YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOĞRUSAL (REGLE) YÜZEYLER VE İZOMETRİK TASVİRLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ARŞ.GÖR. ARZU YEMİŞCİ

İSTANBUL-1991

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezimi yöneten ve çalışmalarımda yakın ilgisini esirgemeyen Sayın Hocam Yard.Doç.Dr.Fusun URAS'a teşekkür ederim.

Arş.Gör.Arzu YEMİŞCİ

ÖZET

Bu çalışmada üç boyutlu öklid uzayında, analitik varsaydığımız doğrusal yüzeyler ve bunların izometrik tasvirleri incelenmektedir. Bu amaçla önce doğrusal yüzeylerin incelenmesinde temel oluşturan bilgiler özetlenmektedir. Sonuçta bir doğrusal yüzeyin büyüklüklerinin, yalnız doğrultman eğrinin v parametresine bağlı olan üç fonksiyon ile (β, σ, D) doğuran üzerinde değişen u parametresi yardımıyla ifade edilebileceği gösterilmiştir.

Bu bilgiler kullanılarak II. bölümde;

a) İki doğrusal yüzeyin birbiri üzerine doğuranları koruyan bir izometrik tasvir ile tasviri problemi çözülmüştür.

b) İki doğrusal yüzeyin doğuranları korumayan izometrik tasviri problemi çözülmüştür.

c) Doğrusal olmayan bir dönel yüzeye izometrik olarak tasvir edilebilen doğrusal yüzeyler belirtilmiştir.

SUMMARY

In this work, rectlinear surfaces which are assumed to be analytic and their isometric mapping are studied. In this respect, first I summerized the main knowledge about the rectlinear surfaces that is the base for studying these surfaces. As a result, It is shown that,quantities of a rectlinear surface can be explained by three functions; β , σ , D ; which depend on base curve parameter v and the parameter of generator u.

By using these facts;

a) The problem, which a rectilinear surface maps to another rectilinear surface by preserving the generators, is solved.

b) The problem, which a rectilinear surface isometrically is mapped by non-preserving generator to another rectilinear surface.

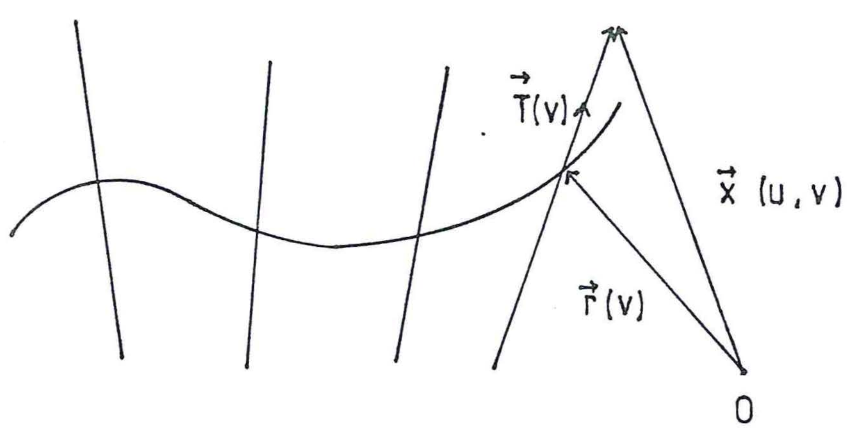
c) It is determined the rectilinear surfaces which can be mapped isometrically to a non-rectilinear surface of revolution.

BÖLÜM I

DOĞRUSAL (REGLE) YÜZEYLER HAKKINDA TEMEL BİLGİLER VE SONUÇLAR

I.I. GİRİŞ

Bu çalışmada bir parametreli doğrular ailesinin geometrik yeri olarak tanımlanan yüzeylerden ve bunların birbiri üzerine izometrik tasvirinden sözedeceğiz. Bu yüzeylere "doğrusal ya da regle yüzeyler" denir. Böyle bir yüzey üzerinde tüm doğruları kesen herhangi bir eğrinin yer vektörünü $\vec{r}\,(v)$ ile gösterirsek, yüzeyin vektörel denklemi ;



$$\vec{X}(u,v) = \vec{r}(v)+u.\vec{T}(v) \qquad (1)$$

olarak yazılabilir.

Burada;

$\vec{T}(v)$: Herhangi bir doğuranın birim vektörü

v : $\vec{r}(v)$ eğrisinin yay uzunluğu

olup;

$$\vec{r}\,'(v) = \vec{t}(v) \qquad ; \qquad \vec{t}^{\,2}(v) = \vec{T}^{\,2}(v) = 1$$

dir.

Bu denklemde özel olarak;

$\vec{T}(v) =$ sbt, yani doğuranların doğrultusu sbt. alınırsa;

$$\vec{x}(u,v) = \vec{r}(v)+u.\vec{k} \qquad (\vec{k} : \text{sbt})$$

olarak "genel silindir" ;

$\vec{r}(v) = 0$ alınırsa;

$$\vec{x}(u,v) = u.\vec{T}(v)$$

olarak da "genel koni" denklemi elde edilir. Koni ve silindirleri ayrı tutmak için;

$$\vec{r}(v) \neq 0 \quad , \quad \vec{T}'(v) \neq 0 \qquad (2)$$

varsayacağız.

$\vec{r}(v)$ eğrisine "yüzeyin doğrultman eğrisi" , her bir doğruya "yüzeyin doğuranı" ,

$$\vec{x}(u,v) = u.\vec{T}(v) \qquad (3)$$

konisine de "yüzeyin doğrultman konisi" denir.

Şimdi bu yüzeyin I.Esas Formu ve Normalini yazalım:

$$\vec{T}.\vec{t} = |\vec{T}|\,.|\vec{t}|\,.\mathrm{Cos}\theta = \mathrm{Cos}\theta \qquad (0 < \theta < \pi)$$

$$\vec{T}'^{\,2}(v) = a^2(v) \qquad (4)$$

$$\vec{T}'(v).\vec{t}(v) = b(v)$$

dersek; (1) den;

$$E = 1 \;, \quad F = \mathrm{Cos}\theta(v) \quad , \quad G = 1+a^2u^2+2bu$$

$$\omega = +\sqrt{EG-F^2} = +\sqrt{a^2u^2+2bu+\mathrm{Sin}^2\theta} \qquad (5)$$

yani;

$$d\vec{x}^2 = ds^2 = du^2+2\mathrm{Cos}\theta du\, dv+(1+a^2u^2+2bu)dv^2$$

ve

$$\vec{N} = \frac{\vec{T} \wedge \vec{t}+u.\vec{T} \wedge \vec{T}'}{\omega} \qquad (5)'$$

bulunur.

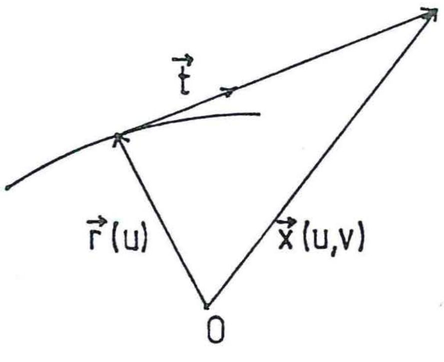
I.2. BOĞAZ ÇİZGİSİ

Regle yüzeyin (1) şeklindeki gösteriminde $\vec{r}(v)$ eğrisinin yüzeyin üzerinde bulunmaktan başka, yüzeyin geometrik yapısı ile hiçbir alakası yoktur. Yani bir regle yüzey üzerinde istediğimiz her eğriyi $\vec{r}(v)$ olarak alabiliriz.

Ancak daha önce;

$$\vec{x}(u,v) = \vec{r}(u)+(v-u).\vec{t}$$

şeklinde tanımladığımız genel bir açılabilir yüzeyde kullandığımız $\vec{r}(u)$ eğrisi ise yüzey üzerinde bulunmaktan başka, yüzeyin tüm doğuranlarına teğet olmak gibi (yüzeyin bükülme ayrıtı olmak) bir özellik sağlar.



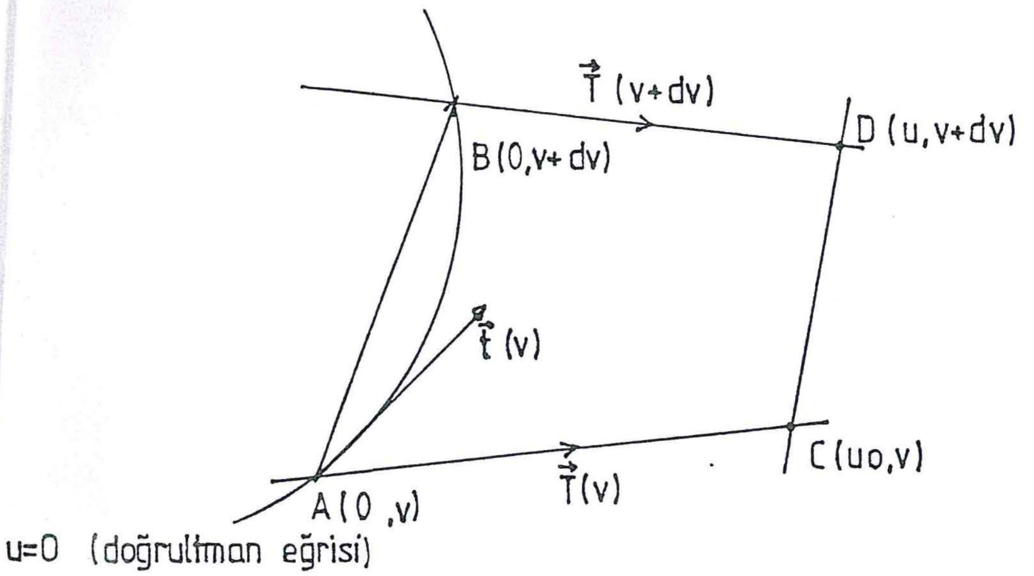
Şimdi açılabilir olmayan regle yüzeylerde de yüzeyin geometrik yapısına bağlı böyle bir eğri tanımlamak istiyoruz. Doğal olarak yüzey açılabilir değil ise, doğuranlar aynı bir eğrinin teğetleri olamayacak, bunun yerine şöyle düşünülebilecektir:

Bir doğuranın ardışığı ile ortak dikmesini gözönüne alalım. Bu ortak dikmenin doğuran üzerindeki ayak noktasının doğuranın ardışığının kendisine yaklaşması halindeki limit durumuna "doğurana ait boğaz noktası" denir. Her doğuran üzerinde oluşturulacak bu boğaz noktalarının geometrik yerine "yüzeyin boğaz çizgisi" denir.

