SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİ TAMAMİYLE ÇÖZÜLEBİLİR KILAN POTANSİYEL SINIFLARI

Doğan Dibekçi

Doktora Tezi

Yıldız Üniversitesi
İstanbul, Mart 1983

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada gösterdiği içten destek ve yardımları için tez yöneticim Sayın Doç. Dr. Haluk Beker'e ,

Çok faydalı uyarıları ve ilgileri için hocamız Sayın Prof. Dr. Asım Orhan Barut'a ,

Lisansüstü öğrenimimde ve araştırmalarımda sürekli ilgi ve desteklerini esirgemiyen Boğaziçi Üniversitesi Fizik Bölümü Elemanlarına içtenlikle teşekkür ederim.

ÖZET

Verilen herhangi ikinci dereceden bir diferansiyel operatör dönüşümlerle

$$\Lambda_G = \left\{ 1, 0, \frac{1}{2} S(G) + \left(-\left(\frac{F_1}{2F_2}\right)' - \left(\frac{F_1}{2F_2}\right)^2 + \frac{F_0}{F_2} \right) \right\}$$

biçimine getirilip, Schrödinger operatörü

$$\Lambda_S = \left\{ 1, 0, -\frac{2mV(r)}{\hbar^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \right\}$$

ile karşılaştırıldı. Ortaya çıkan lineer olmayan diferansiyel denklemin " sabitle eşleştirilme " yöntemi ile bulunan çözümlerin yardımı ile Schrödinger denkleminin tam çözülebilirliğini sağlayan potansiyel sınıfları elde edildi.

Konfluent hipergeometrik diferansiyel denklem için aynı sonuçlar dinamik gruplardan SU(1,1) 'in özellikleri kullanılarak da elde edilerek, analiz ve grup teoritik yöntemler arasındaki uyum vurgulandı.

ABSTRACT

A general seceond order differential operator

$$\mathbb{L} = \{ F_2 , F_1 , F_0 \}$$

corresponding the differential equation

$$\left(F_2 \frac{d^2}{dz^2} + F_1 \frac{d}{dz} + F_0 \right) w = 0$$

is put into the form

$$\Lambda_G = \left\{ 1, 0, \frac{1}{2} S(G) + \left(-\left(\frac{F_1}{2F_2} \right)' - \left(\frac{F_1}{2F_2} \right)^2 + \frac{F_0}{F_2} \right) \right\}$$

after several transformations. Comparison with the Schrödinger operator

$$\Lambda_S = \left\{ 1, 0, -\frac{2mV(r)}{\hbar^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \right\}$$

yields a highly non-linear differential equation. The class of potentials that give rise to completely integrable systems are found for a given differential equation.

The results for the confluent hypergeometric differential equation is identical to that of a group theoretical approach using the dynamical group SU(1,1).

İÇİNDEKİLER

I. GİRİŞ

Kuantum mekaniği problemlerinin çözümlenmesinde kullanılan yöntemlerde yapılan temel işlem, bunların özdeğer eşitliklerine uygun matematiksel kalıpları bulup gerekli dönüşümleri yaparak çözüme varmak şeklindedir. [1] Fiziksel koşulların tam olarak belirlenebildiği problemlerde kullanılabilen bu yapı özel bir diferansiyel denklemden hareket edilerek özel bir Schrödinger denklemini vermektedir. Matematiğin özel bazı denklemlerinin ön plana çıktığı ve çözümlerin bu fonksiyonlar çerçevesinde arandığı bilinen bir gerçektir. [2,3,4]

Bu özel eşitliklerin kökeni araştırıldığında çoğunlukla düzgün tekil noktalar civarında serilere açılabilen çözümler veren Fuchs tipi diferansiyel denklemlere varıldığı görülmektedir. [4,5]

Verilen en genel ikinci derece diferansiyel denkleminden hareket edildiğinde elde edilebilecek çözümler ve bunlara karşılık gelecek potansiyel sınıflarının neler olabileceği düşüncesi enteresan sonuçlar verebilir. Bunun için Fuchs diferansiyel denklemi uygun dönüşümlerle genel Schrödinger denklemine benzetilirse elde edilen ifade genel Schrödinger denklemi ile mukayese edildiğinde lineer olmayan bir diferansiyel denklemle karşılaşılır. İlk bakışta çok karmaşıkmış gibi görünen bu denklem değişik bir yaklaşımla irdelendiğinde kuantum mekaniği problemlerinde sık sık karşımıza çıkan potansiyel sınıfları elde edilebilir. Değişik bir yaklaşım olması bakımından son bölümde, SU(1,1) Lie cebrini kullanılarak bulunan sonuçları analiz yoluyla elde edilen sonuçlarla karşılaştırmak mümkündür.

II. İNVARYANT FORM

İkinci dereceden en genel bir diferansiyel denklem : $F_0(Z)$ $F_1(Z)$, $F_2(Z)$ çarpan fonksiyonları, $W(Z)$ denklemi sağlayan herhangi bir çözüm olmak üzere

$$F_2(z)\,W''(z) + F_1(z)\,W'(z) + F_0(z)\,W = 0 \qquad \text{(II.1)}$$

şeklinde ifade edilir. Denklemi ikinci dereceden bir lineer diferansiyel operatör yardımıyla ifade etmek istediğimizde

$$\mathbb{L} \equiv \{ F_2 , F_1 , F_0 \}$$

tanımıyla

$$\mathbb{L}\,W = F_2 W'' + F_1 W' + F_0 W = 0 \qquad \text{(II.2)}$$

şeklinde yazabiliriz. $\mathbb{L}$ operatörünün hermitsel olması Fizik ve Uygulamalı Matematikte özel bir önem taşıdığından,

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}^+$$

olması için gerekli şartı araştırmak faydalı olacaktır. Önce

$$\mathbb{L}^+ W = F_2 W'' + (2F_2' - F_1)\,W' + (F_2'' - F_1' - F_0)\,W$$

olduğu hatırlanıp karşılaştırma yapılırsa $\mathbb{L} = \mathbb{L}^+$ olabilmesi için $F_2' = F_1$ 'in gerek ve yeter şart olduğu ortaya çıkar.

Şayet başlangıçta $F_2' = F_1$ olması sağlanamıyorsa bir benzerlik dönüşümü ile

$$S^{-1}\mathbb{L}\,S\,S^{-1}W = 0$$

veya $\Lambda = S^{-1}\mathbb{L}\,S \qquad \Psi = S^{-1}W$

tanımlarıyla

$$\Lambda\Psi = 0 \qquad (II.3)$$

elde edilir. Λ'nın hermitsel bir operatör olması için $S(z)$ 'nin ne olması gerektiği bulunabilir.

(II.3) denklemi açık biçimde yazıldığında

$$\Lambda\Psi = S^{-1}\left[F_2\frac{d^2}{dz^2} + F_1\frac{d}{dz} + F_0\right] S\, S^{-1} w = 0$$

veya

$$S^{-1}F_2\frac{d^2}{dz^2}S\Psi + S^{-1}F_1\frac{d}{dz}S\Psi + S^{-1}F_0 S\Psi = 0$$

$$S^{-1}F_2(S\Psi'' + 2S'\Psi' + S''\Psi) + S^{-1}F_1(S\Psi' + S'\Psi) + F_0\Psi = 0$$

elde edilir. Yeniden düzenleme yapılırsa

$$F_2\Psi'' + (2F_2\frac{S'}{S} + F_1)\Psi' + (F_2\frac{S''}{S} + F_1\frac{S'}{S} + F_0)\Psi = 0$$

bulunur. $\Lambda = \Lambda^{+}$ olması şartının (II.4)

$$F_2' = 2F_2\frac{S'}{S} + F_1$$

olduğu, dolayısıyla $S(z)$ için

$$S = \sqrt{F_2}\; e^{-\frac{1}{2}\int\frac{F_1}{F_2}dz} \qquad (II.5)$$

hesaplanır. Sonuç Sonin-Polya teoremine uygundur.[6] Bu durumda denklemimiz

$$\Psi'' + \frac{F_2'}{F_2}\Psi' + \left(\frac{F_2''-F_1'}{2F_2} - \frac{(F_2'-F_1)^2}{4F_2^2} + \frac{F_0}{F_2}\right)\Psi = 0 \qquad (II.6)$$

şekline girer.(Ek1).

Elde ettiğimiz bu yeni denklemi istediğimiz biçimde şekillendirebilmemiz için basit bir operasyon yeterli olmaktadır. (II.2) ifadesini önce standart forma sokup

$$w'' + P w' + Q w = 0 \qquad (II.7)$$

şeklinde ifade ederiz. Şimdi $F_2 = 1$ olacağı için $F_2' = 0$ olur. Yeni durumda (II.5) eşitliğinin ifadesi

$$\Psi'' + \left[-\left(\frac{F_1}{2F_2}\right)' - \left(\frac{F_1}{2F_2}\right)^2 + \frac{F_0}{F_2} \right] \Psi = 0 \qquad (II.8)$$

olacaktır. Schrödinger denklemine eşdeğer olan bu sonuç matematikte " İnvaryant Form " olarak adlandırılmaktadır

III. FUCHS DİFERANSİYEL DENKLEMİ

Kompleks düzlemde, en kötü ihtimalle $z=\infty$ da dahil olmak üzere, tekil noktaları düzgün olan homojen lineer eşitliklere Fuchs tipi diferansiyel denklemler adı verilir. Tanım gereği bu denklemlerin düzgün olmayan tekil noktaları yoktur.

En genel formda birinci dereceden bir Fuchs diferansiyel denklemi

$$w'(z) + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{z - z_k} \right) w(z) = 0 \qquad (III.1)$$

şeklindedir. Denklemin çözümü

$$w(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)^{-A_k}$$

elemanter bir fonksiyondur.

