

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SPLINE INTERPOLASYON VE
OPTİMAL HATA TAYİNİ**

DOKTORA TEZİ
YÜK.MÜH. HİKMET ÇAĞLAR

İSTANBUL 1990

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SPLINE INTERPOLASYON VE
OPTİMAL HATA TAYİNİ

DOKTORA TEZİ
YÜK.MÜH. HİKMET ÇAĞLAR

İSTANBUL 1990

ÖZET

Yapılan çalışmada, spektroskopik eğrilerin düzleştirilmesi ve türevlerinin alınması incelenmiştir. Deneysel veriler üzerinde yapılan bu işlemler bir eğri uydurma işlemidir. Spektroskopik eğrilerde en iyi düzgünlüğü sağlayacak optimal veri sayısının tayini yapılmıştır.

Birinci bölümde, polinomal interpolasyon ve bölünmüş farklar anlatılmıştır.

İkinci bölümde, parçasal interpolasyon işleminde kullanılan B-spline fonksiyonları ve özellikleri üzerinde durulmuştur.

Üçüncü bölümde, B-spline fonksiyonlarının elde edilmesi için ardışık tekrar bağıntısı çıkartılmıştır.

Dördüncü bölümde, yedinci dereceye kadar interpolasyon fonksiyonlarının bulunması için lineer denklem sistemleri çıkartılmıştır.

Beşinci bölümde, B-spline fonksiyonu derecesi ve düğüm noktası seçimiyle ilgili işlemler anlatılmıştır.

Altıncı bölümde, Gauss eğrisi ve demir(111)-bizmut(111) karışımının UV spektrumu verileri için değişik düğüm noktalarında ve değişik B-spline derecelerinde hata miktarları grafikte gösterilmiştir. 150 düğüm noktası kullanılarak elde edilen interpolasyon fonksiyonunda osilasyon görülmüştür. Hatanın küçük olduğu minimum nokta sayısında en düzgün eğri elde edilmiştir. Ancak hatanın küçük olmasına rağmen nokta sayısının artmasıyla eğride osilasyon meydana gelmiştir.

Spektral eğrilerin türevlerinin alınması, yüksek dereceli spline fonksiyonlarının kullanılması ile çözümlenmiştir. Optimal düğüm kullanıldığında, türev eğrilerinde osilasyona rastlanmamıştır.



SUMMARY

The smoothing of the spectroscopic curves and their derivatives is examined in this study. These operations which have been done on the experimental data are a curve fitting operation. The number of optimal curves which will provide the best smoothing in the spectroscopic curves is determined.

In the first stage, the divided differences and polynomial interpolation are explained.

In the second stage, the B-spline functions used in the function of piecewise interpolation and their features are explained.

In the third stage, in order to obtain the B-spline functions, the recurrence relation is found out.

In the fourth stage, so as to find the interpolation functions to the seventh degree, the linear equation functions is found out.

In the fifth stage, the functions about choosing the B-spline function degree and knot point are explained.

In the sixth stage, for UV spectrum data of the mixture of Fe(111)-Bi(111) and Gauss curve the number of errors in different B-spline degrees are showed in the graphics. The oscillation is seen in the interpolation function obtained by using 150 knot points. The most regular curve is obtained in the number of point which is the error in minimum degree. Although the error is small oscillation occurs in the curve as the number of point increases.

Taking in derivatives of the spectral curves is solved by using the high degrees of the spline functions. When the optimal knot is used, the oscillation is not seen in derivative curves.

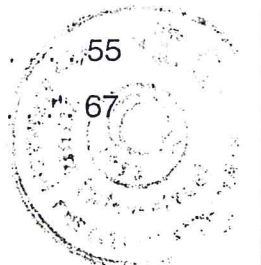


İÇİNDEKİLER

ÖZET

SUMMARY

BÖLÜM : 1. POLİNOMAL İNTERPOLASYON	1
1.1 Parçasal İnterpolasyon	2
1.2 Bölünmüş Farklar	6
BÖLÜM : 2. B-SPLINE FONKSİYONLARI	10
BÖLÜM : 3. B-SPLINE ARDIŞIK TEKRAR BAĞINTISI	13
BÖLÜM : 4. B-SPLINE FONKSİYONLARI İLE İNTERPOLASYON	25
4.1 Birinci Derece Spline	27
4.2 İkinci Derece Spline	29
4.3 Üçüncü Derece Spline	31
4.4 Dördüncü Derece Spline	33
4.5 Beşinci Derece Spline	36
4.6 Altıncı Derece Spline	39
4.7 Yedinci Derece Spline	42
BÖLÜM : 5. OPTİMAL DÜĞÜM NOKTALARININ TAYİNİ	46
BÖLÜM : 6. SONUÇ VE TARTIŞMA	54
6.1 Düğüm noktalarının dağılımı	55
6.2 Spline fonksiyonu derecesi	67



1. POLİNOMAL INTERPOLASYON

Bir fonksiyonun verilerini kullanarak, bu verileri temsil eden ve başlangıçta analitik ifadesi bilinmeyen fonksiyon için yaklaşık bir fonksiyon bulunmasına Interpolasyon denir. Yaklaşım fonksiyonu olarak polinomlar, trigonometrik polinomlar, parçasal polinomlar kullanılır. Interpolasyonda amaç en iyi yaklaşım fonksiyonunun bulunmasıdır. Bu işlemde genel olarak polinomlar yaklaşım fonksiyonu olarak kullanılır. Bu polinomlarda da parçasal polinomlar tercih edilir. Parçasal polinomlarda integral ve diferansiyel işlemleri ve diğer temel aritmetiksel işlemler kolaylıkla yapılabilir. Zira diğer fonksiyonlarda bu işlemleri yapmak daha zordur. n terimli bir polinom veya <n dereceli polinom,

$$p(x) = a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1} = \sum_{j=1}^n a_jx^{j-1}$$

şeklinde tanımlanır.

Tüm polinomları içeren n terimli P_n uzayı lineer uzaydır. Dolayısıyla aranılan polinomlarda n terimli sonsuz polinomlardan meydana gelen P_n uzayındadır. Tek bir polinom ile aranılan fonksiyon bulunabildiği gibi, polinomların lineer birleşimi ile de bulunabilir. Sonsuz boyutlu polinomlar uzayında, aranılan fonksiyon süreklidir ve türevleride parçasal süreklidir.

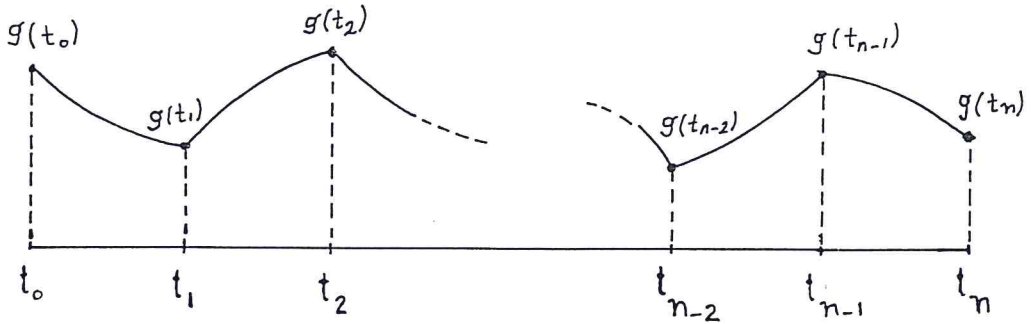


1.1 Parçasal Interpolasyon

t	t_0	t_1	t_2	\dots	t_{n-1}	t_n
$g(t)$	$g(t_0)$	$g(t_1)$	$g(t_2)$	\dots	$g(t_{n-1})$	$g(t_n)$

değerleri verilen $g(x)$ fonksiyonunun interpolasyon fonksiyonunun bulunmasında, parçasal polinomlar kullanılabilir.

Yukarıda tabloda verilen t_0, t_1, \dots, t_n noktaları düğüm noktalarıdır. Düğüm noktaları $(t_i)_{i=1}^n$ dizisi şeklinde gösterilebilir. Dizi artan ve sonlu bir dizidir. Her iki düğüm noktası arası için bir polinom bulunmak suretiyle $g(x)$ gibi bir interpolasyon fonksiyonu bulunmasına parçasal polinomal interpolasyon adı verilir.

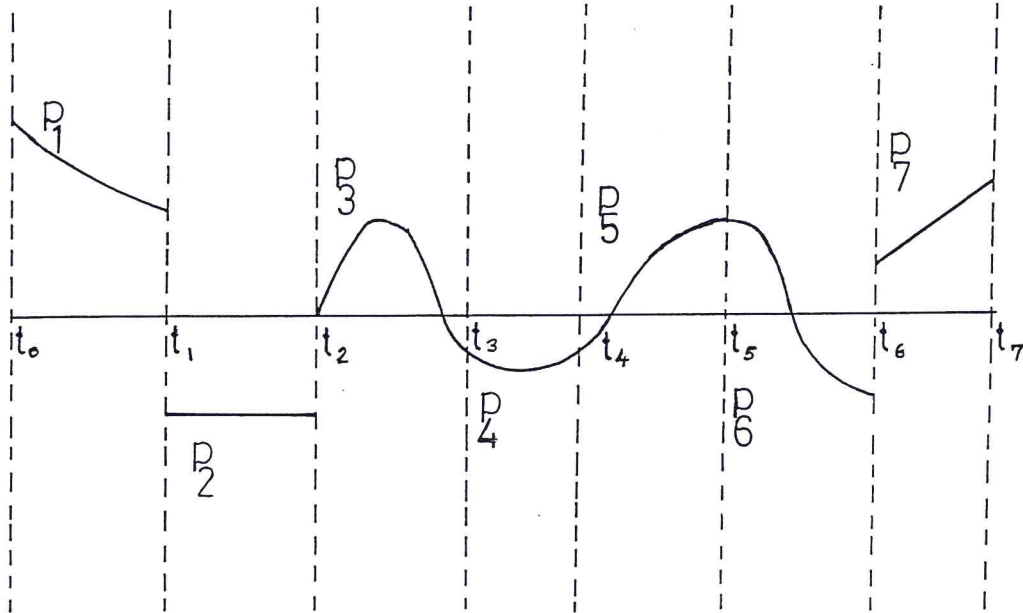


Şekil 1.1 Parçasal polinomlar



İnterpolasyon aralığı içindeki alt aralıklarda (elemanlarda) yüksek dereceli polinomlar ile İnterpolasyon fonksiyonu bulunur. $[t_0, t_n]$ aralığında $(t_i)_0^7$ düğüm noktalarında p_1, p_2, \dots, p_n gibi n sayıda polinomdan meydana gelen interpolasyon fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$f(x) = \begin{cases} p_1(x) & t_0 \leq x < t_1 \\ p_2(x) & t_1 \leq x < t_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ p_7(x) & t_6 \leq x < t_7 \end{cases}$$



Şekil 1.2



$$f(x) \text{ fonksiyonunun, } f(x) = \begin{cases} p_1(x) & x \leq t_0 \\ p_7(x) & x \geq t_7 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanma işlemine ekstrapolasyon denir. $f(x)$ parçasal fonksiyonu t_1 ve t_6 noktalarında iki değerli olarak tariflenmiştir.

$$f(\bar{t}_1) = p_1(t_1)$$

$$f(\bar{t}_1^\dagger) = p_2(t_1)$$

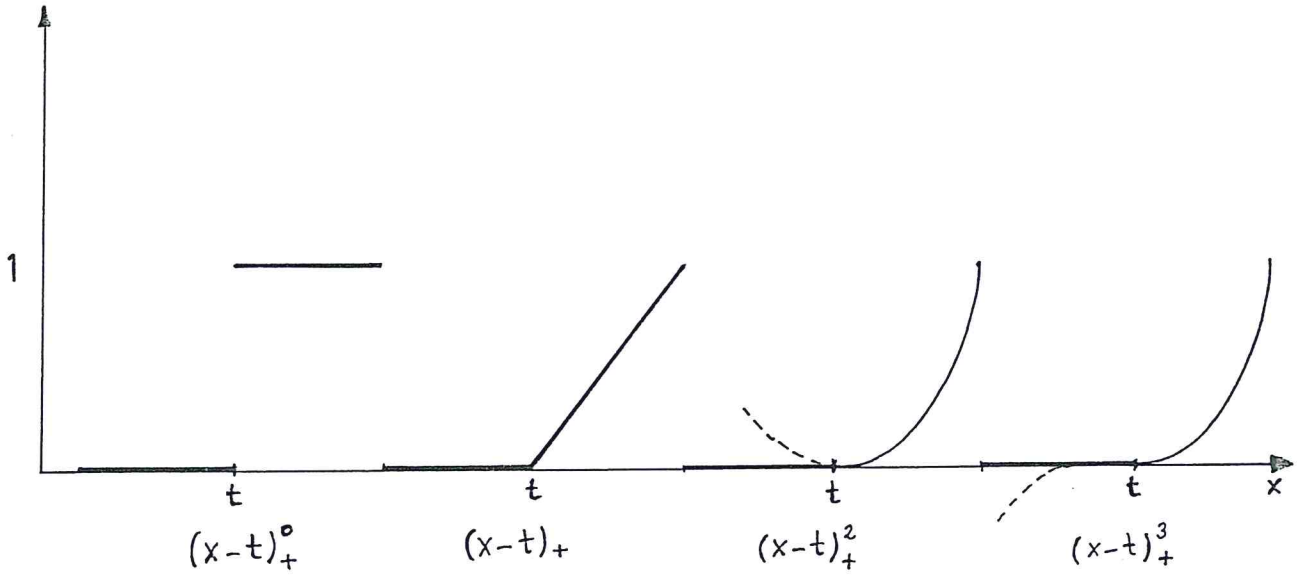
$p_1(t_1) \neq p_2(t_1)$ olduğundan, fonksiyon bu noktalarda iki farklı değere sahiptir. İnterpolasyon işleminde bu duruma izin verilmez ve parçasal fonksiyon tek değerli tariflenir.

$(t_i)_1^n$ düğüm noktalarında f parçasal fonksiyonun türevleri mevcut ve tek değerli olmalıdır. P_n uzayındaki polinomlar baz seçilerek de $f(x)$ interpolasyon fonksiyonu bulunabilir.

$$f(x) = \sum \alpha_j \phi_j, \quad \phi \in P_n$$

ϕ_j fonksiyonları lineer bağımsız fonksiyonlardır. α_j sabit değerlerinin bulunması ile $f(x)$ fonksiyonu elde edilir. Şekil 1.3 deki fonksiyonlar baz olarak seçilebilir.





Şekil 1.3



1.2 Bölünmüş Farklar

Tanım : $g(x)$ Fonksiyonunun t_1, \dots, t_{i+k} düğüm noktalarındaki k dereceden bölünmüş farkı $[t_1, \dots, t_{i+k}]g$ şeklinde tanımlanır. Buna göre,

1. p_i polinomları P_i uzayındaki polinomlar olmak üzere ($p_i \in P_i$) t_1, t_2, \dots, t_i düğüm noktalarında $i = k$ ve $i = k+1$ için,

$$p_{k+1} = p_k + (x-t_1) \dots (x-t_k) [t_1, \dots, t_{k+1}]g$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= a_1 + a_2x + \dots + a_{k+1}x^k \\ p_k &= b_1 + b_2x + \dots + b_{k+1}x^{k-1} \end{aligned}$$

Buradan $p_{k+1} - p_k$ polinomu,

$$p_{k+1} - p_k = (x-t_1) \dots (x-t_k) [t_1, \dots, t_{k+1}]g$$

şeklinde yazılır. Bu polinomdaki $[t_1, \dots, t_{k+1}]g$ terimi g fonksiyonunun $k+1$ dereceden bölünmüş farkıdır. Bu terim $C = [t_1, \dots, t_{k+1}]g$ şeklinde gösterilirse yukarıdaki polinom

$$p_{k+1} - p_k = C.(x-t_1) \dots (x-t_k) \quad \text{şeklinde yazılabilir.}$$

Bölünmüş farklar ile p_n polinomu,

$$\begin{aligned} p_n(x) &= [t_1]g + (x-t_1)[t_1, t_2]g + (x-t_1)(x-t_2)[t_1, t_2, t_3]g + \\ &\dots + (x-t_1) \dots (x-t_{n-1})[t_1, \dots, t_n]g \end{aligned}$$



şeklinde tanımlanabilir. Bu yazılışa Newton yazılışı adı verilir.

Genel olarak p_n polinomu

$$p_n(x) = \sum_{i=1}^n (x-t_1) \dots (x-t_{i-1}) [t_1, \dots, t_i] g$$

şeklinde yazılır.

2. $f = \alpha.g + \beta.h$ fonksiyonu için α ve β sabitse

$$[t_i, \dots, t_{i+k}] f = \alpha [t_i, \dots, t_{i+k}] g + \beta [t_i, \dots, t_{i+k}] h$$

3. $f = g.h$ şeklinde bir fonksiyona tüm x değerleri için (Leibniz Formülü)

$$[t_i, \dots, t_{i+k}] f = \sum_{r=i}^{i+k} ([t_i, \dots, t_r] g) \cdot ([t_r, \dots, t_{i+k}] h)$$

yazılabilir.