Şimdi boğaz çizgisinin denklemini arayalım:

Bunun için tanım gereği yüzeyin sonsuz yakın elemanları ile işlem yapma zorunluğu vardır. O halde doğuranları değiştiren v parametresinin v değeri ile elde edilen doğrunun ardışığını, parametrenin v+dv değeri ile elde ettiğimizi varsayarsak, buradaki dv, karesi kendisinin yanında yoksayılabilecek kadar küçük olan herhangi bir sayı yani bir sonsuz küçük olacaktır.

Yani $dv^2 = 0$ alabiliriz.



AC doğuranının birim vektörü $\vec{T}(v)$;

BD ardışığının birim vektörü ise;

$$\vec{T}(v+dv) = \vec{T}(v)+\vec{T}'(v).dv$$

dir.

Şimdi ardışık doğuranlar arasındaki açıyı $d\psi$ ile gösterelim:

$$d\psi = \mathrm{Sin}(d\psi) = |\vec{T} \wedge (\vec{T}+\vec{T}'dv)| = |\vec{T} \wedge \vec{T}'.dv|$$

$$= |\vec{T}'|.\ dv = |\vec{T}'.dv|$$

dir ve dv artmasını pozitif varsayarsak (4) gösterimlerine göre;

$$d\psi = a.dv \qquad (6)$$

olur.

Şimdi ardışık doğuranlar arasındaki ortak dikmenin uzunluğunu arayalım:

Şekile göre;

$$dp = \text{izd}_{\vec{CD}}\ \vec{AB} = \vec{AB}\ .\frac{\vec{CD}}{|\vec{CD}|} = \vec{AB}.\ \frac{\vec{T}(v)\ \wedge\ \vec{T}(v+dv)}{|\vec{T}(v)\ \wedge\ \vec{T}(v+dv)|}$$

$$= \vec{AB}.\ \frac{\vec{T}(v)\ \wedge\ [\vec{T}(v)+\vec{T}'(v).dv]}{d\psi}$$

$$\vec{AB} = \vec{r}(v+dv)-\vec{r}(v) = \vec{t}.dv$$

dir. O halde

$$dp = \frac{(\vec{t}, \vec{T}, \vec{T}')}{a} .dv \qquad (7)$$

olur.

Artık AC doğuranı üzerindeki boğaz noktasının $u = \sigma$ parametresini (apsisini) araştırabiliriz:

(Doğuranlar üzerinde $u = 0$ doğrultman eğrisinden başlamak üzere ölçülen u parametre değerlerine ilgili noktanın apsisi diyeceğiz).

Şekilden:

$$(AC).\vec{T} = \vec{AB}+\vec{BD}+\vec{DC}$$

$$(AC).\vec{T} = \vec{t}.dv+\lambda(\vec{T}+\vec{T}'dv)+\mu\left[\vec{T} \wedge (\vec{T}+\vec{T}'dv)\right]$$

λ ve μ den kurtulmak için her iki tarafı sırası ile λ ve μ nün katsayıları ile vektörel olarak çarpalım. Böylece önce;

$$(AC)(\vec{T} \wedge \vec{T}'.dv) = \vec{t} \wedge \vec{T}dv+\mu\vec{T}'dv$$

buluruz. Şimdi de iki yanı $\vec{T}'$ ile vektörel çarpalım:

$$(AC)(\vec{T} \wedge \vec{T}'dv) \wedge \vec{T}' = (\vec{t} \wedge \vec{T}dv) \wedge \vec{T}'$$

den;

$$\sigma = \lim_{dv \to 0} (AC)$$

için;

$$\sigma = -\frac{b(v)}{a^2(v)} \qquad (8)$$

elde ederiz.

Boğaz çizgisi yüzey üzerinde bir eğri olduğuna göre, bu eğrinin denklemi $u = f(v)$ (veya $v=g(u)$) şeklinde olacaktır. O halde boğaz çizgisinin denklemi (8) de $\sigma = u$ yazarak;

$$u = -\frac{b(v)}{a^2(v)}$$

olarak elde edilecektir. Buna göre, boğaz çizgisinin doğrultman eğri olması için ($u = 0$) gerek ve yeter şart $b(v) = 0$ olmasıdır ($a \neq 0$).

I.3. BONNET TEOREMİ

Şimdi Bonnet'nin bir teoremini kanıtlamak amacı ile doğrultman eğrimizin ($u = 0$) κg_v^o geodezik eğriliğini hesaplayalım:

$$\kappa g_v^o = \frac{1}{\omega}\left[(\sqrt{G})_u - \left(\frac{F}{\sqrt{G}}\right)_v\right]$$

olup;

$$E = 1, \quad F = \cos\theta(v) \ , \quad G = a^2u^2+2bu+1 \ ,$$

$$\omega = +\sqrt{a^2u^2+2bu+\sin^2\theta}$$

koyarsak;

$$\kappa g_v^o = \frac{1}{\sqrt{a^2u^2+2bu+\sin^2\theta}} \left[\left(\sqrt{a^2u^2+2bu+1}\right)_u - \left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{a^2u^2+2bu+1}} \right)_v \right]$$

dan;

$u = 0$ yazarsak;

$$\kappa g_v^o = \frac{1}{\sin\theta} \left[b+\theta'\sin\theta \right]$$

yani;

$$-\kappa g_v^o + \theta' + \frac{b}{\sin\theta} = 0 \qquad (9)$$

bulunur.

Bu sonuç aşağıdaki Bonnet teoreminin kanıtını içerir:

Bir doğrusal yüzey üzerindeki bir eğride şu 3 özelikten ikisi varsa üçüncü de vardır.

1-) Eğri bir geodeziktir.
2-) Eğri boğaz çizgisidir.
3-) Eğri doğuranları sabit açı ile keser.

I.4 DAĞILMA PARAMETRESİ

Bir regle yüzeyin, bir doğrunun uzaydaki hareketleri ile oluştuğunu düşünebiliriz. O halde bir regle yüzeyde bir doğuranın nasıl değiştiğinin bir ölçüsünü vermek gerekir.

Herhangi bir doğuranın hareketini düşündüğümüz zaman; bu doğuranın dönmesi ile kendinden bir önceki doğuran arasındaki $d\varphi$ açısı; yükselmesi ile de kendinden bir önceki doğuran ile ortak dikmesinin uzunluğu değişeceğine göre; doğuranların değişmesinin ölçüsü olarak;

$$\beta = \lim_{dv \to 0} \frac{dp}{d\varphi} = \frac{dp}{d\varphi} \tag{10}$$

alınabilir.

β ya "dağılma parametresi" denir.

$d\varphi$ ve dp nin (6), (7) deki değerleri ile;

$$\beta = \frac{dp}{d\varphi} = \frac{1}{a^2}(\vec{t}, \vec{T}, \vec{T}') \tag{11}$$

elde edilir.

O halde genel bir doğrusal yüzeyin, açılabilir yüzeye bozulması için gerek ve yeter koşul $\beta = 0$ olmasıdır ($dp = 0$).

β yı a, b, θ cinsinden hesaplamak amacı ile önce $(\vec{t}, \vec{T}, \vec{T}')^2$ yi hesaplayalım:

$$(\vec{t} \wedge \vec{T}).\vec{T}' = |\vec{t} \wedge \vec{T}|.|\vec{T}'| \,.\mathrm{Cos}\left[(\vec{t} \wedge \vec{T}),\vec{T}'\right]$$

$$= a.\mathrm{Sin}\theta.\mathrm{Cos}\left[(\vec{t} \wedge \vec{T}),\vec{T}'\right]$$

olduğu için;

$\mathrm{Cos}\left[(\vec{t} \wedge \vec{T}),\vec{T}'\right]$ yü hesaplayalım:

$$|(\vec{t} \wedge \vec{T}) \wedge \vec{T}'| = |\vec{t} \wedge \vec{T}|.|\vec{T}'|.\mathrm{Sin}\left[(\vec{t} \wedge \vec{T}),\vec{T}'\right]$$

olup;

$$\mathrm{Sin}\left[(\vec{t} \wedge \vec{T}),\vec{T}'\right] = \frac{|(\vec{t} \wedge \vec{T}) \wedge \vec{T}'|}{a\mathrm{Sin}\theta}$$

$$= \frac{|\vec{T}(\vec{t}.\vec{T}')-\vec{t}(\vec{T}.\vec{T}')|}{a\mathrm{Sin}\theta}$$

$$= \frac{|b\vec{T}|}{a\mathrm{Sin}\theta} = \frac{b}{a\mathrm{Sin}\theta}$$

dır. O halde:

$$\mathrm{Cos}^2\left[(\vec{t} \wedge \vec{T}),\vec{T}'\right] = 1-\mathrm{Sin}^2\left[(\vec{t} \wedge \vec{T}),\vec{T}'\right]$$

$$\mathrm{Cos}^2 \left[(\vec{t} \wedge \vec{T}),\vec{T}'\right] = 1- \frac{b^2}{a^2\mathrm{Sin}^2\theta} = \frac{a^2\mathrm{Sin}^2\theta-b^2}{a^2\mathrm{Sin}^2\theta}$$

Yani;

$$(\vec{t}, \vec{T}, \vec{T}')^2 = a^2 \mathrm{Sin}^2\theta . \frac{a^2 \mathrm{Sin}^2\theta - b^2}{a^2 \mathrm{Sin}^2\theta} = a^2 \mathrm{Sin}^2\theta - b^2$$

olur. O halde (11) den;

$$\beta = \mp \frac{\sqrt{a^2 \mathrm{Sin}^2\theta - b^2}}{a^2} \qquad (12)$$

bulunur.