İkinci dereceden Fuchs diferansiyel denklemi $p(z)$, $q(z)$ çarpan fonksiyonları olmak üzere

$$w'' + p(z)\, w' + q(z)\, w = 0 \qquad (III.2)$$

şeklinde verilir. Denklem ihtiva ettiği tekil nokta sayısına bakılarak özel adlarla anılmaktadır.

Örneğin $z=z_1$'de tekil noktalı Fuchs diferansiyel denklemi

$$w'' - \frac{2}{z - z_1}\, w' = 0 \qquad (III.3)$$

olup a_1 ve a_2 herhangi iki sabit ise

$$w = a_2 - \frac{a_1}{z - z_1}$$

çözümünü vermektedir. $z=\infty$'da tekil noktalı diğer Fuchs diferansiyel denklemi

$$w'' = 0 \tag{III.4}$$

olup çözümü

$$w = a_1 z + a_2$$

şeklindedir.

Tekil noktaları $z=z_1$ ve $z=\infty$'da olan iki tekil noktalı denklem

$$w'' + \frac{k_1}{z - z_1} w' + \frac{k_2}{(z - z_1)^2} w = 0 \tag{III.5}$$

dır. k_1 ve k_2 iki sabit olmak üzere Euler diferansiyel denklemine eşdeğer olan denklem $z=z_1$ civarında A ve B keyfi sabitler olup

$$w = A(z - z_1)^{c_1} + B(z - z_1)^{c_2}$$

çözümünü vermektedir.

Üç tekil noktalı bir Fuchs diferansiyel denklemi

$$w'' + \left(\frac{A_1}{z - z_1} + \frac{A_2}{z - z_2}\right) w' + \left(\frac{B_1}{(z - z_1)^2} + \frac{B_2}{(z - z_2)^2}\right) w = 0 \tag{III.6}$$

olup çözümler elemanter fonksiyonlara indirgenemezler. Bağımsız değişkenlerin lineer kısmi dönüşümleri ile bu tekil noktalar 0, 1 ve ∞'a yerleştirilebilir. Gauss 'un hipergeometrik diferansiyel denklemi

$$z(1 - z) w'' + \left[c - (a + b + 1) z\right] w' - abw = 0 \tag{III.7}$$

bu şartları taşıyan, hipergeometrik serilere açılabilen çözümler vermektedir.

$$w_1(z) = F(a, b, c; z)$$

$$w_2(z) = F(a+1-c,\ b+1-c,\ 2-c;\ z)\ z^{1-c}$$

çözümlerden ikisi olup $0<|z|<1$ ve $c>0$ olduğunda w_1; $c<1$ olduğunda w_2 geçerli çözüm olmaktadır. $c=1$ için w_1 ve w_2 aynı olur.

Şayet (III.7) denkleminde z yerine yeni bir bağımsız değişken $z \longrightarrow \frac{z}{b}$ tanımlanırsa denklem

$$z\left(1-\frac{z}{b}\right) w'' + \left[c - z - (1+a)\frac{z}{b}\right] w' - a w = 0 \qquad \text{(III.8)}$$

olur ki tekil noktalar $z=0$, $z=b$ ve $z=\infty$ 'dadır.

Şimdi $b \to \infty$ seçilirse (III.8) denklemi

$$z w'' + (c-z) w' - a w = 0 \qquad \text{(III.9)}$$

konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemine dönüşür

IV. YÖNTEM VE UYGULANIŞI

Verilen herhangi ikinci derece diferansiyel denklemi istenilen biçimde ifade etmek için izlenecek yol denklemi önce invaryant forma sokmak sonra değişken dönüşümü yapmak, ancak bu sırada invaryantlık bozulacağından tekrar invaryant forma getirmek şeklinde olacaktır. İnvaryant forma sokulan denklem Schrödinger denklemi ile karşılaştırılarak elde edilen lineer olmayan diferansiyel denkleme bulunabilecek çözümler,değişik seçimlerde değişik potansiyelleri belirlemektedir.

İkinci dereceden en genel diferansiyel denklemin operatörü

$$\mathbb{L} \equiv \{ F_2(z), F_1(z), F_0(z) \}$$

idi. Invaryant forma sokulan bu denklemin operatörünün yeni şekli

$$\Lambda \equiv \left\{ 1\,,\,0\,,-\left(\frac{F_1}{2F_2}\right)' - \left(\frac{F_1}{2F_2}\right)^2 + \frac{F_0}{F_2} \right\} \qquad \text{(IV.1)}$$

olmakta ve bu aşamada değişken dönüşümü yapıldığında

$$\Lambda_G = \left\{ \frac{1}{G'^2}\,,-\frac{G''}{G'^3}\,,-\left(\frac{F_1}{2F_2}\right)' - \left(\frac{F_1}{2F_2}\right)^2 + \frac{F_0}{F_2} \right\}$$

elde edilmektedir. Ancak invaryantlık bozulduğundan, tekrarlanan benzer işlemler sonunda

$$\Lambda_G = \left\{ 1\,,0\,,\frac{1}{2}\frac{G'''}{G'} - \frac{3}{4}\frac{G''^2}{G'^2} + \left(-\left(\frac{F_1}{2F_2}\right)' - \left(\frac{F_1}{2F_2}\right)^2 + \frac{F_0}{F_2}\right)G'^2 \right\}$$

arzulanan biçime sokulmaktadır. (IV.2)

Uygulamada bize tatmin edici fiziksel sonuçları verecek Fuchs tipi diferansiyel denklemler tekil nokta sayısı birden fazla olan ikinci derece denklemleri olacaktır. Ancak gelişmelerin gözlenebilmesi açısından bir tane düzgün tekil noktası olan (III.4) denklemi ile yöntemimizin uygulamasına başlıyacağız.

$$w'' = 0$$

diferansiyel denkleminde operatörümüz

$$\mathbb{L} = \{1, 0, 0\}$$

zaten invaryant formda olduğundan $\mathbb{L} = \Lambda$ dır.

$$\frac{d}{dG} = \frac{1}{G'}\frac{d}{dz}$$

değişken dönüşümünü uyguluyarak

$$\Lambda_G = \left\{ \frac{1}{G'^2}\,,-\frac{G''}{G'^3}\,,0 \right\}$$

bulunur. Denklemi G'^2 ile çarpıp (IV.2)'deki son şekline getirince

$$\Lambda_G = \left\{ 1, 0, \frac{1}{2}\frac{G'''}{G'} - \frac{3}{4}\frac{G''^2}{G'^2} \right\} \qquad (IV.3)$$

elde edilir. (IV.3) ifadesinde

$$S(G) = \frac{G'''}{G'} - \frac{3}{2}\frac{G''^2}{G'^2}$$

terimine $G(r)$ fonksiyonunun Schwartziyeni denir. Schwartziyenin sıfıra eşitlenmesi halinde elde edilecek çözüm,

$$G(x) = \frac{Ax+B}{Cx+D}$$

tekil nokta sayısı az olduğu zaman uygulanan Möbius transformasyonudur. (Ek II) .

$$w'' + \frac{k_1}{z-z_1} w' + \frac{k_2}{(z-z_1)^2} w = 0 \qquad (IV.4)$$

Euler diferansiyel denklemine eşdeğer olan denklemimiz $(z-z_1) \longrightarrow z$ şeklindeki bir transformasyonla

$$w'' + \frac{k_1}{z} w' + \frac{k_2}{z^2} w = 0$$

şekline getirilebilir. Bu değişiklik tekil noktayı z_1 'den 0 'a taşımaktadır. Şimdi operatörümüz

$$\mathbb{L} = \left\{ 1, \frac{k_1}{z}, \frac{k_2}{z^2} \right\}$$

invaryant forma sokulursa

$$\Lambda = \left\{ 1, 0, \frac{k_1}{2z^2} - \frac{k_1^2}{4z^2} + \frac{k_2}{z^2} \right\}$$

olur.

$$\frac{d}{dG} = \frac{dz}{dG}\frac{d}{dz}$$

değişken dönüşümü yapılıp yeniden düzenlendiğinde

$$K = \frac{1}{4} + k_2 - \left(\frac{k_1-1}{2}\right)^2$$

olmak üzere (IV.3) eşitliği

$$\Lambda_G=\left\{1,0,\frac{1}{2}S(G)-K\frac{G'^2}{G^2}\right\} \tag{IV.5}$$

şekline gelmektedir. Fiziksel sonuçlara varmak için (IV.5) eşitliğini Schrödinger operatörü

$$\Lambda_S=\left\{1,0,-\frac{2mV(r)}{\hbar^2}-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\right\} \tag{IV.6}$$

ile karşılaştırmak gerekir. (IV.5) ve (IV.6) dan kolayca görülebileceği gibi karşılaştırma sonucu

$$\frac{1}{2}\frac{G'''}{G'}-\frac{3}{4}\frac{G''^2}{G'^2}-K\frac{G'^2}{G^2}=-\frac{2mV(r)}{\hbar^2}-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}$$

lineer olmayan bir diferansiyel denklem elde ederiz. Denklemin sağ tarafındaki $\frac{2mE}{\hbar^2}$ sabit terimine karşılık sol taraftaki terimlerden birinin sabite eşitlenmesi ve bu şartı sağlayan $G(r)$ çözümünün kullanılması ile uygun potansiyelin tespit edilmesi sağlanır.

$$K\frac{G'^2}{G^2}=\text{sabit}$$

bize $G(r)$ için $G(r)=e^{ar}$ çözümünün bu şartı sağlıyabileceğini gösterir. Bu çözüm kullanıldığında lineer olmayan diferansiyel denklemimiz

$$\left(K+\frac{1}{4}\right)a^2=-\frac{2mV(r)}{\hbar^2}-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}$$

biçimini alır ve $\ell=0$, $V(r)=0$ olduğundan serbest parçacık problemine karşılık gelir.

