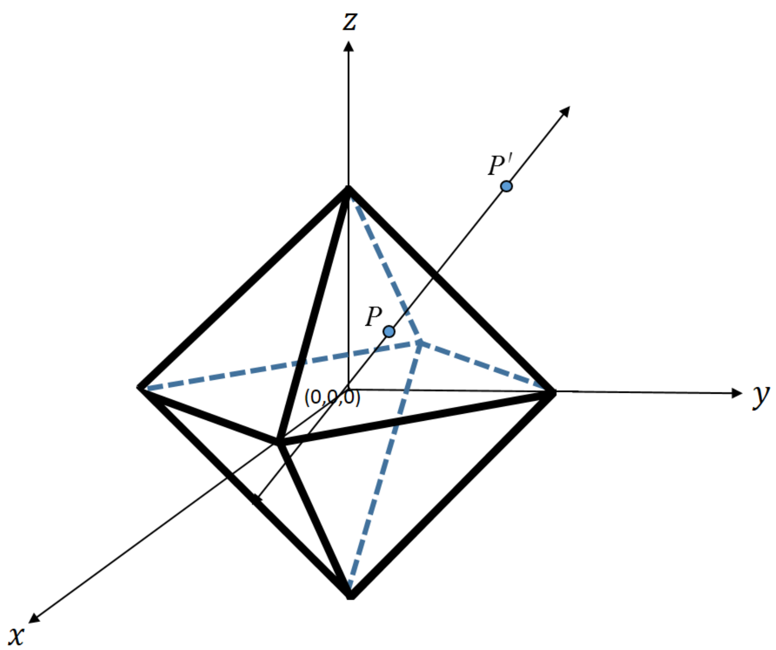
4.1 Taksi Küresel İnversiyonlar

S taksi küresi merkezi O olan r yarıçaplı küre olsun. S taksi küresine göre inversiyon $I_{(O,r)}$ ile gösterilir ve

$$I_{(O,r)} : \mathbb{R}^3_T - \{O\} \to \mathbb{R}^3_T - \{O\}$$

$$I_{(O,r)}(P) = P'$$

biçiminde tanımlanır. Burada P' noktası, OP ışını üzerindedir. Ayrıca $OP \cdot OP' = r^2$ dir ve r, S taksi küresinin yarıçapıdır. P' noktasına P noktasının S taksi küresine göre taksi küresel inversi, (Şekil 4.2). O ya da inversiyon merkezi denir. Bir S küresine göre taksi inversiyonu involusyonludur. Yani her $P \in \mathbb{R}^3_T - \{O\}$ için $I_{(O,r)}(I_{(O,r)}(P)) = P$ dir.



Şekil 4.2. Merkezil Taksi Kürede İnvers Noktalar

Örnek 4.1.1 *$\mathbb{R}^3_T$ de $O = (0,0,0)$, $r = 1$ ve $P = (1,0,0)$ noktası için P' noktası şöyle bulunur:*

$$d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') = 1,$$

$$1 \cdot d_T(O,P') = 1$$

$$P' = (1,0,0) = P.$$

Örnek 4.1.2 *$\mathbb{R}^3_T$ de $O = (0,0,0)$ $r = 1$ ve $P = (1,1,1)$ noktası için P' noktası şöyle bulunur:*

$$d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') = 1,$$

$$3 \cdot d_T(O,P') = 1$$

olup O, P, P' doğrudaş olduğundan

$$P' = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Örnek 4.1.3 $\mathbb{R}_T^3$ *de* $O=(0,0,0)$ $r=2$ *ve* $P=(0,3,3)$ *noktası için* P' *noktası şöyle bulunur:*

$$d_T(O,P)\cdot d_T(O,P')=4,$$

$$6\cdot d_T(O,P')=4,$$

$$P'=\left(0,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).$$

Teorem 4.1.4 $\mathbb{R}_T^3$ *de merkezi* $O=(0,0,0)$ *olan* r *yarıçaplı* S *taksi küresi için* $P\neq O$ *olmak üzere* $P=(x,y,z)$ *ve* $P'=(x',y',z')$ *noktaları* $I_{(O,r)}$ *taksi küresel inversiyonuna göre invers noktalar iseler* P *ile* P' *noktaları arasında*

$$x'=\frac{r^2x}{(|x|+|y|+|z|)^2},$$

$$y'=\frac{r^2y}{(|x|+|y|+|z|)^2},$$

$$z'=\frac{r^2z}{(|x|+|y|+|z|)^2}$$

bağıntıları vardır.

İspat: $\mathbb{R}_T^3$ de S, merkezi $O=(0,0,0)$ olan r yarıçaplı taksi küresi, $P=(x,y,z)$, $P'=(x',y',z')\in\mathbb{R}_T^3$ olsun. Buna göre P ve P' invers noktalar olduğundan inversiyon tanımı gereğince

$$d_T(O,P)\cdot d_T(O,P')=r^2$$

ve O,P ,P' doğrudaş noktalar olup $P'\in\overrightarrow{OP}$ dir. Bu taktirde $x^{'}=kx$, $y^{'}=ky$ ve $z^{'}=kz$ olacak şekilde $k\in\mathbb{R}$ vardır. Böylece

$$k\cdot d_T(O,P)=d_T(O,P')$$

$$k\cdot d_T(O,P)^2=r^2$$

$$k=\frac{r^2}{d_T(O,P)^2}=\frac{r^2}{(|x|+|y|+|z|)^2}$$

olarak bulunur ve bulunan k değeri yerine konulursa

$$x'=\frac{r^2x}{(|x|+|y|+|z|)^2},$$

$$y' = \frac{r^2 y}{(|x|+|y|+|z|)^2} \ ,$$
$$z' = \frac{r^2 z}{(|x|+|y|+|z|)^2}$$

şeklinde elde edilir. □

Teorem 4.1.5 *$\mathbb{R}^3_T$ de merkezi $O=(a,b,c)$ olan r yarıçaplı S taksi küresi için $P \neq O$ olmak üzere*

$P=(x,y,z)$ ve $P'=(x',y',z')$ noktaları $I_{(O,r)}$ taksi küresel inversiyonuna göre invers noktalar iseler P ile P' arasında

$$x' = a + \frac{r^2(x-a)}{(|x-a|+|y-b|+|z-c|)^2} \ ,$$
$$y' = b + \frac{r^2(y-b)}{(|x-a|+|y-b|+|z-c|)^2} \ ,$$
$$z' = c + \frac{r^2(z-c)}{(|x-a|+|y-b|+|z-c|)^2}$$

bağlantısı vardır.

İspat: $\mathbb{R}^3_T$ de S merkezi $O=(a,b,c)$ olan r yarıçaplı taksi küresi ve $P=(x,y,z)$, $P'=(x',y',z') \in \mathbb{R}^3_T$ olsun. Ayrıca P ile P' invers noktalar olsun. Taksi 3-uzayında öteleme dönüşümü uzaklıkları korur. Yani $(0,0,0)$ dan (a,b,c) ye olan öteleme dönüşümü ile (x',y',z') değerleri bulunabilir.

$$|x-a|+|y-b|+|z-c| = r,$$

$$d_T(O,P)\cdot d_T(O,P') = r^2$$

O,P ,P' doğrudaş noktalar ve $P' \in \overrightarrow{OP}$ olsunlar. Buna göre $x^{'}-a = k(x-a)$, $y^{'}-b = k(y-b)$ ve $z^{'}-c = k(z-c)$ olacak şekilde $k \in \mathbb{R}$ vardır. Böylece

$$k\cdot d_T(O,P) = d_T(O,P')$$

$$k\cdot d_T(O,P)^2 = r^2$$

$$k = \frac{r^2}{d_T(O,P)^2} = \frac{r^2}{(|x-a|+|y-b|+|z-c|)^2}$$

olarak bulunur ve k nın bu değeri yerine konulursa

$$x' = a + \frac{r^2(x-a)}{(|x-a|+|y-b|+|z-c|)^2}$$

$$y' = b + \frac{r^2(y-b)}{(|x-a|+|y-b|+|z-c|)^2}$$

$$z' = c + \frac{r^2(z-c)}{(|x-a|+|y-b|+|z-c|)^2}$$

şeklinde elde edilir. □

Teorem 4.1.6 *O, P, Q noktaları $\mathbb{R}^3_T$ de üç farklı doğrudaş nokta olsun. Eğer $I_{(O,r)}$ taksi küresel inversiyonu P yi P' ye ve Q yu Q' ye dönüştürürse*

$$d_T(P', Q') = \frac{r^2 \cdot d_T(P,Q)}{d_T(O,P) \cdot d_T(O,Q)}$$

dir.

İspat: *O,P, Q doğrudaş noktaları için P ile P' ve Q ile Q' invers noktalar olduğundan*

$$d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') = r^2 = d_T(O,Q) \cdot d_T(O,Q')$$

$$\begin{aligned} d_T(P',Q') &= |d_T(O,P') - d_T(O,Q')| \\ &= \left| \frac{r^2}{d_T(O,P)} - \frac{r^2}{d_T(O,Q)} \right| = \left| \frac{r^2\left(d_T(O,Q) - d_T(O,P)\right)}{d_T(O,P) \cdot d_T(O,Q)} \right| \\ &= \frac{r^2 \cdot d_T(P,Q)}{d_T(O,P) \cdot d_T(O,Q)} \end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 4.1.7 *O,P, Q noktaları $\mathbb{R}^3_T$ de doğrudaş olmayan üç nokta ve $P \neq O$, $Q \neq O$ olsun. $I_{(O,r)}$ taksi küresel inversiyonu P yi P' ye ve Q yu Q' ye dönüştüren bir inversiyon olsun. P ve Q noktaları doğrultusu*

$$D_1 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\},$$

veya

$$D_2 = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,-1,0), (1,0,-1), (0,1,-1)\},$$

veya

$$D_3 = \{(1,1,1), (-1,1,1)(1,-1,1), (1,1,-1)\}$$

kümelerinin herhangi birinin elemanı olan doğrular üzerinde ise

$$d_T(P', Q') = \frac{r^2 \cdot d_T(P,Q)}{d_T(O,P) \cdot d_T(O,Q)}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Öteleme 3-boyutlu taksi uzayında izometri olduğundan dolayı $I_{(O,r)}$ inversiyonun merkezini $O = (0,0,0)$ orijin olarak almak genelliği bozmaz.

I. Durum $P, Q \in D_1$ için

1) P ve Q noktaları $P = (p,0,0)$, $Q = (0,q,0)$ olsun. $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,P) = p$, Q noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,Q) = q$ olur ve P ve Q noktalarının $I_{(O,r)}$ inversiyonu altında görüntüleri

$d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') = r^2$ eşitliğinden $d_T(O,P') = \frac{r^2}{p}$ olup $P' = (\frac{r^2}{p}, 0, 0)$ dır. Benzer şekilde

$d_T(O,Q) \cdot d_T(O,Q') = r^2$ eşitliğinden $d_T(O,Q') = \frac{r^2}{q}$ olup $Q' = (0, \frac{r^2}{q}, 0)$ olarak elde edilir. Böylece

$$d_T(P', Q') = \frac{r^2}{|p|} + \frac{r^2}{|q|} = \frac{r^2(|p| + |q|)}{|p|\,|q|} = \frac{r^2 \cdot d_T(P,Q)}{d_T(O,P) \cdot d_T(O,Q)}$$

olur.

2) P ve Q noktaları $P = (p,0,0)$ ve $Q = (0,0,q)$ olsun. $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,P) = p$, Q noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,Q) = q$ olur ve P ve Q noktalarının $I_{(O,r)}$ inversiyonu altında görüntüleri

$d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') = r^2$ eşitliğinden $d_T(O,P') = \frac{r^2}{p}$ ve $P' = (\frac{r^2}{p}, 0, 0)$ dır. Benzer şekilde

$d_T(O,Q) \cdot d_T(O,Q') = r^2$ eşitliğinden $d_T(O,Q') = \frac{r^2}{q}$ ve $Q' = (0, 0, \frac{r^2}{q})$ olarak elde edilir. Böylece

$$d_T(P',Q') = \frac{r^2}{|p|} + \frac{r^2}{|q|} = \frac{r^2(|p|+|q|)}{|p|\,|q|} = \frac{r^2 \cdot d_T(P,Q)}{d_T(O,P)\cdot d_T(O,Q)}$$

olur.

3) P ve Q noktaları $P=(0,p,0)$, $Q=(0,0,q)$ olsun. $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,P)=p$, Q noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,Q)=q$ olur ve P ve Q noktalarının $I_{(O,r)}$ inversiyonu altında görüntüleri

$d_T(O,P)\cdot d_T(O,P')=r^2$ eşitliğinden $d_T(O,P')=\frac{r^2}{p}$ ve $P'=(0,\frac{r^2}{p},0)$ dır. Benzer şekilde

$d_T(O,Q)\cdot d_T(O,Q')=r^2$ eşitliğinden $d_T(O,Q')=\frac{r^2}{q}$ ve $Q'=(0,0,\frac{r^2}{q})$ olarak elde edilir. Böylece

$$d_T(P',Q') = \frac{r^2}{|p|} + \frac{r^2}{|q|} = \frac{r^2(|p|+|q|)}{|p|\,|q|} = \frac{r^2 \cdot d_T(P,Q)}{d_T(O,P)\cdot d_T(O,Q)}$$

olur.

II. Durum $P,Q \in D_2$ için

1) P ve Q noktaları $P=(p,p,0)$, $Q=(q,0,q)$ olsun. $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,P)=2p$, Q noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,Q)=2q$ olur ve P ve Q noktalarının $I_{(O,r)}$ inversiyonu altında görüntüleri

$d_T(O,P)\cdot d_T(O,P')=r^2$ eşitliğinden $d_T(O,P')=\frac{r^2}{2p}$ ve $P'=(\frac{r^2}{4p},\frac{r^2}{4p},0)$ dır. Benzer şekilde

$d_T(O,Q)\cdot d_T(O,Q')=r^2$ eşitliğinden $d_T(O,Q')=\frac{r^2}{2q}$ ve $Q'=(\frac{r^2}{4q},0,\frac{r^2}{4q})$ olarak elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} d_T(P',Q') &= \left|\frac{r^2}{|4p|} - \frac{r^2}{4\,|q|}\right| + \frac{r^2}{|4p|} + \frac{r^2}{4\,|q|} = \frac{r^2\,|q-p|}{4\,|p|\,|q|} + \frac{r^2\,|q|+|p|}{4\,|p|\,|q|} \\ &= r^2\frac{|q-p|+|q|+|p|}{4\,|p|\,|q|} = \frac{r^2\cdot d_T(P,Q)}{d_T(O,P)\cdot d_T(O,Q)} \end{aligned}$$

olur.

2) P ve Q noktaları $P=(p,p,0)$, $Q=(0,q,q)$ olsun. $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,P) = 2p$, Q noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,Q) = 2q$ olur ve P ve Q noktalarının $I_{(O,r)}$ inversiyonu altında görüntüleri

$d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') = r^2$ eşitliğinden $d_T(O,P') = \frac{r^2}{2p}$ ve $P' = (\frac{r^2}{4p}, \frac{r^2}{4p}, 0)$ dır. Benzer şekilde

$d_T(O,Q) \cdot d_T(O,Q') = r^2$ eşitliğinden $d_T(O,Q') = \frac{r^2}{2q}$ ve $Q' = (0, \frac{r^2}{4q}, \frac{r^2}{4q})$ olarak elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} d_T(P',Q') &= \frac{r^2}{|4p|} + \left|\frac{r^2}{|4p|} - \frac{r^2}{4|q|}\right| + \frac{r^2}{4|q|} = \frac{r^2|q-p|}{4|p||q|} + \frac{r^2|q|+|p|}{4|p||q|} \\ &= r^2\frac{|q-p|+|q|+|p|}{4|p||q|} = \frac{r^2 \cdot d_T(P,Q)}{d_T(O,P) \cdot d_T(O,Q)} \end{aligned}$$

olur.

3) P ve Q noktaları $P = (p,p,0)$, $Q = (q,-q,0)$ olsun. $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,P) = 2p$, Q noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,Q) = 2q$ olur ve P ve Q noktalarının $I_{(O,r)}$ inversiyonu altında görüntüleri

$d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') = r^2$ eşitliğinden $d_T(O,P') = \frac{r^2}{2p}$ ve $P' = (\frac{r^2}{4p}, \frac{r^2}{4p}, 0)$ dır. Benzer şekilde

$d_T(O,Q) \cdot d_T(O,Q') = r^2$ eşitliğinden $d_T(O,Q') = \frac{r^2}{2q}$ ve $Q' = (\frac{r^2}{4q}, -\frac{r^2}{4q}, 0)$ olarak elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} d_T(P',Q') &= \left|\frac{r^2}{|4p|} - \frac{r^2}{4|q|}\right| + \left|\frac{r^2}{|4p|} + \frac{r^2}{4|q|}\right| = \frac{r^2|q-p|}{4|p||q|} + \frac{r^2|q+p|}{4|p||q|} \\ &= r^2\frac{|q-p|+|q+p|}{4|p||q|} = \frac{r^2 \cdot d_T(P,Q)}{d_T(O,P) \cdot d_T(O,Q)} \end{aligned}$$

olur.

4) P ve Q noktaları $P = (p,p,0)$, $Q = (q,0,-q)$ olsun. $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,P) = 2p$, Q noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,Q) = 2q$ olur ve P ve Q noktalarının $I_{(O,r)}$ inversiyonu altında görüntüleri

$d_T(O,P) \cdot d_T(O,P') = r^2$ eşitliğinden $d_T(O,P') = \frac{r^2}{2p}$ ve $P' = (\frac{r^2}{4p}, \frac{r^2}{4p}, 0)$ dır. Benzer şekilde

$d_T(O,Q)\cdot d_T(O,Q') = r^2$ eşitliğinden $d_T(O,Q') = \frac{r^2}{2q}$ ve $Q' = (\frac{r^2}{4q}, 0, -\frac{r^2}{4q})$ olarak elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} d_T(P',Q') &= \left|\frac{r^2}{|4p|} - \frac{r^2}{4|q|}\right| + \frac{r^2}{|4p|} + \frac{r^2}{4|q|} = \frac{r^2|q-p|}{4|p||q|} + \frac{r^2|q|+|p|}{4|p||q|} \\ &= r^2\frac{|q-p|+|q|+|p|}{4|p||q|} = \frac{r^2\cdot d_T(P,Q)}{d_T(O,P)\cdot d_T(O,Q)} \end{aligned}$$

olur.

5) P ve Q noktaları $P=(p,p,0)$, $Q=(0,q,-q)$ olsun. $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,P)=2p$, Q noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,Q)=2q$ olur ve P ve Q noktalarının $I_{(O,r)}$ inversiyonu altında görüntüleri

$d_T(O,P)\cdot d_T(O,P') = r^2$ eşitliğinden $d_T(O,P') = \frac{r^2}{2p}$ ve $P' = (\frac{r^2}{4p}, \frac{r^2}{4p}, 0)$ dır. Benzer şekilde

$d_T(O,Q)\cdot d_T(O,Q') = r^2$ eşitliğinden $d_T(O,Q') = \frac{r^2}{2q}$ ve $Q' = (0, \frac{r^2}{4q}, -\frac{r^2}{4q})$ olarak elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} d_T(P',Q') &= \frac{r^2}{|4p|} + \left|\frac{r^2}{|4p|} - \frac{r^2}{4|q|}\right| + \frac{r^2}{4|q|} = \frac{r^2|q-p|}{4|p||q|} + \frac{r^2|q|+|p|}{4|p||q|} \\ &= r^2\frac{|q-p|+|q|+|p|}{4|p||q|} = \frac{r^2\cdot d_T(P,Q)}{d_T(O,P)\cdot d_T(O,Q)} \end{aligned}$$

olur.

6) P ve Q noktaları $P=(p,0,p)$, $Q=(q,0,-q)$ olsun. $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,P)=2p$, Q noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,Q)=2q$ olur ve P ve Q noktalarının $I_{(O,r)}$ inversiyonu altında görüntüleri

$d_T(O,P)\cdot d_T(O,P') = r^2$ eşitliğinden $d_T(O,P') = \frac{r^2}{2p}$ ve $P' = (\frac{r^2}{4p}, 0, \frac{r^2}{4p})$ dır. Benzer şekilde

$d_T(O,Q)\cdot d_T(O,Q') = r^2$ eşitliğinden $d_T(O,Q') = \frac{r^2}{2q}$ ve $Q' = (\frac{r^2}{4q}, 0, -\frac{r^2}{4q})$ olarak elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} d_T(P',Q') &= \left|\frac{r^2}{|4p|} - \frac{r^2}{4|q|}\right| + \left|\frac{r^2}{|4p|} + \frac{r^2}{4|q|}\right| = \frac{r^2|q-p|}{4|p||q|} + \frac{r^2|q+p|}{4|p||q|} \\ &= r^2\frac{|q-p|+|q+p|}{4|p||q|} = \frac{r^2\cdot d_T(P,Q)}{d_T(O,P)\cdot d_T(O,Q)} \end{aligned}$$

olur.