β nın bu ifadesinden; açılabilir yüzeylerde boğaz çizgisinin, açılabilir yüzeyin bükülme ayrıtı ile çakıştığı görülebilir.

Gerçekten, yüzeyin boğaz çizgisini doğrultman eğri olarak aldığımızı düşünürsek $b = 0$ dır ve yüzey açılabilir ise $\beta = 0$ olacağından (12) den;

$$\theta = 0$$

bulunur. Buna göre de $\vec{T} = \vec{t}$ olup, doğuranlar doğrultman eğrinin, yani boğaz çizgisinin teğetleri olur. Bu ise boğaz çizgisinin, açılabilir yüzeyin bükülme ayrıtı ile çakıştığını gösterir.

I.5. ÖZEL BİR KOORDİNAT SİSTEMİ

Geodezik parametre: Yüzeyin bir bölgesinde, her noktadan bir ve yalnız bir tane geçen bir parametreli bir geodezik ailesini gözönüne alalım.

Bu aileyi koordinat çizgileri şebekesinin $v = sbt$ ailesi, bunların dik yörüngelerini de $u = sbt$ ailesi olarak alalım.

O halde; ($F = 0$ olacağından)

$$ds^2 = Edu^2+Gdv^2$$

olacaktır.

$v = sbt$ ailesi geodezik olduğundan;

$$Kg_u = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} = 0$$

dan;

$$E = E(u)$$

olur. Buna göre;

$$\bar{u} = \int \sqrt{E(u)}.du \quad , \quad \bar{v} = v$$

dönüşümü yapılırsa;

$$ds^2 = E.\ \frac{d\bar{u}^2}{E} + G\ .d\bar{v}^2$$

ve üst çizgilerin terkedildiği düşünülürse;

$$ds^2 = du^2 + G(u,v)\ dv^2$$

olur.

Yani; $E = 1$, $F = 0$ olur. İşte buradaki u,v parametrelerine "geodezik parametreler" denir.

Şimdi, regle yüzeyde doğuranların geodezik olduğunu biliyoruz.

Doğuranları değiştiren parametre v olduğuna göre $v =$ sbt ler geodeziktir. $\vec{r}(v)$ doğrultman eğrisi olarak $v =$ sbt ailesinin dik yörüngelerinin bir eğrisini aldığımızı düşünürsek $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ ve

$$ds^2 = du^2 + (a^2u^2 + 2bu + 1)dv^2 \ .$$

olur. O halde u,v parametreleri geodezik parametrelerdir. Şimdi bu parametre sisteminde, yüzeyin büyüklüklerini vermek istiyoruz.

Hemen görülür ki;

$$G = a^2u^2 + 2bu + 1 \quad , \quad \sigma = -\frac{b}{a^2} \quad , \quad \beta^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^4}$$

$$E = 1 \quad , \quad F = 0 \ ,$$

$$G = a^2 \left[(u-\sigma)^2+\beta^2\right] = \omega^2 \tag{13}$$

elde edilir.

II.Esas Form katsayılarını hesaplamak için kullanacağımız sonuçları topluca yazıyoruz. Konunun başında da yazdığımız gibi;

$$\vec{t}.\vec{T}' = b = -a^2\sigma \qquad \left(\sigma = -\frac{b}{a^2} \text{ idi}\right)$$

$$\vec{T}'^2 = a^2 \quad , \quad \vec{t}.\vec{T} = 0 \qquad \left(\theta = \frac{\pi}{2} \text{ idi}\right) \tag{14}$$

$$\vec{t}.\vec{t}' = \vec{T}.\vec{T}' = 0 \quad ; \quad \vec{N} = \frac{\vec{T} \wedge \vec{t} + u.\vec{T} \wedge \vec{T}'}{\omega}$$

$$(\vec{t}, \vec{T}, \vec{T}') = \sqrt{a^2-b^2} = a^2\beta$$

dır.

Bu sonuçlarla $\vec{N}$ nin uygun bir ifadesini bulmak amacı ile $\vec{T}$, $\vec{T}'$ yü değişik bir şekilde ifade edeceğiz. (14) den önce;

$$\vec{T} = \lambda(\vec{T}' \wedge \vec{t})$$

yazılacak ve buradan;

$$\lambda = \frac{1}{a^2\beta}$$

olduğu saptanarak;

$$\vec{T} = \frac{1}{a^2\beta} (\vec{T}' \wedge \vec{t}) \tag{15}$$

bulunacaktır. Buradan;

$$a^2\beta . \vec{T} = \vec{T}' \wedge \vec{t}$$

yazılarak iki yan $\vec{t}$ ile vektörel olarak çarpılırsa;

$$a^2\beta \quad \vec{T} \wedge \vec{t} = (\vec{T}' \wedge \vec{t}) \wedge \vec{t}$$

yani;

$$\vec{T}' = b\vec{t} + a^2\beta(\vec{t} \wedge \vec{T}) \tag{16}$$

yazılabilir.

$$\vec{N} = \frac{\vec{T} \wedge \vec{t} + u\vec{T} \wedge \vec{T}'}{\omega}$$

idi. (15) den;

$$\vec{T} \wedge \vec{t} = \frac{b\vec{t} - \vec{T}'}{a^2\beta}$$

bulunur. (15) ve (16) dan da;

$$\vec{T} \wedge \vec{T}' = \vec{t}\left(\frac{b^2}{a^2\beta} + a^2\beta \right) - \frac{b}{a^2\beta} \vec{T}'$$

elde edilecektir. Bu sonuçlar $\vec{N}$ nin ifadesinde konursa;

$$\vec{N} = \frac{-1}{a^2\beta\omega} \left[(1+ub)\vec{T}' - (a^2u+b)\vec{t} \right] \qquad (17)$$

bulunur.

$v =$ sbt koordinat çizgileri doğuran (geodezik ve asimptotik) olduklarından ; $L = 0$ dır.

N ve M de;

$$N = \vec{x}_{vv}.\vec{N} \quad , \quad M = \vec{x}_{uv}.\vec{N}$$

den bulunacaktır.

(1) den;

$$\vec{x}_v = \vec{r}' + u.\vec{T}' = \vec{t} + u.\vec{T}' \quad , \quad \vec{x}_{vv} = \vec{t}' + u.\vec{T}''$$

yazılabilecektir. O halde;

$$N = -\frac{1}{a^2\beta\omega} \left[(1+ub)\vec{T}'.\vec{t}' + u(1+ub)\vec{T}'.\vec{T}'' - u(b+a^2u)\vec{t}.\vec{T}'' \right] \quad (18)$$

dir.

$$b = \vec{t}.\vec{T}' \quad , \quad b' = \vec{t}'.\vec{T}'+\vec{t}.\vec{T}''$$

$$a^2 = \vec{T}'^2 \quad , \quad a.a' = \vec{T}'.\vec{T}'' \qquad ;$$

olduğundan;

$$\vec{t}.\vec{T}'' = c(v)$$

denirse, (18) den;

$$N = -\frac{1}{a^2\beta\omega}\left[u^2a(a'b-ac)+u(bb'+aa'-2bc)+b'-c\right] \quad (18)'$$

yazılabilecektir. Burada;

$$\rho(v) = \frac{ac-a'b}{a^3\beta}$$

konulursa, oldukça uzun bir hesap neticesinde;

$$N = \frac{a^2}{\omega}\left[\rho\left[(u-\sigma)^2+\beta^2\right]+\beta'(u-\sigma)+\beta\sigma'\right] \qquad (19)$$

olarak bulunur.

M ise;

$$M = \vec{x}_{uv}.\vec{N}$$

den;

$$\vec{x}_u = \vec{T}(v) \quad , \quad \vec{x}_{vu} = \vec{T}'$$

olduğundan;

$$M = - \frac{a^2 \beta}{\omega} \qquad (20)$$

olarak bulunur.

Şimdi bulduğumuz bu E,F,G,L,M,N büyüklüklerinde;

$$v^o = \int a(v).dv \quad , \quad \frac{dv^o}{dv} = a(v) \quad , \quad S_v = S_{v^o}.a(v) \qquad (21)$$

skala dönüşümünü yapalım.

Bu işlemde;

$$E^o = E = 1 \quad , \quad F^o = F = 0 \quad , \quad L^o = L = 0$$

dır.