4. g polinomal fonksiyonunun derecesi $\leq k$ olmak üzere $[t_i, \dots, t_{i+k}]$ bölünmüş farkı sabittir. Eğer $g \in p_k$ ise $[t_i, \dots, t_{i+k}] g = 0$ yazılabilir. Birinci bölünmüş farkı için $[t_i] g = g(t_i)$ ve buradan



$$[t_1, t_2] g = \frac{g(t_1) - g(t_2)}{t_1 - t_2}$$

bulunur.

t_1 ve t_2 düğüm noktaları için $p_2(x)$ polinomu

$$p_2(x) = [t_1] g + (x - t_1) [t_1, t_2] g$$

$$p_2(x) = g(t_1) + (x - t_1) \cdot \frac{g(t_1) - g(t_2)}{t_1 - t_2}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{g(t_1) - g(t_2)}{t_1 - t_2} = g'(t_1)$$

yazılırsa

$t_1 = t_2$ için

$$[t_1, t_2] g = g'(t_1)$$

yazılır.

Buradan ortalama interpolasyon bulunur.

5. g fonksiyonu k ıncı dereceden türevi alınabilen bir fonksiyon ise, t_i, \dots, t_{i+k} aralığında bir noktasında

$$[t_i, \dots, t_{i+k}] g = g^{(k)}(\zeta) / k!$$

yazılabilir.



Sonuç olarak,

$$\frac{g^{(k)}(t_i)}{k!} \quad t_i = \dots = t_{i+k}$$

$$[t_i, \dots, t_{i+k}]g = \frac{[t_i, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}]g - [t_i, \dots, t_{s-1}, t_{s+1}, \dots, t_{i+k}]g}{t_s - t_r}$$

t_r ve t_s noktaları t_i, \dots, t_{i+k} aralığındaki iki noktadır.

Özellikleri yukarıda anlatılan bölünmüş farklar aşağıdaki bölünmüş fark tablosu ile hesaplanabilir.

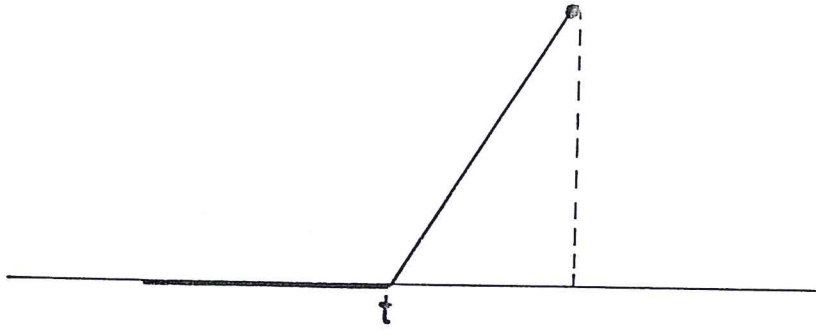
Interpolasyon noktaları	fonksiyon değerleri	1.böl. fark	2.böl. fark	3.böl. fark	---	n-2.böl. fark	n-1.böl. fark
t_1	$g(t_1)$	$[t_1, t_2]g$					
t_2	$g(t_2)$	$[t_3, t_2]g$	$[t_1, t_2, t_3]g$				
t_3	$g(t_3)$	$[t_4, t_3]g$	$[t_2, t_3, t_4]g$	$[t_1, t_2, t_3, t_4]g$	---		
t_4	$g(t_4)$					$[t_1, \dots, t_{n-1}]g$	$[t_1, \dots, t_n]g$
\vdots	\vdots					$[t_2, \dots, t_n]g$	
\vdots	\vdots						
t_{n-1}	$g(t_{n-1})$		$[t_{n-2}, t_{n-1}, t_n]g$	$[t_{n-3}, t_{n-2}, t_{n-1}, t_n]g$			
t_n	$g(t_n)$	$[t_{n-1}, t_n]g$					



2. B-SPLINE FONKSİYONLARI

Parçasal interpolasyon işleminde kullanılan fonksiyonlardır. $(x-t_+)^{k-1}$ fonksiyonları ile tanımlanır. Basis spline fonksiyonları veya B-spline fonksiyonları $(x-t_+)^{k-1}$ fonksiyonlarını içeren $P_{k,1}$ uzayında bunların bölünmüş farkları ile tanımlanır.

$$B_{i,k,t}(x) = (t_{i+k} - t_i) \cdot [t_i, \dots, t_{i+k}] (t-x)_+^{k-1} \quad x \in \mathbb{R} \quad 2.1$$



Şekil 2.1 $f(x) = (x-t_+)^{k-1}$ fonksiyonu

$(t-x_+)^{k-1}$ fonksiyonunun bölünmüş farkları, t ve x değişkenlerine bağlıdır. x yaklaşım fonksiyonun değişkeni, t ise yaklaşık olarak verilen fonksiyonun düğüm noktalarıdır. Genellikle $B_{i,k,t}$ yerine B_i notasyonu kullanılır.

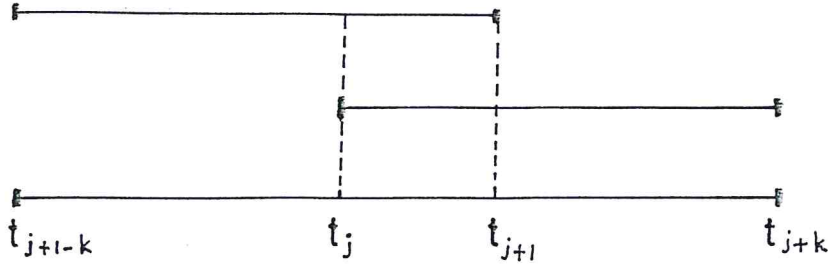
B-spline fonksiyonlarının özellikleri aşağıdaki şekilde sıralanabilir.

1. $x \notin [t_i, t_{i+k}]$ için $B_i(x) = 0$ dir.

$g(t) = (t-x)_+^{k-1}$ fonksiyonunda, polinom derecesi $< k$ olduğundan $g(t)$ fonksiyonunun, $[t_i, \dots, t_{i+k}]$ bölünmüş farkı $[t_i, \dots, t_{i+k}]g = 0$ dir.

2. Herhangibir $[t_j, t_{j+1}]$ aralığında $< k$ dereceli B-spline fonksiyonlarının t_j düğümlerindeki $B_{j-k+1}, B_{j-k+2}, \dots, B_j$ fonksiyon değerleri 0 dan farklıdır.





Şekil 2.2

2.1 deki B-spline fonksiyonunu bölünmüş fark özellikleri kullanılarak yeniden yazılırsa,

$$B_i(x) = [t_{i+1}, \dots, t_{i+k}] (t-x)_+^{k-1} - [t_i, \dots, t_{i+k-1}] (t-x)_+^{k-1}$$

bulunur.

$i=j+1-k$ ile j arasındaki toplamı ise

$$\sum_i B_i(x) = \sum_{i=j+1-k}^j B_i(x)$$

olur. Buradan

$$= \sum_{i=j+1-k}^j [t_{i+1}, \dots, t_{i+k}] (t-x)_+^{k-1} - \sum_{i=j+1-k}^j [t_i, \dots, t_{i+k-1}] (t-x)_+^{k-1}$$

$$= [t_{j+1}, \dots, t_{j+k}] (t-x)_+^{k-1} - [t_{j+1-k}, \dots, t_j] (t-x)_+^{k-1}$$



$$= 1 - 0$$

bulunur.

Bölüm 1.4 deki özellikten,

$$[t_{j+1}, \dots, t_{j+k}] (t-x)^{k-1}, \quad \text{için} \quad (t-x)^{k-1} = g(x)$$

alınarak

$$[t_{j+1}, \dots, t_{j+k}] (t-x)^{k-1} = 1$$

$$[t_{j+1-k}, \dots, t_j] (t-x)^{k-1} = 0$$

bulunur.

Genel olarak $t_r < x < t_s$ için

$$\sum_{i=r}^s B_i(x) = \sum_{i=r+1-k}^{s-1} B_i(x) = 1$$

yazılır.

3. $t_r < x < t_{r+k}$ aralığında tanımlanan $B_i(x)$ fonksiyonunun değerleri pozitiftir. ($B_i(x) > 0$)

4. t düğüm noktalarında, $< k$ dereceden B-spline fonksiyonlarının lineer birleşimi,

$$\xi_{k,t} = \sum_i \alpha_i \cdot B_{i,k,t} : \alpha_i \in \mathbb{R}$$

dir. t_i noktaları sonlu olduğundan serisinde sonlu bir toplamı vardır.



3. B – SPLINE ARDIŞIK TEKRAR BAĞINTISI

B-spline parçasal polinomlarının elde edilmesi için, bölünmüş fark özelliklerinden faydalanılarak ardışık tekrar bağıntısı çıkartılabilir.

$$(t-x)_+^{k-1} = (t-x) \cdot (t-x)_+^{k-2}$$

eşitliğin sağ tarafındaki çarpıma Leibniz formülü uygulanırsa,

$$[t_i, \dots, t_{i+k}] (t_i-x)_+^{k-1} = (t_i-x) [t_i, \dots, t_{i+k}] (t_i-x)_+^{k-2} +$$

$$1 \cdot [t_{i+1}, \dots, t_{i+k}] (t_i-x)_+^{k-2}$$

$$[t_i] (t_i-x) = (t_i-x)$$

$$[t_i, t_{i+1}] (t_i-x) = 1$$

$$j > i+1 \quad \text{için} \quad [t_i, \dots, t_j] (t_i-x) = 0$$

$$(t_i-x) [t_i, \dots, t_{i+k}] = \frac{t_i-x}{t_{i+k}-t_i} ([t_{i+1}, \dots, t_{i+k}] -$$

$$[t_i, \dots, t_{i+k-1}])$$

$$[t_i, \dots, t_{i+k}] (t_i-x)_+^{k-1} = \frac{x-t_i}{t_{i+k}-t_i} [t_i, \dots, t_{i+k-1}] (t_i-x)_+^{k-2} +$$

$$\frac{t_{i+k}-x}{t_{i+k}-t_i} [t_{i+1}, \dots, t_{i+k}] (t_i-x)_+^{k-2}$$

eşitliğinden,



$$\frac{B_{i,k}(x)}{t_{i+k}-t_i} = \frac{x-t_i}{t_{i+k}-t_i} \cdot \frac{B_{i,k-1}(x)}{t_{i+k-1}-t_i} + \frac{t_{i+k}-x}{t_{i+k}-t_i} \cdot \frac{B_{i+1,k-1}(x)}{t_{i+k}-t_{i+1}}$$

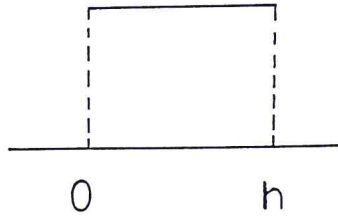
Buradan da aşağıdaki ardışık tekrar bağıntısı elde edilir.

$$B_{i,k}(x) = \frac{x-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} \cdot B_{i,k-1}(x) + \frac{t_{i+k}-x}{t_{i+k}-t_{i+1}} \cdot B_{i+1,k-1}(x)$$

<k dereceden B-spline fonksiyonları ardışık tekrar bağıntısı kullanılarak aşağıdaki şekilde tanımlanır.

k = 1 için:

$B_{i,1}(x) = \{ 1 \quad 0 \leq x < h \}$ alınır.



şekil 3.1 $B_{i,1}$ Spline



k = 2 için:

$$B_{i,2} = \frac{x-t_i}{t_{i+1}-t_i} \cdot B_{i,1}(x) + \frac{t_{i+2}-x}{t_{i+2}-t_{i+1}} \cdot B_{i+1,1}(x)$$

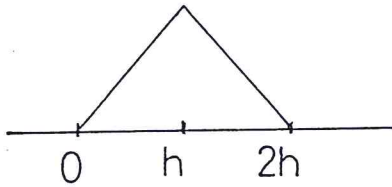
$$B_{i,1}(x) = 1, \quad B_{i+1,1}(x) = 1 \quad (k = 1)$$

i = 0 için $B_{0,2}$ fonksiyonu,

$$B_{0,2} = \begin{cases} \frac{x}{h} & 0 \leq x < h \\ \frac{2h-x}{h} & h \leq x < 2h \end{cases}$$

şeklinde yazılır.

$B_{1,2}, B_{2,2}, \dots$ fonksiyonlarının hesaplanması için $B_{0,2}$ de $B_{i,2} = B_{0,2}(x-(i-1)h)$ yazılır. $i = 2, 3, \dots$



Şekil 3.2 $B_{i,2}$ Spline

k = 3 için:

$$B_{i,3} = \frac{x-t_i}{t_{i+2}-t_i} \cdot B_{i,2}(x) + \frac{t_{i+3}-x}{t_{i+3}-t_{i+1}} \cdot B_{i+1,2}(x)$$



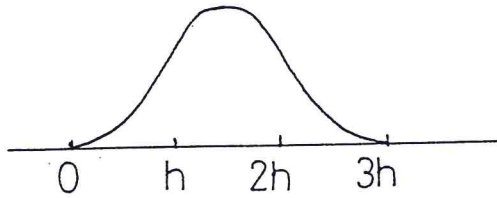
$[0, h]$, $[h, 2h]$, $[2h, 3h]$ aralıklarında,

$$B_{0,3} = \begin{cases} \frac{x}{2h} \cdot B_{0,2}(x) \\ \frac{3h-x}{2h} \cdot B_{1,2}(x) \end{cases}$$

olur. Buradan

$$B_{0,3} = \frac{1}{2h^2} \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < h \\ -2x^2 + 6xh - 3h^2 & h \leq x < 2h \\ x^2 - 6xh + 9h^2 & 2h \leq x < 3h \end{cases}$$

ve $B_{i,3} = B_{0,3}(x - (i-1)h)$ yazılır. $i = 2, 3, \dots$



Şekil 3.3 $B_{i,3}$ Spline



$k = 4$ için:

$$B_{i,4} = \frac{x-t_i}{t_{i+3}-t_i} \cdot B_{i,3}(x) + \frac{t_{i+4}-x}{t_{i+4}-t_{i+1}} \cdot B_{i+1,3}(x)$$

$[0,h]$, $[h,2h]$, $[2h,3h]$, $[3h,4h]$ aralıklarında,

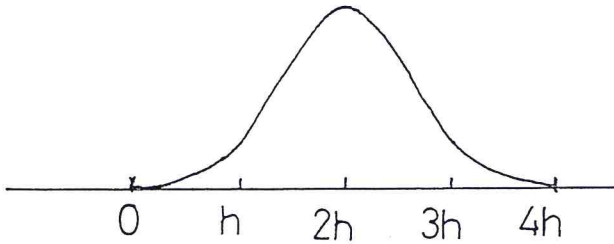
$$B_{0,4} = \begin{cases} \frac{x}{3h} \cdot B_{0,3}(x) \\ \frac{4h-x}{3h} \cdot B_{1,3}(x) \end{cases}$$

olur. Buradan,

$$B_{0,4} = 1/6h^3 \begin{cases} x^3 & 0 \leq x < h \\ -3x^3 + 12hx^2 - 12h^2x + 4h^3 & h \leq x < 2h \\ 3x^3 - 24hx^2 + 60h^2x - 44h^3 & 2h \leq x < 3h \\ -x^3 + 12hx^2 - 48h^2x + 64h^3 & 3h \leq x < 4h \end{cases}$$

ve

$B_{i,4} = B_{0,4}(x-(i-1)h)$ yazılır. $i=2,3 \dots$



Şekil 3.4 $B_{i,4}$ Spline



k = 5 için:

$$B_{i,5} = \frac{x-t_i}{t_{i+4}-t_i} \cdot B_{i,4}(x) + \frac{t_{i+5}-x}{t_{i+5}-t_{i+1}} \cdot B_{i+1,4}(x)$$

$[0,h]$, $[h,2h]$, $[2h,3h]$, $[3h,4h]$, $[4h,5h]$ aralıklarında

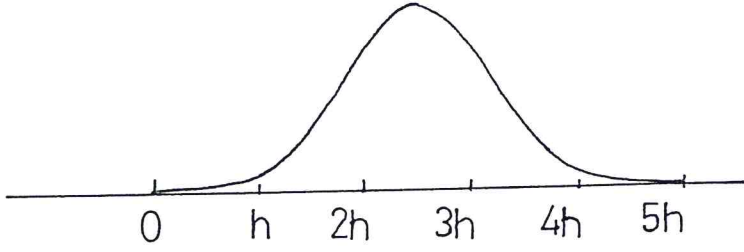
$$B_{0,5} = \begin{cases} \frac{x}{4h} \cdot B_{0,4}(x) \\ \frac{5h-x}{4h} \cdot B_{1,4}(x) \end{cases}$$

olur. Buradan

$$B_{0,5} = 1/24h^4 \begin{cases} x^4 & 0 \leq x < h \\ -x^4 + 20hx^3 - 30h^2x^2 + 20h^3x - 5h^4 & h \leq x < 2h \\ 6x^4 - 60hx^3 + 210h^2x^2 - 300h^3x + 155h^4 & 2h \leq x < 3h \\ -4x^4 + 60hx^3 - 330h^2x^2 + 780h^3x - 655h^4 & 3h \leq x < 4h \\ x^4 - 20hx^3 + 150h^2x^2 - 500h^3x + 625h^4 & 4h \leq x < 5h \end{cases}$$

ve $B_{i,5} = B_{0,5}(x - (i-1)h)$ yazılır. $i=2,3 \dots$



Şekil 3.5 $B_{i,5}$ Spline

$k = 6$ için:

$$B_{i,6} = \frac{x-t_i}{t_{i+5}-t_i} \cdot B_{i,5}(x) + \frac{t_{i+6}-x}{t_{i+6}-t_{i+1}} \cdot B_{i+1,5}(x)$$