Yöntemimizi (III.9) 'daki konfluent hipergeometrik diferansiyel denkleme uygulayalım.

Lineer diferansiyel operatörümüz

$$\mathbb{L} = \{ z , (c-z) , -a \}$$

dir. İnvaryant forma sokulduğunda

$$\Lambda = \{ 1, 0, \frac{A}{z^2} + \frac{B}{z} + C \}$$

şeklinde ifade edilebilmektedir.

$$\frac{d}{dG} = \frac{dz}{dG}\frac{d}{dz}$$

değişken dönüşümüyle yeniden düzenlendiğinde

$$A = \frac{c}{2} - \frac{c^2}{4}$$

$$B = \frac{c}{2} - a \qquad\qquad C = -\frac{1}{4}$$

olmak üzere

$$\Lambda_G = \{ 1, 0, \tfrac{1}{2}S(G) + A\frac{G'^2}{G^2} + B\frac{G'^2}{G} + C \}$$

biçimine indirgendiğini görürüz. Schrödinger operatörü ile karşılaştırma yapıldığında,

$$\frac{1}{2}\frac{G'''}{G'} - \frac{3}{4}\frac{G''^2}{G'^2} + A\frac{G'^2}{G^2} + B\frac{G'^2}{G} + CG'^2 \equiv -\frac{2mV(r)}{\hbar^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \qquad \text{(IV.7)}$$

çözülmesi gereken lineer olmayan diferansiyel denklem ortaya çıkar. Sabitlerin eşleştirilmesi yapıldığında:

i) $\qquad CG'^2 = \text{sabit}$

şartı için $G(r) = r$ çözümü geçerli olup denklemimiz

$$\frac{A}{r^2} + \frac{B}{r} + C = -\frac{2mV(r)}{\hbar^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}$$

şeklini almaktadır. Bu seçim için geçerli potansiyel $\frac{1}{r}$ ile orantılı olacağından Hidrojen atomu problemine $\ell \neq 0$ için çözüm getirmektedir.

ii) $\qquad B\frac{G'^2}{G^2} = \text{sabit}$

olması halinde $G(r)=r^2$ çözümünün geçerli olacağı ve

$$\frac{4A+3/4}{r^2}+4B+4Cr^2=-\frac{2mV(r)}{\hbar^2}-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}$$

eşitliğinin elde edildiği görülür. Eşleştirme yapıldığında bulunan potansiyel $V(r)=\frac{1}{2}m\omega^2r^2$ olup, $\ell\neq 0$ için Harmonik Osilatör problemini çözdüğü görülmektedir.

iii) $$A\frac{G'^2}{G^2}=\text{sabit}$$

şartını sağlayan çözüm

$$G(r)=e^{-ar}$$

gibi bir fonksiyon olmalıdır. Şimdi diferansiyel denklem

$$(A-\tfrac{1}{4})a^2+Ba^2e^{-ar}+Ca^2e^{-2ar}=-\frac{2mV(r)}{\hbar^2}-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}$$

olur. Terimlerin eşleştirilmesi yapıldığında,

$$\ell=0$$

$$-\frac{2mE}{\hbar^2}=A-\frac{1}{4}\,a^2$$

$$\frac{2mV(r)}{\hbar^2}=Ba^2e^{-ar}+Ca^2e^{-2ar}$$

elde edilmekte bu da iyi bilinen Morse Potansiyeli problemine çözüm getirmektedir.[7] (Şekil:1)

Tekil noktaları $0, 1$ ve ∞ 'da olan Gauss'un Hipergeometrik diferansiyel denkleminin operatörü

$$\mathbb{L}=\{\,z(1-z),\ c-(a+b+1)z,\ -ab\,\}$$

invaryant forma sokulursa,

$$\Lambda=\left\{1,0,\ \frac{A}{z^2}+\frac{B}{z(1-z)}+\frac{C}{(1-z)^2}\right\}$$

elde edilir.

$$\frac{d}{dG} = \frac{dz}{dG}\,\frac{d}{dz}$$

değişken dönüşümüyle yeniden düzenlendiğinde

$$A = \frac{c}{2} - \frac{c^2}{4}$$

$$B = -ab - \frac{c(c-a-b-1)}{2}$$

$$C = -\frac{(c-a-b-1)}{2} - \frac{(c-a-b-1)^2}{4}$$

olmak üzere (Ek III)

$$\Lambda_G = \left\{ 1, 0, \tfrac{1}{2}S(G) + A\frac{G'^2}{G^2} + B\frac{G'^2}{G(1-G)} + C\frac{G'^2}{(1-G)^2} \right\}$$

şekline gelmektidir. Schrödinger operatörü ile karşılaştırma yapıldığında,

$$\frac{1}{2}\frac{G'''}{G'} - \frac{3}{4}\frac{G''^2}{G'^2} + A\frac{G'^2}{G^2} + B\frac{G'^2}{G(1-G)} + C\frac{G'^2}{(1-G)^2} \equiv -\frac{2mV(r)}{\hbar^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \qquad \text{(IV.8)}$$

lineer olmayan diferansiyel denklemi elde ederiz. Sabitlerin eşleştirilmesi diye adlandıracağımız yöntemi kullandığımızda karşımıza mümkün olabilecek üç durum çıkmaktadır.

i) $$C\frac{G'^2}{(1-G)^2} = \text{sabit}$$

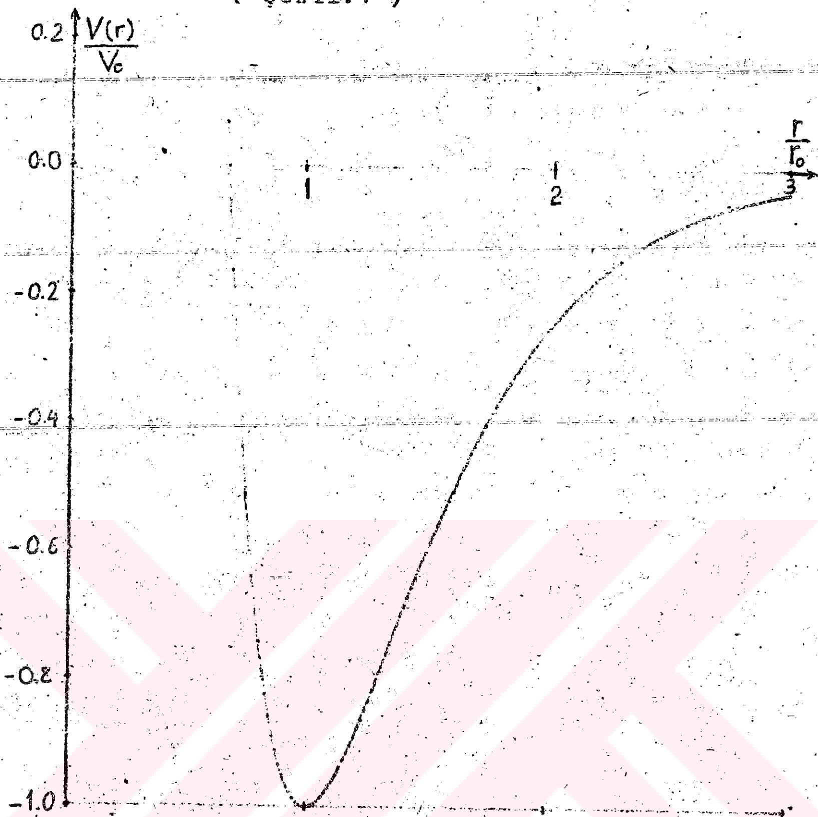
şartını gerçekleyecek $G(r)$ fonksiyonunun seçimi

$$G(r) = 1 - D\,e^{-ar}$$

şeklinde yapılmalıdır. Çözüm (IV.8) de yerine konduğunda,

$$\left(C - \frac{1}{4}\right)a^2 + \frac{A a^2}{(\Delta e^{ar}-1)^2} + \frac{B a^2}{(\Delta e^{ar}-1)} = -\frac{2mV(r)}{\hbar^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}$$

(Şekil:1)



MORSE POTANSİYELİ : $V(r) = V_0\left(e^{-2(r-r_0)/a} - 2e^{-(r-r_0)/a}\right)$

$a = r_0/2$

(İki atomlu moleküller için deneysel olarak bulunan potansiyel enerji fonksiyonunun Morse potansiyeline kesinlikle uyduğu görülmüştür.[8])

ii) $$B\,\frac{G'^2}{G(1-G)} = \text{sabit} \qquad \text{(IV.9)}$$

şartını sağlayacak $G(r)$ fonksiyonunun seçimi iki şekilde yapılabilmektedir.

$$G(r) = \mathrm{Cosh}^2 ar$$

alındığında (IV.8) eşitliği

$$\frac{8a^2}{4}-\frac{3a^2}{4}(\tanh^2 ar+\mathrm{Cotanh}^2 ar)-\frac{3a^2}{2}+4a^2A\tanh^2 ar-4a^2B$$
$$+4a^2C\,\mathrm{Cotanh}^2 ar=-\frac{2mV(r)}{\hbar^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}$$

olur (EK IV) .