G^o'ı bulalım:

$$G = (\vec{x}_v)^2 = (\vec{x}_{v^o} .a)^2$$

olup;

$$G^o = \frac{G}{a^2} \quad , \quad \omega^o = \frac{\omega}{a} \qquad (22)$$

dır. (13) ve (22) den;

$$G^o = (u-\sigma)^2 + \beta^2 \qquad (23)$$

bulunur. (22) ve $M^{o} = \dfrac{M}{a}$ olduğundan (20) ye göre de ;

$$M^{o} = -\frac{\beta}{\omega^{o}} \tag{24}$$

elde edilir.

N ye gelince:

$$N^{o} = \frac{N}{a^{2}}$$

olacak ve (19) dan, önce;

$$N^{o} = \frac{1}{a\omega^{o}} \{\rho\left[(u-\sigma)^{2}+\beta^{2}\right]+\beta'(u-\sigma)+\beta\sigma'\} \tag{25}$$

yazılacaktır.

Burada v ye göre türevler yerine v^{o} a göre türevler yazılırsa;

$$\rho = \frac{ac-a'b}{a^{3}\beta} \quad , \quad c = \vec{t}.\vec{T}''$$

olduğu için v^{o} a göre türevi (.) ile gösterirsek;

$$\rho = \frac{a\dot{\vec{r}}\ \ddot{\vec{T}}}{\beta}$$

bulunacaktır.

Böylece (25) son olarak;

$$N^{o} = \frac{1}{\omega^{o}} \left\{ \frac{\vec{r}^{\cdot}\cdot\vec{T}^{\cdot\cdot}}{\beta} \left[(u-\sigma)^2+\beta^2\right]+\beta^{\cdot}(u-\sigma)+\beta\sigma^{\cdot} \right\} \qquad (25)'$$

şeklinde ifade edilmiş olur. Artık büyüklüklerdeki (o) üst indisini kaldırabilir ve (.) lı türevleri yeniden (') ile gösterebiliriz:

$$E = 1 \quad , \quad F = 0 \quad , \quad G = (u-\sigma)^2+\beta^2 = \omega^2$$

$$L = 0 \quad , \quad M = - \frac{\beta}{\omega} \quad ,$$

$$N = \frac{1}{\omega} \left\{ \frac{\vec{r}'.\vec{T}''}{\beta} \left[(u-\sigma)^2+\beta^2\right]+\beta'(u-\sigma)+\beta\sigma' \right\} \qquad (26)$$

$$(\omega = \sqrt{G} = g \quad , \quad \beta \neq 0)$$

Bu büyüklükleri veren yüzey denklemi ise;

$$\vec{x}(u,v) = \vec{r}(v)+u.\vec{T}(v)$$

olup;

$$\vec{T}^2 = 1 \quad , \quad \vec{T}'^2 = 1 \quad , \quad \vec{r}'^2 = \beta^2+\sigma^2 \quad , \quad \vec{r}'.\vec{T} = 0, \quad \vec{r}'.\vec{T}' = -\sigma \qquad (27)$$

dır. Ayrıca (15) , (16) ;

$$\vec{T} = \frac{1}{\beta}(\vec{T}' \wedge \vec{r}'), \quad \vec{T}' = \frac{-\sigma}{\beta^2+\sigma^2}\vec{r}' + \frac{\beta}{\beta^2+\sigma^2}(\vec{r}' \wedge \vec{T}) \qquad (28)$$

şeklini alır ve $\vec{r}'$ içinde;

$$\vec{r}' = -\sigma\vec{T}' + \beta(\vec{T} \wedge \vec{T}') \tag{29}$$

bulunur. Yüzeyin normal birim vektörü içinde (17) den;

$$\vec{N} = -\frac{1}{\beta\omega}\left[(\beta^2+\sigma^2-u\sigma)\vec{T}'+(\sigma-u)\vec{r}'\right] \tag{30}$$

yazılabileceği açıktır.

I.6. DOĞRULTMAN KONİYİ BELİRTEN FONKSİYON

E,F,G; L,M,N büyüklüklerinin (26) daki ifadelerinde geçen β ve σ nın geometrik anlamlarını biliyoruz. Şimdi;

$$\frac{\vec{r}'.\vec{T}''}{\beta}$$

nın geometrik anlamı üzerinde duracağız:

$|\vec{T}(v)| = 1$ olduğundan $\vec{T}(v)$ birim küresel eğrinin yer vektörü, v de onun yay uzunluğudur. O halde, yüzeyin doğrultman konisini belirleyen $\vec{T}(v)$ birim küresel eğrinin Frenet birim vektörlerini $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$; eğrilik ve burulmasını da κ, τ ile gösterirsek: ($\kappa \neq 0$)

$$\vec{t} = \vec{T}' \ , \quad \vec{n} = \frac{1}{\kappa}.\vec{T}'' \ , \quad \vec{b} = \frac{\vec{T}' \wedge \vec{T}''}{\kappa} \tag{31}$$

dır. Şimdi;

$$D = (\vec{T}, \vec{T}', \vec{T}'') \qquad (32)$$

diyelim ve $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$, K , τ yu hesaplayalım:

$\vec{T}$, $\vec{T}'$, $\vec{T} \wedge \vec{T}'$ üçü de birbirine dik lineer bağımsız 3 vektör olup, diğer bütün vektörleri bunların lineer kombinasyonu olarak yazabiliriz. O halde;

$$\vec{T}'' = \alpha . \vec{T} + \beta . \vec{T}' + \gamma \vec{T} \wedge \vec{T}'$$

yazarak α , β , γ yı hesaplarsak;

$$\vec{T}'' = -\vec{T} + D\vec{T} \wedge \vec{T}' \qquad (33)$$

sonucu elde edilir. Buradan ve (31) den de;

$$\vec{n} = \frac{1}{K} (-\vec{T} + D\vec{T} \wedge \vec{T}')$$

olarak bulunur. (33) den;

$$\vec{T}' \wedge \vec{T}'' = D\vec{T} + \vec{T} \wedge \vec{T}'$$

yazılabileceği için (31) gereğince;

$$\vec{t} = \vec{T}' , \quad \vec{n} = \frac{1}{K}(-\vec{T} + D\vec{T} \wedge \vec{T}'), \quad \vec{b} = \frac{1}{K}(D\vec{T} + \vec{T} \wedge \vec{T}') \qquad (34)$$

elde edilir. Buradan da:

$$\kappa^2 = 1+D^2 = \vec{T}''^2 \tag{35}$$

olarak bulunur. Öte yandan;

$$\tau = \frac{(\vec{T}', \vec{T}'', \vec{T}''')}{\kappa^2} = \frac{(\vec{T}', \vec{T}'', \vec{T}''')}{1+D^2}$$

olduğunu biliyoruz. $\vec{T}'''$ için ;

$$\vec{T}''' = A.\vec{T}+B.\vec{T}'+c.\vec{T} \wedge \vec{T}'$$

yazarak; (27) ye göre;

$$\vec{T}.\vec{T}''' = 0$$

ve (32) ye göre de;

$$D' = (\vec{T}, \vec{T}', \vec{T}''')$$

olduğundan;

$$\vec{T}''' = B.\vec{T}'+D'\vec{T} \wedge \vec{T}' \tag{36}$$

buluruz. $\vec{T}'''$ nün bu değeri ile;

$$(\vec{T}', \vec{T}'', \vec{T}''') = D'$$

sonucunu elde ederiz. O halde;

$$\tau = \frac{D'}{1+D^2} \tag{37}$$

olur. Öte yandan (29) ve (33) den;

$$\frac{\vec{r}\,'.\vec{T}''}{\beta} = (\vec{T}, \vec{T}', \vec{T}'') = D \tag{38}$$

elde ederiz ki, bu sonuç $\frac{\vec{r}\,'.\vec{T}''}{\beta}$ nın geometrik anlamını içerir.

Gerçekten:

i) Yüzeyin doğrultmankonisini belirten $\vec{T}(v)$ birim küresel eğrinin eğrilik ve burulması;

$$K^2 = 1+D^2 \qquad \text{ve} \qquad \tau = \frac{D'}{1+D^2}$$

idi.

O halde; "yüzeyin doğrultman konisinin belirmesi için gerek ve yeter şart D nin verilmesidir".

Yani (38) gereğince, $\left(\frac{\vec{r}\,'.\vec{T}''}{\beta}\right)$ büyüklüğü (yani D) yüzeyin doğrultman konisini belirler.

ii) $D = 0$ ise; $\tau = 0$ ve $\kappa = 1$ dir.

Ayrıca; $\tau = 0$ dan $\vec{b} = sbt$ ve $\vec{b} = \frac{1}{\kappa}(D\vec{T} + \vec{T} \wedge \vec{T}')$

den; $\vec{b}.\vec{T} = 0$ olup; $\vec{b} \perp \vec{T}$ elde edilir.

$\vec{b}$ sabit olduğundan, $\vec{T}(v)$ yer vektörleri sabit bir vektöre daima dik kalacakları için, bir düzlem içinde kalırlar. Yani doğrultman koni bir düzleme bozulur. Dolayısıyla birim küresel eğri de kürenin bir büyük çemberi olur.

iii) $D = sbt \neq 0$ ise $\tau = 0$ $(\vec{b} = sbt)$,

$\kappa = sbt$ ve dolayısıyla;

$$\vec{T}.\vec{b} = \frac{D}{\kappa} = sbt = \cos\varphi$$

olur.

Bu durumda $\vec{T}(v)$ yer vektörleri sabit bir doğru ile sabit açı yapacaklardır. Dolayısıyla doğrultman koni bir "dönel koni" ye, $\vec{T}(v)$ eğrisi de birim kürenin küçük çemberlerinden birine bozulur.