$[0,h]$, $[h,2h]$, $[2h,3h]$, $[3h,4h]$, $[4h,5h]$, $[5h,6h]$ aralıklarında

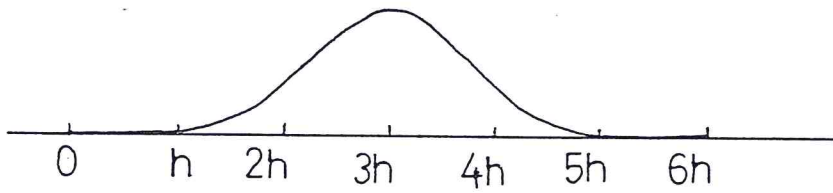
$$B_{0,6} = \begin{cases} \frac{x}{5h} \cdot B_{0,5}(x) \\ \frac{6h-x}{5h} \cdot B_{1,5}(x) \end{cases}$$

yazılır. Buradan



$$B_{0,6} = \frac{1}{120h^5} \begin{cases} x^5 & 0 \leq x < h \\ -5x^5 + 30hx^4 - 60h^2x^3 + 60h^3x^2 - 30h^4x + 6h^5 & h \leq x < 2h \\ 10x^5 - 120hx^4 + 540h^2x^3 - 1140h^3x^2 + 1170h^4x - 474h^5 & 2h \leq x < 3h \\ -10x^5 + 180hx^4 - 1260h^2x^3 - 5340h^3x^2 + 12270h^4x - 10974h^5 & 3h \leq x < 4h \\ 5x^5 - 120hx^4 + 1140h^2x^3 - 5340h^3x^2 + 12270h^4x - 10974h^5 & 4h \leq x < 5h \\ -x^5 + 30hx^4 - 360h^2x^3 + 2160h^3x^2 - 6480h^4x + 7776h^5 & 5h \leq x < 6h \end{cases}$$

$B_{i,6} = B_{0,6}(x - (i-1)h)$ yazılır. $i=2,3, \dots$



Şekil 3.6 $B_{i,6}$ Spline



k = 7 için:

$$B_{i,7} = \frac{x-t_i}{t_{i+6}-t_i} \cdot B_{i,6}(x) + \frac{t_{i+7}-x}{t_{i+7}-t_{i+1}} \cdot B_{i+1,6}(x)$$

$[0,h]$, $[h,2h]$, ... , $[6h,7h]$ aralıklarında

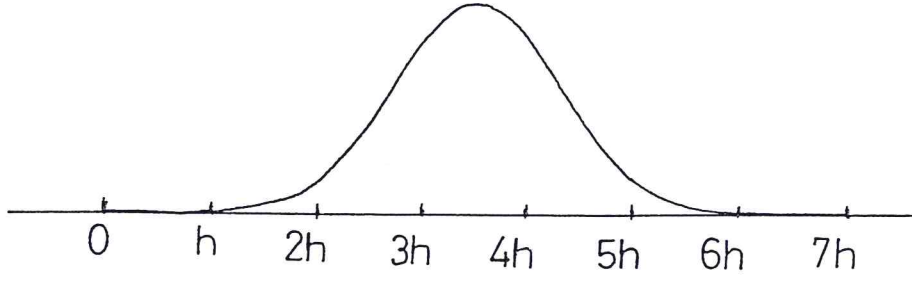
$$B_{0,7} = \begin{cases} \frac{x}{6h} \cdot B_{0,6}(x) \\ \frac{7h-x}{6h} \cdot B_{1,6}(x) \end{cases}$$

yazılır. Buradan

$$B_{0,7} = \frac{1}{720h^6} \begin{cases} x^6 & 0 \leq x < h \\ -6x^6 + 42hx^5 - 105h^2x^4 + 140h^3x^3 - 105h^4x^2 & h \leq x < 2h \\ +42h^5x - 7h^6 & 2h \leq x < 3h \\ 15x^6 - 210hx^5 + 1155h^2x^4 - 3220h^3x^3 + 4935h^4x^2 & 3h \leq x < 4h \\ -3990h^5x - 1337h^6 & 4h \leq x < 5h \\ -20x^6 + 420hx^5 - 3570h^2x^4 + 15680h^3x^3 - 37590h^4x^2 & 5h \leq x < 6h \\ +47040h^5x - 24178h^6 & 6h \leq x < 7h \\ 15x^6 - 420hx^5 + 4830h^2x^4 - 29120h^3x^3 + 96810h^4x^2 & \\ 168000h^5x - 119182h^6 & \\ -6x^6 + 210hx^5 - 3045h^2x^4 + 23380h^3x^3 - 100065h^4x^2 & \\ +225750h^5x - 208943h^6 & \\ x^6 - 42hx^5 + 735h^2x^4 - 6860h^3x^3 + 36015h^4x^2 & \\ -100842h^5x + 227649h^6 & \end{cases}$$

$B_{i,7} = B_{0,7}(x - (i-1)h)$ yazılır. $i = 2, 3 \dots$



Şekil 3.7 $B_{i,7}$ Spline

$k = 8$ için:

$$B_{i,8} = \frac{x-t_i}{t_{i+7}-t_i} \cdot B_{i,7}(x) + \frac{t_{i+8}-x}{t_{i+8}-t_{i+1}} \cdot B_{i+1,7}(x)$$

$[0,h]$, $[h,2h]$, ... , $[7h,8h]$ aralıklarında

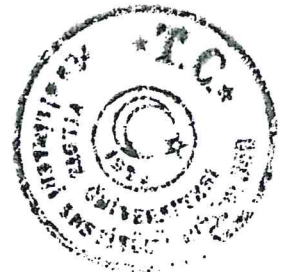
$$B_{0,8} = \begin{cases} \frac{x}{7h} \cdot B_{0,7}(x) \\ \frac{8h-x}{7h} \cdot B_{1,7}(x) \end{cases}$$

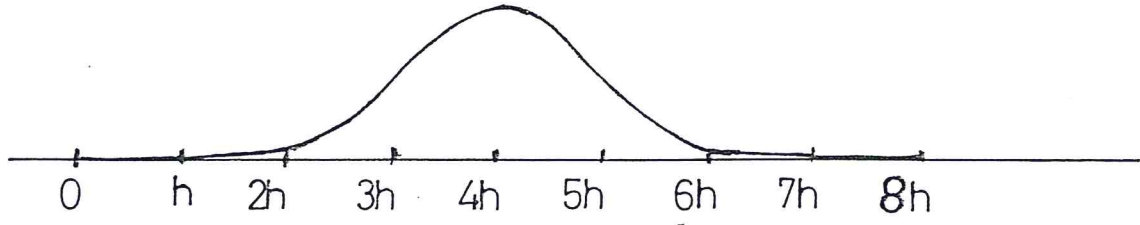
yazılır.Buradan



$$\begin{array}{l}
 B_{0,8} = 1/5040h^7 \left[\begin{array}{l}
 x^7 \\
 -x^7+56hx^6-168h^2x^5+280h^3x^4-280h^4x^3+168h^5x^2 \\
 -56h^6x+8h^7 \\
 21x^7-336hx^6+2184h^2x^5-7560h^3x^4+15400h^4x^3 \\
 -18648h^5x^2+12488h^6x-3576h^7 \\
 -35x^7+840hx^6-8400h^2x^5+45360h^3x^4 \\
 -143360h^4x^3+267120h^5x^2-273280h^6x+118896h^7 \\
 35x^7-1120hx^6+15120h^2x^5-111440h^3x^4 \\
 +483840h^4x^3-1238160h^5x^2+1733760h^6x-1027984h^7 \\
 -21x^7+840hx^6-14280h^2x^5+133560h^3x^4 \\
 -741160h^4x^3+2436840h^5x^2-4391240h^6x+3347016h^7 \\
 7x^7-336hx^6+6888h^2x^5-78120h^3x^4+528920h^4x^3 \\
 -2135448h^5x^2+4753336h^6x-4491192h^7 \\
 -x^7+56hx^6-1344h^2x^5+17920h^3x^4-143360h^4x^3 \\
 +688128h^5x^2-1835008h^6x+2097152h^7
 \end{array} \right.
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 0 \leq x < h \\
 h \leq x < 2h \\
 2h \leq x < 3h \\
 3h \leq x < 4h \\
 4h \leq x < 5h \\
 5h \leq x < 6h \\
 6h \leq x < 7h \\
 7h \leq x < 8h
 \end{array}$$

$B_{i,8} = B_{0,8}(x - (i-1)h)$ yazılır. $i=2,3, \dots$





Şekil 3.8 $B_{i,8}$ Spline



4. B-SPLINE FONKSİYONLARI İLE INTERPOLASYON

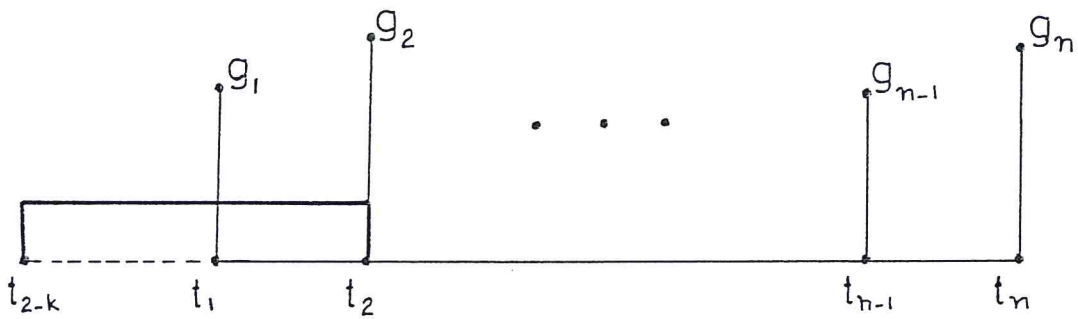
Tablo değerleri ile verilen fonksiyonu, B-spline parçalı fonksiyonları uygulanarak en iyi yaklaşımla temsil edecek fonksiyonun bulunmasıdır. B-spline fonksiyonun derecesine ve düğüm noktalarının seçimine göre en iyi yaklaşım yapılabilir.

Daha önce tanımlanan $S_{k,t}$ lineer uzayında S interpolasyon fonksiyonu bulunur. S interpolasyon fonksiyonu $B_{i,k,t}$ fonksiyonlarının lineer birleşiminden meydana gelir.

$t = (t_i)_{i=1}^n$ düğüm dizisi, $B = (B_i)_{i=1}^n$ B-spline fonksiyon dizisi olmak üzere S fonksiyonu

$$S = \sum_{j=1}^n C_j \cdot B_j$$

şeklinde yazılır. Buradaki C_j sabitleri bilinmeyen sabitlerdir ve belirlenmesi gerekir.



Şekil 4.1



Bölüm 2 deki 2. ci özellik ile B_{2-k}, \dots, B_{n-1} fonksiyon değerleri 0 dan farklıdır.

$$S(t) = C_{2-k} \cdot B_{2-k} + \dots + C_{n-1} \cdot B_{n-1} \text{ yazılır.}$$

$k = 4$ için (3. derece B-spline fonksiyonu),

$$S(t) = C_{-2} \cdot B_{-2} + C_{-1} \cdot B_{-1} + C_0 \cdot B_0 + \dots + C_{n-1} \cdot B_{n-1}$$

$$S(t_i) = g(t_i) \quad 1 \leq i \leq n$$

interpolasyon fonksiyonunun verilen noktalardan geçme koşulu yazılırsa n denklem elde edilir.

$$S(t_i) = C_{-2} \cdot B_{-2} + \dots + C_{n-1} \cdot B_{n-1} = g(t_i) \quad 1 \leq i \leq n$$

lineer denklem sisteminde C_i bilinmeyen sayısı ($k = 4$ için) $n+2$ dir. İki denklem

$$S'(t_1) = g'(t_1)$$

$S'(t_n) = g'(t_n)$ başlangıç koşullarından bulunur. Buradan aşağıdaki lineer denklem sistemi yazılır.

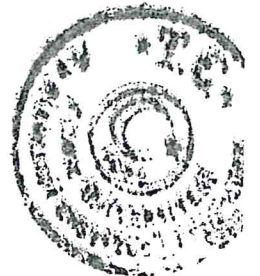
$$C_{-2} \cdot B'_{-2}(t_1) + C_{-1} \cdot B'_{-1}(t_1) + \dots + C_{n-1} \cdot B'_{n-1}(t_1) = g'(t_1)$$

$$C_{-2} \cdot B_{-2}(t_i) + C_{-1} \cdot B_{-1}(t_i) + \dots + C_{n-1} \cdot B_{n-1}(t_i) = g(t_i)$$

$$C_{-2} \cdot B'_{-2}(t_n) + C_{-1} \cdot B'_{-1}(t_n) + \dots + C_{n-1} \cdot B'_{n-1}(t_n) = g'(t_n)$$

$$1 \leq i \leq n$$

matrisyel biçimde,



$$\begin{bmatrix} \dot{B}_{-2}(t_1) & \dot{B}_{-1}(t_1) & \dots & \dot{B}_{n-1}(t_1) \\ B_{-2}(t_1) & B_{-1}(t_1) & \dots & B_{n-1}(t_1) \\ B_{-2}(t_2) & B_{-1}(t_2) & \dots & B_{n-1}(t_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{-2}(t_n) & B_{-1}(t_n) & \dots & B_{n-1}(t_n) \\ \dot{B}_{-2}(t_n) & \dot{B}_{-1}(t_n) & \dots & \dot{B}_{n-1}(t_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{-2} \\ C_{-1} \\ C_0 \\ \vdots \\ C_{n-2} \\ C_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g'(t_1) \\ g(t_1) \\ g(t_2) \\ \vdots \\ g(t_n) \\ g'(t_n) \end{bmatrix}$$

$$B.C = g$$

4.1 -

Lineer sistemin çözümünden C_i sabitleri bulunur. g' , g'' , ... değerleri yaklaşık türev yardımıyla belirlenir. Yüksek dereceli spline fonksiyonlarında başlangıç koşulu olarak yüksek dereceli türevler kullanılır.

Spline Matrisleri

Değişik B-spline fonksiyon derecelerinde 4.1 denklem sistemi aşağıdaki şekilde bulunur. $\{t_i\}_{i=1}^n$ düğüm dizisi $g(t_i)$ fonksiyon değerleri ve $h = t_{i+1} - t_i$ olarak verilsin.

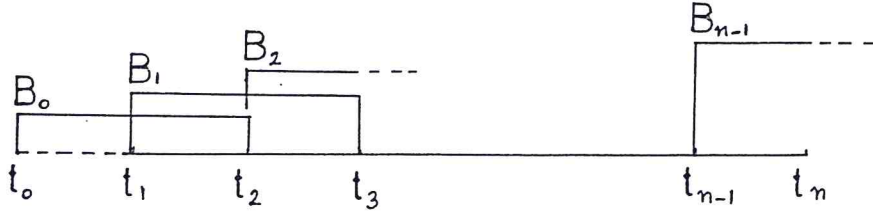
4.1 Birinci derece spline

$k=2$ için spline fonksiyonunun düğüm noktalarındaki değerleri ve türev değerleri tablo 4.1 de görülmektedir.

	t_i	t_{i-1}
$B_{i,2}$	0	1
$B'_{i,2}$	1	1

Tablo 4.1





Şekil 4.2

$S(x)$ fonksiyonu, B_0, B_1, \dots, B_{n-1} fonksiyonlarının lineer birleşimi ile aşağıdaki şekilde yazılır.

$$S(x) = B_0 C_0 + B_1 C_1 + \dots + B_{n-1} C_{n-1}$$

$\{t_i\}_{i=1}^n$ düğüm noktalarındaki fonksiyon değerleri $S(x)$ de yazılarak aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$x = t_1, S(t_1) = g(t_1), 1.C_0 + 0.C_1 + 0.C_2 + \dots + 0.C_{n-1} = g(t_1)$$

$$x = t_2, S(t_2) = g(t_2), 0.C_0 + 1.C_1 + 0.C_2 + \dots + 0.C_{n-1} = g(t_2)$$

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

$$x = t_n, S(t_n) = g(t_n), 0.C_0 + 0.C_1 + 0.C_2 + \dots + 1.C_{n-1} = g(t_n)$$

Denklem sistemi matrisyel olarak aşağıdaki şekilde yazılır.