Guruplandırma yapıldığında,

$$\tanh^2 ar\left(4a^2A-\frac{3a^2}{4}\right)+\mathrm{cotanh}^2 ar\left(4a^2C-\frac{3a^2}{4}\right)=-\frac{2mV(r)}{\hbar^2}$$

$$\text{sabit}=4a^2B-\frac{a^2}{2}=-\frac{2mE}{\hbar^2} \quad ; \quad l=0$$

bulunur. $A=\frac{3}{16}$ seçildiğinde, potansiyel için geçerli seçim $\mathrm{cotanh}^2 ar$ tipinde, $C=\frac{3}{16}$ seçildiğinde ise geçerli potansiyel tipinin $\tanh^2 ar$ olacağı aşikardır.

$$G(r)=\cos^2 ar$$

çözümü için (IV.8) denklemimiz

$$-\frac{8a^2}{4}-\frac{3a^2}{4}(\tan^2 ar+\mathrm{cotan}^2 ar)+\frac{3a^2}{2}+4a^2A\tan^2 ar$$
$$+4a^2B+4a^2C\,\mathrm{cotan}^2 ar=-\frac{2mV(r)}{\hbar^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}$$

olmaktadır. Guruplandırma işlemi tekrarlandığında,

$$\tan^2 ar\left(4a^2A-\frac{3a^2}{4}\right)+\mathrm{cotan}^2 ar\left(4a^2C-\frac{3a^2}{4}\right)=-\frac{2mV(r)}{\hbar^2}$$

$$\text{sabit}=4a^2B-\frac{a^2}{2}=\frac{2mE}{\hbar^2} \quad ; \quad l=0$$

bulunur. Bu durumda $A=\frac{3}{16}$ seçildiğinde, $\mathrm{cotan}^2 ar$

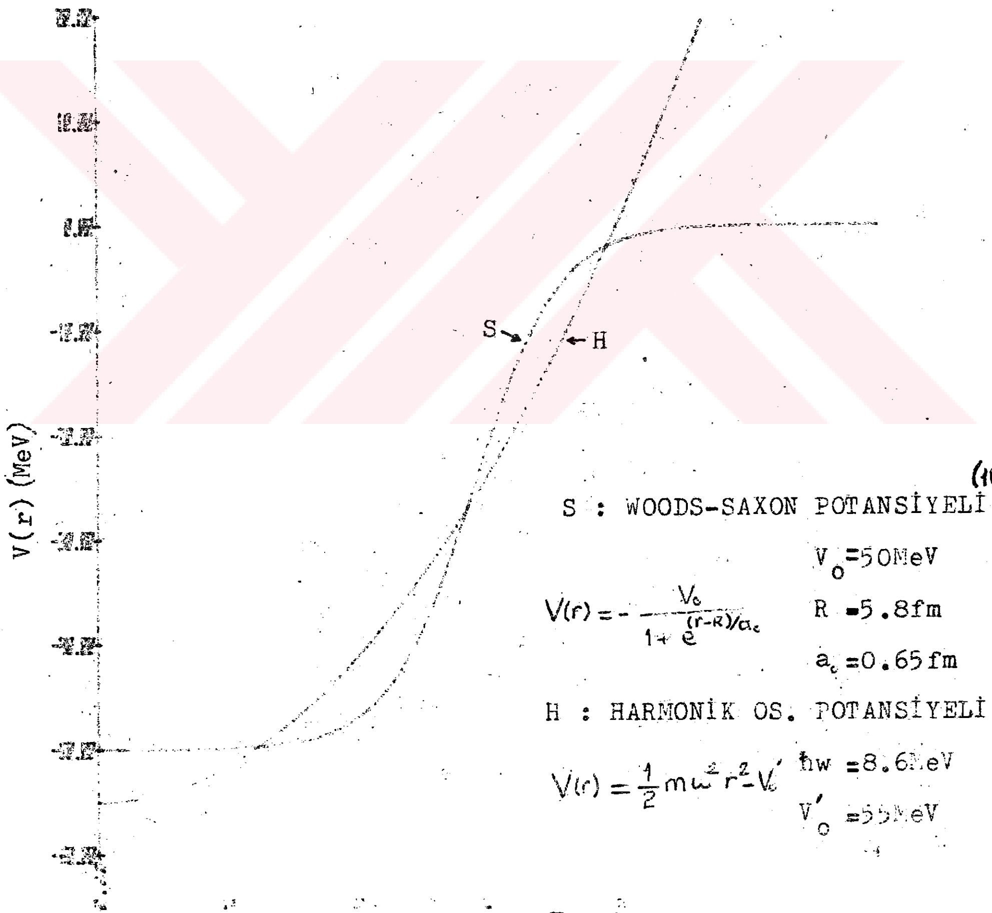
bulunur. Sonuçta $\ell = 0$ halinde elde edilen potansiyel

$$B = \frac{2m}{\hbar^2} V_0 a_0^2 \;;\; A = 0 \;;\; \Delta = -e^{-R/a_0} \;;\; a_0 a = 1$$

olmak üzere

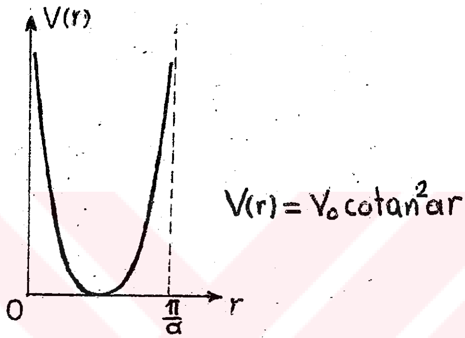
$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{(r-R)/a_0}}$$

şekline getirilebilir. Woods-Saxon potansiyeli olarak bilinen ve nükleer fizikte tek parçacık modellerinde en gerçekçi sonuçlara götüren potansiyel türüdür[9] (Şekil:2)

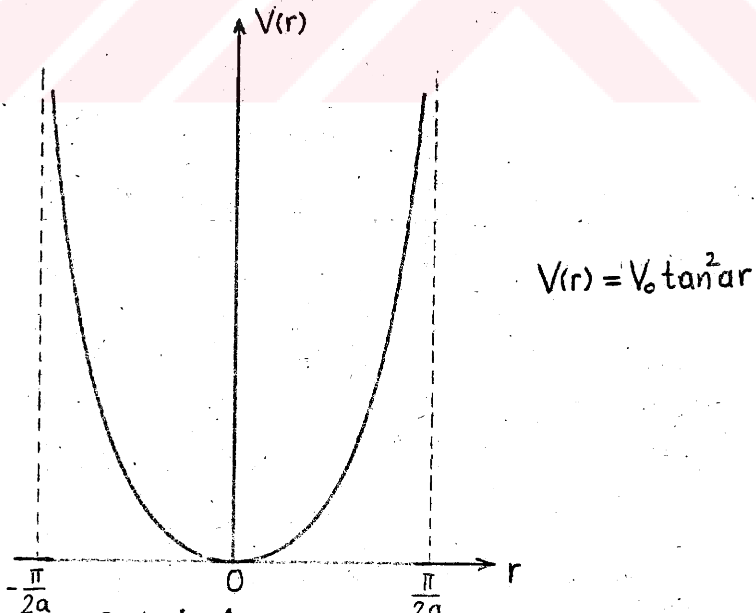


Şekil:2

tipi, $C=\frac{3}{16}$ seçilirse $\tan^2 ar$ tipi potansiyellerin geçerli olacağı ortaya çıkar. (Şekil:3) 'de görülen $V=V_0 \cot an^2 ar$ potansiyelinin değişimi r 'ye göredir. Aynı şekilde $V=V_0 \tan^2 ar$ potansiyelinin grafiği ise (Şekil:4) 'te verilmiştir.



Şekil : 3



Şekil : 4

(iii) $$A \frac{G'^2}{G^2} = \text{sabit}$$

şartını sağlayan çözüm

$$G(r) = D e^{ar}$$

gibi bir fonksiyon olmalıdır. Şimdi (IV.8) eşitliği,

$$\left(A - \frac{1}{4}\right) a^2 + \frac{B D a^2 e^{ar}}{(1 - D e^{ar})} + \frac{C D^2 a^2 e^{2ar}}{(1 - D e^{ar})^2} = - \frac{2m V(r)}{\hbar^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}$$

olur. Eşleştirme yapıldığında,

$$\frac{B a^2}{(\Delta e^{-ar} - 1)} + \frac{C a^2}{(\Delta e^{-ar} - 1)^2} = - \frac{2mV(r)}{\hbar^2}$$

$$\ell = 0 \quad ; \quad \left(A - \frac{1}{4}\right) a^2 = - \frac{2mE}{\hbar^2}$$

bulunur. Bu aşamada

$$C = 0 \quad ; \quad a a_0 = -1 \quad ; \quad \Delta = - e^{-\frac{R}{a_0}}$$

$$B = \frac{2m}{\hbar^2} V_0 a_0^2$$

seçilerek

$$V(r) = - \frac{V_0}{1 + e^{(r-R)/a_0}}$$

Woods-Saxon potansiyeli elde edilir. Dikkat edilirse $A = 0$ ve $C = 0$ için bulduğumuz çözümler bizi aynı potansiyel tipine götürmektedir.

V. CEBİRSEL KÖKENLER

Bu dönüşümlerin alt yapısını açıklayan bir grup teori yaklaşımının olması doğaldır. Nitekim SU(1 , 1) dinamik gurubunun jeneratörlerinin oluşturduğu "Spektrum Cebri" bu konuya açıklık getirmektedir. Kompakt olmayan gruplar O (2,1) $\sim$ SU (1 ,1) $\sim$ SL (2,R) ve bunların Lie cebirlerinin spektrumları birçok sistemin enerji seviyelerinin hesaplanmasında kullanılmaktadır.[12-18] Biz burada SU(1 , 1) grubunu kullanarak bazı basit kuantal sistemleri inceleyip bulunan sonuçların diferansiyel denklemler teorisi ile tam bir uyum içinde olduğunu göstereceğiz. Bunun için önce SU (1 , 1) grubunu ve jeneratörlerini kısaca inceleyeceğiz.