I.7. KUVADRİK YÜZEYLER

Şimdi (26) büyüklüklerinin ve (38) sonucunun bir uygulaması olarak kuvadrik yüzeyleri belirtelim:

Bilindiği gibi kuvadrikler doğuranları reel ya da değil iki kat doğrusal (asimptotikleri geodezik olan) yüzeyler olarak tanımlanırlar. Burada reel doğuranlı kuvadrikler, yani sadece bir parçalı hiperboloidler ile hiperbolik paraboloidler sözkonusu olacaktır.

Şimdi bir doğuran ailesini $v = sbt$ ve dik yörüngelerini de $u = sbt$ koordinat eğrileri olarak alalım ($F = 0$).

İkinci doğuran ailesinin $v = sbt$ doğuran ailesi ile yaptığı açıyı φ ile gösterelim.

Buna göre;

$$\vec{x}(u,v) = \vec{r}(v)+u.\vec{T}(v)$$

$$\{\vec{T}^2 = \vec{T}'^2 = 1, \quad \vec{r}'^2 = \beta^2+\sigma^2, \quad \vec{r}'.\vec{T} = 0, \quad \vec{r}'.\vec{T}' = -\sigma\}$$

doğrusal yüzeyinin kuvadrik olması için gerek ve yeter koşullar:

$$K_{n\varphi} = 0 \quad , \quad K_{g\varphi} = 0 \tag{39}$$

olacaktır.

1-) (26) büyüklükleri gözönüne alınarak;

$$K_{n\varphi} = \frac{2M}{g} \operatorname{Cos}\varphi . \operatorname{Sin}\varphi + \frac{N}{G} \operatorname{Sin}^2\varphi = 0$$

bulunur. Buradan da ;

$$\frac{2M}{g} \operatorname{Cotg}\varphi + \frac{N}{G} = 0$$

olur.

$$\operatorname{Cotg}\varphi \equiv h \quad , \quad u-\sigma = x \tag{40}$$

dersek ve (26) gözönüne alınırsa;

$$h = \frac{1}{2\beta g} \left[DG + \beta' x + \beta\sigma'\right] \tag{41}$$

olarak bulunur.

Bu sonuç doğrusal yüzeyin asimptotikleri arasındaki φ açısının β, σ , D cinsinden olan ifadesinden ibarettir.

2-) Şimdi ikinci koşulu ifade edelim:

Önce $v = sbt$ ile φ açısı yapan bir eğrinin geodezik eğriliğini bulalım:

$$K_g = (\vec{x}' \ , \vec{x}'', \vec{N})$$

olduğunu biliyoruz. Buradaki türevler eğrinin yay uzunluğuna göredir.

P(u,v) nokta fonksiyonunun v = sbt ve u = sbt dik koordinat çizgilerinin yay uzunluklarına göre alınan türevlerini P_1, P_2 ile gösterirsek ($P_1 = \frac{P_u}{e}$, $P_2 = \frac{P_v}{g}$) v = sbt ile φ açısı yapan bir eğrinin yayına göre alınan türevin;

$$P_\varphi = \frac{dP}{ds} = P_1 \mathrm{Cos}\varphi + P_2 \mathrm{Sin}\varphi$$

şeklinde hesaplanacağı bilinmektedir. Buna göre;

$$\vec{x}' = \vec{x}_1 . \mathrm{Cos}\varphi + \vec{x}_2 . \mathrm{Sin}\varphi$$

olacaktır. Buradan;

$$\vec{x}'' = [\vec{x}_{11} . \mathrm{Cos}\varphi - \varphi_1 \mathrm{Sin}\varphi \vec{x}_1 + \vec{x}_{21} \mathrm{Sin}\varphi + \varphi_1 \mathrm{Cos}\varphi \vec{x}_2] . \mathrm{Cos}\varphi +$$

$$+ [\vec{x}_{12} . \mathrm{Cos}\varphi - \varphi_2 \mathrm{Sin}\varphi \vec{x}_1 + \vec{x}_{22} \mathrm{Sin}\varphi + \varphi_2 \mathrm{Cos}\varphi \vec{x}_2] . \mathrm{Sin}\varphi \qquad (42)$$

şeklinde hesaplanır.

Koordinat çizgilerinin geodezik eğrilikleri, normal eğrilikleri ve geodezik burulmaları sırasıyla:

$$-p, \ \bar{p} \ ; \ k \ , \ \bar{k} \ ; \ t, \ -t \ ,$$

$$(p = \frac{e_v}{e.g} \ , \ \bar{p} = \frac{g_u}{e.g} \ , \ k = \frac{L}{E} \ , \ \bar{k} = \frac{N}{G}, \ t = \frac{M}{eg})$$

olduğuna göre, bu dik sistemde;

$$\vec{x}_{12} = \bar{p}\,.\vec{x}_2 + t.\vec{N}$$

$$\vec{x}_{21} = p.\vec{x}_1 + t.\vec{N}$$

$$\vec{x}_{11} = -p.\vec{x}_2 + k.\vec{N} \qquad (43)$$

$$\vec{x}_{22} = -\bar{p}.\vec{x}_1 + \bar{k}.\vec{N}$$

türev formüllerinin geçerli olduğu da bilinmektedir. Bunları yerine yazarsak ve ;

$$\vec{x}' \wedge \vec{x}''.\vec{N}$$

ifadesini hesaplarsak sonuçta;

$$K_{g\varphi} = \vec{x}' \wedge \vec{x}''.\vec{N} = (\varphi_1 - p).\mathrm{Cos}\varphi + (\varphi_2 + \bar{p}).\mathrm{Sin}\varphi \qquad (44)$$

elde edilir.

$$K_{g\varphi} = 0$$

yazılır ve (40) tanımı kullanılırsa;

$$h_1 = -\frac{\varphi_1}{\mathrm{Sin}^2\varphi}, \qquad h_2 = -\frac{\varphi_2}{\mathrm{Sin}^2\varphi}$$

olduğundan, önce;

$$h(-h_1 \mathrm{Sin}^2\varphi - p) + (-h_2 \mathrm{Sin}^2\varphi + \bar{p}\ ) = 0$$

sonra da $\mathrm{Sin}^2\varphi$ ile böler ve ;

$$h_1 = \frac{h_u}{e} \quad , \qquad h_2 = \frac{h_v}{g}$$

yazarsak sonuçta;

$$hh_u + \frac{h_v}{g} + (1+h^2)(hp-\bar{p}) = 0 \tag{45}$$

buluruz.

v = sbt geodezik olduğundan $p = 0$ dır.

$\bar{p}$ ise ; (26) büyüklükleri ile;

$$\bar{p} = \frac{g_u}{e.g} = \frac{x}{G}$$

olarak bulunacak ve (45) koşulu;

$$hh_u - \frac{x}{G}(1+h^2) + \frac{h_v}{g} = 0 \tag{45)'$$

şeklinde ifade edilebilecektir.

1. ve 2. koşullar birlikte sağlanacağına göre, 1. koşulda bulunan h değerinin 2. koşulda konması gerekecektir.

Şimdi bu işlemi yapacağız:

(41) den u ve v ye göre türev alarak;

$$h_u = \frac{Dx}{2\beta g} + \frac{\beta' g^2 - \beta' x^2}{2\beta g^3} - \frac{\sigma' x}{2g^3} \qquad (46)$$

ve ;

$$h_v = \frac{D' g}{2\beta} - \frac{D\sigma' x}{2\beta g} + \frac{D\beta'}{2g} - \frac{\beta' D g}{2\beta^2}$$

$$+ \frac{\beta'' x}{2\beta g} - \frac{\beta' \sigma'}{2\beta g} - \frac{\beta'^2 x}{2\beta^2 g} + \frac{\sigma' \beta' x^2}{2\beta g^3} - \frac{\beta'^2 x}{2g^3} \qquad (47)$$

$$+ \frac{\sigma''}{2g} + \frac{\sigma'^2 x}{2g^3} - \frac{\sigma' \beta \beta'}{2g^3}$$

bulunacaktır. (41), (46), (47) sonuçları (45)′ de konursa, x e göre özdeş olarak sağlanması gereken;

$$x^4 \left[-3D\beta' - 2D'\beta\right] + x^3 \left[-4\beta^2 - 4D\sigma'\beta - 3\beta'^2 + 2\beta\beta''\right]$$

$$+ x^2 \left[-3\beta\beta'\sigma' - 2D\beta'\beta^2 + 4D'\beta^3 + 2\sigma''\beta^2\right]$$

$$+ x \left[-4D\sigma'\beta^3 - 3\beta'^2\beta^2 - 4\beta^4 + 2\beta''\beta^3\right] \qquad (48)$$

$$+ \left[-3\sigma'\beta'\beta^3 + 2D'\beta^5 + D\beta'\beta^4 + 2\sigma''\beta^4\right] \equiv 0$$

bağıntısını buluruz.

O halde, sonuç olarak (48) deki 5 katsayının sıfır olması koşullarını elde ederiz. Çok kolay bir inceleme bu 5 koşulun bağımsız olmadığını gösterir. Bunlardan elde edilecek bağımsız 3 koşulun ise;

$$2\beta D'-3\beta' D = 0$$

$$4\beta\beta' D - 3\beta'\sigma'+2\beta\sigma'' = 0 \tag{49}$$

$$4\beta\sigma' D+3\beta'^{2}+4\beta^{2}-2\beta\beta'' = 0$$

şeklinde ifade edilebileceği de hemen görülür.