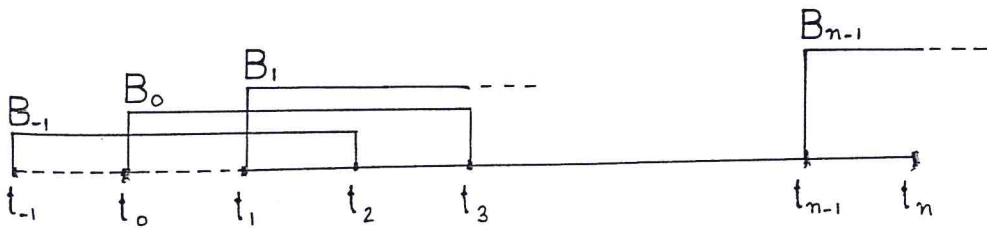
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(t_1) \\ g(t_2) \\ \vdots \\ g(t_n) \end{bmatrix}$$

4.2 İkinci derece spline

$k = 3$ için spline fonksiyonunun düğüm noktalarındaki değerleri ve türev değerleri tablo 4.2 de görülmektedir.

	t_i	t_{i+1}	t_{i+2}
$B_{i,3}$	0	1	1
$B'_{i,3}$	0	$2/h$	$-2/h$

Tablo 4.2



Şekil 4.3



$$S(x) = B_{-1}C_{-1} + B_0C_0 + B_1C_1 + \dots + B_{n-1}C_{n-1}$$

$\{t_i\}_{i=1}^n$ değerleri $S(x)$ de yerine yazılırsa ,

$$1.C_{-1} + 1.C_0 + 0.C_1 + \dots + 0.C_{n-1} = g(t_1)$$

$$0.C_{-1} + 1.C_0 + 1.C_1 + \dots + 0.C_{n-1} = g(t_2)$$

$$\begin{array}{ccccccc} & | & & | & & & \\ & | & & | & & & \\ & | & & | & & & \end{array}$$

$$0.C_{-1} + 0.C_0 + 0.C_1 + \dots + 1.C_{n-2} + 1.C_{n-1} = g(t_n)$$

$\{C_{-1}, C_0, \dots, C_{n-1}\}$ $n+1$ tane bilinmeyen, nokta sayısı kadar da denklem vardır. (n tane)

Bir denklem yazılması gerekir. Yazılan bu denklemin türevi alınarak yeni bir denklem çıkartılır.

$$x = t_1, \quad S'(x) = B'_{-1}C_{-1} + B'_0C_0 + \dots + B'_{n-1}C_{n-1}$$

$$2/hC_{-1} + 2/hC_0 + \dots + 0 = g'(t_1)$$

$g'(t_1)$ türev değeri yerine, yaklaşık olarak $(g(t_2) - g(t_1)) / h$ alınarak aşağıdaki matrisyel sistem yazılır.



$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{-1} \\ C_0 \\ C_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ C_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(t_2) - g(t_1) \\ g(t_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g(t_n) \end{bmatrix}$$

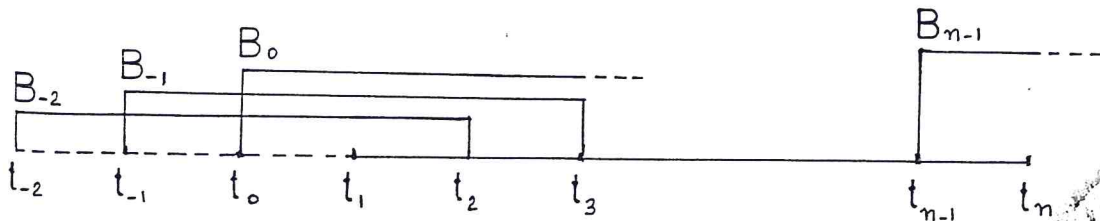
Sistemin çözümü ile bilinmeyen $\{C_{-1}, C_0, \dots, C_{n-1}\}$ sabitleri bulunur.

4.3 Üçüncü derece spline

$k = 4$ için spline fonksiyonunun düğüm noktalarındaki değerleri ve türev değerleri tablo 4.3 de görülmektedir.

	t_i	t_{i+1}	t_{i+2}	t_{i+3}
$B_{i,4}$	0	1	4	1
$B'_{i,4}$	0	$-3/h$	0	$3/h$

Tablo 4.3



Şekil 4.4



$$S(x) = B_{-2}C_{-2} + B_{-1}C_{-1} + \dots + B_{n-1}C_{n-1}$$

$\{t_i\}_{i=1}^n$ değerleri $S(x)$ de yerine yazılırsa,

$$1C_{-2} + 4C_{-1} + 1C_0 + 0C_1 + \dots + 0C_{n-1} = g(t_1)$$

$$0C_{-2} + 1C_{-1} + 4C_0 + 1C_1 + \dots + 0C_{n-1} = g(t_2)$$

$$0C_{-2} + 0C_{-1} + \dots + 1C_{n-3} + 4C_{n-2} + 1C_{n-1} = g(t_n)$$

$\{C_{-2}, C_{-1}, C_0, C_1, \dots, C_{n-1}\}$ $n+2$ bilinmeyen n denklem bulunmaktadır.

Birinci ve son düğüm noktalarında yaklaşık türev değerlerinden iki denklem elde edilir.

$$S'(x) = B'_{-2}C_{-2} + B'_{-1}C_{-1} + \dots + B'_{n-1}C_{n-1}$$

$$x = t_1, \\ -3/hC_{-2} + 0C_{-1} + 3/hC_0 + 0C_1 + \dots + 0C_{n-1} = g'(t_1)$$

$$x = t_n, \\ 0C_{-2} + 0C_{-1} + \dots + -3/hC_{n-3} + 0C_{n-2} + 3/hC_{n-1} = g'(t_n)$$

Denklem sistemi matrisyel olarak aşağıdaki şekilde yazılır.



$$\begin{bmatrix}
 -3/h & 0 & 3/h & 0 \\
 1 & 4 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 4 & 1 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \\
 0 & 1 & 4 & 1 \\
 0 & -3/h & 0 & 3/h
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 C_{-2} \\
 C_{-1} \\
 C_1 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 C_{n-2} \\
 C_{n-1}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 g(t_1) \\
 g(t_2) \\
 g(t_3) \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 g(t_{n-1}) \\
 g(t_n)
 \end{bmatrix}$$

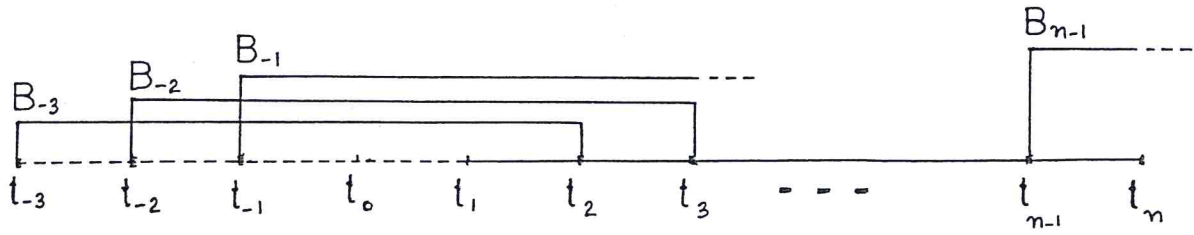
4.4 Dördüncü derece spline

$k = 5$ için spline fonksiyonunun düğüm noktalarındaki değerleri ve türev değerleri tablo 4.4 de görülmektedir.

	t_i	t_{i-1}	t_{i-2}	t_{i-3}	t_{i-4}
$B_{i,5}$	0	1	11	11	1
$B_{i,5}$	0	$-4/h$	$-12/h$	$12/h$	$4/h$
$B_{i,5}$	0	$12/h^2$	$-12/h^2$	$-12/h^2$	$12/h^2$

Tablo 4.4





Şekil 4.5

$$S_4(x) = B_{-3}C_{-3} + B_{-2}C_{-2} + \dots + B_{n-1}C_{n-1}$$

$\{t_i\}_{i=1}^n$ düğümlerinde $S(x)$ in aldığı değerler yazılırsa,

$$1C_{-3} + 11C_{-2} + 11C_{-1} + 1C_0 + 0C_1 + \dots + 0C_{n-1} = g(t_1)$$

$$0C_{-3} + 1C_{-2} + 11C_{-1} + 11C_0 + 1C_1 + \dots + 0C_{n-1} = g(t_2)$$

⋮
⋮
⋮

$$0C_{-3} + 0C_{-2} + \dots + 1C_{n-4} + 11C_{n-3} + 11C_{n-2} + 1C_{n-1} = g(t_n)$$

Denklem sisteminde, $\{C_{-3}, C_{-2}, \dots, C_{n-1}\}$ $n+3$ bilinmeyen n denklem bulunmaktadır. Yaklaşık türevden faydalanarak aşağıdaki üç denklem yazılır.

$$x = t_1, \quad -4/hC_{-3} - 12/hC_{-2} + 12/hC_{-1} + 4/hC_0 = g'(t_1)$$

$$x = t_1, \quad 12/h^2C_{-3} - 12/h^2C_{-2} - 12/h^2C_{-1} + 12/h^2C_0 = g''(t_1)$$

$$x = t_n, \quad -4/hC_{n-4} - 12/hC_{n-3} + 12/hC_{n-2} + 4/hC_{n-1} = g'(t_n)$$

Denklem sistemi matrisyel olarak aşağıdaki şekilde yazılır.

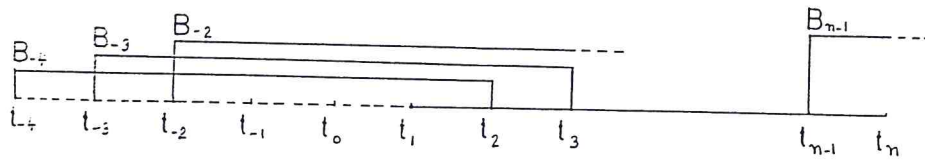


4.5 · Beşinci derece spline

$k = 6$ için spline fonksiyonun düğüm noktalarındaki değerleri ve türev değerleri tablo 4.5 de görülmektedir.

	t_i	t_{i+1}	t_{i+2}	t_{i+3}	t_{i+4}	t_{i+5}
$B_{i,6}$	0	1	26	66	26	1
$B'_{i,6}$	0	$-5/h$	$-50/h$	0	$50/h$	$5/h$
$B''_{i,6}$	0	$20/h^2$	$40/h^2$	$-120/h^2$	$40/h^2$	$20/h^2$

Tablo 4.5



Şekil 4.6

$$S_5(x) = B_{-4}C_{-4} + B_{-3}C_{-3} + \dots + B_{n-1}C_{n-1}$$

$\{t_i\}_{i=1}^n$, düğümlerinde $S(x)$ in aldığı değerler yazılırsa,



$$1C_{-4} + 26C_{-3} + 66C_{-2} + 26C_{-1} + 1C_0 + 0C_1 + \dots + 0C_{n-1} = g(t_1)$$

$$0C_{-4} + 1C_{-3} + 26C_{-2} + 66C_{-1} + 26C_0 + 1C_1 + \dots + 0C_{n-1} = g(t_2)$$

. . .
. . .
. . .

$$0C_{-4} + 0C_{-3} + 0C_{-2} + 0C_{-1} + \dots + 66C_{n-4} + 66C_{n-3} + 26C_{n-2} + 1C_{n-1} = g(t_n)$$

Denklem sisteminde, $\{ C_{-4}, C_{-3}, \dots, C_{n-1} \}$ $n+4$ bilinmeyen n denklem bulunmaktadır. Yaklaşık türevden faydalanarak aşağıdaki dört denklem yazılır.

$$x = t_1, \quad -5/hC_{-4} - 50/hC_{-3} + 0C_{-2} + 50/hC_{-1} + 5/hC_0 = g'(t_1)$$

$$x = t_1, \quad 20/h^2C_{-4} + 40/h^2C_{-3} - 120/h^2C_{-2} + 40/h^2C_{-1} + 20/h^2C_0 = g''(t_1)$$

$$x = t_n, \quad -5/hC_{n-5} - 50/hC_{n-4} + 0C_{n-3} + 50/hC_{n-2} + 5/hC_{n-1} = g'(t_n)$$

$$x = t_n, \quad 20/h^2C_{n-5} + 40/h^2C_{n-4} - 120/h^2C_{n-3} + 40/h^2C_{n-2} + 20/h^2C_{n-1} = g''(t_n)$$

Denklem sistemi matrisiyel olarak aşağıdaki şekilde yazılır.



$$\begin{bmatrix} 20/h^2 & 40/h^2 & -120/h^2 & 40/h^2 & 20/h^2 \\ -5/h & -50/h & 0 & 50/h & 5/h \\ 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \\ -5/h & -50/h & 0 & 50/h & 5/h \\ 20/h^2 & 40/h^2 & -120/h^2 & 40/h^2 & 20/h^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{-4} \\ C_{-3} \\ C_{-2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_{n-3} \\ C_{n-2} \\ C_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g''(t_1) \\ g'(t_1) \\ g(t_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g(t_n) \\ g'(t_n) \\ g''(t_n) \end{bmatrix}$$

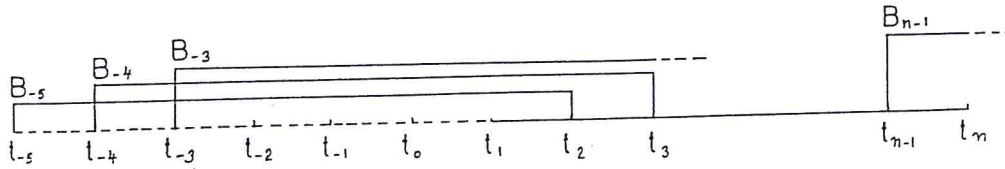


4.6 Altıncı derece spline

$k = 7$ için spline fonksiyonun düğüm noktalarındaki değerleri ve türev değerleri tablo 4.6 da görülmektedir.

	t_i	t_{i+1}	t_{i+2}	t_{i+3}	t_{i+4}	t_{i+5}	t_{i+6}	
$B_{i,7}$	0	1	57	302	302	57	1	
$B_{i,7}^I$	0	6	150	240	-240	-150	-6	(1/h)
$B_{i,7}^{II}$	0	30	270	-300	-300	270	30	(1/h ²)
$B_{i,7}^{III}$	0	120	120	-960	960	-120	-120	(1/h ³)

Tablo 4.6



Şekil 4.7



$$B_6(x) = B_{-5}C_{-5} + B_{-4}C_{-4} + \dots + B_{n-1}C_{n-1}$$

$\{t_i\}_{i=1}^n$, düğümünde $S(x)$ in aldığı değerler yazılırsa,

$$1C_{-5} + 57C_{-4} + 302C_{-3} + 302C_{-2} + 57C_{-1} + 1C_0 + 0C_1 + \dots + 0C_{n-1} = g(t_1)$$

$$0C_{-5} + 1C_{-4} + 57C_{-3} + 302C_{-2} + 302C_{-1} + 57C_0 + 1C_1 + \dots + 0C_{n-1} = g(t_2)$$

$$\begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \quad \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array}$$

$$0C_{-5} + 0C_{-4} + \dots + 1C_{n-6} + 57C_{n-5} + 302C_{n-4} + 302C_{n-3} + 57C_{n-2} + 1C_{n-1} = g(t_n)$$

Denklem sisteminde, $\{C_{-5}, C_{-4}, \dots, C_{n-1}\}$ $n+5$ bilinmeyen, n denklem bulunmaktadır. Yaklaşık türevden faydalanarak aşağıdaki beş denklem yazılır.

$$x=t_1, \quad 120/h^3C_{-5} + 120/h^3C_{-4} - 960/h^3C_{-3} + 960/h^3C_{-2} - 120/h^3C_{-1} - 120/h^3C_0 = g''(t_1)$$

$$x=t_1, \quad 30/h^2C_{-5} + 270/h^2C_{-4} - 300/h^2C_{-3} - 300/h^2C_{-2} + 270/h^2C_{-1} + 30/h^2C_0 = g''(t_1)$$

$$x=t_1, \quad 6/hC_{-5} + 150/hC_{-4} + 240/hC_{-3} - 240/hC_{-2} - 150/hC_{-1} - 6/hC_0 = g'(t_1)$$

$$x=t_n, \quad 30/h^2C_{n-6} + 270/h^2C_{n-5} - 300/h^2C_{n-4} - 300/h^2C_{n-3} + 270/h^2C_{n-2} + 30/h^2C_{n-1} \\ = g''(t_1)$$

$$x=t_n, \quad 6/hC_{n-6} + 150/hC_{n-5} + 240/hC_{n-4} - 240/hC_{n-3} - 150/hC_{n-2} - 6/hC_{n-1} = g'(t_1)$$

denklem sistemi matrisyel olarak aşağıdaki şekilde yazılır.