V.1) SU (1 , 1) Lie Cebri :

SU (1 , 1) Lie Cebrinin Γ_4 , T ve Γ_0 jeneratörleri aşağıdaki komütasyon bağıntılarını sağlarlar.

$$[\Gamma_4 , T] = -i\Gamma_0$$

$$[T , \Gamma_0] = i\Gamma_4$$

$$[\Gamma_0 , \Gamma_4] = iT$$

Casimir operatörünün $\Gamma^2 = -\Gamma_4^2 - T^2 + \Gamma_0^2$

olduğu Γ^2 ile birlikte köşegen hale getirilip spektrumu bulunacak operatörün Γ_0 olması halinde tanımlanacak yaratma ve yok etme operatörleri

$$\Gamma_\pm = \Gamma_4 \pm iT$$

yardımıyla cebir

$$[\Gamma_0 , \Gamma_\pm] = \pm \Gamma_\pm$$
$$[\Gamma_- , \Gamma_+] = 2\Gamma_0$$
şeklini alır. Casimir operatörü Γ^2 'nin özdeğeri $\lambda(\lambda+1)$ olarak tanımlanırsa, $\Gamma_0^2 \geq \Gamma^2$ olduğundan Γ_0 'ın spektrumunun $\lambda+1$ ile $+\infty$ ve $-(\lambda+1)$ ile $-\infty$ arasında bulunan iki ayrı parçadan oluştuğu ve $\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots$ olmak üzere

$$\text{Spektrum } (\Gamma_0) = \pm(\nu + \lambda + 1)$$

olduğu bilinmektedir. Grubun birbirinden farklı dört tip üniter indirgenemez temsili olup biz $\mathcal{D}^+$ diye bilineni ni kullanıyoruz.[19]

V.2) Radyal Momentumun Dinamik Özellikleri :

Radyal simetriye sahip sistemlerin Schrödinger denklemi

$$\mathcal{V}(r) \equiv \frac{2mV(r)}{\hbar^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \quad ; \quad \varepsilon \equiv \frac{2mE}{\hbar^2}$$

tanımlarıyla

$$[K^2 + \mathcal{V}(r) - \varepsilon]|\xi\rangle = 0$$

olarak yazılabilir. Bu denklemde radyal momentumu ifade eden K , veya koordinat gösterimindeki biçimiyle $-i\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)$,dinamik simetrinin anahtarı olacaktır.

$r \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ değişkenlerine eşlenik $([r, K] = i)$ ve hermitsel $(K^\dagger = K)$ bir operatör olan K 'nın toplam momentumla ilişkisi

$$|\vec{k}|^2 = K^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$$

ile verilir. Kuantal bir bağlı durumun kararlılık şartı fiziksel olarak kuvvet merkezinden dışa veya dıştan kuvvet merkezine bir akım olmamasıdır. Bu şart matematiksel olarak $\langle K \rangle = 0$ denklemiyle ifade edilir. Bir boyutlu problemlerde görülen $\langle K_x \rangle = 0$ gibi uzay tersinmesine bağlanamıyan bu olgunun kökeni dinamiktir. Dinamik dengenin bu belirtisi daha da genelleştirilerek belli şartlara uyan $f = f(r)$ 'lar için

$$\langle \sqrt{f(r)}\; K \sqrt{f(r)} \rangle = 0$$

olarak ta yazılabilir. Radyal Schrödinger denklemi

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr} + \frac{\hbar^2\,\ell(\ell+1)}{2m} + V(r) - E\right]R = 0$$

nin çözümü $R(r)$, reel $V(r)$ 'lar için, daima reel olarak seçilebilir. Bunun nedeni her $R(r)$ çözümü için $R^*(r)$ ve dolayısıyla $R(r) + R^*(r)$ 'ın da çözüm olmasıdır. Böylece

$$\langle K \rangle \sim \int_0^\infty r^2 dr\, R(r)\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)R(r)$$

$$= \int_0^\infty \left(r^2 R(r)\, dR(r) + r\, dr\, R^2(r)\right)$$

$$= \int_0^\infty r R(r)\left[r\, dR(r) + dr\, R(r)\right]$$

$$= \int_0^\infty (rR(r))\, d(rR(r)) = \frac{1}{2}(rR(r))^2\Big|_0^\infty$$

$$\lim_{r\to 0} rR(r) = \lim_{r\to\infty} rR(r) = 0$$

olduğu için de $\langle K \rangle = 0$ sağlanır.

$\langle \sqrt{f(r)}\, K \sqrt{f(r)} \rangle$ için ise $\sqrt{f(r)}$ fonksiyonu $R(r)$ ile gruplanarak aynı şey elde edilir. Ancak bu durumda

$$\lim_{r\to 0} \sqrt{f(r)}\; rR(r) = \lim_{r\to\infty} \sqrt{f(r)}\; rR(r) = 0$$

olması gerekir. Eldeki bu ipucu ile artık SU (1 , 1) grubunun jeneratörlerinin r ve K eşlenik değişkenlerine bağlı olarak inşasına geçilebilir.

V.3) SU (1 , 1) Jeneratörlerinin İnşası ve İndirgenmeler :

Bütün kararlı bağlı durumlarda beklenen değeri sıfır olan $\sqrt{f(r)}\, K \sqrt{f(r)}$ operatörü $[\,K , \phi(r)] = -i\phi'(r)$ bağıntısı kullanılarak $f(r)\,K - \frac{i}{2} f'(r)$ olarak da yazılabilir.

$\langle f(r)\,K - \frac{i}{2} f'(r) \rangle = 0$ denkleminin grup teorik izahı, **bu ifadenin** Γ_+ ve Γ_- operatörlerinin bir lineer kombinezonu oluşudur. Hatırlanacağı gibi $\Gamma_\pm$ operatörleri, işlevleri gereği

$$\langle \Gamma_+ \rangle = \langle \Gamma_- \rangle = 0$$

denklemini sağlarlar. Γ_+ ve Γ_- operatörlerinin lineer kombinezonu olmak, doğal olarak Γ_4 ve T operatörlerinin lineer kombinezonu olmağa eşdeğerdir. Grup jeneratörleri gene sadece grup elemanlarını içeren dönüşümlerle biribirlerine dönüşebildiklerine göre genellikten ayrılmadan

$$T \equiv f(r)K - \frac{i}{2} f'(r)$$

denebilir. Schrödinger denkleminde K, sadece K^2 olarak bulunduğuna göre Γ_4 ve Γ_0 K cinsinden kuadratik olarak inşa edilmelidir. Böylece SU(1,1) grubunun jeneratörleri $\Phi_{\alpha\beta} = \Phi_{\alpha\beta}(r)$ olmak üzere

$$\Gamma_4 = \Phi_{12} K^2 + \Phi_{11} K + \Phi_{10}$$

$$T = \Phi_{21} K + \Phi_{20}$$

$$\Gamma_0 = \Phi_{32} K^2 + \Phi_{31} K + \Phi_{30}$$

şeklinde yazılırlar. Hesaplara geçmeden önce bu ifadeleri elden geldiğince indirgemek ve bağımsız $\Phi_{\alpha\beta}$ 'ların sayısını en aza indirmek gerekir. En önce Casimir operatörü

$$\Gamma^2 = -\Gamma_4^2 - T^2 + \Gamma_0^2$$

'nin K^4 'lü terim içermemesi gereğinden

$$\Phi_{12} = \Phi_{32} = F(r)$$

elde edilir. Bundan sonra komütasyon bağıntılarını ve jeneratörlerin biçimini bozmayan

$$\Gamma \longrightarrow e^{-ig(r)} \, \Gamma \, e^{ig(r)}$$

gibi bir benzerlik dönüşümünde

$$g'(r) = -\frac{\Phi_{11}}{2\Phi_{21}}$$

seçilerek yeni gösterimde $\Phi_{11} = 0$ olması sağlanır.[20] Böylece

$$\Gamma_4 = F(r)K^2 + \Phi_{10}$$

$$T = \Phi_{21} K + \Phi_{20}$$

$$\Gamma_0 = F(r)K^2 + \Phi_{31} K + \Phi_{30}$$

bulunur. Son olarak da Casimir operatörünün K^3'lü terimi de içermemesi gereğinden $\Phi_{31}=0$ elde edilir. İleride hesap kolaylığı sağlaması bakımından iki bağımsız fonksiyon

$$\Phi_{10} \equiv H(r) - \frac{G(r)}{4}$$

$$\Phi_{30} \equiv H(r) + \frac{G(r)}{4}$$

olarak tanımlanır ve

$$T = -i\left[\Gamma_0, \Gamma_4\right]$$

bağıntısının da yardımıyla

$$\Gamma_4 = F(r)K^2 + H(r) - \frac{G(r)}{4}$$

$$T = F(r)G'(r) - \frac{i}{2}F(r)G''(r)$$

$$\Gamma_0 = F(r)K^2 + H(r) + \frac{G(r)}{4}$$

elde edilir. Burada bağımsızmış gibi görünen $F(r)$, $H(r)$, $G(r)$ fonksiyonlarının

$$\left[\Gamma_4, T\right] = -i\Gamma_0$$

$$\left[T, \Gamma_0\right] = i\Gamma_4$$

komütasyon bağıntılarını sağlamaları gerektiği ve Casimir operatörünün sabit olma koşulu da hatırda tutulmalıdır.

Detayları ekte sunulan hesaplarada bu koşulların sağlanmasıyla her şey tek fonksiyona indirgenerek (Ek V)

$$F = \frac{G}{G'^2}$$

$$H = \frac{3}{4}\frac{G G''^2}{G'^4} - \frac{1}{2}\frac{G G'''}{G'^3} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{G}$$

ve

$$\Gamma_4 = \frac{G}{G'^2} K^2 + \frac{3}{4}\frac{G G''^2}{G'^4} - \frac{1}{2}\frac{G G'''}{G'^3} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{G} - \frac{G}{4}$$

$$T = \frac{G}{G'} K - \frac{i}{2}\frac{G G''}{G'^2}$$

$$\Gamma_0 = \frac{G}{G'^2} K^2 + \frac{3}{4}\frac{G G''^2}{G'^4} - \frac{1}{2}\frac{G G'''}{G'^3} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{G} + \frac{G}{4}$$

elde edilirler. Artık Schrödinger denklemi bu operatörler yardımıyla çözülebilir.