Tersine olarak bu 3 koşul sağlanırsa, (45)' yani $K_{g\varphi} = 0$ koşulu da sağlanacağı için, (41) gereğince ikinci asimptotik ailesi olan aile de geodezik olur, yani doğrulardan oluşur. Böylece; (26) büyüklükleri ile tanımlanmış olan $\left(\frac{\vec{r}'.\vec{T}''}{\beta} \equiv D \right)$ bir doğrusal yüzeyin kuvadrik olması için gerek ve yeter koşullar, bu üç koşul olarak elde edilmiş olur.

BÖLÜM II

DOĞRUSAL YÜZEYLERİN İZOMETRİK TASVİRLERİ

II.I. DOĞURANLARI KORUYAN İZOMETRİK TASVİR

Genel bir S yüzeyinin bir asimptotik ailesinin S nin izometrik tasviri olan S^o yüzeyi üzerinde de asimptotik kalması koşulunu arayalım.

Korunan asimptotik ailesini $v = $ sbt., dik yörüngelerini de $u = $ sbt. koordinat eğrileri olarak alırsak;

$$E = E^o \quad ; \quad G = G^o \quad ; \quad F = F^o = 0 \tag{50}$$

olacaktır. Ayrıca;

$p, \bar{p}$: koordinat eğrilerinin geodezik eğrilikleri,

$k, \bar{k}$: koordinat eğrilerinin normal eğrilikleri,

$t, \bar{t} = -t$: koordinat eğrilerinin geodezik burulması,

olmak üzere;

$$k = k^o = 0 \;, \quad t = \varepsilon t^o \;, \quad p = p^o, \quad \bar{p} = \bar{p}^o \tag{51}$$

(burada $\varepsilon = \pm 1$ dir)

olduğu kolayca görülebilir.

P herhangi bir nokta fonksiyonu, j de koordinat eğrilerinin yay uzunluğuna göre alınan türevi göstermek üzere (parametreler her iki yüzey üzerinde de aynı seçildiğinden);

$$P_j = P_{j^o}$$

dır. Bu koşullar altında;

$$k_2 = p(\bar{k}-k)+t_1+2\bar{p}t$$

Mainardi-Codazzi denklemi S ve S^o yüzeyleri için yazılırsa:

$$p.\bar{k}+t_1+2\bar{p}t = 0$$

$$(52)$$

$$p\bar{k}^o+\varepsilon t_1+2\varepsilon\bar{p}t = 0$$

ve buradan da ;

$$p(\bar{k}-\varepsilon\bar{k}^o) = 0 \qquad (52)'$$

elde edilir.

İlk hal olarak;

$$\bar{k}-\varepsilon\bar{k}^o = 0$$

ise, yani;

$$\bar{k} = \varepsilon \bar{k}^o$$

ise, S ve S^o yüzeyleri aynı veya simetrik yüzeyler olur.

Bu hali bir yana bırakırsak;

$$p = 0$$

buluruz. Bu ise asimptotik ailesinin aynı zamanda geodezik olacağını yani doğrulardan oluşacağını gösterir. Böylece şu sonuca varmış oluyoruz:

Teorem:

Bir yüzeyin izometrik olarak tasvirinde bir asimptotik ailesinin korunması için yüzeyin doğrusal bir yüzey olması gerekir. Şimdi bu sonucun tersini de içeren aşağıdaki teoremin doğru olduğunu göstereceğiz.

Teorem:

Bir S doğrusal yüzeyi doğuranlar karşılıklı gelmek koşulu ile doğrultman konisi keyfi olarak seçilebilecek olan bir S^o doğrusal yüzeyi üzerine izometrik olarak tasvir olunabilir.

Gerçekten; S ve S^o üzerinde doğuranları $v = sbt.$ ve dik yörüngelerini de $u = sbt.$ koordinat çizgileri olarak alırsak, daha önce bir S doğrusal yüzeyi için bulduğumuz (26) büyüklükleri geçerli olacaktır. Bu koşullar altında S^o için yazılacak olan 2. Mainardi-Codazzi denkleminden integral alarak;

$$\bar{k}^{o} = \frac{1}{g}\{c(v) + \frac{\beta'(u-\sigma)}{G} + \frac{\beta\sigma'}{G}\} \quad c(v):\text{keyfi} \quad (53)$$

sonucunu buluruz.

$$\bar{k}^{o} = \frac{N^{o}}{G}$$

olduğundan S^{o} yüzeyinin büyüklükleri tamamen belirmiş olacaktır.

Şimdi S^{o} doğrusal yüzeyinin doğrultman eğrisini $\vec{r}^{o}(v)$, doğuranların birim vektörünü de $\vec{T}^{o}(v)$ ile gösterelim.

O halde;

$$\vec{T}^{o2} = 1 \;, \quad \vec{T}^{o'2} = 1, \quad \vec{r}^{o'2} = \beta^{2} + \sigma^{2} \;, \quad \vec{r}^{o'} . \vec{T}^{o'} = -\sigma \;,$$

$$\vec{r}^{o'} . \vec{T}^{o} = 0 \qquad (54)$$

olacaktır.

S^{o} doğrusal yüzeyini belirtebilmek için $\vec{r}^{o}(v)$ doğrultman eğrisini ve $\vec{T}^{o}$ doğuranlarını belirtmek gerektiğine göre (54) koşullarını sağlayan bir $\vec{r}^{o}$, $\vec{T}^{o}$ çifti oluşturmak isteyelim. $\vec{T}^{o}(v)$, $\vec{T}^{o'}(v)$, $\vec{T}^{o} \wedge \vec{T}^{o'}$ lineer bağımsız olduğundan;

$$\vec{r}^{\,o\prime} = A(v).\vec{T}^{o}+B(v).\vec{T}^{o\prime}+C(v).\vec{T}^{o} \wedge \vec{T}^{o\prime}$$

diyelim. Buradan (54) gereğince;

$$A(v) = \vec{T}^{o}.\vec{r}^{\,o\prime} = 0$$

$$B(v) = \vec{r}^{\,o\prime}.\vec{T}^{o\prime} = -\sigma$$

$$C(v) = \vec{r}^{\,o\prime}.(\vec{T}^{o} \wedge \vec{T}^{o\prime}) = \beta$$

bulunur. O hälde;

$$\vec{r}^{\,o\prime} = -\sigma(v)\vec{T}^{o\prime}+\beta(v)\vec{T}^{o}(v) \wedge \vec{T}^{o\prime}(v) \qquad (55)$$

dır.

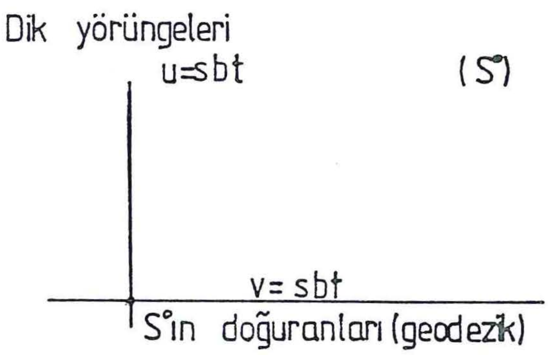
O halde birim kürenin $\vec{T}^{o}(v)$ eğrisi, v eğrinin yay uzunluğunu göstermek üzere,keyfi olarak seçilirse (yani S^{o} in doğrultman konisi keyfi seçilirse) β,σ bilindiğinden $\vec{r}^{\,o}(v)$ doğrultman eğrisi ve dolayısıyla S^{o} yüzeyi(55) denkleminden integral alarak elde edilecektir.

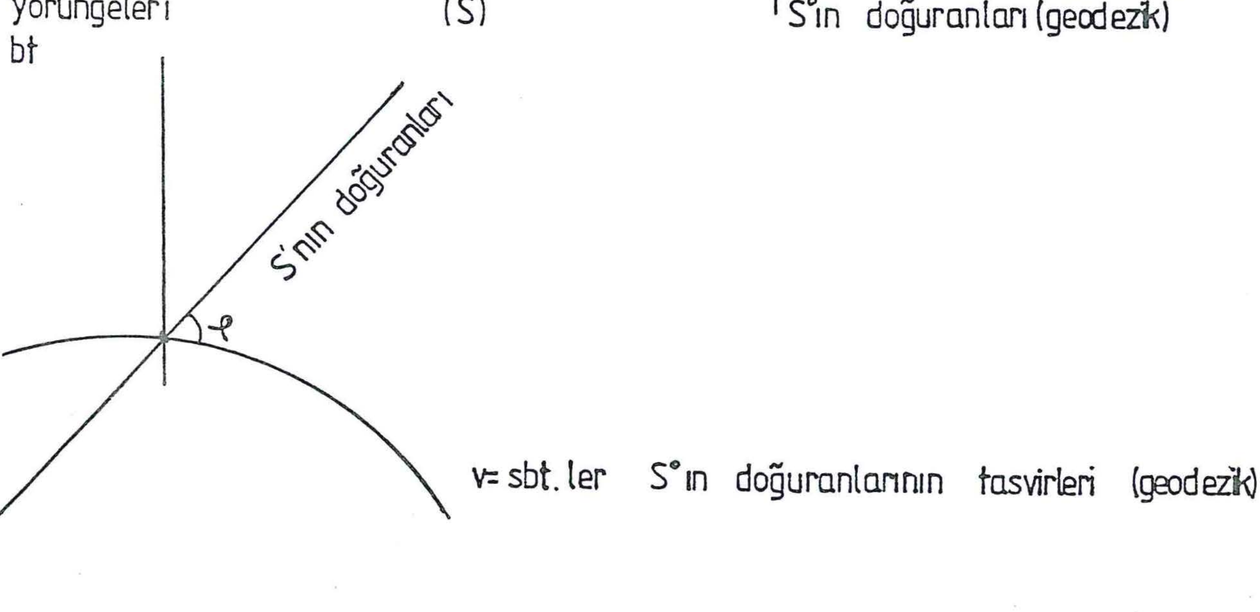
II.2. DOĞURANLARI KORUMAYAN İZOMETRİK TASVİR

Şimdi doğrusal yüzeylerin birbirine, doğuranları doğrular olarak bırakmayan eğrilere dönüştüren bir izometrik tasvir ile tasvir edilip edilemeyeceğini araştıracağız.