7) P ve Q noktaları $P = (p, 0, p)$, $Q = (0, q, q)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O, P) = 2p$, Q noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O, Q) = 2q$ olur ve P ve Q noktalarının $I_{(O,r)}$ inversiyonu altında görüntüleri

$d_T(O, P) \cdot d_T(O, P') = r^2$ eşitliğinden $d_T(O, P') = \frac{r^2}{2p}$ ve $P' = (\frac{r^2}{4p}, 0, \frac{r^2}{4p})$ dır. Benzer şekilde

$d_T(O, Q) \cdot d_T(O, Q') = r^2$ eşitliğinden $d_T(O, Q') = \frac{r^2}{2q}$ ve $Q' = (0, \frac{r^2}{4q}, \frac{r^2}{4q})$ olarak elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} d_T(P', Q') &= \frac{r^2}{|4p|} + \frac{r^2}{4|q|} + \left| \frac{r^2}{|4p|} - \frac{r^2}{4|q|} \right| = \frac{r^2 |q-p|}{4|p||q|} + \frac{r^2 |q| + |p|}{4|p||q|} \\ &= r^2 \frac{|q-p| + |q| + |p|}{4|p||q|} = \frac{r^2 \cdot d_T(P, Q)}{d_T(O, P) \cdot d_T(O, Q)} \end{aligned}$$

olur.

8) P ve Q noktaları $P = (p, 0, p)$, $Q = (0, q, -q)$ olsun. $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O, P) = 2p$, Q noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O, Q) = 2q$ olur ve P ve Q noktalarının $I_{(O,r)}$ inversiyonu altında görüntüleri

$d_T(O, P) \cdot d_T(O, P') = r^2$ eşitliğinden $d_T(O, P') = \frac{r^2}{2p}$ ve $P' = (\frac{r^2}{4p}, 0, \frac{r^2}{4p})$ dır. Benzer şekilde

$d_T(O, Q) \cdot d_T(O, Q') = r^2$ eşitliğinden $d_T(O, Q') = \frac{r^2}{2q}$ ve $Q' = (0, \frac{r^2}{4q}, -\frac{r^2}{4q})$ olarak elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} d_T(P', Q') &= \frac{r^2}{|4p|} + \frac{r^2}{4|q|} + \left| \frac{r^2}{|4p|} - \frac{r^2}{4|q|} \right| = \frac{r^2 |q-p|}{4|p||q|} + \frac{r^2 |q| + |p|}{4|p||q|} \\ &= r^2 \frac{|q-p| + |q| + |p|}{4|p||q|} = \frac{r^2 \cdot d_T(P, Q)}{d_T(O, P) \cdot d_T(O, Q)} \end{aligned}$$

olur.

9) P ve Q noktaları $P = (p, 0, p)$, $Q = (q, -q, 0)$ olsun. $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O, P) = 2p$, Q noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O, Q) = 2q$ olur ve P ve Q noktalarının $I_{(O,r)}$ inversiyonu altında görüntüleri

$d_T(O,P)\cdot d_T(O,P')=r^2$ eşitliğinden $d_T(O,P')=\frac{r^2}{2p}$ ve $P'=(\frac{r^2}{4p},0,\frac{r^2}{4p})$ dır. Benzer şekilde

$d_T(O,Q)\cdot d_T(O,Q')=r^2$ eşitliğinden $d_T(O,Q')=\frac{r^2}{2q}$ ve $Q'=(\frac{r^2}{4q},-\frac{r^2}{4q},0)$ olarak elde edilir. Böylece

$$
\begin{aligned}
d_T(P',Q') &= \left|\frac{r^2}{|4p|}-\frac{r^2}{4|q|}\right|+\frac{r^2}{|4q|}+\frac{r^2}{4|p|}+=\frac{r^2|q-p|}{4|p||q|}+\frac{r^2(|q|+|p|)}{4|p||q|} \\
&= r^2\frac{|q-p|+|q|+|p|}{4|p||q|}=\frac{r^2\cdot d_T(P,Q)}{d_T(O,P)\cdot d_T(O,Q)}
\end{aligned}
$$

olur.

10) P ve Q noktaları $P=(0,p,p)$, $Q=(0,q,-q)$ olsun. $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,P)=2p$, Q noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,Q)=2q$ olur ve P ve Q noktalarının $I_{(O,r)}$ inversiyonu altında görüntüleri

$d_T(O,P)\cdot d_T(O,P')=r^2$ eşitliğinden $d_T(O,P')=\frac{r^2}{2p}$ ve $P'=(0,\frac{r^2}{4p},\frac{r^2}{4p})$ dır. Benzer şekilde

$d_T(O,Q)\cdot d_T(O,Q')=r^2$ eşitliğinden $d_T(O,Q')=\frac{r^2}{2q}$ ve $Q'=(0,\frac{r^2}{4q},-\frac{r^2}{4q})$ olarak elde edilir. Böylece

$$
\begin{aligned}
d_T(P',Q') &= \left|\frac{r^2}{|4p|}-\frac{r^2}{4|q|}\right|+\left|\frac{r^2}{|4p|}+\frac{r^2}{4|q|}\right|=\frac{r^2|q-p|}{4|p||q|}+\frac{r^2|q+p|}{4|p||q|} \\
&= r^2\frac{|q-p|+|q+p|}{4|p||q|}=\frac{r^2\cdot d_T(P,Q)}{d_T(O,P)\cdot d_T(O,Q)}
\end{aligned}
$$

olur.

11) P ve Q noktaları $P=(0,p,p)$, $Q=(q,-q,0)$ olsun. $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,P)=2p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,Q)=2q$ olur ve P ve Q noktalarının $I_{(O,r)}$ inversiyonu altında görüntüleri

$d_T(O,P)\cdot d_T(O,P')=r^2$ eşitliğinden $d_T(O,P')=\frac{r^2}{2p}$ ve $P'=(0,\frac{r^2}{4p},\frac{r^2}{4p})$ dır. Benzer şekilde

$d_T(O,Q)\cdot d_T(O,Q')=r^2$ eşitliğinden $d_T(O,Q')=\frac{r^2}{2q}$ ve $Q'=(\frac{r^2}{4q},-\frac{r^2}{4q},0)$ olarak elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} d_T(P',Q') &= \frac{r^2}{4|q|}+\left|\frac{r^2}{|4p|}+\frac{r^2}{4|q|}\right|+\frac{r^2}{|4p|}=\frac{r^2(|p|+|q|)}{4|p||q|}+\frac{r^2(|p|+|q|)}{4|p||q|} \\ &= r^2\frac{|q-p|+|q+p|}{4|p||q|}=\frac{r^2\cdot d_T(P,Q)}{d_T(O,P)\cdot d_T(O,Q)} \end{aligned}$$

olur.

12) P ve Q noktaları $P=(0,p,p)$, $Q=(q,0,-q)$ olsun. $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,P)=2p$, Q noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,Q)=2q$ olur ve P ve Q noktalarının $I_{(O,r)}$ inversiyonu altında görüntüleri

$d_T(O,P)\cdot d_T(O,P')=r^2$ eşitliğinden $d_T(O,P')=\frac{r^2}{2p}$ ve $P'=(0,\frac{r^2}{4p},\frac{r^2}{4p})$ dır. Benzer şekilde

$d_T(O,Q)\cdot d_T(O,Q')=r^2$ eşitliğinden $d_T(O,Q')=\frac{r^2}{2q}$ ve $Q'=(0,\frac{r^2}{4q},-\frac{r^2}{4q})$ den

$$\begin{aligned} d_T(P',Q') &= \left|\frac{r^2}{|4p|}-\frac{r^2}{4|q|}\right|+\left|\frac{r^2}{|4p|}+\frac{r^2}{4|q|}\right|=\frac{r^2|q-p|}{4|p||q|}+\frac{r^2|q+p|}{4|p||q|} \\ &= r^2\frac{|q-p|+|q+p|}{4|p||q|}=\frac{r^2\cdot d_T(P,Q)}{d_T(O,P)\cdot d_T(O,Q)} \end{aligned}$$

olur.

13) P ve Q noktaları $P=(p,-p,0)$, $Q=(q,0,-q)$ olsun. $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,P)=2p$, Q noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,Q)=2q$ olur ve P ve Q noktalarının $I_{(O,r)}$ inversiyonu altında görüntüleri

$d_T(O,P)\cdot d_T(O,P')=r^2$ eşitliğinden $d_T(O,P')=\frac{r^2}{2p}$ ve $P'=(\frac{r^2}{4p},-\frac{r^2}{4p},0)$ dır. Benzer şekilde

$d_T(O,Q)\cdot d_T(O,Q')=r^2$ eşitliğinden $d_T(O,Q')=\frac{r^2}{2q}$ ve $Q'=(\frac{r^2}{4q},0,-\frac{r^2}{4q})$ den

$$\begin{aligned} d_T(P',Q') &= \left|\frac{r^2}{|4p|}-\frac{r^2}{4|q|}\right|+\frac{r^2}{|4p|}+\frac{r^2}{4|q|}=\frac{r^2|q-p|}{4|p||q|}+\frac{r^2(|q|+|p|)}{4|p||q|} \\ &= r^2\frac{|q-p|+|q|+|p|}{4|p||q|}=\frac{r^2\cdot d_T(P,Q)}{d_T(O,P)\cdot d_T(O,Q)} \end{aligned}$$

olur.

14) P ve Q noktaları $P=(p,-p,0)$, $Q=(0,q,-q)$ olsun. $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,P)=2p$, Q noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,Q)=2q$ olur ve P ve Q noktalarının $I_{(O,r)}$ inversiyonu altında görüntüleri

$d_T(O,P)\cdot d_T(O,P')=r^2$ eşitliğinden $d_T(O,P')=\frac{r^2}{2p}$ ve $P'=(\frac{r^2}{4p},-\frac{r^2}{4p},0)$ dır. Benzer şekilde

$d_T(O,Q)\cdot d_T(O,Q')=r^2$ eşitliğinden $d_T(O,Q')=\frac{r^2}{2q}$ ve $Q'=(0,\frac{r^2}{4q},-\frac{r^2}{4q})$ den

$$\begin{aligned} d_T(P',Q') &= \frac{r^2}{|4p|}+\frac{r^2}{4|q|}+\left|\frac{r^2}{|4p|}+\frac{r^2}{4|q|}\right| = \frac{r^2(|q|+|p|)}{4|p||q|}+\frac{r^2|q+p|}{4|p||q|} \\ &= r^2\frac{|q|+|p|+|q+p|}{4|p||q|} = \frac{r^2\cdot d_T(P,Q)}{d_T(O,P)\cdot d_T(O,Q)} \end{aligned}$$

olur.

15) P ve Q noktaları $P=(p,0,-p)$, $Q=(0,q,-q)$ olsun. $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,P)=2p$, Q noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,Q)=2q$ olur ve P ve Q noktalarının $I_{(O,r)}$ inversiyonu altında görüntüleri

$d_T(O,P)\cdot d_T(O,P')=r^2$ eşitliğinden $d_T(O,P')=\frac{r^2}{2p}$ ve $P'=(\frac{r^2}{4p},0,-\frac{r^2}{4p})$ dır. Benzer şekilde

$d_T(O,Q)\cdot d_T(O,Q')=r^2$ eşitliğinden $d_T(O,Q')=\frac{r^2}{2q}$ ve $Q'=(0,\frac{r^2}{4q},-\frac{r^2}{4q})$ den

$$\begin{aligned} d_T(P',Q') &= \left|\frac{r^2}{|4p|}-\frac{r^2}{4|q|}\right|+\frac{r^2}{|4p|}+\frac{r^2}{4|q|} = \frac{r^2|q-p|}{4|p||q|}+\frac{r^2(|q|+|p|)}{4|p||q|} \\ &= r^2\frac{|q-p|+|q|+|p|}{4|p||q|} = \frac{r^2\cdot d_T(P,Q)}{d_T(O,P)\cdot d_T(O,Q)} \end{aligned}$$

olur.

III. Durum $P,Q\in D_3$ için

1) P ve Q noktaları $P=(p,p,p)$, $Q=(q,q,-q)$ olsun. $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,P)=3p$, Q noktasının merkeze uzaklığı ise $d_T(O,Q)=3q$ olur ve P ve Q noktalarının $I_{(O,r)}$ inversiyonu altında görüntüleri

$d_T(O,P)\cdot d_T(O,P')=r^2$ eşitliğinden $d_T(O,P')=\frac{r^2}{3p}$ ve $P'=(\frac{r^2}{9p},\frac{r^2}{9p},\frac{r^2}{9p})$ dır. Benzer şekilde

$d_T(O,Q)\cdot d_T(O,Q')=r^2$ eşitliğinden $d_T(O,Q')=\frac{r^2}{3q}$ ve $Q'=(\frac{r^2}{9q},\frac{r^2}{9q},-\frac{r^2}{9q})$ olur böylece

$$\begin{aligned} d_T(P',Q') &= \left|\frac{r^2}{|9p|}-\frac{r^2}{9\,|q|}\right|+\left|\frac{r^2}{|9p|}-\frac{r^2}{9\,|q|}\right|+\left|\frac{r^2}{|9p|}+\frac{r^2}{9\,|q|}\right| = 2\frac{r^2\,|q-p|}{9\,|p|\,|q|}+\frac{r^2\,|q+p|}{9\,|p|\,|q|} \\ &= r^2\frac{2\,|q-p|+|q+p|}{9\,|p|\,|q|} = \frac{r^2\cdot d_T(P,Q)}{d_T(O,P)\cdot d_T(O,Q)} \end{aligned}$$

olur.

2) P ve Q noktaları $P=(p,p,p)$, $Q=(q,-q,q)$ olsun. $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,P)=3p$, Q noktasının merkeze uzaklığı ise $d_T(O,Q)=3q$ olur ve P ve Q noktalarının $I_{(O,r)}$ inversiyonu altında görüntüleri

$d_T(O,P)\cdot d_T(O,P')=r^2$ eşitliğinden $d_T(O,P')=\frac{r^2}{3p}$ ve $P'=(\frac{r^2}{9p},\frac{r^2}{9p},\frac{r^2}{9p})$ dır. Benzer şekilde

$d_T(O,Q)\cdot d_T(O,Q')=r^2$ eşitliğinden $d_T(O,Q')=\frac{r^2}{3q}$ ve $Q'=(\frac{r^2}{9q},-\frac{r^2}{9q},\frac{r^2}{9q})$ olur

böylece

$$\begin{aligned} d_T(P',Q') &= \left|\frac{r^2}{|9p|}-\frac{r^2}{9\,|q|}\right|+\left|\frac{r^2}{|9p|}-\frac{r^2}{9\,|q|}\right|+\left|\frac{r^2}{|9p|}+\frac{r^2}{9\,|q|}\right| = 2\frac{r^2\,|q-p|}{9\,|p|\,|q|}+\frac{r^2\,|q+p|}{9\,|p|\,|q|} \\ &= r^2\frac{2\,|q-p|+|q+p|}{9\,|p|\,|q|} = \frac{r^2\cdot d_T(P,Q)}{d_T(O,P)\cdot d_T(O,Q)} \end{aligned}$$

olur.

3) P ve Q noktaları $P=(p,p,p)$, $Q=(-q,q,q)$ olsun. $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O,P)=3p$, Q noktasının merkeze uzaklığı ise $d_T(O,Q)=3q$ olur ve P ve Q noktalarının $I_{(O,r)}$ inversiyonu altında görüntüleri

$d_T(O,P)\cdot d_T(O,P')=r^2$ eşitliğinden $d_T(O,P')=\frac{r^2}{3p}$ ve $P'=(\frac{r^2}{9p},\frac{r^2}{9p},\frac{r^2}{9p})$ dır. Benzer şekilde

$d_T(O,Q)\cdot d_T(O,Q')=r^2$ eşitliğinden $d_T(O,Q')=\frac{r^2}{3q}$ ve $Q'=(-\frac{r^2}{9q},\frac{r^2}{9q},\frac{r^2}{9q})$ olur

böylece

$$\begin{aligned} d_T(P',Q') &= \left|\frac{r^2}{|9p|}-\frac{r^2}{9\,|q|}\right|+\left|\frac{r^2}{|9p|}-\frac{r^2}{9\,|q|}\right|+\left|\frac{r^2}{|9p|}+\frac{r^2}{9\,|q|}\right| = 2\frac{r^2\,|q-p|}{9\,|p|\,|q|}+\frac{r^2\,|q+p|}{9\,|p|\,|q|} \\ &= r^2\frac{2\,|q-p|+|q+p|}{9\,|p|\,|q|} = \frac{r^2\cdot d_T(P,Q)}{d_T(O,P)\cdot d_T(O,Q)} \end{aligned}$$

olur.

4) P ve Q noktaları $P = (-p, p, p)$, $Q = (q, q, -q)$ olsun. $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O, P) = 3p$, Q noktasının merkeze uzaklığı ise $d_T(O, Q) = 3q$ olur ve P ve Q noktalarının $I_{(O,r)}$ inversiyonu altında görüntüleri

$d_T(O, P) \cdot d_T(O, P') = r^2$ eşitliğinden $d_T(O, P') = \frac{r^2}{3p}$ ve $P' = (-\frac{r^2}{9p}, \frac{r^2}{9p}, \frac{r^2}{9p})$ dır. Benzer şekilde

$d_T(O, Q) \cdot d_T(O, Q') = r^2$ eşitliğinden $d_T(O, Q') = \frac{r^2}{3q}$ ve $Q' = (\frac{r^2}{9q}, \frac{r^2}{9q}, -\frac{r^2}{9q})$ olur

böylece

$$\begin{aligned} d_T(P', Q') &= \left|\frac{r^2}{|9p|} + \frac{r^2}{9\,|q|}\right| + \left|\frac{r^2}{|9p|} - \frac{r^2}{9\,|q|}\right| + \left|\frac{r^2}{|9p|} + \frac{r^2}{9\,|q|}\right| = 2\frac{r^2\,|q+p|}{9\,|p|\,|q|} + \frac{r^2\,|q-p|}{9\,|p|\,|q|} \\ &= r^2\frac{2\,|q+p| + |q-p|}{9\,|p|\,|q|} = \frac{r^2 \cdot d_T(P, Q)}{d_T(O, P) \cdot d_T(O, Q)} \end{aligned}$$

olur.

5) P ve Q noktaları $P = (-p, p, p)$, $Q = (q, -q, q)$ olsun. $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O, P) = 3p$, Q noktasının merkeze uzaklığı ise $d_T(O, Q) = 3q$ olur ve P ve Q noktalarının $I_{(O,r)}$ inversiyonu altında görüntüleri

$d_T(O, P) \cdot d_T(O, P') = r^2$ eşitliğinden $d_T(O, P') = \frac{r^2}{3p}$ ve $P' = (-\frac{r^2}{9p}, \frac{r^2}{9p}, \frac{r^2}{9p})$ dır. Benzer şekilde

$d_T(O, Q) \cdot d_T(O, Q') = r^2$ eşitliğinden $d_T(O, Q') = \frac{r^2}{3q}$ ve $Q' = (\frac{r^2}{9q}, -\frac{r^2}{9q}, \frac{r^2}{9q})$ olur

böylece

$$\begin{aligned} d_T(P', Q') &= \left|\frac{r^2}{|9p|} + \frac{r^2}{9\,|q|}\right| + \left|\frac{r^2}{|9p|} + \frac{r^2}{9\,|q|}\right| + \left|\frac{r^2}{|9p|} - \frac{r^2}{9\,|q|}\right| = 2\frac{r^2\,|q+p|}{9\,|p|\,|q|} + \frac{r^2\,|q-p|}{9\,|p|\,|q|} \\ &= r^2\frac{2\,|q+p| + |q-p|}{9\,|p|\,|q|} = \frac{r^2 \cdot d_T(P, Q)}{d_T(O, P) \cdot d_T(O, Q)} \end{aligned}$$

olur.