V. 4) Schrödinger Denklemine Uygulama

Kullanılacak olan yöntemin esasının Schrödinger denklemini bir fonksiyonla çarptıktan sonra SU(1 , 1) grubunun jeneratörleri cinsinden lineer olarak ifade edilmesi olduğu belirtilmişti. Jeneratörlerin biçiminden Schrödinger denklemini $\frac{G}{G'^2}$ fonksiyonu ile çarpmak gerektiği ve sonuçu Γ 'lar cinsinden lineer olarak ifade etmek işleminde T 'nin yer almıyacağı açıktır.

$$\left[\frac{G}{G'^2} K^2 + \frac{G}{G'^2} \left(\vartheta(r) - \varepsilon \right) \right] |\zeta\rangle = 0$$

denklemini $\left[\alpha \Gamma_4 + \beta \Gamma_0 + \gamma \right] |\zeta\rangle = 0$

biçiminde yazmak için $\alpha + \beta = 1$ olması gerekir. $\beta - \alpha \equiv \sigma$ tanımı ile de

$$\left[\frac{G}{G'^2} K^2 + \frac{3}{4} \frac{G G''^2}{G'^4} - \frac{1}{2} \frac{G G'''}{G'^3} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{G} + \frac{\sigma^2 G}{4} + \gamma \right] |\zeta\rangle =$$

bulunur. Bu ifade

$$\left[\frac{G}{G'^2} K^2 + \frac{G}{G'^2} \left(\vartheta(r) - \varepsilon \right) \right] |\zeta\rangle = 0$$

denklemi ile karşılaştırılarak ilk önemli sonuç,

$$\frac{3}{4} \frac{G''^2}{G'^2} - \frac{1}{2} \frac{G'''}{G'} + \lambda(\lambda+1) \frac{G'^2}{G^2} + \gamma \frac{G'^2}{G} + \frac{\sigma^2}{4} G'^2 = \frac{2mV(r)}{\hbar^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2}{}$$

elde edilir. Ancak bu denklem kuantizasyon şartını içermediği için yetersizdir. Ekte görülebileceği biçimde (Ek 6

$$\left[\alpha \Gamma_4 + \beta \Gamma_0 + \gamma \right] |\zeta\rangle = 0$$

denkleminin $\left[\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}\; \Gamma_0 + \gamma \right] |\eta\rangle = 0$

haline dönüştürülmesi ve $\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} = \sigma$ kullanılarak

Spektrum $(\Gamma_0) = \nu + \lambda + 1 = -\frac{\gamma}{\sigma}$

elde edilmesi ile amaca ulaşılmış olunur.

Böylece yöntemin özü

$$\frac{3}{4}\frac{G''^2}{G'^2}-\frac{1}{2}\frac{G'''}{G'}+\lambda(\lambda+1)\frac{G'^2}{G^2}+\gamma\frac{G'^2}{G}+\frac{\sigma^2}{4}G'^2=\frac{2mV(r)}{\hbar^2}+\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}-\frac{2mE}{\hbar^2} \qquad (V.1)$$

denkleminden λ, σ ve γ parametrelerini tayin etmek ve bu parametreleri

$$\nu+\lambda+1=-\frac{\gamma}{\sigma} \qquad (V.2)$$

ifadesine yerleştirip enerji spektrumunu elde etmektir. Verilen her $V(r)$ potansiyel ifadesi için (V.5.1) gibi karmaşık bir nonlineer diferansiyel denklemi çözmek mümkün olmadığına göre ilk aşamada denklemin sağ tarafındaki tek sabit terim olan $-\frac{2mE}{\hbar^2}$'ye karşılık $\frac{\sigma^2}{4}G'^2$ $\gamma\frac{G'^2}{G}$ ve $\lambda(\lambda+1)\frac{G'^2}{G^2}$ terimleri teker teker sabite eşitlenerek bulunan G fonksiyonları yardımı ile çok iyi bilinen üç problemin çözümüne geçilebilir.

V.5) Örnekler

$G(r)$ fonksiyonu saptama işleminin ilginç bir yanı G'yi bir sabitle çarpmanın fiziksel sonuçları etkilememesidir. Bunun sebebi ise (V.5.1) denkleminde σ ve γ gibi sonradan belirlenecek iki parametreyle çarpılan G'^2 ve $\frac{G'^2}{G}$ terimleri dışında bütün terimlerin pay ve paydalarında aynı sayıda $G(r)$ fonksiyonu bulunmasıdır. Bu anlayışla en basit şekliyle elde edilen $G(r)$ fonksiyonları ve diğer sonuçları tabloda sunulmaktadır.

Denklem	$-\frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{\sigma^2}{4} G' G'$
G	r
(V.5.1) Denkleminin yeni biçimi	$\frac{\lambda(\lambda+1)}{r^2} + \frac{\gamma}{r} + \frac{\sigma^2}{4} = \frac{2mV(r)}{\hbar^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2mE}{\hbar^2}$
Çozule bilecek V(r)	$\sim \frac{1}{r} \longrightarrow -\frac{e^2}{r}$ (Hidrojen atomu)
λ	ℓ
γ	$-\frac{2m e^2}{\hbar^2}$
σ	$\frac{\sqrt{-8mE}}{\hbar}$
F	r
H	$\frac{\ell(\ell+1)}{r}$
Jeneratörler	$\Gamma_4 = rK^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r} - \frac{r}{4}$ $T = rK$ $\Gamma_0 = rK^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r} + \frac{r}{4}$
(V.5.2) Denklemi	$\nu + \ell + 1 = \frac{2me^2/\hbar^2}{\sqrt{-8mE}/\hbar}$
Enerji Spektrumu	$E = -\frac{m e^4}{2\hbar^2(\nu+\ell+1)^2}$

Denklem	$-\frac{2mE}{\hbar^2} = \gamma \frac{G' G'}{G}$
G	r^2
(V 5.1) Denkleminin yeni biçimi	$\frac{4\lambda(\lambda+1)+3/4}{r^2} + 4\gamma + \sigma^{-2} r^2 = \frac{2mV(r)}{\hbar^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2mE}{\hbar^2}$
Çözülebilecek V(r)	$\sim r^2 \longrightarrow \frac{1}{2} m w^2 r^2$ (SHO)
λ	$\frac{\ell}{2} - \frac{1}{4}$
γ	$-\frac{mE}{2\hbar^2}$
σ	$\frac{mW}{\hbar}$
F	$\frac{1}{4}$
H	$\frac{\ell(\ell+1)}{4r^2}$
Jeneratörler	$\Gamma_4 = \frac{1}{4} K^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{4r^2} - \frac{r^2}{4}$ $T = \frac{1}{2} rK - i/4$ $\Gamma_0 = \frac{1}{4} K^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{4r^2} + \frac{r^2}{4}$
(V. 5.2) Denklemi	$\nu + \frac{\ell}{2} + \frac{3}{4} = \frac{mE / 2\hbar^2}{mW/\hbar}$
Enerji Spektrumu	$E = (2\nu + \ell + 3/2)\, \hbar W$

Denklem	$-\frac{2mE}{\hbar^2} = \lambda(\lambda+1)\frac{G'G'}{G^2}$
G	e^{-ar} (21)
(V.5.1) Denkleminin yeni biçimi	$(\lambda+1/2)^2a^2+\gamma a^2 e^{-ar}+\frac{\sigma^2}{4}a^2 e^{-2ar} = \frac{2mV(r)}{\hbar^2}+\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}-\frac{2mE}{\hbar^2}$
Çözülebilecek V(r)	$V_0\left[e^{-2a(r-r_0)}-2be^{-a(r-r_0)}\right]$ MORSE POTENTIAL $\ell=0$
λ	$\frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar a}-\frac{1}{2}$
γ	$-\frac{4mV_0 b\, e^{ar_0}}{\hbar^2 a^2}$
σ	$\frac{\sqrt{8mV_0}\, e^{ar_0}}{\hbar a}$
F	$\frac{e^{ar}}{a^2}$
H	$\frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar a}\, e^{ar}$
Jeneratörler	$\Gamma_4 = \frac{e^{ar}}{a^2}K^2+\frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar a}e^{ar}-\frac{e^{ar}}{4}$ $T = -K/a-1/2$ $\Gamma_0 = \frac{e^{ar}}{a^2}K^2+\frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar a}e^{ar}+\frac{e^{-ar}}{4}$
(V.5.2) Denklemi	$\frac{4mV_0 b\, e^{ar_0}/\hbar^2a^2}{\sqrt{8mV_0}\, e^{ar_0}/\hbar a} = \nu+\frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar a}+\frac{1}{2}$
Enerji Spektrumu	$E=-\frac{\hbar^2 a^2}{2m}\left[\frac{\sqrt{2mV_0}\, b}{\hbar a}-(\nu+1/2)\right]^2$

Bulunan sonuçlar sadece potansiyelleri belirlemekle kalmayıp her hal için enerji spektrumlarını da başarılı bir şekilde ortaya koymuştur.

Analiz yoluyla bulduğumuz sonuçlarla karşılaştırma yapıldığında tam bir uygunluk olduğu ortadadır. Böylece analiz ve gurup teorik yaklaşımlar arasında belirgin bir ilinti olduğu gösterilmiştir. Analiz yoluyla bulduğumuz (IV.7) denklemi ile spektrum üreten SU(1,1) Lie cebrini kullanarak bulduğumuz (V.5.1) denklemi tamamen birbirinin aynı olan sonuçları vermektedir.