S^o doğrusal yüzeyinin S doğrusal yüzeyi üzerine izometrik olarak tasvir edildiğini ve bu tasvirde doğuranların birbirine karşılık gelmediğini düşünelim.

S^o ın doğuranlarının S üzerindeki tasvirlerini $v = sbt.$, dik yörüngelerini de $u = sbt.$ koordinat çizgileri olarak seçelim. S nin doğuranlarının $v = sbt.$ ile yaptığı açıyı φ ile gösterelim. Bir geodezik ailesinin izometrik tasviri olduğu için $v = sbt.$ lerin geodezik olacağı (yani $p = 0$) doğaldır.





Buna göre koşullarımızı:

$$E = E^o = 1 \;,\quad F = F^o = 0, \quad G = G^o = (u-\sigma)^2+\beta^2 \;,$$

$$P = 0 \quad , \quad K_{g\varphi} = K_{n\varphi} = 0 \quad , \quad \beta . \mathrm{Sin}2\varphi \neq 0 \tag{56}$$

şeklinde yazabiliriz.

(44) de $K_{g\varphi}$ için;

$$K_{g\varphi} = (\varphi_1 - p)\mathrm{Cos}\varphi + (\varphi_2 + \bar{p})\mathrm{Sin}\varphi$$

bulmuştuk. $K_{n\varphi}$ ise, $K_n = \vec{x}''.\vec{N}$ olduğu için $\vec{x}''$ nün (42) de bulunan değerinde (43) kullanılır ve bulunan sonuç $\vec{N}$ ile skaler çarpılarak;

$$K_{n\varphi} = k.\mathrm{Cos}^2\varphi + \bar{k}\mathrm{Sin}^2\varphi + 2t\mathrm{Sin}\varphi\mathrm{Cos}\varphi$$

$$K_{n\varphi} = k + \bar{k}tg^2\varphi + 2t.tg\varphi \tag{57}$$

olarak elde edilir.

$$K_{g\varphi} = 0$$

dan; (26) büyüklükleri ve 1,2 türevlerinin tanımları gözönünde bulundurularak;

$$G\varphi_u \mathrm{Cos}\varphi + [(u-\sigma)+g\varphi_v]\mathrm{Sin}\varphi = 0 \qquad (57)'$$

bulunur. Ayrıca yine (26) gereğince

$$K = -\frac{\beta^2}{G^2} \qquad \text{ve} \qquad K = k.\bar{k}-t^2$$

olduğu için;

$$k\bar{k}-t^2 = -\frac{\beta^2}{G^2} \qquad (58)$$

yazılabilecektir. (57) den $K_{n\varphi} = 0$ yazılır ve (58) gözönünde bulundurulursa;

$$\bar{k} = \left(\frac{\beta}{G} - t\right)\mathrm{Cotg}\varphi \quad ; \quad k = -\mathrm{tg}\varphi\left(t + \frac{\beta}{G}\right) \qquad (58)'$$

$$(k.\bar{k} \neq 0)$$

bulunur.

Yazmada kısalık amacı ile;

$$h = \mathrm{Cotg}\varphi, \quad u-\sigma = x, \quad x_u = 1, \quad x_v = -\sigma',$$

$$G = x^2+\beta^2, \quad g = \sqrt{x^2+\beta^2}$$

$$g_u = \frac{x}{g} \qquad g_v = \frac{\beta\beta' - \sigma' x}{g}$$

diyelim. Bu deyimlemeye göre (57)' denklemi:

$$gh_v + Ghh_u - x(1+h^2) = 0 \tag{59}$$

şeklini alır. Ayrıca;

$$k_2 = p(\bar{k}-k) + t_1 + 2\bar{p}t$$

$$\bar{k}_1 = \bar{p}(k-\bar{k}) + t_2 + 2pt$$

Mainardi-Codazzi denklemlerinden; sırasıyla;

1. Mainardi-Codazzi denkleminden;

$$A \equiv \frac{\beta'(x^2-\beta^2) + 2x\beta\sigma'}{2\beta G}$$

olmak üzere;

$$t_v + ght_u + \frac{t}{gh}(2xh^2 - gh_v) = \frac{\beta}{G}\left(\frac{h_v}{h} - 2A\right) \tag{60}$$

ve 2. Mainardi-Codazzi denkleminden de;

$$t_v+ght_u+\frac{t}{gh}\left[x(h^2-1)+Ghh_u\right] = \frac{\beta}{G}\left[gh_u-\frac{x}{gh}(h^2-1)\right] \quad (61)$$

elde edilir.

Yukarıda bulduğumuz; (59) denklemi nedeniyle; (60) ve (61) denklemlerinin sol yanları aynıdır. O halde bu denklemlerin sağ yanları da eşit yazılıp,(59) denkleminde kullanılırsa:,

$$h_v = \frac{\dot{x}}{g} + Ah \quad (62)$$

ve bulunan bu değer (59) da yerine konursa;

$$h_u = \frac{x}{G}h-\frac{A}{g} \quad (63)$$

bulunur.

(62) ve (63) denklemleri arasında uygunluk koşulu kullanılarak ϕ yok edilirse; x,β , σ arasında bir özdeşliğe ulaşılabilir. Ancak görüldüğü gibi bu genel yöntem uzun işlemler gerektirir. Bu yüzden her zaman yapıldığı gibi bu işleme girişmeden önce, denklemlerden birinin çözülebilip çözülemeyeceğine bakılır.

Gerçekten burada (63) denkleminin çözümünü; D(v) keyfi bir fonksiyon olmak üzere;

$$h = \frac{\beta'x+\beta\sigma'}{2\beta g} + \frac{D(v)}{2\beta}g \quad (64)$$

olarak elde ederiz.

Artık bu çözümü (62) denkleminde koyarak x, β, σ, D(v) arasında aradığımız özdeşliğe ulaşabileceğimiz açıktır. Nu.1.7. de kuvadrik yüzeyler için yaptığımız işlemlere paralel işlemleri yineleyerek bu özdeşlikten elde edilecek 5 denklemden bağımsız olarak elde edilecek 3 denklem;

$$
\begin{aligned}
&2\beta D'-3\beta' D = 0 \\
&4\beta\beta' D-3\beta'\sigma'+2\beta\sigma'' = 0 \qquad (65) \\
&4\beta\sigma' D-2\beta\beta''+3\beta'^2+4\beta^2 = 0
\end{aligned}
$$

dır.

Görülüyor ki bu bağıntılar daha önce kuvadrik yüzeyleri tanımlayan koşullar olarak elde ettiğimiz bağıntıların aynıdır. O halde S^o doğrusal yüzeyimizin doğuranları korumayan bir izometrik tasvir ile tasvir edildiğini varsaydığımız S yüzeyi bir kuvadriktir ve bu kuvadriğin doğrultman konisini belirten D fonksiyonu (h) da geçen D(v) keyfi fonksiyonudur.

Öte yandan D nin bu değeri ile elde edilen $h = \mathrm{Cotg}\varphi$ nin (64) deki ifadesi φ nin, S yüzeyinin asimptotikleri arasındaki açı olduğunu gösterir.

O halde bu tasvirde v = sbt. S kuvadriğinin ikinci doğuranıdır ve S^o yüzeyinin doğuranları kuvadriğin bu doğuranlar ailesine tasvir olunur.

Şimdi S^o doğrusal yüzeyimize doğuranları korumayan bir izometrik tasvir ile tasvir edildiğini varsaydığımız ikinci bir S' doğrusal yüzeyinin varolduğunu varsayalım. S^o ve S' nün β ve σ fonksiyonlarının aynı olacağını biliyoruz. Yukarıda yaptığımız işlemlerin S' içinde yapıldığını düşünürsek; S' nün de bir $\bar{S}$ kuvadriğine izometrik olarak tasvir edildiğini ve bu tasvirde doğuranların kuvadriğin bir doğuran ailesine tasvir olunduğunu söyleyebiliriz. β ve σ fonksiyonları aynı olduğundan sözkonusu iki S, $\bar{S}$ kuvadriğinin D fonksiyonları da (65) bağıntıları gereğince aynı olacağından S, $\bar{S}$ kuvadrikleri aynı bir kuvadrik olacaktır. Öte yandan S^o ve S' nün izometrik tasvirinde doğuranların korunmadığını varsaydığımız için bunların S kuvadriğine izometrik tasvirinde S^o ın doğuranları S nin bir doğuran ailesine, S' nünkiler ise öteki doğuran ailesine tasvir edilmiş olacaklardır. Böylece şu teoremi elde etmiş oluruz:

Teorem:

İki doğrusal yüzeyin doğuranları korumayan bir izometrik tasvir ile tasvir edilebilmesi için gerek ve yeter koşul bunların aynı bir kuvadriğe, herbirinin doğuranları kuvadriğin birer doğuran ailesine karşılık gelecek şekilde izometrik olarak tasvir edilmeleridir.