6) P ve Q noktaları $P = (p, -p, p)$, $Q = (q, q, -q)$ olsun. $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı $d_T(O, P) = 3p$, Q noktasının merkeze uzaklığı ise $d_T(O, Q) = 3q$ olur ve P ve Q noktalarının $I_{(O,r)}$ inversiyonu altında görüntüleri

$d_T(O,P)\cdot d_T(O,P') = r^2$ eşitliğinden $d_T(O,P') = \frac{r^2}{3p}$ ve $P' = (\frac{r^2}{9p}, -\frac{r^2}{9p}, \frac{r^2}{9p})$ dır. Benzer şekilde

$d_T(O,Q)\cdot d_T(O,Q') = r^2$ eşitliğinden $d_T(O,Q') = \frac{r^2}{3q}$ ve $Q' = (\frac{r^2}{9q}, \frac{r^2}{9q}, -\frac{r^2}{9q})$ olur böylece

$$\begin{aligned} d_T(P',Q') &= \left|\frac{r^2}{|9p|} - \frac{r^2}{9|q|}\right| + \left|\frac{r^2}{|9p|} + \frac{r^2}{9|q|}\right| + \left|\frac{r^2}{|9p|} + \frac{r^2}{9|q|}\right| = \frac{r^2|q-p|}{9|p||q|} + 2\frac{r^2|q+p|}{9|p||q|} \\ &= r^2\frac{|q-p| + 2|q+p|}{9|p||q|} = \frac{r^2\cdot d_T(P,Q)}{d_T(O,P)\cdot d_T(O,Q)} \end{aligned}$$

olur. □

Öklidyen düzlemde C, O merkezli, r yarıçaplı bir çember olmak üzere C çemberine göre inversiyon için aşağıdaki özellikler bilinmektedir.

i) İnversiyon merkezinden geçen doğrular invaryanttır.

ii) İnversiyon merkezinden geçmeyen doğrular inversiyon merkezinden geçen çembere dönüşür.

iii) İnversiyon merkezinden geçen çemberi inversiyon merkezinden geçmeyen bir doğruya dönüşür.

iv) İnversiyon merkezinden geçmeyen çember, inversiyon merkezinden geçmeyen bir çembere dönüşür.

v) İnversiyon çemberi ile eş merkezli çember yine eş merkezli bir çembere dönüşür.

Bu özelliklerden yola çıkılarak taksi küresel inversiyonunda aşağıdaki teoremler verilebilir:

Teorem 4.1.8 *$I_{(O,r)}$ taksi küresel inversiyonu altında inversiyon merkezinden geçen her doğru ve düzlem invaryant kalır.*

İspat: *İnversiyon merkezinden geçen her doğrunun $I_{(O,r)}$ inversiyonuna göre görüntüsünün kendi olduğu açıktır. $\mathbb{R}^3_T$ de tüm Öklidyen ötelemeler birer izometri olduğundan dolayı inversiyon merkezinin orijin alınması genelliği bozmaz. O halde S, O merkezli r yarıçaplı taksi inversiyon küresi ve Π de denklemi $Mx+Ny+Tz=0$ olan bir düzlem olsun. Π ye $I_{(O,r)}$ inversiyonu uygulanırsa*

$$x = \frac{r^2x'}{(|x'|+|y'|+|z'|)^2},\ y = \frac{r^2y'}{(|x'|+|y'|+|z'|)^2},\ z = \frac{r^2z'}{(|x'|+|y'|+|z'|)^2}$$

olduğundan

$$M\frac{r^2x'}{(|x'|+|y'|+|z'|)^2}+N\frac{r^2y'}{(|x'|+|y'|+|z'|)^2}+T\frac{r^2z'}{(|x'|+|y'|+|z'|)^2}=0$$

ve $r\neq 0$ *olduğundan*

$$\left(r^2\right)(Mx'+Ny'+Tz')=Mx'+Ny'+Tz'=0$$

elde edilir. $\square$

Teorem 4.1.9 *$I_{(O,r)}$ taksi küresel inversiyonu altında merkezi O olan her taksi küre yine O merkezli taksi küreye dönüşür.*

İspat: *S, O merkezli r yarıçaplı taksi inversiyon küresi olsun. $I_{(O,r)}$ altında $P=(x,y,z)$ noktası ve S taksi küresi için $\mathbb{R}^3_T$ de ötelemeler uzaklığı koruduğundan S taksi küresinin denklemini $|x|+|y|+|z|=r$ yerine $|x|+|y|+|z|=k$, $k\in\mathbb{R}^+$ olarak alabiliriz. Teorem 4.1.4.e göre $(x,y,z)=\frac{r^2}{(|x'|+|y'|+|z'|)^2}(x',y',z')$ olduğundan S taksi küresinin $I_{(O,r)}$ taksi küresel inversi*

$$|x'|+|y'|+|z'|=\frac{r^2}{k}$$

olarak $I_{(O,r)}$ altında merkezi O olan $\frac{r^2}{k}$ yarıçaplı küre elde edilir. $\square$

Teorem 4.1.10 *$I_{(O,r)}$ taksi küresel inversiyonu altında S taksi küresinin her kenarı, yüzü ve köşesi $I_{(O,r)}$ inversiyonu altında invaryant kalır.*

İspat: *$I_{(O,r)}$ taksi küresel inversiyonu altında S taksi küresinin üzerindeki tüm noktaların kendine dönüştüğü açıktır.* $\square$

4.2 Çifte Oran

$\mathbb{R}^3_T$ de l doğrusu üzerindeki A ve B noktaları için A dan B ye yönlü taksi uzaklığı $d_T[AB]$ ile gösterilsin. Eğer ışının başlangıç noktası A ve B yi içeriyorsa pozitif yönlü yönelme $d_T[AB]=d_T(A,B)$, ışın ters yönlü ise negatif yönlü yönelmedir ve $d_T[AB]=-d_T(A,B)$ dir.

Tanım 4.2.1 $\mathbb{R}_T^3$ *de bir yönlendirilmiş doğru üzerinde dört farklı nokta* A, B, C, D *olsun. Bu noktaların taksi çifte oranı*

$$(AB, CD)_T = \frac{d_T[AC]}{d_T[AD]} \cdot \frac{d_T[BD]}{d_T[BC]}$$

şeklinde tanımlanır.

C ve D nin her ikisi de A ve B arasındaysa çifte oran pozitiftir. C ve D , A ile B nin arasında değilse de poziftir. Ancak $\{A, B\}$ ve $\{C, D\}$ çiftleri biribirlerinden ayrı olurlarsa negatiftir. İnversiyon küresinin merkezi A, B, C, D den herhangi biri değilse çifte oran inversiyon altında invaryant kalır. Bu özellik taksi uzayında geçerlidir.O halde Teorem 4.1.4 kullanılarak

$$\begin{aligned}
\left|(A'B', C'D')_T\right| &= \left|\frac{d_T\left[A'C'\right]}{d_T\left[A', D'\right]} \cdot \frac{d_T\left[B', D'\right]}{d_T\left[B', C'\right]}\right| = \frac{d_T\left(A', C'\right)}{d_T\left(A', D'\right)} \cdot \frac{d_T\left(B', D'\right)}{d_T\left(B', C'\right)} \\
&= \frac{\frac{r^2 \cdot d_T(A,C)}{d_T(O,A) \cdot d_T(O,C)}}{\frac{r^2 \cdot d_T(A,D)}{d_T(O,A) \cdot d_T(O,D)}} \cdot \frac{\frac{r^2 \cdot d_T(B,D)}{d_T(O,B) \cdot d_T(O,D)}}{\frac{r^2 \cdot d_T(B,C)}{d_T(O,B) \cdot d_T(O,C)}} = \frac{d_T(A, C)}{d_T(A, D)} \cdot \frac{d_T(B, D)}{d_T(B, C)} \\
&= \frac{d_T[A, C]}{d_T[A, D]} \cdot \frac{d_T[B, D]}{d_T[B, C]} = |(AB, CD)_T|
\end{aligned}$$

olur. Yani taksi küresel inversiyon taksi çifte oranı korur. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2.2 $\mathbb{R}_T^3$ *de* O *merkezli,* r *yarıçaplı taksi küresine göre* $I_{(O,r)}$ *inversiyonu çifte oranı korur.*

Merkezil taksi birim küresine göre inversiyon altında aşağıdaki örnekler verilebilir:

Örnek 4.2.3 C *ve* D *noktalarının her ikisi de* A *ve* B *arasında olması durumuna örnek olarak* R_T^3 *deki* $A = (1, 1, 1),\ B = (4, 4, 4), C = (2, 2, 2), D = (3, 3, 3)$ *için çifte oran hesaplanırsa*

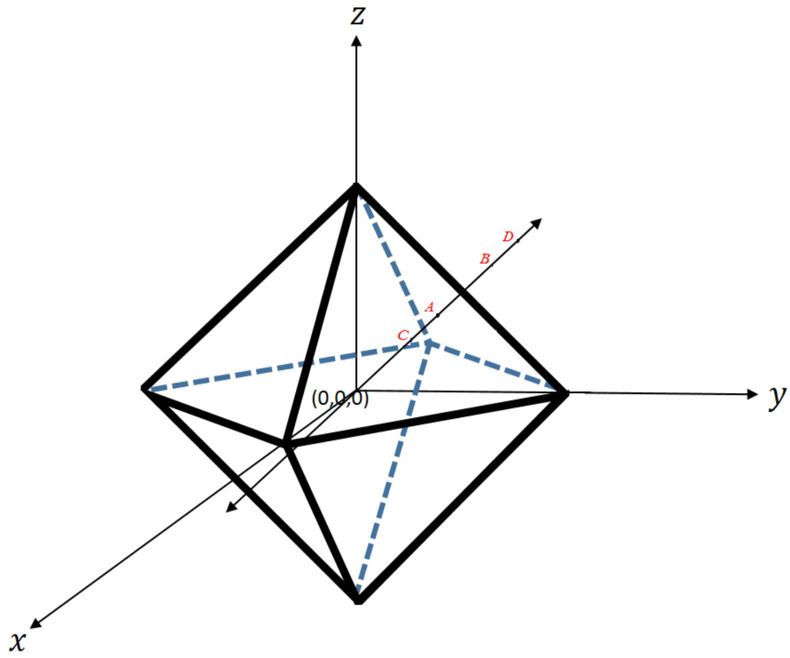
$d_T(A, C) = 1 + 1 + 1 = 3,$

$d_T(B, D) = 1 + 1 + 1 = 3,$

$d_T\,(A,D) = 2+2+2 = 6,$

$d_T\,(B,C) = 2+2+2 = 6$ olduğundan yönlendirmeye de dikkat edilirse

$(AB,CD)_T = \frac{d_T[AC]}{d_T[AD]} \cdot \frac{d_T[BD]}{d_T[BC]} = \frac{d_T(A,C)}{d_T(A,D)} \cdot \frac{-d_T(B,D)}{-d_T(B,C)} = \frac{3}{6} \cdot \frac{-3}{-6} = +\frac{1}{4}$ olur (Şekil 4.3.).



Şekil 4.3. Merkezil Taksi Kürede Çifte Oran

Örnek 4.2.4 *C ve D nin her ikisi de A ve B arasında değil iken R_T^3 deki $A=(2,2,2),\ B=(3,3,3), C=(1,1,1), D=(4,4,4)$ için çifte oran hesaplanırsa*

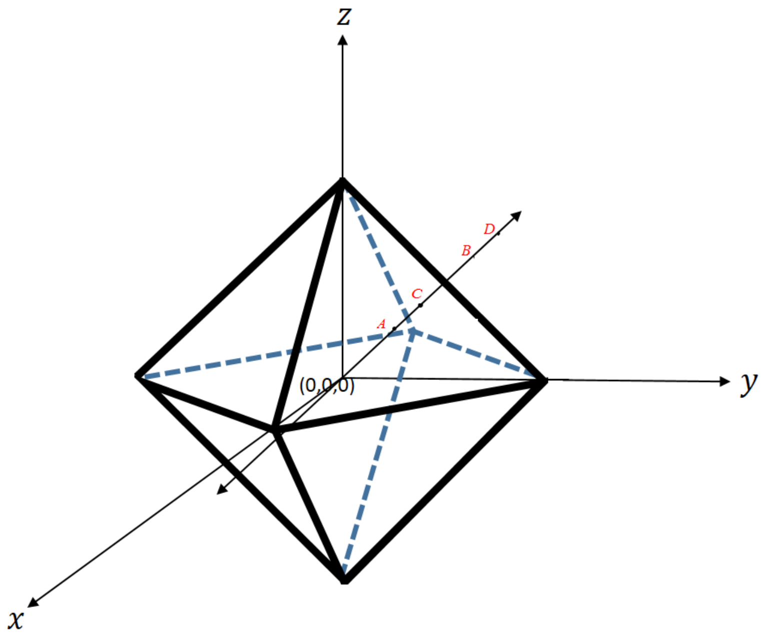
$d_T\,(A,C) = 1+1+1 = 3,$

$d_T\,(B,D) = 1+1+1 = 3,$

$d_T\,(A,D) = 2+2+2 = 6,$

$d_T\,(B,C) = 2+2+2 = 6$ olduğundan yönlendirmeye de dikkat edilirse

$(AB,CD)_T = \frac{d_T[AC]}{d_T[AD]} \cdot \frac{d_T[BD]}{d_T[BC]} = \frac{d_T(A,C)}{d_T(A,D)} \cdot \frac{-d_T(B,D)}{-d_T(B,C)} = \frac{3}{6} \cdot \frac{-3}{-6} = +\frac{1}{4}$ olur (Şekil 4.4.)



Şekil 4.4. Merkezil Taksi Kürede Çifte Oran

Örnek 4.2.5 *C noktası A ve B arasında iken D noktası arada olmazsa $\mathbb{R}^3_T$ deki $A = (2,2,2),\ B = (4,4,4), C = (1,1,1), D = (3,3,3)$ için çifte oran hesaplanırsa*

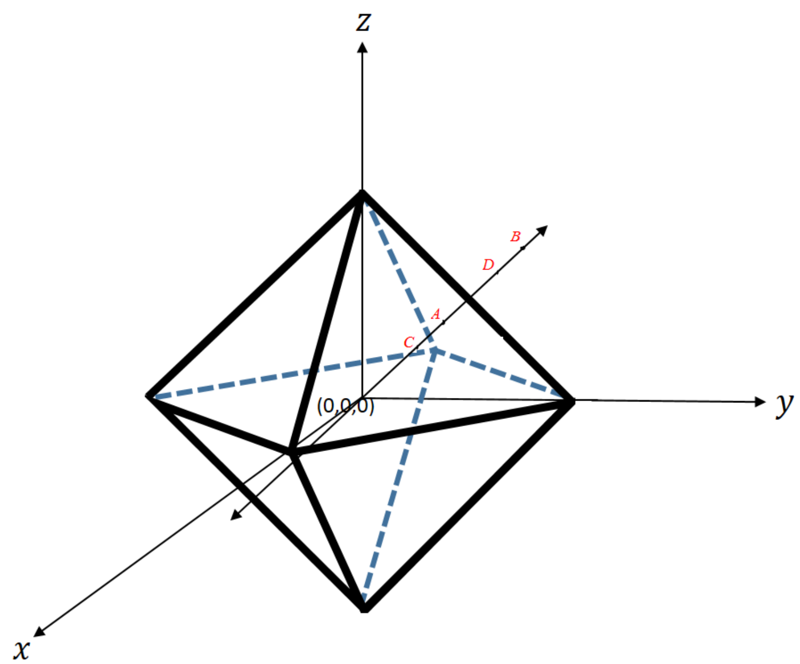
$d_T\,(A, C) = 1 + 1 + 1 = 3,$

$d_T\,(B, D) = 1 + 1 + 1 = 3,$

$d_T\,(A, D) = 2 + 2 + 2 = 6,$

$d_T\,(B, C) = 3 + 3 + 3 = 9$ olduğundan yönlendirmeye de dikkat edilirse

$(AB, CD)_T = \frac{d_T[AC]}{d_T[AD]} \cdot \frac{d_T[BD]}{d_T[BC]} = \frac{-d_T(A,C)}{d_T(A,D)} \cdot \frac{-d_T(B,D)}{-d_T(B,C)} = \frac{-3}{6} \cdot \frac{-3}{-9} = -\frac{1}{6}$ olur (Şekil 4.5.).



Şekil 4.5. Merkezil Taksi Kürede Çifte Oran

4.3 Harmonik Eşlenikler

Tanım 4.3.1 *A ve B, R^3_T de bir l doğrusu üzerindeki iki nokta olsun. l üzerindeki $\{C, D\}$ çifti için*

$$\frac{d_T[AC]}{d_T[CB]} = \frac{d_T[AD]}{d_T[DB]}$$

eşitliği sağlanıyorsa A ve B harmonik olarak bölünür denir. C ve D noktalarına A ve B ye göre taksi harmonik eşlenikler denir ve $H(AB, CD)_T$ ile gösterilir. C ve D noktalarının A ve B ye göre taksi harmonik eşlenik olması için gerek ve yeter koşulun $(AB, CD)_T = -1$ olduğu açıktır.

Teorem 4.3.2 *S, $O = (0, 0, 0)$ merkezli taksi küre ve $[A, B]$ doğru parçası S küresinin çapı olsun. $[A, B]$ yi içten ve dıştan bölen OA ışınının farklı iki noktası P ve P' olsun.*

P ve P' noktaları A ve B ye göre taksi harmonik eşlenik olması için gerek ve yeter koşul P ve P' noktalarının $I_{(O,r)}$ inversiyonuna göre invers noktalar olmasıdır.

İspat: P ve P' noktaları A ve B ye göre taksi harmonik eşlenik olsunlar. Böylece

$$(AB, PP')_T = -1,$$

$$\frac{d_T[AP]}{d_T[AP']} \cdot \frac{d_T[BP']}{d_T[BP]} = -1.$$

P noktası $[A, B]$ doğru parçasını içten böldüğünden ve P, OB ışını üzerinde olduğundan $d_T(P, B) = r - d_T(O, P)$ ve $d_T(A, P) = r + d_T(O, P)$ dır. P' noktası $[A, B]$ doğru parçasını dıştan böldüğünden ve P', OB ışını üzerinde olduğundan $d_T(A, P') = r + d_T(O, P')$ ve $d_T(B, P') = -r + d_T(O, P')$ dür. Böylece

$$\frac{r + d_T(O, P)}{r + d_T(O, P')} \cdot \frac{-r + d_T(O, P')}{-r + d_T(O, P)} = -1,$$

$$(r + d_T(O, P)) \cdot (-r + d_T(O, P')) = r^2 - r d_T(O, P) + r d_T(O, P') - d_T(O, P') \, d_T(O, P).$$

Buradan $d_T(O, P) \, d_T(O, P') = r^2$ elde edilir. Böylece P ve P' noktalarının taksi küresine göre $I_{(O,r)}$ inversiyonda invers noktalar olduğu ortaya çıkar. Tersine P ve P' noktaları $I_{(O,r)}$ inversiyonuna göre invers noktalar ise ispat benzerdir. □

5. 3-BOYUTLU ÇİN DAMA UZAYINDA ÇİN DAMA KÜRESEL İNVERSİYONLAR

$\mathbb{R}^3_c$ Çin dama uzayı, $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayı ile hemen hemen aynı özelliklere sahiptir. Örneğin noktaları, doğruları ve düzlemleri aynıdır ve açıları da aynı yolla ölçülür. Ancak uzaklık fonksiyonu farklıdır (Gelişgen, Kaya, Özcan, 2006).

$A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ için Öklid uzaklık fonksiyonu

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

iken

$A = (x_1, y_1, z_1), B = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3_c$ için Çin dama uzaklık fonksiyonu

$$d_L(A, B) = \max\left\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\right\}$$

ve

$$d_S(A, B) = \min\left\{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, |x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|, |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\right\}$$

olmak üzere

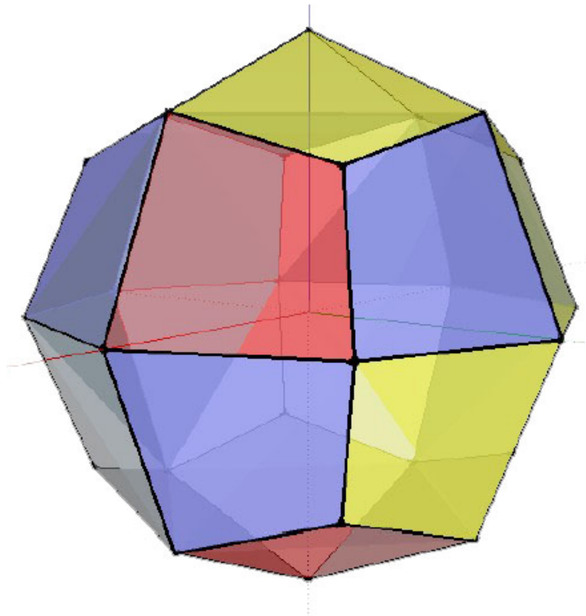
$$d_c(A, B) = d_L(A, B) + \left(\sqrt{2} - 1\right) d_S(A, B)$$

olarak tanımlanır.