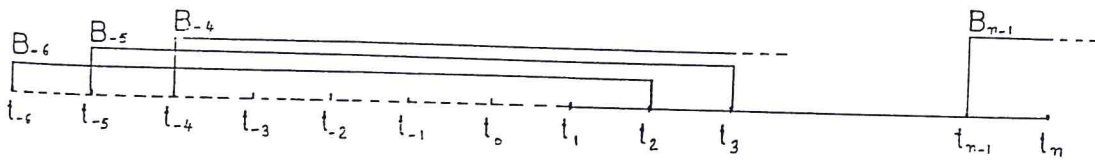


4.7 Yedinci derece spline

$k = 8$ için spline fonksiyonun düğüm noktalarındaki değerleri ve türev değerleri tablo 4.7 de görülmektedir.

	t_i	t_{i+1}	t_{i+2}	t_{i+3}	t_{i+4}	t_{i+5}	t_{i+6}	t_{i+7}	
$B_{i,8}$	0	1	120	1191	2416	1192	120	0	
$B'_{i,8}$	0	7	392	1715	0	-1716	-392	-7	(1/h)
$B''_{i,8}$	0	42	1008	630	-3360	630	1008	42	(1/h ²)
$B'''_{i,8}$	0	210	1680	-3990	0	3990	-1680	-210	(1/h ³)

Tablo 4.7



Şekil 4.8



$$S_7(x) = B_{-6}C_{-6} + B_{-5}C_{-5} + \dots + B_{n-1}C_{n-1}$$

$S_7(x)$ in $\{t_j\}_1^n$, düğümlerindeki değerler tablo 4.7 kullanılarak yazılır.

$$0C_{-6}+1C_{-5}+120C_{-4}+1191C_{-3}+2416C_{-2}+1192C_{-1}+120C_0+0C_1+ \dots +0C_{n-1} =g(t_1)$$

$$0C_{-6}+0C_{-5}+1C_{-4}+120C_{-3}+1191C_{-2}+2416C_{-1}+1192C_0+120C_1+0C_0+ \dots +0C_{n-1} =g(t_2)$$

$$\begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \quad \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array}$$

$$0C_{-6}+0C_{-5}+0C_{-4}+\dots+0C_{n-8}+1C_{n-7}+120C_{n-6}+1191C_{n-5}+2416C_{n-4}+1192C_{n-3}+$$

$$120C_{n-2}+0C_{n-1} = g(t_n)$$

Denklem sisteminde, $\{ C_{-6} , C_{-5} , \dots , C_{n-1} \}$ $n+6$ bilinmeyen, n denklem vardır. Yaklaşık türevden faydalanarak aşağıdaki altı denklem yazılır.

$$x=t_1, 210/h^3C_{-6}+1680/h^3C_{-5}-3990/h^3C_{-4}+0C_{-3}+3990/h^3C_{-2}-1680/h^3C_{-1}+$$

$$-210/h^3C_0 = g'''(t_1)$$

$$x=t_1, 42/h^2C_{-6}+1008/h^2C_{-5}+630/h^2C_{-4}-3360/h^2C_{-3}+630/h^2C_{-2}+1008/h^2C_{-1}+$$

$$42/h^2C_0 = g''(t_1)$$

$$x=t_1, 7/hC_{-6}+392/hC_{-5}+1715/hC_{-4}+0C_{-3}-1716/hC_{-2}-392/hC_{-1}-7/hC_0 = g'(t_1)$$

$$x=t_n, 210/h^3C_{n-7}+1680/h^3C_{n-6}-3990/h^3C_{n-5}+0C_{n-4}+3990/h^3C_{n-3}-1680/h^3C_{n-2}+$$

$$-210/h^3C_{n-1} = g'''(t_n)$$



$$x=t_n, 42/h^2C_{n-7}+1008/h^2C_{n-6}+630/h^2C_{n-5}-3360/h^2C_{n-4}+630/h^2C_{n-3}+1008/h^2C_{n-2}+$$

$$42/h^2C_{n-1} = g''(t_n)$$

$$x=t_n, 7/hC_{n-7}+392/hC_{n-6}+1715/hC_{n-5}+0C_{n-4}-1716/hC_{n-3}-392/hC_{n-2}+$$

$$-7/hC_{n-1} = g'(t_n)$$

Denklem sistemi matrisyel olarak aşağıdaki şekilde yazılır.



5. OPTİMAL DÜĞÜM NOKTALARI TAYİNİ

Yaklaşık bir $g(x)$ fonksiyonunun B-spline fonksiyonları ile interpolate işleminde kullanılması gereken B-spline derecesi ve düğüm sayısı önceden kestirilemez. Düğüm sayısının hatalı seçimi veya derecenin yanlış seçiminden dolayı düzgün olmayan fonksiyonlar bulunabilir. Bu kısımda derece ve düğüm seçimi ile ilgili analizler yapılacaktır.

$[a, b]$ aralığında verilen $g(x)$ fonksiyonu için düğüm noktaları $(t)_i^n$ ise hatanın derecesi $S_{k,t}$ uzayında belirlenebilir.

$$\|g\| = \max_{a \leq x \leq b} |g(x)|$$

$$w(g, h) = \max (|g(x_1) - g(x_2)| : |x_1 - x_2| \leq h, x_1, x_2 \in [a, b])$$

tanımlarını yapalım.

$$\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_{n-1} \leq \tau_n$$

düğüm noktalarını seçerek, $[a, b]$ aralığında $< k$ inci dereceden interpolasyon polinomu Ag , B-spline fonksiyonları ile yazılabilir.

$$Ag = \sum_{i=1}^n g(\tau_i) B_{i,k}$$

$[t_j, t_{j+1}]$ aralığında $x \in [t_j, t_{j+1}]$ noktası Ag de yazılırsa,



$$Ag(x) = \sum_{i=j+1-k}^j g(\tau_i) B_{i,k}(x)$$

ve

$$\sum_{i=j+1-k}^j B_i(x) = 1$$

$g(x)$ yerine,

$$g(x) = g(x) \sum_{i=j+1-k}^j B_i(x) = \sum_{i=j+1-k}^j g(x) B_i(x)$$

yazılırsa,

$g(x) - Ag(x)$ aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$g(x) - Ag(x) = \sum_{i=j+1-k}^j (g(x) - g(\tau_i)) B_i(x)$$

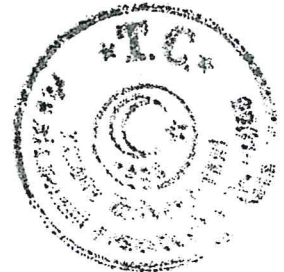
$B_i(x) > 0$ değerler olduğundan,

$$|g(x) - Ag(x)| \leq \sum_{i=j+1-k}^j |g(x) - g(\tau_i)| B_i(x) \leq \max_{j-k < i \leq j} (|g(x) - g(\tau_i)|)$$

olur.

$$\tau_i = \tau_i + \frac{k}{2}, \quad i=1, 2, \dots, n$$

olacak şekilde yeni düğüm noktaları oluşturulur.



Buna göre,

$$\max(|g(x) - g(\tau_j)| : j-k < i \leq j) \leq \max(|g(x_1) - g(x_2)| : x_1, x_2 \in [t_j, t_{j+\frac{k}{2}}])$$

$$\leq w(g, \frac{k|t|}{2}) \leq \frac{k+1}{2} w(g, |t|)$$

$$|t| = \max_i \Delta t_i$$

Sonuçta

$$\|g - Ag\| \leq \frac{k+1}{2} \cdot w(g, |t|)$$

yazılır.

g fonksiyonu ile aranılan $S(x)$ parçasal fonksiyonu için

$$\min(\|g - S(x)\| : S(x) \in \mathcal{S}_{k,t}) \leq \frac{k+1}{2} w(g, |t|)$$

yazılır.

Teorem 5.1 [Jackson's teoremi] .

$[a,b]$ aralığındaki $g \in [a,b]$ fonksiyonu r mertebeden türevlere sahip bir fonksiyon ve $n > r+1$ ise



$$\text{dist}_\infty(g, P_n) \leq \text{sabit}_r \left[\frac{b-a}{n-1} \right]^r w(g^{(r)}, \frac{b-a}{2(n-1-r)})$$

dır.

$$\text{dist}_\infty(g, P_n)$$

P_n uzayında g nin değeri.

$$\text{sabit}_r = \frac{6(3e)^r}{1+r}$$

Bu teoremin ispatı T.Rivlin [1969, sayfa 23] de verilmektedir.

Teorem 5.1 , spline fonksiyonları için aşağıdaki şekilde belirtilebilir.
 $g(x)$ fonksiyonun $j=0,1, \dots, k-1$ için $g^{(j)}$ türevleri mevcutsa, o zaman

$$\text{dist}(g, \mathcal{S}_{k,t}) \leq \text{sabit}_{k,j} |t|^j w(g^{(j)}, |t|)$$

dır.

<k dereceli spline fonksiyonları için de

$$\text{dist}(g, \mathcal{S}_{k,t}) \leq \text{sabit}_k |t|^k \|g^{(k)}\|$$



yazılabilir.

$$w(g^{(k-1)}, h) \leq h \|g^{(k)}\|$$

son ifadede k ve t nin değerlerine göre hatanın üst sınırı 0 a yaklaşır. Hata, düğüm noktalarına ve spline derecesine bağlı olarak değişim gösterir.

$$|t| = \max_i \Delta t_i$$

$$I_j = [t_{j+2-k}, t_{j+2-1}]$$

olmak üzere,

$$\|g - Ag\|_{[t_j, t_{j-1}]} \leq \text{sabit } t_k |I_j|^k \|g^{(k)}\|_{I_j} \quad 5.1$$

bulunur.

5.1 eşitsizliği minimize edilmelidir. $g(x)$ fonksiyonu tablo değerleri ile verilen bir fonksiyon olduğundan optimal dağılım hakkında önceden öngörüle bulunmak mümkün değildir. Ancak planlanan bir düğüm dağılımında yapılan hatadan söz edilebilir.

$\delta_2 < \delta_3 < \dots < \delta_m$ iç düğüm noktaları, $\delta_1 = a$, $\delta_{m+1} = b$ olmak üzere $[a, b]$ interpolasyon aralığında $\mathcal{P}_{k,t}$ ile $\mathcal{P}_{k,\delta}$ eşdeğer uzaylar olarak 5.1 eşitsizliği aşağıdaki gibi yazılır.

$$\|g - Ag\|_{[\delta_j, \delta_{j-2}]} \leq \text{sabit } t_k \|g^{(k)}\|_{[\delta_j, \delta_{j-2}]} |\Delta \delta_j|^k$$

$$j = 2, 3, \dots, m$$

Bu eşitsizlikteki



$$\max_j \|g^{(k)}\|_{[\delta_j, \delta_{j+1}]} |\Delta \delta_j|^k$$

ifadesi minimize edilmelidir.

Spline fonksiyonunda $[\alpha, \beta]$ aralığı için,

$$S(\alpha, \beta) = \|g^{(k)}\|_{[\alpha, \beta]} |\beta - \alpha|^k$$

dir.

Burada $g^{(k)}$ sürekli bir fonksiyon olduğundan, $S(\alpha, \beta)$ de sürekli bir fonksiyondur. α ve β monoton ve m sabit ise $\delta_2, \delta_3, \dots, \delta_m$ iç düğüm noktalarının seçimi için,

$$\|g^{(k)}\|$$

yerine

$$(\|g^{(k)}\|)^{\frac{1}{k}}$$

dağılımı incelenebilir.

$$(\|g^{(k)}\|_{[\delta_j, \delta_{j+1}]})^{\frac{1}{k}} \Delta \delta_j = \text{sabit}$$

$$j=2, 3, \dots, m$$

$$|g^{(k)}(x)|^{\frac{1}{k}}$$

dağılımı δ_j ile δ_{j+1} arasında integre edilirse,



$$\int_{\delta_j}^{\delta_{j-1}} |g^{(k)}(x)|^{\frac{1}{k}} dx = \frac{1}{m} \int_a^b |g^{(k)}(x)|^{\frac{1}{k}} dx$$

$$j=1, 2, \dots, m$$

bulunur.

İntegral içinde bulunan $g^{(k)}(x)$ fonksiyonu yaklaşık olarak bilinen fonksiyondur.

Dolayısıyla $g^{(k)}(x)$ in yerine uygun seçilmiş başka bir fonksiyon alınabilir.

$g^{(k)}$ için alınacak fonksiyon $h \approx g^{(k)}$ ise, sonuç olarak

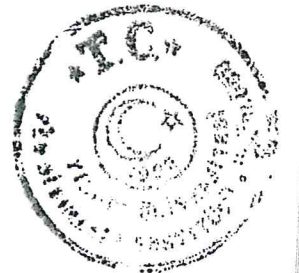
$$G(x) = \int_a^x [h(s)]^{\frac{1}{k}} ds$$

yazılır.

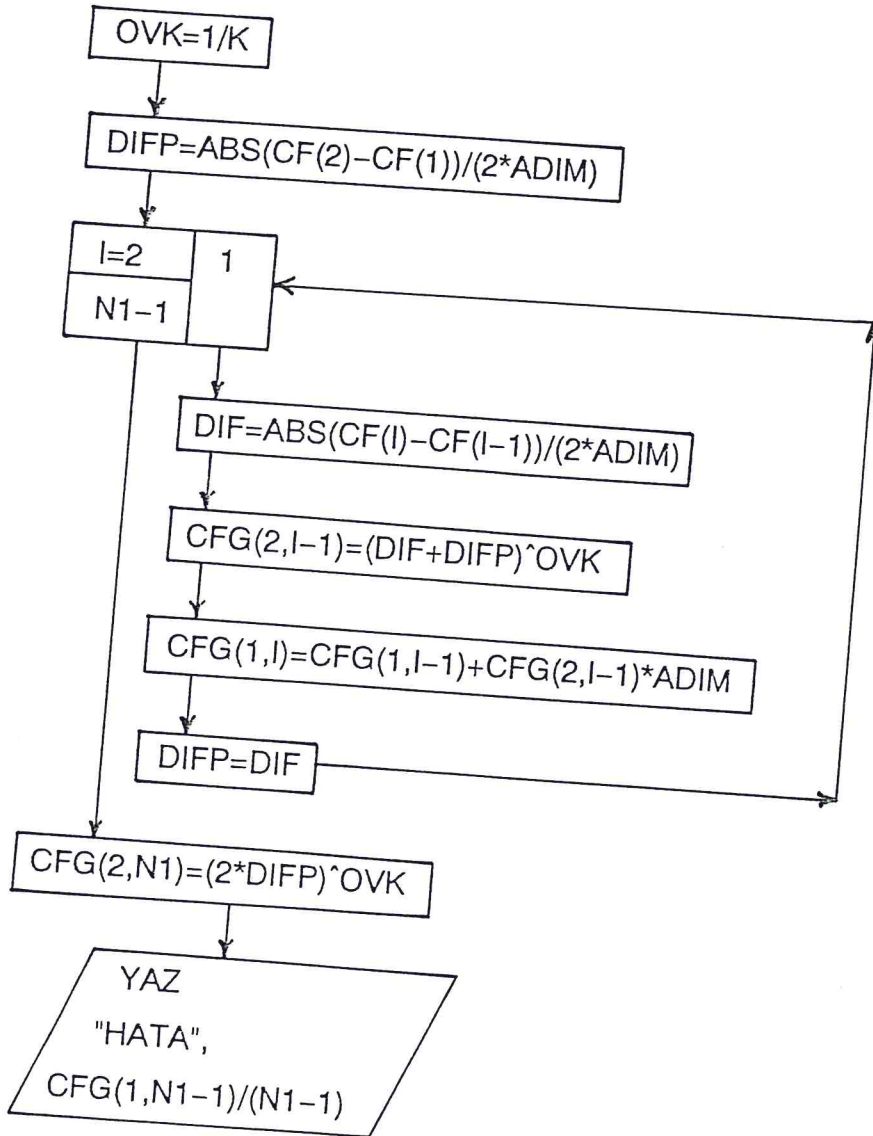
D.Boor h fonksiyonu olarak, yaklaşık parçasal fonksiyonları seçmiştir. Yukarıdaki integral varyasyonel olarak aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\text{var}_{[a,x]} g^{(k-1)} = \int_a^x |g^{(k)}(s)|^{\frac{1}{k}} ds$$

Seçilen düğümlere göre aşağıdaki algoritma ile hatanın üst sınırı tayin edilir.



- N1 : Nokta sayısı.
 CF : Düğüm noktalarındaki türevler.
 K : Spline derecesi + 1.
 CFG : Hata matrisi.



6. SONUÇ VE TARTIŞMA

B-spline fonksiyonlarını kullanarak spektroskopik eğrilerin düzleştirilmesi ve türevlerinin alınması işlemleri yapılabilir. Tek değişkenli bu fonksiyonlarda deneysel verilerin düzleştirilmesi ve türevinin alınması işlemi bir eğri uydurma işlemidir. Bu işlem için bir çok nümerik(sayısal) metodlar mevcuttur (1),(15). Bu konuda geniş uygulama alanı bulan metodlardan birisi de Savitsky-Golay (SG) metodudur.SG metodunda, veriler x eksenini boyunca(bağımsız değişken) eşit olarak alınmakta ve h dereceli $f(x)$ polinomu $2n+1$ veriye uydurulmaktadır. (n polinom derecesi).