II.3. DOĞRUSAL YÜZEY OLMAYAN BİR DÖNEL YÜZEYE İZOMETRİK OLARAK TASVİR OLUNABİLEN DOĞRUSAL YÜZEYLER

Yukarıda bir doğrusal yüzeyin yine bir doğrusal yüzeye;

a-) Doğuranları koruyan

b-) Doğuranları korumayan izometrik tasvirlerini

inceledik.

Bir doğrusal yüzeyin gelişigüzel bir yüzeye izometrik tasvirinin araştırılması ya da aynı anlamda olmak üzere bir doğrusal yüzeye izometrik olarak tasvir edilebilen tüm yüzeylerin belirtilmesi problemi zor bir problemdir.

Burada, bu konuda bir örnek oluşturmak üzere, doğrusal olmayan bir dönel yüzeye izometrik olarak tasvir edilebilen doğrusal yüzeylerden sözedeceğiz.

Bir yüzeyin dönel yüzeye izometrik olarak tasvir edilebilmesi için gerek ve yeter koşulların

$$\Delta_1 K = f(K) \quad ; \quad \Delta_2 K = h(K)$$

olduğunu biliyoruz. Doğrusal yüzeyimizin daha önce bulduğumuz

(26) büyüklüklerini kullanarak önce;

$$\Delta_1 K = f(K)$$

koşulunu ifade edelim.

$$E = 1 \quad , \quad F = 0 \quad , \quad G = (u-\sigma)^2 + \beta^2$$

olduğu için bu koşul;

$$\Delta_1 K = \frac{K_v^2 + GK_u^2}{G} = K_u^2 + \frac{K_v^2}{G} = f(K)$$

şeklinde olacaktır.

$\Delta_1 K = f(K)$ koşulu $K =$ sbt. eğri ailesinin geodezik paralel olmasına eşdeğerdir.

(26) dan $K = -\frac{\beta^2}{G^2}$ olduğunu biliyoruz. Buna göre $K =$ sbt. ailesi ile $\frac{G}{\beta} =$ sbt. ailesinin aynı aile olacağı doğal olduğundan $K =$ sbt. ailesinin geodezik paralel olması için;

$$\left(\frac{G}{\beta}\right)_u^2 + \frac{1}{G}\left(\frac{G}{\beta}\right)_v^2 = f\left(\frac{G}{\beta}\right)$$

olması yeter ve gerektir. O halde:

$$x = u-\sigma \quad ; \quad G = x^2+\beta^2 \quad ; \quad G_u = 2x \quad ;$$

$$G_v = -2\sigma' x+2\beta\beta'$$

$$\left(\frac{G}{\beta}\right)_u = \frac{2x}{\beta}$$

$$\left(\frac{G}{\beta}\right)_v = \frac{(-2\sigma' x+2\beta\beta')\beta-\beta'(x^2+\beta^2)}{\beta^2}$$

$$= \frac{\beta^2\beta'-2\beta\sigma' x-\beta' x^2}{\beta^2}$$

dir.

Görülüyor ki u parametresi yerine ;

$$u = \sigma(v)+\sqrt{\beta(y-\beta)}, \qquad \left(y = \frac{(u-\sigma)^2+\beta^2}{\beta} = \frac{G}{\beta}\right)$$

ile tanımlı y parametresinin alınmasının yararlı olacağı açıktır. O halde;

$$\beta y = x^2+\beta^2 \quad ; \quad x^2 = \beta(y-\beta)$$

olur. Bu değerler ile koşulumuz;

$$\frac{4y(y-\beta)}{\beta} + \frac{1}{\beta^3}\left[\beta'(2\beta y-y)-2\sigma'\sqrt{\beta(y-\beta)}\right]^2 = y.f(y) \qquad (66)$$

şeklini alacaktır. İkinci yan yalnız y nin fonksiyonu ye y, v parametreleri de bağımsız olduğundan, iki yanın y ye göre türevini alırsak:

$$-\frac{4y^2\beta'}{\beta^2} - \frac{3\beta'}{\beta^4}\left[\beta'(2\beta-y)-2\sigma'\sqrt{\beta(y-\beta)}\right]^2$$

$$+\frac{2}{\beta^3}\left[\beta'(2\beta-y)-2\sigma'\sqrt{\beta(y-\beta)}\right].\left[\beta''(2\beta-y)+2\beta'^2\right.$$

$$\left.-2\sigma''\sqrt{\beta(y-\beta)}-\sigma'\beta'\frac{y-2\beta}{\sqrt{\beta(y-\beta)}}\right]= 0 \quad (67)$$

elde edilecektir. Artık (67) denkleminin v ve y ye göre özdeş olarak (yani yüzeyin her noktasında) sağlanması gerekir. Buradan y ye göre yazılacak özdeşliğin bulunması çok uzun hesap gerektirdiğinden her zaman yapıldığı gibi aşağıdaki şekilde hareket edilir:

İki yanın $\sqrt{\beta(y-\beta)}$ ile çarpılıp $y=\beta$ konduğunu düşünürsek;

$$\beta'.\sigma' = 0$$

buluruz.

Önce $\beta' \neq 0$, $\sigma' = 0$ varsayalım:

(67) de $\sigma' = 0$, $y = \beta$ koyarsak;

$$-4\beta^2+\beta'^2+2\beta\beta'' = 0 \tag{68}$$

bulunur.

Şimdi de (67) de $\sigma' = 0$; $y = 0$ koyalım:

Böylece;

$$2\beta\beta''-\beta'^2 = 0 \tag{69}$$

elde edilir ve (69) ve (68) den;

$$\beta'^2 = 0$$

bulunur.

O halde $\beta' = 0$ olmak zorundadır. Son olarak (67) de $\beta' = 0$ konursa;

$$\sigma'.\sigma'' = 0$$

yani

$$\sigma'' = 0$$

bulunur.

O halde;

$$\beta' = 0 \quad , \quad \sigma'' = 0 \tag{70}$$

koşulları elde edilmiş olur. Bu koşulların (66) koşulu için yalnız gerek değil aynı zamanda yeter olduğu açıktır. Çünkü $\beta = sbt$, $\sigma' = sbt$ ise sol yan sadece y nin fonksiyonu olur.

Artık ikinci koşulumuzu gerçeklemek gerekmektedir.

$\Delta_2 K = h(K)$ koşulu $K = sbt$ ailesinin geodezik eğriliğinin kendisi boyunca sabit olmasına eşdeğerdir.

$$\sigma'' = 0 \text{ dan} \quad , \quad \sigma' = -c \quad , \quad \sigma = -cy + c_o$$

($c_o = 0$ alınabilir) olduğundan;

$$x = u + cv$$

olacaktır.

$$\frac{G}{\beta} = \frac{(u+cv)^2 + \beta^2}{\beta} = sbt.$$

ailesi ($\beta = sbt.$ olduğundan) $u+cv = sbt.$ eğri ailesi ile çakışır. O halde $u+cv = sbt.$ ailesi $K = sbt.$ ailesi ile çakışır.

Şimdi;

$$\Delta_2(u+cv) = h(u+cv)$$

koşulunu ifade edelim:

$$\Delta_2\lambda = \frac{1}{\omega}\left[\left(\frac{G\lambda_u - F\lambda_v}{\omega}\right)_u + \left(\frac{E\lambda_v - F\lambda_u}{\omega}\right)_v\right]$$

olduğunu biliyoruz.

$$E = 1, \qquad F = 0, \qquad G = (u+cv)^2 + \beta^2$$

olduğu için;

$$\Delta_2(u+cv) = \frac{1}{g}\left[g_u + \left(\frac{c}{g}\right)_v\right] = \frac{g_u}{g} - \frac{cg_v}{g^3}$$

$$= \frac{u+cv}{G} - \frac{c^2(u+cv)}{G^2} = h(u+cv) \qquad (\beta = \text{sbt.})$$

bulunur. Yani (70) koşulları ile ikinci koşul da sağlanmış olur. O halde şu teoremi ifade edebiliriz:

Teorem:

Bir doğrusal yüzeyin doğrusal olmayan bir dönel yüzeye izometrik olarak tasvir olunabilmesi için gerek ve yeter koşullar (70) koşullarıdır.

Bu sonucu şöyle de ifade edebileceğimiz açıktır:

(70) koşullarını sağlayan ve doğrultman konisi tamamen keyfi seçilebilecek olan her doğrusal yüzey bir dönel yüzeye, izometrik olarak tasvir olunabilir.

YARARLANILAN KAYNAKLAR

I. F.Şemin Diferansiel Geometri II
Marmara Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
441-6,1987

II. W.Blaschke- K. Erim
Diferansiel Geometri Dersleri
İstanbul Üniversitesi Yayını
Nu.433,1949

III. Darboux Leçons sur la théorie générale des surfaces
T.III.Gautier-Villars,
1894

IV. F.Uras Diferansiel Geometri II dersleri,1991,
(Yayın kararı alınmış olan ders notları)

ÖZGEÇMİŞ

Arzu YEMİŞÇİ 22.08.1968 yılında İstanbulda doğmuş, ilk orta ve lise öğrenimini İstanbulda tamamlamıştır. 1985 yılında Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne kaydolmuş, 1989 yılı Haziran döneminde mezun olmuştur. 24.11.1989 tarihinde Y.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölüm asistanlığına aday olarak, 19.1.1991 tarihinde de aynı göreve asaleten atanmıştır. Halen Y.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.