$\mathbb{R}^3_c$ Çin dama uzayındaki merkezil birim küre ise

$$\max\left\{|x|, |y|, |z|\right\} + \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\left\{|x| + |y|, |x| + |z|, |y| + |z|\right\} = 1$$

denklemini sağlayan (x, y, z) noktalarının geometrik yeridir (Şekil 5.1.). Burada karşılaşılan küre Catalan cisimlerden biri olan herbir yüzü eş deltoidli yirmi dört yüzlü bir cisimdir.



Şekil 5.1. $\mathbb{R}_c^3$ Çin Dama Uzayında Merkezil Küre

5.1 Çin Dama Küresel İnversiyonlar

$\mathbb{R}_c^3$ de S Çin dama küresinin merkezi O ve yarıçapı r olsun. $I_{(O,r)}$ de Çin dama küresel inversiyonu uzaydaki P noktasını P' noktasına eşleyen aşağıdaki koşulları sağlayan bir dönüşümdür:

$$I_{(O,r)} : \mathbb{R}_c^3 - \{O\} \to \mathbb{R}_c^3 - \{O\}$$
$$I_{(O,r)}(P) = P'$$

i) P' noktası OP ışını üzerindedir.

ii) $d_c(O,P) \cdot d_c(O,P') = r^2$

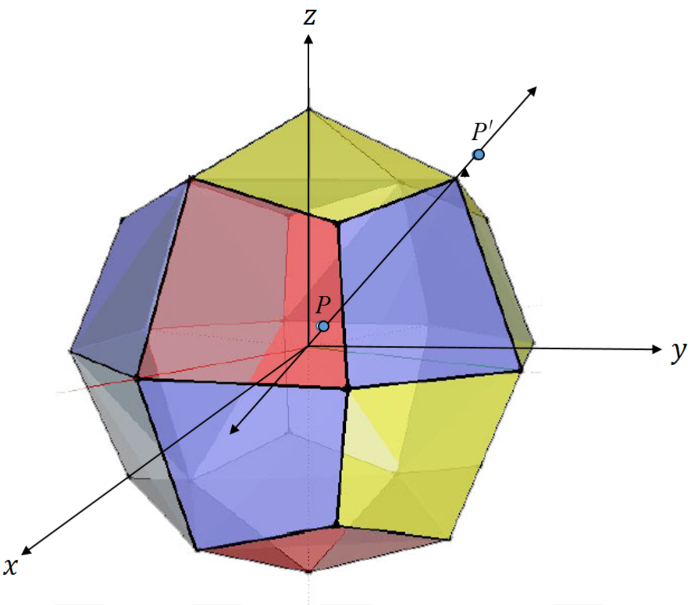
P' noktası P noktasının S küresine göre Çin dama küresel inversidir ve O da inversiyon merkezidir. Ayrıca bir S Çin dama küresine göre Çin dama küresel inversiyonu involusyonludur.

Teorem 5.1.1 *S, $I_{(O,r)}$ Çin dama küresel inversiyonunda O merkezli bir Çin dama küresi olsun. P noktası S nin dışında ise P nin inversi olan P' noktası kürenin içindedir (Şekil 5.2.). Tersi de geçerlidir.*

İspat: P noktası S nin dışında ise $d_c(O,P) > r$ olur. $P' = I_{(O,r)}(P)$ ise $d_c(O,P) \cdot d_c(O,P') = r^2$ .Böylece $r^2 = d_c(O,P) \cdot d_c(O,P') > r \cdot d_c(O,P')$ olduğundan

$$r > d_c(O,P')$$

olur. Tersi de benzer şekilde gösterilir. □



Şekil 5.2. Merkezil Çin Dama Küresinde İnvers Noktalar

Örnek 5.1.2 *$I_{(O,r)}$ Çin dama küresel inversiyonu, Çin dama inversiyon küresi üzerindeki noktayı kendisine dönüştürür. $O = (0,0,0)$, $r = 1$ olmak üzere $P = (1,0,0)$ noktası için P' noktası*

$d_c(O,P) = 1$ *olduğundan*

$$d_c(O,P) \cdot d_c(O,P') = 1,$$

$$1 \cdot d_c(O,P') = 1,$$

$$d_c(O,P') = 1 \text{ ve } P' = (1,0,0)$$

olarak bulunur. Böylece $I_{(O,r)}(P) = P$ dir.

Örnek 5.1.3 $I_{(O,r)}$ *inversiyonu, Çin dama inversiyon küresinin dışındaki noktayı küre içindeki bir noktaya dönüştürür.* $O = (0,0,0)$, $r = 1$ *ve* $P = (1,1,1)$ *noktası için* P' *noktası*

$d_c(O,P) = 2\sqrt{2} - 1$ *olduğundan*

$$d_c(O,P) \cdot d_c(O,P') = 1,$$

$$\left(2\sqrt{2} - 1\right) \cdot d_c(O,P') = 1,$$

O, P, P' *doğrudaş olduğundan*

$$d_c(O,P') = \frac{2\sqrt{2}+1}{7} \text{ ve } P' = \left(\frac{2\sqrt{2}+1}{7}, \frac{2\sqrt{2}+1}{7}, \frac{2\sqrt{2}+1}{7}\right)$$

olur.

Örnek 5.1.4 $I_{(O,r)}$ *inversiyonu, Çin dama inversiyon küresinin içindeki noktayı küre dışındaki bir noktaya dönüştürür.* $O = (0,0,0)$, $r = 1$ *ve* $P = (\frac{1}{2}, 0, 0)$ *noktası için* P' *noktası*

$d_c(O,P) = \frac{1}{2}$ *olduğundan*

$$d_c(O,P) \cdot d_c(O,P') = 1,$$

$$\frac{1}{2} \cdot d_c(O,P') = 1,$$

$$d_c(O,P') = 2 \text{ ve } P' = (2,0,0)$$

olarak bulunur.

Teorem 5.1.5 S, $\mathbb{R}^3_c$ *de merkezi* $O = (0,0,0)$ *olan* r *yarıçaplı Çin dama küresi için* $P \neq O$ *olmak üzere* $P = (x,y,z)$ *ve* $P' = (x',y',z')$ *noktaları* $I_{(O,r)}$ *Çin dama küresel inversiyonuna göre invers noktalar iseler* P *ile* P' *arasında*

$$P' = \frac{r^2}{\left(d_c(O,P)\right)^2} P$$

bağıntısı vardır.

İspat: S, $\mathbb{R}_c^3$ de merkezi $O=(0,0,0)$ olan r yarıçaplı Çin dama küresi ve $P=(x,y,z)$ ve $P'=(x',y',z')$ noktaları için

$$d_c(O,P)\cdot d_c(O,P')=r^2$$

$$\left(d_L(O,P)+\left(\sqrt{2}-1\right)d_S(O,P)\right)\cdot\left(d_L(O,P')+\left(\sqrt{2}-1\right)d_S(O,P')\right)=r^2$$

dir. Burada P ve P' noktalarının konumuna göre 6 farklı durum ortaya çıkar:

$$\begin{aligned} |x| &\geq |y|\geq|z|\,,\ \ |x|\geq|z|\geq|y|\,,\ \ |y|\geq|x|\geq|z|\,,\\ |y| &\geq |z|\geq|x|\,,\ \ |z|\geq|x|\geq|y|\ \text{ ve }\ |z|\geq|y|\geq|x| \end{aligned}$$

O,P,P' noktaları doğrudaş olduğundan $x'=kx$, $y'=ky$, $z'=kz$ olacak şekilde $k\in\mathbb{R}$ vardır. Böylece

$$\left(d_L(O,P)+\left(\sqrt{2}-1\right)d_S(O,P)\right)\cdot\left(kd_L(O,P')+k\left(\sqrt{2}-1\right)d_S(O,P')\right)=r^2$$

ve

$$d_c(O,P)=d_L(O,P)+\left(\sqrt{2}-1\right)d_S(O,P)$$

eşitliklerinden

$$k=\frac{r^2}{\left(d_c(O,P)\right)^2}$$

elde edilir ve bu ifade $x'=kx$, $y'=ky$, $z'=kz$ de yerine konulursa

$$x'=\frac{r^2x}{\left(d_c(O,P)\right)^2}$$

$$y'=\frac{r^2y}{\left(d_c(O,P)\right)^2}$$

$$z'=\frac{r^2z}{\left(d_c(O,P)\right)^2}$$

dir. Böylece

$$P'=\frac{r^2}{\left(d_c(O,P)\right)^2}P$$

sonucu ortaya çıkmış olur.

Teorem 5.1.6 $\mathbb{R}_c^3$ *de merkezi* $O = (a,b,c)$ *olan* r *yarıçaplı* S *Çin dama küresi için* $P \neq O$ *olmak üzere* $P = (x,y,z)$ *ve* $P' = (x',y',z')$ *noktaları* $I_{(O,r)}$ *Çin dama küresel inversiyonuna göre invers noktalar iseler* P *ile* P' *arasında*

$$P' - O = \frac{r^2}{(d_c(O,P))^2}(P - O)$$

bağıntısı vardır.

İspat: $\mathbb{R}_c^3$ de $O = (a,b,c)$ merkezli r yarıçaplı S Çin dama küresinin denklemi

$$d_L(O,P) + \left(\sqrt{2} - 1\right) d_S(O,P) = r$$

dir. Bu küreye göre $P = (x,y,z)$ ve $P' = (x',y',z')$ invers noktalar olduğundan

$$d_c(O,P) \cdot d_c(O,P') = r^2$$

şartını sağlar. Böylece P ve P' noktalarının konumuna göre 6 farklı durum ortaya çıkar:

$$|x-a| \geq |y-b| \geq |z-c|\,, |x-a| \geq |z-c| \geq |y-b|\,, |y-b| \geq |x-a| \geq |z-c|\,,$$

$$|y-b| \geq |z-c| \geq |x-a|\,, |z-c| \geq |x-a| \geq |y-b|\; ve\, |z-c| \geq |y-b| \geq |x-a|$$

O, P, P' noktaları doğrudaş olduğundan $x' - a = k(x-a)$,

$y' - b = k(y-b)$, $z' - c = k(z-c)$ olacak şekilde $k \in \mathbb{R}$ vardır. Böylece

$$(d_c(O,P)) \cdot (k \cdot d_c(O,P)) = r^2$$

eşitliğinden

$$k = \frac{r^2}{(d_c(O,P))^2}$$

olarak bulunur ve bu ifade $x' - a = k(x-a)$,$y' - b = k(y-b)$, $z' - c = k(z-c)$

ifadesinde yerlerine konulursa

$$x' = a + \frac{r^2(x-a)}{(d_c(O,P))^2}$$

$$y' = b + \frac{r^2\,(y-b)}{(d_c(O,P))^2}$$

$$z' = c + \frac{r^2\,(z-c)}{(d_c(O,P))^2}$$

ifadeleri elde edilir. Böylece

$$P' - O = \frac{r^2}{(d_c(O,P))^2}\,(P - O)$$

elde edilmiş olur. □

Teorem 5.1.7 *O,P, Q noktaları $\mathbb{R}_c^3$ de üç farklı doğrudaş nokta olsun. Eğer $I_{(O,r)}$ Çin dama küresel inversiyonu P yi P' ye ve Q yu Q' ye dönüştüren inversiyon ise*

$$d_c(P', Q') = \frac{r^2 \cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P) \cdot d_c(O,Q)}$$

dir.

İspat: *O,P, Q doğrudaş noktaları ve $I_{(O,r)}$ Çin dama küresel inversiyonuna göre P ile P' ve Q ile Q' invers noktalar olduğundan*

$$d_c(O,P) \cdot d_c(O,P') = r^2 = d_c(O,Q) \cdot d_c(O,Q')$$

dir.

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= |d_c(O,P') - d_c(O,Q')| \\ &= \left| \frac{r^2}{d_c(O,P)} - \frac{r^2}{d_c(O,Q)} \right| = \left| \frac{r^2\,(d_c(O,Q) - d_c(O,P))}{d_c(O,P) \cdot d_c(O,Q)} \right| \\ &= \frac{r^2 \cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P) \cdot d_c(O,Q)} \end{aligned}$$

elde edilir. □

Teoremle ilgili aşağıdaki örnekler verilebilir.

Örnek 5.1.8 $\mathbb{R}_c^3$ *de doğrudaş üç nokta* $O = (0,0,0)$, $P = (1,1,1)$, $Q = (2,2,2)$ *ve* $r = 2\sqrt{2}$ *olsun.* O *inversiyon merkezi olmak üzere*

P *noktasının merkeze uzaklığı*

$d_c(O,P) = \max\{1,1,1\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{2,2,2\} = 2\sqrt{2}-1,$

Q *noktasının merkeze uzaklığı*

$d_c(O,Q) = \max\{2,2,2\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{4,4,4\} = 4\sqrt{2}-2$ *ve* P *noktasının* Q *noktasına olan uzaklığı*

$d_c(P,Q) = \max\{1,1,1\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{2,2,2\} = 2\sqrt{2}-1,$

$d_c(O,P)\cdot d_c(O,P') = r^2$ *eşitliğinden* $d_c(O,P') = \frac{2\sqrt{2}+1}{7}$ *ve*

$$P' = \left(\frac{8(9+4\sqrt{2})}{45}, \frac{8(9+4\sqrt{2})}{45}, \frac{8(9+4\sqrt{2})}{45}\right),$$

$d_c(O,Q)\cdot d_c(O,Q') = r^2$ *eşitliğinden* $d_c(O,Q') = \frac{4\left(2\sqrt{2}+1\right)}{7}$ *ve*

$$Q' = \left(\frac{4(9+4\sqrt{2})}{45}, \frac{4(9+4\sqrt{2})}{45}, \frac{4(9+4\sqrt{2})}{45}\right),$$

$d_c(P',Q') = \frac{4(9+4\sqrt{2})}{45} + \left(\sqrt{2}-1\right)\frac{8(9+4\sqrt{2})}{45}$ *olur. Böylece*

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \frac{r^2\cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)} \\ &= \frac{8\cdot\left(2\sqrt{2}-1\right)}{\left(2\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(4\sqrt{2}-2\right)} \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır ve bu noktalar için teoremin ifadesindeki bağıntı sağlanmış olur.

Örnek 5.1.9 $\mathbb{R}_c^3$ *de doğrudaş olmayan üç nokta* $O = (0,0,0)$, $P = (1,0,0)$, $Q = (2,2,2)$ *ve* $r = 2\sqrt{2}$ *olsun.* O *inversiyon merkezi olmak üzere*

P *noktasının merkeze uzaklığı*

$d_c(O,P) = \max\{1,0,0\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{1,1,0\} = 1$ *ve*

Q *noktasının merkeze uzaklığı*

$d_c(O,Q) = \max\{2,2,2\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{4,4,4\} = 4\sqrt{2}-2$ *ve* P *noktasının* Q *noktasına olan uzaklığı*

$d_c(P,Q) = \max\{1,2,2\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{3,3,4\} = 3\sqrt{2}-1$ *olmak üzere*

$d_c(O,P)\cdot d_c(O,P') = r^2$ *den* $d_c(O,P') = 8$ *ve*

$$P' = (8,0,0)$$

$d_c(O,Q)\cdot d_c(O,Q') = r^2$ *den* $d_c(O,Q') = \frac{4\left(2\sqrt{2}+1\right)}{7}$ *ve*

$$Q' = \left(\frac{4(9+4\sqrt{2})}{45}, \frac{4(9+4\sqrt{2})}{45}, \frac{4(9+4\sqrt{2})}{45}\right)$$

şeklinde elde edilir. $d_c(P',Q') = \frac{4(9+4\sqrt{2})}{45} + \left(\sqrt{2}-1\right)8$ *olur böylece*

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \frac{r^2\cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)} \\ &\neq \frac{8\cdot\left(3\sqrt{2}-1\right)}{1\cdot\left(4\sqrt{2}-2\right)} \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Yani doğrudaş olmayan noktalar için teoremin ifadesinin geçerli olmadığı görülür.

Teorem 5.1.10 *O,P,Q noktaları $\mathbb{R}^3_c$ de doğrudaş olmayan üç nokta ve $I_{(O,r)}$ Çin dama küresel inversiyonu P yi P' ye ve Q yu Q' ye dönüştürsün. Bu taktirde uzayda doğrultusu* $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (-1,0,0)$, $u_3 = (0,1,0)$, $u_4 = (0,-1,0)$, $u_5 = (0,0,1)$, $u_6 = (0,0,-1)$, $u_7 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $u_8 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $u_9 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $u_{10} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $u_{11} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $u_{12} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $u_{13} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $u_{14} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $u_{15} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $u_{16} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $u_{17} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $u_{18} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ *olan*

$$D_1 = \{u_i \mid i \in 1,2,...,18\}$$

veya $v_1 = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}-1}, \frac{1}{2\sqrt{2}-1}, \frac{1}{2\sqrt{2}-1}\right)$, $v_2 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}-1}, \frac{1}{2\sqrt{2}-1}, \frac{1}{2\sqrt{2}-1}\right)$,

$v_3 = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}-1}, -\frac{1}{2\sqrt{2}-1}, \frac{1}{2\sqrt{2}-1}\right)$, $v_4 = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}-1}, \frac{1}{2\sqrt{2}-1}, -\frac{1}{2\sqrt{2}-1}\right)$,

$v_5 = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}-1}, -\frac{1}{2\sqrt{2}-1}, -\frac{1}{2\sqrt{2}-1}\right)$, $v_6 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}-1}, \frac{1}{2\sqrt{2}-1}, -\frac{1}{2\sqrt{2}-1}\right)$,

$v_7 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}-1}, -\frac{1}{2\sqrt{2}-1}, \frac{1}{2\sqrt{2}-1}\right)$, $v_8 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}-1}, -\frac{1}{2\sqrt{2}-1}, -\frac{1}{2\sqrt{2}-1}\right)$ *olan*

$$D_2 = \{v_i \mid i \in 1,2,...,8\}$$

veya $t_1 = \left(1, \sqrt{2}+1, 0\right)$, $t_2 = \left(1, -\left(\sqrt{2}+1\right), 0\right)$, $t_3 = \left(-1, \sqrt{2}+1, 0\right)$,

$t_4 = \left(-1, -\left(\sqrt{2}+1\right), 0\right)$, $t_5 = \left(1, 0, \sqrt{2}+1\right)$, $t_6 = \left(1, 0, -\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$,

$t_7 = \left(-1, 0, \sqrt{2}+1\right)$, $t_8 = \left(-1, 0, -\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$, $t_9 = \left(0, \sqrt{2}+1, 1\right)$,