Spektroskopik veriler için en iyi düzgünlüğü sağlayacak optimal veri sayısı için, bir kriter tayin edilebilir. Bu kritere göre nokta sayısı tayin edildiğinde bir başka problem ortaya çıkmaktadır. Deneysel verilerdeki frekans çarpıklıkları türevde bazı salınımlara neden olmaktadır. Bu durumda da gerçek spektroskopik özelliklerin tanınması zorlaşmaktadır (16). Sonlu örneklerden dolayı ortaya çıkan etkileri azaltmak amacıyla düzleştirme ve türev alma işlemleri için spline fonksiyonları kullanılabilir. Spline fonksiyonları bu amaç için uygundur. Zira bu fonksiyonlar deneysel verilerin süreksizliğini etkisiz hale getirecek süreklilik özelliğine sahiptir. Eğrilerin düzleştirilmesi ve türevinin alınması işlemlerinde önemli faktörlerden birisi düğüm noktalarının dağılımı, diğeri de spline fonksiyonunun derecesidir.

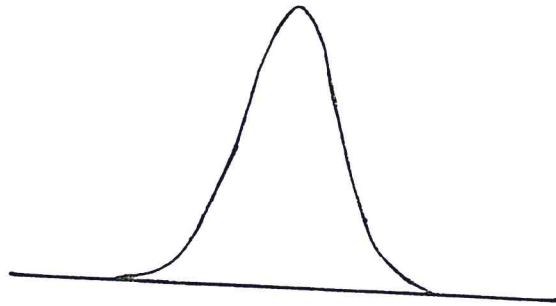
Bu çalışmada, düzleştirme ve türev alma işlemleri için yüksek dereceli B-spline fonksiyonlarının kullanımı ve düğüm noktalarının seçimi ile ilgili bazı metodlar araştırılmıştır. Bunlar UV spektroskopisi verilerine uygulanmıştır.



6.1 Dügüm noktalarının dağılımı

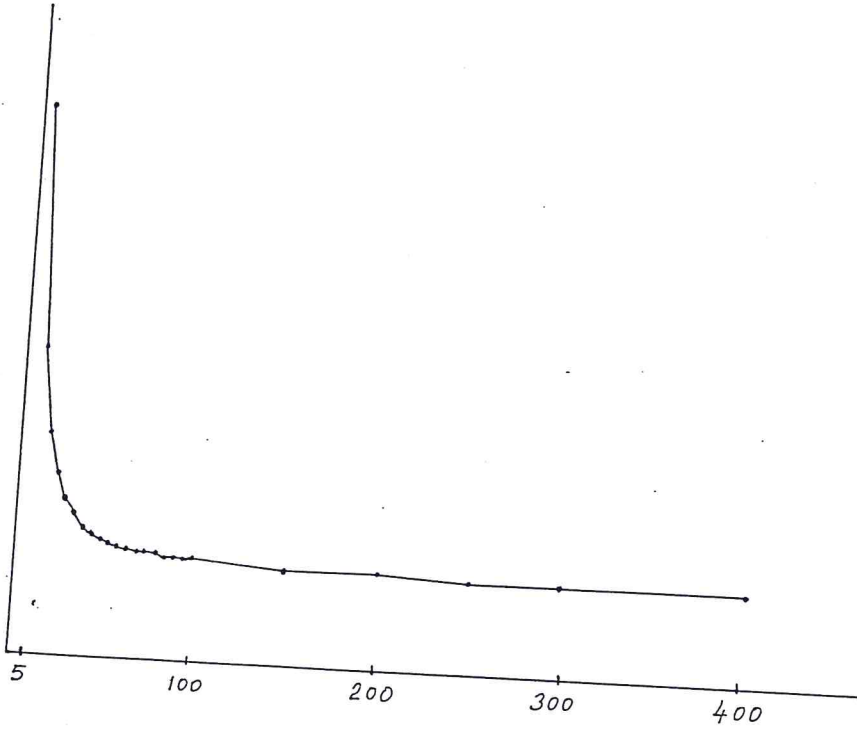
Dügüm noktalarının seçiminde amaç, spline fonksiyonlarının boyutunu küçültmek ve bu fonksiyonların türevlerinde meydana gelen sapmaları azaltmak için olabildiği ölçüde az düğüm noktası kullanmaktır. Bu ise çeşitli kriterler gözönüne alınarak başarılabilir. Bunlardan birisi, spline fonksiyonunun mümkün olduğu kadar düz olması gerektiğidir. Bölüm 5. deki algoritma kullanılarak oldukça az sayıda düğüm noktasına sahip spline fonksiyonları ile, verilere, kabul edilebilir uygunluk sağlandığı görülmüştür. Bununla birlikte, düğüm noktalarının dağılımının, spline fonksiyonunun derecesi ve uydurulan eğrinin yapısına bağlı olarak değiştiği de gözlenmiştir. Spline derecesine göre, kullanılan düğüm sayısında meydana gelen hatalar grafiğe geçilmiştir. Bölüm 4. de anlatılan lineer denklem sisteminin çözümü ve hatanın bulunması Ek.1 deki bilgisayar programı ile yapılmaktadır. Büyük boyutlardaki spline matrislerinin bellekte fazla yer tutması nedeniyle matrisin sadece bant elemanları bellekte saklanarak programın hızlanması sağlanmıştır.

Spline fonksiyonlarının ve düğüm noktalarının optimisasyonu için, önce Gauss eğrisinden elde edilen yapay verilere değişik dereceli spline fonksiyonları uydurularak farklı düğüm noktası sayısında hata dağılımı hesaplanmıştır. Hata hesabında Ek 1. deki program kullanılmıştır. Bu dağılımlar şekil 6.2 – şekil 6.7 de gösterilmiştir.

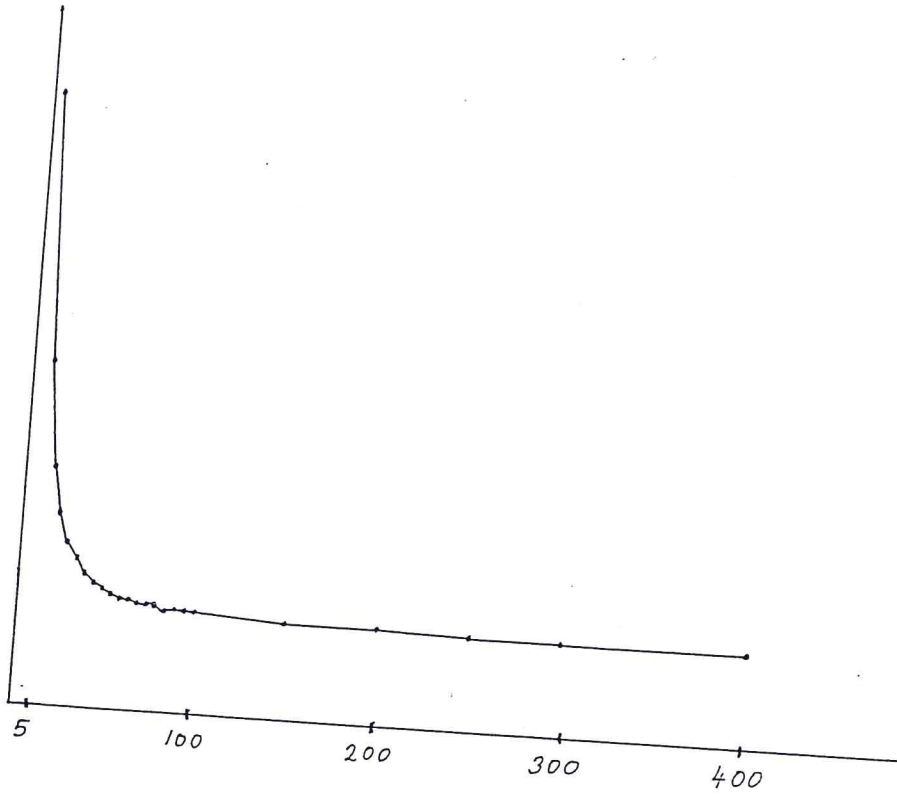


Sekil 6.1 Gauss eğrisi



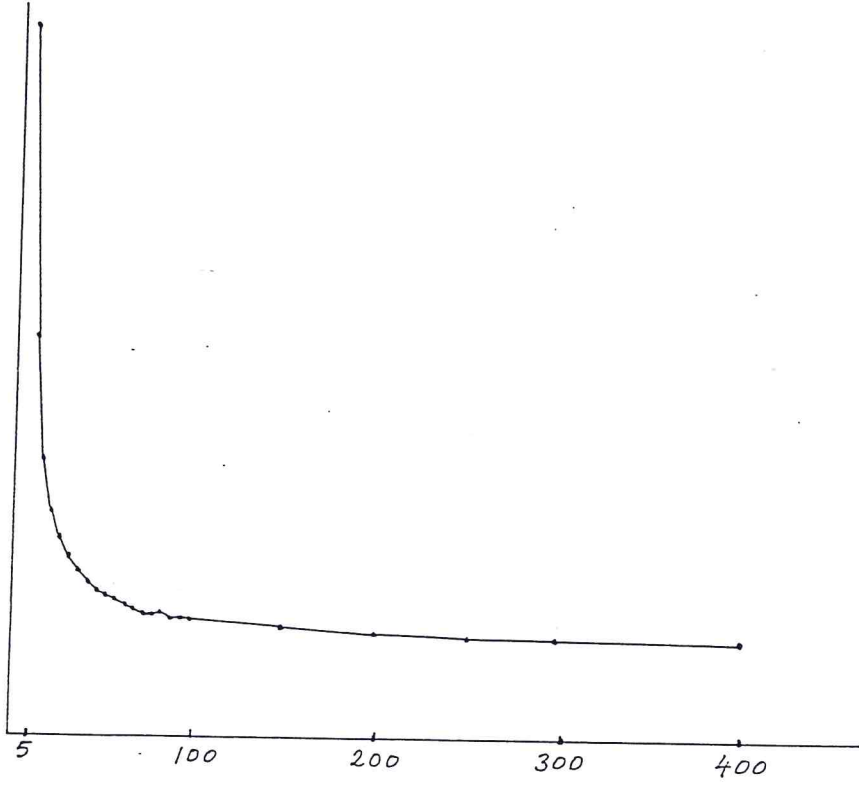


Şekil 6.2 ikinci derece spline hata dağılımı (Gauss)

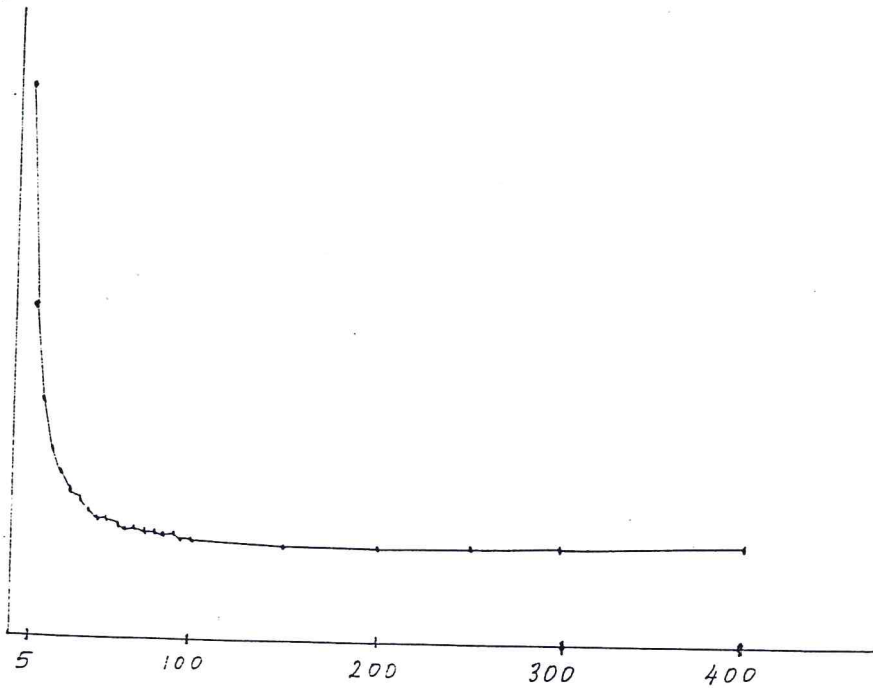


Şekil 6.3 üçüncü derece spline hata dağılımı (Gauss)

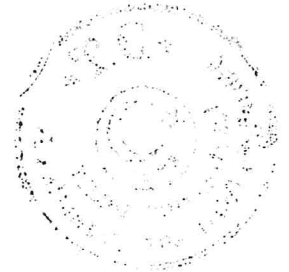


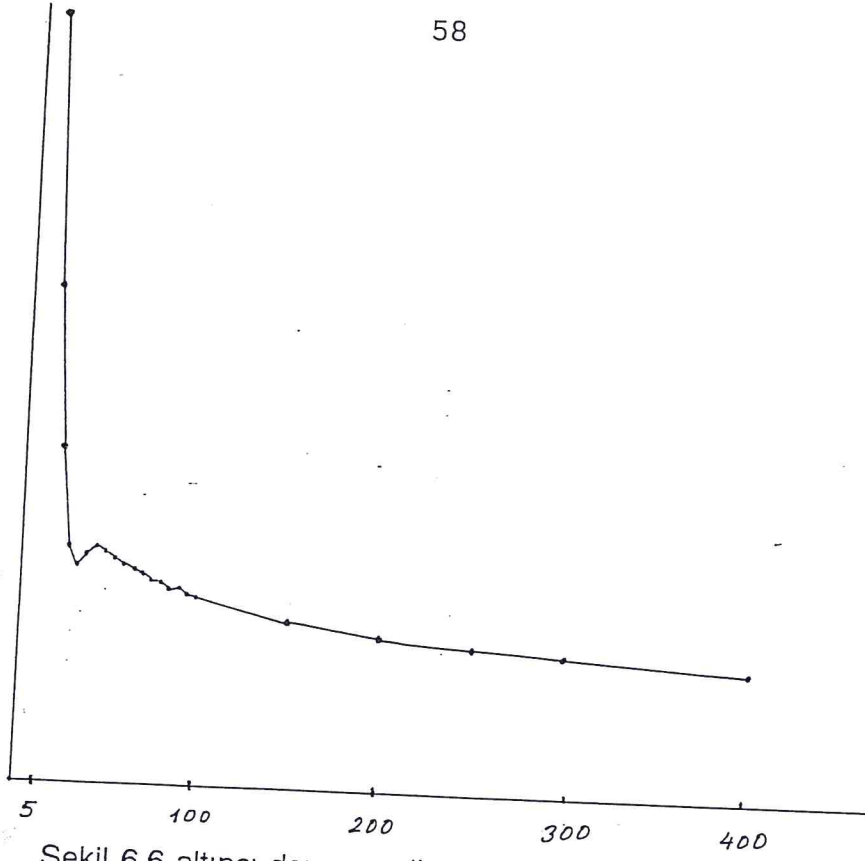


Şekil 6.4 dördüncü derece spline hata dağılımı (Gauss)

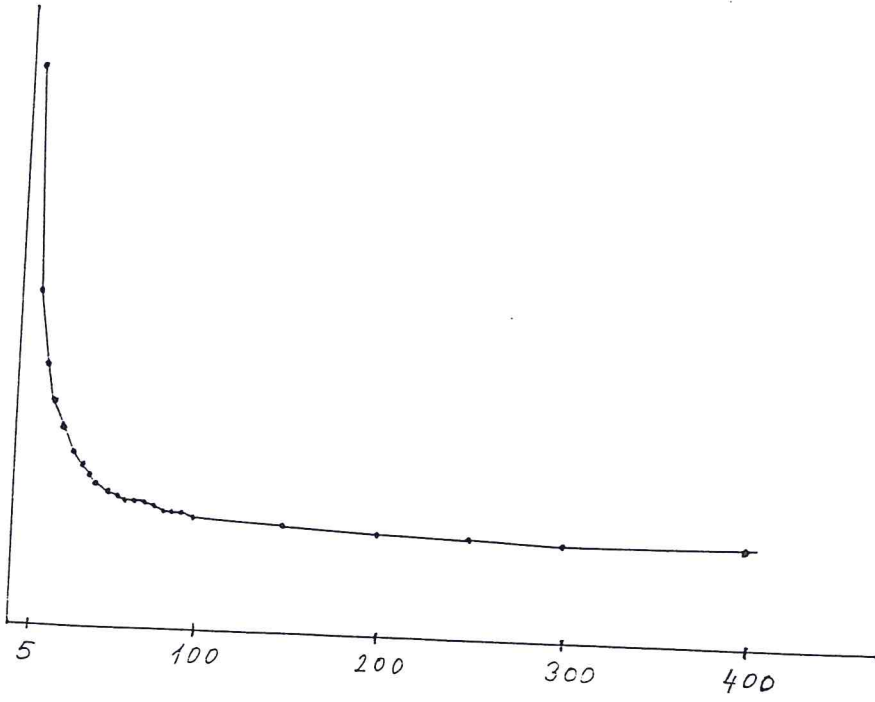


Şekil 6.5 beşinci derece spline hata dağılımı (Gauss)





Şekil 6.6 altıncı derece spline hata dağılımı (Gauss)



Şekil 6.7 yedinci derece spline hata dağılımı (Gauss)

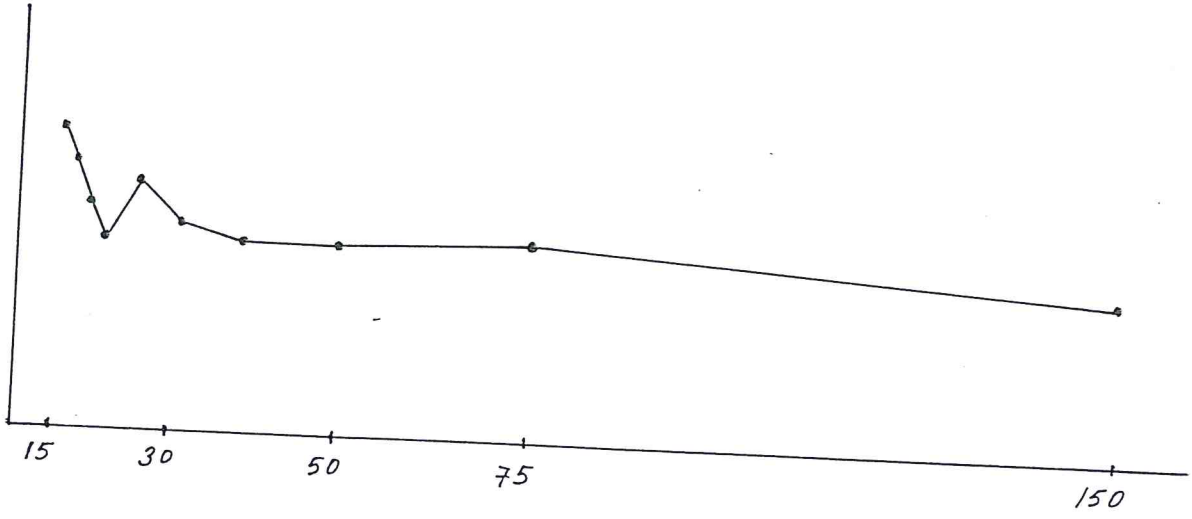


Benzer dağılımlar deneysel olarak elde edilen demir(111)-bizmut(111) karışımının (5.5 mg/ml Fe(111) ve 16 mg/ml Bi) 200 ml ile 400 mm arasındaki UVspektrumu verileri içinde tayin edilerek Şekil 6.9 - Şekil 6.14 de gösterilmiştir.