VI . SONUÇ

Verilen herhangi ikinci dereceden bir diferansiyel invaryant formda ifade edilip değişken dönüşümü uygulanarak yeni bir şekle sokuldu. Ancak bu sırada invaryantlık bozulduğu için yeni bir düzenleme ile operatör genel Schrödinger denklemi ile kıyaslanabilecek hale

$$\Lambda_G = \left\{ 1, 0, \frac{1}{2} S(G) + \left(-\left(\frac{F_1}{2F_2}\right)' - \left(\frac{F_1}{2F_2}\right)^2 + \frac{F_0}{F_2} \right) \right\}$$

getirildi. Schrödinger operatörü ile

$$\Lambda_S = \left\{ 1, 0, -\frac{2mV(r)}{\hbar^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \right\}$$

karşılaştırma yapılarak lineer olmayan bir diferansiyel denklem elde edildi. Fiziksel sonuçlara varmak için " sabitlerin eşleştirilmesi " adını verdiğimiz yöntem kullanılarak denklemi tamamen çözülebilir kılan potansiyel sınıfları elde edildi. Son olarak SU(1,1) Lie cebri ve spektrumu kullanılarak konfluent hipergeometrik denklem için bulduğumuz sonuçlarla, analiz yoluyla bulduğumuz sonuçların bir karşılaştırılması yapıldı. Neticelerin tam bir uyum içinde olduğu görülerek analiz ve grup teorik yöntemler arasındaki uyum vurgulandı.

VII. KAYNAKLAR VE NOTLAR

(1) E. Schrödinger, Proc. R.I.A., 46 A (1940) 9

(2) E. Schrödinger, Proc. R.I.A.,47(1941) 53

(3) P. M. Morse, H. Feshbach, Method of Theoritical Physics, McGraw-Hill, 1953

(4) Rainville, Intermediate Differential Equations, Chelsea Publishing Company, N.Y. (1972) Chapter 6 , chapter 7

(5) G. Birkhoff, G. C. Rota, Ordinary Differential Equations, Blaizdel Publishing Co, (1969) 129

(6) A. Aşkar, Methods in Applied Algebra and Analysis B.U., İstanbul, PartII (1978) 261

(7) P. M. Morse, Physical Rev. 34 (1929) 57

(8) L. I. Schiff Quantum Mechanics, Mc Graw-Hill Koga-kusha, Ltd. Tokyo 3.ed.(1968) 452

(9) Woods R.D., Saxon D.S., Physical Rev. 95 (1954) 577 Hornyak W.F.,

(10) Nuclear Structure, Academic Press (1975) 245

(11) A. Bohr, B.R. Mottelson, Nuclear Structure, W.A. Benjamin Inc., V.I. (1969) 222

(12) A. O. Barut, Dynamical Groups and Generalized Symmetries in Quantum Theory, University of Can-

terbury Publications, Christchurch (1972)

(13) B. G. Wybourne, Classical Groups for Physicists, John Willey (1974)

(14) P. Budini, Nuova Cimento 64 A (1966) 363

(15) P. Cordero, S. Hojman, Lett. Nuovo Cimento 4 (1970) 1123

(16) P. Cordero, G. C. Ghirardi, Nuovo Cimento 2A (1971) 217

(17) P. Cordero, S. Hojman, P. Furlan, G. C. Ghirardi, Nuovo Cimento 3A (1971) 807

(18) A. O. Barut, G. L. Bornzin, J. Math. Phy. 12(1971)841

(19) A. O. Barut, C, Fronzdal, Proc. Roy. Soc. A287 (1965) 532

(20) A. O. Barut, H. Beker, D. Dibekçi, B. Ü. Journal V 8-9 (1980-1981) 11

(21) Bu koşul sonucu elde edilen $G = e^{-ar}$, (V.5.1) denklemindeki $\frac{3}{4}\frac{G''^2}{G'^2}$ ve $-\frac{1}{2}\frac{G'''}{G'}$ terimlerini de sabit yaptığı için eşitlik değil oran kullanılmıştır.

EK I

$$F_2\Psi'' + \left(2F_2\frac{S'}{S} + F_1\right)\Psi' + \left(F_2\frac{S''}{S} + F_1\frac{S'}{S} + F_0\right)\Psi = 0$$

ifadesinde

$$\frac{S'}{S} = \frac{F_2' - F_1}{2F_2}$$

$$\frac{S''}{S} = \frac{F_2'' - F_1'}{2F_2} + \frac{F_1^2 - F_2'^2}{4F_2^2}$$

değerleri kullanıldığında eşitlik

$$F_2\Psi'' + F_2'\Psi' + \left(\frac{F_2'' - F_1'}{2F_2} - \frac{(F_2' - F_1)^2}{4F_2} + \frac{2F_1F_2' - 2F_1^2}{4F_2} + F_0\right)\Psi = 0$$

olmaktadır. Kısaltmalar yapılıp düzenlendiğinde

$$\Psi'' + \frac{F_2'}{F_2}\Psi' + \left(\frac{F_2'' - F_1'}{2F_2} + \frac{(F_2' - F_1)^2}{4F_2^2} + \frac{F_0}{F_2}\right)\Psi = 0$$

(II.5)denklemi elde edilmektedir.

EK II

$$S(G) = \frac{1}{2}\frac{G'''}{G'} - \frac{3}{4}\frac{G''^2}{G'^2} = 0$$

yapıldığında yeni bir düzenleme ile

$$\frac{G'''}{G''} = \frac{3}{2}\frac{G''}{G'}$$

olur. İntegral alındığında

$$\ln G'' = \frac{3}{2} \ln G' + \ln a$$

veya

$$G'' = a\, G'^{3/2}$$

olacaktır. Değişken dönüşümü yaparak $G' = y$ dersek

$$y' = a y^{3/2} \quad \text{yani} \quad \frac{dy}{dx} = a y^{3/2} \quad \text{veya} \quad y^{-3/2} dy = a dx$$

elde edilir.

$$\int y^{-3/2} dy = \int a dx$$

integral hesabı yapılınca

$$y = \frac{1}{(ax+b)^2} = G'$$

bulunur. İkinci bir integral işlemi yapılırsa

$$G = -\frac{1}{a(ax+b)} + c$$

gibi bir ifade elde edilir ki değişik bir düzenleme ile

$$G = \frac{a^2cx + abc - 1}{a^2x + ab} \equiv \frac{Ax + B}{Cx + D}$$

bulunabilir.

EK III

Eşitlik (III.7) 'deki hipergeometrik diferansiyel denklemin çarpan fonksiyonları

$$F_1 = z(1-z)$$
$$F_2 = c - (a+b+1)z$$
$$F_0 = -ab$$

olduğundan denklemi (II.8) 'deki invaryant formda yazmak için

$$\frac{F_1}{2F_2} = \frac{c/2}{z} + \frac{(c-a-b-1)/2}{1-z}$$

$$\frac{F_0}{F_2} = -\frac{ab}{z(1-z)}$$

ifadeleri bulunup, denklemdeki şekilleriyle

$$\left(\frac{F_1}{2F_2}\right)' = -\frac{c/2}{z^2} - \frac{(c-a-b-1)/2}{(1-z)^2}$$

$$\left(\frac{F_1}{2F_2}\right)^2 = \frac{c^2/4}{z^2} + \frac{(c-a-b-1)^2/4}{} + \frac{c(c-a-b-1)/4}{z(1-z)}$$

elde edilip yerine konduğunda (IV.7) ile karşılaştırma yapmak yeterli olmaktadır.

$$\frac{c/2}{z^2} - \frac{(c-a-b-1)/2}{(1-z)^2} - \frac{c^2/4}{z^2} - \frac{(c-a-b-1)^2/4}{} - \frac{c(c-a-b-1)/4}{z(1-z)} - \frac{ab}{z(1-z)} \equiv \frac{A}{z^2} + \frac{B}{z(1-z)} + \frac{C}{(1-z)^2}$$

Katsayılar arasındaki ilişki

$$A = \frac{c}{2} - \frac{c^2}{4} \quad ; \quad B = -ab - \frac{c(c-b-a-1)}{2}$$

$$C = -\frac{(c-a-b-1)}{2} - \frac{(c-a-b-1)^2}{4}$$

şeklinde elde edilebilmektedir.

EK IV

(IV.8) denklemi için (IV.9) şartının geçerli olması halinde:

$$G = \mathrm{Cosh}^2 ar$$

$$G' = 2a\,\mathrm{Cosh}ar\,\mathrm{Sinh}ar$$

$$G'' = 2a^2(\mathrm{Cosh}^2 ar + \mathrm{Sinh}^2 ar)$$

$$G''' = 2a^2(2a.2a\,\mathrm{Cosh}ar\,.\mathrm{sinh}ar + 2a\,2a\,\mathrm{Sinh}ar\,\mathrm{Cosh}ar)$$

$$= 4a^2G'$$

ifadeleri (IV.8) denkleminde yerine konduğunda

$$\frac{1}{2}\frac{4a^2G'}{G'} - \frac{3}{4}\frac{4a^4(\cosh^2ar+\sinh^2ar)^2}{4a^2\sinh^2ar.\cosh^2ar} + A\frac{4a^2\sinh^2ar.\cosh^2ar}{\cosh^4ar}$$

$$+B\frac{4a^2\sinh^2ar.\cosh^2ar}{\cosh^2ar(1-\cosh^2ar)} + C\frac{4a^2\sinh^2ar.\cosh^2ar}{(1-\cosh^2ar)^2} = -\frac{2mV(r)}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}$$

olur. $\cosh^2ar - \sinh^2ar = 1$ kullanılarak gerekli kısaltmalar yapılır. Sonuçta:

$$2a^2 - \frac{3a^2}{4}\frac{\cosh^4ar + 2\sinh^2ar.\cosh^2ar + \sinh^4ar}{\sinh^2ar.\cosh^2ar} + 4a^2C\,\mathrm{cotanh}^2ar$$

$$+4a^2A\tanh^2ar - 4a^2B = -\frac{2mV(r)}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}$$

elde edilir. Şimdi uygun bir guruplandırma yapılıp,

$$\tanh^2ar\left(4a^2A - \frac{3a^2}{4}\right) + \mathrm{cotanh}^2ar\left(4a^2C - \frac{3a^2}{4}\right) -$$

$$4a^2B + \frac{a^2}{2} = -\frac{2mV(r)}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}$$

bulunur.