$t_{10} = \left(0, -\left(\sqrt{2}+1\right), 1\right)$, $t_{11} = \left(0, \sqrt{2}+1, -1\right)$, $t_{12} = \left(0, -\left(\sqrt{2}+1\right), -1\right)$,
$t_{13} = \left(0, 1, \sqrt{2}+1\right)$, $t_{14} = \left(0, 1, -\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$, $t_{15} = \left(0, -1, \sqrt{2}+1\right)$,
$t_{16} = \left(0, -1, -\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$, $t_{17} = \left(\sqrt{2}+1, 0, 1\right)$, $t_{18} = \left(-\left(\sqrt{2}+1\right), 0, 1\right)$,
$t_{19} = \left(\sqrt{2}+1, 0, -1\right)$, $t_{20} = \left(-\left(\sqrt{2}+1\right), 0, -1\right)$, $t_{21} = \left(\sqrt{2}+1, 1, 0\right)$,
$t_{22} = \left(-\left(\sqrt{2}+1\right), 1, 0\right)$, $t_{23} = \left(\sqrt{2}+1, -1, 0\right)$, $t_{24} = \left(-\left(\sqrt{2}+1\right), -1, 0\right)$,
$t_{25} = \left(1, \sqrt{2}-1, 0\right)$, $t_{26} = \left(1, -\left(\sqrt{2}-1\right), 0\right)$, $t_{27} = \left(-1, \sqrt{2}-1, 0\right)$,
$t_{28} = \left(-1, -\left(\sqrt{2}-1\right), 0\right)$, $t_{29} = \left(1, 0, \sqrt{2}-1\right)$, $t_{30} = \left(1, 0, -\left(\sqrt{2}-1\right)\right)$,
$t_{31} = \left(-1, 0, \sqrt{2}-1\right)$, $t_{32} = \left(-1, 0, -\left(\sqrt{2}-1\right)\right)$, $t_{33} = \left(0, \sqrt{2}-1, 1\right)$,
$t_{34} = \left(0, -\left(\sqrt{2}-1\right), 1\right)$, $t_{35} = \left(0, \sqrt{2}-1, -1\right)$, $t_{36} = \left(0, -\left(\sqrt{2}-1\right), -1\right)$,
$t_{37} = \left(0, 1, \sqrt{2}-1\right)$, $t_{38} = \left(0, 1, -\left(\sqrt{2}-1\right)\right)$, $t_{39} = \left(0, -1, \sqrt{2}-1\right)$,
$t_{40} = \left(0, -1, -\left(\sqrt{2}-1\right)\right)$, $t_{41} = \left(\sqrt{2}-1, 0, 1\right)$, $t_{42} = \left(-\left(\sqrt{2}-1\right), 0, 1\right)$,
$t_{43} = \left(\sqrt{2}-1, 0, -1\right)$, $t_{44} = \left(-\left(\sqrt{2}-1\right), 0, -1\right)$, $t_{45} = \left(\sqrt{2}-1, 1, 0\right)$,
$t_{46} = \left(-\left(\sqrt{2}-1\right), 1, 0\right)$, $t_{47} = \left(\sqrt{2}-1, -1, 0\right)$, $t_{48} = \left(-\left(\sqrt{2}-1\right), -1, 0\right)$ *olan*

$$D_3 = \{t_i \mid i \in 1, 2, ..., 48\}$$

kümelerinin elemanı olan doğrular üzerinde alınan P ve Q noktaları için

$$d_c(P', Q') = \frac{r^2 \cdot d_c(P, Q)}{d_c(O, P) \cdot d_c(O, Q)}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: I.Durum $P, Q \in D_1$ için

1) $P = (p, 0, 0)$, $Q = (0, q, 0)$ iken $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O, P) = \max\{p, 0, 0\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{p, 0, 0\} = p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O, Q) = \max\{0, q, 0\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{0, 0, q\} = q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p}, 0, 0\right), \; Q' = \left(0, \frac{r^2}{q}, 0\right)$$

bulunur (Şekil 5.3.). Buradan da

$$d_c(P',Q') = \max\left\{\left|\frac{r^2}{p}\right|, \left|\frac{r^2}{q}\right|, 0\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\left|\frac{r^2}{p}+\frac{r^2}{q}\right|, \left|\frac{r^2}{p}\right|, \left|\frac{r^2}{q}\right|\right\}$$

elde edilir. $d_c(P',Q')$ iki ayrı durumda incelenir:

i) $\left|\frac{r^2}{p}\right| \geq \left|\frac{r^2}{q}\right|$ olması halinde

$$d_c(P',Q') = \left|\frac{r^2}{p}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left|\frac{r^2}{q}\right| = \frac{r^2\left(|q| + \left(\sqrt{2}-1\right)|p|\right)}{|p|\cdot|q|} = \frac{r^2\cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

ii) $\left|\frac{r^2}{p}\right| \leq \left|\frac{r^2}{q}\right|$ olması halinde ise

$$d_c(P',Q') = \left|\frac{r^2}{q}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left|\frac{r^2}{p}\right| = \frac{r^2\left(|p| + \left(\sqrt{2}-1\right)|q|\right)}{|p|\cdot|q|} = \frac{r^2\cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

2) P ve Q noktaları $P=(p,0,0)$, $Q=(0,0,q)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O,P) = \max\{p,0,0\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{p,0,0\} = p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O,Q) = \max\{0,0,q\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{0,0,q\} = q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p},0,0\right),\ Q' = \left(0,0,\frac{r^2}{q}\right)$$

bulunur. Buradan da

$$d_c(P',Q') = \max\left\{\left|\frac{r^2}{p}\right|, 0, \left|\frac{r^2}{q}\right|\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\left|\frac{r^2}{p}\right|, \left|\frac{r^2}{p}+\frac{r^2}{q}\right|, \left|\frac{r^2}{q}\right|\right\}$$

elde edilir. $d_c(P',Q')$ iki ayrı durumda incelenir:

i) $\left|\frac{r^2}{p}\right| \geq \left|\frac{r^2}{q}\right|$ olması halinde

$$d_c(P',Q') = \left|\frac{r^2}{p}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left|\frac{r^2}{q}\right| = \frac{r^2\left(|q| + \left(\sqrt{2}-1\right)|p|\right)}{|p|\cdot|q|} = \frac{r^2\cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

ii) $\left|\frac{r^2}{p}\right| \leq \left|\frac{r^2}{q}\right|$ olması halinde ise

$$d_c(P',Q') = \left|\frac{r^2}{q}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left|\frac{r^2}{p}\right| = \frac{r^2\left(|p| + \left(\sqrt{2}-1\right)|q|\right)}{|p|\cdot|q|} = \frac{r^2\cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

3) P ve Q noktaları $P=(p,0,0)$, $Q=\left(\frac{q}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}},0\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O,P) = \max\{p,0,0\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{p,0,0\} = p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O,Q) = \max\left\{\frac{q}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}},0\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}q,\frac{q}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}}\right\} = q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p},0,0\right),\ Q' = \left(\frac{r^2}{q\sqrt{2}},\frac{r^2}{q\sqrt{2}},0\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') \;&=\; \max\left\{\left|\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|,\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|,0\right\} + \\ &\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\left|\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|,\left|\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|,\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\} \end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P',Q') = \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left|\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| = \frac{r^2\cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

4) P ve Q noktaları $P=(p,0,0)$, $Q=\left(-\frac{q}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}},0\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O,P) = \max\{p,0,0\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{p,0,0\} = p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O,Q) = \max\left\{\frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}, 0\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}q, \frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}\right\} = q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p}, 0, 0\right), \; Q' = \left(-\frac{r^2}{q\sqrt{2}}, \frac{r^2}{q\sqrt{2}}, 0\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \max\left\{\left|\frac{r^2}{p} + \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, 0\right\} + \\ &\quad \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\left|\frac{r^2}{p} + \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{p} + \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\} \end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P',Q') = \left|\frac{r^2}{p} + \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| = \frac{r^2 \cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P) \cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

5) P ve Q noktaları $P = (p,0,0)$, $Q = \left(\frac{q}{\sqrt{2}}, 0, \frac{q}{\sqrt{2}}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O,P) = \max\{p,0,0\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{p,0,0\} = p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O,Q) = \max\left\{\frac{q}{\sqrt{2}}, 0, \frac{q}{\sqrt{2}}\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}q, \frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}\right\} = q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p}, 0, 0\right), \; Q' = \left(\frac{r^2}{q\sqrt{2}}, 0, \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \max\left\{\left|\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, 0\right\} + \\ &\quad \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\left|\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\} \end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P',Q') = \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left|\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| = \frac{r^2 \cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P) \cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

6) P ve Q noktaları $P = (p, 0, 0)$, $Q = \left(-\frac{q}{\sqrt{2}}, 0, \frac{q}{\sqrt{2}}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O, P) = \max\{p, 0, 0\} + \left(\sqrt{2} - 1\right)\min\{p, 0, 0\} = p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O, Q) = \max\left\{\frac{q}{\sqrt{2}}, 0, \frac{q}{\sqrt{2}}\right\} + \left(\sqrt{2} - 1\right)\min\left\{\sqrt{2}q, \frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}\right\} = q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p}, 0, 0\right), \; Q' = \left(-\frac{r^2}{q\sqrt{2}}, 0, \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P', Q') &= \max\left\{\left|\frac{r^2}{p} + \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, 0\right\} + \\ &\left(\sqrt{2} - 1\right)\min\left\{\left|\frac{r^2}{p} + \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{p} + \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\} \end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P', Q') = \left|\frac{r^2}{p} + \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left(\sqrt{2} - 1\right)\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| = \frac{r^2 \cdot d_c(P, Q)}{d_c(O, P) \cdot d_c(O, Q)}$$

olur.

7) P ve Q noktaları $P = (p, 0, 0)$, $Q = \left(0, \frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O, P) = \max\{p, 0, 0\} + \left(\sqrt{2} - 1\right)\min\{p, 0, 0\} = p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O, Q) = \max\left\{0, \frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}\right\} + \left(\sqrt{2} - 1\right)\min\left\{\frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}q\right\} = q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p}, 0, 0\right), \; Q' = \left(0, \frac{r^2}{q\sqrt{2}}, \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \max\left\{\left|\frac{r^2}{p}\right|,\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|,\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\}+ \\ &\quad \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\left|\frac{r^2}{p}\right|+\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|,\left|\frac{r^2}{p}\right|+\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|,\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|+\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\} \end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P',Q')=\left|\frac{r^2}{p}\right|+\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|+\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right)=\frac{r^2\cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

8) P ve Q noktaları $P=(p,0,0)$, $Q=\left(0,-\frac{q}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O,P) = \max\{p,0,0\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{p,0,0\} = p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O,Q)=\max\left\{0,\frac{q}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}}\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\frac{q}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}},\sqrt{2}q\right\}=q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P'=\left(\frac{r^2}{p},0,0\right),\ Q'=\left(0,-\frac{r^2}{q\sqrt{2}},\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \max\left\{\left|\frac{r^2}{p}\right|,\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|,\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\}+ \\ &\quad \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\left|\frac{r^2}{p}\right|+\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|,\left|\frac{r^2}{p}\right|+\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|,\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|+\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\} \end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P',Q')=\left|\frac{r^2}{p}\right|+\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|+\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right)=\frac{r^2\cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

9) P ve Q noktaları $P=(0,p,0)$, $Q=(0,0,q)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O,P) = \max\{0,p,0\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{0,p,0\} = p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O,Q) = \max\{0,0,q\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{0,0,q\} = q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P' = \left(0, \frac{r^2}{p}, 0\right),\ Q' = \left(0, 0, \frac{r^2}{q}\right)$$

bulunur. Buradan da

$$d_c(P',Q') = \max\left\{0, \left|\frac{r^2}{p}\right|, \left|\frac{r^2}{q}\right|\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\left|\frac{r^2}{p}\right|, \left|\frac{r^2}{q}\right|, \left|\frac{r^2}{p}\right| + \left|\frac{r^2}{q}\right|\right\}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P',Q') = \left|\frac{r^2}{p}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left|\frac{r^2}{q}\right| = \frac{r^2 \cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

10) P ve Q noktaları $P = (0,p,0)$, $Q = \left(\frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}, 0\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O,P) = \max\{0,p,0\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{0,p,0\} = p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O,Q) = \max\left\{\frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}, 0\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}q, \frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}\right\} = q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P' = \left(0, \frac{r^2}{p}, 0\right),\ Q' = \left(\frac{r^2}{q\sqrt{2}}, \frac{r^2}{q\sqrt{2}}, 0\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') \ = \ & \max\left\{\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, 0\right\} + \\ & \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\left|\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\} \end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P',Q') = \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left|\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| = \frac{r^2 \cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

11) P ve Q noktaları $P=(0,p,0)$, $Q=\left(-\frac{q}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}},0\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O,P)=\max\{0,p,0\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\{0,p,0\}=p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O,Q)=\max\left\{\frac{q}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}},0\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}q,\frac{q}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}}\right\}=q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P'=\left(0,\frac{r^2}{p},0\right),\ Q'=\left(-\frac{r^2}{q\sqrt{2}},\frac{r^2}{q\sqrt{2}},0\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \max\left\{\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|,\left|\frac{r^2}{p}+\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|,0\right\}+ \\ &\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\left|\frac{r^2}{p}+\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|+\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|,\left|\frac{r^2}{p}+\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|,\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\} \end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P',Q')=\left|\frac{r^2}{p}+\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|+\left(\sqrt{2}-1\right)\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|=\frac{r^2\cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

12) P ve Q noktaları $P=(0,p,0)$, $Q=\left(\frac{q}{\sqrt{2}},0,\frac{q}{\sqrt{2}}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O,P)=\max\{0,p,0\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\{0,p,0\}=p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O,Q)=\max\left\{\frac{q}{\sqrt{2}},0,\frac{q}{\sqrt{2}}\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}q,\frac{q}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}}\right\}=q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P'=\left(0,\frac{r^2}{p},0\right),\ Q'=\left(\frac{r^2}{q\sqrt{2}},0,\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P', Q') &= \max\left\{\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{p}\right|, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\} + \\ & \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{p}\right|, \left|\frac{r^2}{p}\right| + \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\} \end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P', Q') = \left|\frac{r^2}{p}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right) = \frac{r^2 \cdot d_c(P, Q)}{d_c(O, P) \cdot d_c(O, Q)}$$

olur.

13) P ve Q noktaları $P = (0, p, 0)$, $Q = \left(-\frac{q}{\sqrt{2}}, 0, \frac{q}{\sqrt{2}}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O, P) = \max\{0, p, 0\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{0, p, 0\} = p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O, Q) = \max\left\{\frac{q}{\sqrt{2}}, 0, \frac{q}{\sqrt{2}}\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}q, \frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}\right\} = q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P' = \left(0, \frac{r^2}{p}, 0\right), \; Q' = \left(-\frac{r^2}{q\sqrt{2}}, 0, \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P', Q') &= \max\left\{\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{p}\right|, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\} + \\ & \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{p}\right|, \left|\frac{r^2}{p}\right| + \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\} \end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P', Q') = \left|\frac{r^2}{p}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right) = \frac{r^2 \cdot d_c(P, Q)}{d_c(O, P) \cdot d_c(O, Q)}$$

olur.

14) P ve Q noktaları $P = (0, p, 0)$, $Q = \left(0, \frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O,P) = \max\{0,p,0\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{0,p,0\} = p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O,Q) = \max\left\{0, \frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}q\right\} = q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P' = \left(0, \frac{r^2}{p}, 0\right),\ Q' = \left(0, \frac{r^2}{q\sqrt{2}}, \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \max\left\{0, \left|\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\} + \\ &\quad \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\left|\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\} \end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P',Q') = \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\left|\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right) = \frac{r^2 \cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

15) P ve Q noktaları $P = (0,p,0)$, $Q = \left(0, -\frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O,P) = \max\{0,p,0\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{0,p,0\} = p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O,Q) = \max\left\{0, \frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}q\right\} = q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P' = \left(0, \frac{r^2}{p}, 0\right),\ Q' = \left(0, -\frac{r^2}{q\sqrt{2}}, \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \max\left\{0, \left|\frac{r^2}{p} + \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\} + \\ &\quad \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\left|\frac{r^2}{p} + \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{p} + \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\} \end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P',Q') = \left|\frac{r^2}{p} + \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| = \frac{r^2 \cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

16) P ve Q noktaları $P=(0,0,p)$, $Q=\left(\frac{q}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}},0\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O,P) = \max\{0,0,p\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{0,0,p\} = p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O,Q) = \max\left\{\frac{q}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}},0\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}q,\frac{q}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}}\right\} = q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P' = \left(0,0,\frac{r^2}{p}\right),\ Q' = \left(\frac{r^2}{q\sqrt{2}},\frac{r^2}{q\sqrt{2}},0\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \max\left\{\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|,\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|,\left|\frac{r^2}{p}\right|\right\} + \\ &\quad \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|,\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{p}\right|,\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{p}\right|\right\} \end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P',Q') = \left|\frac{r^2}{p}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right) = \frac{r^2 \cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

17) P ve Q noktaları $P=(0,0,p)$, $Q=\left(-\frac{q}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}},0\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O,P) = \max\{0,0,p\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{0,0,p\} = p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O,Q) = \max\left\{\frac{q}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}},0\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}q,\frac{q}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}}\right\} = q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P' = \left(0, 0, \frac{r^2}{p}\right),\ Q' = \left(-\frac{r^2}{q\sqrt{2}}, \frac{r^2}{q\sqrt{2}}, 0\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P', Q') &= \max\left\{\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{p}\right|\right\} + \\ &\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{p}\right|, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{p}\right|\right\} \end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P', Q') = \left|\frac{r^2}{p}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right) = \frac{r^2 \cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P) \cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

18) P ve Q noktaları $P = (0,0,p)$, $Q = \left(\frac{q}{\sqrt{2}}, 0, \frac{q}{\sqrt{2}}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O,P) = \max\{0,0,p\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{0,0,p\} = p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O,Q) = \max\left\{\frac{q}{\sqrt{2}}, 0, \frac{q}{\sqrt{2}}\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}q, \frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}\right\} = q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P' = \left(0, 0, \frac{r^2}{p}\right),\ Q' = \left(\frac{r^2}{q\sqrt{2}}, 0, \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P', Q') &= \max\left\{\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, 0, \left|\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\} + \\ &\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\} \end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P', Q') = \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\left|\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right) = \frac{r^2 \cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P) \cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

19) P ve Q noktaları $P=(0,0,p)$, $Q=\left(-\frac{q}{\sqrt{2}},0,\frac{q}{\sqrt{2}}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O,P)\ =\ \max\{0,0,p\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\{0,0,p\}\ =\ p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O,Q)=\max\left\{\frac{q}{\sqrt{2}},0,\frac{q}{\sqrt{2}}\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}q,\frac{q}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}}\right\}=q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P'=\left(0,0,\frac{r^2}{p}\right),\ Q'=\left(-\frac{r^2}{q\sqrt{2}},0,\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \max\left\{\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|,0,\left|\frac{r^2}{p}-\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\}+ \\ &\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|,\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|+\left|\frac{r^2}{p}-\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|,\left|\frac{r^2}{p}-\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\} \end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P',Q')=\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|+\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\left|\frac{r^2}{p}-\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right)=\frac{r^2\cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

20) P ve Q noktaları $P=(0,0,p)$, $Q=\left(0,\frac{q}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O,P)\ =\ \max\{0,0,p\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\{0,0,p\}\ =\ p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O,Q)=\max\left\{0,\frac{q}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}}\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\frac{q}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}},\sqrt{2}q\right\}=q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P'=\left(0,0,\frac{r^2}{p}\right),\ Q'=\left(0,\frac{r^2}{q\sqrt{2}},\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right)$$

bulunur. Buradan da

$$
\begin{aligned}
d_c(P',Q') &= \max\left\{0, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\} + \\
&\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\left|\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\}
\end{aligned}
$$

ve işlemler yapıldığında

$$
d_c(P',Q') = \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\left|\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right) = \frac{r^2 \cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P) \cdot d_c(O,Q)}
$$

olur.

21) P ve Q noktaları $P = (0,0,p)$, $Q = \left(0, -\frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O,P) = \max\{0,0,p\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{0,0,p\} = p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O,Q) = \max\left\{0, \frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}q\right\} = q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$
P' = \left(0, 0, \frac{r^2}{p}\right), \quad Q' = \left(0, -\frac{r^2}{q\sqrt{2}}, \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right)
$$

bulunur. Buradan da

$$
\begin{aligned}
d_c(P',Q') &= \max\left\{0, \left|\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\} + \\
&\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\left|\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\}
\end{aligned}
$$

ve işlemler yapıldığında

$$
d_c(P',Q') = \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left|\frac{r^2}{p} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| = \frac{r^2 \cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P) \cdot d_c(O,Q)}
$$

olur.