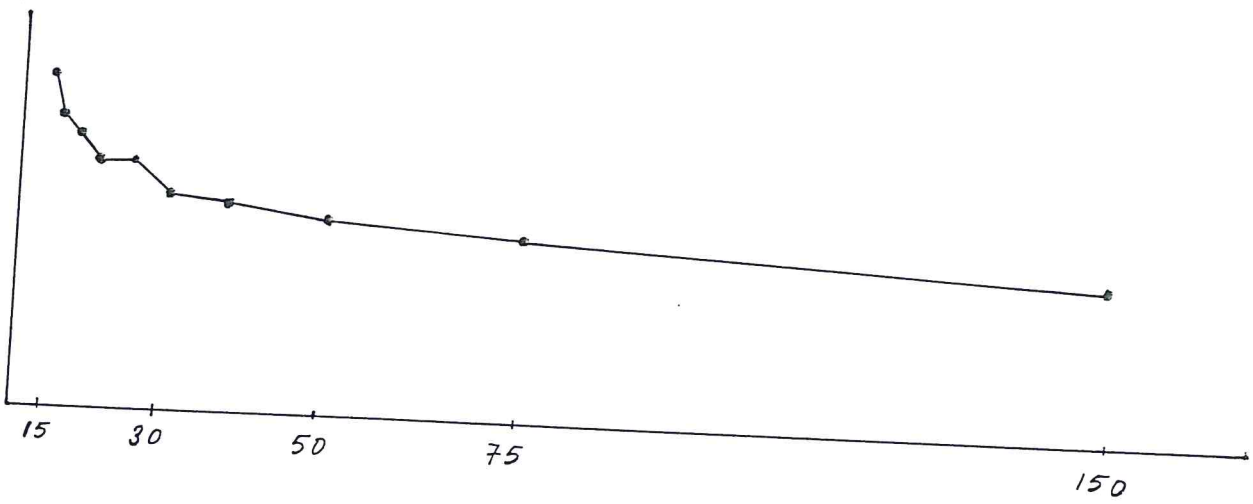


Şekil 6.8 Fe(111) - Bi(111) verileri



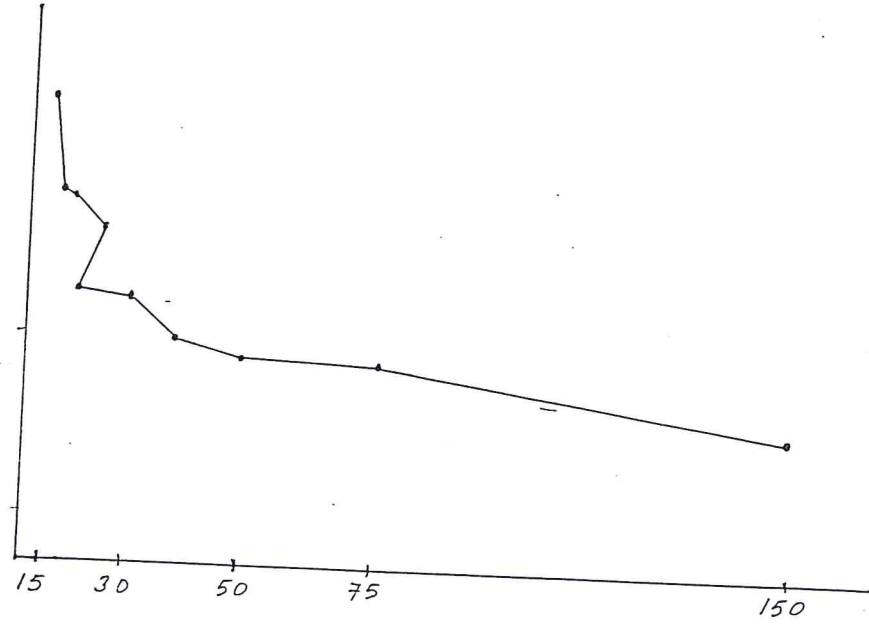


Şekil 6.9 ikinci derece hata dağılımı (Fe(111)-Bi(111))

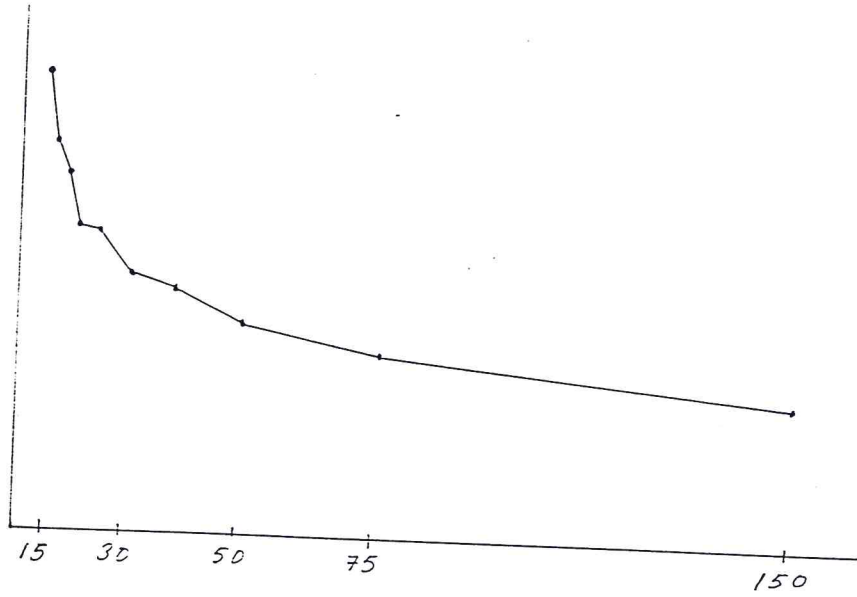


Şekil 6.10 üçüncü derece hata dağılımı (Fe(111) - Bi(111))

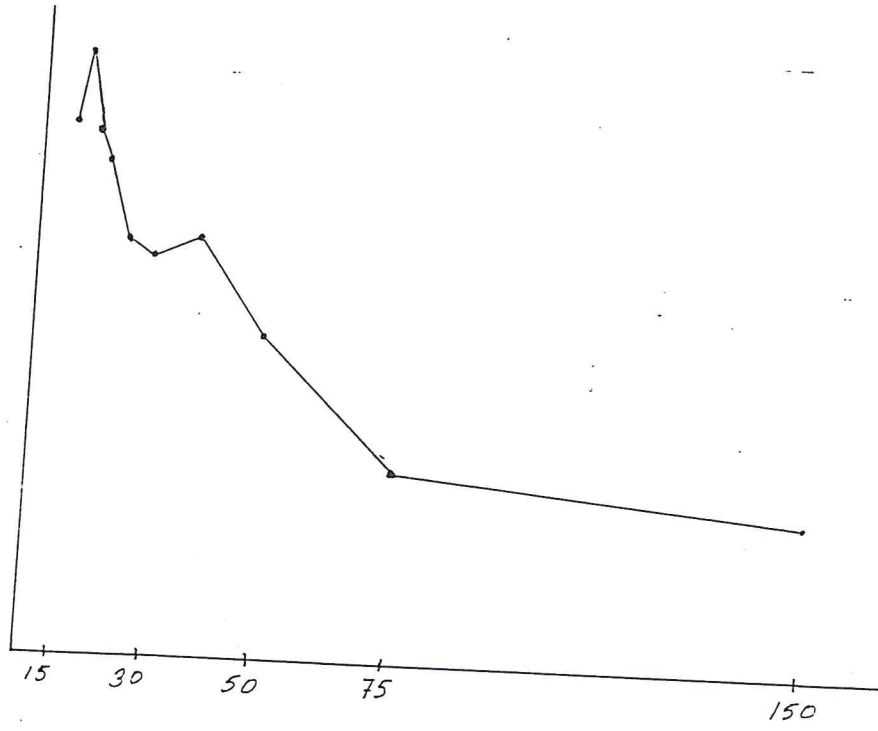




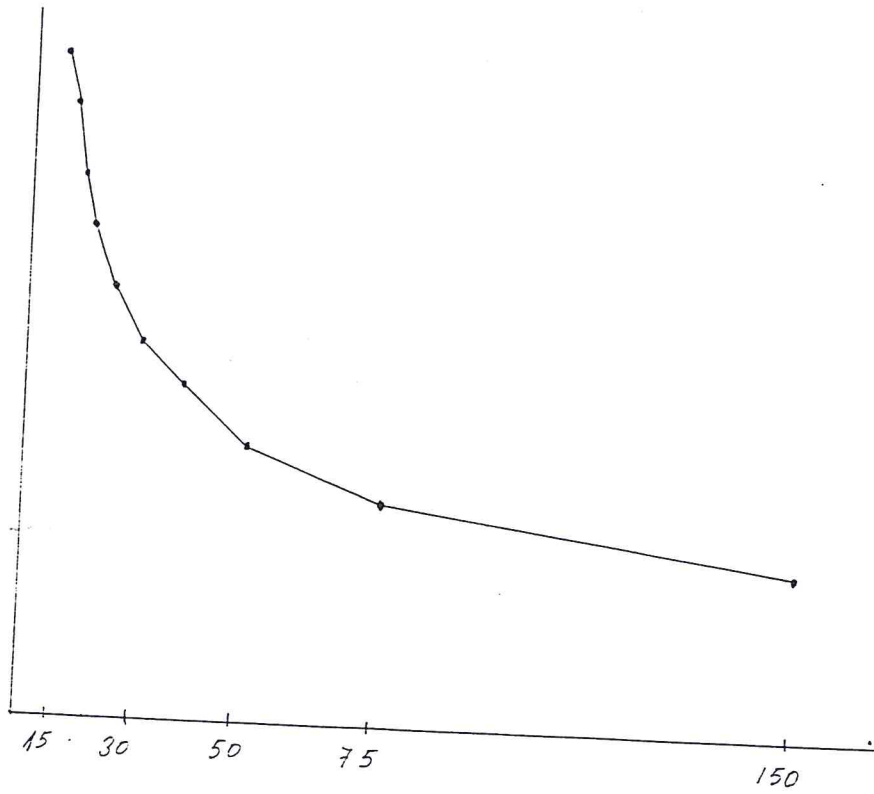
Şekil 6.11 dördüncü derece hata dağılımı (Fe(111) - Bi(111))



Şekil 6.12 beşinci derece hata dağılımı (Fe(111) - Bi(111))



Şekil 6.13 altıncı derece hata dağılımı (Fe(111) - Bi(111))



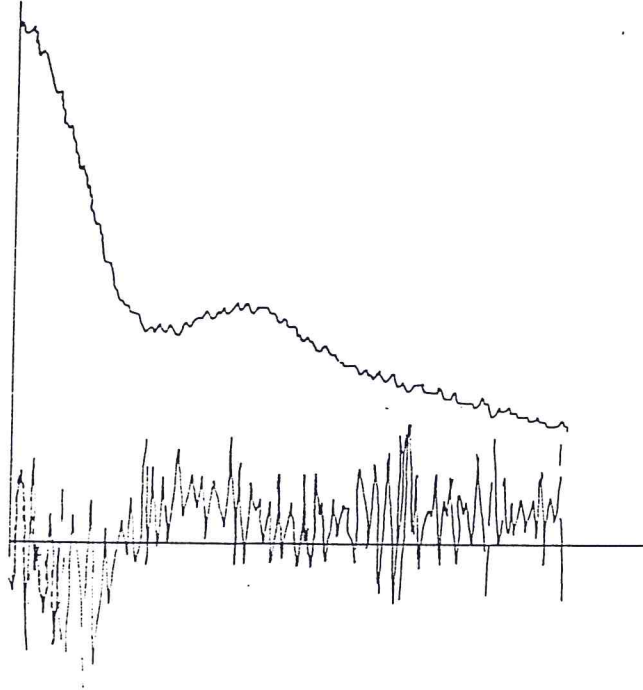
Şekil 6.14 yedinci derece hata dağılımı (Fe(111) - Bi(111))



Gauss eğrisinde, düğüm sayısı 10 veya daha az olduğunda, uyumun açıkça yetersiz olduğu görülmektedir. Bu durumda hata giderek artmaktadır. 20 veya daha az düğüm alındığında hatadaki artış oranı diğer düğüm seçimlerine göre yüksek olmaktadır. Düğüm sayısı artırılırsa hata giderek azalmakta ve yaklaşık $n=45$ den itibaren sabit kalmaktadır. $n=30$ düğüm sayısı optimal düğüm sayısı olarak belirlenebilir.

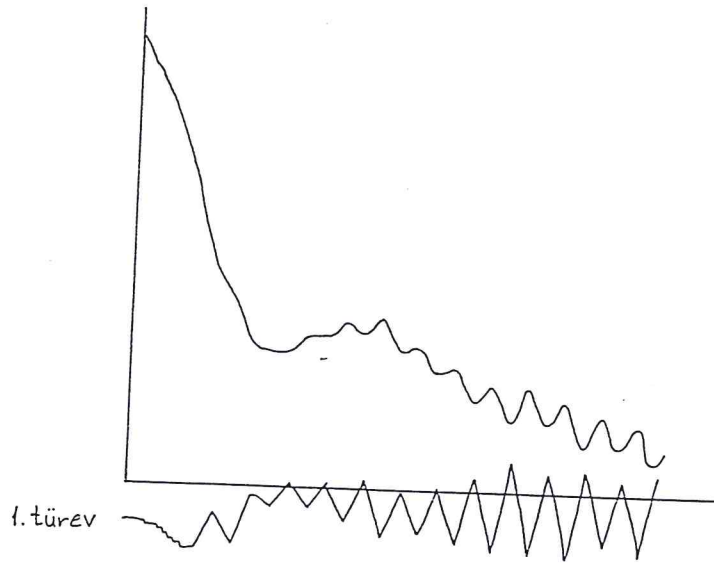
Fe(111) – Bi(111) karışımı UV spektrumu verilerinin hata dağılımında Gauss eğrisi hata dağılımlarına benzemektedir. Hata hızındaki azalma yaklaşık $n=30$ noktasına kadar hızla devam etmekte ve bu noktadan itibaren yavaş bir azalma göstermektedir. $n=30$ noktası bu veriler içinde optimal dağılım olarak alınmıştır.

Bu iki tip veri dağılımı için verilen metod, bütün spline fonksiyonları ile yapılan eğri uydurma işlemlerine uygulanabilir. Hatanın düşük olduğu minimum nokta sayısında en düzgün eğri elde edilmektedir. Hata düşük olmasına rağmen nokta sayısı artırılırsa eğride osilasyon görülmektedir (Şekil 6.15). Minimum olarak alınan düğüm sayısından 2 veya 3 daha fazla düğümün alınması eğride osilasyona neden olabilir. Bu nedenle metod düğüm noktalarının kesin olarak tayini için kullanılmamalıdır.