$$G(r) = \cos^2ar$$

alınması halinde,

$$G'(r) = -2a\cos ar.\sin ar$$

$$G''(r) = -2a^2(-\sin^2ar + \cos^2ar)$$

$$G'''(r) = -2a^2(-2a\sin ar.\cos ar - 2a\sin ar.\cos ar)$$

$$= 4a^2G'(r)$$

ifadeleri (IV.8) denkleminde yerine konduğunda

$$-\frac{1}{2}\frac{4a^2G}{G'}-\frac{3}{4}\frac{4a^4(\cos^2 ar+\sin^2 ar)^2}{4a^2\cos^2 ar\cdot\sin^2 ar}+A\frac{4a^2\cos^2 ar\cdot\sin^2 ar}{\cos^4 ar}$$

$$+B\frac{4a^2\cos^2 ar\,\sin^2 ar}{\cos^2 ar(1-\cos^2 ar)}+C\frac{4a^2\cos^2 ar\cdot\sin^2 ar}{(1-\cos^2 ar)^2}=-\frac{2mV(r)}{\hbar^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}$$

olur. $\sin^2 ar+\cos^2 ar=1$ kullanılarak gerekli kısaltmalar yapıldığında,

$$-2a^2-\frac{3a^2}{4}\frac{\cos^4 ar+2\sin^2 ar\cos^2 ar+\sin^4 ar}{\sin^2 ar\cdot\cos^2 ar}+4a^2A\tan^2 ar+$$

$$+4a^2C\,\mathrm{cotan}^2 ar+4a^2B=-\frac{2mV(r)}{\hbar^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}$$

elde edilir. Guruplandırma sonunda:

$$\tan^2 ar\left(4a^2A-\frac{3a^2}{4}\right)+\mathrm{cotan}^2 ar\left(4a^2C-\frac{3a^2}{4}\right)+$$

$$4a^2B-\frac{a^2}{2}=-\frac{2mV(r)}{\hbar^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}$$

olduğu görülür.

EK V

$$\Gamma_4 = FK^2+H-\frac{G}{4}$$

$$T = FG'K-\frac{i}{2}FG''$$

$$\Gamma_0 = FK^2+H+\frac{G}{4}$$

jeneratörlerinin

$$[\Gamma_4,T]=-i\Gamma_0$$

$$[T,\Gamma_0]=i\Gamma_4$$

komütasyon bağıntılarını veya buna eşdeğer olan

$$[T, (\Gamma_0 - \Gamma_4)] = -i(\Gamma_0 - \Gamma_4)$$

$$[T, (\Gamma_0 + \Gamma_4)] = i(\Gamma_0 + \Gamma_4)$$

şartlarını sağlaması gerekir. Bunlardan ilki

$$\left[FG'K - \frac{i}{2} FG'', \frac{G}{2} \right] = -i \frac{G}{2}$$

$$FG'[K, G] = -iG$$

$$FG'(-iG') = -iG$$

veya $F = \frac{G}{G'^2}$ olarak basitleşir.

Bu arada $FG' = \frac{G}{G'}$ ifadesinin türevinden

$$FG'' + F'G' = 1 - \frac{GG''}{G'^2} ,$$

$F = \frac{G}{G'^2}$ ifadesinin türevinden ise $F' = \frac{1}{G'} - \frac{2GG''}{G'^3}$

elde edilir. Böylece

$$FG'' = 1 - \frac{GG''}{G'^2} - F'G'$$

$$= \left(1 - \frac{GG''}{G'^2}\right) - \left(1 - \frac{2GG''}{G'^2}\right)$$

$$= \frac{GG''}{G'^2}$$

bulunur ve T , $F(r)$ 'dan bağımsız olarak

$$T = \frac{G}{G'} K - \frac{i}{2} \frac{GG''}{G'^2}$$

şeklinde yazılır.

İkinci komütatöre geçmeden, ve ona gerek bırakmayacak şekilde, Casimir operatörünün $\lambda(\lambda+1)$ sabitine eşitliği şartına geçilerek:

$$\Gamma^2 = (\Gamma_0 - \Gamma_4)(\Gamma_0 + \Gamma_4) - iT + T^2$$ ifadesi

$$\frac{G^2}{G'^2}K^2 + GH - i\frac{G}{G'}K - \frac{1}{2}\frac{GG''}{G'^2} - \left(\frac{G}{G'}K - \frac{i}{2}\frac{GG''}{G'^2}\right)^2 = \lambda(\lambda+1)$$

veya

$$\frac{G^2}{G'^2}K^2 + GH - i\frac{G}{G'}K - \frac{1}{2}\frac{GG''}{G'^2} - \frac{G}{G'}K\frac{G}{G'}K$$

$$+\frac{i}{2}\frac{G}{G'}K\frac{GG''}{G'^2} + \frac{i}{2}\frac{GG''}{G'^2}\frac{G}{G'}K + \frac{1}{4}\frac{G^2G''^2}{G'^4} = \lambda(\lambda+1)$$

olarak yazılır. Bu noktada

$$K\frac{G}{G'} = \frac{G}{G'}K + \left[K, \frac{G}{G'}\right] = \frac{G}{G'}K - i\left(1 - \frac{GG''}{G'^2}\right)$$

$$K\frac{GG''}{G'^2} = \frac{GG''}{G'^2}K - i\left(\frac{G''}{G'} + \frac{GG'''}{G'^2} - \frac{2GG''^2}{G'^3}\right)$$

kullanılarak

$$\frac{G^2}{G'^2}K^2 + GH - i\frac{G}{G'}K - \frac{1}{2}\frac{GG''}{G'^2} - \frac{G^2}{G'^2} + i\left(1 - \frac{GG''}{G'^2}\right) + \frac{i}{2}\frac{G^2G'}{G'^3}K$$

$$+\frac{1}{2}\frac{G}{G'}\left(\frac{G''}{G'} + \frac{GG'''}{G'^2} - \frac{2GG''^2}{G'^3}\right) + \frac{i}{2}\frac{G^2G''}{G'^3}K + \frac{1}{4}\frac{G^2G''^2}{G'^4} = \lambda(\lambda+1)$$

denkleminde K^2 ve K terimlerinin sadeleştiği görülür, ve şart

$$GH + \frac{1}{2}\frac{G^2G'''}{G'^3} - \frac{3}{4}\frac{G^2G''^2}{G'^4} = \lambda(\lambda+1)$$

biçimine dönüşür. Bundan da

$$H = \frac{3}{4}\frac{G^2 G''^2}{G'^4} - \frac{1}{2}\frac{G^2 G'''}{G'^3} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{G}$$

elde edilir.

$$[T, (\Gamma_0 + \Gamma_4)] = i(\Gamma_0 + \Gamma_4)$$

komütatörü ise yeni hiçbir şey vermemektedir.

EK VI

Baker-Hausdorf bağıntısı

$$e^{A}\, B\, e^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \cdots$$

yardımıyla

$$e^{-iTu}\, \Gamma_4\, e^{iTu} = \Gamma_4 \operatorname{Cosh} u + \Gamma_0 \operatorname{Sinh} u$$

ve bu ifadenin de u'ya göre türevi alınarak

$$e^{-iTu}(i[\Gamma_4, T])\, e^{iTu} = e^{-iTu}\, \Gamma_0\, e^{iTu} = \Gamma_4 \operatorname{Sinh} u + \Gamma_0 \operatorname{Cosh} u$$

elde edilir. Bu yöntemle $\alpha \Gamma_4 + \beta \Gamma_0$ ifadesi

$$\alpha(\Gamma_4 \operatorname{Cosh} u + \Gamma_0 \operatorname{Sinh} u) + \beta(\Gamma_4 \operatorname{Sinh} u + \Gamma_0 \operatorname{Cosh} u) =$$
$$(\alpha \operatorname{Cosh} u + \beta \operatorname{Sinh} u)\,\Gamma_4 + (\alpha \operatorname{Sinh} u + \beta \operatorname{Cosh} u)\,\Gamma_0$$

biçimine dönüştürülürse Γ_4 terimini yok etmek için

$$\operatorname{Cosh} u = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \quad ; \quad \operatorname{Sinh} u = \frac{-\alpha}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}$$

seçimini yapmak gerekir. Bu seçimle de $\Gamma_0(\alpha \operatorname{Sinh} u + \beta \operatorname{Cosh} u)$

ifadesi

$\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}\ \Gamma_0$ olur.

ÖZGEÇMİŞİM

1948 yılında İzmit'te doğdum. İlkokulu Adapazarında bitirip Arifiye İlköğretmen Okuluna girdim. İlköğretmen Okulunun beşinci sınıfından sonra İzmir Yüksek Öğretmen Okulunun hazırlık sınıfına giderek lise öğrenimimi orada tamamladım. Girdiğim Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik-Matematik Bölümünü 1969 yılında bitirdim. Sekiz yıl sırasıyla Kayseri, İzmit ve İstanbul'da lise fizik öğretmenliği yaptıktan sonra, 1977 yılında Kocaeli D. M. M. Akademisinde fizik asistanlığına ve Boğaziçi Üniversitesi Fizik Bölümünde lisansüstü programına girdim. Şubat 1980 'de Fizik Master derecesi alarak doktora çalışmalarıma başladım. Halen Yıldız Üniversitesi Kocaeli Mühendislik Fakültesinde fizik araştırma görevlisi olarak çalışmaktayım.