22) P ve Q noktaları $P = \left(\frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $Q = \left(-\frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}, 0\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O,P) = \max\left\{\frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}, 0\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}p, \frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right\} = p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O,Q) = \max\left\{\frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}, 0\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}q, \frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}\right\} = q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p\sqrt{2}}, \frac{r^2}{p\sqrt{2}}, 0\right),\ Q' = \left(-\frac{r^2}{q\sqrt{2}}, \frac{r^2}{q\sqrt{2}}, 0\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \max\left\{\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}} + \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, 0\right\} + \\ &\quad \left(\sqrt{2}-1\right)\frac{r^2}{\sqrt{2}}\min\left\{\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right| + \left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|, \left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|, \left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|\right\} \end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P',Q') = \left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}} + \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right) = \frac{r^2 \cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

23) P ve Q noktaları $P = \left(\frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $Q = \left(\frac{q}{\sqrt{2}}, 0, \frac{q}{\sqrt{2}}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O,P) = \max\left\{\frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}, 0\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}p, \frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right\} = p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O,Q) = \max\left\{\frac{q}{\sqrt{2}}, 0, \frac{q}{\sqrt{2}}\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}q, \frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}\right\} = q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p\sqrt{2}}, \frac{r^2}{p\sqrt{2}}, 0\right),\ Q' = \left(\frac{r^2}{q\sqrt{2}}, 0, \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \max\left\{\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\} + \\ &\quad \left(\sqrt{2}-1\right)\frac{r^2}{\sqrt{2}}\min\left\{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right| + \left|\frac{1}{p}\right|, \left|\frac{1}{q}\right| + \left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|, \left|\frac{1}{p}\right| + \left|\frac{1}{q}\right|\right\} \end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P',Q') = \left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right|\right) = \frac{r^2 \cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

24) P ve Q noktaları $P = \left(\frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $Q = \left(-\frac{q}{\sqrt{2}}, 0, \frac{q}{\sqrt{2}}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O,P) = \max\left\{\frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}, 0\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}p, \frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right\} = p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O,Q) = \max\left\{\frac{q}{\sqrt{2}}, 0, \frac{q}{\sqrt{2}}\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}q, \frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}\right\} = q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p\sqrt{2}}, \frac{r^2}{p\sqrt{2}}, 0\right),\ Q' = \left(-\frac{r^2}{q\sqrt{2}}, 0, \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \max\left\{\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}} + \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\} + \\ &\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{r^2}{\sqrt{2}}\min\left\{\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right| + \left|\frac{1}{p}\right|, \left|\frac{1}{q}\right| + \left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|, \left|\frac{1}{p}\right| + \left|\frac{1}{q}\right|\right\} \end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P',Q') = \left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}} + \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right) = \frac{r^2 \cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

25) P ve Q noktaları $P = \left(\frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $Q = \left(0, \frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O,P) = \max\left\{\frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}, 0\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}p, \frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right\} = p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O,Q) = \max\left\{0, \frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}q\right\} = q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p\sqrt{2}}, \frac{r^2}{p\sqrt{2}}, 0\right), \; Q' = \left(0, \frac{r^2}{q\sqrt{2}}, \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P', Q') &= \max\left\{\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\} + \\ &\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{r^2}{\sqrt{2}}\min\left\{\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right| + \left|\frac{1}{p}\right|, \left|\frac{1}{q}\right| + \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right|, \left|\frac{1}{p}\right| + \left|\frac{1}{q}\right|\right\} \end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P', Q') = \left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right|\right) = \frac{r^2 \cdot d_c(P, Q)}{d_c(O, P) \cdot d_c(O, Q)}$$

olur.

26) P ve Q noktaları $P = \left(\frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $Q = \left(0, -\frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O, P) = \max\left\{\frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}, 0\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}p, \frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right\} = p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O, Q) = \max\left\{0, \frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}q\right\} = q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p\sqrt{2}}, \frac{r^2}{p\sqrt{2}}, 0\right) \; Q' = \left(0, -\frac{r^2}{q\sqrt{2}}, \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P', Q') &= \max\left\{\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}} + \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\} + \\ &\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{r^2}{\sqrt{2}}\min\left\{\left|\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right| + \left|\frac{1}{p}\right|, \left|\frac{1}{q}\right| + \left|\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right|, \left|\frac{1}{p}\right| + \left|\frac{1}{q}\right|\right\} \end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P', Q') = \left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}} + \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right) = \frac{r^2 \cdot d_c(P, Q)}{d_c(O, P) \cdot d_c(O, Q)}$$

olur.

27) P ve Q noktaları $P = \left(-\frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $Q = \left(\frac{q}{\sqrt{2}}, 0, \frac{q}{\sqrt{2}}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O,P) = \max\left\{\frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}, 0\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}p, \frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right\} = p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O,Q) = \max\left\{\frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}, 0\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}q, \frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}\right\} = q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P' = \left(-\frac{r^2}{p\sqrt{2}}, \frac{r^2}{p\sqrt{2}}, 0\right),\ Q' = \left(\frac{r^2}{q\sqrt{2}}, 0, \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') \;&=\; \max\left\{\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}} + \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\} + \\ &\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{r^2}{\sqrt{2}}\min\left\{\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right| + \left|\frac{1}{p}\right|, \left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right| + \left|\frac{1}{q}\right|, \left|\frac{1}{p}\right| + \left|\frac{1}{q}\right|\right\} \end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P',Q') = \left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}} + \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right) = \frac{r^2 \cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

28) P ve Q noktaları $P = \left(-\frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $Q = \left(-\frac{q}{\sqrt{2}}, 0, \frac{q}{\sqrt{2}}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O,P) = \max\left\{\frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}, 0\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}p, \frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right\} = p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O,Q) = \max\left\{\frac{q}{\sqrt{2}}, 0, \frac{q}{\sqrt{2}}\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}q, \frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}\right\} = q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P' = \left(-\frac{r^2}{p\sqrt{2}}, \frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right), 0,\ Q' = \left(-\frac{r^2}{q\sqrt{2}}, 0, \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \max\left\{\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}-\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|,\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right|,\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\}+ \\ & \left(\sqrt{2}-1\right)\frac{r^2}{\sqrt{2}}\min\left\{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|+\left|\frac{1}{p}\right|,\left|\frac{1}{q}\right|+\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|,\left|\frac{1}{p}\right|+\left|\frac{1}{q}\right|\right\}\end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P',Q')=\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right|+\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|+\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}-\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right)=\frac{r^2\cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

29) P ve Q noktaları $P=\left(-\frac{p}{\sqrt{2}},\frac{p}{\sqrt{2}},0\right)$, $Q=\left(0,\frac{q}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O,P)=\max\left\{\frac{p}{\sqrt{2}},\frac{p}{\sqrt{2}},0\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}p,\frac{p}{\sqrt{2}},\frac{p}{\sqrt{2}}\right\}=p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O,Q)=\max\left\{0,\frac{q}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}}\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\frac{q}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}},\sqrt{2}q\right\}=q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P'=\left(-\frac{r^2}{p\sqrt{2}},\frac{r^2}{p\sqrt{2}},0\right),\ Q'=\left(0,\frac{r^2}{q\sqrt{2}},\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \max\left\{\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}-\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|,\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right|,\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\}+ \\ & \left(\sqrt{2}-1\right)\frac{r^2}{\sqrt{2}}\min\left\{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|+\left|\frac{1}{p}\right|,\left|\frac{1}{q}\right|+\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|,\left|\frac{1}{p}\right|+\left|\frac{1}{q}\right|\right\}\end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P',Q')=\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right|+\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}-\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|+\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right|\right)=\frac{r^2\cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

30) P ve Q noktaları $P=\left(-\frac{p}{\sqrt{2}},\frac{p}{\sqrt{2}},0\right)$, $Q=\left(0,-\frac{q}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O,P) = \max\left\{\frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}, 0\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}p, \frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right\} = p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O,Q) = \max\left\{0, \frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}q\right\} = q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P' = \left(-\frac{r^2}{p\sqrt{2}}, \frac{r^2}{p\sqrt{2}}, 0\right),\ Q' = \left(0, -\frac{r^2}{q\sqrt{2}}, \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \max\left\{\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}} + \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\} + \\ &\quad \left(\sqrt{2}-1\right)\frac{r^2}{\sqrt{2}}\min\left\{\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right| + \left|\frac{1}{p}\right|, \left|\frac{1}{q}\right| + \left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|, \left|\frac{1}{p}\right| + \left|\frac{1}{q}\right|\right\} \end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P',Q') = \left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}} + \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right) = \frac{r^2 \cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

31) P ve Q noktaları $P = \left(\frac{p}{\sqrt{2}}, 0, \frac{p}{\sqrt{2}}\right)$, $Q = \left(-\frac{q}{\sqrt{2}}, 0, \frac{q}{\sqrt{2}}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O,P) = \max\left\{\frac{p}{\sqrt{2}}, 0, \frac{p}{\sqrt{2}}\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}p, \frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right\} = p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O,Q) = \max\left\{\frac{q}{\sqrt{2}}, 0, \frac{q}{\sqrt{2}}\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}q, \frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}\right\} = q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p\sqrt{2}}, 0, \frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right),\ Q' = \left(-\frac{r^2}{q\sqrt{2}}, 0, \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \max\left\{\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}} + \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, 0, \left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\} + \\ &\quad \left(\sqrt{2}-1\right)\frac{r^2}{\sqrt{2}}\min\left\{\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|, \left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|, \left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right| + \left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|\right\} \end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P',Q') = \left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}} + \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right) = \frac{r^2 \cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

32) P ve Q noktaları $P = \left(\frac{p}{\sqrt{2}}, 0, \frac{p}{\sqrt{2}}\right)$, $Q = \left(0, \frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O,P) = \max\left\{\frac{p}{\sqrt{2}}, 0, \frac{p}{\sqrt{2}}\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}p, \frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right\} = p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O,Q) = \max\left\{0, \frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}q\right\} = q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p\sqrt{2}}, 0, \frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right),\; Q' = \left(0, \frac{r^2}{q\sqrt{2}}, \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \max\left\{\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\} + \\ &\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{r^2}{\sqrt{2}}\min\left\{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right| + \left|\frac{1}{p}\right|, \left|\frac{1}{q}\right| + \left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|, \left|\frac{1}{p}\right| + \left|\frac{1}{q}\right|\right\} \end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P',Q') = \left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right|\right) = \frac{r^2 \cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

33) P ve Q noktaları $P = \left(\frac{p}{\sqrt{2}}, 0, \frac{p}{\sqrt{2}}\right)$, $Q = \left(0, -\frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O,P) = \max\left\{\frac{p}{\sqrt{2}}, 0, \frac{p}{\sqrt{2}}\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}p, \frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right\} = p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O,Q) = \max\left\{0, \frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}q\right\} = q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P' = \left(\frac{r^2}{p\sqrt{2}}, 0, \frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right),\ Q' = \left(0, -\frac{r^2}{q\sqrt{2}}, \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P', Q') &= \max\left\{\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}} + \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\} + \\ &\quad \left(\sqrt{2}-1\right)\frac{r^2}{\sqrt{2}}\min\left\{\left|\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right| + \left|\frac{1}{p}\right|, \left|\frac{1}{q}\right| + \left|\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right|, \left|\frac{1}{p}\right| + \left|\frac{1}{q}\right|\right\} \end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P', Q') = \left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}} + \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right) = \frac{r^2 \cdot d_c(P, Q)}{d_c(O, P) \cdot d_c(O, Q)}$$

olur.

34) P ve Q noktaları $P = \left(-\frac{p}{\sqrt{2}}, 0, \frac{p}{\sqrt{2}}\right)$, $Q = \left(0, \frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O, P) = \max\left\{\frac{p}{\sqrt{2}}, 0, \frac{p}{\sqrt{2}}\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}p, \frac{p}{\sqrt{2}}, \frac{p}{\sqrt{2}}\right\} = p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O, Q) = \max\left\{0, \frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\frac{q}{\sqrt{2}}, \frac{q}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}q\right\} = q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P' = \left(-\frac{r^2}{p\sqrt{2}}, 0, \frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right),\ Q' = \left(0, \frac{r^2}{q\sqrt{2}}, \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P', Q') &= \max\left\{\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\} + \\ &\quad \left(\sqrt{2}-1\right)\frac{r^2}{\sqrt{2}}\min\left\{\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right| + \left|\frac{1}{p}\right|, \left|\frac{1}{q}\right| + \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right|, \left|\frac{1}{p}\right| + \left|\frac{1}{q}\right|\right\} \end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P', Q') = \left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}} - \frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right|\right) = \frac{r^2 \cdot d_c(P, Q)}{d_c(O, P) \cdot d_c(O, Q)}$$

olur.

35) P ve Q noktaları $P=\left(-\frac{p}{\sqrt{2}},0,\frac{p}{\sqrt{2}}\right)$, $Q=\left(0,-\frac{q}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O,P)=\max\left\{\frac{p}{\sqrt{2}},0,\frac{p}{\sqrt{2}}\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}p,\frac{p}{\sqrt{2}},\frac{p}{\sqrt{2}}\right\}=p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O,Q)=\max\left\{0,\frac{q}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}}\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\frac{q}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}},\sqrt{2}q\right\}=q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P'=\left(-\frac{r^2}{p\sqrt{2}},0,\frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right),\ Q'=\left(0,-\frac{r^2}{q\sqrt{2}},\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \max\left\{\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}-\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|,\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right|,\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\}+ \\ & \left(\sqrt{2}-1\right)\frac{r^2}{\sqrt{2}}\min\left\{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|+\left|\frac{1}{p}\right|,\left|\frac{1}{q}\right|+\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|,\left|\frac{1}{p}\right|+\left|\frac{1}{q}\right|\right\} \end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P',Q')=\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}+\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|+\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right|+\left|\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right)=\frac{r^2\cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

36) P ve Q noktaları $P=\left(0,\frac{p}{\sqrt{2}},\frac{p}{\sqrt{2}}\right)$, $Q=\left(0,-\frac{q}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$d_c(O,P)=\max\left\{0,\frac{p}{\sqrt{2}},\frac{p}{\sqrt{2}}\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\sqrt{2}p,\frac{p}{\sqrt{2}},\frac{p}{\sqrt{2}}\right\}=p$ ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$d_c(O,Q)=\max\left\{0,\frac{q}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}}\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\frac{q}{\sqrt{2}},\frac{q}{\sqrt{2}},\sqrt{2}q\right\}=q$ olur. Böylece P ve Q noktalarının inversiyon altındaki görüntüleri Teorem 5.1.4 gereğince

$$P'=\left(0,\frac{r^2}{p\sqrt{2}},\frac{r^2}{p\sqrt{2}}\right),\ Q'=\left(0,-\frac{r^2}{q\sqrt{2}},\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \max\left\{0, \left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}+\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|, \left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}-\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right\}+ \\ &\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{r^2}{\sqrt{2}}\min\left\{\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|, \left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|, \left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|+\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|\right\} \end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P',Q') = \left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}+\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\left|\frac{r^2}{p\sqrt{2}}-\frac{r^2}{q\sqrt{2}}\right|\right) = \frac{r^2\cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur. D_1 in elemanlarından oluşan diğer maddeler de benzer şekilde gösterilebilir.

II.Durum $P,Q\in D_2$ iken

1) $P=\left(\frac{p}{2\sqrt{2}-1},\frac{p}{2\sqrt{2}-1},\frac{p}{2\sqrt{2}-1}\right)$, $Q=\left(-\frac{q}{2\sqrt{2}-1},\frac{q}{2\sqrt{2}-1},\frac{q}{2\sqrt{2}-1}\right)$ olsun. $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$$d_c(O,P) = \max\left\{\tfrac{p}{2\sqrt{2}-1},\tfrac{p}{2\sqrt{2}-1},\tfrac{p}{2\sqrt{2}-1}\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\tfrac{2p}{2\sqrt{2}-1},\tfrac{2p}{2\sqrt{2}-1},\tfrac{2p}{2\sqrt{2}-1}\right\} = p$$

ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$$d_c(O,Q) = \max\left\{\tfrac{q}{2\sqrt{2}-1},\tfrac{q}{2\sqrt{2}-1},\tfrac{q}{2\sqrt{2}-1}\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\tfrac{2q}{2\sqrt{2}-1},\tfrac{2q}{2\sqrt{2}-1},\tfrac{2q}{2\sqrt{2}-1}\right\} = q$$

olur. Teorem 5.1.4 gereğince

$$\begin{aligned} P' &= \left(\frac{r^2}{p\left(2\sqrt{2}-1\right)},\frac{r^2}{p\left(2\sqrt{2}-1\right)},\frac{r^2}{p\left(2\sqrt{2}-1\right)}\right), \\ Q' &= \left(-\frac{r^2}{q\left(2\sqrt{2}-1\right)},\frac{r^2}{q\left(2\sqrt{2}-1\right)},\frac{r^2}{q\left(2\sqrt{2}-1\right)}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \frac{r^2}{\left(2\sqrt{2}-1\right)}\max\left\{\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|, \left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|, \left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|\right\} \\ &+\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{r^2}{\left(2\sqrt{2}-1\right)}\min\left\{\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|+\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|, \left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|+\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli işlemler yapıldığında

$$d_c(P',Q') = \frac{r^2}{\left(2\sqrt{2}-1\right)}\left(\frac{q+p}{pq}+\left(\sqrt{2}-1\right)\left(2\frac{q-p}{pq}\right)\right) = \frac{r^2\cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

2) $P=\left(\frac{p}{2\sqrt{2}-1},\frac{p}{2\sqrt{2}-1},\frac{p}{2\sqrt{2}-1}\right)$, $Q=\left(\frac{q}{2\sqrt{2}-1},-\frac{q}{2\sqrt{2}-1},\frac{q}{2\sqrt{2}-1}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$$d_c(O,P)=\max\left\{\tfrac{p}{2\sqrt{2}-1},\tfrac{p}{2\sqrt{2}-1},\tfrac{p}{2\sqrt{2}-1}\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\tfrac{2p}{2\sqrt{2}-1},\tfrac{2p}{2\sqrt{2}-1},\tfrac{2p}{2\sqrt{2}-1}\right\}=p$$

ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$$d_c(O,Q)=\max\left\{\tfrac{q}{2\sqrt{2}-1},\tfrac{q}{2\sqrt{2}-1},\tfrac{q}{2\sqrt{2}-1}\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\tfrac{2q}{2\sqrt{2}-1},\tfrac{2q}{2\sqrt{2}-1},\tfrac{2q}{2\sqrt{2}-1}\right\}=q$$

olur. Teorem 5.1.4 gereğince

$$\begin{aligned}P' &= \left(\frac{r^2}{p\left(2\sqrt{2}-1\right)},\frac{r^2}{p\left(2\sqrt{2}-1\right)},\frac{r^2}{p\left(2\sqrt{2}-1\right)}\right),\\ Q' &= \left(\frac{r^2}{q\left(2\sqrt{2}-1\right)},-\frac{r^2}{q\left(2\sqrt{2}-1\right)},\frac{r^2}{q\left(2\sqrt{2}-1\right)}\right)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned}d_c(P',Q') &= \frac{r^2}{\left(2\sqrt{2}-1\right)}\max\left\{\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|,\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|,\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|\right\}\\ &\quad+\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{r^2}{\left(2\sqrt{2}-1\right)}\min\left\{\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|+\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|,\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|+\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|\right\}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli işlemler yapıldığında

$$d_c(P',Q')=\frac{r^2}{\left(2\sqrt{2}-1\right)}\left(\frac{q+p}{pq}+\left(\sqrt{2}-1\right)\left(2\frac{q-p}{pq}\right)\right)=\frac{r^2\cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

3) P ve Q noktaları $P=\left(\frac{p}{2\sqrt{2}-1},\frac{p}{2\sqrt{2}-1},\frac{p}{2\sqrt{2}-1}\right)$, $Q=\left(\frac{q}{2\sqrt{2}-1},\frac{q}{2\sqrt{2}-1},-\frac{q}{2\sqrt{2}-1}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$$d_c(O,P)=\max\left\{\tfrac{p}{2\sqrt{2}-1},\tfrac{p}{2\sqrt{2}-1},\tfrac{p}{2\sqrt{2}-1}\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\tfrac{2p}{2\sqrt{2}-1},\tfrac{2p}{2\sqrt{2}-1},\tfrac{2p}{2\sqrt{2}-1}\right\}=p$$

ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$$d_c(O,Q)=\max\left\{\tfrac{q}{2\sqrt{2}-1},\tfrac{q}{2\sqrt{2}-1},\tfrac{q}{2\sqrt{2}-1}\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\tfrac{2q}{2\sqrt{2}-1},\tfrac{2q}{2\sqrt{2}-1},\tfrac{2q}{2\sqrt{2}-1}\right\}=q$$

olur. Teorem 5.1.4 gereğince

$$\begin{aligned}P' &= \left(\frac{r^2}{p\left(2\sqrt{2}-1\right)},\frac{r^2}{p\left(2\sqrt{2}-1\right)},\frac{r^2}{p\left(2\sqrt{2}-1\right)}\right),\\ Q' &= \left(\frac{r^2}{q\left(2\sqrt{2}-1\right)},\frac{r^2}{q\left(2\sqrt{2}-1\right)},-\frac{r^2}{q\left(2\sqrt{2}-1\right)}\right)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \frac{r^2}{(2\sqrt{2}-1)}\max\left\{\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|,\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|,\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|\right\} \\ &\quad+\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{r^2}{(2\sqrt{2}-1)}\min\left\{\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|+\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|,\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|+\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|\right\} \end{aligned}$$

ve işlemler yapıldığında

$$d_c(P',Q')=\frac{r^2}{(2\sqrt{2}-1)}\left(\frac{q+p}{pq}+\left(\sqrt{2}-1\right)\left(2\frac{q-p}{pq}\right)\right)=\frac{r^2\cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