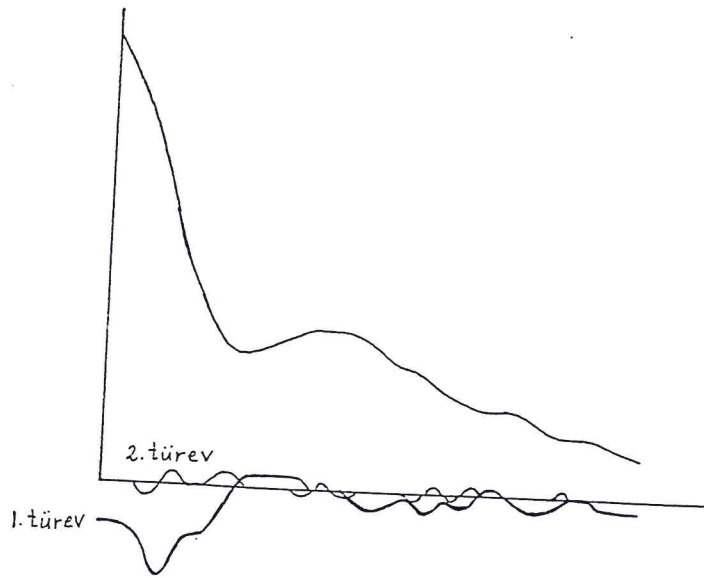


Şekil 6.15 3. derece spline, $n=150$ için Fe(111)-Bi(111)

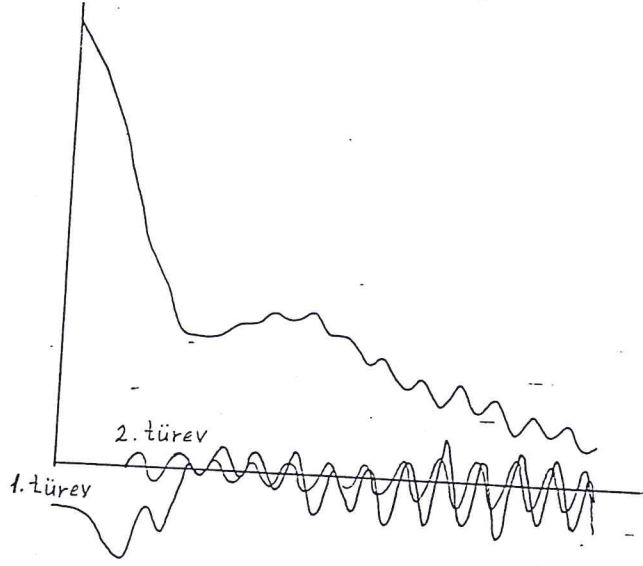




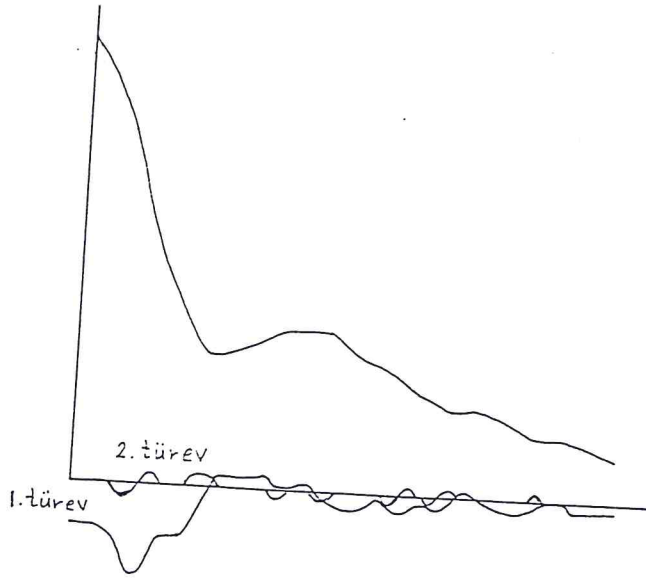
Şekil 6.16 ikinci derece spline, $n=30$ için Fe(111)-Bi(111)



Şekil 6.17 üçüncü derece spline, $n=30$ için Fe(111)-Bi(111)

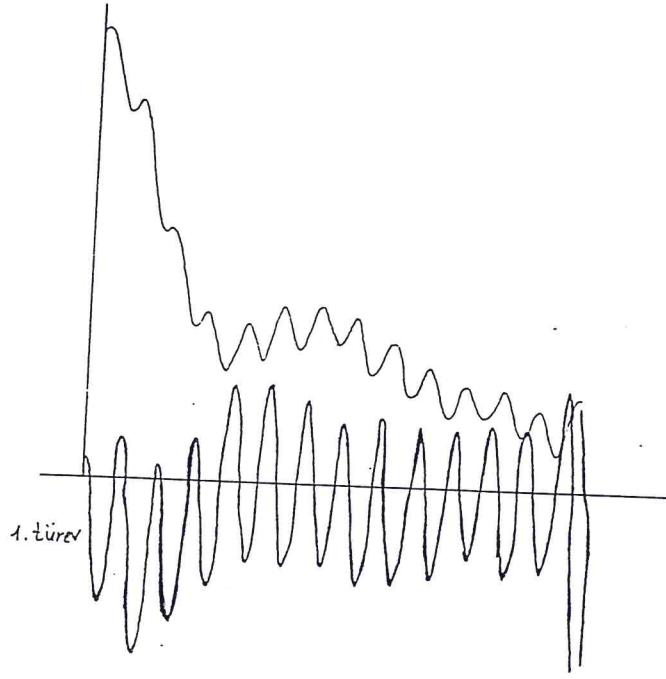


Şekil 6.18 dördüncü derece spline, $n=30$ için Fe(111)-Bi(111)

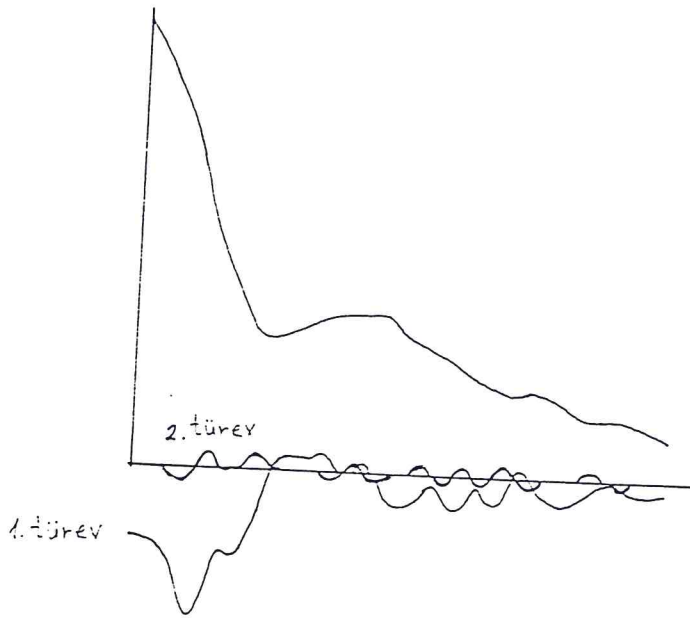


Şekil 6.19 beşinci derece spline, $n=30$ için Fe(111)-Bi(111)

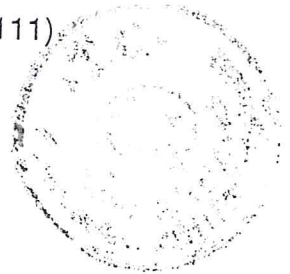




Şekil 6.20 altıncı derece spline, $n=30$ için Fe(111)-Bi(111)



Şekil 6.21 yedinci derece spline, $n=30$ için Fe(111)-Bi(111)

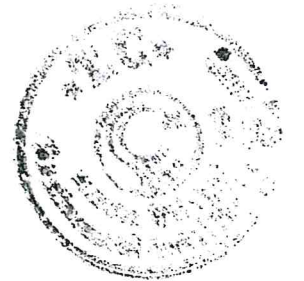


6.2 Spline fonksiyonunun derecesi

Şekillerde görüldüğü gibi, belli sayıdaki düğüm noktası için uygunluk, derecenin artışı ile artmaktadır. Derece arttıkça daha fazla düğüm noktasına ihtiyaç duyulacağı genel bir kural olmasına rağmen, araştırmalarımızda bunun böyle olmadığı görülmüştür. Düzleştirme açısından ise osilasyonu yok edecek spline dereceleri seçilmelidir. Genel olarak çift dereceli fonksiyonlarda osilasyon gözlenmiştir.

Türev eğrisinin yapısı spektral uygulamalarda oldukça önemlidir. Yüksek dereceli türevleri elde etmek için, yüksek dereceden spline fonksiyonlarını kullanmak avantaj sağlamaktadır. Optimal düğüm kullanıldığında türev eğrilerinde herhangi bir osilasyona rastlanmamıştır.

Ayrıca bilgisayarda hesaplama süresi kabaca spline fonksiyonunun derecesi ile orantılı olarak artmaktadır.



Ek 1

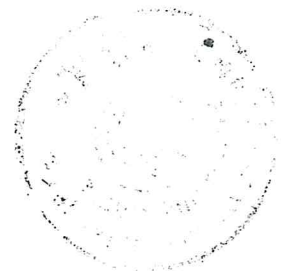
derece B-Spline fonksiyonu kullanarak hata tayini ***

```

KTA SAYISI = ".N1 : N=N1+2
DIM (X0. X LER ARASINDAKI MESAFE ) = ". X0.ADIM
M
1).C(N).COEFG(2.160).CF(160)
DO N-1 : A(I.1)=1 : A(I.2)=4 : A(I.3)=1 : NEXT I
3/ADIM : A(1.2)=0 : A(1.3)=3/ADIM
3/ADIM : A(N.2)=0 : A(N.3)=3/ADIM
2 TO N-1 : READ A(I.4) : NEXT I
:(A(3.4)-A(2.4))/ADIM
:(A(N-1.4)-A(N-2.4))/ADIM
* Sistem cozumu ***
2 TO 4
:=A(2.I)+(-1)*(A(1.I)/A(1.1)) : NEXT I
3 TO N-1
:=A(I.2)+(-1)*(A(I-1.2+1)/A(I-1.2))
:=A(I.4)+(-1)*(A(I-1.3+1)/A(I-1.2))
J
:=A(N.2)+(-1)*(A(N-2.3)/A(N-2.2))*A(N.1)
:=A(N.4)+(-1)*(A(N-2.4)/A(N-2.2))*A(N.1)
3 TO 4
:=A(N.I)+(-1)*(A(N-1.I)/A(N-1.2))*A(N.2) : NEXT I
-A(N.4)/A(N.3)
I=N-1 TO 2 STEP -1
:=A(I.4)-A(I.3)*C(I+1))/A(I.2)
I
:=A(1.4)-A(1.3)*C(3))/A(1.1)
*** Intepolasyon degerlerinin bulunmasi ***
JT "H (ADIM) = ".H : K=ADIM

I=1 TO N1-1
I=1 TO N1-1
I<N1-1 THEN X1=X1-H
L=X2 TO X1 STEP H
L-(S+2)*K : D=C(I+3)*X^3
L-(S+1)*K
D+C(I+2)*(-3*X^3+12*K*X^2-12*K^2*X+4*K^3)
L-S*K
D+C(I+1)*(3*X^3-24*K*X^2+60*K^2*X-44*K^3)
L-(S-1)*K
:=D+C(I)*(-X^3+12*K*X^2-48*K^2*X+64*K^3)
:=D/ADIM^3 : PRINT L.Y: : SY=SY+1
F(SY)=6*C(I+3)-18*C(I+2)+18*C(I+1)-6*C(I):PRINT CF(SY)
EXT L
EXT I

```



```

REM *** Hatanin tayini ***
)NEOVK=1/4 : COEFG(1.1)=0
)IVPRV=ABS(CF(2)-CF(1))/(2*ADIM)
FOR I=2 TO N1-1
)DIF=ABS(CF(I)-CF(I-1))/(2*ADIM)
)COEFG(2.I-1)=(DIF+DIFPRV)^ONEOVK
)COEFG(1.I)=COEFG(1.I-1)+COEFG(2.I-1)*(ADIM)
DIFPRV=DIF
NEXT I
COEFG(2.N1)=(2*DIFPRV)^ONEOVK
PRINT "n = ":N
FOR I=1 TO N1
PRINT USING "###.###":I.COEFG(1.I).COEFG(2.I) : NEXT I
PRINT "HATA = ":COEFG(1.N1-1)/(N1-1)
REM *** Demir(111)-Bizmut(111) verileri ***
DATA .119..116..116..117..115..110..111
DATA .109..107..103..100..099..094..091
DATA .091..086..081..080..078..074..067
DATA .065..064..058..055..054..051..047
DATA .045..044..043..041..041..039..037
DATA .036..038..036..037..036..036..037
DATA .036..035..036..038..038..038..039
DATA .040..040..041..040..040..041..042
DATA .042..041..042..044..042..043..044
DATA .042..042..043..043..043..042..041
DATA .041..039..040..039..037..037..037
DATA .036..034..035..034..033..031..032
DATA .032..032..030..030..029..028..028
DATA .028..028..027..025..026..025..024
DATA .025..026..023..022..024..024..021
DATA .023..020..020..023..022..023..021
DATA .020..020..020..021..019..019..019
DATA .020..018..018..018..018..017..016
DATA .018..018..017..014..016..016..015
DATA .016..015..015..014..014..014..013
DATA .013..013..012..013..011..011..011
DATA .011..013..010..011

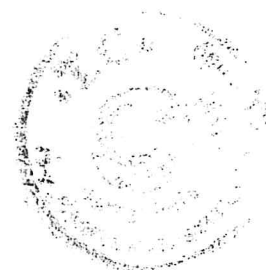
```

AYNAKLAR

1. C. de Boor, A practical Guide to Splines, Springer Verlag, New York, 1978
2. M.J. Maron, Numerical Analysis, Macmillan Publ. Co., New York, 1982
3. P.M. Prenter, Splines and Variational Methods, John Wiley, New York, 1975
4. Philip J.Davis, Interpolation and Approximation, Blaisdell Publishing Company, Waltham, 1963
5. John Gregory, Marvin Zeman, Spline Matrices and their Applications to Some higher Order Methods for Boundary Value Problems, Siam J.Numer. Anal., Vol. 25, No. 2, April 1988, pp. 399-410
6. A.Bozdoğan, H.Çağlar, B.Çağal, A Numerical Method For Calculation of the Equivalence Volume in Potentiometric Titration, Chimica Acta Turcica, Vol. 16, No. 3, 1988, pp. 391-408
7. Al-Ping Bien, Fuhua Cheng, Alternate Spline A Generalized B-spline, Journal of Approximation Theory 51, 138-159(1987), pp. 138-159
8. M.N. El Tarazi and A.A. Karaballi, On Even-Degree Splines with Application to Quadrature, Journal of Approximation Theory 60, 157-167(1990), pp. 157-167
9. S.D. Conte, C.de Boor, Elementary Numerical Analysis, Mc Graw-Hill Company, 1980
10. J.C. Mason, MA, DPhil, FIMA, Basic Matrix Methods, Co (Publishers) Butterworth, 1984



11. F.N. Fritsch, R.E. Carlson, Monotone Piecewise Cubic Interpolation, Siam J.Numer. Anal., Vol. 17, No. 2, April 1980, pp. 238–246
12. Zheng Yan, Piecewise Cubic Curve Fiting Algorithm, Mathematica of Computation, Vol. 49, No. 179, July. 1987, pp. 203–213
13. D.S Zhu, Y.K. Cheung, Postbucling analysis of Shells By Spline Finite Strip, Computers Structures, Method, Vol. 31, No. 3, 1989, pp. 357–364
14. Y.C. Zhang, Xianyong He, Analysis of Free Vibration and Buckling problems of beams and plates by dicrete Least-squares Method using B_5 -splines as trial function, Computer Structures, Vol. 31, No. 2, 1989, pp. 115–119
15. A.Savitzky and M.J.E. Golay, Anal. Chem., Vol. 36, 1627(1964)
16. P. Gauss, G.B. Gill, Appl. Spectrosc., Vol. 37, 515(1983)
17. P.G. Guesi, Numerical Methods for Curve Fitting, Cambridge University Press, Cambridge, 1961



ÖZGEÇMİŞ

Doğduğu yer, yılı : İstanbul, 1957

İlk öğrenim - : Yenimahalle Bala Hatun İlkokulu

Orta öğrenim : Sarıyer Ortaokulu, Sarıyer Lisesi

Yüksek öğrenim : İ.D.M.M.A Temel Bilimler Fakültesi
Matematik Mühendisliđi, İ.T.Ü. Nükleer Enerji Enstitüsü

Çalıştığı Kurumlar : 31-08-1983 de Yıldız Üniversitesi Matematik
Bölümü asistanlığına atanmıştır. 1989 da
öđretim görevlisi kadrosuna atanmıř olup,
bu görevini sürdürmektedir.



TEŐEKKÜR

Çalıőmalarımı yürüten ve değerli bilgilerinden yararlandığım Sayın hocam Prof.Dr. Behiç Çağal ' a teőekkür ederim.

Ayrıca, değerli bilgilerinden yararlandığım Yar.Doç.Dr. Abdülrezzak Bozdoğan ' a ve Ar.Gör. Nazan Çağlar ' a teőekkür ederim.