4) P ve Q noktaları $P=\left(\frac{p}{2\sqrt{2}-1},\frac{p}{2\sqrt{2}-1},\frac{p}{2\sqrt{2}-1}\right)$, $Q=\left(\frac{q}{2\sqrt{2}-1},-\frac{q}{2\sqrt{2}-1},-\frac{q}{2\sqrt{2}-1}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$$d_c(O,P)=\max\left\{\frac{p}{2\sqrt{2}-1},\frac{p}{2\sqrt{2}-1},\frac{p}{2\sqrt{2}-1}\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\frac{2p}{2\sqrt{2}-1},\frac{2p}{2\sqrt{2}-1},\frac{2p}{2\sqrt{2}-1}\right\}=p$$

ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$$d_c(O,Q)=\max\left\{\frac{q}{2\sqrt{2}-1},\frac{q}{2\sqrt{2}-1},\frac{q}{2\sqrt{2}-1}\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\frac{2q}{2\sqrt{2}-1},\frac{2q}{2\sqrt{2}-1},\frac{2q}{2\sqrt{2}-1}\right\}=q$$

olur. Teorem 5.1.4 gereğince

$$\begin{aligned} P' &= \left(\frac{r^2}{p\left(2\sqrt{2}-1\right)},\frac{r^2}{p\left(2\sqrt{2}-1\right)},\frac{r^2}{p\left(2\sqrt{2}-1\right)}\right), \\ Q' &= \left(\frac{r^2}{q\left(2\sqrt{2}-1\right)},-\frac{r^2}{q\left(2\sqrt{2}-1\right)},-\frac{r^2}{q\left(2\sqrt{2}-1\right)}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \frac{r^2}{(2\sqrt{2}-1)}\max\left\{\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|,\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|,\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|\right\} \\ &\quad+\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{r^2}{(2\sqrt{2}-1)}\min\left\{\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|+\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|,\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|+\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli işlemler yapıldığında

$$d_c(P',Q')=\frac{r^2}{(2\sqrt{2}-1)}\left(\frac{q+p}{pq}+\left(\sqrt{2}-1\right)\left(2\frac{q-p}{pq}\right)\right)=\frac{r^2\cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

5) P ve Q noktaları $P=\left(\frac{p}{2\sqrt{2}-1},\frac{p}{2\sqrt{2}-1},\frac{p}{2\sqrt{2}-1}\right)$, $Q=\left(-\frac{q}{2\sqrt{2}-1},-\frac{q}{2\sqrt{2}-1},\frac{q}{2\sqrt{2}-1}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$$d_c(O,P)=\max\left\{\frac{p}{2\sqrt{2}-1},\frac{p}{2\sqrt{2}-1},\frac{p}{2\sqrt{2}-1}\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\frac{2p}{2\sqrt{2}-1},\frac{2p}{2\sqrt{2}-1},\frac{2p}{2\sqrt{2}-1}\right\}=p$$

ve$Q$ noktasının merkeze uzaklığı ise

$$d_c(O,Q)=\max\left\{\frac{q}{2\sqrt{2}-1},\frac{q}{2\sqrt{2}-1},\frac{q}{2\sqrt{2}-1}\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\frac{2q}{2\sqrt{2}-1},\frac{2q}{2\sqrt{2}-1},\frac{2q}{2\sqrt{2}-1}\right\}=q$$

olur. Teorem 5.1.4 gereğince

$$\begin{aligned} P' &= \left(\frac{r^2}{p\left(2\sqrt{2}-1\right)},\frac{r^2}{p\left(2\sqrt{2}-1\right)},\frac{r^2}{p\left(2\sqrt{2}-1\right)}\right), \\ Q' &= \left(-\frac{r^2}{q\left(2\sqrt{2}-1\right)},-\frac{r^2}{q\left(2\sqrt{2}-1\right)},\frac{r^2}{q\left(2\sqrt{2}-1\right)}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \frac{r^2}{\left(2\sqrt{2}-1\right)}\max\left\{\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|,\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|,\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|\right\} \\ &\quad+\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{r^2}{\left(2\sqrt{2}-1\right)}\min\left\{\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|+\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|,\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|+\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli işlemler yapıldığında

$$d_c(P',Q')=\frac{r^2}{\left(2\sqrt{2}-1\right)}\left(\frac{q+p}{pq}+\left(\sqrt{2}-1\right)\left(2\frac{q-p}{pq}\right)\right)=\frac{r^2\cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

6) P ve Q noktaları $P=\left(\frac{p}{2\sqrt{2}-1},\frac{p}{2\sqrt{2}-1},\frac{p}{2\sqrt{2}-1}\right)$, $Q=\left(-\frac{q}{2\sqrt{2}-1},\frac{q}{2\sqrt{2}-1},-\frac{q}{2\sqrt{2}-1}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$$d_c(O,P)=\max\left\{\frac{p}{2\sqrt{2}-1},\frac{p}{2\sqrt{2}-1},\frac{p}{2\sqrt{2}-1}\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\frac{2p}{2\sqrt{2}-1},\frac{2p}{2\sqrt{2}-1},\frac{2p}{2\sqrt{2}-1}\right\}=p$$

ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$$d_c(O,Q)=\max\left\{\frac{q}{2\sqrt{2}-1},\frac{q}{2\sqrt{2}-1},\frac{q}{2\sqrt{2}-1}\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\frac{2q}{2\sqrt{2}-1},\frac{2q}{2\sqrt{2}-1},\frac{2q}{2\sqrt{2}-1}\right\}=q$$

olur. Teorem 5.1.4 gereğince

$$\begin{aligned} P' &= \left(\frac{r^2}{p\left(2\sqrt{2}-1\right)},\frac{r^2}{p\left(2\sqrt{2}-1\right)},\frac{r^2}{p\left(2\sqrt{2}-1\right)}\right), \\ Q' &= \left(-\frac{r^2}{q\left(2\sqrt{2}-1\right)},\frac{r^2}{q\left(2\sqrt{2}-1\right)},-\frac{r^2}{q\left(2\sqrt{2}-1\right)}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \frac{r^2}{(2\sqrt{2}-1)} \max\left\{\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|,\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|,\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|\right\} \\ &\quad +\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{r^2}{(2\sqrt{2}-1)} \min\left\{\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|+\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|,\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|+\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli işlemler yapıldığında

$$d_c(P',Q') = \frac{r^2}{(2\sqrt{2}-1)}\left(\frac{q+p}{pq}+\left(\sqrt{2}-1\right)\left(2\frac{q-p}{pq}\right)\right) = \frac{r^2\cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

7) P ve Q noktaları $P=\left(\frac{p}{2\sqrt{2}-1},\frac{p}{2\sqrt{2}-1},\frac{p}{2\sqrt{2}-1}\right)$, $Q=\left(-\frac{q}{2\sqrt{2}-1},-\frac{q}{2\sqrt{2}-1},-\frac{q}{2\sqrt{2}-1}\right)$ olsun, $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$$d_c(O,P) = \max\left\{\frac{p}{2\sqrt{2}-1},\frac{p}{2\sqrt{2}-1},\frac{p}{2\sqrt{2}-1}\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\frac{2p}{2\sqrt{2}-1},\frac{2p}{2\sqrt{2}-1},\frac{2p}{2\sqrt{2}-1}\right\} = p$$

ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$$d_c(O,Q) = \max\left\{\frac{q}{2\sqrt{2}-1},\frac{q}{2\sqrt{2}-1},\frac{q}{2\sqrt{2}-1}\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{\frac{2q}{2\sqrt{2}-1},\frac{2q}{2\sqrt{2}-1},\frac{2q}{2\sqrt{2}-1}\right\} = q$$

olur. Teorem 5.1.4 gereğince

$$\begin{aligned} P' &= \left(\frac{r^2}{p\left(2\sqrt{2}-1\right)},\frac{r^2}{p\left(2\sqrt{2}-1\right)},\frac{r^2}{p\left(2\sqrt{2}-1\right)}\right), \\ Q' &= \left(-\frac{r^2}{q\left(2\sqrt{2}-1\right)},-\frac{r^2}{q\left(2\sqrt{2}-1\right)},-\frac{r^2}{q\left(2\sqrt{2}-1\right)}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \frac{r^2}{(2\sqrt{2}-1)} \max\left\{\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|,\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|,\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|\right\} \\ &\quad +\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{r^2}{(2\sqrt{2}-1)} \min\left\{\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|+\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|,\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|+\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli işlemler yapıldığında

$$d_c(P',Q') = \frac{r^2}{(2\sqrt{2}-1)}\left(\frac{q+p}{pq}+\left(\sqrt{2}-1\right)\left(2\frac{q+p}{pq}\right)\right) = \frac{r^2\cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur. D_2 in elemanlarından oluşan diğer maddeler de benzer şekilde gösterilebilir.

III.Durum $P,Q\in D_3$ iken

1) $P=\left(p,p\left(\sqrt{2}+1\right),0\right)$, $Q=\left(q,-q\left(\sqrt{2}+1\right),0\right)$ olsun. $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$$\begin{aligned} d_c(O,P) &= \max\left\{p,p\left(\sqrt{2}+1\right),0\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{p,p\left(\sqrt{2}+2\right),p\left(\sqrt{2}+1\right)\right\} \\ &= 2p\sqrt{2} \text{ ve } Q \text{ noktasının merkeze uzaklığı ise} \\ d_c(O,Q) &= \max\left\{q,q\left(\sqrt{2}+1\right),0\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{q,q\left(\sqrt{2}+2\right),q\left(\sqrt{2}+1\right)\right\} \\ &= 2q\sqrt{2} \end{aligned}$$

olur. Teorem 5.1.4 deki bağıntılar gereğince

$$\begin{aligned} P' &= \left(\frac{r^2}{8p},\frac{r^2\left(\sqrt{2}+1\right)}{8p},0\right), \\ Q' &= \left(\frac{r^2}{8q},-\frac{r^2\left(\sqrt{2}+1\right)}{8q},0\right) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \max\left\{\left|\frac{r^2}{8p}-\frac{r^2}{8q}\right|,\left|\frac{r^2\left(\sqrt{2}+1\right)}{8p}+\frac{r^2\left(\sqrt{2}+1\right)}{8q}\right|,0\right\} \\ &\quad +\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{r^2}{8}\min\left\{\left|\frac{q-p}{pq}\right|+\left(\sqrt{2}+1\right)\left|\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right|,\left|\frac{q-p}{pq}\right|\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu taktirde gerekli işlemler yapılırsa

$$d_c(P',Q')=\frac{r^2}{8}\left(\left(\sqrt{2}+1\right)\frac{q+p}{pq}+\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\frac{q-p}{pq}\right)\right)=\frac{r^2\cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

2) $P=\left(p,p\left(\sqrt{2}+1\right),0\right)$, $Q=\left(-q,q\left(\sqrt{2}+1\right),0\right)$ olsun. $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere$P$ noktasının merkeze uzaklığı

$$\begin{aligned} d_c(O,P) &= \max\left\{p,p\left(\sqrt{2}+1\right),0\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{p,p\left(\sqrt{2}+2\right),p\left(\sqrt{2}+1\right)\right\} \\ &= 2p\sqrt{2} \end{aligned}$$

ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$$\begin{aligned} d_c(O,Q) &= \max\left\{q,q\left(\sqrt{2}+1\right),0\right\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{q,q\left(\sqrt{2}+2\right),q\left(\sqrt{2}+1\right)\right\} \\ &= 2q\sqrt{2} \end{aligned}$$

olur. Teorem 5.1.4 deki bağıntılar gereğince

$$\begin{aligned} P' &= \left(\frac{r^2}{8p}, \frac{r^2\left(\sqrt{2}+1\right)}{8p}, 0\right), \\ Q' &= \left(-\frac{r^2}{8q}, \frac{r^2\left(\sqrt{2}+1\right)}{8q}, 0\right) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \max\left\{\left|\frac{r^2}{8p}+\frac{r^2}{8q}\right|, \left|\frac{r^2\left(\sqrt{2}+1\right)}{8p}-\frac{r^2\left(\sqrt{2}+1\right)}{8q}\right|, 0\right\} \\ &\quad+\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{r^2}{8}\min\left\{\left|\frac{q+p}{pq}\right|+\left(\sqrt{2}+1\right)\left|\frac{q-p}{pq}\right|, \left(\sqrt{2}+1\right)\left|\frac{q-p}{pq}\right|\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu taktirde gerekli işlemler yapılırsa

$$d_c(P',Q') = \left|\frac{r^2}{8p}+\frac{r^2}{8q}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left|\frac{r^2\left(\sqrt{2}+1\right)}{8p}-\frac{r^2\left(\sqrt{2}+1\right)}{8q}\right| = \frac{r^2\cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur.

3) $P = \left(p, p\left(\sqrt{2}+1\right), 0\right)$, $Q = \left(q, 0, q\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$ olsun. $I_{(O,r)}$ inversiyonunda P ve Q noktalarının görüntüleri sırasıyla P' ve Q' olmak üzere P noktasının merkeze uzaklığı

$$\begin{aligned} d_c(O,P) &= \max\left\{p, p\left(\sqrt{2}+1\right), 0\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{p, p\left(\sqrt{2}+2\right), p\left(\sqrt{2}+1\right)\right\} \\ &= 2p\sqrt{2} \end{aligned}$$

ve Q noktasının merkeze uzaklığı ise

$$\begin{aligned} d_c(O,Q) &= \max\left\{q, q\left(\sqrt{2}+1\right), 0\right\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\left\{q, q\left(\sqrt{2}+2\right), q\left(\sqrt{2}+1\right)\right\} \\ &= 2q\sqrt{2} \end{aligned}$$

olur. Teorem 5.1.4 deki bağıntılar gereğince

$$\begin{aligned} P' &= \left(\frac{r^2}{8p}, \frac{r^2\left(\sqrt{2}+1\right)}{8p}, 0\right), \\ Q' &= \left(\frac{r^2}{8q}, 0, \frac{r^2\left(\sqrt{2}+1\right)}{8q}\right) \end{aligned}$$

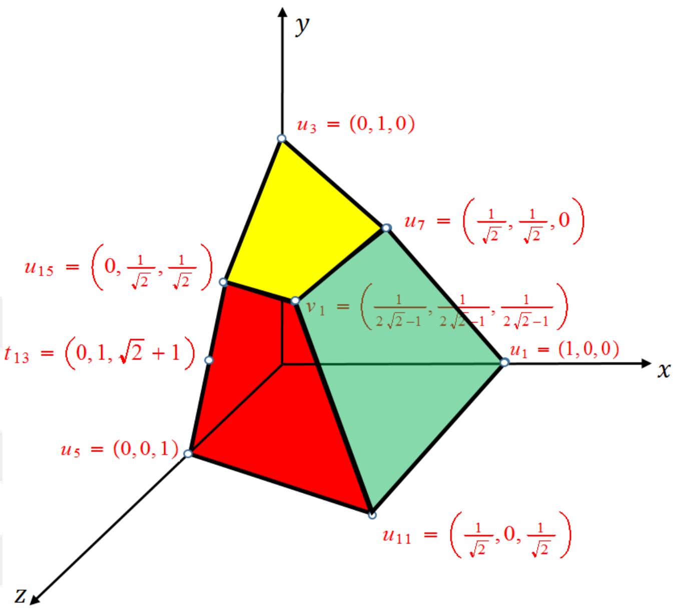
bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} d_c(P',Q') &= \max\left\{\left|\frac{r^2}{8p}-\frac{r^2}{8q}\right|, \left|\frac{r^2\left(\sqrt{2}+1\right)}{8p}\right|, \left|\frac{r^2\left(\sqrt{2}+1\right)}{8q}\right|\right\} \\ &\quad+\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{r^2}{8}\min\left\{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|+\frac{\sqrt{2}+1}{|p|}, \left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|+\frac{\sqrt{2}+1}{|q|}\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu taktirde gerekli işlemler yapılırsa

$$d_c(P', Q') = \left(\sqrt{2}+1\right)\frac{r^2}{8}\left(\left|\frac{1}{p}\right| + \left(\sqrt{2}-1\right)\left|\frac{|p-q|+p}{pq}\right|\right) = \frac{r^2 \cdot d_c(P,Q)}{d_c(O,P)\cdot d_c(O,Q)}$$

olur. D_3 ün elemanlarından oluşan diğer maddeler de benzer şekilde gösterilebilir. □



Şekil 5.3. Merkezil Çin Dama Birim Küresinin Bir Kesiti

Öklidyen düzlemde C, O merkezli, r yarıçaplı bir çember olmak üzere C çemberine göre inversiyon için aşağıdaki özellikler bilinmektedir.

i) İnversiyon merkezinden geçen doğrular invaryanttır.

ii) İnversiyon merkezinden geçmeyen doğrular inversiyon merkezinden geçen çembere dönüşür.

iii) İnversiyon merkezinden geçen çemberi inversiyon merkezinden geçmeyen bir doğruya dönüşür.

iv) İnversiyon merkezinden geçmeyen çember, inversiyon merkezinden geçmeyen bir çembere dönüşür.

v) İnversiyon çemberi ile eş merkezli çember yine eş merkezli bir çembere dönüşür.

Bu özelliklerden yola çıkılarak Çin dama küresel inversiyonunda aşağıdaki teoremler verilebilir:

Teorem 5.1.11 $I_{(O,r)}$ *Çin dama küresel inversiyonu altında inversiyon merkezinden geçen her doğru ve düzlem invaryant kalır.*

İspat: *İnversiyon merkezinden geçen her doğrunun* $I_{(O,r)}$ *inversiyonuna göre görüntüsünün kendisi olduğu açıktır.* $\mathbb{R}_c^3$ *de tüm Öklidyen ötelemeler birer izometri olduğundan dolayı inversiyon merkezinin orijin alınması genelliği bozmaz. O halde* S*,* O *merkezli* r *yarıçaplı Çin dama inversiyon küresi ve* Π *de denklemi* $Mx+Ny+Tz=0$ *olan bir düzlem olsun.* Π *ye* $I_{(O,r)}$ *inversiyonu uygulanırsa*

$$x=\frac{r^2x'}{(|x'|+|y'|+|z'|)^2},\ y=\frac{r^2y'}{(|x'|+|y'|+|z'|)^2},\ z=\frac{r^2z'}{(|x'|+|y'|+|z'|)^2}$$

olduğundan

$$M\frac{r^2x'}{(|x'|+|y'|+|z'|)^2}+N\frac{r^2y'}{(|x'|+|y'|+|z'|)^2}+T\frac{r^2z'}{(|x'|+|y'|+|z'|)^2}=0$$

ve $r\neq 0$ *olduğundan*

$$\left(r^2\right)(Mx'+Ny'+Tz')=Mx'+Ny'+Tz'=0$$

elde edilir. □

Teorem 5.1.12 $I_{(O,r)}$ *Çin dama küresel inversiyonu altında merkezi* O *olan her Çin dama küre yine* O *merkezli Çin dama kürelere dönüşür.*

İspat: S*,* O *merkezli* r *yarıçaplı Çin dama inversiyon küresi olsun.* $I_{(O,r)}$ *altında* $P=(x,y,z)$ *noktası ve* S *Çin dama küresi için* $\mathbb{R}_c^3$ *de ötelemeler uzaklığı koruduğundan* S *Çin dama küresinin denklemini*

$$\max\{|x|,|y|,|z|\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\{|x|+|y|,|x|+|z|,|y|+|z|\}=r$$

yerine

$$\max\{|x|,|y|,|z|\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\{|x|+|y|,|x|+|z|,|y|+|z|\}=k$$

$k\in\mathbb{R}^+$ *olarak alabiliriz.* S *Çin dama küresinin* $I_{(O,r)}$ *Çin dama küresel inversi*

$$\max\{|x'|,|y'|,|z'|\}+\left(\sqrt{2}-1\right)\min\{|x'|+|y'|,|x'|+|z'|,|y'|+|z'|\}=\frac{r^2}{k}$$

olacağından $I_{(O,r)}$ *altında merkezi* O *olan* $\frac{r^2}{k}$ *yarıçaplı küre elde edilir.* □

Teorem 5.1.13 *$I_{(O,r)}$ Çin dama küresel inversiyonu altında S Çin dama inversiyon küresinin her kenarı, yüzü ve köşesi $I_{(O,r)}$ inversiyonu altında invaryant kalır.*

İspat: *$I_{(O,r)}$ Çin dama küresel inversiyonu altında S Çin dama inversiyon küresinin üzerindeki tüm noktaların kendine dönüştüğü açıktır.* $\square$

5.2 Çifte Oran

$\mathbb{R}_c^3$ de l doğrusu üzerindeki A ve B noktaları için A dan B ye yönlü Çin dama direkt uzaklığı $d_c[AB]$ ile gösterilsin. Eğer ışının başlangıç noktası A ve B yi içeriyorsa pozitif yönlü yönelme $d_c[AB] = d_c(A, B)$, ışın ters yönlü ise negatif yönlü yönelmedir ve $d_c[AB] = -d_c(A, B)$ dir.

Tanım 5.2.1 *A, B, C, D noktaları $\mathbb{R}_c^3$ de bir yönlendirilmiş doğru üzerinde dört farklı nokta olsun. Bu noktaların $(AB, CD)_c$ Çin dama çifte oranı*

$$(AB, CD)_c = \frac{d_c[AC]}{d_c[AD]} \cdot \frac{d_c[BD]}{d_c[BC]}$$

ile tanımlanır.

C ve D noktalarının her ikisi de A ve B arasındaysa çifte oran pozitiftir. C ve D , A ile B nin arasında değilse de poziftir. Ancak $\{A, B\}$ ve $\{C, D\}$ çiftleri biribirlerinden ayrı olurlarsa negatiftir. Kürenin merkezi A, B, C, D den herhangi biri değilse çifte oran inversiyon altında invaryant kalır. Bu özellik Çin dama uzayında da geçerlidir.

Merkezil Çin dama birim küresine göre inversiyon altında aşağıdaki örnekler verilebilir:

Örnek 5.2.2 *C ve D nin her ikisi de A ve B arasında olacak şekilde $\mathbb{R}_c^3$ deki $A = (1, 1, 1)$, $B = (4, 4, 4)$, $C = (2, 2, 2)$, $D = (3, 3, 3)$ için çifte oran hesaplansın. Buna göre*

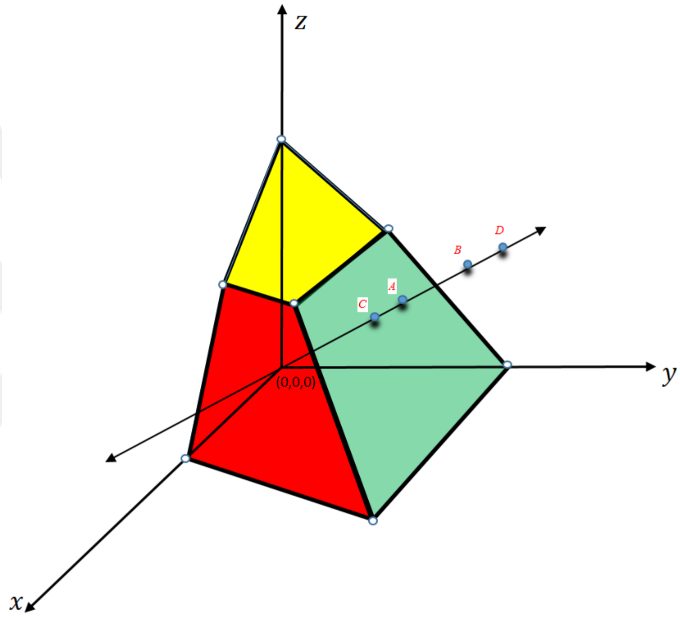
$d_c\,(A, C) = \max\{1, 1, 1\} + \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\{2, 2, 2\} = 2\sqrt{2} - 1,$

$d_c\,(B, D) = \max\{1, 1, 1\} + \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\{2, 2, 2\} = 2\sqrt{2} - 1,$

$d_c\,(A, D) = \max\{2, 2, 2\} + \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\{4, 4, 4\} = 4\sqrt{2} - 2,$

$d_c\,(B, C) = \max\{2, 2, 2\} + \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\{4, 4, 4\} = 4\sqrt{2} - 2$ olduğundan yönlendirmeye de dikkat edilirse

$(AB, CD)_c = \frac{d_c[AC]}{d_c[AD]} \cdot \frac{d_c[BD]}{d_c[BC]} = \frac{d_c(A,C)}{d_c(A,D)} \cdot \frac{-d_c(B,D)}{-d_c(B,C)} = \frac{2\sqrt{2}-1}{4\sqrt{2}-2} \cdot \frac{-2\sqrt{2}+1}{-4\sqrt{2}+2} = +\frac{1}{4}$ olur. (Şekil 5.4.)



Şekil 5.4. Merkezil Çin Dama Küresinde Çifte Oran

Örnek 5.2.3 *C ve D nin her ikisi de A ve B arasında olmayacak şekilde $\mathbb{R}^3_c$ deki $A = (2, 2, 2)$, $B = (3, 3, 3)$, $C = (1, 1, 1)$, $D = (4, 4, 4)$ için çifte oran hesaplansın. Buna göre*

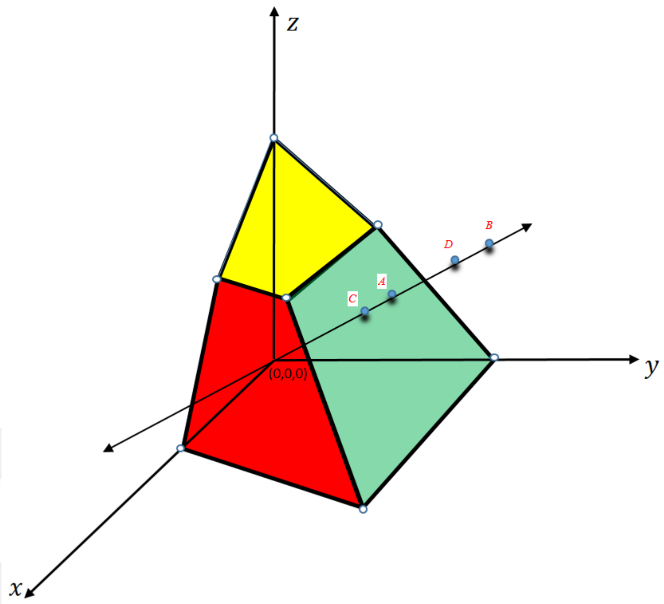
$d_c\,(A, C) = \max\{1, 1, 1\} + \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\{2, 2, 2\} = 2\sqrt{2} - 1,$

$d_c\,(B, D) = \max\{1, 1, 1\} + \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\{2, 2, 2\} = 2\sqrt{2} - 1,$

$d_c\,(A, D) = \max\{2, 2, 2\} + \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\{4, 4, 4\} = 4\sqrt{2} - 2,$

$d_c\,(B, C) = \max\{2, 2, 2\} + \left(\sqrt{2} - 1\right) \min\{4, 4, 4\} = 4\sqrt{2} - 2$ olduğundan yönlendirmeye de dikkat edilirse

$(AB,CD)_c = \frac{d_c[AC]}{d_c[AD]} \cdot \frac{d_c[BD]}{d_c[BC]} = \frac{-d_c(A,C)}{d_c(A,D)} \cdot \frac{d_c(B,D)}{-d_c(B,C)} = \frac{-2\sqrt{2}+1}{4\sqrt{2}-2} \cdot \frac{2\sqrt{2}-1}{-4\sqrt{2}+2} = +\frac{1}{4}$ olur. (Şekil 5.5.)



Şekil 5.5. Merkezil Çin Dama Küresinde Çifte Oran

Örnek 5.2.4 *D noktası A ve B arasında iken C noktası arada olmayacak şekilde $\mathbb{R}_c^3$ deki $A = (2,2,2)$, $B = (4,4,4)$, $C = (1,1,1)$, $D = (3,3,3)$ için çifte oran hesaplansın Buna göre*

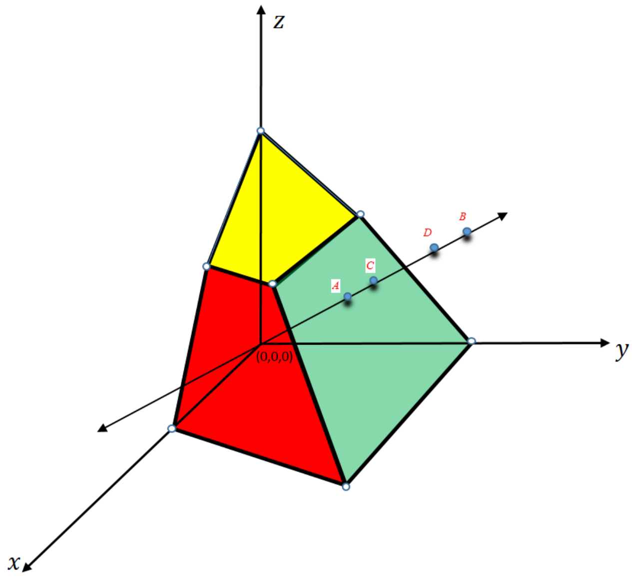
$d_c(A,C) = \max\{1,1,1\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{2,2,2\} = 2\sqrt{2}-1,$

$d_c(B,D) = \max\{1,1,1\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{2,2,2\} = 2\sqrt{2}-1,$

$d_c(A,D) = \max\{1,1,1\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{2,2,2\} = 2\sqrt{2}-1,$

$d_c(B,C) = \max\{3,3,3\} + \left(\sqrt{2}-1\right)\min\{6,6,6\} = 6\sqrt{2}-3$ olup yönlendirme dikkate alınarak

$(AB,CD)_c = \frac{d_c[AC]}{d_c[AD]} \cdot \frac{d_c[BD]}{d_c[BC]} = \frac{-d_c(A,C)}{d_c(A,D)} \cdot \frac{-d_c(B,D)}{-d_c(B,C)} = \frac{-2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}-1} \cdot \frac{-2\sqrt{2}+1}{-6\sqrt{2}+3} = -\frac{1}{3}$ olur. (Şekil 5.6.)



Şekil 5.6. Merkezil Çin Dama Küresinde Çifte Oran

Teorem 5.2.5 $\mathbb{R}^3_c$ *de Çin dama küresel inversiyonu Çin dama çifte oranını korur.*

İspat: A, B, C, D noktaları $\mathbb{R}^3_c$ de dört doğrudaş nokta ve $I_{(O,r)}$, O merkezli r yarıçaplı Çin dama küresel inversiyon olsun. $I_{(O,r)}$ inversiyonu A, B, C, D yi sırasıyla A', B', C', D' ye dönüştürsün. Çin dama küresel inversiyonu, inversiyonu alınan noktalar arasındaki uzaklığın yönünü inversiyon alınmadan önceki yöne göre tersine dönüştürdüğünden dolayı açıkça inversiyon altında $\{A, B\}$ ve $\{C, D\}$ çiftleri ayrılmayı ya da ayrılamamayı korurlar. Böylece $\left|(A'B', C'D')_c\right| = |(AB, CD)_c|$ olduğunu göstermek yeterlidir. O halde Teorem 5.1.5 kullanılarak

$$\begin{aligned}
\left|(A'B', C'D')_c\right| &= \left|\frac{d_c\left[A'C'\right]}{d_c\left[A', D'\right]} \cdot \frac{d_c\left[B', D'\right]}{d_c\left[B', C'\right]}\right| = \frac{d_c\left(A', C'\right)}{d_c\left(A', D'\right)} \cdot \frac{d_c\left(B', D'\right)}{d_c\left(B', C'\right)} \\
&= \frac{\frac{r^2 \cdot d_c(A,C)}{d_c(O,A) \cdot d_c(O,C)}}{\frac{r^2 \cdot d_c(A,D)}{d_c(O,A) \cdot d_c(O,D)}} \cdot \frac{\frac{r^2 \cdot d_c(B,D)}{d_c(O,B) \cdot d_c(O,D)}}{\frac{r^2 \cdot d_c(B,C)}{d_c(O,B) \cdot d_c(O,C)}} = \frac{d_c\left(A, C\right)}{d_c\left(A, D\right)} \cdot \frac{d_c\left(B, D\right)}{d_c\left(B, C\right)} \\
&= \frac{d_c\left[A, C\right]}{d_c\left[A, D\right]} \cdot \frac{d_c\left[B, D\right]}{d_c\left[B, C\right]} = |(AB, CD)_c|
\end{aligned}$$

elde edilir. □

5.3 Harmonik Eşlenikler

Tanım 5.3.1 $\mathbb{R}_c^3$ *de* A *ve* B *iki nokta ve* l *bir doğru olsun.*

$$\frac{d_c[AC]}{d_c[CB]} = \frac{d_c[AD]}{d_c[DB]}$$

olacak şekilde l *doğrusu üzerinde* $\{C, D\}$ *nokta varsa* A *ve* B *harmonik olarak bölünür denir.* C *ve* D *noktalarına* A *ve* B *ye göre Çin dama harmonik eşlenikler denir ve* $H(AB, CD)_c$ *ile gösterilir.* C *ve* D *noktalarının* A *ve* B *ye göre Çin dama harmonik eşlenik olması için gerek ve yeter koşul* $(AB, CD)_c = -1$ *olduğu açıktır.*

Teorem 5.3.2 S, $O = (0,0,0)$ *merkezli Çin dama küresi ve* $[A, B]$ *doğru parçası* C *küresinin bir çapı olsun.* P *ve* P' *noktalarının* A *ve* B *ye göre Çin dama harmonik eşlenik olması için gerek ve yeter koşul* P *ve* P' *noktalarının Çin dama küresine göre* $I_{(O,r)}$ *inversiyonda invers noktalar olmasıdır.*

İspat: P ve P' noktaları A ve B ye göre Çin dama harmonik eşlenikler olsunlar. Böylece

$$(AB, PP')_c = -1$$

$$\frac{d_c[AP]}{d_c[AP']} \cdot \frac{d_c[BP']}{d_c[BP]} = -1$$

dır. P noktası $[A, B]$ doğru parçasını içten böler ve P, OB ışını üzerinde olduğundan $d_c(P, B) = r - d_c(O, P)$ ve $d_c(A, P) = r + d_c(O, P)$ dır. P' noktası $[A, B]$ doğru parçasını dıştan böler ve P', OB ışını üzerinde olduğundan $d_c(A, P') = r + d_c(O, P')$ ve $d_c(B, P') = -r + d_c(O, P')$ dür. Böylece

$$\frac{r + d_c(O, P)}{r + d_c(O, P')} \cdot \frac{-r + d_c(O, P')}{-r + d_c(O, P)} = -1$$

olup buradan da

$$(r + d_c(O, P)) \cdot (-r + d_c(O, P')) = r^2 - r d_c(O, P) + r d_c(O, P') - d_c(O, P')\, d_c(O, P)$$

dır. Buradan $d_c(O,P)\, d_c(O,P') = r^2$ elde edilir. Böylece P ve P' noktaları $I_{(O,r)}$ Çin dama küresel inversiyonuna göre invers noktalar olduğu ortaya çıkar. Tersine P ve P' noktaları Çin dama küresine göre $I_{(O,r)}$ inversiyonunda invers noktalar ise $(AB, PP')_c = -1$ olmasının ispatı benzerdir. $\square$

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde Çin dama düzlem geometrisinde çembere göre inversiyon kavramı tanımlanıp bu inversiyon altında nokta, doğru ve çemberlerin invers özellikleri incelendikten sonar üç boyutlu taksi uzay ve Çin dama uzay geometrisinde de küresel inversiyon kavramı tanımlanmıştır. Bu uzaylarda nokta, doğru, düzlem, çember ve küresel inversleri aralarındaki ilişkiler belirlenmiştir. Ayrıca geometrideki önemli kavramlardan olan çifte oran ve harmonik eşlenik noktalar üzerinde inversiyonun etkisi araştırılmıştır. Benzer bakış açısı ile Öklidyen olmayan başka geometrilerde çembere göre inversiyon, küresel inversiyonlar ya da başka koniklere göre inversiyonlar incelenebilir, çifte oran ve harmonik eşlenikleri araştırılabilir, n boyutlu uzayda küresel ya da koniklere göre inversiyon kavramına genişletilebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Akça, Z., Kaya, R. (2006) On the Distance Formulae In three Dimensional Taxicab Space, *Hadronic Journal*, 27 , 521-532.

Bayar, A., Ekmekçi, S. (2014), On circular inversions in taxicab plane. *J Adv Res Pure Math*. , 6(4): 33--39.

Blair, D. (2000), Inversion Theory and Conformal Mapping, *Student Mathematical Library, American Mathematical Society*, 9, 2000.

Blåsjö V. (2009), Jakob Steiner's Systematische Entwickelung: The Culmination of Classical Geometry, *The Mathematical Intelligencer*, *Vol.31(1)*, 21-29.

Chen, G. (1992), Lines and Circles in Taxicab Geometry, *M.S. thesis, Department of Mathematics and Computer Science, Centered Missouri State University*, 43p.

Childress, N. (1965), Inversion with respect to the central conics, *Mathematics Magazine*, Vol. 38(3).

Coxeter, H. S. M. (1961), Introduction to Geometry, *John Wiley&Sons Inst.*, 443p.

Gelişgen, Ö., Kaya, R., Özcan, M. (2006), Distance Formulae in the Chinese Checker Space, *Int. J. Pure Appl. Math. 26*, no. 1, 35-44.

Gelişgen, Ö., Kaya, R. (2008), The Taxicab Space Group, *Acta Mathematica Hungarica, Vol.122(1)*, 187-200.

Gelişgen, Ö., Kaya, R. (2015), The Isometry Group Of Chinese Checker Space, *International Electronic Journal of Geometry 8,* 82-96

Gelişgen, Ö., Ermiş, T. (2019), Some properties of inversions in alpha plane, *Forum Geometricorum, vol. 19,* pp. 1--9.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Kaya, R., Akça, Z., Günaltılı, İ., Özcan, M. (2000) General Equation For Taxicab Conics and Their Classification, *Mitt. Math. Ges. Hamburg, Vol.19*, 135-148.

Kaya, R., Gelişgen, Ö.,Bayar, A.,Ekmekçi, S. (2006), Group of Isometries of CC-Plane, *Missouri J. Math. Sci*. 18 221-233.

Kaya, R., Çolakoglu, H. B. (2006), Taxicab Versions of Some Euclidean Theorems, *International Journal of Pure and Applied Mathematical (IJPAM)*, 26, 1, 69-81.

Krause, E. F. (1975) Taxicab Geometry, *Addison-Weley*, Menlo Park, California.

Martin, G. E. (1998), The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane.

Menger, K. (1952), You Will Like Geometry, *Guildbook of Illinois Institute of Technology Geometry Exhibit, Museum of Science & Industry*, Chicago, Illinois.

Milman, R S., Parker, G. D. (1991), Geometry a Metric Approach with Models, *Springer*, 370p

Minkowski, H. (1967), Gasammelte Abhandlungen, *Chelsea Publishing Co.*, New York.

Özcan, M., Kaya, R. (2002) On the Ratio of Directed Lengths in the Taxicab Plane and Related Properties, *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 14(2).

Ramirez, J.L. (2013) An Introduction to Inversion in an Ellipse, *arXiv:1309.6378v1*.

Ramirez, J.L.,Rubiano, G. N., Jurcic-Zlobec, B. (2015) Generating fractal patterns by using p-circle inversion. *Fractals*.23(4):1-13.

Ramirez, J.L.,Rubiano, G. N. (2016), A generalization of the spherical inversion, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48:1, 132-149.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Schattschneider, D. J. (1984), The Taxicab Group, *American Mathematical Monthly*, Vol. 91, 423-428.

Turan, M. (2004), Doktora Tezi, *Osmangazi Üniversitesi*

Yağcı, M. (2006), Evritim, *Matematik Dünyası Dergisi*, 74-80.

ÖZGEÇMİŞ

Adnan PEKZORLU, 1988 yılı Bursa doğumludur. 2010 yılında Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. Ardından 2010 yılında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Matematik- Bilgisayar Bölümü Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalı'nda yüksek lisansa başladı ve 2013 yılında "Distant Uzaylar ve Halkalar Üzerinde Projektif Doğrular Üzerine" konulu yüksek lisans çalışmasını bitirdi. Aynı yıl Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Matematik- Bilgisayar Bölümü Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalı'nda doktoraya başladı ve 2019 yılında "Bazı Öklidyen Olmayan Geometrilerde İnversiyonlar Üzerine" konulu doktora çalışmasını bitirdi.